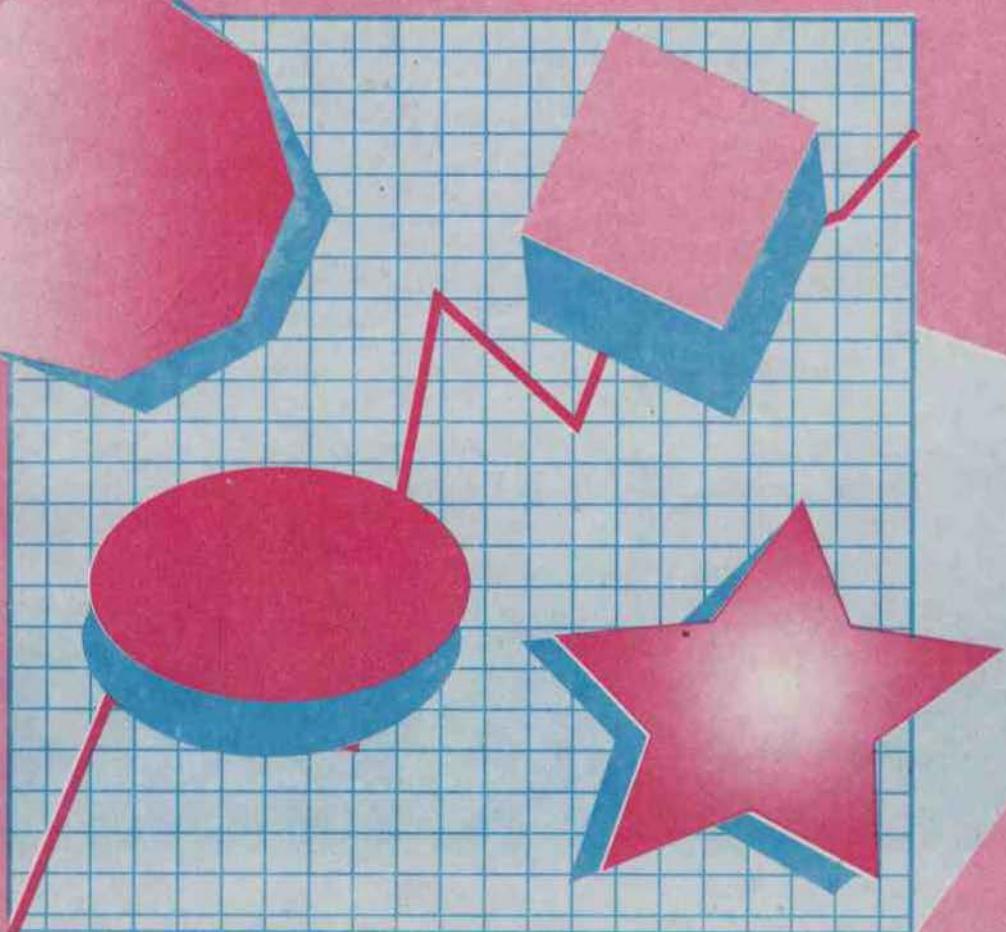


हाले

गणित किताब



कक्षा- आठ

हात्मो गणित

कक्षा ८

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशकः

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर ।

© पाठ्यक्रम विकास केन्द्र र मुद्रक

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र र मुद्रकमा निहित रहेको छ । लिखित स्वीकृतविना यसको पूरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकालन पाइनेछैन ।

प्रथम संस्करण	२०५३
दोश्रो संस्करण	२०६१
पुनर्मुद्रण	२०६२
पुनर्मुद्रण	२०६३
पुनर्मुद्रण	२०६४
पुनर्मुद्रण	२०६५
पुनर्मुद्रण	२०६६
पुनर्मुद्रण	२०६८

मुद्रणः जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लिमिटेड,
सानोठिमी भक्तपुर ।

मूल्य रु ६१।२५।

तपाईँको पुस्तकमा छ पाठ्यविधिसम्बन्धी कुनै त्रुटि फेला परेमा उत्त पुस्तक जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लिमिटेड वा नजिकको साभा प्रकाशनबाट साट्न सक्नुहोनेछ ।

● जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लिमिटेड

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका टिप्पणीहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, सम्पादन तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने टिप्पणीहरूलाई यो केन्द्र स्वागत गर्दछ ।

हास्त्रो भनाइ

शिक्षालाई व्यावहारिक जीवनमा समयसापेक्ष बनाई विद्यार्थीहरूमा राष्ट्रियता, राष्ट्रिय एकता, सार्वभौमिकता तथा प्रजातान्त्रिक मान्यताअनुरूपको भावना विकास गराउने र इमानदारी एवम् नैतिकताजस्ता आधारभूत मानवीय गुणहरूको विकास गराई सामाजिक जीवनयापनका लागि आवश्यक ज्ञान, सीप र अभिवृति हासिल गराउने उद्देश्यअनुसार विद्यालयस्तरका पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तकहरूको विकास गर्ने प्रक्रिया चालू रहिबाएको छ ।

यस पुस्तकमा हास्त्रो दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित क्रियाकलाप, प्रयोग तथा उदाहरण समावेश गर्ने कोसिस गरिएको छ । यसमा समावेश गरिएका अधिकांश क्रियाकलापहरू स्थानीय सामग्रीबाट गर्न, गराउन सकिने खालका छन् । वि.सं. २०५३ मा डा. सन्तोषमान मास्के, हरिनारायण उपाध्याय र सुहमा तुलाधारले लेख्नुभएको पाठ्यपुस्तकलाई डा. सिद्धि कोइराला, भोजराज शर्मा, शालिकराम शुसाल, वरुणप्रसाद वैद्य, इन्द्ररा अर्ज्याल र निर्मला गौतमद्वारा वर्तमान परिमार्जित पाठ्यक्रमबन्नुसार लेख्न तथा परिमार्जन गराई यस रूपमा तयार पारिएको हो । यस कार्यमा गोपालप्रसाद अधिकारी, मुक्ति शण्डारी, ज्ञानी यादव, श्यामप्रसाद आचार्य, दयाराम सिम्बडा, नारायणप्रसाद वार्गले, रामचन्द्र देवकोटा, देवनारायण यादव, डा. शिवराम न्यौपाने, मुकुन्दराज शर्मा र टड्कलाल गैरेको विशेष योगदान रहेको छ । यसको भाषासम्मादन शाम्पुप्रसाद दाहल, विष्णुप्रसाद अधिकारी र लोकप्रकाश पण्डितबाट, लेखाउट डिजाइन हारिप्रसाद ओफा, रविन श्रेष्ठ, सुमा श्रेष्ठ र अनिता मिश्रबाट तथा आवरण डिजाइन टार्जन राईबाट भएको हो । यस पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जनमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक कृतज्ञता प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तक शिक्षणसिकाइ प्रक्रियाको महत्वपूर्ण सहयोगी साधन हो । जिज्ञासु विद्यार्थी र अनुभवी शिक्षकले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित विषयवस्तुलाई विविध स्रोत र साधनको उपयोग गरी अध्ययन एवम् अध्यापन गर्न, गराउन सक्छन् । विभिन्न कारणहरूले विद्यालयहरूमा सहायक पाठ्यसामग्री पर्याप्त उपलब्ध नहुँदा शिक्षणसिकाइ पाठ्यपुस्तकमाथि अत्यधिक रूपमा निर्भर रहेको देखिन्छ । यसैले प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक सकेसम्म स्तरयुक्त बन्न सकोस् भनी प्रशस्त प्रयास गरिएका छन् तापनि यस पुस्तकलाई अझ स्तरयुक्त बनाउन सहयोग हुने सुझावको यो केन्द्र सदाकै निरन्तर अपेक्षा गर्दछ ।

शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

विषयसूची

विषयवस्तु	पृष्ठ
1. समूह	1-6
2. पूर्ण सद्भ्या	7-13
3. वर्गमूल र घनमूल	14-17
4. आनुपातीकरण	18-22
5. आनुपातिक र अनानुपातिक सद्भ्याहरू	23-27
6. अनुपात, समानुपात र प्रतिशत	28-36
7. नाफा र नोकसान	37-39
8. ऐकिक नियम	40-42
9. साधारण व्याज	43-46
10. तथ्याङ्क शास्त्र	47-63
11. बीजीय अभिव्यञ्जकहरू	64-94
12. समीकरण, असमानता र लेखाचित्र	95-108
13. कोणहरू र सामानान्तर रेखाहरू	109-118
14. त्रिभुज	119-122
15. नियमित बहुभुज	123-140
16. अनुरूप र समरूप त्रिभुजहरू	141-149
17. ठोस आकारहरू	150-151
18. त्रिभुज र चतुर्भुजको परिमिति र क्षेत्रफल	152-155
19. वृत्त	156-159
20. बेलना र पिञ्जम	160-166
21. स्थानान्तरण	167-174
22. दिशास्थिति र स्केल ड्रइड	175-178
उत्तरमाला	179-194

1.1 उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरू (Proper and Improper Subsets)

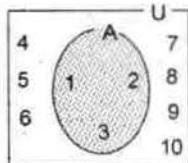
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ एउटा सर्वव्यापक समूह भए, त्यसबाट विभिन्न उपसमूहहरू बनाओ। जस्तै -

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 5\}$$

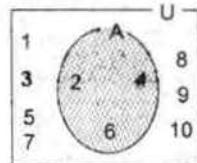
$$D = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

यसमा उपसमूहहरू A, B, C, D मा सर्वव्यापक समूह 'U' का सबै सदस्यहरू छैनन् तर उपसमूह E मा 'U' का सबै सदस्यहरू छन्। उपसमूहहरू A, B, C, D सर्वव्यापक समूह 'U' को उपयुक्त समूह (Proper Subset) हुन् र उपसमूह E, चाहिँ अनुपयुक्त समूह (Improper Subset) हो। साथै उपयुक्त समूहलाई '⊆' सङ्केतले र अनुपयुक्त समूहलाई '⊉' सङ्केतले जनाइन्छ। अर्थात् सर्वव्यापक समूह 'U' र अन्य उपसमूहहरूको सम्बन्धलाई सङ्केतमा लेखा (i) $A \subseteq U$, (ii) $B \subseteq U$, (iii) $C \subseteq U$ र (iv) $D \subseteq U$ (v) $E \subseteq U$ हुन्छ। माथिकै सम्बन्धलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गरी यसप्रकार देखाउन सकिन्छ:

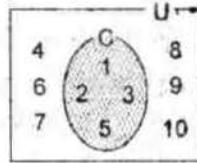
(i)



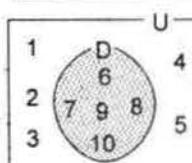
(ii)



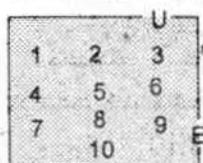
(iii)



(iv)



(v)



यसवाहेक सर्वव्यापक समूहबाट मात्र उपसमूहहरू निर्माण नगरी अन्य समूहहरू जस्तै: A बाट वा अरु त्यसबाट पनि उपसमूहहरू निर्माण गरी माथिकै सम्बन्धहरू स्पष्ट पार्न सकिन्छ।

यसरी कुनै सर्वव्यापक समूह 'U' वा अन्य समूह A, B, C, D आदि बाट उपसमूहहरू बनाउँदा केही मात्र सदस्यहरू लिई बनाइन्छ भने त्यसलाई उपयुक्त समूह र सबै सदस्यहरू लिई बनाइने उपसमूहलाई अनुपयुक्त समूह भनिन्छ।

उदाहरण 1

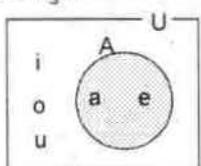
तल दिइएका सर्वव्यापक समूहहरूबाट निर्माण गरिएका विभिन्न उपसमूहहरूमध्ये उपयुक्त र अनुपयुक्त समूहहरू छुट्याई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर।

(क) $U = \{a, e, i, o, u\}$, $A = \{a, e\}$, $B = \{e, o, u\}$, $C = \{a, e, i, o, u\}$

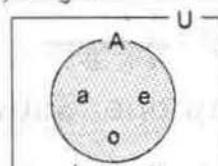
(ख) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $D = \{2, 4, 8, 10\}$

उत्तर:

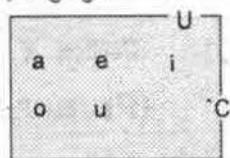
(क) (A) उपयुक्त



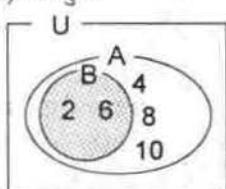
(B) उपयुक्त



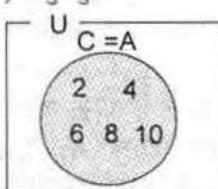
(C) अनुपयुक्त



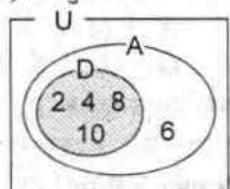
(ख) (B) उपयुक्त



(C) अनुपयुक्त



(D) उपयुक्त



उदाहरण 2

दिइएको सर्वव्यापक समूहबाट उपसमूहहरू निर्माण गरी उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरूको सङ्केतद्वारा देखाऊ।

(क) $U = \{\text{एकदेखि बीससम्मका जोर सङ्ख्याहरू}\}$

(i) $A = \{2 \text{ ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू}\}$

(ii) $B = \{3 \text{ ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू}\}$

(iii) $C = \{4 \text{ ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू}\}$

(ख) $S = \{50 \text{ सम्मका सबै वर्ग सङ्ख्याहरू}\}$

(i) $A = \{2, 4 \text{ र } 6 \text{ को वर्ग सङ्ख्याहरू}\}$

(ii) $B = \{3, 4 \text{ र } 7 \text{ को वर्ग सङ्ख्याहरू}\}$

(iii) $C = \{0 \text{ देखि } 50 \text{ सम्मका सबै वर्ग सङ्ख्याहरू}\}$

उत्तर:

(क) (i) $A \subseteq U$ (ii) $B \subset U$ (iii) $C \subset U$

(ख) (i) $A \subset S$ (ii) $B \subset S$ (iii) $C \subseteq S$

अध्यात्म 1.1

1. यदि $X = \{a, b, c, d\}$ भए, $A = \{b, c, d\}$ र $B = \{d, c, b, a\}$ मध्ये कुनचाहिँ समूह X को उपयुक्त उपसमूह हो ?

2. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ र $C = \{2, 4, 6\}$ भए समूह A को उपयुक्त उपसमूह कुन होला ?

3. तलका समूहहरूको उपयुक्त उपसमूहहरू पत्ता लगाऊ।

(a) $A = \{4, 5\}$ (b) $P = \{a, b\}$ (c) $S = \{2, 3, 4\}$ (d) $B = \{p, q, r\}$

4. यदि $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ भए तल निर्माण गरिएको उपसमूहहरू हेरी उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याई भेनचित्रमा देखाऊ ।
 (i) $E = \{1, 3, 5\}$ (ii) $F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $G = \{3, 5, 7\}$
5. दिइएको सर्वव्यापक समूहबाट उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह निर्माण गरी सङ्केतद्वारा देखाऊ ।
 $M = \{18 \text{ का गुणखण्डहरू}\}$
 (i) $A = \{2 \text{ का गुणखण्डहरू}\}$ (ii) $B = \{18 \text{ लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू}\}$
 (iii) $C = \{3 \text{ का गुणखण्डहरू}\}$ (iv) $D = \{9 \text{ लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू}\}$
6. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ र $C = \{1, 2, 5\}$ छन् भने समूहहरू A र B तथा A र C बीचको सम्बन्ध पता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।
7. $B = \{3 \text{ ले निःशेष भाग जाने } 3 \text{ देखि } 15 \text{ सम्म का पूर्णसङ्ख्याहरू}\}$ दिइएको छ ।
 समूह B बाट दुईओटा उपयुक्त र एउटा अनुपयुक्त समूह बनाऊ । के अनुपयुक्त समूह एउटाभन्दा बढी बनाउन सकिन्दू ?

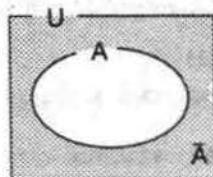
1.2 समूहको पूरक (Complement of a Set)

मानौं $U = \{\text{नेपालमा आउने पर्यटकहरू}\}$ र $A = \{\text{नेपालको हिमाल चढ्ने पर्यटकहरू}\}$
 यहाँ समूह A सर्वव्यापक समूह U को उपसमूह हो । हिमाल नचढ्ने समूह U का सदस्यहरू हुन् तर A का सदस्य हुन सक्दैनन् । यी हिमाल नचढ्ने सदस्यहरूबाट बन्ने समूहलाई समूह A को पूरक समूह भनिन्दू । यस समूहलाई \bar{A} ले जनाइन्दू । संगैको भेनचित्रमा \bar{A} लाई छाया पारेर देखाइएको छ ।

■ के भेनचित्रबाट तलका सम्बन्धहरू लेख्न सक्दौ ?

$$U = A \cup \bar{A} \quad \text{र} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

समूह A को पूरक समूह भनेको समूह A का सदस्यहरूबाहेका सर्वव्यापक समूह U को सदस्यहरूबाट बन्ने समूह हो । यस पूरक समूहलाई \bar{A} ले जनाइन्दू ।



उवाहणि 1

यदि $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ र $A = \{3, 6, 9\}$ छ भने तलका प्रत्येक समूह निर्माण गरी भेनचित्रमा देखाऊ ।

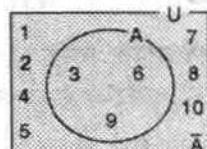
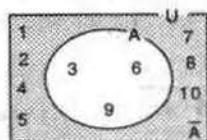
- (क) \bar{A} (ख) $A \cup \bar{A}$ (ग) $A \cap \bar{A}$
 (घ) $\bar{\bar{A}}$

उत्तर:

(क) $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ संगैको चित्रमा छायाँ परेको भागले \bar{A} जनाउँदछ ।

(ख) $A \cup \bar{A} = \{3, 6, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
 $= \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

संगैको चित्रमा छायाँ परेको भागले $A \cup \bar{A}$ जनाउँदछ ।



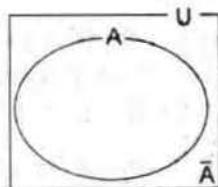
(ग) $A \cap \bar{A} = \{3, 6, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
 $= \emptyset$

चित्रमा $A \cap \bar{A}$ लाई छाया पारेर देखाउन सकिएन किनभने यो खाली समूह हो ।

(घ) (क) बाट $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ ।

त्यसैले \bar{A} समूह \bar{A} मा नपर्ने सर्वव्यापक समूह का सदस्यहरू हुन् । चित्रमा छायाँ परेको भागले \bar{A} जनाउँदछ ।

त्यसैले $\bar{A} = A$ हुन्छ । यहाँ \bar{A} ले \bar{A} को पूरक समूह जनाउँदछ ।

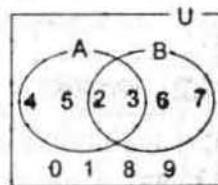


1	U	\bar{A}	5
2	6	9	7
4	3		
8	10		\bar{A}

अध्यात्म 1.2

1. संगीको भेनचित्रबाट निम्नानुसारका समूहहरूका सूची तयार गर ।

- (क) A (ख) B (ग) \bar{A} (घ) \bar{B}
 (ड) $\overline{A \cap B}$ (च) $\overline{A \cap \bar{B}}$ (छ) $\overline{A \cup B}$ (ज) $\overline{A \cup \bar{B}}$
 (फ) U (झ) \bar{U} (ट) $\bar{A} \cup B$ (ठ) $A \cup \bar{B}$

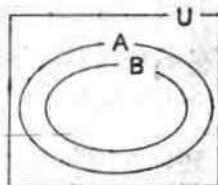


2. प्रश्न नं. 1 को उत्तरको आधारमा निम्नलिखित तथ्यहरू प्रमाणित गर ।

(क) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (ख) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. (क) संगीको भेनचित्रलाई 4 ठाउँमा सार र निम्नलिखित समूहहरूलाई छायाँ पारेर देखाउ ।

- (ि) \overline{A} (ii) \overline{B} (iii) $\overline{A \cap B}$ (iv) $\overline{A \cup B}$
 (ख) कस्तो अवस्थामा $\overline{A \cap B} = \overline{B}$ लेख्न सकिन्दछ ?



4. यदि सर्वव्यापक समूह $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{6$ का गुणनखण्डहरू $\}$

$B = \{8$ का गुणनखण्डहरू $\}$ र $C = \{9$ का गुणनखण्डहरू $\}$ भए ,

(क) समूहहरू U, A, B र C को सम्बन्धलाई भेनचित्रबाट देखाऊ ।

(ख) प्रश्न (क) को आधारमा निम्नानुसारका समूहहरू निर्माण गर ।

- (ि) \overline{A} (ii) \overline{B} (iii) \overline{C} (iv) $\overline{A \cup B}$
 (v) $\overline{B \cup C}$ (vi) $\overline{A \cup C}$ (vii) $\overline{A \cap B}$ (viii) $\overline{A \cap C}$
 (ix) $\overline{B \cap C}$ (x) $\overline{A \cup B \cup C}$ (xi) $\overline{A \cap B \cap C}$

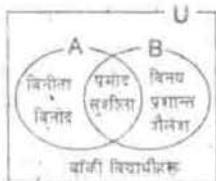
5. यदि सर्वव्यापक समूह $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ र $C = \{2, 3\}$

भए, निम्नानुसारका समूहहरू निर्माण गरी भेनचित्रमा देखाऊ ।

- (ि) \overline{A} (ii) \overline{B} (iii) \overline{C} (iv) $\overline{\overline{A}}$ (v) $\overline{\overline{B}}$ (vi) $\overline{\overline{C}}$

1.3 समूहहरूको फरक (Difference of Sets)

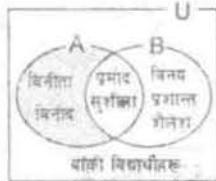
दायाँको भेनचित्र (1) मा समूह U ले कक्षाका वयै विद्यार्थीहरू, समूह A ले व्याइमिन्टन मन पराउने विद्यार्थीहरू र B ले फुटबल मन पराउने विद्यार्थीहरू जनाउँदछ ।



भेन चित्र (1)

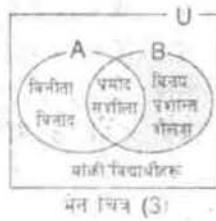
अब तलका तीन समूहहरू हेरौँ:

- (क) भेनचित्र (2) मा छाया परेको भागले व्याइमिन्टन मात्र मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँदछ ।



भेन चित्र (2)

- (ख) भेनचित्र (3) मा छाया परेको भागले फुटबलमात्र मनपराउने विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँदछ ।

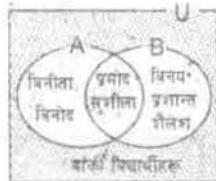


भेन चित्र (3)

- (ग) भेनचित्र (4) मा छाया परेको भागले कुनै पनि खेल मन नपराउने विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँदछ ।

यी तीनओटा समूहहरूलाई गणितीय वाक्यमा कसैरी व्यक्त गर्न सकिन्दछ ?

- भेनचित्र (2) लाई हेरेर छाया पारेको भागलाई शब्दमा व्यक्त गर ।



भेन चित्र (4)

समूह A मा भएका तर समूह B मा नभएका सदस्यहरूको समूहलाई $A-B$ ले जनाइन्दछ र प्रदान A फरक B पढिन्दछ । अथवा A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई जनाउँदछ ।

भेनचित्रमा, $A-B = \{\text{विनिता, विनोद}\}$ र $A \cap \bar{B} = \{\text{विनिता, विनोद}\}$

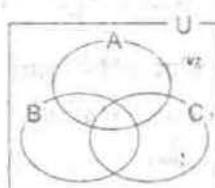
$$\therefore A-B = A \cap \bar{B} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{त्यसरी तै, } B-A = B \cap \bar{A} \text{ र } U - (A \cup B) = \bar{A} \cup \bar{B} \\ (\text{यसलाई तिमी आफैले जाँच ।)}$$

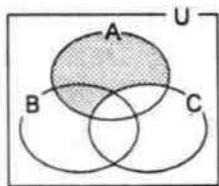
उदाहरण 1

दायाँको चित्रमा तलका समूहहरू छायाँ पारेर देखाउ ।

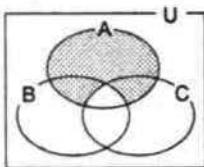
- (क) $A-C$ (ख) $A-(B \cup C)$
(ग) $A-(B \cap C)$ (घ) $(A \cup B)-C$



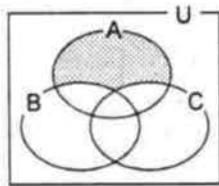
उत्तर: (क) $A - C$



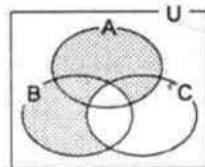
(ग) $A - (B \cap C)$



(ख) $A - (B \cup C)$



(घ) $(A \cup B) - C$



उदाहरण 2

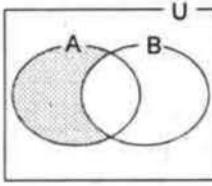
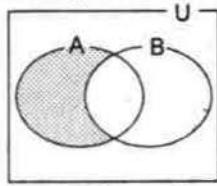
दायाँको भेनचित्रमा तलका समूहहरू छाया पारेर देखाऊ।

(क) $A - B$ लाई छाया पारेर देखाऊ।

(ख) के $A - B = \overline{B} - \overline{A}$ लेखन सकिन्दै ?

उत्तर:

(क) समूह B (दायाँ) बाट समूह A सँग खिटेको भाग हटाएर हेराँ।



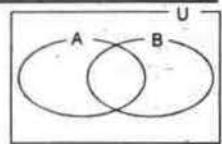
त्यसैले $A - B = \overline{B} - \overline{A}$ लेखन सकिन्दै।

अध्यात्म 1.3

1. दायाँको भेनचित्रमा तलका समूहहरू छाया पारेर देखाऊ।

(क) $A - B$ (ख) $A - \overline{B}$ (ग) $\overline{A} - B$

(घ) $\overline{A} - \overline{B}$ (ड) $A - (A \cap B)$ (च) $(A \cup B) - A$

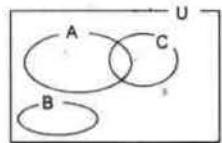


2. प्रश्न नं. 1 का समूहहरूमध्ये कुनकुन समूहहरू बराबर छन् ?

3. दायाँको भेनचित्रमा तलका समूहहरू छाया पारेर देखाऊ।

(क) $A - B$ (ख) $B - C$ (ग) $(A \cup B) - C$

(घ) $A - (B \cup C)$ (ड) $A - (B \cap C)$



4. प्रश्न नं. 3 मा आफैले छाया पारेका भेनचित्रहरू हेरी तलका भनाइ ठीक वा बेठीक छन् छुट्याऊ।

(क) $(B - C) \subset \{(A \cup B) - C\}$ (ख) $\{A - (B \cup C)\} \supset (A - B)$

(ग) $\{(A \cup B) - C\} \subset \{(A - (B \cap C))\}$ (घ) $(A - B) = \{A - (B \cap C)\}$

पूर्ण संख्या (Whole Number)

2.1 द्विआधार संख्याहरूको जोड तथा घटाऊ

द्विआधार पद्धतिमा 0 र 1 गरी जम्मा दुईओटा मात्र अडकहरू प्रयोग गरिन्छ। त्यसैले यसलाई द्विआधार पद्धति भनिएको हो। निम्नलिखित उदाहरणहरूबाट द्विआधार र दशमलव पद्धतिलाई एकअर्कामा परिणत गर्न सकिन्दछ।

उदाहरण 1

दिइएको संख्याहरूलाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर।

(क) 107_{10}

(ख) 135_{10}

उत्तर :

(क) 107_{10}

(ख) 135_{10}

$$\begin{array}{r} 107 \\ \hline 2 | 53 \rightarrow 1 \\ 2 | 26 \rightarrow 1 \\ 2 | 13 \rightarrow 0 \\ 2 | 6 \rightarrow 1 \\ 2 | 3 \rightarrow 0 \\ 2 | 1 \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow 1 \end{array} \quad \text{शेष}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \hline 2 | 67 \rightarrow 1 \\ 2 | 33 \rightarrow 1 \\ 2 | 16 \rightarrow 1 \\ 2 | 8 \rightarrow 0 \\ 2 | 4 \rightarrow 0 \\ 2 | 2 \rightarrow 0 \\ 2 | 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{array} \quad \text{शेष}$$

अथवा $107_{10} = 1101011_2$

अथवा $135_{10} = 10000111_2$

उदाहरण 2

दिइएको संख्याहरूलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गर।

(क) 111_2

(ख) 1010_2

उत्तर:

$$\begin{aligned} (क) 111_2 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ख) 1010_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 0 \\ &= 10 \end{aligned}$$

द्विआधार सड्ख्याहरूको जोड

द्विआधार सड्ख्या पद्धतिमा सड्ख्याहरूको कमीले गर्दा जोडसम्बन्धी आधारभूत तथ्य सम्भन सजिलो छ । दिइएको तालिकामा जोडसम्बन्धी तथ्य दिइएको छ ।

+	0	1
0	0	1
1	1	10

उदाहरण 3

- (क) 11_2 मा 10_2 जोड (ख) 101_2 मा 111_2 जोड

उत्तर : (क) 11_2

$$\begin{array}{r} + \ 10_2 \\ \hline 101 \end{array} \quad (1+1=10_2 \text{ को } 0 \text{ हात लाग्यो } 1)$$

(ख)

$$\begin{array}{r} 11 \\ 101_2 \\ + \ 111_2 \\ \hline 1100_2 \end{array} \quad (1+1=10_2 \text{ को } 0 \text{ हात लाग्यो } 1) \quad (1+1+1=11_2 \text{ को } 1 \text{ हात लाग्यो } 1)$$

द्विआधार सड्ख्याहरूको घटाउ

द्विआधार सड्ख्याहरूको घटाउ तथ्यहरू संगैको तालिकामा हेर । यसलाई तेस्रो पइक्टि र ठाडो पडिक्टको नियममा प्रस्तुत गरिएको छ ।

-	10_2	1	0
0	10_2	1	0
1	1	0	
10_2	0		

उदाहरण 4

- (क) 101_2 बाट 11_2 घटाउ (ख) 110_2 बाट 101_2 घटाउ

उत्तर :

$$\begin{array}{r} (क) \ 101_2 \\ -11_2 \\ \hline 10_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} (ख) \ 110_2 \\ -101_2 \\ \hline 1_2 \end{array} \quad (1 \text{ को स्थानबाट सापट लिँदा}) \quad (10_2 \text{ हुन्दै र } 1 \text{ घटाउँदा } 1 \text{ बाँकी हुन्दै})$$

अध्यात्म 2.1

1. दशमलव पद्धतिमा दिइएको सड्ख्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 405 (ख) 535 (ग) 63 (घ) 1234

2. तलका प्रत्येक द्विआधार सड्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 1110_2 (ख) 11111_2 (ग) 110010_2 (घ) 10101_2

3. तलका द्विआधार सड्ख्याहरूको योगफल निकाल ।

$$\begin{array}{r} (क) \ 101_2 \\ +10_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} (ख) \ 110_2 \\ +1_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} (ग) \ 1001_2 \\ +110_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} (घ) \ 1010_2 \\ +101_2 \\ \hline \end{array}$$

(इ) 101_2	(च) 111_2	(छ) 1010_2	(ज) 101_2
$+ 11_2$	$+ 10_2$	$+ 1011_2$	$+ 1011_2$
(झ) 1011_2	(अ) 1101_2	(ट) 10111_2	(ठ) 10111_2
$+ 101_2$	$+ 101_2$	$+ 1_2$	$+ 10001_2$

4. तलका पञ्चाधार सङ्ख्याहरूको फरक निकाल।

(क) 11_2	(ख) 11_2	(ग) 101_2	(घ) 1011_2
$- 10_2$	$- 1_2$	$- 1_2$	$- 10_2$
(ड) 101_2	(च) 101_2	(छ) 11001_2	(ज) 1000_2
$- 11_2$	$- 10_2$	$- 1011_2$	$- 1_2$
(झ) 1000_2	(अ) 1001_2	(ट) 1001_2	(ठ) 10000_2
$- 10_2$	$- 101_2$	$- 111_2$	$- 1_2$

5. सरल गर।

(क) $110_2 + 101_2$	(ख) $1010_2 + 101_2$
(ग) $101_2 + 100_2 - 10_2$	(घ) $1101_2 - 110_2 + 1001_2$
(ड) $1110_2 - 101_2 + 110_2$	(च) $11_2 + 1011_2 - 1110_2$

2.2 पञ्चाधार सङ्ख्याहरूको जोड तथा घटाउ

पञ्च-आधार पद्धतिमा 0,1,2,3, र 4 गरी जम्मा पाँचओटा मात्र अड्कहरू प्रयोग गरिन्छ। त्यसैले यसलाई पञ्च-आधार पद्धति भनिएको हो। निम्नलिखित उदाहरणहरूबाट पञ्च-आधार पद्धति र दशमलव पद्धतिलाई एकअर्कामा परिणत गर्ने तरिका हेर्नै। पञ्च-आधार सङ्ख्याहरूको जोड र घटाउ सिकाउनु अगाडि पञ्च-आधार र दशमलव पद्धतिका रूपान्तर गर्ने क्रियालाई पुनरावलोकन अभ्यास गर्नै। जस्तै:

उदाहरण 5

दिइएको सङ्ख्यालाई पञ्चाधार पद्धतिमा रूपान्तर गर।

$$(क) 465_{10} \quad (ख) 2504_{10}$$

उत्तर : 465_{10}

$$\begin{array}{r} 465 \\ 5 \boxed{93 \rightarrow 0 \text{ शेष}} \\ 5 \boxed{18 \rightarrow 3} \\ 5 \boxed{3 \rightarrow 3} \\ 0 \rightarrow 3 \end{array}$$

$$\therefore 465_{10} = 3330_5$$

$$\begin{array}{r} 2504_{10} \\ 5 \boxed{500 \rightarrow 4 \text{ शेष}} \\ 5 \boxed{100 \rightarrow 0} \\ 5 \boxed{20 \rightarrow 0} \\ 5 \boxed{4 \rightarrow 0} \end{array}$$

$$010011 \quad 0 \rightarrow 4$$

$$\therefore 2504_{10} = 40004_5$$

001

11+

उदाहरण 6

दिइएको सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 14_5

$$\begin{aligned} \text{उत्तर : } & (क) 14_5 \\ & = 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0 \\ & = 5 + 4 \\ & = 9 \\ \therefore & 14_5 = 9_{10} \end{aligned}$$

(ख) 342_5

$$\begin{aligned} & (ख) 342_5 \\ & = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0 \\ & = 3 \times 25 + 4 \times 5 + 2 \\ & = 75 + 20 + 2 \\ & = 97 \\ \therefore & 342_5 = 97_{10} \end{aligned}$$

उदाहरण 7

दिइएको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 342_5

(ख) 2023_5

उत्तर :

$$\begin{aligned} & (\text{क}) 342_5 = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0 \\ & = 75 + 20 + 2 \\ & = 97_{10} \end{aligned}$$

फेरि 97 लाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्दा

$$\begin{array}{r} 2 \mid 97 \\ 2 \mid 48 \rightarrow 1 \text{ शेष} \\ 2 \mid 24 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 12 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 6 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 3 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 1 \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\therefore 97_{10} = 1100001_2$$

$$\text{अतः } 342_5 = 1100001_2$$

$$\begin{aligned} & (\text{ख}) 2023_5 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\ & = 250 + 0 + 10 + 3 \\ & = 263_{10} \end{aligned}$$

फेरि 263_{10} लाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्दा

$$\begin{array}{r} 2 \mid 263 \\ 2 \mid 131 \rightarrow 1 \\ 2 \mid 65 \rightarrow 1 \\ 2 \mid 32 \rightarrow 1 \\ 2 \mid 16 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 8 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 4 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 2 \rightarrow 0 \\ 2 \mid 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\therefore 263_{10} = 100000111_2$$

$$\text{अतः } 2023_5 = 1100000111_2$$

उदाहरण ४

तल दिइएको द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई पञ्चआधारमा र पञ्चआधारमा दिइएको सङ्ख्यालाई द्विआधारमा परिवर्तन गरे ।

(क) 1011_2

(ख) 423_5

उत्तर:

(क) पहिले दिइएको सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा लग्ने अनि मात्र पञ्च आधारमा रूपान्तर गर्ने

$$\begin{aligned}1011_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\&= 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}\end{aligned}$$

11_{10} लाई पञ्च आधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्दा 21_5 भयो ।

अर्थात् $11_{10} = 21_5$

यसरी $1011_2 = 21_5$ भयो ।

5	11
5	$2 \rightarrow 1$
	$0 \rightarrow 2$

(ख) 423_5 लाई पहिले दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गर्ने

$$\begin{aligned}423_5 &= 4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\&= 100 + 10 + 3 = 113_{10}\end{aligned}$$

113_{10} लाई द्वि-आधार पद्धतिमा परिवर्तन गर्दा -

2	113		0		0
2	$56 \rightarrow 1$		1		1
2	$28 \rightarrow 0$		0		0
2	$14 \rightarrow 0$		0		0
2	$7 \rightarrow 0$		0		0
2	$3 \rightarrow 1$		1		1
2	$1 \rightarrow 1$		1		1
			$0 \rightarrow 1$		

अर्थात् $113_{10} = 1110001_2$

यसरी $423_5 = 1110001_2$ भयो

पञ्चआधार सङ्ख्याहरूको जोड

पञ्चआधार सङ्ख्याहरूको जोडसम्बन्धी आधारभूत तथ्यहरू संगैको तालिकामा दिइएको छ । उक्त तालिकाको अध्ययन गरेर जोड तथ्यहरू सम्भ ।

+	0	1	2	3	4	
0	0	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	10_5	
2	2	3	4	10_5	11_5	
3	3	4	10_5	11_5	12_5	
4	4	10_5	11_5	12_5	13_5	

उदाहरण 9

(क) 23_5 मा 42_5 जोड़।

उत्तर:

हिसाब (क) 23_5 मा 42_5 जोड़ा

$$\begin{array}{r} 42_5 (3+2=10_5 \text{ को } 0 \text{ हात लायो } 1) \\ + 23_5 \\ \hline 120_5 \end{array}$$

(ख) 342_5 मा 134_5 जोड़।

(ख) 342_5 मा 134_5 जोड़ा

$$\begin{array}{r} 342_5 \\ + 134_5 \\ \hline 1031_5 \end{array}$$

माथिको जस्तै क्रमशः $5^0, 5^1$ र
 5^2 को स्थानमा क्रमशः 1, 1 हात लायो।

पञ्चआधार सङ्ख्याहरूका घटाउ

संगीको तालिकामा पञ्च-आधार सङ्ख्याको घटाउसम्बन्धी तालिका दिइएको छ। जसबाट सम्भवेर हिसाब गर।

-	10_5	4	3	2	1	0
0	10_5	4	3	2	1	0
1	4	3	2	1	0	
2	3	2	1	0		
3	2	1	0			
.4	1	0				
10_5	0					

उदाहरण 10

(क) 42_5 बाट 23_5 घटाऊ

उत्तर :

(क) 31_5

- 23_5

(ख) 142_5 बाट 24_5 घटाऊ

14_5 (दिइएको हिसाबमा 2 बाट 3 घटाउन्दा 5^0 को स्थानबाट $10_5 = 5$ सापेट लिँदा 5^0 को स्थानमा

$5+2-3 = 4$ हुन्छ र 5^1 को स्थानमा 3 बाँकी रहन्छ।

(ख) त्यसरी नै (ख) को हिसाब गर्दा यस प्रकार हुन्छ।

31_5

142_5

- 24_5

113_5

अध्यात्र 2•2

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गरे ।
 (क) 201, (ख) 344, (ग) 4201, (घ) 2304,
2. तलका दशमलव पद्धतिका सङ्ख्याहरूलाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तर गरे ।
 (क) 600 (ख) 548 (ग) 726 (घ) 2468
3. तलका सङ्ख्याहरूमध्ये द्विआधार पद्धतिमा रहेकालाई पञ्चआधारमा र पञ्चआधारमा रहेकालाई द्विआधारमा रूपान्तर गरे ।
 (क) 11001, (ख) 3424, (ग) 11100, (घ) 4321,
4. द्विआधार सङ्ख्यामा बदल ।
 (क) 1234, (ख) 1020, (ग) 132, (घ) 32,

5. तल दिइएका पञ्च-आधार सङ्ख्याहरूको योगफल निकाल ।
 (क) 432, (ख) 444, (ग) 314, (घ) 1042,
 $\underline{+ 23}$, $\underline{+ 1}$, $\underline{+ 30}$, $\underline{+ 321}$,
 (इ) 1003, (च) 402, (छ) 1432, (अ) 4132,
 $\underline{+ 321}$, $\underline{+ 213}$, $\underline{+ 4243}$, $\underline{+ 444}$,
 (फ) 3214, (ब्र) 1001, (ट) 3042, (ब) 3214,
 $\underline{+ 3431}$, $\underline{+ 4444}$, $\underline{+ 434}$, $\underline{+ 4243}$,
6. तलका पञ्च-आधार सङ्ख्याहरूको फरक निकाल ।
 (क) 342, (ख) 403, (ग) 333, (घ) 234,
 $\underline{- 211}$, $\underline{- 342}$, $\underline{- 124}$, $\underline{- 144}$,
 (इ) 440, (च) 313, (छ) 312, (अ) 314,
 $\underline{- 123}$, $\underline{- 240}$, $\underline{- 222}$, $\underline{- 234}$,
7. 1001₂ र 4004₃ को योगफल द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा पता लगाउ ।
8. 111011₂ र 123₃ मा कुन ढूँढो छ ? दुवैको अन्तर दशमलव पद्धतिमा पता लगाउ ।

वर्गमूल र घनमूल (Square Root and Cube Root)

3.1 वर्ग र वर्गमूल (Square and Square Root)

तलका केही तथ्यहरू हेरौ :

(क) कुनै एउटा सदृख्यालाई त्यसै सदृख्याले गुणन गर्दा आउने गुणनफललाई वर्ग भनिन्छ ।

$$\text{जस्तै: } 4 \times 4 = 16$$

$\therefore 16, 4$ को वर्ग हो ।

$$\text{त्यसरी नै } 5 \times 5 = 25$$

यहाँ 25, 5 को वर्ग हो ।

(ख) एउटा सदृख्याका दुईओटा उस्तै गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई त्यस सदृख्याको वर्गमूल भनिन्छ ।

जस्तै: 16 को वर्गमूल 4 हुन्छ, किनकि $4 \times 4 = 16$ हुन्छ ।

त्यस्तै 9 को वर्गमूल 3 हुन्छ, किनकि $3 \times 3 = 9$ हुन्छ ।

वर्गमूललाई गणितीय संकेतमा $\sqrt{\quad}$ लेखिन्छ ।

$$\text{अथवा } 64 \text{ को वर्गमूल भन्नाले } \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8 \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1

576 को वर्गमूल निकाल ।

उत्तर:

$$\begin{aligned}\sqrt{576} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 24\end{aligned}$$

यसप्रकार, 576 को वर्गमूल 24 भयो ।

भागविधिवाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका

वर्गमूल निकालन पर्ने सदृख्या धेरै ठूलो भएमा वा यसका गुणनखण्डहरू निकालन कठिन भएमा भाग विधिवाट वर्गमूल निकालिन्छ । कुनै पनि दिइएको सदृख्याको भाग विधिवाट वर्गमूल निकालन तलका चरणहरू पूरा गर्नुपर्ने हुन्छ । दिइएको उदाहरणलाई राम्रोसंग अध्ययन गर ।

1	$\overline{15376}$	124
+1	-1	
22	$\times 53$	
+2	- 44	
244	976	
+4	- 976	
		x

- (क) दिइएको वर्गमूल निकालने सङ्ख्यालाई दायाँतिरबाट जोडा, जोडामा चिह्न लगाउने, जस्तो; 15376 को दायाँतिरबाट पहिलो जोडा 76 भयो ।
- (ख) बायाँतिरबाट बाँकी रहेको जोडा वा एकलो सङ्ख्या लिन (1) लिने र त्यस्तो पूर्णसङ्ख्या लिने जसले त्यसैलाई गुणन गर्दा त्यतिनै वा सोभन्दा कम हुन्छ । यहाँ त्यस्तो पूर्णसङ्ख्या 1 हुन्छ । यो पूर्ण सङ्ख्या 1 लाई भाजक र भाज्य दुवै ठाउँमा लेख्ने ।
- (ग) त्यसले त्यसलाई गुणन गरी अधि जोडा मिलाउदा दायाँतिरबाट बाँकी रहेको सङ्ख्यामा घटाउने । यहाँ $1 \times 1 = 1$ लाई 1 बाट नै घटाउने । त्यस्तै बायाँतिर पनि 1 को तल 1 लेखी जोड्ने $(1+1=2)$ ।
- (घ) माथि (क) अनुसार चिह्न लगाइएको बायाँतिरबाट दोस्रो जोडा अङ्कलाई तल भर्ने । जस्तै; 53, त्यस्तो सङ्ख्या खोज्ने जसले आफैलाई गुणन गर्दा 53 भन्दा बढी नआओस, यहाँ $22 \times 2 = 44$ यसलाई 53को ठीक तल लेख्ने र 53 बाट घटाउने ($53 - 44 = 9$) । बायाँतर्फ 22 मा दुई जोड्ने ($22 + 2 = 24$)
- (ङ) फेरि माथि नम्बर (क) अनुसार जोडा चिह्न लगाइएका सङ्ख्यामध्ये दायाँतिरको अन्तिम जोडा सङ्ख्यालाई 9 को दायाँतर्फ लेख्ने र माथि नम्बर (घ) को प्रक्रिया दोहोच्याउने ।

उदाहरण 2

46656 को वर्गमूल निकाल ।

उत्तर:

2	$\overline{46656}$	216
+2	-4	
41	$\times 66$	
+1	-41	
426	2556	
+6	-2556	
432	x	

$$\therefore \text{दिइएको सङ्ख्याको वर्गमूल} = 216 \quad \text{अथवा, } \sqrt{46656} = 216 \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 3

525625 को वर्गमूल निकाल ।

उत्तर:

7	$\overline{525625}$	725
+7	-49	
142	$\times 356$	
+2	-284	
1445	7225	
+5	-7225	
1450	x	

$$\therefore \text{दिइएको सङ्ख्याको वर्गमूल} = 725 \quad \text{अथवा, } \sqrt{525625} = 725 \text{ हुन्छ ।}$$

अन्यास 3.1

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको गुणनखण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल ।
- | | | | |
|----------|------------|----------|----------|
| (क) 256 | (ख) 625 | (ग) 169 | (घ) 676 |
| (ड) 484 | (च) 3364 | (छ) 1024 | (ज) 5625 |
| (फ) 2025 | (ब्र) 3249 | (ट) 1225 | (ठ) 6561 |
2. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल ।
- | | | | |
|-----------|-------------|------------|------------|
| (क) 7225 | (ख) 15376 | (ग) 181476 | (घ) 63504 |
| (ड) 28224 | (च) 15129 | (छ) 165649 | (ज) 64009 |
| (झ) 11664 | (ब्र) 2916 | (ट) 4489 | (ठ) 7225 |
| (ड) 95481 | (द) 1811716 | (ण) 651249 | (त) 819025 |
| (थ) 15625 | (द) 16384 | (ध) 21025 | (न) 21904 |
3. सरल गर ।
- | | | |
|-----------------------------|--|------------------------------|
| (क) $\sqrt{2^2 \times 3^2}$ | (ख) $\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 4^4}$ | (ग) $\sqrt{3^4 \times 5^4}$ |
| (घ) $\sqrt{3^4 \times 5^2}$ | (ड) $\sqrt[3]{18}$ | (च) $\sqrt{50}$ |
| (छ) $\sqrt{80}$ | (ज) $\sqrt{1008}$ | (झ) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}$ |
| (ञ) $\sqrt{10^2 - 6^2}$ | (ट) $\sqrt{10^2 + 44}$ | (ठ) $\sqrt{8^2 + 6^2}$ |

3.2 घन र घनमूल (Cube and Cube Root)

घन र घनमूलसम्बन्धी स्पष्ट हुन तल दिइएका केही तथ्यहरू हेरौं ।

- (क) कुनै एउटा सङ्ख्यालाई त्यसैले तीनपटक गुणन गर्दा आउने गुणनफललाई त्यस सङ्ख्याको घन भनिन्छ ।
 जस्तै : $4 \times 4 \times 4 = 64$
 यहाँ, 64, 4 को घन हो ।
 त्यस्तै, $3 \times 3 \times 3 = 27$
 यहाँ, 27, 3 को घन हो ।

उदाहरण 4

11 को घन निकाल ।

उत्तर:

$$11 \times 11 \times 11 = 1331$$

यसप्रकार 11 को घन = 1331 भयो ।

- (ख) कुनै एउटा सङ्ख्याका तीनओटा उस्तै गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई त्यस सङ्ख्याको घनमूल भनिन्छ ।

जस्तैः $8 = 2 \times 2 \times 2$

यहाँ, 8 को घनमूल 2 भयी किनकि 2 लाई तीनपटक गुणा गर्दा 8 हुन्छ ।
त्यसै गरी, 64 को घनमूल निकाल्दा,

$$64 = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4 \times 4 \times 4$$

यहाँ 64 को घनमूल 4 भयी ।

घनमूललाई गणितीय सदृकेतमा लेख्दा $\sqrt[3]{}$ लेखिन्दू ।

अर्थात्, 64 को घनमूल $= \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

5832 को घनमूल निकाल ।

उत्तरः यहाँ, 5832 लाई खण्डीकरण गर्दा

$$5832 = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$\sqrt[3]{5832} = 2 \times 3 \times 3$$

$$\sqrt[3]{5832} = 18 ..$$

अन्वयात्मा 3.2

1. तलका सदृश्याहरूको घन निकाल ।

(क) 3 (ख) 9 (ग) 11 (घ) 13

(ड) 72 (च) 181 (छ) 108 (ज) 115

(फ) 143 (त्र) 620 (ट) 700 (ठ) 650

2. तलका सदृश्याहरूको घनमूल निकाल ।

(क) 1728 (ख) 4096 (ग) 9261 (घ) 10648

(ड) 3375 (च) 2744 (छ) 46656 (ज) 91125

(फ) 21952 (त्र) 64000 (ट) 729000 (ठ) 32768000

3. 8 को घनसदृश्या $\times 12$ को वर्ग सदृश्याको योगफल पत्ता लगाउ ।

4. 6 को घनसदृश्या $\times 15$ को वर्ग सदृश्याको योगफल पत्ता लगाउ ।

5. 256 को वर्गमूल $\times 216$ को घनमूलको अन्तर कति होला ?

6. 625 को वर्गमूल $\times 512$ को घनमूलको अन्तर कति होला ?

4.1 आनुपातीकरण (Rationalization)

कुनै भिन्न सदृश्याको हरमा $\sqrt{}$ चिह्न भए, सो भिन्नको अंश र हर दुवैलाई एउटै सदृश्याले गुणन गरी हरवाट $\sqrt{}$ चिह्न हटाउन सकिन्छ । यस प्रक्रियालाई हरको आनुपातीकरण भनिन्छ ।

उदाहरण 1

निम्नलिखित भिन्नहरूको हरलाई आनुपातीकरण गर ।

(क) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(ख) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(ग) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

(घ) $\frac{3}{\sqrt{24}}$

उत्तर :

(क) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

(ख) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$

(ग) $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

(घ) $\frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$

$= \frac{6\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= 2\sqrt{3}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$

अध्याय 4.1

1. निम्नलिखित सदृश्याहरूका हरलाई आनुपातीकरण गर ।

(क) $\frac{4}{\sqrt{7}}$

(ख) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(ग) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(घ) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

(ङ) $\frac{8}{\sqrt{6}}$

(च) $\frac{15}{\sqrt{10}}$

(छ) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

(ज) $\frac{6}{\sqrt{12}}$

4.2 रूढ़ ($\sqrt{}$) चिह्न समावेश भएका जोड र घटाउ

एउटै सदृख्याको वर्गमूल समावेश भएको हिसाबमा तिनीहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको सरलीकरण गर्ने विधिजस्तै गरी जोड वा घटाउ गर्न सकिन्दै।

उदाहरण 2

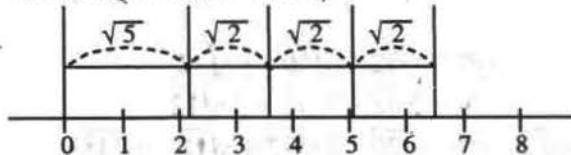
सरल गर।

	(क) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$	(ख) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$	(ग) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$
उत्तर:	(क) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ $= (5+3)\sqrt{2}$ $= 8\sqrt{2}$	(ख) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ $= (1-2)\sqrt{5}$ $= -\sqrt{5}$	(ग) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ $= (4-3)\sqrt{5} + (5-2)\sqrt{2}$ $= \sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

माथिका उदाहरणमा (ग) को उत्तर $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ फेरि सरल गर्न सकिन्दै, तर यो पनि एउटा सदृख्या नै हो।

$$\begin{aligned} \text{तालिकाबाट } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} &= 1.414 \text{ र } \sqrt{5} = 2.236 \text{ भएकाले} \\ &= 2.236 + 3 \times 1.414 \\ &= 6.478 \text{ हुन्दै।} \end{aligned}$$

यसलाई सदृख्या रेखामा जनाउँदा,



उदाहरण 3

सरल गर।

(क) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$	(ख) $3\sqrt{12} - \sqrt{63} - \sqrt{27}$
उत्तर: (क) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$ $= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $= 5\sqrt{2}$	(ख) $3\sqrt{12} - \sqrt{63} - \sqrt{27}$ $= 6\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$ $= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$

उदाहरण 4

सरल गर।

$$(क) 3\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \quad (\ख) \frac{6}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

उत्तर:
$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \\ &= 3\sqrt{2} + \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= 3\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

उत्तर:
$$\begin{aligned} & \frac{6}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - 2\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3} - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

अभ्यास 4.2

1. सरल गर।

- (क) $6\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ (ख) $4\sqrt{5} - \sqrt{5}$ (ग) $-7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$
 (घ) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ (ङ) $-2\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$ (च) $-2\sqrt{10} + 8\sqrt{10}$

2. सरल गर।

- (क) $2\sqrt{10} - 6\sqrt{10} + 7\sqrt{10}$ (ख) $\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 (ग) $3\sqrt{7} - 3 - 2\sqrt{7} + 2$ (घ) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

3. सरल गर।

- (क) $\sqrt{125} - \sqrt{45}$ (ख) $\sqrt{72} + \sqrt{50} + \sqrt{32}$
 (ग) $4\sqrt{7} + \sqrt{49} - 3\sqrt{28}$ (घ) $2\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{12}$
 (इ) $3\sqrt{50} - 7\sqrt{18} + 4\sqrt{8} - 6\sqrt{2}$ (च) $\sqrt{20} - 2\sqrt{32} + \sqrt{18} - 2\sqrt{45}$

4. आवश्यकतानुसार आनुपातीकरण गरी हिसाब गर।

- (क) $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}$ (ख) $\frac{21}{\sqrt{7}} - \frac{5\sqrt{7}}{2}$ (ग) $\sqrt{48} - \frac{6}{\sqrt{3}} + 5\sqrt{3}$
 (घ) $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \frac{12}{\sqrt{3}}$ (इ) $\frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{24}{\sqrt{12}} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{8}$

4.3 सदृश्याहरूको वैज्ञानिक संकेत

(Scientific Notation of the Numbers)

कहिले काही हामीलाई ज्यादै ठूलो र ज्यादै साना सदृश्याहरू लेख्नुपर्ने हुन्छ । जस्तै: सूर्य र पृथ्वी भीचको दूरीलाई मिटरमा लेख्न पर्दा 160000000000 मि. लेख्न्हौं । त्यसैरारी हामी विज्ञान विषय पढ्दा इलेक्ट्रोनको वारेमा चर्चा हुन्छ । एउटा इलेक्ट्रोनको तौल (mass) $0.0000000000000000000000000000000091$ ग्राम लेखिन्छ । यस्ता सदृश्याहरू पढ्न र लेख्न निकै कठिन हुन्छ । त्यसकारण यस्ता सदृश्याहरूलाई सरल रूपमा 0 र 10 अड्क र 10 को घाताड्कको

गुणनको रूपमा लेख्ने गरिन्छ । माथि दिइएको सूर्य र पृथ्वीबीचको दूरीलाई 1.6×10^{11} मिटर र इलेक्ट्रोनको तौललाई 9.1×10^{-31} किलोग्राम लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

310000000 लाई वैज्ञानिक संकेतमा लेख ।

उत्तर:

$$310000000 = 31 \times 10^7 \quad [\text{यहाँ } 31 \text{ पछि } 7 \text{ ओटा } 0 \text{ भएकोले } 10^7 \text{ को रूपमा लेखियो}]$$

$$= 3.1 \times 10^8$$

$$= 3.1 \times 10^8 \quad [\text{यहाँ } 10 \text{ का घाताङ्कहरू } 1 \text{ र } 7 \text{ जोडा } 10^8 \text{ हुन आयो}]$$

छोटो तरिका:

$$310000000 = 3.1 \times 10^8$$

दिइएको संख्यामा देवरेतिरवाट पहिलो अङ्कपछि दशमलव दिने र दशमलवपछिका दायाँतिरका अङ्कहरू गान्ने, जतिओटा अङ्कहरू छन्, त्यतीनै 10 को घाताङ्क हुन्छ ।

उदाहरण 2

वैज्ञानिक संकेतमा लेख ।

$$(क) \quad 3760000 \qquad (ख) \quad 0.00000529$$

उत्तर:

$$(क) \quad 376 \times 10000$$

$$= \frac{376 \times 100}{100} \times 10^4$$

$$= \frac{376}{100} \times 10^2 \times 10^4$$

$$= 3.76 \times 10^6$$

अतः 3760000 को वैज्ञानिक संकेतमा लेख्दा 3.76×10^6 भयो ।

$$(ख) \quad 0.00000529$$

$$= \frac{0.00000529}{1000000} \times 1000000$$

$$= \frac{0.00000529 \times 1000000}{10^6}$$

$$= \frac{5.29}{10^6}$$

$$= 5.29 \times 10^{-6}$$

छोटो तरिका

$$0.00000529 = 5.29 \times 10^{-6}$$

अध्यात्म 4.3

1. तलका सदृश्याहरूलाई वैज्ञानिक सदृकेतमा देखाऊ ।

(क) 6200000	(ख) 380000000	(ग) 32800000
(घ) 360000	(ड) 276	(च) 0.000052
(छ) 0.00000083	(ज) 0.00000099	(झ) 24500
2. वैज्ञानिक सदृकेतमा लेखिएका तलका सदृश्याहरूलाई सामान्य सदृश्या प्रणालीमा देखाऊ ।

(क) 3.8×10^6	(ख) 2.5×10^4	(ग) 3.72×10^7
(घ) 2.5×10^5	(ड) 4.46×10^7	(च) 2.5×10^{-5}
(छ) 3.7×10^{-7}	(ज) 2.8×10^{-9}	(झ) 3.15×10^{-10}
(ञ) 1.4×10^{-5}	(ट) 4.5×10^4	(ठ) 3.2×10^5
3. वैज्ञानिक सदृकेतमा लेखिएका तलका सदृश्याहरूको जोड गर ।

(क) $2.34 \times 10^2 + 2.35 \times 10^2$	(ख) $10^5 + 10^7$
(ग) $10^{-4} + 10^{-6}$	(घ) $2.4 \times 10^2 + 8 \times 10^3$
4. वैज्ञानिक सदृकेतमा लेखिएका तलका सदृश्याहरूको घटाउ गर ।

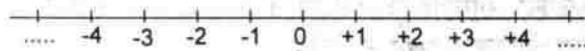
(क) $3.75 \times 10^3 - 3.75 \times 10^2$	(ख) $2.2 \times 10^2 - 3.4 \times 10^2$
(ग) $3.7 \times 10^6 - 2.4 \times 10^4$	(घ) $6.75 \times 10^5 - 6.78 \times 10^6$
5. सरल गर ।

(क) $(3 \times 10^5)(3 \times 10^4)$	(ख) $(7 \times 10^5)(10 \times 10^3)$
(ग) $(7.2 \times 10^7 + 2.3 \times 10^7) - (8 \times 10^2 - 2.5 \times 10^3)$	(घ) $\frac{(6 \times 10^{-3})(7 \times 10^6)}{3 \times 10^{-7}}$
(ङ) $\frac{15000 \times 0.000004}{0.005}$	(च) $\frac{0.348 \times 0.002}{0.00058 \times 0.03}$
(छ) $5.78 \times 10^2 - 6.19 \times 10^{-3} + 5.67 \times 10^{-3}$	
6. तल दिइएका समस्याहरूलाई वैज्ञानिक सदृकेतमा लेख ।

(क) नेपालको हालको अनुमानित जनसदृश्या 25000000 छ ।
(ख) एसिया महादेशको क्षेत्रफल 42700000 वर्ग कि.मि. छ ।
(ग) हाम्रो पृथ्वीबाट मङ्गल ग्रहको दूरी 66600000000 मिटर छ ।
(घ) एक वर्ग मिटर = $\frac{1}{10000}$ वर्ग मि.मि. हुन्छ ।
(ङ) एक वर्ग कि.मि. = $\frac{1}{1000000000000}$ वर्ग मि. हुन्छ ।
(च) चितवनको हालको अनुमानित जनसदृश्या 250000 छ ।
(छ) सगरमाथाको उचाई 884800 सेन्टीमिटर छ ।
(ज) एकजना मानिसको सरदर आयु 525600 घण्टा हुन्छ ।
(झ) एक वर्षमा सरदर 31536000 सेकेन्ड हुन्छ ।
7. हरिको हालको उमेर 26 वर्ष रहेछ । उसको उमेरलाई घन्टामा बदली वैज्ञानिक सदृकेतमा लेख ।
8. आयुषको हालको उमेर 2 वर्ष रहेछ । उसको उमेरलाई मिनेटमा बदली वैज्ञानिक सदृकेतमा लेख ।

आनुपातिक र अनानुपातिक संख्याहरू (Rational and Irrational Numbers)

5.1 आनुपातिक र अनानुपातिक संख्याहरू (Rational and Irrational Numbers)



पूर्णांक (Integers) को समूह जनाउने संख्यारेखावाट कुनै दुईओटा संख्या छान र ती दुई संख्याहरूको जोड, घटाउ र गुणन छुटाउदै गरी हेर। यसरी आउने संख्या पूर्णांक हो वा होइन छुट्याऊ। यसवाट के निष्कर्ष निकाल्यौ?

दुईओटा पूर्णांकहरूको जोड, घटाउ वा गुणन किया गर्दा आउने संख्या पनि पूर्णांक हुन्दै। जस्तै: $2+3=5$, $2-3=-1$, $2\times 3=6$ इत्यादि। यहाँ 5, -1 र 6 पूर्णांक हुन्।

अब कुनै दुईओटा पूर्णांकहरू छान र एकले अर्कोलाई भाग गरी हेर। मानौं ती पूर्णांकहरू 15 र 8 रहेछन्। भाग गर्दा $15 \div 8 = 1\frac{7}{8}$

$8 \div 15 = \frac{8}{15}$ के यी दुई भागफलहरू पूर्णांक हुन्?

यहाँ माथिका भाग क्रियाहरूमा निशेष भाग लागेन। त्यसैले पूर्णांकको समूहभित्र भाग क्रियालाई पनि समावेश गर्न आनुपातिक संख्याहरूको समूह (Set of Rational Numbers) विकास भयो। आनुपातिक संख्याको परिभाषा तल दिइएको छ।

a र b दुईओटा पूर्णांकहरू हुन् र $b \neq 0$ भए $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गरिने संख्याहरूलाई आनुपातिक संख्याहरू (Rational Numbers) भनिन्दू र सो रूपमा व्यक्त गर्न नसक्ने संख्याहरूलाई अनानुपातिक संख्याहरू (Irrational Numbers) भनिन्दू।

आनुपातिक संख्याहरूको समूहलाई Q ले जनाउने चलन छ।

माथि परिभाषामा $b = 1$ हुँदा, $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$ हुन्दै। यसरी a लाई आनुपातिक संख्याहरूको समूह Q को सदस्यको रूपमा जनाइन्दू। अर्थात् Q मा पूर्णांकहरूको समूह Z समावेश भएको छ।

गणितीय वाक्यमा व्यक्त गर्दा $Z \subset Q$ हुन्दै।

आनुपातिक र अनानुपातिक संख्याहरू दशमलवमा व्यक्त गर्दा,

(क) अन्त्य हुने दशमलव : जस्तै, $\frac{2}{5} = 0.4$, $\frac{1}{4} = 0.25$

(ख) अन्त्यहीन र पुनरावृत दशमलव : जस्तै,

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, $\frac{3}{7} = 0.42871\overline{3}$ आदि हुन्दैन।

(ग) अन्त्यहीन र पुनरावृत्त परि नहुने दशमलव। जस्तै -

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

$$\sqrt{5} = 2.23620679 \dots$$

अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्याहरूमध्ये पुनरावृत्त नहुने अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्याहरूलाई अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Irrational Numbers) भनिन्छ ।

यदि प्राकृतिक सङ्ख्या n वर्ग सङ्ख्या नभए \sqrt{n} अनानुपातिक सङ्ख्या हो । फेरि $a\sqrt{n}$ मा a आनुपातिक सङ्ख्या भए परि यो सङ्ख्या अनानुपातिक सङ्ख्या नै हो । आनुपातिक सङ्ख्याले अनानुपातिक सङ्ख्यालाई गुणन या भाग गर्दा अनानुपातिक सङ्ख्या नै बन्दछ ।

उदाहरण 1

तलका सङ्ख्याहरूमध्ये कुनकुन अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ?

- (क) -0.7 (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\sqrt{36}$ (घ) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

उत्तर: (क) $-0.7 = -\frac{7}{10}$ भएकाले यो आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

(ख) $\sqrt{6}$ मा 6 वर्गसङ्ख्यां नभएकाले यो अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

(ग) $\sqrt{36}$ मा 36 वर्गसङ्ख्या भएकाले यो आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

(घ) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ मा 3 वर्गसङ्ख्या नभएकाले यो अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

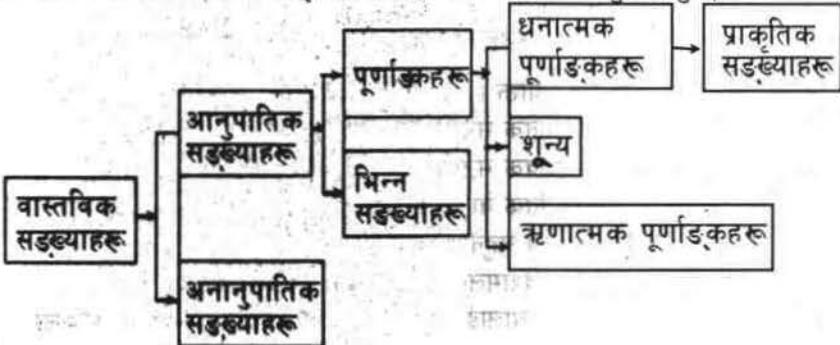
(ड) $5\sqrt{3}$ मा $\sqrt{3}$ अनानुपातिक सङ्ख्या भएकाले यो अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

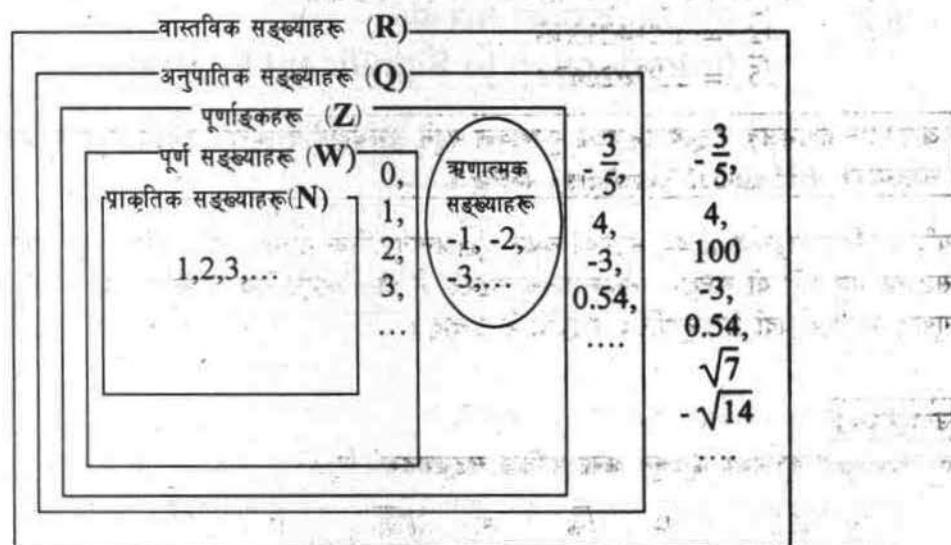
अब हामीले सङ्ख्या रेखाको सबै विन्दुहरूलाई प्रतिनिधित्व गर्नका लागि आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको संग्रेजन समूह लिनुपर्दछ र त्यस्ता सङ्ख्याहरूको समूहलाई वास्तविक सङ्ख्याको समूह (The Set of Real Numbers) भनिन्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्याहरूका समूह र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूका समूहको संयोजन समूहलाई वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह भनिन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्याहरूका समूहलाई R ले जनाउने चलन छ ।

हामीले हालसम्म सिकिसकेका सङ्ख्याहरूलाई व्यक्त गर्दा निम्नानुसार हुन्छ:





दशमलव संख्याहरूमा लेखा,

दशमलव संख्याहरू

अन्त्य हुने दशमलवहरू अन्त्य नहुने दशमलवहरू

आनुपातिक
संख्याहरू

पुनरावृत्त हुने दशमलवहरू

पुनरावृत्त नहुने दशमलवहरू

अनानुपातिक
संख्याहरू

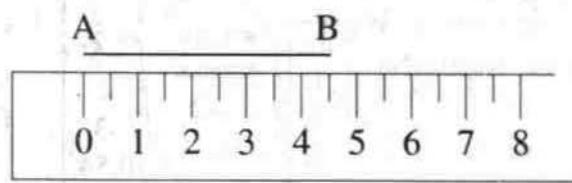
अध्यात्म 5.1

- तलका कुनकुन संख्याहरू अनानुपातिक संख्याहरू हुन् ?

(क) $\frac{22}{7}$ (ख) $-\sqrt{2}$ (ग) $-\sqrt{4}$ (घ) $\sqrt{5}$
 (ङ) $\sqrt{7}$ (च) $-\sqrt{144}$ (छ) $-\frac{3}{5}$ (ज) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- तलका तथ्यहरूमध्ये साँचो र भुटो छुट्टीका ।
 (क) हरेक वास्तविक संख्या आनुपातिक संख्या हो ।
 (ख) हरेक आनुपातिक संख्या वास्तविक संख्या हो ।
 (ग) हरेक वास्तविक संख्या आनुपातिक वा अनानुपातिक संख्या हुन्दै ।
 (घ) हरेक अनानुपातिक संख्या अन्त्य नहुने दशमलव संख्या हो ।
 (ङ) अन्त्य नहुने र पुनरावृत्त भएको दशमलव संख्या अनानुपातिक संख्या हो ।
 (च) हरेक अन्त्य नहुने दशमलव संख्यालाई आनुपातिक संख्यामा रूपान्तर गर्न सकिन्दै ।

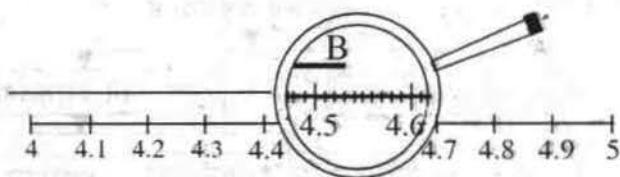
5.2

सार्थ अङ्कहरूको परिचय (Introduction to Significant Figure)



[?] चित्रमा रेखाखण्ड AB को नाप कर्ति छ ?

रेखाखण्ड AB को लम्बाइ 4cm र 5cm को वीचतिर परेको छ । त्यसैले यसको नाप cm को दसौ भागमा नाप्दा 4.5cm छ भन्न सकिन्छ । यदि हामीले 4.5cm र 4.6cm वीचको भागलाई 10 बराबर भाग लगायौं भने विन्दु B 4.52 cm को नजिकमा रहेको पाइन्छ ।



यस अवस्थामा AB को लम्बाइ cm को सयौं भागमा नाप्दा 4.52cm को नजिक हुने भयो । फेरि 4.52 र 4.53 वीचको भागलाई 10 ओटा भागमा विभाजन गर्न सकिन्छ । हरेक विभाजनमा AB को लम्बाइ दशमलवको केही स्थानमा फरक पढै गएको देख सकिन्छ । यसरी हेदा लम्बाइको नाप ठीक (Accurate) हुन्दो रहेन्छ । यस्तो अवस्थामा नाप (Measurement) को अनुमान (Approximation) गर्नुपर्ने हुन्छ । नापको अनुमान गर्ने धेरै तरिकामध्ये नापले देखाएको सार्थ अङ्क (Significant figure) मा वताउनु एउटा तरिका हो ।

उदाहरणका लागि -

$$AB = 4.5 \text{ cm.} \quad (2 \text{ सार्थ अङ्कमा सही नाप हो })$$

$$AB = 4.52 \text{ cm.} \quad (3 \text{ सार्थ अङ्कमा सही नाप हो })$$

सार्थ अङ्कलाई छोटकरीमा सा.अ. लेखिन्छ ।

उदाहरणका लागि -

0.205 मा सार्थ अङ्कको सङ्ख्या 3 हुन्छ भने,

0.025 मा सार्थ अङ्कको सङ्ख्या 2 हुन्छ किनभन्ने,

0.025 मा दशमलव पछिको शून्यले स्थिति मात्र वताउन्छ तर यसको कुनै मान हुँदैन ।

यसलाई महत्त्वहीन अङ्क (Insignificant Figure) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

(क) 2.316 र (ख) 0.1302 लाई 3 ओटा सार्थ अडकमा शून्यान्त गर ।

(ग) $576.2 = 5762.5$ (2 सार्थ अडकमा शून्यान्त गर ।)

उत्तर :

(क) $2.316 = 2.32$ (3 सा.अ.) (ख) $0.1302 = 0.130$ (3 सा.अ.)

(ग) 5800.00 (2 सा.अ.)

यहाँ उदाहरण (ख) मा पहिलो शून्य (0) महत्वहीन अडक हो भने पछिल्लो शून्य (0) सार्थ अडक हो ।

अध्यात्म 5.2

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा कोष्ठभित्र दिइएको सार्थ अडक (सा.अ.) मा शून्यान्त गर ।

(क) 1.055 (3 सा.अ.)

(ख) 0.2708 (3 सा.अ.)

(ग) 0.0047 (1 सा.अ.)

(घ) 27.9 (2 सा.अ.)

(ङ) 0.0473 (2 सा.अ.)

(च) 143.528 (4 सा.अ.)

(छ) 256.21 (2 सा.अ.)

2. $\frac{22}{7}$ लाई सार्थ अडक 4 हुने गरी दशमलवमा व्यक्त गर ।

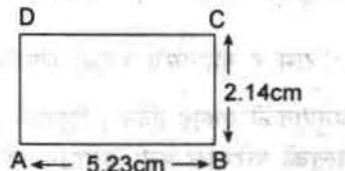
3. $\frac{2}{3}$ लाई तल दिइएको सार्थ अडकमा हुने गरी दशमलवमा व्यक्त गर ।

(क) 2 सा.अ. (ख) 3 सा.अ. (ग) 4 सा.अ.

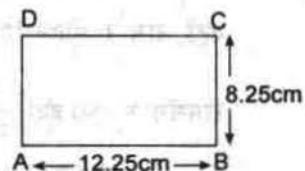
4. आयत ABCD को क्षेत्रफल,

(क) सा.अ. 4 र

(ख) सा.अ. 3 मा पत्ता लगाऊ ।



5. संगैको चित्रमा आयत ABCD को लम्बाइ 12.25 cm र चौडाइ 8.25cm भए क्षेत्रफल 5 सा.अ. मा पत्ता लगाऊ ।



6. एउटा वर्गको भुजाको लम्बाइ 15.18 से.मि. भए सो वर्गको क्षेत्रफल 4 सा.अ. मा कति होला ?
7. एउटा वर्गको भुजाको लम्बाइ 25.32 से.मि. भए सो वर्गको क्षेत्रफल 4 सा.अ. मा कति होला ?

**एकाइ
6**

अनुपात, समानुपात र प्रतिशत (Ratio, Proportion and Percentage)

6.1 अनुपात (Ratio)

तलका उदाहरण हेरौं।

- (क) रामसँग रु. 50 छ।
- (ख) सीता 4 फिट अखली छिन्।
- (ग) माधवले कक्षा 7 मा गणित विषयमा 90 अड्क प्राप्त गर्यो।
- (घ) काठमाडौंबाट पोखरा 200 km. टाढा छ।
- (ड) मोहनसँग रु. 250 छ।
- (च) गीताको उचाइ 36 इन्च छ।
- (छ) केशवले कक्षा 7 मा गणितमा 95 अड्क प्राप्त गरी प्रथम भयो।
- (ज) काठमाडौंबाट जनकपुर 400 km. टाढा छ।

माथिका उदाहरणहरूमा कुन कुन तुलना गर्न सकिन्दै?

समान प्रकृतिका वस्तुहरू तुलना गर्न सकिन्दै हुनाले तुलना गर्न मिल्ने वस्तुलाई निम्नानुसार समूहमा राखिएको छ।

$$(i) \text{ क } \text{ र } \text{ ड} \quad (ii) \text{ ख } \text{ र } \text{ च} \quad (iii) \text{ ग } \text{ र } \text{ छ} \quad (iv) \text{ घ } \text{ र } \text{ ज}$$

(i) यहाँ, राम र मोहनसँगको रु. को अनुपात 50 र 250 को छ। अर्थात्, राम र मोहनसँगको रु. को अनुपात = $\frac{50}{250}$ (भाग विधिबाट तुलना)

पुनः राम र मोहनसँगको रु. को अनुपातलाई 50:250 ले जनाइन्दै। अनुपातलाई लघुतम रूपमा लेख्नुपर्छ। त्यसैले राम र मोहनसँगको रु. को अनुपात = $\frac{50}{250} = \frac{1}{5}$

$$\therefore \text{ राम र मोहनसँग भएको रूपियाँको अनुपात} = \frac{1}{5}$$

अनुपातको एकाइ हुँदैन। दिइएको अनुपातको सहायताले एउटा वस्तुको परिमाण थाहा भएमा अर्को वस्तुको परिमाण पत्ता लगाउन सकिन्दै।

$$\text{यहाँ, राम र मोहनसँग भएको रूपियाँको अनुपात} = \frac{1}{5}$$

$$\text{रामसँग रु. 50 हुँदा, } \frac{\text{राम}}{\text{मोहन}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{\text{रु. } 50}{\text{मोहन}} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{ मोहन} = \text{रु. } 50 \times 5 = \text{रु. } 250$$

यसरी नै मोहनसँग रु. 250 भएमा, रामको परिमाण पत्ता लगाउन सकिन्दै।

$$\frac{\text{राम}}{\text{मोहन}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{\text{राम}}{\text{रु.} 250} = \frac{1}{5}$$

$$\text{अथवा, राम} = \frac{\text{रु.} 250}{5}$$

∴ रामसंग रु. 50 रहेछ.

- (ii) यस समूहमा (ख) र (च) का वस्तुहरू समान प्रकृतिका छन्। त्यसकारण, सीता र गीताको उचाइको अनुपात = $\frac{4 \text{ फिट}}{36 \text{ इन्च}}$

अनुपात निकालन वस्तुको एकाइ पनि समान हुनुपर्दछ। अब,

$$\text{सीता र गीताको उचाइको अनुपात} = \frac{48 \text{ इन्च}}{36 \text{ इन्च}} = \frac{4 \text{ फिट}}{3 \text{ फिट}}$$

अर्थात्, सीता र गीताको उचाइको अनुपात = 4:3 (लघुतम पदमा लाई)

$$\therefore \frac{\text{सीता}}{\text{गीता}} = \frac{4}{3} \quad (\text{अनुपातको एकाइ हुदैन})$$

अब, (iii) र (iv) समूहको अनुपात आफै गरेर देखाऊ।

उदाहरण 1

तलका प्रत्येक अवस्थामा पहिलो र दोस्रो परिमाणको अनुपात निकाल।

- (क) 75cm र 1m (ख) 2kg र 250g

उत्तर :

दुईओटा परिमाणहरूको एकाइ एउटैमा परिणत गरी अनुपात निकाल्नुपर्दछ।

$$(क) 1m = 100cm$$

$$\therefore 75\text{cm} \text{ र } 1m \text{ को अनुपात} = \frac{75\text{cm}}{100\text{cm}} = \frac{3}{4} \text{ वा } 3:4$$

$$(ख) 2kg = 2000g$$

$$\therefore 2kg \text{ र } 250g \text{ को अनुपात} = \frac{2000g}{250g} = \frac{8}{1} \text{ वा } 8:1$$

उदाहरण 2

दुईओटा परिमाणहरू 3:4 को अनुपातमा छन्। यदि दुवैबाट 5 घटदा नयाँ अनुपात 5:7 हुन्छ भने ती परिमाणहरू कतिकति रहेछन्?

उत्तर : मानौं ती परिमाणहरू $3x$ र $4x$ रहेछन्।

$$\text{प्रश्नबाट} \quad \frac{3x-5}{4x-5} = \frac{5}{7}$$

$$\therefore 7(3x-5) = 5(4x-5)$$

$$\therefore 21x-35 = 20x-25$$

$$x = 10$$

त्यसैले चाहिएका सङ्ख्याहरू :

$$3x = 3 \times 10 = 30$$

$$4x = 4 \times 10 = 40$$

उदाहरण 3

तीनजना साथीहरूले ₹ 1,17,000 को संयुक्त लगानीमा एउटा व्यापार सुरु गरेछन् । यदि तीनजनाको लगानी 5:4:3 को अनुपातमा रहेछ भने प्रत्येकले कतिकति रुपियाँ लगानी गरेका रहेछन् ? उत्तर : यहाँ ₹ 1,17,000 लाई 5 : 4 : 3 को अनुपातमा भाग लगाइएको छ । मानौ प्रत्येकको लगानी $5x, 4x$ र $3x$ रहेछन् । प्रश्नबाट $5x+4x+3x = 117000$

$$\therefore 12x = 117000$$

$$\therefore x = 9750$$

$$\text{त्यसैले } 5x = 48750, 4x = 39000 \text{ र } 3x = 29250$$

तीनजनाको लगानी क्रमशः : ₹ 48750, ₹ 39000 र ₹ 29250

अध्याय 6.1

- तलका प्रत्येक अवस्थामा पहिलो परिमाणलाई दोस्रो परिमाणको अनुपातमा व्यक्त गरी न्यूनतम पदमा व्यक्त गर ।
 (क) 32 : 56 (ख) 120 cm : 2 m (ग) 450 g : 1 kg
 (घ) 2 kg : 750 g (ड) 375 ml : 1 l (च) 15 sec : 1 hr
- यदि $a:b = 3:4$ र $b:c = 5:7$ छ भने
 (क) a को मान कति हुन्छ ? (ख) c को मान कति हुन्छ ?
 (ग) (क) र (ख) का आधारमा $a:c$ को मान पत्ता लगाउ ।
- पञ्चकन्या मा. वि. मा एक दिनका लागि खाजा खुवाउदा रोटी र विस्कुट 5 : 3 को अनुपातमा दिन्दछन् । यदि 100 ओटा रोटी प्रयोग भएछ भने कतिओटा विस्कुट आवश्यक पर्दै ?
- एउटा नक्सा 1 : 20000 को नाप (Scale) मा खिचिएको रहेछ । यदि नक्सामा दुई स्थान बीचको दूरी 10cm रहेछ भने ती स्थानको वास्तविक दूरी कति होला ?
- एउटा परिवारको वार्षिक आमदानी र खर्चको अनुपात 7 : 5 रहेछ । यदि आमदानी ₹ 77,000 रहेछ भने वचत कति हुन्छ ?
- दुईओटा सङ्ख्याहरू 5 : 7 को अनुपातमा छन् । यदि दुवैमा 3 जोडा नर्या अनुपात 4 : 5 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू कतिकति रहेछन् ?
- शीला, कैलाश र शिव क्रमशः 12, 10 र 8 वर्षका छन् । यदि ₹ 60 उनीहरूको उमेरको अनुपातमा बाँडियो भने प्रत्येकले कतिकति रुपियाँ पाउदा रहेछन् ?
- तीनजना सहभागीहरूले ₹ 6,00,000 मा एउटा बस किनेछन् । यदि उनीहरूले भागबन्डा 3:5:7 को अनुपातमा लगानी गरेभने प्रत्येकले कतिकति रुपियाँ लगानी गरेछन् ?
- तीनजना सहभागीहरूले ₹ 12,00,000 मा 5 : 8 : 12 को अनुपातमा लगानी गरेर व्यापार सुरु गरेछन् । एक वर्षभरिमा व्यापार गर्दा सो रकम ₹ 10,00,000 मात्र भएछ भने प्रत्येकलाई कतिकति घाटा भएछ ?
- A भन्दा B ले दोब्बर र B भन्दा C ले दोब्बर खर्च गर्दा जम्मा ₹ 490 खर्च भएछ भने प्रत्येकले कतिकति खर्च गरेछन् ?

6.2 समानुपात (Proportion)

मदनले 100 पूर्णाङ्कको गणित विषयमा 84 अड्क पाएछ । त्यसैगरी 50 पूर्णाङ्कको स्वास्थ्य र शारीरिक विषयमा 42 अड्क पाएछ भने गणितमा पाएको अड्कको अनुपात = $\frac{84}{100}$ र स्वास्थ्य र शारीरिक

विषयमा पाएको अड्कको अनुपात = $\frac{42}{50}$ हुन्छ ।

के ती अनुपातहरू बरावर छन् ?

$$\frac{84}{100} = \frac{21}{25} \text{ र } \frac{42}{50} = \frac{21}{25} \text{ हुन्छ ।}$$

दुवै अनुपातहरूको न्यूनतम अनुपात $\frac{21}{25}$ भएकोले अनुपातहरू $\frac{84}{100}$ र $\frac{42}{50}$ बरावर छन् ।

त्यसैले $\frac{84}{100}$ र $\frac{42}{50}$ समानुपातमा छन् ।

अर्थात् 84, 100, 42, 50 समानुपातमा छन् ।

ती सङ्ख्याहरूमा $84 \times 50 = 100 \times 42$ हुन्छन् ।

अर्थात् चाहिए पदहरूको गुणनफल (Extremes) र भित्री पदहरूको गुणनफल (Means) बरावर हुन्छन् ।

त्यसैले, यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ भए $ad = bc$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

समानुपातमा रहेका पदहरूमा पहिला तीन पदहरू क्रमशः 3, 4 र 6 छन् भने चौथो पद कति होला ?

उत्तर : चाहिएको पद x मान्दा,

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$$

$$\text{अथवा, } 3x = 24$$

$$\therefore x = \frac{24}{3} = 8$$

उदाहरण 2

दुईओटा परिमाणहरू 3:4 को अनुपातमा छन् । यदि दुवैबाट 5 घटाउँदा नयाँ अनुपात 5:7 हुन्छ भने ती परिमाणहरू कति कति होलान् ?

उत्तर: मानौ ती परिमाणहरू $3x$ र $4x$ हुन् ।

$$\text{प्रश्नअनुसार, } \frac{3x-5}{4x-5} = \frac{5}{7}$$

$$\text{अथवा } 7(3x-5) = 5(4x-5)$$

$$\text{अथवा, } 21x-35 = 20x-25$$

$$\text{अथवा, } 21x-20x = 35-25$$

$$\therefore x = 10$$

त्यसैले चाहिएका सङ्ख्याहरू : $3x = 3 \times 10 = 30$ र

$$4x = 4 \times 10 = 40$$

उदाहरण 3

यदि 150 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको चारओटा पर्खालिमा रड लगाउँदा रु. 300 पर्छ । त्यसै 200 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको पर्खालिमा रड लगाउन कति रुपियाँ पर्छ ?

उत्तर: यहाँ, 200 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको पर्खालिमा रड लगाउन लाग्ने रुपियाँ = x मानौ ।

दिइएका मानहरूलाई समानुपातमा लेख्दा,

$$\frac{150}{300} = \frac{200}{x}$$

$$\text{अथवा } 150x = 200 \times 300$$

$$\text{अथवा } x = \frac{60000}{150}$$

$$\therefore x = 400$$

अतः 200 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको पर्खालिमा रड लगाउन 400 रुपियाँ लाग्छ ।

अध्यात्म 6.2

- तल दिइएका चारओटा सद्ब्याहरू समानुपातमा छन् वा छैनन् छुट्याऊ ।
 (क) 2 से.मि., 3 से.मि., 4 से.मि., र 6 से.मि.
 (ख) 5 सेकेन्ड, 15 सेकेन्ड, 1 सेकेन्ड, र 3 सेकेन्ड
 (ग) 5 कि.ग्रा., 3 कि.ग्रा., 15 कि.ग्रा., र 25 कि.ग्रा.
 (घ) 2 ली., 5 ली., 6 ली., र 10 ली.
- समानुपातमा रहेका पहिलो 3 ओटा सद्ब्याहरू निम्न अनुसार छन् भने चौथो पद पत्ता लगाऊ ।
 (क) 3, 4, 6 (ख) 5, 7, 10 (ग) 16, 4, 4 (घ) 7, 9, 14
- तल दिइएका समानुपातमा x को मान पत्ता लगाऊ ।
 (क) $x:3 = 5:15$ (ख) $2:x = 10:25$
 (ग) $3:5 = x:15$ (घ) $7:9 = 28:x$
- एउटा विद्यालयमा खाजाका लागि पाउरोटी र विस्कुट 6:4 को अनुपातमा बाँडियो । यदि 120 ओटा पाउरोटी लाग्छ भने जम्मा कति ओटा विस्कुट लाग्छ होला ?
- 15 ओटा चकलेटको रु. 105 पर्छ भने 20 ओटा चकलेटको कति पर्छ ?
- एउटा बसले 3 घण्टामा 120 कि.मि. पार गर्दै भने कति घण्टामा 200 कि.मि. दूरी पार गर्दै ?
- यदि 120 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको चारओटा पर्खालिमा रड लगाउँदा रु. 180 पर्छ । त्यसै 180 वर्ग मि. क्षेत्रफल भएको पर्खालिमा रड लगाउन कति रुपियाँ पर्छ ?
- 12 जना मानिसले एक रोपनी खेतमा 10 घण्टामा धान रोप्न सक्छन् भने त्यतिनै खेतमा 6 घण्टामा धान रोप्न कति जना मानिस चाहिन्छन् होला ?
- चन्द्रमा र पृथ्वीको गुरुत्वाकर्षणको अनुपात 1:6 छ भने पृथ्वीमा 72 N तौलको मानिस चन्द्रमामा कति N होला ?
- 340 जना विद्यार्थीले परीक्षा दिँदा 3:5 को अनुपातमा प्रथम श्रेणी र द्वितीय श्रेणीमा उत्तीर्ण भएछन् । यदि 34 जना तृतीय श्रेणीमा उत्तीर्ण भएछन् र 58 जना अनुत्तीर्ण भएछन् भने
 (क) कति जना विद्यार्थी प्रथम र द्वितीय श्रेणीमा उत्तीर्ण भएछन् ?
 (ख) प्रथम, द्वितीय र तृतीय श्रेणीमा उत्तीर्ण भएका विद्यार्थीहरूको अनुपात निकाल ।

6.3 प्रतिशत (Percentage)

तलका उदाहरण हेर।

$$(i) 100 \text{ को } 10\% = 10 \quad (ii) 150 \text{ को } 10\% = 15$$

$$(iii) 220 \text{ को } 10\% = 22 \quad (iv) 25 \text{ को } 10\% = 2.5$$

माथिको उदाहरणबाट देख्न सकिन्छ कि 10% ले विभिन्न परिमाण जनाउँदो रहेछ। प्रतिशत समान भए पनि सङ्ख्याअनुसार परिमाण भिन्न हुन्छ। त्यसकारण प्रतिशतको सम्बन्ध दिएको सङ्ख्यासँग हुँदो रहेछ। पुनः अर्को उदाहरण हेरौं।

$$(i) 100 \text{ को } 10\% = 10 \quad (ii) 200 \text{ को } 5\% = 10$$

$$(iii) 50 \text{ को } 20\% = 10 \quad (iv) 40 \text{ को } 25\% = 10$$

यहाँ परिणाम सबैमा 10 छ तर प्रतिशत समान छैन। अर्थात् परिमाण समान भए पनि प्रतिशत फरक हुन सक्छ। त्यसकारण प्रतिशतको सम्बन्ध दिएको सङ्ख्यासँग हुन्छ। प्रतिशतले सधैँ खास एउटै सङ्ख्या जनाउँदैन। प्रतिशतले सापेक्ष माप मात्र जनाउँछ। प्रतिशत मात्र दिएमा परिमाणात्मक सङ्ख्या भन्न सकिदैन।

दिइएको सङ्ख्याको तोकिएको प्रतिशत बराबरको सङ्ख्या पत्ता लगाउने
(To find a number of the given percentage)

उदाहरण 1

एकजना मानिसले महिनाको ₹ 6000 आम्दानी गर्दै र निम्नानुसार खर्च गर्दै।

(क) खाना 40% (ख) शिक्षा 20% (ग) कपडा 15% (घ) अन्य 10% उसको मासिक बचत कति होला?

उत्तर :

फरकफरक शीर्षकमा भएको खर्च निकाल्दा,

$$(क) खाना: ₹ 6000 \text{ को } 40\%$$

$$= ₹ 6000 \times \frac{40}{100} = ₹ 2400$$

$$(ग) कपडा: ₹ 6000 \text{ को } 15\%$$

$$= ₹ 6000 \times \frac{15}{100} = ₹ 900$$

$$(ख) शिक्षा: ₹ 6000 \text{ को } 20\%$$

$$= ₹ 6000 \times \frac{20}{100} = ₹ 1200$$

$$(घ) अन्य: ₹ 6000 \text{ को } 10\%$$

$$= ₹ 6000 \times \frac{10}{100} = ₹ 600$$

त्यसैले,

$$\text{जम्मा खर्च} = ₹ (2400+1200+900+600) = ₹ 5100$$

$$\therefore \text{बचत} = \text{आम्दानी} - \text{खर्च}$$

$$= ₹ (6000-5100) = ₹ 900$$

अर्को तरिका

$$\text{जम्मा खर्च \%} = (40+20+15+10)\% = 85\%$$

$$\text{अब, प्रतिशत बचत} = (100-85)\% = 15\%$$

$$\text{त्यसैले बचत} = ₹ 6000 \text{ को } 15\% = ₹ 6000 \times \frac{15}{100} = ₹ 900$$

उदाहरण 2

उमाराजले दसैवजारबाट रु 325 को पाइन्ट 15% छुटमा किन्यो भने पाइन्टको मूल्य कति पर्ला ?
उत्तर :

$$\text{पाइन्टको मूल्य (दिएको सङ्ख्या)} = \text{रु } 325$$

$$\text{छुट} = 15\%$$

$$\text{अब, } \text{छुट } \text{रु } 325 \text{ को } 15\% = \text{रु } 325 \times \frac{15}{100} = \text{रु } 48.75$$

$$\text{रमेशले तिरेको मूल्य} = \text{पाइन्टको मूल्य} - \text{छुट} = \text{रु } 325 - \text{रु } 48.75 = \text{रु } 276.25$$

दिइएको सङ्ख्याको दिएको प्रतिशत निकाल्ने
(To find a percentage of a given number)

उदाहरण 3

रु 1500 को कति प्रतिशतले रु 300 हुन्छ ?

उत्तर: निकाल्नुपर्ने प्रतिशतलाई x मान्दा

$$1500 \text{ को } x\% = 300$$

$$1500 \times \frac{x}{100} = 300$$

$$\text{वा } 15x = 300 \quad \text{वा} \quad x = 20 \quad \therefore x = 20\%$$

उदाहरण 4

गोविन्दको गत वर्षको तलब रु 7000 थियो । यस वर्ष उसको तलब रु 7500 पुगेछ भने कति प्रतिशतले तलब बढ्दि भएछ ?

उत्तर: यस वर्षको तलब बढ्दि = रु 7500 - रु. 7000 = रु 500

त्यसैले निकाल्ने प्रतिशतलाई $x\%$ मान्दा

$$7000 \times \frac{x}{100} = 500 \quad \text{वा } 70x = 500 \quad \text{वा } x = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$$

$$\therefore \text{तलब बढ्दि } 7\frac{1}{7}\% \text{ भएछ ।}$$

उदाहरण 5

नववर्षको उपलक्ष्यमा एउटा पसलमा
निम्न मूल्यसूची भुन्डयाएको रहेछ ।
विभिन्न वस्तुको छुट प्रतिशत निकाल ।

उत्तर:

$$\begin{aligned} \text{(क) जिन्स पाइन्टमा छुट} &= \text{मूल्य} - \text{छुट मूल्य} \\ &= ₹ 520 - ₹ 442 \\ &= ₹ 78 \end{aligned}$$

अब, ₹ 520 मा छुट ₹ 78 छ ।

$$\text{रु 1 मा छुट } \frac{78}{520} \text{ हुन्छ} . \quad (\text{छुट थोरै हुने हुनाले भाग गरेको})$$

$$\therefore \text{रु 100 मा छुट } \frac{78}{520} \times 100 = ₹ 15 \quad (\text{छुट धेरै हुने हुनाले गुणन गरेको})$$

$$\text{छुट} = ₹ \frac{15}{100} = 15\%$$

$$\begin{aligned} \text{(ख) सर्टमा छुट} &= \text{मूल्य} - \text{छुट मूल्य} \\ &= ₹ 225 - ₹ 198 \\ &= ₹ 27 \end{aligned}$$

अब, ₹ 225 मा ₹ 27 छुट रहेछ ।

$$\begin{aligned} \text{छुट \%} &= \frac{\text{छुट}}{\text{मूल्य}} \times 100 \\ &= \frac{27}{225} \times 100 = 12 \end{aligned}$$

(छुट प्रतिशत भन्नाले पहिलो मूल्यसूचीको छुट प्रतिशत जनाउँदछ)

$$\begin{aligned} \text{(ग) फेरि, जुत्तामा छुट} &= ₹ 625 - ₹ 450 \\ &= ₹ 175 \end{aligned}$$

$$\text{अब, छुट \%} = \frac{\text{छुट}}{\text{मूल्य}} \times 100 = ₹ \frac{175}{625} \times 100 = 28$$

द्रष्टव्य: मुख्य मूल्यमा छुट \% वा छुट पता लगाउनुपर्छ ।

आठ्यात्तमा 6.3

1. (क) कति रुपियाँको 15% ले ₹ 300 हुन्छ ? (ख) कति रुपियाँको 17% ले ₹ 340 हुन्छ ?
 (ग) कति दिनको 12% ले 48 दिन हुन्छ ? (घ) कति जनसङ्ख्याको 25% ले 600 जना हुन्छ ?
 (ड) कति विद्यार्थीको 35% ले 70 जना हुन्छ ? (च) कति लिटरको 10% ले 200 ml हुन्छ ?
 (छ) कति मिटरको 8% ले 4m हुन्छ ?
2. एक दिन विद्यालय प्रार्थना समयमा 190 विद्यार्थी समयमै आए ₹ 5% ढिलो गरी आए भने कति विद्यार्थी ढिलो आएछन् ? जम्मा विद्यार्थी कति रहेछन् ?
3. एक गा.वि.स. को जम्मा मतदाता सङ्ख्या 1200 मध्ये 960 ले मात्र मत खसालेछन् भने,

वस्तु	मूल्य	छुट पछिको मूल्य
जिन्सपाइन्ट	₹ 520	₹ 442
सर्ट	₹ 225	₹ 198
जुत्ता	₹ 625	₹ 450

- (क) कति प्रतिशतले मत खसालेछन् ?
 (ख) कति प्रतिशतले चुनावमा मत हालेन्दून ?
 (ग) चुनावमा भाग नलिनेमध्ये 25% विदेश गएका रहेछन् भने कति जना विदेश गएका रहेछन् ?
4. प्यारागन विद्यालयमा भएका 700 विद्यार्थीमध्ये हप्ताभरि निम्नानुसार हाजिर भएछन् -
 आइतबार 92% सोमबार 89% मंगलबार 93%
 बुधबार 95% विहीबार 96% शुक्रबार 83%
 प्रत्येक दिन कतिकति जना हाजिर भएछन् ? पत्ता लगाउ ।
5. एउटा परिवारको मासिक आमदानी रु 7000 रहेछ । निम्नअनुसार खर्च हुँदो रहेछ ।
 खानामा 30% कपडामा 18%, शिक्षामा 25%, औषधिमा 5%, अन्य 12%
 (क) प्रत्येक शरीरकमा कतिकति खर्च हुँदो रहेछ ?
 (ख) प्रतिमहिना आमदानीको कति प्रतिशत बचत हुन्छ ?
 (ग) प्रतिमहिना हुने कुल बचत कति रहेछ ?
6. पोखरा रामधाटको जनसङ्ख्यामध्ये 65% वयस्क छन् र बाँकी केटाकेटी छन् । यदि केटाकेटीको सङ्ख्या 7000 रहेछ भने
 (क) जम्मा जनसङ्ख्या कति रहेछ ? (ख) वयस्कको सङ्ख्या कति रहेछ ?
7. वि.सं. 2058 को जनगणनानुसार नेपालको जनसङ्ख्या 23500000 थियो । यदि वार्षिक वृद्धि दर 2% भए 2063 मा जनसङ्ख्या कति पुरनेछ ?
8. रेडियोको मूल्यमा 25% छुट दिए भगवतीले एउटा रेडियो किन्दा रु 1200 तिर्नुपन्यो भने रेडियोको छुट नदिदाको मूल्य कति रहेछ ?
9. एउटा पुस्तक वितरकले आफ्नो प्रकाशनमा 30% छुट दिएर व्यापार गर्दैरहेछ । एउटा व्यापारीले उक्त पुस्तक वितरकबाट किन्दा रु 90000 छुट पाएछ भने जम्मा कति स्थिरयाको किताब किगाइको रहेछ ?
10. नेपालमा आउने पर्यटकहरूको सङ्ख्या सन् 1993 मा 120000 थिया । सन् 1994 मा 10% वृद्धि भयो र सन् 1995 मा 10% कमी भयो भने सन् 1995 मा नेपालमा कति पर्यटक आएका रहेछन् ?
11. शिवले 2050 मा सुरुको तलब रु 8000 प्रतिमहिनामा जागिर सुरु गरेछन् । वि.सं. 2051 मा तलब 10% बढेछ र 2052 मा पुनः 15% बढि भएछ भने वि.सं. 2052 को तलब कति रहेछ ?
12. एउटा सामानको 12% छुटपछिको मूल्य रु. 1320 रहेछ । अझकित मूल्य निकाल ।
13. एउटा सामानको अझकित मूल्य रु. 1600 रहेछ । यदि उक्त सामानलाई रु.1472 मा बेचियो भने छुट प्रतिशत कति होला ?
14. एउटा वस्तुको वास्तविक मूल्यमा 15% बढाई अझकित मूल्य रु.1380 कायम गरियो भने सो वस्तुको वास्तविक मूल्य निकाल ।
15. यदि अझकित मूल्य रु. 810 मा 10% छुट दिइयो भने बिक्रय मूल्य कति होला ?
16. विजया दशमीको उपलक्ष्यमा एउटा रेडिमेड पसलमा बिक्री गर्न भनी राखेको केही वस्तुको मूल्य तालिका निम्नानुसार रहेछ ।

वस्तु	अझकित मूल्य	छुट प्रतिशत	बिक्री मूल्य
पाइन्ट	रु 345	15%	रु 290
सर्ट	रु 175	20%	रु 145
ट्रयाक सुट	रु 445	18%	रु 365

माथिका वस्तुहरू छुट प्रतिशत वा SALE मूल्य कुन अनुसार किन्दा सस्तो पर्छ र कति सस्तो पर्छ, पत्ता लगाउ ।

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

कुनै वस्तु किनेर बेच्दा, बेचेको मोल (Selling price) किनेको मोल (cost price) भन्दा धेरै भयो भने नाफा भएको भनिन्छ । त्यसैगरी किनेको मोलभन्दा बेचेको मूल्य कम परेमा नोक्सान वा घाटा भयो भनिन्छ । नाफा र नोक्सानको कुरा धेरैजसो व्यापारमा हुने गर्दछ तापनि व्यावहारिक जीवनमा यससम्बन्धी प्रशस्तै क्रियाकलाप (कारोबार) हुनेगर्दछन् । गणितीय रूपमा उल्लेख गर्दा नाफा वा नोक्सानलाई निम्नानुसार सूत्रको रूपमा प्रस्तुत गरिन्छ ।

नाफा (Profit) = बेचेको मोल (Selling Price) – किनेको मोल (Cost price)

अथवा, नाफा = विक्रय मूल्य (वि.मू.) - क्रयमूल्य (क्र.मू.)

अथवा, $P = S.P. - C.P.$

त्यसैगरी, नोक्सान (Loss) = क्र.मू. - वि.मू.

अथवा, $L = C.P. - S.P.$ हुन्छ ।

नाफा र नोक्सानको तुलनात्मक अवस्था याहा पाउन र प्रस्तुतीकरणलाई सजिलो पार्नको लागि यसलाई प्रतिशतमा प्रस्तुत गर्ने प्रचलन पनि छ । नाफा वा नोक्सान प्रतिशतलाई गणितीय भाषामा निम्नानुसार प्रस्तुत गरिन्छ ।

$$\text{नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$\text{नोक्सान प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100 \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1

साहू रामप्रसादले रु 65000 मा एउटा मोटरसाइकल किनेर एक महिनापछि बेच्दा रु 7500 नोक्सान भएको भने उसले त्यो मोटरसाइकल कतिमा बेचेको होला ?

उत्तर

$$\text{यहाँ, दिएको क्र.मू. (C.P.)} = \text{रु } 65000$$

$$\text{नोक्सान (L)} = \text{रु } 7500$$

$$\text{वि.मू. (S.P.)} = \text{रु }$$

$$\text{हामीलाई याहा छ, सूत्र, नोक्सान (L)} = \text{C.P.} - \text{S.P}$$

$$\text{अथवा, C.P. - S.P} = \text{नोक्सान (L)}$$

$$\text{अथवा, -S.P} = (\text{L} - \text{C.P.})$$

$$\text{S.P.} = \text{C.P.} - \text{L}$$

$$= \text{रु } 65000 - \text{रु } 7500$$

$$= \text{रु } 57500$$

$$\therefore \text{बेचेको मोल (वि.मू.)} = \text{रु } 57500 \text{ हो}$$

उदाहरण 2

रमाको बाबाले रु. 12000 तिरेर एउटा दुहुनो भैंसी किनेछन् र रु. 15500 मा बेचेछन्। रमाको बाबालाई सो कारोबारमा नाफा वा घाटा के भयो र कति भयो, प्रतिशतमा निकाल।

उत्तर:

$$\text{यहाँ, दिएको क्र.मू. (C.P.)} = \text{रु. } 12000$$

$$\text{वि.मू. (S.P.)} = \text{रु. } 15500$$

यहाँ किनेको मोलभन्दा बेचेको मोल बढी भएको हुँदा नाफा भएको देखिन्दै।

$$\therefore \text{नाफा (P)} = \text{S.P.} - \text{C.P.}$$

$$= \text{रु. } 15500 - \text{रु. } 12000$$

$$= \text{रु. } 3500$$

$$\text{फेरि, हामीलाई थाहा छ नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{3500}{12000} \times 100 = \frac{175}{6} = 29 \frac{1}{6}\%$$

उदाहरण 3

उमाकी आमाले रु. 780 मा जापानी साडी किनेर ल्याइछन्। दुई महिनापछि उनलाई अर्को साडी किन्न मन लागेदै र उनले सो साडी रु. 500 मा उनकै साथीलाई बेचिछन्। उनलाई कति प्रतिशत घाटा भयो होला?

उत्तर : दिएको क्र.मू. (C.P.) = रु. 780

$$\text{वि.मू. (S.P.)} = \text{रु. } 500$$

C.P. भन्दा S.P. थोरै भएकाले घाटा भएको छ।

$$\therefore \text{नोक्सान (Loss)} = \text{C.P.} - \text{S.P.}$$

$$L = \text{रु. } 780 - \text{रु. } 500$$

$$= \text{रु. } 280$$

प्रश्नअनुसार,

$$\begin{aligned} \text{नोक्सान प्रतिशत} &= \frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्र.मू.}} \times 100 \\ &= \frac{280}{780} \times 100 = \frac{1400}{39} \\ &= 35\frac{35}{39}\% \end{aligned}$$

उदाहरण 4

सीताका दाजु व्यापारी थिए। उनले सहरबाट एउटा घडी रु. 700 मा किनेर ल्याएछन् र 20 प्रतिशत नाफा गरेर बेचेछन्। उनका दाजुले कति नाफा गरे होलान्? र कतिमा बेचे होलान्?

उत्तर

$$\text{दिएको क्र.मू. (C.P.)} = \text{रु. } 700$$

$$\text{नाफा प्रतिशत} = 20$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$\text{अथवा, वास्तविक नाफा} \times 100 = \text{नाफा प्रतिशत} \times \text{क्र.मू.}$$

$$\text{वास्तविक नाफा} = \frac{\text{नाफा प्रतिशत} \times \text{क्र.मू.}}{100}$$

$$\text{वास्तविक नाफा} = \frac{20}{100} \times 700 = \text{रु.} 140$$

∴ उनका दाजुले रु 140 नाफा गरे।

$$\text{फेरि, क्र.मू.} = \text{क्र.मू.} + \text{नाफा} = \text{रु.} 700 \text{ रु.} + \text{रु} 140 = \text{रु.} 840 \text{ उत्तर}$$

अध्याय 7

1. रमेश शार्माले रु. 1250 मा किनेको बाखाको पाठो रु. 1075 सानीकी आमालाई बेचेछन्। उनलाई सो कारोबारले नाफा भयो कि नोकसान र कति?
2. लक्ष्मी भट्टले यस सालको तिहारमा टोपीको व्यापार गर्दा प्रति टोपी रु. 150 मा किनेर रु. 200 का दरले बेचेछन् भने उनले प्रति टोपीमा कति प्रतिशतका दरले नाफा गरे होलान्?
3. सानी गुरुडको साथीको पसलमा राखेको मूल्यसूचिमा "प्रति बोरा सिमेन्टको मूल्य रु. 313" भनी लेखेको रहेछ। एक दिन सानीकी साथी गीता र उसका बाबा भएर सिमेन्ट किन जाँदा सानीका बाबाले रु. 300 प्रति बोराका दरले सिमेन्ट दिएछन् भने कति प्रतिशत छुटमा दिएछन् होला?
4. एउटा कापीको क्रय मूल्य रु. 12.50 छ। प्रति कापीमा 10% नाफा गरी बेच्दा 3 दर्जन कापीमा कति नाफा होला?
5. प्रति बिवन्टल रु 950 का दरले किनेर प्रति बिवन्टल रु. 1054.50 का दरले बेच्दा 10 टनमा कति नाफा हुन्छ? (10 बिवन्टल = 1 टन)
6. प्रटिगोटा रु. 500 पर्ने क्याल्क्लेटर 10% छुट दिई 30 दर्जन बेच्दा जम्मा विक्रय मूल्य कति हुन्छ?
7. एउटा खसी रु. 4500 मा किनेर 20% नाफा गरी बेच्दा विक्रय मूल्य कति होला?
8. रु. 480 मा किनेको च्याङ्गो रु 600 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा हुन्छ?
9. ढूले राईले रु 800 मा दुई वर्ष अगाडि किनेर ल्याएको आफ्नो गोठको राँगो बेच्दा 60% नाफा भएछ भने सो राँगो कतिमा बेचेको थियो होला?
10. शालिकरामको रु 600 पर्ने किताब कमललाई दिएकोमा हराइदिएछन्। एक वर्षपछि शालिकरामले 20% जरिवानासहित दाम असुल गरेछन् भने कति रकम असुल गरे होलान्?
11. रामले एउटा साइकल रु. 3000 मा किनेर रु. 3450 मा विक्री गरेछ भने उसले कति नाफा गरेछ र कति प्रतिशत नाफा गरेछ?
12. कृष्णले एउटा टि.भी. रु. 25000 मा किनेर दुई वर्ष चलाई रु. 5000 घाटा खाएर बेच्दा उसको टि.भी.को विक्रय मूल्य कति होला? उसले कति प्रतिशत घाटा सहनु पन्यो?
13. एउटा मोटरसाइकल व्यापारीले 2 वर्ष चलाइसकेको मोटरसाइकल खरिद गरी बेच्दा 17% फाइदा लिँदा जम्मा रु. 23400 पाएछ भने मोटरसाइकल कतिमा किनेछ?
14. सोनेलाल यादवले एउटा कारखानाबाट 10 दर्जन कापी किनेर 5% नाफा लिएर एउटा पसलेलाई बेचेछ। पसलेले उक्त कापी 5% नाफा लिएर बेच्दा रु 1386 पाएछ भने
(क) गोविन्दको क्रय मूल्य कति होला?
(ख) पसलेको क्रय मूल्य कति होला?

ऐकिक नियम (Unitary Method)

ऐकिक नियम प्रयोग गरेर समस्या समाधान गर्दा पहिले दिएको शीर्षक (Article) को एकाइको मूल्य निकालिन्छ र आवश्यक परिमाणका मूल्यहरू निकालिन्छ । तलका तालिका हेरौँ ।

प्रत्यक्ष विचरण

कलमको सदृश्या	मूल्य
5 ओटा	रु. 25
10 ओटा	रु. 50
4 ओटा	रु. 20
x	?

कामदार	काम गर्ने लाग्ने दिन
2	15
10	3
3	10
y	?

पहिलो तालिकामा जब 5 ओटा कलमको मूल्य रु. 25 पर्दछ भने 10 ओटा कलमको मूल्य रु. 50 कसरी भयो ? सो थाहा पाउन एउटा कलमको मूल्य (एकाइ मूल्य) थाहा पाउनुपर्दछ । तलको प्रक्रिया हेरौँ ।

$$5 \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } 25 \text{ पर्दछ ।}$$

$$\text{एउटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } \frac{25}{5} = \text{रु. } 5 \text{ पर्दछ ।}$$

$$10 \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } 5 \times 10 = \text{रु. } 50 \text{ पर्दछ ।}$$

$$4 \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } 5 \times 4 = \text{रु. } 20 \text{ पर्दछ ।}$$

$$\therefore x \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } 5 \times x = \text{रु. } 5x \text{ पर्दछ ।}$$

यहाँ कलमको सदृश्या घटदा मूल्य घटदछ र कलमको सदृश्या बढदा मूल्य बढदछ । त्यसैले यो प्रत्यक्ष विचरण भयो । अतः

प्रत्यक्ष विचरण (Direct Variation): सम्बन्धित दुईओटा राशिहरूमध्ये एउटा राशि बढदा अर्को राशि पनि बढने तथा एउटा राशि घटदा अर्को राशि पनि घटने अवस्था आउद्दृ भने ती दुई राशिहरूको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

त्यसै गरी दोस्रो तालिकाबाट

2 जना कामदारले कुनै काम 15 दिनमा गर्न सक्दछन् ।

\therefore एक जना कामदारले सो काम $= 15 \times 2$ दिनमा $= 30$ दिनमा गर्न सक्दछ ।

\therefore 10 जना मानिसले सो काम $= \frac{30}{10} = 3$ दिनमा गर्न सक्दछन् ।

\therefore 3 जना मानिसले सो काम $= \frac{30}{3} = 10$ दिनमा गर्न सक्दछन् ।

यहाँ, कामदारको सदृश्या बढदा काम गर्ने लाग्ने दिन घटदछ र कामदारको सदृश्या घटदा काम गर्ने लाग्ने दिन बढदछ । त्यसैले यो अप्रत्यक्ष विचरण भयो । अतः

अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation): सम्बन्धित दुइओटा राशिहरूमध्ये एउटा राशि बढ्दा अर्का राशि घट्दै तथा एउटा राशि घट्दा अर्को राशि बढ्ने अवस्था आउँद्य भने तो दुई राशिहरूको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण भनिन्द्य।

उदाहरण 1

30 ओटा कलमको मूल्य रु. 600 भए 4 दर्जन कलमको मूल्य कति हुन्छ ?

उत्तर :

यहाँ, पत्ता लगाउनुपर्ने मूल्य भएकाले

30 ओटा कलमको मूल्य = रु. 600 हुन्छ ।

$$\therefore 1 \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } \frac{600}{30} = \text{रु. } 20 \text{ हुन्छ ।}$$

$$\therefore 4 \text{ दर्जन} = 48 \text{ ओटा कलमको मूल्य} = \text{रु. } 20 \times 48 = \text{रु. } 960 \text{ हुन्छ ।}$$

अतः आवश्यक मूल्य रु. 960 हुन्छ ।

अर्को तरिका:-

यहाँ आवश्यक मूल्यलाई x मानौ,

समस्यामा दिइएको तथ्याङ्कलाई क्रमबद्ध रूपले निम्नानुसार राखौ।

कलमको सङ्ख्या	मूल्य
30 ओटा	रु. 600
4 दर्जन = 48 ओटा	रु. x (मानौ)

अब, कलमको सङ्ख्या र मूल्य वीचको सम्बन्ध प्रत्यक्ष विचरण भएकाले,

नोट: प्रत्यक्ष विचरण भएकाले यदि 30 हरमा भए 600 पनि हरमा हुन्छ र यदि 48 हरमा भए x पनि हरमा हुन्छ ।

$$\frac{30}{48} = \frac{600}{x}$$

$$\text{वा, } \frac{x}{600} = \frac{48}{30}$$

$$\text{अथवा } x = \frac{48 \times 600}{30} = \text{रु. } 960$$

अतः आवश्यक मूल्य = रु. 960 हुन्छ ।

उदाहरण 1

15 जना मानिसले 12 दिनमा गर्ने काम 18 दिनमा सक्न कति मानिस चाहिएलान् ?

उत्तर: यहाँ, पत्ता लगाउनुपर्ने मानिसको सङ्ख्यालाई y मानौ ।

समस्यामा दिइएको तथ्याङ्कलाई क्रमबद्ध रूपले निम्नानुसार राखौ।

आवश्यक मानिस	अवधि
15 जना	12 दिन
y जना	18 दिन

अब, मानिस र काम गर्न सक्ने अवधिवीचको सम्बन्ध अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले

$$\begin{aligned} \frac{15}{y} &= \frac{18}{12} \\ \text{वा} \quad \frac{y}{15} &= \frac{12}{18} \\ \text{अथवा} \quad y &= \frac{12 \times 15}{18} \\ &= 10 \text{ जना} \end{aligned}$$

नोट: अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले यदि 15 हरमा भए 18 पनि हरमा हुन्छ र यदि y हरमा भए 12 पनि हरमा हुन्छ।

अतः आवश्यक मानिसको सझ्या = 10 हुन्छ।

अध्यात्म 8

- 3 दर्जन सिसाकलमको मूल्य रु. 90 भए 18 ओटा सिसाकलमको मूल्य कति हुन्छ ?
- 60 कि.ग्रा. मनसुली चामलको मूल्य रु. 1320 पर्दछ भने 5 किवन्टल चामलको मूल्य कति हुन्छ ? (1 किवन्टल = 100 कि.ग्रा.)
- 4 जना केटाले 200 कि.ग्रा. रासन तीन महिनामा खान्छन् भने कति जना केटाले 650 कि.ग्रा. रासन सोही अवधिमा खान्छन् ?
- युरिकासँग भएको रु 500 ले 40 कापी किन्न सकिछन् भने कति रुपियाँले 6 दर्जन कापी किन्न सकिछन् ?
- 20 जना खेतालाहरूले एउटा खेत 240 घण्टामा खन्न सब्दछन् भने कति जनाले सोही खेत 60 घण्टामा खन्न सब्दछन् ?
- एउटा सडक बनाउन दैनिक 6 घण्टाका दरले काम गर्दा 30 जनाले पूरा गर्दछन् भने 10 घण्टाका दरले काम गर्दा कति जनाले पूरा गर्दछन् ?
- एउटा हवाईजहाज 400 कि.मि. प्रतिघण्टाका दरले उद्दा 48 मिनेटमा एउटा यात्रा पूरा गर्दछ भने 24 कि.मि. प्रतिघण्टा उद्दा कति मिनेटमा उडान पूरा गर्ला ?
- 6 जना मानिसलाई 7 दिन लाग्ने काम 14 जना मानिसले कति दिनमा गर्न सब्दछन् ? त्यसै सो काम कति जनाले 2 दिनमा सिध्याउँछन् ?
- 5 जना कामदारहरूको दैनिक आमदानी रु 1500 हुन्छ भने,
 - कति कामदारको आमदानी रु 600 होला ?
 - यदि एक जना कामदारले दैनिक रु 150 खर्च गर्दछ भने 17 जनाले जम्मा कति बचत गर्दछन् होला ?
- एउटा मोटरसाइकलमा एक लिटर पेट्रोल हाल्दा 45 कि.मि. यात्रा गर्न सकिन्छ भने,
 - 4 लि. पेट्रोलले मोटरसाइकल कति कि.मि. सम्म गुदछ ?
 - 585 कि.मि. यात्रा पूरा गर्न कति पेट्रोल चाहिन्छ ?
- एउटा छात्रावासमा 30 विद्यार्थीलाई 40 दिन पुग्ने खाना छ। कति विद्यार्थीले छात्रावास छोडा सो खानाले 100 दिन पुग्ला ?
- एउटा छात्रावासमा 50 विद्यार्थीलाई 54 दिन पुग्ने खाना छ। कति विद्यार्थी थप्दा सो खानाले 45 दिन मात्र पुग्ला ?

साधारण व्याज (Simple Interest)

यदि तिमीले राष्ट्रिय बाणिज्य बैंडकको बचत खातामा रु. 500 जम्मा गर्न्यौ भने तिमीलाई सो बैंडकले एक वर्षपछि रु. 523.75 फिर्ता दिन्छ वा खातामा जम्मा गरिदिन्छ ।

यहाँ,

- (क) बैंडकमा जम्मा गरेको रकमलाई सावाँ (Principal - P) भनिन्छ । यहाँ जम्मा गरेको रकम रु. 500 सावाँ हो ।
- (ख) बैंडकले फिर्ता गरेको एकमुष्ट रकमलाई मिश्रधन (Amount - A) भनिन्छ । अर्को शब्दमा सावाँ र व्याजसहितको जम्मा रकम मिश्रधन हो । यहाँ रु. 523.75 मिश्रधन हो ।
- (ग) जम्मा गरेको रकममा बैंडकले जुन थप रकम दियो त्यो रकमलाई व्याज (Interest-I) भनिन्छ । यहाँ रु. 500 भन्दा बढी भएको थप रकम रु. 523.75 – रु. 500 = रु. 23.75 व्याज हो ।
- (घ) बैंडकले एउटा निश्चित दरमा व्याज दिने गर्दछ । यहाँ बचत खातामा जम्मा गरेको रकम रु. 500 मा बैंडकले रु. 23.75 व्याज दियो । त्यसैले प्रतिवर्ष प्रतिसय रुपियाँमा हुने व्याज दर (Rate - R) = $\frac{23.75}{500} \times 100\% = 4.75\%$
- (ङ) जति समयावधिका लागि बैंडकमा पैसा राखिन्छ त्यसलाई समय (Time-T) भनिन्छ । यहाँ 1 वर्ष समय हो ।

साधारण व्याजमा प्रयोग हुने शब्दहरू

- (क) सावाँ (Principal - P)
- (ख) मिश्रधन (Amount - A)
- (ग) व्याज (Interest - I)
- (घ) व्याजदर (Rate - R)
- (ङ) समय (Time - T)

उदाहरण 1

निर्मलाले सावाँ- रु. P वार्षिक व्याजदर- R% ले पाउने गरी समय- T वर्षका लागि राष्ट्रिय बाणिज्य बैंडक सानोठिमीमा जम्मा गरिछन् भने उनले पाउने व्याज (I) कति हुन्छ ? (ऐकिक नियम प्रयोग गरी निकाल ।)

उत्तर : यहाँ, R% प्रतिवर्ष भन्नाले

$$\text{रु. } 100 \text{ को } 1 \text{ वर्षको व्याज} = R$$

$$\therefore \text{रु. } 1 \text{ को } 1 \text{ वर्षको व्याज} = \frac{R}{100}$$

$$\therefore \text{रु. } 1 \text{ को } T \text{ वर्षको व्याज} = \frac{R \times T}{100}$$

$$\therefore \text{रु. } P \text{ को } T \text{ वर्षको व्याज} = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$\text{त्यसैले, व्याज पत्ता लगाउने सूत्र : } I = \frac{P \times T \times R}{100} \dots\dots\dots (I)$$

अब,

माथि जस्तै ऐकिक नियम प्रयोग गरी निम्न सूत्रहरू पनि निकाल ।

$$1. \text{ सार्वाँ : } P = \frac{I \times 100}{TR}$$

$$2. \text{ समय : } T = \frac{I \times 100}{PR}$$

$$3. \text{ व्याजदर : } R = \frac{I \times 100}{PT}$$

मिश्रधन (Amount)

गोमाले राष्ट्रिय बाणिज्य बैंकक बर्दियामा रु. 25,000 बचत खातामा राखिछन् । एक वर्षपछि बैंकसँग जम्मा भएको रकमको स्टेटमेन्ट भाष्टा बैंकले रु. 26,125 को स्टेटमेन्ट दिएछ । उनको खातामा जम्मा रु. 26,125 रकम जम्मा भएको रहेछ ।

यहाँ, गोमालो बचत खातामा -

$$\text{सार्वाँ : } P = \text{रु. } 25000$$

$$\text{जम्मा भएको रकम} = \text{रु. } 26,125$$

$$\text{थप रकम (व्याज) : } I = \text{जम्मा भएको रकम} - \text{सार्वाँ}$$

$$= \text{रु. } 26,125 - \text{रु. } 25,000$$

$$= \text{रु. } 1,125 \text{ भएछ ।}$$

गोमाले जम्मा भएको रकम पत्ता लगाउने जुक्ति निकालिछन् । पुरानो सार्वाँ रु. 25,000 र व्याज रु. 1,125 जोड्दा रु. 26,125 भएको रहेछ ।

सार्वाँ र व्याज जोड्दा आउने योगफललाई मिश्रधन (Amount) भनिन्छ ।

त्यसैले,

$$\boxed{\text{मिश्रधन पत्ता लगाउने सूत्र : } A = P + I \text{ हुन्छ ।}} \dots\dots\dots (II)$$

सूत्र $A = P + I$ बाट A , P र I मध्ये कुनै दुईबाट तेसो निकालन सकिन्छ । निम्न सूत्रहरू पनि निकाल ।

$$(क) \text{ सार्वाँ : } P = A - I$$

$$(ख) \text{ व्याज : } I = A - P$$

तर व्याज (I) नदिईकन, T , R र A दिएमा P पत्ता लगाउनु पन्यो भने, एउटा थप सूत्रको आवश्यकता पर्दछ । त्यो सूत्र माथिकै सूत्रहरू (क) र (ख) बाट निकालन सकिन्छ ।

हामीलाई थाहा छ,

$$A = P + I$$

अथवा, $P = A - I$

$$\text{अथवा, } P = A - \frac{PTR}{100}$$

$$[\text{किनकि, व्याज (I)} = \frac{PTR}{100}]$$

$$\text{अथवा, } P + \frac{PTR}{100} = A$$

$$\text{अथवा, } \frac{100P + PTR}{100} = A$$

$$\text{अथवा, } P(100 + TR) = 100A$$

$$\text{अथवा, } P = \frac{100A}{100 + TR}$$

$$\text{त्यसैले, सावाँ निकालने सूत्र : } P = \frac{A \times 100}{100 + TR} \dots \dots (\text{III})$$

उदाहरण 2

2 वर्षमा रु. 900 रकम बढ़ेर रु. 990 भएछ भने त्यही व्याजदरमा कति सावाँको मिश्रधन 5 वर्षमा 762.50 हुन्छ ?

उत्तर : पहिलो सर्त अनुसार,

$$\text{समय (T)} = 2 \text{ वर्ष}$$

$$\text{सावाँ (P)} = \text{रु. } 900$$

$$\text{मिश्रधन (A)} = \text{रु. } 990$$

$$\text{व्याज (I)} = ?$$

$$\text{व्याजदर (R)} = ?$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, व्याज: } I = A - P$$

$$\therefore I = \text{रु. } 990 - \text{रु. } 900$$

$$= \text{रु. } 90$$

$$\text{र व्याजदर : } R = \frac{I \times 100}{PT}$$

$$= \frac{90 \times 100}{900 \times 2}$$

$$= 5\% \text{ प्रतिवर्ष} !$$

दोस्रो सर्त अनुसार,

$$\text{व्याजदर: (R)} = 5\% \text{ प्रतिवर्ष}$$

[किनकि, पहिलो सर्तबाट]

$$\text{सावाँ (P)} = ?$$

$$\text{समय (T)} = 5 \text{ वर्ष}$$

$$\text{मिश्रधन (A)} = \text{रु. } 762.50$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ,}$$

$$\text{सावाँ } P = \frac{A \times 100}{100 + TR}$$

[व्याज नदिएकोमा]

$$\therefore P = \text{रु. } \frac{762.50 \times 100}{100+5 \times 5} \\ = \text{रु. } 610$$

अतः आवश्यक सार्वा रु. 610 हुन्दै।

अध्यात्म 9

1. रु. 6,000 को प्रतिवर्ष $12\frac{1}{2}\%$ का व्याजदरले 10 महिनामा प्राप्त हुने मिश्रधन पत्ता लगाउ ।
2. भुवनले रु. 1,800 सञ्जुलाई 2 वर्षका लागि ऋण दिएछ । सञ्जुले एकमुष्ट रु. 2232 फिर्ता दिइछिन् भने भुवनले कति व्याजदरमा ऋण दिएको रहेछ ?
3. 3 महिनामा रु. 40 व्याज पाउन 5% व्याजदरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ? जम्मा मिश्रधन कति हुन्दै ?
4. 4 वर्षमा प्रतिवर्ष 5% का दरले कति रकमको मिश्रधन रु. 1,500 हुन्दै ?
5. प्रतिवर्ष 5% का दरले रु. 2,500 को कति वर्षमा मिश्रधन रु. 3,250 हुन्दै ?
6. शिवले रामप्यारीलाई 8% प्रतिवर्ष व्याजदरले 5 वर्षका लागि केही रकम ऋण दिएछ । 5 वर्षपछि रामप्यारीले रु. 10,080 एकमुष्ट फिर्ता दिइछिन् भने शिवले कति ऋण दिएको रहेछ ?
7. 4 महिनामा मिश्रधन रु. 56,610 प्राप्त गर्ने 6% व्याजदरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?
8. अनुराधाले 18 महिनाका लागि 12% व्याज पाउने गरी केही धन कृष्णलाई ऋण दिँदा मिश्रधन रु. 708 फिर्ता पाइन् । अनुराधाले कृष्णलाई कति ऋण दिएको हुनुपर्दछ ?
9. रु. 25,000 को कति व्याजदरले 6 महिनामा मिश्रधन रु. 26,250 हुन्दै ?
10. कति व्याजदरले रु. 4000 को 2 वर्षमा मिश्रधन रु. 6000 हुन्दै ?
11. कति समयपछि रु. 24000 को मिश्रधन 10% व्याजदरमा रु. 30000 हुन्दै ?
12. प्रतिवर्ष 5% का दरले कति रुपियाँको मिश्रधन 6 वर्षमा रु. 3250 हुन्दै ?
13. 20% व्याजको दरले रु. 2160 को 4 वर्षमा व्याज कति हुन्दै ? 12% को दरले कति वर्षमा रु. 1800 को त्यतिकै व्याज आउला ?
14. रु. 1080 को 4 वर्षमा 10% प्रतिवर्ष व्याजको दरले कति व्याज होला ? कति वर्षमा रु. 900 को 12% प्रतिवर्ष व्याजको दरले उत्तिकै व्याज आउला ?

तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

10.1 बारम्बारता तालिका (Frequency Table)

तथ्याङ्कशास्त्रमा धेरैजसो समयमा ठूलो परिमाणमा तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी विश्लेषण गर्नुपर्ने हुन्छ । यस्तो अवस्थामा एउटाएउटा मानको बारम्बारता लेखी तालिका निर्माण गर्न कठिन हुन जान्छ । यस कठिनाङ्को समाधानका लागि तथ्याङ्कलाई एउटा निश्चित श्रेणी अन्तर अथवा वर्गान्तर (Class-interval) मा बाँडेर बारम्बारता तालिका बनाइन्छ ।

उदाहरण 1

अर्धार्जस्थल मा.वि. अर्धाखाँचीका कक्षा 8 का 40 जना विद्यार्थीहरूले पूर्णाङ्क 100 भएको गणित विषयको अन्तिम परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क यसप्रकार छ ।

56, 53, 66, 74, 78, 71, 58, 65, 45, 73, 68, 49, 51, 52, 77, 57, 68, 48, 65, 60,

63, 82, 74, 67, 40, 44, 59, 75, 60, 75, 66, 70, 69, 39, 76, 54, 69, 72, 65, 61

उल्लिखित तथ्याङ्कको आधारमा निम्नलिखित अवस्थाहरू हेरौं ।

मिलान चिह्नको प्रयोग (Use of Tallies)

माथिको अवर्गीकृत तथ्याङ्कमा सबभन्दा सानो अङ्क 39 र सबभन्दा ठूलो अङ्क 82 छन् । त्यसैले श्रेणी अन्तर 10 लिएर तथ्याङ्कलाई 6 ओटा श्रेणीमा मिलान चिह्न प्रयोग गरी वर्गीकरण गराउं र हेराउं । प्रत्येक श्रेणीमा कति कति अङ्क पर्दारहेछन् ।

समूहगत श्रेणीमा प्रत्येक श्रेणी अन्तरको बायाँतिरको सङ्ख्यालाई तल्लो सीमा (Lower Limit) र दायाँतिरको सङ्ख्यालाई माथिको सीमा (Upper Limit) भनिन्छ । श्रेणीअन्तरमा रहेको माथिल्लो सीमालाई छाडेर गणना गरिन्छ । जस्तै: श्रेणी अन्तर 30-40 मा 30 तल्लो सीमा र 40 माथिल्लो सीमा हो । श्रेणी अन्तर 30-40 मा 40 लाई गणना गरिएको छैन । त्यसैले श्रेणीअन्तर 30-40 को अर्थ 30 वा सोभन्दा ठूला र 40 भन्दा साना सबै सङ्ख्याहरू ($30 \leq x < 40$) भन्ने हुन्छ । बारम्बारता तालिकामा कुनै तथ्याङ्क वा श्रेणी अन्तरभित्र पर्ने तथ्याङ्क सम्पूर्ण अवलोकनमा कति पटक दोहोरिएको छ भन्ने कुरा उल्लेख गरिन्छ । तालिकामा देखाएजस्तै मिलान चिह्न प्रयोग गर्दा एउटा तथ्याङ्कका लागि एउटा ठाडो धर्को (|) दिइन्छ । पाँचओटा तथ्याङ्क रहेछन् भने चारओटा ठाडो धर्कोलाई एउटा धर्कोले काटिन्छ । जस्तै: ||| ।

श्रेणी (प्राप्ताङ्क)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
30 - 40		1
40 - 50		5
50 - 60		8
60 - 70		14
70 - 80		11
80 - 90		1

संचित बारम्बारता तालिका (Cumulative Frequency Table)

माथिकै बारम्बारता तालिकाबाट प्रत्येक श्रेणीको बारम्बारता क्रमशः जोडौ जाँदा बन्ने बारम्बारता तालिका हेरौ।

संचित बारम्बारता तालिका		
श्रेणी प्राप्ताङ्क (अङ्कमा)	संचित बारम्बारता	(c.f.)
40 सम्म (अर्थात् <40)	1	= 1
50 सम्म (अर्थात् <50)	1+5	= 6
60 सम्म (अर्थात् <60)	6+8	= 14
70 सम्म (अर्थात् <70)	14+14	= 28
80 सम्म (अर्थात् <80)	28+11	= 39
90 सम्म (अर्थात् <90)	39+1	= 40

यसरी प्रत्येक श्रेणीको बारम्बारता क्रमशः जोडौ आउने बारम्बारताको योगफललाई संचित बारम्बारता (Cumulative Frequency) भनिन्छ र यसलाई c.f. ले जनाइन्छ ।

संचित बारम्बारता निकाल्दा -

1. दिइएको तथ्याङ्क (data) लाई सानोदेखि ठूलो कम (बढ्दो कम) मा राख्ने ।
2. प्रत्येक वर्ग वा श्रेणी (class) को बारम्बारतालाई क्रमशः जोडौ लैजाने । अतः

कुनै श्रेणीको संचित बारम्बारता भनेको त्यस श्रेणीको बारम्बारता र त्यसभन्दा माथिका श्रेणीका सबैको बारम्बारताको योगफल हो ।

अध्यात्म 10.1

1. तलका अवर्गीकृत आँकडालाई श्रेणीअन्तर 2 राखी मिलान चिह्नसहित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर ।
17, 11, 21, 12, 23, 9, 27, 18, 23, 18, 16, 20, 23, 20, 19, 24, 22, 22, 14, 19, 21, 17, 11, 24, 22, 23, 9, 9, 27, 16
2. एउटा ईंटा कारखानामा फरकफरक कार्यक्षमता भएका 30 जना कामदारहरूको दैनिक ज्याला रुपियाँमा तलको तथ्याङ्कमा प्रस्तुत गरिएको छ । श्रेणीअन्तर 10 राखी बारम्बारता तालिका बनाई प्रस्तुत गर ।
41, 61, 63, 41, 22, 32, 51, 42, 21, 32, 41, 30, 62, 71, 33, 81, 81, 73, 30, 75, 51, 27, 24, 27, 30, 71, 81, 75, 48, 59
उक्त तथ्याङ्कलाई संचित बारम्बारता तालिकामा पनि प्रस्तुत गर ।
3. गलैचा कारखानामा ठेककामा कपडा बुने हरिमाया विष्टले 30 दिनसम्म दैनिक ज्यालावापत प्राप्त गरेको आमदानी रुपियाँमा तल दिइएको छ । श्रेणीअन्तर 10 राखी बारम्बारता तालिका बनाई प्रस्तुत गर ।

40, 31, 25, 37, 48, 52, 57, 63, 42, 35, 32, 31, 25, 37, 48, 65, 32, 45, 42, 53, 61, 65, 37, 41, 39, 60, 55, 42, 48, 50

उक्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा पनि प्रस्तुत गर ।

4. तलका तथ्याङ्कलाई श्रेणीअन्तर 2 राखी बारम्बारता तालिका र सञ्चित बारम्बारता तालिका दुवैमा प्रस्तुत गर ।

14, 16, 15, 13, 14, 16, 13, 15, 16, 15, 13, 17, 14, 17, 15, 13, 15, 14, 16, 16, 16, 17, 12, 8, 6, 8, 9, 12, 15, 8, 5, 14, 5, 15, 17, 10, 18, 16, 15, 14, 8, 16, 15, 14, 15, 13, 9, 6

10.2 अड्कगणितीय मध्यक (Arithmetic Mean)

एउटा विद्यालयका कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूले 2060 सालको दुईओटा त्रैमासिक परीक्षामा 100 पूर्णाङ्कको गणित विषयमा निम्नानुसारको प्राप्त प्राप्त गरेछन् ।

पहिलो त्रैमासिक : 65, 53, 71, 49, 73, 85, 95, 63, 78, 98

दोस्रो त्रैमासिक : 54, 61, 95, 93, 75, 76, 86, 69, 79, 89

माथिको अड्क तालिकाबाट विद्यार्थीले कुन त्रैमासिक परीक्षामा राम्रो अड्क प्राप्त गरे भन्न सक्छौ ?

उस्ताउस्तै गुण भएका तथ्याङ्कहरूको तुलना गर्ने उपायहरूमध्ये एउटा तथ्याङ्कहरूको औसत मान (Average value) निकालेर तुलना गर्न सकिन्दै ।

यहाँ, दुवै त्रैमासिक अड्कको औसत निकाल्दा :

$$\begin{aligned} \text{पहिलो त्रैमासिक औसत अड्क} &= \frac{65+53+71+49+73+85+95+63+78+98}{10} \\ &= \frac{730}{10} = 73 \end{aligned}$$

र दोस्रो त्रैमासिक औसत अड्क

$$\begin{aligned} &= \frac{54+61+95+93+75+76+86+69+79+89}{10} \\ &= \frac{777}{10} = 77.7 \end{aligned}$$

दुवैको औसत अड्कका आधारमा परीक्षाको उपलब्धि पहिलोभन्दा दोस्रो त्रैमासिकमा राम्रो भयो भनेर भन्न सकिन्दै ।

- औसत अड्कलाई अड्कगणितीय मध्यक पनि भनिन्दै । अड्कगणितीय मध्यक (\bar{x}), जम्मा परिमाण र अवलोकन सङ्ख्या बीचको भागफल हो ।
- अतः

कुनै तथ्याङ्कको औसतलाई मध्यक भनिन्दै ।

अड्कगणितीय मध्यक (\bar{x}) = $\frac{\text{जम्मा परिमाण}}{\text{परिमाणको सङ्ख्या}}$ हुन्दै ।

- यसलाई तथ्याङ्कको भाषामा भन्नुपर्दा :

यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ गरेर जम्मा N ओटा अबलोकन आँकडा वा तथ्याङ्क छन् भने तिनीहरूको अडकगणितीय मध्यक $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{N}$ हुन्छ ।

छोटकरीमा लेख्दा $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ लेखिन्छ जहाँ \sum को अर्थ योग (Sum) र पढदा सिग्मा (Sigma) भनेर पढिन्छ ।

पटकपटक दोहोरिएका र ठूला तथ्याङ्कहरूको मध्यक निकाल्दा माथि उल्लेख गरिएको तरिका र सूत्रबाट गाहो हुन्छ । त्यसैले मध्यक पत्ता लगाउन दोहोरिएका तथ्याङ्क भएका ठाउंभा निम्नानुसारको सूत्र प्रयोग गर्नुपर्दछ :

$$\text{मध्यक } (\bar{X}) = \frac{\sum f x}{\sum f} \text{ वा } \frac{\sum f x}{N}$$

यहाँ f ले बारम्बारता जनाउँछ भने $\sum f x$ ले f र X को गुणनको कुल योग बताउँछ । $\sum f$ भनेको कुल बारम्बारता संख्या भएकाले N ले पनि जनाइन्छ ।

उदाहरण 1

50 पूर्णाङ्कको एउटा परीक्षामा 30 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको निम्नानुसारको प्राप्ताङ्कका आधारमा अडकगणितीय मध्यक निकाल ।

10, 20, 15, 10, 15, 5, 0, 40, 50, 35, 30, 30, 15, 5, 0, 20, 25, 25

20, 25, 30, 25, 30, 30, 25, 30, 30, 10, 10, 0

यस आँकडालाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा -

x	f	fx
0	3	0
5	2	10
10	4	40
15	3	45
20	3	60
25	5	125
30	7	210
35	1	35
40	1	40
50	1	50
$N = \sum f = 30$		$\sum fx = 615$

$$\text{सूत्र, मध्यक } (\bar{X}) = \frac{\sum f x}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{615}{30} = 20.5$$

यसकारण आवश्यक अडकगणितीय मध्यक 20.5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा विद्यालयमा एक दिनभरिको टेलिफोनमा कुराकानी गरेको समयावधि मिनेटमा रेकर्ड गरिएको थियो । निम्नानुसारको तथ्याङ्क प्राप्त भयो ।

3, 5, 12, 2, 8, 9, 4, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 9, 7, 5, 4, 3, 3, 4, 5, 2, 1, 10

(क) टेलिफोनको औसत समयावधि कति समयको रहेछ ? (दुई दशमलव स्थानसम्म)

(ख) यदि प्रतिमिनेट टेलिफोन वार्तालापको दर ₹ 4.00 रहेछ भने उक्त दिन जम्मा कति रुपियाँको टेलिफोन वार्तालाप भएछ ?

उत्तर :

(क) यहाँ,

$$\begin{aligned}\sum X &= 3+5+12+2+8+9+4+3+2+4+5+7+6+9+7+5+4+3+3+4+5+2+1+10 \\ &= 123 \text{ मिनेट}\end{aligned}$$

टेलिफोन वार्तालापको सङ्ख्या (N) = 24

$$\text{त्यसैले औसत समय अर्थात् अड्कगणितीय मध्यक } (\bar{X}) = \frac{\sum X}{N} = \frac{123}{24} \text{ मिनेट} = 5.125 \text{ मिनेट}$$

(ख) जम्मा टेलिफोन वार्तालापको खर्च = $123 \times ₹ 4.00 = ₹ 492$

➤ फरक-फरक समूहहरूको छुट्टाछुट्टै औसत थाहा भए ती सम्पूर्ण समूहका सदस्यहरूको एउटै औसतमान (*Combined Mean*) निकाल्ने तरिका :-

यदि, n_1 ओटा सदस्यहरूको औसत मान \bar{X}_1 र n_2 ओटा सदस्यहरू भएको समूहका सदस्यहरूको औसत मान \bar{X}_2 भए दुवै समूहका सदस्यहरूको संयुक्त औसत मानलाई \bar{X} मान्दा,

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$$

उदाहरण 3

डाँडाखानीदेखि पाहीगाउँसम्मको दौड प्रतियोगितामा कृष्णले नेतृत्व गरेको समूहका 25 जना धावकहरूको औसत गति 8.70 km/hr र श्यामले नेतृत्व गरेको समूहका 35 जना धावकहरूको औसत गति 9.50 km/hr भए, ती दुवै समूहका सदस्यहरूको औसत गति कति होला ?

उत्तर :

यहाँ, कृष्णले नेतृत्व गरेको समूहमा सदस्य सङ्ख्या (n_1) = 25

$$\text{औसत गति } \bar{X}_1 = 8.70 \text{ km/hr}$$

र श्यामले नेतृत्व गरेको समूहमा सदस्य सङ्ख्या (n_2) = 35

$$\text{औसत गति } \bar{X}_2 = 9.50 \text{ km/hr}$$

अब, दुवै समूहका सम्पूर्ण सदस्यहरूको औसत गति \bar{X} भए,

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{25 \times 8.70 + 35 \times 9.50}{25 + 35}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{217.5 + 332.5}{60} \\
 &= \frac{550}{60} \\
 &= 9.16 \text{ km/hr}
 \end{aligned}$$

अतः दुवै सांगका सम्मुखी रसायनको औसत गति 9.16 km/hr रहेछ ।

अध्यात्म 10.2

1. तलका प्रत्येक तथ्याङ्कका अड्कगणितीय मध्यक निकाल ।
 - (क) 3, 5, 4, 7, 6, 8, 7, 13, 10, 5, 6, 7
 - (ख) 15cm, 23cm, 10cm, 12cm, 18cm, 19cm, 8cm
 - (ग) ₹. 15, ₹. 21, ₹. 37, ₹. 18, ₹. 22, ₹. 31
 - (घ) 12kg, 9kg, 6kg, 3kg, 18kg, 21kg, 22kg
 - (ङ) 15cm, 55cm, 32cm, 28cm, 40cm, 49cm
2. एक जना व्यापारीले दिनभरिमा 15 ओटा टेलिफोन बार्तालाप को समयावधि मिनेटमा तल दिइएको छ ।
4, 8, 3, 12, 3, 6, 2, 2, 3, 3, 5, 11, 9, 3, 10
(क) औसत समयावधि कति मिनेट रहेछ ?
(ख) यदि प्रतिमिनेट दस्तुर ₹. 3 तिरुपर्छ भने दिनभरि जम्मा कति खर्च भएछ ?
3. एउटा पुस्तक परालमा 10 दिनसम्मको व्यापारको विवरण निम्नानुसार पाइयो ।
₹. 2035, ₹. 1752, ₹. 1567, ₹. 2570, ₹. 2035, ₹. 2578, ₹. 1896, ₹. 1538, ₹. 3025, ₹. 1965
(क) प्रतिदिन औसत व्यापार कति रहेछ ?
(ख) औसत व्यापारलाई आधारित गरेर निकाल :
(i) 1 महिनामा हुने व्यापार (ii) वर्षभरिमा हुने व्यापार
(ग) यदि जम्मा बिक्रीको 30% नाफा हुदै रहेछ भने वर्षभरिमा कति रुपियाँ नाफा हुनुपर्ने देखिन्छ ?
4. 25 जना केटाको औसत तौल 45.6kg र 32 जना केटीको औसत तौल 39.9kg रहेछ । उनीहरू सबैको औसत तौल पत्ता लगाउ ।
5. 20 जना केटा र 10 जना केटीको औसत उमेर 13 वर्ष रहेछ । केटाहरूको मात्र औसत उमेर 14.2 वर्ष रहेछ भने केटीको औसत उमेर कति होला ।
6. x जना केटा र 14 जना केटीको औसत उचाइ 140.2cm रहेछ । केटाहरूको मात्र औसत उचाइ 140.375 cm र केटीको मात्र 139.8cm रहेछ भने केटाहरू कतिजना हुनुपर्ना ।
7. तलका बारम्बारता तालिकाबाट अड्कगणितीय मध्यक निकाल ।

(क)	टेलिफोन कलको समयावधि (मिनेटमा) (x)	1	2	3	4	5
	टेलिफोन कलको सदृश्या (f)	5	10	13	8	4
(ख)	x	10	12	14	16	18
	f	3	5	9	14	12
(ग)	x	5	6	7	8	9
	f	3	10	14	20	22
(घ)	प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50
	विद्यार्थी सदृश्या	2	3	5	4	3
		60				

10.3 मधियका (Median)

तथ्याङ्कहरूलाई सानोदेखि ठूलो वा ठूलोदेखि सानो क्रममा मिलाएर राख्दा ठीक बीचमा परेको तथ्याङ्कको मानलाई मधियका भनिन्छ । उदाहरणका लागि तथ्याङ्कको श्रेणी 1,3,5 मा 3 बीचमा परेको छ । त्यसैले यो श्रेणीको मधियका 3 हुन्छ ।

मधियका निकालदा तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलो वा ठूलोदेखि सानो जुन क्रममा मिलाए पनि हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा 10 अङ्कको प्रथम त्रैमासिक परीक्षामा 9 जना विद्यार्थीले निम्नानुसार अङ्क प्राप्त गरेक्छन् भने मधियका पत्ता लगाउ ।

4, 5, 3, 6, 7, 4, 5, 9, 8

तरिका पहिलो

दिएको तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलो क्रममा मिलाउँदा -

3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9

यहाँ ठीक बीचमा परेको मान = 5

त्यसैले मधियका 5 हुन्छ ।

तरिका दोश्रो

यहाँ $N = 9$ छ । अब मधियका स्थान पत्ता लगाउँदा $\frac{N+1}{2}$ औं पद $= \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ औं पद

यस अनुसार मधियका रहेको स्थान 5 औं पद हुन्छ । 5 औं पद 5 छ अतः मधियका 5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

निम्नलिखित तथ्याङ्कको मधियका निकाल ।

5, 7, 3, 4, 8, 5, 7, 9

उत्तर : तथ्याङ्कलाई ठूलोदेखि सानो क्रममा मिलाउँदा -

9, 8, 7, 7, 5, 5, 4, 3

पहिलो तरिका

यहाँ, बीचमा परेको तथ्याङ्कको मान एउटा मात्र छैन । यस्तो अवस्थामा बीचमा परेका दुईओटा

मान 5 र 7 को अङ्क गणितीय मध्यक नै मधियका हुन्छ ।

$$\text{त्यसैले, मधिका} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

दोस्रो तरिका

यहाँ, $N = 8$ है। अब मधिकाको स्थान पता लगाउँदा,

$$\text{मधिका स्थान} = \frac{N+1}{2} \text{ और पद} = \frac{8+1}{2} = 4.5 \text{ और पद}$$

यस अनुसार मधिका रहेको स्थान 4.5 और पदमा हुन्छ। अर्थात् 7 र 5 को बीचमा पर्दछ।

$$\text{मधिका} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

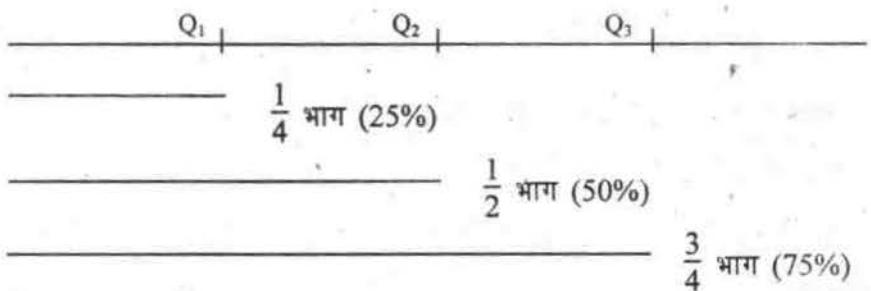
अतः आवश्यक मधिका 6 हुन्छ।

अध्यात्म 10.3

1. तलका प्रत्येक तथ्याङ्कको मधिका र अड्कगणितीय मध्यक निकाल।
 - (क) 7, 9, 7, 11, 10
 - (ख) ₹. 5, ₹. 4, ₹. 8, ₹. 6, ₹. 1, ₹. 5, ₹. 8, ₹. 5, ₹. 3
 - (ग) 1 kg, 3 kg, 5 kg, 1 kg, 3 kg, 14 kg
 - (घ) 4cm, 6cm, 2cm, 5cm, 9cm, 4cm
 - (ड) 6, 8, 7, 6, 9, 6, 7, 8, 6, 6, 9, 6
2. पूर्णाङ्क 10 को एकाइ परीक्षामा 9 विद्यार्थीले निम्नानुसार अड्क पाएछन्।
9, 5, 8, 4, 2, 3, 1, 6, 7
(क) मधिका पता लगाउ। (ख) मधिकाको तल र माथि कतिकति विद्यार्थी हुन्?

10.4 चतुर्थांश (Quartile)

केन्द्रीय स्थानको एउटा मान मधिका (Median) ले दिइएको आवृत्ति वितरण वा अवलोकनहरूको समूहलाई दुई बराबर भागमा बाँड्छ। यसै धारणाले तथ्याङ्कको आवृत्ति वितरण वा अवलोकनहरूलाई चार बराबर भागमा बाँड्ने मानहरू पनि पता लगाउन सकिन्छ। दिइएको वितरण वा अवलोकनहरूलाई चार बराबर भागमा बाँड्नका लागि तीनओटा स्थानहरूको मान आवश्यक पर्ने हुनाले चतुर्थांशहरू पनि जम्मा तीनओटा हुन्छन्। ती चतुर्थांशमध्ये पहिलो चतुर्थांशलाई तल्लो चतुर्थांश (lower quartile), दोस्रो चतुर्थांशलाई मधिका (median) र तेस्रो चतुर्थांशलाई माथिल्लो चतुर्थांश (upper quartile) भनिन्छ। यिनीहरूलाई क्रमशः Q_1 , Q_2 र Q_3 ले जनाइन्छ। Q_1 , Q_2 र Q_3 मा क्रमशः 25%, 50% र 75% अवलोकनहरू रहेका हुन्छन्। यसलाई निम्नानुसार चित्रमा देखाउन सकिन्छ।



अवर्गीकृत तथ्याङ्कको चतुर्थांश निकालनका लागि निम्नानुसार गर्नुपर्दछ ।

1. सर्वप्रथम अबलोकनका तथ्याङ्कहरूलाई बद्दो वा घट्टो कममा मिलाएर राख्ने ।
2. तथ्याङ्कहरूमा $Q_i = \frac{i(N+1)}{4}$ औं स्थानको मान निकाल्नुपर्दछ ।

जहाँ $i = 1, 2, 3$ हुन्छ ।

अब Q_1, Q_2 र Q_3 वारे चर्चा गरौँ ।

$$\text{पहिलो चतुर्थांश } (Q_1) = \frac{1(N+1)}{4} = \frac{N+1}{4} \text{ औं स्थानको मान}$$

$$\text{दोस्रो चतुर्थांश } (Q_2) = \frac{2(N+1)}{4} = \frac{N+1}{2} \text{ औं स्थानको मान र}$$

$$\text{तेस्रो चतुर्थांश } (Q_3) = \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं स्थानको मान हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1

तलका प्राप्ताङ्कवाट Q_1, Q_2 र Q_3 निकाल ।

62, 50, 78, 66, 74, 71, 80

उत्तर : यहाँ दिइएका तथ्याङ्कहरूको समूहलाई कम मिलाएर राख्ना -

50, 62, 66, 71, 74, 78, 80

जम्मा तथ्याङ्क संख्या $N = 7$

$$(क) \text{ पहिलो चतुर्थांश } (Q_1) = \frac{N+1}{4} \text{ औं स्थानको मान}$$

$$= \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ औं स्थानको मान}$$

माथिको तथ्याङ्कमा 2 औं स्थानको मान 62 छ । त्यसैले पहिलो चतुर्थांश $Q_1 = 62$ हुन्छ ।

$$(ख) \text{ दोस्रो चतुर्थांश } (Q_2) = \frac{2(N+1)}{4} \text{ औं स्थानको मान}$$

$$= \frac{2(7+1)}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ औं स्थानको मान}$$

माथिको तथ्याङ्कमा चौथो स्थानमा पर्ने मान 71 छ । त्यसैले दोस्रो चतुर्थांश $Q_2 = 71$ हुन्छ ।

$$(ग) \text{ तेस्रो चतुर्थांश } (Q_3) = \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं स्थानको मान}$$

$$= \frac{3(7+1)}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ औं स्थानको मान}$$

माधिको तथ्याङ्कमा छैठौं स्थानमा पर्ने मान 78 छ । त्यसैले तेस्रो चतुर्थांश $Q_3 = 78$ हुन्छ । तर $\frac{i(N+1)}{4}$ को मान पूर्णसङ्ख्यामा नआउन पनि सक्छ । यस्तो अवस्थामा चतुर्थांश पर्ने स्थानका दुइओटा मानहरू बीचको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुपर्छ । तलको उदाहरण हेरौं ।

उदाहरण 2

30 जना विद्यार्थीहरूले कक्षा 8 को गणित विषयको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार दिइएको छ । यस तथ्याङ्कबाट Q_1 , Q_2 र Q_3 पत्ता लगाऊ ।

14, 19, 26, 34, 37, 39, 42, 44, 44, 44, 44, 45, 47, 48, 49, 50

51, 58, 68, 70, 70, 71, 75, 75, 75, 84, 91, 91, 97, 98

उत्तर :

यहाँ दिइएका तथ्याङ्कहरू कमानुसार मिलेका छन् ।

(क) $Q_1 = \frac{1(N+1)}{4}$ औं स्थानको मान = $\frac{1(30+1)}{4} = \frac{31}{4} = 7.75$ औं स्थानको मान दिइएको तथ्याङ्कमा 7 औं स्थानको मान 42 र 8 औं स्थानको मान 44 छ ।

$$\begin{aligned} \text{त्यसैले } Q_1 &= 42 + (8 \text{ औं स्थानको मान} - 7 \text{ औं स्थानको मान}) \times 75\% \\ &= 42 + (44 - 42) \times 0.75 = 43.5 \text{ हुन्छ} । \end{aligned}$$

(ख) $Q_2 = \frac{2(N+1)}{4}$ औं स्थानको मान = $\frac{2(30+1)}{4} = \frac{62}{4} = 15.5$ औं स्थानको मान दिइएको तथ्याङ्कमा 15 औं स्थानको मान 49 र 16 औं स्थानको मान 50 छ ।

$$\begin{aligned} \text{त्यसैले } Q_2 &= 49 + (16 \text{ औं स्थानको मान} - 15 \text{ औं स्थानको मान}) \times 50\% \\ &= 49 + (50 - 49) \times 0.5 = 49.5 \text{ हुन्छ} । \end{aligned}$$

(ग) $Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ औं स्थानको मान = $\frac{3(30+1)}{4} = \frac{93}{4} = 23.25$ औं स्थानको मान दिइएको तथ्याङ्कमा 23 औं स्थानको मान 75 र 24 औं स्थानको मान 75 छ ।

$$\begin{aligned} \text{त्यसैले } Q_3 &= 75 + (24 \text{ औं स्थानको मान} - 23 \text{ औं स्थानको मान}) \times 25\% \\ &= 75 + (75 - 75) \times 0.25 = 75 \text{ हुन्छ} । \end{aligned}$$

अतः $Q_1 = 43.5$, $Q_2 = 49.5$ र $Q_3 = 75$ हुन्छ ।

अन्याया 10.4

1. तलका प्रत्येक तथ्याङ्कको पहिलो, दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांश निकाल ।

(i) 52, 50, 68, 56, 64, 61, 72

(ii) 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13

(iii) 20, 40, 60, 100, 120, 140, 160

(iv) 2, 3, 3, 4, 3, 5, 6, 3, 4, 4, 5, 7, 6, 5, 4, 5, 3, 5, 6

2. 30 जना विद्यार्थीले कक्षा 8 को गणित विषयको परीक्षामा प्राप्त गरेको निम्नानुसारको तथ्याङ्कबाट Q_1 , Q_2 र Q_3 , निकाल ।
 12, 17, 24, 32, 35, 37, 40, 42, 42, 42, 42, 43, 45, 46, 47
 48, 49, 56, 64, 68, 68, 69, 73, 73, 73, 82, 89, 89, 95, 96
3. 12 जना विद्यार्थीहरूसँग भएको रकमको तथ्याङ्क तल दिइएको छ । प्रथम, दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांश निकाल ।
 (र.) 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 12, 16, 18, 20, 22

10.5 रीत (Mode)

जानकारी तथा तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गर्ने क्रममा कहिलेकाहीं एउटै जानकारी धेरै पटक दोहोरिन आउँछ । उदाहरणका लागि कक्षा 5 का विद्यार्थीले कति नम्बरका जुता प्रयोग गर्दा रहेछन् भनेर जानकारी लिन खोजदा 10 जनाले निम्नानुसार नापका जुता लगाएको पाइयो ।

4, 3, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 4, 3

3, 3, 3, 3, 3

4, 4, 4, 4

5

यस जानकारीलाई सानोबाट 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4

ठूलो क्रममा मिलाउँदा -

यहाँ सबभन्दा बढी प्रयोग भएको जुताको नाप = 3 नम्बर

5 पटक

4 पटक

1 पटक

तथ्यमैले आवश्यक रीत (Mode) 3 हुन्छ ।

तथ्याङ्कको सङ्कलनमा सबभन्दा बढी वारंवारता भएको मानलाई रीत भनिन्छ ।

आठ्यात्स 10.5

- तलका प्रत्येक तथ्याङ्कको रीत (Mode) पता लगाऊ ।
 - 6, 3, 5, 6, 3, 1, 6
 - रु. 5, रु. 3, रु. 3, रु. 2, रु. 3, रु. 7, रु. 6
 - 17cm, 5cm, 16cm, 17cm, 5cm, 5cm, 6cm, 12cm, 5cm
 - 13kg, 3kg, 13kg, 12kg, 12kg, 13kg, 15kg, 15kg
 - 10cm, 15cm, 12cm, 10cm, 12cm, 11cm, 12cm, 9cm
- एउटा किला उत्पादन गर्ने कारखानाबाट 3cm नापका किलाहरू उत्पादन हुँदा रहेछन् । 14 ओटा नमुना किलाको नाप यसप्रकार छ :

3 cm, 2.9 cm, 2.5 cm, 2.9 cm, 3.1 cm, 2.5 cm, 3.1 cm, 2.9 cm, 3 cm, 2.5 cm,
 2.5 cm, 3 cm, 3 cm, 2.5 cm

यो तथ्याङ्कको आधारमा रीत पता लगाऊ ।

10.6 तथ्याङ्कको विस्तार (Range)

अङ्क गणितीय मध्यकको आधारमा तथ्याङ्कको विश्लेषण गर्दा कहिलेकाही दुईओटा तथ्याङ्क (data) को एउटै मध्यक आउन सक्छ, तर गुणका आधारमा आँकडाहरूले फरक फरक निष्कर्ष देखाएका हुन्छन्। उदाहरणका लागि दुई ओटा परीक्षामा 10 जना विद्यार्थीले निम्नानुसार अङ्क ल्याएछन्।

विद्यार्थी रोल न.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
पहिलो परीक्षा :	3	2	3	4	2	5	4	3	2	2
दोस्रो परीक्षा :	1	2	1	1	2	1	1	2	10	9

यहाँ, दुवै परीक्षाको औसत अङ्क $3\frac{3}{4}$ । तर यसको आधारमा दुवै परीक्षामा विद्यार्थीको स्तर एउटै छ भनेर भन्नु त्यति उचित हुन्दैन। यस्तो अवस्थामा तथ्याङ्कको विस्तार कसरी भएको छ भनेर हेर्नु उचित हुन्दै। तथ्याङ्कको विस्तार भन्नाले तथ्याङ्कको सबभन्दा ठूलो र सबभन्दा सानो मानको अन्तरलाई बुझाउँदै। माथिको उदाहरणमा पहिलो परीक्षामा प्राप्ताङ्क 2 देखि 5 सम्म विस्तारित छ। त्यसैले सबैभन्दा सानो र सबैभन्दा ठूलो प्राप्ताङ्कको फरक = $5-2 = 3$ छ। त्यसै दोस्रो परीक्षामा सोही फरक $10-1 = 9$ छ। यहाँ प्राप्ताङ्कहरूको औसत मान एउटै भए तापनि तथ्याङ्कको विस्तारको प्रकृति भने फरक फरक छ।

$$\text{तथ्याङ्कको विस्तार (Range)} = (\text{सबभन्दा ठूलो मान}) - (\text{सबभन्दा सानो मान})$$

उदाहरण 1

विस्तार पत्ता लगाउ : 6, 8, 14, 5, 2, 7, 22, 8, 4

उत्तर : तथ्याङ्कको सबभन्दा ठूलो मान = 22

तथ्याङ्कको सबभन्दा सानो मान = 2

$$\begin{aligned} \text{त्यसैले विस्तार} &= \text{सबभन्दा ठूलो मान} - \text{सबभन्दा सानो मान} \\ &= 22-2 = 20 \end{aligned}$$

अध्यात्म 10.6

- कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीको उचाइ निम्नानुसार पाइयो।
98cm, 110cm, 95cm, 112cm, 115cm, 105cm, 111cm, 97cm, 110cm, 120cm
(क) सबभन्दा अग्लो विद्यार्थीको उचाइ कति रहेछ ?
(ख) सबभन्दा होचो विद्यार्थीको उचाइ कति रहेछ ?
(ग) विस्तार कति हुन्दै ?
- कक्षा 5 का विद्यार्थीले निम्नअनुसार खाजामा खर्च गरे।
रु. 15, रु. 18, रु. 12, रु. 10, रु. 17, रु. 22, रु. 20, रु. 27
(क) सबभन्दा बढी कति रकम खर्च गरेछ ?
(ख) सबभन्दा कम खर्च गर्नेले कति रकम खर्च गरेछ ?
(ग) विस्तार कति हुन्दै ?

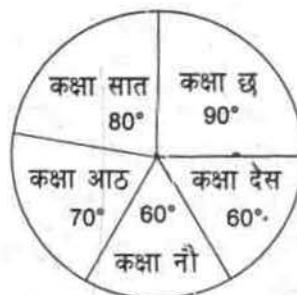
3. तलका प्रत्येक तथ्याङ्कमा विस्तार निकाल।
- (क) 1, 2, 0, 1, 3, 0, 2, 1, 3, 5
 (ख) 5cm, 15cm, 12cm, 7cm, 2cm, 18cm, 6cm, 24cm
 (ग) 15kg, 7kg, 5kg, 7kg, 20kg, 50kg, 20kg, 12kg
 (घ) 5l, 7l, 2l, 6l, 11, 4l, 3l, 8l

10.7 वृत्त चित्र (Pie-Chart)

प्यारागन माध्यमिक विद्यालयमा कक्षा 6 देखि कक्षा 10 सम्म पढ्ने जन्मा 180 जना विद्यार्थीहरूको कक्षागत विद्यार्थी विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ।

कक्षा	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	45	40	35	30	30

माथि दिइएको कक्षागत विद्यार्थी विवरणलाई अर्को रूपमा निम्न दिएअनुसारको चित्रमा पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्दै।



प्यारागन मा.वि. विद्यार्थी विवरण

यसरी सङ्ख्यात्मक तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तका खण्डहरूमा प्रस्तुत गरिन्दै भने, त्यसरी बनेको चित्रलाई वृत्तचित्र भनिन्दै।

वृत्तचित्र कसरी बनाउने ?

हामीलाई के थाहा छ भने एउटा वृत्तको केन्द्रमा बनेको केन्द्रीय कोण 360° को हुन्दै। त्यसकारण वृत्तचित्र बनाउदा दिइएका तथ्याङ्कहरूलाई 360° का खण्डहरूमा प्रस्तुत गर्नुपर्ने हुन्दै। अतः माथिको तालिकामा प्रस्तुत गरिएका पूरा विद्यार्थी सङ्ख्या (180 जना) ले 360° लाई जनाएको हुनुपर्न्यो।

त्यसकारण, 180 जना विद्यार्थी = 360°

$$1 \text{ जना विद्यार्थी} = \frac{360}{180} = 2^{\circ}$$

यहाँ 1 जना विद्यार्थी बराबर 2° हुने हुँदा, यही आधारमा प्रत्येक कक्षामा पढ्ने विद्यार्थी सङ्ख्यालाई डिग्रीमा रूपान्तर गर्न सकिन्दै। अथवा,

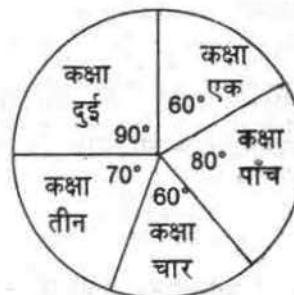
$$1 \text{ जना विद्यार्थी} = 2^{\circ}$$

कक्षा 6 मा पढ्ने 45 जना विद्यार्थी $= 2 \times 45^{\circ} = 90^{\circ}$
 सोहीअनुसार कक्षा 7 मा पढ्ने 40 जना विद्यार्थी $= 2 \times 40 = 80^{\circ}$

यहीअनुसारले सबै कक्षामा पढ्ने विद्यार्थी सङ्ख्यालाई डिग्रीमा रूपान्तर गरी वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 7

तल एउटा विद्यालयका कुल छात्रा सङ्ख्या 720 जनालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । चित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर देउ -



एउटा विद्यालयमा कक्षागत छात्रा सङ्ख्या

1. कक्षा एकमा कति जना छात्राहरू रहेछन् ?
2. कक्षा पाँचमा कति जना छात्राहरू पढ्दा रहेछन् ?

उत्तर: दिइएको वृत्तचित्रमा 720 छात्राहरूलाई 360° मा प्रस्तुत गरिएको हुँदा

$$360^{\circ} = 720 \text{ छात्रा भयो}$$

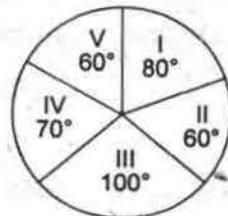
$$\therefore 1^{\circ} = \frac{720}{360} = 2 \text{ छात्रा}$$

1. कक्षा एकको लागि वृत्तचित्रमा 60° दिएको हुँदा $60 = 2 \times 60$ छात्रा $= 120$ छात्रा
2. सोहीअनुसार कक्षा पाँचका लागि वृत्तचित्रमा 80° छ ।

$$\therefore 80^{\circ} = 2 \times 80 = 160 \text{ जना छात्रा ।}$$

अध्यायका 10.7

1. दिइएको चित्र अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर लेख ।
 - (क) कुन कक्षामा सबैभन्दा बढी विद्यार्थी रहेछन् ?
 - (ख) यदि 1° बराबर दुई विद्यार्थी भए, कक्षा चारमा कति विद्यार्थी रहेछन् ?
 - (ग) जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या कति होलान् ?



2. एउटा विद्यालयका कुल छात्रा सङ्ख्या 720 जनालाई संगैको वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।
 (क) कक्षा 1 मा कति छात्राहरू छन् ?
 (ख) कक्षा 5 मा कति छात्राहरू छन् ?



3. प्यारागन मा. वि. मा यातायातका विभिन्न साधनहरू प्रयोग गरी विद्यार्थीको विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ । ती तथ्याङ्कका आधारमा वृत्तचित्र बनाउ ।

साधन	पैदल	बस	साइकल	कार
विद्यार्थी सङ्ख्या	25	15	40	20

4. तलको तालिकामा हावामा भएका विभिन्न ग्रासहरूको प्रतिशत दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा देखाउ ।

ग्रास	नाइट्रोजन	अविसजन	अरू
प्रतिशत	78	20	2

5. तलको तालिकामा एउटा विद्यालयमा भएका शिक्षकहरूको तह र सङ्ख्या दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा देखाउ ।

तह	माध्यमिक	नि.मा.वि.	प्रा.वि.
सङ्ख्या	6	12	18

6. तलको तालिकामा एउटा परिवारको मासिक बजेट दिइएको छ । त्यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर ।

शीर्षक	खाना	शिक्षा	घरभाडा	यातायात	विविध	जम्मा
खर्च (रु)	1500	500	1500	500	1000	5000

10.8 रेखाचित्र (Line graph)

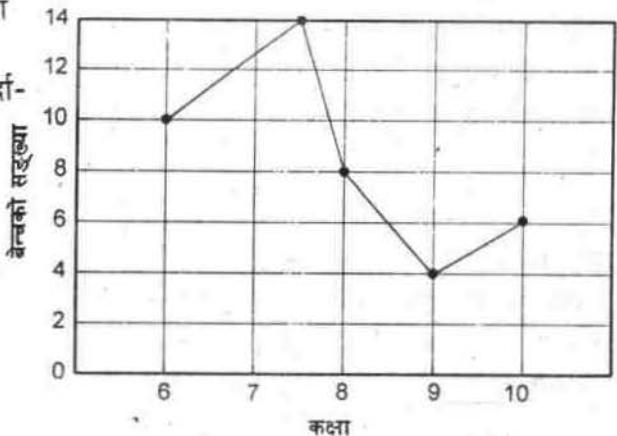
दिइएका आँकडा र बारम्बारतालाई ग्राफमा अद्वितीय जोडिएका रेखालाई रेखाचित्र भनिन्छ ।

उदाहरण ४

निम्न तालिकामा दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा देखाउ ।

कक्षा	6	7	8	9	10
बेन्चको सङ्ख्या	10	14	8	4	6

उत्तर: तालिकामा दिइएका तथ्याङ्कहरूमा
कक्षालाई X - अक्ष र वेचको
सङ्ख्यालाई Y - अक्षमा प्रस्तुत गर्दा-



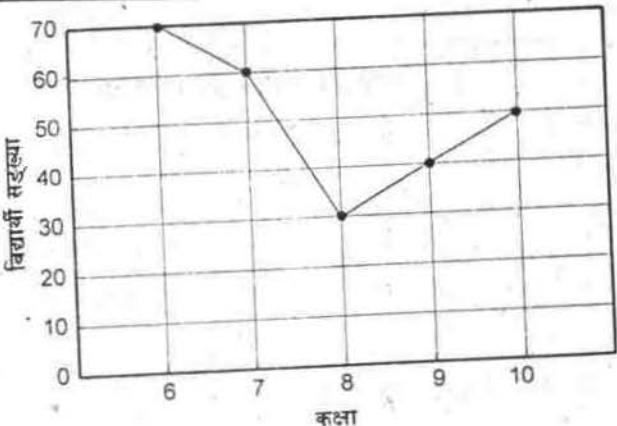
उदाहरण 9

तलको तालिकामा दिइएका कक्षागत विद्यार्थी सङ्ख्यालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

कक्षा	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	70	60	30	40	50

उत्तर :

दिइएका विद्यार्थीहरूमध्ये विद्यार्थी
सङ्ख्यालाई Y - अक्ष र कक्षालाई
X - अक्षमा राखी विन्दुहरू पता
लगाई रेखा खिच्दा-

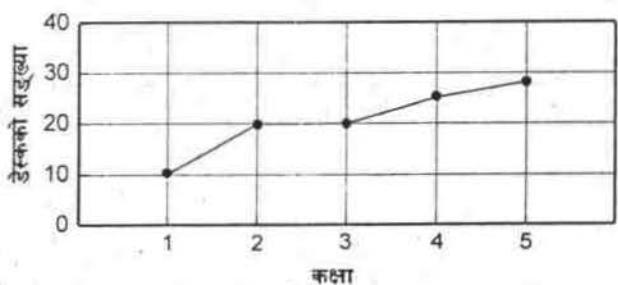


उदाहरण 10

तल दिइएको रेखाचित्रका आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर ।

उत्तर:

दिइएको रेखाचित्रका
आँकडाहरूलाई तालिकामा
प्रस्तुत गर्दा -



माथिको रेखाचित्रलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा -

कक्षा	1	2	3	4	5
डेस्कको सङ्ख्या	10	20	20	25	28

अध्याय 10.8

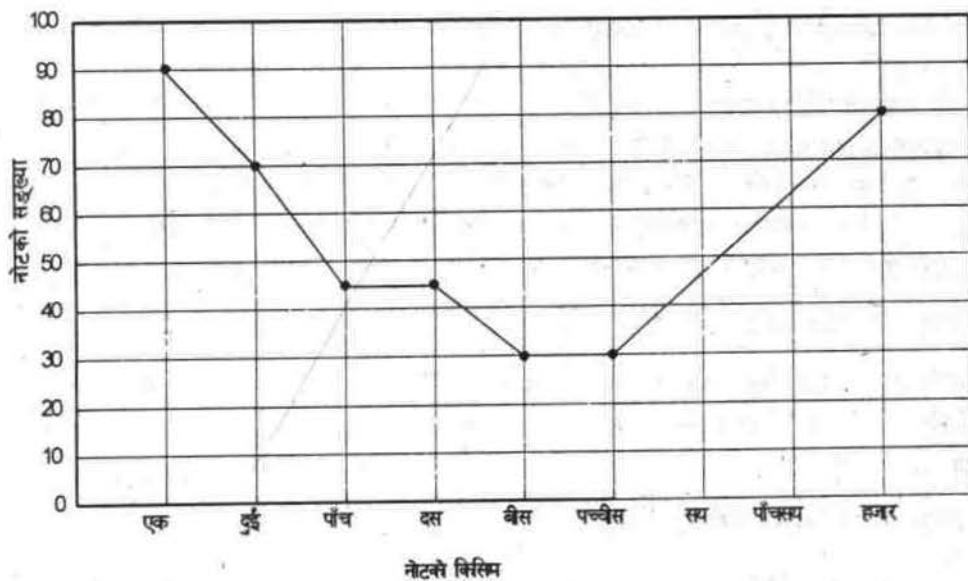
1. निम्न आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

कक्षा	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	50	75	80	80	50

2. श्री जीवनज्योति मा.वि. मा प्रत्येक कक्षाका विद्यार्थीहरूले पढ्ने सन्दर्भ पुस्तकहरूको सङ्ख्या निम्न तालिकामा दिइएको छ । सो तालिकालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

कक्षा	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
सन्दर्भ सामग्री	10	12	9	16	16	25	26	24	18	17

3. एउटा व्यापारीसँग भएका नोटहरूको सङ्ख्या निम्न रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । रेखाचित्रका आँकडालाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर र तलका प्रश्नहरूको उत्तर देउ ।



- (क) कति रुपियाँका नोटहरू सबैभन्दा बढी रहेछन् ?
 (ख) कति कति रुपैयाका नोटहरू बराबर सङ्ख्यामा रहेछन् ?

११.१ बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरू (Polynomials)

सङ्ख्या र चलराशिको गुणनका रूपमा व्यक्त गरिएको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एकपदीय (Monomial) अभिव्यञ्जक भनिन्छ । जस्तै : $3x$, $\sqrt{2}xy$, $-x^2y$ आदि ।

- एकपदीयहरूको योगका रूपमा व्यक्त गरिएको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय (Polynomial) अभिव्यञ्जक भनिन्छ । जस्तै : $3x + 2$, $x^2 - 5x + 4$, $4ab^2 - ab + 3ab$ आदि ।

बहुपदीयहरूमध्ये दुईओटा मात्र पदहरू भएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूलाई द्विपदीय (Binomial) अभिव्यञ्जक र तीनओटा मात्र पदहरू भएकालाई त्रिपदीय (Trinomial) अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।

यदि कुनै एकभन्दा बढी पदहरू भएको अभिव्यञ्जकका चलहरूको घाताइक पूर्णसङ्ख्या भए त्यस अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय अभिव्यञ्जक (Polynomial) भनिन्छ ।

जस्तै : $\frac{1}{2}x + yz$, $4a + \sqrt{5}$ आदि द्विपदीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् र $3x^2 + 2x - 1$, $a^4 + a^3 + a^2$ आदि

त्रिपदीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् । तर, $x^3 + \frac{3}{x^2}$ भने बहुपदीय अभिव्यञ्जक हैन किनकि दोस्रो पदमा

रहेको चलराशिहरूको घाताइक -2 हुन्छ । [$\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$]

बीजीय अभिव्यञ्जकहरूलाई अर्को तरिकाबाट त्यस्को डिग्रीको आधारमा पनि वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ।

उदाहरणका लागि

कुनै एकपदीय अभिव्यञ्जकमा चलराशि जति पटक गुणन गरिन्छ, त्यति पटक गुणन गरिएको सङ्ख्यालाई सो एकपदीयको डिग्री (Degree) भनिन्छ । जस्तै:

- $7x^3$ मा चल राशि x तीनपटक गुणन गरिएकाले यसको डिग्री ३ भयो ।
 - $-x^2y^5$ मा चलराशि x दुइपटक र y पाँचपटक गुणन गरिएकाले यसको डिग्री $2+5=7$ भयो ।
- बहुपदीयमा जुन पदको डिग्री सबभन्दा ठूलो छ त्यसको डिग्री त्यही हुन्छ ।

डिग्री १ : $3x$, $-8a$, $\frac{7}{2}z + 3$ आदि ।

डिग्री २ : $4d^2$, $9x+7xy$, $\sqrt{2}m^2 + \sqrt{3}m - 5$ आदि ।

डिग्री ३ : $6x^3$, $3xyz$, $-4mn^2 + 1$ आदि ।

उदाहरण १

तलका प्रत्येक बहुपदीयको डिग्री लेख ।

(क) $3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$

यस बहुपदीयको चलराशिको सबभन्दा ठूलो घाताइक ३ भएकोले यसको डिग्री ३ हो ।

(ख) $6x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 6x^5 - 3x^3$

$$\begin{aligned} &= 6x^5 - 6x^4 - 3x^4 + 8x^3 - 3x^3 \\ &= -3x^4 + 5x^3 \end{aligned} \quad [\text{पहिले सरल गर्नुपर्छ ।}]$$

यहाँ बहुपदीयको डिग्री 4 हुन्छ ।

$$(ग) 3x^4y - x^2y^2 + xy$$

यस बहुपदीयमा दुई चलराशि भएकाले प्रत्येक पदको चलराशिको घातात्मक जोड़

$$\text{पहिलो पदमा } 4+1 = 5 \quad \text{दोस्रो पदमा} \quad 2+2 = 4$$

$$\text{तेस्रो पदमा } 1+1 = 2$$

त्यसैले बहुपदीयको डिग्री 5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $x = 2$ भए $5x^3 + x^2 - 10x$ को मान निकाल

उत्तर :

$$\begin{aligned} \text{यहाँ दिइएको बहुपदीय} &= 5x^3 + x^2 - 10x \\ &= 5 \times 2^3 + 2^2 - 10 \times 2 \quad (x = 2 \text{ प्रतिस्थापन गर्दा}) \\ &= 5 \times 8 + 4 - 20 \\ &= 24 \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.1

1. तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूमध्ये कुनकुन बहुपदीय हुन छुट्ट्याऊ ।

(क) $3x^2 + 11x - 4$	(ख) $-8x^2y^2$	(ग) $\sqrt{x+6}$
(घ) $\sqrt{2}x - xy - 8y^2$	(ड) $\frac{3x - 4y + 5z}{2}$	(ज) $\frac{3y^3 - 4}{y}$

2. पदको आधारभा तलका प्रत्येक बहुपदीयको वर्गीकरण गर ।

(क) $9x + 2y + 3z$	(ख) $-2x^2 + y^2$	(ग) $-5x$
(घ) $3x + 1$	(ड) $p + q + 1$	(च) $4a^2 + 3b^2 - 2c$

3. प्रत्येक बहुपदीयको डिग्री लेख ।

(क) $4x - 2xy + y$	(ख) $5x^2 - /x - 2x + 3$	(ग) $2p - p^2 + p^3 - 2p$
(घ) $x^2 + 2 + 3x^3 - 5 + 9xy^4$	(ड) $x^3y^3 + 2y^2 + 3y - 7y^2 + 15y - 10$	

4. मान पत्ता लगाऊ ।

(क) $x = 4$ भए, (a) $x^2 + 6x - 3$	(b) $-x^2 + 3x + 16$
(ख) $x = -1, y = 5$ भए, $3x^2 - 2xy + y^2$	
(ग) $a = 3, b = -2$ भए, $2a^2 - ab - 3b^2 + 7$	
(घ) $x = -2, y = 1$ भए, $4x^2y - 2x^2 + y^2 - 7$	

5. यदि $a = 4$ र $b = 5$ भए $a^2 + 2ab + b^2$ को मान पत्ता लगाऊ ।

6. यदि $x = 2$ र $y = 3$ भए $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ को मान पत्ता लगाऊ ।

7. यदि $x = 4$ र $y = 2$ भए $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ को मान पत्ता लगाऊ ।

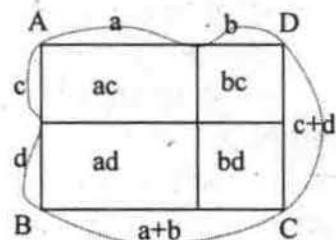
8. यदि $a = 2$ र $b = 3$ भए $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$ को मान पत्ता लगाऊ ।

11.2 गुणन (Multiplication)

11.2.1 द्विपदीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणन (Multiplication of binomials)

$(a+b)(c+d)$ को गुणनफल निकालन दार्यातिर दिएको चित्रबाट विचार गरौँ।

$(a+b)(c+d)$ ले लम्बाइ $a+b$ र चौडाइ $c+d$ भएका आयत ABCD को क्षेत्रफल जनाउँछ र चित्रमा देखाएको 4 ओटा आयताकार भागहरूको क्षेत्रफल जोड्दा आएको योगफल आयत ABCD को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ।



त्यसैले, $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ हुन्छ। माथिको छलफलबाट :

द्विपदीय अभिव्यञ्जकको गुण गर्दा गुणन गर्ने अभिव्यञ्जकको दुईओटा पदहरूले अर्को अभिव्यञ्जकको दुवै पदहरूलाई अलग-अलग गुणन गरेर गुणनफललाई एक ठाउमा जम्मा गर्नुपर्दछ। जस्तै -

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

1 2 3 4

उदाहरण 1

गुणन गर

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (क) $(x+3)(x+7)$ | (ख) $(x+a)(x+b)$ |
| (ग) $(p-5)(2p-3)$ | (घ) $(x-3y)(2x+y)$ |

उत्तर :

$$\begin{aligned}
 \text{(क)} \quad & (x+3)(x+7) = x(x+7)+3(x+7) \\
 & = x^2+7x+3x+21 \\
 & = x^2+10x+21 \\
 \text{(ख)} \quad & (x+a)(x+b) = x(x+b)+a(x+b) \\
 & = x^2+ax+bx+ab \\
 & = x^2+(a+b)x+ab \\
 \text{(ग)} \quad & (p-5)(2p-3) = p(2p-3)-5(2p-3) \\
 & = 2p^2-3p-10p+15 \\
 & = 2p^2-13p+15 \\
 \text{(घ)} \quad & (x-3y)(2x+y) = x(2x+y)-3y(2x+y) \\
 & = 2x^2+xy-6xy-3y^2 \\
 & = 2x^2-5xy-3y^2
 \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.2.1

1. गुणन गर ।

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| (क) $(x+2)(x+3)$ | (ख) $(p-1)(p+3)$ | (ग) $(a-2)(a-4)$ |
| (घ) $(r+6)(r-8)$ | (ड) $(c+3)(c+8)$ | (च) $(x-12)(x+8)$ |

2. सरल गर ।

- | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------|
| (क) $(a+3)(4a-3)$ | (ख) $(2x-5)(3x-7)$ | (ग) $(x-3y)(2x+7y)$ |
| (घ) $(a+3b)(2a+3b)$ | (ड) $(9x-2y)(7x+8y)$ | (च) $(7x+2k)(3x-k)$ |
| (छ) $(11x-12y)(11x+12y)$ | (ज) $(4p-5q)(5q-2p)$ | (झ) $(3p-4y)(5p-8y)$ |
| (ञ) $(ax+by)(cx+dy)$ | | |

3. गुणन गर ।

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| (क) $(a+4)(a+9)+(a+3)(a+6)$ | (ख) $(x+3)(x-2)-(x+5)(x-2)$ |
| (ग) $3(x+5)(x-4)-(2x-3)(x-2)$ | (घ) $2(p-3)(2p-3)-4(2p-5)(p+6)$ |

11.2.2 दुई पदहरूको योग र अन्तरको गुणनफल

(Multiplication of the sum and difference of two terms)

संगैको चित्रमा आयत ABFE को क्षेत्रफल कति तरिकाले निकाल्न सक्छौ ? प्रयास गरी हेर । के आयत ABFE को क्षेत्रफल आयतहरू ABCD र CDEF को क्षेत्रफलको योगसँग वरावर हुन्छ ?

यहाँ, आयत ABCD को क्षेत्रफल = $a(a-b)$ (i)

आयत CDEF को क्षेत्रफल = $b(a-b)$ (ii)

आयत ABFE को क्षेत्रफल = $(a+b) \times (a-b)$ (iii)

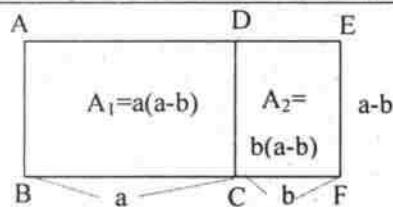
अब, (i), (ii) र (iii) बाट

ABFE को क्षेत्रफल = $(ABCD+CDEF)$ को क्षेत्रफल

अथवा, $(a+b)(a-b)$ = $a(a-b)+b(a-b)$

$$= a^2 - ab + ab - b^2$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



उदाहरण 1

गुणनफल पता लगाऊ।

(क) $(x+y)(x-y)$ (घ) $(m+n)(m-n)$

उत्तर: (क) $(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$

(ख) $(m+n)(m-n) = m^2 - mn + mn - n^2 = m^2 - n^2$

माध्यिको छलफलबाट

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

= (पहिलो पदको वर्ग) - (दोस्रो पदको वर्ग)

उदाहरण 2

गुणनफल निकाल।

(क) $(3m+2n)(3m-2n)$ (घ) 297×303

उत्तर: (क) $(3m+2n)(3m-2n)$ (घ) 297×303
 $= (3m)^2 - (2n)^2$ $= (300-3)(300+3)$
 $= 9m^2 - 4n^2$ $= 300^2 - 3^2$
 $= 90000 - 9$
 $= 89991$

अध्याय 11.2.2

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा गुणनफल पता लगाऊ।

(क) $(a+2)(a-2)$ (घ) $(x-3)(x+3)$ (ग) $(4+p)(4-p)$

(घ) $(x+y)(x-y)$ (ड) $(m+n)(m-n)$ (च) $(a-b)(a+b)$

(छ) $(3x+2)(3x-2)$ (ज) $(m-9)(m+9)$ (झ) $(4+5x)(4-5x)$

(ञ) $(x+3y)(x-3y)$ (ट) $(k+2m)(k-2m)$ (ठ) $(5p-t)(5p+t)$

(ड) $(8h-k)(8h+k)$ (ढ) $(10x+11y)(10x-11y)$ (ण) $(8m-9n)(8m+9n)$

2. दुई उस्ता-उस्तै सङ्ख्याहरूको योग र अन्तरमा व्यक्त गरी गुणनफल निकाल।

(क) 9×11 (घ) 51×49 (ग) 58×62

(घ) 78×82 (ड) 47×53 (च) 75×85

11.2.3 बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणन

(Multiplication of Polynomials)

दुईपदीय अभिव्यञ्जकले दुई पदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा एउटा अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदले अर्को अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदहरूलाई गुणन गरेर्भै बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणन गर्दा एउटा अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदले अर्को अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदहरूलाई गुणन गर्नुपर्छ।

उदाहरण 1

गुणनफल पता लगाऊ :

(क) $(a+b)(a+b+c)$

उत्तर: (क) $(a+b)(a+b+c)$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + ac + bc$$

(ख) $(x-y)(x-y+m-n)$

(ख) $(x-y)(x-y+m-n)$

$$= x^2 - xy + mx - nx - xy + y^2 - my + ny$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + mx - nx - my + ny$$

उदाहरण 2

गुणनफल पता लगाऊ :

(क) $(p+q+r)(a+b+c+d)$

उत्तर: (क) $(p+q+r)(a+b+c+d)$

$$= pa + pb + pc + pd + qa + qb + qc + qd + ra + rb + rc + rd$$

(ख) $(a+b+c+d)(m-n+r+s)$

$$= ma - na + ra + sa + mb - nb + rb + sb + mc - nc + rc + sc + md - nd + rd + sd$$

अध्यात्म 11.2.3

1. तलको प्रत्येक अवस्थामा गुणनफल पता लगाऊ ।

(क) $(a+b)(m+n+r)$

(ख) $(p-2)(q+r+3)$

(ग) $(x-y)(3a-2+c)$

(घ) $(x-3)(2a-b-c)$

(ङ) $(a-b)(2a-b-3c)$

(च) $(3x-6y)(3x-2y+z)$

(छ) $(a+b)(x-y-2a+3b)$

(ज) $(p-q)(2x-3y-a+2b)$

(झ) $(m-2n)(x-y-2a+3b)$

(झ) $(3x-2y)(3x-y+a+b)$

(ट) $(p+q)(2p+3q-r-25)$

(ठ) $(10a-9b)(a+b-2ab-3bc)$

2. तलका प्रत्येक अवस्थामा गुणनफल पता लगाऊ ।

(क) $(a+b-c)(a-b+c)$

(ख) $(2a-3b+c)(a-2b-2c)$

(ग) $(m-n-2)(m-2n+3)$

(घ) $(2p-3q+r)(3r-2q-p)$

(ङ) $(2a-3b-c)(3b-2c-5a)$

(च) $(3x-y-2z)(4x-3y-z)$

(छ) $(2x-y+a)(x-y-2a+b)$

(ज) $(2a+3b-c)(a-b-2c+d)$

(झ) $(x-2y+3z)(2x-y+4z-a)$

(झ) $(10m+9n+s)(m-20n-3s-p)$

(ट) $(6p-7q-r)(2p+3q-4r+s)$

(ठ) $(10a+12b-15c)(5a-6b+7c-8d)$

11.3 भाग (Division)

11.3.1 बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई एकपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्ने

(Dividing a Polynomial by a Monomial)

एउटा आयतको क्षेत्रफल $(x^2+xy)m^2$ छ र एउटा भुजाको नाप $x m$ छ भने अर्को भुजाको नाप कति हुन्छ ?

$$\begin{array}{c} \text{क्षेत्रफल} = (x^2+xy)m^2 \\ \hline ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x + y \\ x \overline{)x^2 + xy} \\ \underline{-x^2} \\ \hline xy \\ \underline{-xy} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{लम्बाइ} = (x+y)m$$

एकपदीय अभिव्यञ्जकले बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई भाग गर्दा बहुपदीय अभिव्यञ्जकका प्रत्येक पदलाई छुटाउँदै भाग गर्नुपर्दछ ।

उदाहरण 1

$$8x^5 - 20x^2 \text{ लाई } 4x^2 \text{ ले भाग गर ।}$$

उत्तर :

$\begin{array}{r} 2x^3 - 5 \\ 4x^2 \overline{)8x^5 - 20x^2} \\ \underline{-8x^5} \\ \hline -20x^2 \\ \underline{\pm 20x^2} \\ \times \end{array}$	<u>अर्को तरिका</u> $\frac{8x^5 - 20x^2}{4x^2} = \frac{8x^5}{4x^2} - \frac{20x^2}{4x^2} = 2x^3 - 5$
---	---

$$\therefore \text{भागफल} = 2x^3 - 5$$

उदाहरण 2

$$\text{सरल गर: } \frac{(3x-2y)(x+y)+y(x-y)}{3x}$$

$$\text{उत्तर : } \frac{(3x-2y)(x+y)+y(x-y)}{3x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3x^2 + 3xy - 2xy - 2y^2 + xy - y^2}{3x} \\ &= \frac{3x^2 + 2xy - 3y^2}{3x} \end{aligned}$$

$$3x \overline{) 3x^2 + 2xy - 3y^2} \\ - 3x^2 \\ \hline + 2xy \\ \pm 2xy \\ \hline - 3y^2 \\ \mp 3y^2 \\ \times$$

3 को सदा 2 चाहिएकाले $\frac{2}{3}$ ले गुणा गरेको

x को सदा y^2 चाहिएकाले $\frac{y^2}{x}$ ले गुणा गरेको

$$\therefore \text{भागफल} = x + \frac{2}{3}y - \frac{y^2}{x}$$

अध्यात्म 11.3.1

1. सरल गर ।

(क) $\frac{10x-15y+30}{5}$

(ख) $\frac{x^4-2x^3+x^2}{x}$

(ग) $\frac{5x^6-3x^5+5x^3}{x^3}$

(घ) $\frac{4p^3q+8p^2q^2+12pq^3}{4pq}$

(ङ) $\frac{5x^2y+10x^2y^2+5xy^2}{5xy}$

(च) $\frac{30p^2q^2+45p^2q-60pq^2}{15pq}$

(छ) $\frac{15x^5+15x^4-30x^2}{-3x}$

(ज) $\frac{21x^5y^3-14x^4y^4-28x^3y^5}{-7x^2y^3}$

(झ) $\frac{16x^3y^2-4x^2y^2}{4x^2y^2}$

(ञ) $\frac{27x^3y^3-18x^4y^3}{9x^3y^3}$

2. सरल गर

(क) $\frac{2x(3x+5)+(2x+4)(2x-4)}{2}$

(ख) $\frac{2y(5y+7)+(2y-3)(y+8)}{3}$

(ग) $\frac{2x(3x+7)+x(4x+1)}{5x}$

(घ) $\frac{3x(2x-3)-x(3x+3)}{3x}$

3. एउटा आयतको क्षेत्रफल $12x^2+9x$ वर्ग एकाइ छ र एउटा भुजाको लम्बाई $3x$ एकाइ भए, अर्को भुजाको लम्बाई कति होला ?

4. एउटा आयतको क्षेत्रफल $56x^2y-30xy^2$ वर्ग एकाइ छ र एउटा भुजाको लम्बाई $2xy$ एकाइ रहेछ भने अर्को भुजाको लम्बाई कति हुन्छ ?

11.3.2 बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्ने (Dividing a Polynomial by a Binomial)

एउटा आयतको क्षेत्रफल x^2+6x+8 वर्ग एकाई र एउटा भुजाको नाप $x+4$ एकाई छ भने अर्को भुजा पत्ता लगाउन के गर्नुपर्ला ?

उदाहरण 1

x^2+6x+8 लाई $x+4$ ले भाग गर .

उत्तर :

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+4 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ -x^2 - 4x \\ \hline 2x + 8 \\ -2x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x+4 \quad A = x^2 + 6x + 8$$

जाँचेको
 $(x+4)(x+2)$
 $= x^2 + 2x + 4x + 8$
 $= x^2 + 6x + 8$

अब माथिको प्रश्नमा आयतको बाँकी भुजाको नाप $x+2$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

$2x^2+13x-26$ लाई $x+8$ ले भाग गर .

उत्तर :

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x+8 \overline{) 2x^2 + 13x - 26} \\ -2x^2 - 16x \\ \hline -3x - 26 \\ -3x - 24 \\ \hline -2 \end{array}$$

जाँचेर हेर्दा $(x+8)(2x-3) = 2x^2 + 16x - 3x - 24$
 $(x+8)(2x-3) + (-2) = 2x^2 + 13x - 24 - 2$
 $= 2x^2 + 13x - 26$

त्यसैले बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको भागमा

भाज्य = भाजक \times भागफल + शेष

जसमा शेषको डिग्री < भाजकको डिग्री हुन्छ ।

अध्यात्म 11.3.2

1. हिसाब गर ।

(क) $(x^2+7x+12) \div (x+3)$

(ख) $(x^2-10x+21) \div (x-7)$

(ग) $(x^2+3x-28) \div (x-4)$

(घ) $(x^2+4x-32) \div (x+8)$

(ङ) $(2x^2+9x-5) \div (2x-1)$

(च) $(3y^2-5y-28) \div (3y+7)$

- | | |
|--|--|
| (छ) $(3x^2 - 16xy + 5y^2) \div (x - 5y)$ | (ज) $(6x^2 + xy - 2y^2) \div (2x - y)$ |
| (झ) $(2x^2 + 13xy + 15y^2) \div (x + 5y)$ | (झ) $(9x^2 + 9xy - 10y^2) \div (3x - 2y)$ |
| (ट) $(12x^2 - 30xy - 42y^2) \div (x + y)$ | (ठ) $(15x^2 - 2xy - 79y^2) \div (3x - 7y)$ |
| (ड) $(14x^2 + 19xy - 5y^2) \div (2x + 3y)$ | (द) $(16x^2 + 24xy + 9y^2) \div (4x + 3y)$ |
| (ण) $(25x^2 - 60xy + 36y^2) \div (5x - 6y)$ | (त) $(x^3 - 2x^2 - 11x - 20) \div (x - 5)$ |
| (थ) $(2x^3 - 5x^2 - 24x - 18) \div (2x + 3)$ | (द) $(6x^3 - 4x^2 - 13x - 12) \div (3x + 4)$ |

2. एउटा आयतको क्षेत्रफल $(x^2 + 5x + 6)$ वर्ग एकाइ र एउटा भुजाको नाप $(x + 2)$ एकाइ छ भने अर्को भुजा पत्ता लगाउ ।
3. एउटा आयतको क्षेत्रफल $(x^2 + 15x + 50)$ वर्ग एकाइ र एउटा भुजाको नाप $(x + 10)$ एकाइ छ भने अर्को भुजा पत्ता लगाउ ।
4. $(x + 8)$ जनालाई रु. $(2x^2 + 13x - 24)$ बाँड्दा प्रत्येकले कति कति पाउलान् ?
5. $(x + 4)$ जनालाई रु. $(x^2 + 6x + 8)$ बाँड्दा प्रत्येकले कति कति पाउलान् ?

11.3.3 बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई त्रिपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्ने (Dividing a Polynomial by a Trinomial)

बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्ने तरिकाले बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई त्रिपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्न सकिन्दू ।

उदाहरण 1

$x^3 + 4x^2y + 3xy^2 + 3y + x$ लाई $x^2 + xy + 1$ ले भाग गर ।

$$\begin{array}{r} x+3y \\ \hline x^2 + xy + 1) \overline{x^3 + 4x^2y + 3xy^2 + 3y + x} \\ \underline{-x^3 - x^2y} \qquad \qquad \qquad \pm x \\ \hline 3x^2y + 3xy^2 + 3y \\ \underline{-3x^2y - 3xy^2 - 3y} \qquad \qquad \qquad \times \\ \hline \end{array}$$

उत्तर :

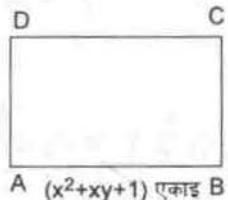
जाँचेर हेर्दा,

$$\begin{aligned} (x^2 + xy + 1)(x + 3y) &= x^3 + x^2y + x + 3x^2y + 3xy^2 + 3y \\ &= x^3 + 4x^2y + x + 3xy^2 + 3y \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.3.3

हिसाब गर ।

1. $(a^3 + 6a^2 + 7a + 10) \div (a^2 + a + 2)$
2. $(2a^3 + 5a^2 + 3a + 2) \div (2a^2 + a + 1)$
3. $(x^3 + 5x^2 + 5x + 4) \div (x^2 + x + 1)$
4. $(3x^3 + 17x^2 + 11x + 5) \div (3x^2 + 2x + 1)$
5. $(5x^3 - 11x^2 + 3x - 2) \div (5x^2 - x + 1)$
6. $(y^3 + 4y^2 + 4y + 3) \div (y^2 + y + 1)$
7. $(5y^3 - 14y^2 - 9) \div (5y^2 + y - 3)$
8. $(6p^3 - 4p^2 + 7p + 3) \div (2p^2 - 2p + 3)$
9. $(15q^4 + 16q^3 - 15q^2 + 10) \div (5q^3 - 3q^2 + 2)$
10. $(a^4 + 3a^3 + 8a^2 + 7a + 5) \div (a^2 + a + 1)$
11. संगैको चित्र आयत ABCD को क्षेत्रफल $x^3 + x^2y + x + 3x^2y + 3xy^2 + 3y$ वर्ग
एकाइ र लम्बाइ $(x^2 + xy + 1)$ एकाइ भए चौडाइ कर्ति होला ?



11.4 घातांकको नियम (Laws of Indices)

तिमीले कक्षा 7 मा निम्नानुसारका नियमहरू सिकिसकेका छौं ।

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^0 = 1$

जसमा $a \neq 0$, m र n धनात्मक पूर्णसंख्याहरू हुन् ।

अब यिनीहरूका आधारमा अरू उदाहरणहरू हेरौं ।

उदाहरण 1

सरल गर ।

(क) $a^2 \div a^5$

(ख) $x^3 \div x^4$

उत्तर: (क) $a^2 \div a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{axa}{axaxaxaxa} = \frac{1}{a^3}$

घातांकको नियमबाट गर्दा

$$a^2 + a^5 = a^{2+5} = a^7 \text{ पनि लेखन सकिन्छ।}$$

$$(ख) \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^3}{x \times x \times x \times x} = \frac{1}{x}$$

घाताङ्कको नियमबाट गर्दा,

$$x^3 \div x^4 = x^{3-4} = x^{-1}$$

यहाँ उदाहरण 1 (क) मा $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ र (ख) मा $\frac{1}{x} = x^{-1}$ भएका छन्।

त्यसैले

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \text{ जसमा } a \neq 0 \text{ र } m \text{ पूर्णसङ्ख्या हो।}$$

उदाहरण 2

सरल गर।

$$(क) a^2 \times a^4 \div a^3$$

$$(ख) x^2y^3 \div x^3y \times xy^2$$

उत्तर :

$$(क) a^2 \times a^4 \div a^3 = a^{2+4-3} = a^3 \text{ वा } \frac{1}{a^{-3}}$$

$$(ख) x^2y^3 \div x^3y \times xy^2 = x^{2+(-3)+1} y^{3+1+2} = x^6y^6$$

उदाहरण 3

सरल गर।

$$(क) (a^2)^3$$

$$(ख) (xy)^3$$

उत्तर :

$$(क) (a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(ख) (xy)^3 = xy \times xy \times xy = x^3y^3$$

यस उदाहरणबाट

$$\bullet (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\bullet (ab)^m = a^m b^m \text{ जसमा } a \neq 0, b \neq 0, m \text{ र } n \text{ पूर्णसङ्ख्याहरू हुन्।}$$

उदाहरण 4

सरल गर।

$$(क) \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

$$(ख) \left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^2$$

$$(ग) \{2(x^2y)^3 x^{-3}\}^2$$

$$\text{उत्तर: (क)} \left(\frac{p}{q}\right)^3 = (pq^{-1})^3 = p^3 q^{-3} \text{ वा } \frac{p^3}{q^3}$$

$$(ख) \left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^2 = (a^2bc^{-3})^2 = a^{2 \times 2} b^2 c^{-3 \times 2} = a^4 b^2 c^{-6} \text{ वा } \frac{a^4 b^2}{c^6}$$

$$(ग) \{2(x^2y)^3 x^{-3}\}^3 = \{2x^4y^2 x^{-3}\}^3 = 8x^{12}y^6 x^{-9} = 8x^{12-9}y^6 = 8x^3y^6$$

उदाहरण ५

सरल गर ।

(क) $(-3a^3b)^3 \times (2a^3b)^2$

(ख) $(2x^{m+2}y^{3m}) \times (-4x^{-2m+1}y^{m-4})$

उत्तर :

(क) $(-3a^3b)^3 \times (2a^3b)^2$

$= -27a^6b^3 \times 4a^6b^2$

$= (-27 \times 4) \times a^{6+6} \times b^{3+2}$

$= -108b^5 \text{ (किन्तु } a^{6+6} = a^0 = 1)$

(ख) $(2x^{m+2}y^{3m}) \times (-4x^{-2m+1}y^{m-4})$

$= -8 \times x^{(m+2)+(-2m+1)} \times y^{3m+(m-4)}$

$= -8x^{-m+3}y^{4m-4}$

अध्यात्म 11.4

1. घातांकको नियमबाट सरल गर ।

(क) $a^2 \times a^3$

(घ) $2y^4 \times (-3y^3)$

(ख) $3p^2 \times (-4)p^4$

(इ) $-5z^2 \times (-2z^3)$

(ग) $x^5 \times x^{-3}$

(च) $kx^{2m} \times hx^{3-m}$

2. घातांकको नियमबाट सरल गर ।

(क) $p^4 \div p^1$

(घ) $-24a^2 \div 6a^3$

(ख) $x^{-2} \div x^3$

(ड) $-12x^3 \div (8x^{-3})$

(ग) $z^4 \div z^5$

(च) $q^{m-2} \div q^{3m-5}$

3. घातांकको नियमबाट सरल गर ।

(क) $(x^3)^4$

(घ) $\left(\frac{2x}{yz}\right)^3$

(ख) $(pq)^2$

(ड) $(p^2q^2x^3)^{-2}$

(ग) $(x^2yz^3)^4$

(च) $(-3a^3b^2c^4)^3$

4. घातांकको नियमबाट सरल गर ।

(क) $(8mn)^2 \times (-m^3n^2)$

(घ) $(-2xy^2z^4) \times (3x^2y^3z)^4$

(ख) $3a^{3b} \times (-a^3b^2)$

(ग) $2x^py^{3q+1} \times (-4x^{2p}y^{2p})$

5. यदि $a = 2$, $b = -1$ र $c = 3$ भए प्रत्येकको मान निकाल ।

(क) a^{-1}

(घ) $3a^2b^{-2}$

(छ) $(a^2b)^{-2}(ab^3c^2)^2$

(ख) b^{-1}

(ड) $4a^{-2}b^2$

(ज) $a^3b^5c^8$

(ग) $a^{-3}c$

(च) $6a^0b^5c^{-2}$

(झ) $a^{-5}b^{-6}c^{-8}$

11.5 खण्डीकरण (Factorization)

तिमीले निम्नलिखित हिसाबहरू सिकिसकेका छौं ।

- (क) $x(x-4) = x^2 - 4x$
- (ख) $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$
- (ग) $(3p+\frac{1}{2})(3p-\frac{1}{2}) = 9p^2 - \frac{1}{4}$

माथिको हिसाबलाई दायात्रिरवाट हेर्दा, बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई अरू अभिव्यञ्जकहरूको गुणनको रूपमा जनाएको देखिन्छ । यहाँ (क) मा x र $(x-4)$ लाई $x^2 - 4x$ को गुणनखण्ड (ख) मा $(x+2)$ र $(x+3)$ लाई $x^2 + 5x + 6$ को गुणनखण्ड र (ग) मा $(3p+\frac{1}{2})$ र $(3p-\frac{1}{2})$ लाई $9p^2 - \frac{1}{4}$ को गुणनखण्ड भनिन्छ । कुनै वहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणनखण्डहरूको गुणनको रूपमा बदल्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण भनिन्छ । त्यसकारणले खण्डीकरण विस्तारको उल्टो प्रक्रिया हो । माथिको उदाहरणमा,

खण्डीकरण

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= x(x-4) \\ x^2 + 5x + 6 &= (x+2)(x+3) \\ 9p^2 - \frac{1}{4} &= (3p+\frac{1}{2})(3p-\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

11.5.1 एउटा गुणनखण्ड एकपदीय भएको बहुपदीय अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण

बहुपदीय अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदमा साफा गुणनखण्ड छ भने त्यसलाई गुणाको रूपमा राखी खण्डीकरण गर्न सकिन्छ । जस्तै:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c) \text{ यसमा } m \text{ साफा गुणनखण्ड हो ।}$$

उदाहरण 1

तलका प्रत्येक अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर ।

- (क) $2x^2 + 12x$
- (ख) $6mx - 9my$

उत्तर:

(क) $2x^2$ र $12x$ को साफा गुणनखण्ड $2x$ हो । त्यसैले,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x &= \underline{2x} \times \underline{x} + \underline{2x} \times 6 \\ &= 2x(x+6) \end{aligned}$$

(ख) $6mx$ र $-9my$ को साफा गुणनखण्ड $3m$ हो । त्यसैले,

$$\begin{aligned} 6mx - 9my &= \underline{3m} \times \underline{2x} - \underline{3m} \times \underline{3y} \\ &= 3m(2x-3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \boxed{2} \times x \times \boxed{x} \\ 12x &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times \boxed{x} \\ \text{साफा गुणनखण्ड} &= 2 \times x = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6mx &= 2 \times \boxed{3} \times \boxed{m} \times \boxed{x} \\ -9my &= 3 \times \boxed{3} \times \boxed{m} \times \boxed{y} \\ \text{साफा गुणनखण्ड} &= 3 \times m = 3m \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.5.1

1. तलका प्रत्येक बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर ।

- | | | |
|-----------------|----------------|---------------|
| (क) $5x+10$ | (ख) $6a+12$ | (ग) $4x+10$ |
| (घ) $9a-12$ | (ड) n^2-6n | (च) x^2+8x |
| (छ) $16m^2-24m$ | (ज) $4p^2+16p$ | (झ) $12xy+y$ |
| (ञ) $4xy-y$ | (ट) $21xy+7x$ | (ठ) $3y^2-3y$ |

2. खण्डीकरण गर :

- | | | |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| (क) $4x^2-8x+16$ | (ख) $2m^2+4m+8$ | (ग) $4p^3-6p^2+8p$ |
| (घ) $-4x+8$ | (ड) $-10x-5$ | (च) $-p+5p^2$ |
| (छ) $-x^2-5x$ | (ज) $-16x^2+8x$ | (झ) $-y^2+5y$ |
| (ञ) $-x^3-2x^2+8x$ | (ट) $60x^4-4mx^2+12x$ | (ठ) $30x^2y^2+35x^2y-40y^2$ |
| (ड) $15p^2q+9pq-24pq^2$ | | |

11.5.2 पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्ने (Factorisation by grouping)

एउटा बहुपदीयमा साभा गुणनखण्ड एउटाभन्दा बढी हुन सक्छ । यस्तो अवस्थामा साभा गुणनखण्ड भएका पदहरू एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्नुपर्छ ।

जस्तै: $ma+mb+na+nb$

$$\begin{aligned} &= (ma+mb)+(na+nb) \\ &= m(a+b)+n(a+b) \\ &= (a+b)(m+n) \end{aligned}$$

साभा गुणनखण्ड अनुसार पदहरू एकत्रित गरेको

यसमा साभा गुणनखण्ड भएको

उदाहरण 1

गुणनखण्ड निकाल ।

$$ab+3b+2a+6$$

उत्तर : $ab+3b+2a+6$

$$\begin{aligned} &= (ab+3b)+(2a+6) \\ &= b(a+3)+2(a+3) \\ &= (a+3)(b+2) \end{aligned}$$

अकों तरिका :

$$\begin{aligned} &ab+3b+2a+6 \\ &= (ab+2a)+(3b+6) \\ &= a(b+2)+3(b+2) \\ &= (b+2)(a+3) \end{aligned}$$

पहिलो र दोस्रो पदमा साभा गुणनखण्ड b र तेस्रो र चौथो पदमा साभा गुणनखण्ड 2 भएकाले पदहरू एकत्रित गरेको । यसमा दुवै पदसँग $a+3$ साभा गुणनखण्ड छ ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर ।

$$(क) p^2 + ab + ap + bp$$

$$\text{उत्तर: } (क) p^2 + ab + ap + bp$$

$$= (p^2 + ap) + (ab + bp)$$

$$= p(p+a) + b(a+p)$$

$$= (a+p)(p+b)$$

$$(ख) ab - ac - b + c$$

$$(ख) ab - ac - b + c$$

$$= (ab - ac) - (b - c)$$

$$= a(b - c) - 1(b - c)$$

$$= (b - c)(a - 1)$$

अध्यार्थ 11.5.2

खण्डीकरण गर ।

$$(क) x(x+4) + 5(x+4)$$

$$(ख) 4(x-3) + x(x-3)$$

$$(ग) 4x(x+2) + 3(x+2)$$

$$(घ) x(2x-1) - 3(2x-1)$$

$$(ङ) p(p+q) + r(p+q)$$

$$(च) r(r+3) - 2(r+3)$$

$$(छ) a(a-b) + a-b$$

$$(ज) xy + 5y + 2x + 10$$

$$(झ) pq + 3p + 5q + 15$$

$$(ञ) x^2 - xy + 2x - 2y$$

$$(ट) xy + x + y + 1$$

$$(ठ) a^2 + 3b + 3a + ab$$

$$(ड) p^2 - 15q - 5p + 3pq$$

$$(ठ) -x - y + 1 + xy$$

$$(ण) p^2 + 6pq - 2pq - 12q^2$$

$$(त) a^2b + ab^2c + ca + bc^2$$

11.5.3 त्रिपदीय अभिव्यञ्जक ($x^2 + px + q$ को रूप) को खण्डीकरण (Factorisation of the Trinomial of the type ($x^2 + px + q$))

विस्तारको सूत्रबाट,

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{मानौ } x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + px + q$$

यसबाट यो थाहा हुन आउँछ कि $x^2 + px + q$ लाई खण्डीकरण गर्दा यसको स्वरूप $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ हुन्छ । त्यसैले अभिव्यञ्जक $x^2 + px + q$ को खण्डीकरण गर्दा $a+b=p$ र $ab=q$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर ।

(क) $x^2 + 7x + 12$

(ग) $x^2 + 6x - 40$

उत्तर:

(क) $x^2 + 7x + 12$ लाई $x^2 + (a+b)x + ab$ सँग दाँज्दा,

$a+b=7$ र $ab=12$ हुन्छ ।

अर्थात्, $3+4 = 7$ र $3 \times 4 = 12$ मान्य हुने भएकाले,

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (3 + 4)x + 12$$

$$= (x+3)(x+4) \text{ हुन्छ ।}$$

(ख) $x^2 - 14x + 24$ लाई $x^2 + (a+b)x + ab$ सँग मिलाउदा

$a+b=-14$ र $ab=24$ हुन्छ ।

अर्थात्, $-2+(-12) = -14$ र $-2 \times (-12) = 24$ मान्य हुने भएकाले,

$$x^2 - 14x + 24 = (x-2)(x-12) \text{ हुन्छ ।}$$

(ग) $x^2 + 6x - 40$ को लागि योगफल 6 र गुणनफल -40 हुने दुईओटा

सङ्ख्या -4 र 10 भएकाले

$$x^2 + 6x - 40 = (x-4)(x+10)$$

(घ) $x^2 - 18x - 63$ का लागि योगफल -18 र गुणनफल -63 हुने दुईओटा सङ्ख्या 3 र -21 भएकाले

$$x^2 - 18x - 63 = (x+3)(x-21)$$

(क)	ab=12	a+b=7
	1, 12	✗
	2, 6	✗
	3, 4	✓
	-1, -12	✗
	-2, -6	✗
	-3, -4	✗

(ख)	ab=24	a+b=-14
	1, 24	✗
	2, 12	✗
	3, 8	✗
	4, 6	✗
	-1, -24	✗
	-2, -12	✓
	-3, -8	✗
	-4, -6	✗

अध्यात्म 11.5.3

1. तलका प्रत्येक समस्यामा $a+b$ र ab को मान दिइएको छ । a र b को मान निकाल ।

(क) $ab=12$, $a+b=7$

(ख) $ab=6$, $a+b=5$

(ग) $ab=32$, $a+b=-12$

(घ) $ab=-18$, $a+b=7$

(ङ) $ab=30$, $a+b=13$

(च) $ab=-6$, $a+b=-1$

2. खण्डीकरण गर ।

(क) $x^2 + 7x + 10$

(ख) $x^2 + 7x + 12$

(ग) $x^2 + 11x + 30$

(घ) $x^2 - 8x + 15$

(ङ) $x^2 - 12x + 35$

(च) $x^2 - 12x + 27$

(छ) $x^2 + 7x - 18$

(ज) $x^2 + 4x - 21$

(झ) $y^2 + 4y - 32$

(ञ) $x^2 - 13x - 30$

(ट) $y^2 - y - 30$

(ठ) $p^2 - 7p - 18$

(ड) $y^2 + 15y + 56$

(ढ) $m^2 - 4m - 5$

(ण) $x^2 - 41x + 40$

(त) $p^2 + 29p - 30$

(य) $x^2 - 10x - 39$

(द) $x^2 - 16x + 39$

(घ) $x^2 - 42x - 43$

(फ) $22 - 9x - x^2$

(म) $19 + 18x - x^2$

(ल) $x^2 + 11xy + 30y^2$

(न) $x^2 - 9x + 36$

(व) $15 + 2x - x^2$

(य) $42 - 11p - p^2$

(ब) $p^2 - pq - 6q^2$

(प) $p^2 + 22p + 121$

(भ) $8 - 7p - p^2$

(र) $x^2 - 3xy + 2y^2$

(श) $x^2 + 3xy - 4y^2$

11.5.4 त्रिपदीय अभिव्यञ्जक $Px^2 + qx + r$ को रूपको खण्डीकरण**(Factorization of the Trinomial of the Type $Px^2 + qx + r$)****उदाहरण 1****खण्डीकरण गर**

(क) $3x^2 + 8x + 4$

(घ) $5a^2 - 8a - 4$

उत्तर:

(क) $3x^2 + 8x + 4$ मा यस्ता दुई सद्ब्याहरू पता लगाउनु च, जहाँ $ab = 4 \times 3$ र $a+b = 8$ हुन्छ।

अर्थात् $6+2=8$ र $6 \times 2=12$ मात्र हुने भएकोले,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 4 &= 3x^2 + (6+2)x + 4 \\ &= 3x^2 + 6x + 2x + 4 \\ &= 3x(x+2) + 2(x+2) \text{ (सामान्य लिएको)} \\ &= (x+2)(3x+2) \text{ (सामान्य लिएको)} \end{aligned}$$

$\therefore 3x^2 + 8x + 4 = (x+2)(3x+2)$

(ख) $5a^2 - 8a - 4$

$= 5a^2 - 10a + 2a - 4$ (गुणन गर्दा 20 घटाउदा 8 हुने सद्ब्याहरू 10 र 2 हुन्छ।

$= 5a^2 - 10a + 2a - 4$

$= 5a(a-2) + 2(a-2) \text{ (सामान्य लिएको)}$

$\therefore 5a^2 - 8a - 4 = (5a+2)(a-2)$

आध्यात्म 11.5.4**खण्डीकरण गर**

(क) $3x^2 + 4x + 1$

(घ) $4m^2 - 8m + 3$

(छ) $12y^2 - 25y - 7$

(अ) $50a^2 - 25a + 3$

(ड) $56p^2 - 6 + 5q$

(त) $16q - 15 - 4q^2$

(घ) $150s^2 - 69st - 3t^2$

(फ) $120a^2 + 38ab - 5b^2$

(ख) $2x^2 + 5x + 3$

(ड) $4x^2 + 4x - 15$

(ज) $10x^2 - 3x - 1$

(ट) $60b^2 - b - 10$

(द) $21x^2 + 25x - 4$

(य) $120p^2 - 26p - 3$

(न) $64m^2 + 16mn - 15n^2$

(प) $192n^2 - 44ns - 15s^2$

(ग) $3x^2 - 4x + 1$

(च) $15x^2 - 13x + 2$

(झ) $12x^2 - 32x + 5$

(ठ) $27n^2 - 30n + 8$

(ण) $15x^2 - 2 - x$

(द) $224t^2 - 4tp - 4p^2$

11.5.5 त्रिपदीय अभिव्यञ्जक $a^2+2ab+b^2$ को खण्डीकरण (Factorization of the Trinomial $a^2+2ab+b^2$)

विस्तारको सूत्र,

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 \text{ र } \\ a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 \text{ हुन्छ } . \end{aligned}$$

यिनीहरूको प्रयोगबाट पनि खण्डीकरण गर्न सकिन्दछ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका प्रत्येक अभिव्यञ्जकलाई वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा के राख्नुपर्दछ होला ?

(क) $x^2+\dots+9$ (ख) $y^2-\dots+25$

उत्तर :

(क) यसमा $9=3^2$ भएकाले सूत्र मिलाउँदा

$$x^2+\dots+3^2=(x+3)^2 \text{ हुन्छ } .$$

यहाँ, $(x+3)^2=x^2+6x+9$ भएकाले खाली ठाउँमा $6x$ राख्नुपर्दछ ।

(ख) यसमा $25=5^2$ भएकाले सूत्रअनुसार

$$y^2-\dots+5^2=(y-5)^2 \text{ हुन्छ } .$$

यहाँ, $(y-5)^2=y^2-10y+25$ भएकाले खाली ठाउँमा $10y$ राख्नुपर्दछ ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर ।

(क) $x^2+8x+16$ (ख) $x^2-12x+36$

उत्तर :

(क) $x^2+8x+16$ मा $8=2\times 4$ र $16=4^2$ भएकाले

$$\begin{array}{rcl} x^2+8x+16 & = x^2+2\times x\times 4+4^2 & = (x+4)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a^2+2 & a & b+ b^2 \end{array} \quad = (a+b)^2$$

सूत्रसंग तुलना गर्दा

(ख) $x^2-12x+36$ मा $12=2\times 6$ र $36=6^2$ भएकाले

$$\begin{array}{rcl} x^2-12x+36 & = x^2-2\times x\times 6+6^2 & = (x-6)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a^2-2 & a & b+ b^2 \end{array} \quad = (a-b)^2$$

सूत्रसंग तुलना गर्दा

अध्यात्म 11.5.5

1. तल दिइएका प्रत्येक त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई वर्ग बनाउन खाली स्थानमा के राख्नुपर्छ होला ?
- (क) $x^2+...+9y^2$ (ख) $y^2-...+49$ (ग) $9x^2+...+16y^2$
 (घ) $16y^2+...+1$ (ङ) $x^2+...+(15)^2$ (च) $m^2+...+100$
2. खण्डीकरण गर ।
- (क) $x^2+10x+25$ (ख) $x^2+12x+36$ (ग) $y^2-8y+16$
 (घ) $x^2-14x+49$ (ङ) $x^2+18x+81$ (च) $p^2-24p+144$
 (छ) $9x^2-24x+16$ (ज) $16p^2+8p+1$ (झ) $25x^2-80x+64$
 (ञ) $49q^2+14q+1$ (ट) $9x^2-66x+121$ (ठ) $144+24x+x^2$
 (ड) $36-60y+25y^2$ (ट) $25x^2+30x+9$ (ण) $3x^2-6x+3$

11.5.6 दुई वर्गको अन्तरको खण्डीकरण

(Factorisation of Difference of two Square)

विस्तारको सूत्र,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \text{ हुन्छ ।}$$

यसको प्रयोगबाट पनि खण्डीकरण गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर ।

(क) p^2-25

(ख) $9x^2-16y^2$

उत्तर:

(क) p^2-25 मा $25 = 5^2$ भएकाले

$$\begin{array}{ccc} p^2-25 & = (p+5)(p-5) \\ \downarrow \quad \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ a^2-b^2 & = (a+b)(a-b) & \end{array}$$

सूत्रसंग तुलना गर्दा

(ख) $9x^2-16y^2$ मा $9x^2 = (3x)^2$ र $16y^2 = (4y)^2$ भएकाले

$$\begin{aligned} 9x^2-16y^2 &= (3x)^2 - (4y)^2 \\ &= (3x+4y)(3x-4y) [\because a^2-b^2 = (a+b)(a-b)] \end{aligned}$$

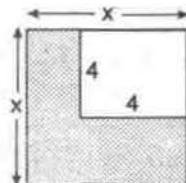
अन्यात्र 11.5.6

1. खण्डीकरण गर

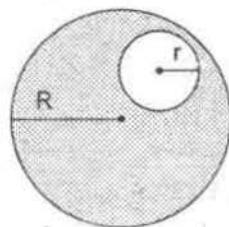
- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| (क) $x^2 - 36$ | (ख) $m^2 - 64$ | (ग) $y^2 - 49$ |
| (घ) $p^2 - q^2$ | (ड) $p^2 - 121$ | (च) $1 - p^2$ |
| (छ) $81 - x^2$ | (ज) $100 - x^2$ | (झ) $225 - n^2$ |
| (ब्र) $9x^2 - 100$ | (ट) $25 - 49y^2$ | (ठ) $256 - 121y^2$ |
| (ड) $3y^2 - 27$ | (द) $5x^2 - 80$ | (ण) $2b^2 - 72$ |
| (त) $48 - 3y^2$ | (थ) $5a^3 - 20ab^2$ | (द) $m^3 - 4m$ |

2. (क) संगैको चित्रमा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ ।

(ख) यदि $x=8$ भए छाया पारेको भागको वास्तविक क्षेत्रफल कति हुन्छ ?



3. वृत्तको क्षेत्रफल πr^2 हुन्छ भने संगैको चित्रमा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? जसमा $\pi = \frac{22}{7}$, $R = 7\text{cm}$ र $r = 1.4\text{ cm}$ छन् ।



4. एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या n र n भन्दा सानो प्राकृतिक सङ्ख्या $n-2$ छ । यी सङ्ख्याहरूको वर्गको अन्तर जोर सङ्ख्या हुन्छन् भनी प्रमाणित गर ।

11.6 महत्तम समावर्तक (Highest Common Factor)

उदाहरण 1

अभिव्यञ्जकहरू $x^3y^2 + 2x^2y^3$ र $x^5y - 4x^3y^3$ लाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठूलो अभिव्यञ्जक पत्ता लगाऊ ।

उत्तर: दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्दा,

$$\begin{aligned}
 \text{पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^3y^2 + 2x^2y^3 \\
 &= x^2y^2(x+2y) \\
 &= xxxxyxy(x+2y) \\
 \text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^5y - 4x^3y^3 \\
 &= x^3y(x^2 - 4y^2)
 \end{aligned}$$

$$= \underset{\text{ती}}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times y} (x^2 - 4y^2)$$

$$= \underset{\text{ती}}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times y} (x+2y)(x-2y)$$

दुवै अभिव्यञ्जकमा भएका साफा गुणनखण्डहरू

$x, x^2, y, xy, x^2y, x(x+2y), x^2(x+2y), y(x+2y), xy(x+2y), x^2y(x+2y)$ हुन् ।

ती प्रत्येक साफा गुणनखण्डले दुवै अभिव्यञ्जकलाई निःशेष भाग लाग्छ र यीमध्ये $x^2y(x+2y)$ पी दुवै अभिव्यञ्जकहरूमा सबभन्दा ठूलो छ ।

त्यसैले, म.स. = $x^2y(x+2y)$

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक भनेको ती अभिव्यञ्जकहरूको सबभन्दा ठूलो साफा गुणनखण्ड हो । महत्तम समापवर्तकको छोटकरी रूप म.स. हो ।

उदाहरण 2

$2x^2-6x$ र x^2-x-6 को म.स. पत्ता लगाऊ ।

उत्तर:	पहिलो अभिव्यञ्जक	$= 2x^2-6x = 2x(x-3)$
	दोस्रो अभिव्यञ्जक	$= x^2-x-6 = x^2-3x+2x-6$
		$= x(x-3)+2(x-3)$
		$= (x-3)(x+2)$
	यहाँ साफा गुणनखण्ड	$= (x-3)$
	त्यसैले म.स.	$= (x-3)$

अध्यात्म 11.6

1. म.स. पत्ता लगाऊ ।

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| (क) $3x-6$ र $x-2$ | (ख) $3x+y$ र $12x+4y$ |
| (ग) $2x+14$ र $3x+21$ | (घ) $3y-24$ र $4y-32$ |
| (ड) $3x-6y$ र $4x-8y$ | (च) $3x+9$ र $5x+15$ |
| (छ) $2a^2+6ac$ र $4a^2c+12ac^2$ | (ज) $2x-10$ र x^2-25 |
| (झ) $3a^2-6ab$ र $2ac-4bc$ | (झ) $12m^2+6m$ र $8m+4$ |
| (ट) x^2-3x र x^2-9 | (ठ) x^3y-xy^2 र x^2+xy |
| (ड) $x+2$ र x^2+4x+4 | (ठ) x^2-5x र x^2-6x+5 |
| (ण) x^3-x र x^2-x-2 | (त) x^2+8x र x^2-64 |
| (थ) $x^2-2x-15$ र x^2-x-20 | (द) x^2+5x+6 र x^2+x-6 |
| (ध) $x^2+2x-15$ र $x^2-7x-12$ | (न) x^2+6x-7 र $x^2+5x-14$ |
| (प) $x^2+4x+4, x^2+7x+10$ र x^2-x-6 | (फ) x^2+2x-3, x^2-3x+2 र x^2-1 |

11.7 लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

उदाहरण 1

$2x^2y$ र $3xy^3$ दुवै अभिव्यञ्जकले निःशेष भाग लाग्ने सबभन्दा सानो अभिव्यञ्जक पत्ता लगाउ ।

उत्तर:

यहाँ, $2x^2y$ र $3xy^3$ दुवैले भाग जाने अभिव्यञ्जकको गुणाङ्क 2 र 3 को साफा अपवर्त्यहरू 6, 12, 18, ... हुन्छन् । जसमा सबभन्दा सानो 6 हो ।

x^2 र x ले भाग जाने अभिव्यञ्जक x^2 र x को साभा अपवर्त्यहरू x^2, x^3, x^4, \dots हुन्छन् जसमा x^2 सबभन्दा सानो छ । y र y^3 ले भाग जाने अभिव्यञ्जक y र y^3 का साभा अपवर्त्यहरू y^3, y^4, y^5, \dots हुन्छन् जसमा y^3 सबभन्दा सानो छ ।

त्यसैले, $2x^2y$ र $3xy^3$ दुवैले निःशेष भाग जाने सबभन्दा सानो अभिव्यञ्जक $6x^2y^3$ हो ।

यस समस्यालाई गुणनखण्ड विधिवाट हल गर्दा छिटो र सरल हुन्छ । तलको उदाहरण हेर -

$$2x^2y \text{ को गुणनखण्डहरू} = 2 \times \underset{\text{5}}{x} \underset{\text{5}}{x} \underset{\text{5}}{x} y$$

$$3xy^3 \text{ को गुणनखण्डहरू} = 3 \times \underset{\text{3}}{x} \underset{\text{3}}{x} \underset{\text{3}}{x} y \underset{\text{3}}{y} \underset{\text{3}}{y}$$

$$\text{दुवैमा साभा गुणनखण्डहरू} = x \underset{\text{2}}{x} y$$

$$\text{दुवैमा बाँकी गुणनखण्डहरू} = 2 \times 3 \times \underset{\text{2}}{x} \underset{\text{2}}{x} y \underset{\text{2}}{y}$$

अब साभा गुणनखण्ड \times बाँकी गुणनखण्ड $= 2 \times 3 \times \underset{\text{2}}{x} \underset{\text{2}}{x} y \underset{\text{2}}{y} \underset{\text{3}}{y} \underset{\text{3}}{y} = 6x^2y^3$ हुन्छ । यो नै लघुत्तम समापवर्त्य हो ।

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको ल.स. = साभा गुणनखण्डहरू \times बाँकी गुणनखण्डहरू ।

लघुत्तम समापवर्त्यको छोटकरी रूप ल.स. हो ।

उदाहरण 2

ल.स. पत्ता लगाउ ।

$$x^2-y^2 \text{ र } x^2+2xy+y^2$$

$$\text{उत्तर: पहिलो अभिव्यञ्जक} = x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$$

$$\text{यहाँ, साभा गुणनखण्ड} = x+y$$

$$\text{बाँकी गुणनखण्डहरू} = (x-y)(x+y)$$

यहाँ (i) र (ii) वाट $(x+y)(x-y)(x+y)$ हुन्छ ।

अब, ल.स. = साभा गुणनखण्ड \times बाँकी गुणनखण्ड

$$= (x+y)^2(x-y)$$

$$\therefore \text{ल.स.} = (x+y)^2(x-y)$$

ल.स. पत्ता लगाओ।

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| (क) $4x^2 - 8x^2$ | (द) $4y^2 - 6$ | (ग) $5x^2 + 10x^2$ |
| (घ) $4m^2n^2 - 6mn^2p$ | (ज) $5x^2 - 3x^2 + x$ | (च) $6x^2 - 3x^2 + 2x$ |
| (छ) $m+4 - m-4$ | (झ) $4x-20 - 6x-30$ | (झ) $5x^2 - 10 \times 4x+8$ |
| (अ) $4x^2-9 - 2x^2+3$ | (झ) $4x^2-100 - x-5$ | (ठ) $4x^2 - 4+2x$ |
| (ड) $4(x-1) - x^2 - x-2$ | (झ) $x^2-4 - x^2+3x+2$ | (ण) $a^2-a-6 - a^2-9$ |
| (त) $x^2-6x-8 - x-4$ | (झ) $3x-21 - x^2-4x-21$ | (ट) $x^2 - x-3 - x+2$ |
| (ध) $x^2-25 - x^2-20$ | (झ) $x^2-5x+6 - x^2+x-6$ | |
| (प) $x^2+6x+8 - 9x-21 - x^2-7x-10$ | | |

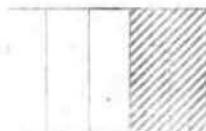
[जुक्ति: ल.स. = उन प्रत्येक का मान एवं गुणखण्ड x वाली 2-2 ओटाको सामग्री नखण्ड x सौमा दर्शाइए।]

11.8 आनुपातिक अभिव्यञ्जक तहहको जोड र घटाऊ

(Addition & Subtraction of Rational Expressions)

11.8.1 आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरू (Rational Expressions)

संगैको चित्रमा दिएको भागमा इनका जाताइदद्दृ भिन्नको रूपमा यसको भागको मढ़ख्याहरू जस्तै $\frac{2}{5}, \frac{6}{11}, \frac{4}{1}$ इति आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरू हुन् । प्रत्येक साडिखक भाग वाई आनुपातिक सढ़ख्याको रूपमा यसको भाग भर्ने संक्षिप्त।



यदि a र b विवरित भए छन् तर आनुपातिक अभिव्यञ्जक (Rational Expression) भनिन्छ ।

आनुपातिक अभिव्यञ्जकको शब्दी भाइरणहरू निम्न छन् :

$$\frac{a+b}{x^2}, \frac{a}{c}, \frac{a}{m+n}, \frac{a}{x-y}, \frac{a}{m+n} \text{ इति ।}$$

यदि आनुपातिक अभिव्यञ्जक $\neq 0$ शून्य छ भने त्यो आनुपातिक अभिव्यञ्जक मान्य हुन । अथवा हर भागमा भागको असंविहारी भएको तरिकाले परिभासित हुन । त्यसैले,

यदि $x=0$ भए, $\frac{7}{x}$ अपरिभाषित हुन्छ ।

यदि $x=y$ भए, $\frac{3}{x-y}$ अपरिभाषित हुन्छ ।

यदि $x=6$ भए, $\frac{2x^2-11x-6}{x-6}$ अपरिभाषित हुन्छ ।

उदाहरण 1

y को मान करि हुँदा $\frac{7}{y-8}$ अपरिभाषित हुन्छ ?

उत्तर :

$\frac{7}{y-8}$ अपरिभाषित हुन $y-8=0$ हनुपर्दछ । अर्थात् $y=8$ हनुपर्दछ ।

उदाहरण 2

सरल गर ।

(क) $\frac{(x-3)^2}{2x-6}$

(ख) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

उत्तर :

(क) $\frac{(x-3)^2}{2x-6} = \frac{(x-3)^2}{2(x-3)} = \frac{x-3}{2}$

(ख) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$

अध्यात्म 11.8.1

1. x को मान करि हुँदा तलका प्रत्येक आनुपातिक अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छन् ?

(क) $\frac{4}{x}$ (ख) $\frac{1}{x-7}$ (ग) $\frac{1}{x+9}$ (घ) $\frac{x+y}{x-6}$

2. सरल गर ।

(क) $\frac{m^2+4m}{m^2-6m}$

(ख) $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}$

(ग) $\frac{3x+9}{x^2-9}$

(घ) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

(ङ) $\frac{x^2-25}{2x-10}$

(च) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$

(छ) $\frac{x-2y}{x^2-4y^2}$

(ज) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

(झ) $\frac{x^2+x-6}{x+3}$

(ञ) $\frac{x+7x^2}{1-49x^2}$

(ट) $\frac{(x-6)^2}{x^2-36}$

(ठ) $\frac{x^2+x-12}{12-4x}$

(ड) $\frac{-p^2+p+12}{p^2-10p+24}$

(ढ) $\frac{s^3-12s^2+20s}{s^2+6s-16}$

11.8.2 उही हर भएको आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ

(Addition and subtraction of Rational Expressions having same Denominator)

उही हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकको जोड वा घटाउ गर्दा अंशको जोड वा घटाउ किया गरी आएको जोड वा घटाउफललाई अंश र एउटै साझा हरको रूपमा व्यक्त गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

सरल गर ।

$$(क) \frac{3}{x-y} + \frac{4}{x-y}$$

$$(ख) \frac{9}{2x} - \frac{3}{2x}$$

उत्तर :

$$\begin{aligned} (क) \quad & \frac{3}{x-y} + \frac{4}{x-y} \\ &= \frac{3+4}{x-y} \\ &= \frac{7}{x-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ख) \quad & \frac{9}{2x} - \frac{3}{2x} \\ &= \frac{9-3}{2x} \\ &= \frac{6}{2x} \\ &= \frac{3}{x} \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर ।

$$(क) \frac{3x-2}{x-5} + \frac{3}{x-5}$$

$$(ख) \frac{a^2}{a-4} - \frac{16}{a-4}$$

$$\begin{aligned} \text{उत्तर: } (क) \quad & \frac{3x-2}{x-5} + \frac{3}{x-5} \\ &= \frac{3x-2+3}{x-5} \\ &= \frac{3x+1}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ख) \quad & \frac{a^2}{a-4} - \frac{16}{a-4} \\ &= \frac{a^2-16}{a-4} \\ &= \frac{(a+4)(a-4)}{a-4} \\ &= a+4 \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.8.2

1. सरल गर ।

$$(क) \frac{x}{5} + \frac{3x}{5}$$

$$(ख) \frac{7}{x} + \frac{4}{x}$$

$$(ग) \frac{x}{3y} + \frac{2x}{3y}$$

$$(घ) \frac{3}{t+2} + \frac{4}{t+2}$$

$$(ङ) \frac{-1}{x-1} + \frac{x}{x-1}$$

$$(च) \frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a+2}$$

2. सरल गर ।

$$(क) \frac{7x}{9} - \frac{4x}{9}$$

$$(ख) \frac{6x}{5} - \frac{x}{5}$$

$$(ग) \frac{9}{y} - \frac{5}{y}$$

$$(घ) \frac{6}{y-3} - \frac{2y}{y-3}$$

$$(ङ) \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+2}$$

$$(च) \frac{a+b}{a^2+1} - \frac{b}{a^2+1}$$

3. सरल गर ।

$$(क) \frac{3m+7}{m+1} - \frac{2m+1}{m+1}$$

$$(ख) \frac{x+6}{x^2-1} - \frac{5}{x^2-1}$$

$$(ग) \frac{y-10}{y^2-9} + \frac{7}{y^2-9}$$

$$(घ) \frac{x+4}{x^2-25} + \frac{x+6}{x^2-25}$$

$$(ङ) \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}$$

$$(च) \frac{m^2}{m+2} - \frac{4}{m+2}$$

$$(छ) \frac{x^2}{x-3} - \frac{9}{x-3}$$

$$(ज) \frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4}$$

$$(झ) \frac{x^2}{x+1} + \frac{2x+1}{x+1}$$

$$(ञ) \frac{3x^2}{x+4} + \frac{15x+12}{x+4}$$

$$(ट) \frac{m^2}{m-1} - \frac{2m-1}{m-1}$$

$$(ठ) \frac{x^2}{x+2} + \frac{4x+4}{x+2}$$

$$(ड) \frac{5x^2}{4-x} - \frac{35x-60}{4-x}$$

$$(ढ) \frac{2p^2}{p+3q} + \frac{2pq-12q^2}{p+3q}$$

$$(ण) \frac{m^4}{4(m+3)^2} + \frac{81-18m^2}{4(m+3)^2}$$

$$(त) \frac{12xy}{xz+yz} + \frac{3x^2+9y^2}{xz+yz}$$

11.8.3 फरकफरक हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ (Addition and subtraction of Rational Expressions having unequal Denominator)

उदाहरण 1

रमेशले आफ्नो मासिक तलब रु. x मध्येको रु. $\frac{x}{2}$ खानामा र रु. $\frac{x}{3}$ घर भाडामा खर्च गर्दैन् भने उनले खाना र घर भाडाका लागि जम्मा कति खर्च गर्दैन् ?

उत्तर: रमेशको खानामा खर्च = रु. $\frac{x}{2}$

रमेशको घर भाडामा खर्च = रु. $\frac{x}{3}$

त्यसैले जम्मा खर्च = रु. $\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)$
= $\frac{3x+2x}{6} = \frac{5x}{6}$

त्यसैले रमेशको खर्च = रु. $\frac{5x}{6}$

उदाहरण 2

सरल गर ।

$$(क) \frac{3}{4x^2} + \frac{5}{6x}$$

उत्तर:

$$(क) \text{ यहाँ } 4x^2 \text{ र } 6x \text{ को ल.स. } = 12x^2$$

$$\text{अब, } \frac{3}{4x^2} + \frac{5}{6x} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4x^2} + \frac{5 \times 2x}{6x \times 2x} = \frac{9+10x}{12x^2}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 2 \times 2 \times x \times x \\ 6x &= 2 \times 3 \times x \\ \text{ल.स.} &= 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 3

सरल गर ।

$$(क) \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x-2}$$

$$(ख) \frac{7}{y-1} - \frac{7}{y(y-1)}$$

उत्तर :

$$(क) \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x-2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4x-8-3x-6}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-14}{x^2-4} \end{aligned}$$

[किनकि $x+2$ र $x-2$ को ल.स. $= (x+2)(x-2)$]

$$(ख) \frac{7}{y-1} - \frac{7}{y(y-1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y \times 7}{y(y-1)} - \frac{7}{y(y-1)} \\ &= \frac{7y-7}{y(y-1)} = \frac{7(y-1)}{y(y-1)} = \frac{7}{y} \end{aligned}$$

[किनकि $(y-1)$ र $y(y-1)$ को ल.स. $= y(y-1)$]

उदाहरण 4

सरल गर ।

$$\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^2-x-6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$\text{उत्तर: } = \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^2-x-6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{(x-1)(x-3)} \\
 &= \frac{(x-3)-(x-1)+(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)} \\
 &= \frac{x-3-x+1+x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} \\
 &= \frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

अध्यात्म 11.8.3

1. सरल गर ।

(क) $\frac{x}{3} + \frac{x}{15}$

(ख) $\frac{y}{6} + \frac{y}{9}$

(ग) $\frac{x}{3} + \frac{4}{x}$

(घ) $\frac{2}{3y} + \frac{3}{4y}$

(ङ) $\frac{2}{x} + 3$

(च) $\frac{x}{y} + 4$

2. सरल गर ।

(क) $\frac{7}{x} - \frac{x}{3}$

(ख) $\frac{2}{m} - \frac{3}{mn}$

(ग) $\frac{3}{2} - \frac{1}{8y}$

(घ) $\frac{x}{y} - 3$

(ङ) $\frac{5}{2x+3} + \frac{1}{3}$

(च) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

3. सरल गर ।

(क) $\frac{x}{7x-7} + \frac{1}{x-1}$

(ख) $2 + \frac{2y+1}{6}$

(ग) $\frac{3}{2(m+n)} - \frac{5}{3(m+n)}$

(घ) $\frac{x+7}{x-7} - \frac{x}{7-x}$

(ङ) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-5}$

(च) $\frac{y}{3(y+3)} + \frac{2}{3(y-3)}$

(छ) $\frac{8}{5(x-5)} + \frac{5}{6(x-5)}$

(ज) $\frac{5x+20}{x^2+4x} + 1$

(झ) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x-2}{x^2-4}$

(ञ) $\frac{7x+3}{x^2-9} - \frac{3}{x-1}$

(ट) $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3}{x^2-x-2}$

(ठ) $\frac{2}{x-1} + \frac{2x-5}{x^2+2x-3}$

(ड) $\frac{2x-1}{x^2+4x} - \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

(ढ) $\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2+3}{x^2-1}$

(ण) $\frac{2}{x^2+3x+2} + \frac{5x}{x^2-x-6} - \frac{x+2}{x^2-2x-3}$

(त) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

11.8.4 आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Rational Expressions)

बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्ने तरिकाबारे तिमीले अधिल्लो पाठहरूमा जानकारी पाइसकेका छौं। यस पाठमा तिमीले गुणन र भाग समावेश भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको सरल गर्ने तरिका जान्नेछौं।

उदाहरण 1

सरल गर: $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4} \times \frac{x^2+x-6}{x^3-9x}$

उत्तर:
$$\begin{aligned} & \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} \times \frac{x^2+x-6}{x^3-9x} \\ &= \frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+3)(x-2)}{x(x^2-9)} \\ &= \frac{(x+3)(x+3)}{(x(x+3)(x-3))} \\ &= \frac{(x+3)}{x(x-3)} \end{aligned}$$

खण्डीकरण गरेको

$$\begin{aligned} & x^2+3x+2x+6 \\ &= x(x+3)+2(x+3) \\ &= (x+3)(x+2) \\ & x^2+3x-2x-6 \\ &= x(x+3)-2(x+3) \\ &= (x+3)(x-2) \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर:

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x} \div \frac{x^2+3x+2}{x-3}$$

उत्तर:
$$\begin{aligned} & \frac{x^2-x-2}{x^2-3x} \div \frac{x^2+3x+2}{x-3} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{3(x-3)} \div \frac{(x+1)(x+2)}{x-3} \rightarrow \text{खण्डीकरण गरेको} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{3(x-3)} \times \frac{(x-3)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x-2)}{3(x+2)} \end{aligned}$$

सरल

$$(म) \frac{2}{x} \times \frac{2x}{3}$$

$$(व) \frac{-b^2}{a} \cdot \frac{ab+2b}{a} \times \frac{a+2}{a+3}$$

$$(ग) \frac{-10}{y^2} \cdot \frac{5}{6} \times \frac{ax-3x}{ay+5y}$$

$$(घ) \frac{x+2}{x-8} \cdot \frac{12}{6}$$

$$(ङ) \frac{15}{x^2-3x+2} \div \frac{3(x^2-4x-5)}{x^2-3x+2}$$

$$(ट) \frac{y+3}{x-5} \cdot \frac{15}{y-5} \cdot \frac{3y+2x+6}{xy-x+2y-2}$$

$$(झ) \frac{a}{a+3} \cdot \frac{2}{a+6} \div \frac{a^2-3a-18}{a^2-9}$$

$$(झ) \frac{8}{x} \cdot \frac{18}{4x} \div \frac{x^2-4x-12}{x^2+3x+2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a+2}{a+3} = \frac{2(a+2)}{3(a+3)}$$

$$\frac{-b^2}{a} \cdot \frac{ab+2b}{a} \cdot \frac{a+2}{a+3} = \frac{-b^2(ab+2b)(a+2)}{a(a+3)}$$

$$\frac{-10}{y^2} \cdot \frac{5}{6} \times \frac{ax-3x}{ay+5y} = \frac{-50(ax-3x)}{6y^2(ay+5y)}$$

$$\frac{x+2}{x-8} \cdot \frac{12}{6} = \frac{12(x+2)}{6(x-8)} = \frac{2(x+2)}{x-8}$$

$$\frac{15}{x^2-3x+2} \div \frac{3(x^2-4x-5)}{x^2-3x+2} = \frac{15}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3(x^2-4x-5)}$$

$$\frac{y+3}{x-5} \cdot \frac{15}{y-5} \cdot \frac{3y+2x+6}{xy-x+2y-2} = \frac{15(3y+2x+6)}{(x-5)(y-5)(xy-x+2y-2)}$$

$$\frac{a}{a+3} \cdot \frac{2}{a+6} \div \frac{a^2-3a-18}{a^2-9} = \frac{2a}{(a+3)(a+6)} \cdot \frac{(a+3)(a-6)}{(a+3)(a-6)} = \frac{2}{a+6}$$

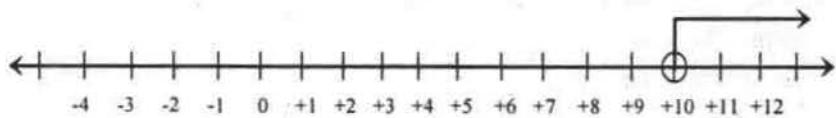
$$\frac{8}{x} \cdot \frac{18}{4x} \div \frac{x^2-4x-12}{x^2+3x+2} = \frac{18}{4x^2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x-12} = \frac{18(x^2+3x+2)}{4x(x^2-4x-12)}$$

समीकरण, असमानता र लेखाचित्र (Equation, Inequality and Graph)

समीकरण र असमानता (Equation and Inequality)

शब्दमा दिइएका गणितीय समस्याहरूको समाधान गर्नुअगाडि ती समस्याहरूलाई गणितीय भनाइमा उल्था गर्नुपर्ने हुन्छ । उदाहरणका लागि कतिमा 4 जोड्यो भने 20 हुन्छ ? यो समस्या समाधान गर्न जोड्नुपर्ने सङ्ख्यालाई x मानेर गणितीय तरिकाले लेख्दा, $x + 4 = 20$ हुन्छ ।

यो एउटा गणितीय खुला वाक्य हो किनभने यसको सत्यता x को मानमा भर पर्दछ । यदि $x = 1$ भए $x+4=20$ भूठो वाक्य बन्द र यदि $x = 16$ भए $x + 4 = 20$ साँचो वाक्य बन्द । त्यसैले यो एउटा समीकरण (Equation) हो । त्यसैगरी यदि गणितीय वाक्यमा "भन्दा ठूलो (>)", "भन्दा सानो (<)", भन्दा ठूलो र बराबर (\geq), भन्दा सानो र बराबर (\leq) ट्रिकोटोमी (Trichotomy) का चिह्नहरू समावेश छन् भने त्यस्ता गणितीय वाक्यलाई असमानता (Inequality) भनिन्दछ । उदाहरणका लागि रमेशसँग र. 10 भन्दा बढी रकम छ । यसलाई गणितीय वाक्यमा लेख्दा $R > 10$ लेखिन्दछ । असमानता $R > 10$ मा $R = 11, 12, 13, \dots$ हुन्छ । यसलाई समूहमा व्यक्त गर्दा, $\{11, 12, 13, \dots\}$ लेखिन्दछ । सङ्ख्या रेखामा व्यक्त गर्दा -



12.1 एक चलयुक्त असमानताहरूको हल (Solution of Inequalities in one variable)

तिमीले कक्षा 7 मा असमानतासम्बन्धी निम्न गुणहरू सिकिसकेका छौं ।

असमानताका गुणहरू

- यदि $A < B$ भए $A + C < B + C$ र $A - C < B - C$ हुन्छ ।
- यदि $A < B$ र $C > 0$ भए, $AC < BC$ र $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$ हुन्छ ।
- यदि $A < B$ र $C < 0$ भए $AC > BC$ र $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ हुन्छ ।

नोट: माथिका गुणहरूअनुसार असमानता चिह्नको दुवैतर ऋणात्मक सङ्ख्याले गुणन वा भाग गर्दा असमानता चिह्न " $>$ " भए " $<$ " र " $<$ " भए " $>$ " मा बदलिन्दछ ।

उदाहरण 1

तलका असमानताहरू हल गर र सङ्ख्या रेखामा देखाउ ।

$$(क) -4x \leq 36$$

$$(ख) 7 - 3x > 10$$

$$(ग) 3x + 2(2x - 9) \leq x$$

$$(घ) \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{2}{3}x$$

उत्तर :

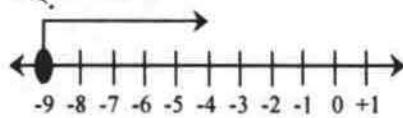
$$(क) -4x \leq 36$$

$$\text{अथवा } \frac{-4x}{-4} \geq \frac{36}{-4}$$

$$\therefore x \geq -9$$

समूहमा व्यक्त गर्दा, $\{-9, -8, \dots\}$

सङ्ख्या रेखामा



$$(ख) 7 - 3x > 10$$

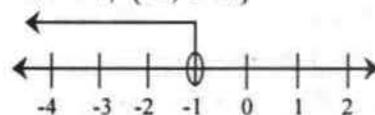
$$\text{अथवा, } 7 - 3x - 7 > 10 - 7$$

$$\text{अथवा, } -3x > 3$$

$$\text{अथवा, } \frac{-3x}{-3} < \frac{3}{-3} \quad [\text{किनकि, असमानतालाई ऋणात्मक सङ्ख्याले गुणन गर्दा सम्बन्ध उल्टो हुन्छ ।}]$$

$$\therefore x < -1$$

समूहमा व्यक्त गर्दा, $\{-2, -3, \dots\}$



$$(ग) 3x + 2(2x - 9) \leq x$$

यदि असमानतामा कोष्ठ भएमा पहिला कोष्ठको हिसाब गर्नुपर्दछ ।

$$\text{अथवा, } 3x + 4x - 18 \leq x$$

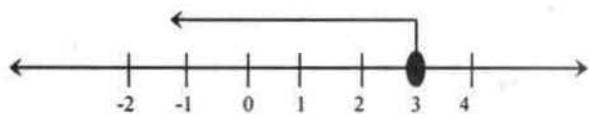
$$\text{अथवा, } 3x + 4x - x \leq 18$$

$$\text{अथवा, } 6x \leq 18$$

$$\therefore x \leq 3$$

समूहमा व्यक्त गर्दा - $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

सङ्ख्या रेखामा -



$$(घ) \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{2}{3}x$$

यदि असमानतामा भिन्नात्मक गुणाङ्क भएमा पहिला तिनीहरूको ल.स. ले असमानताको दुबैतिर गुणन गर्नुपर्दछ ।

$$\text{अथवा, } (\frac{3}{4}x - \frac{1}{2})12 > \frac{2}{3}x \times 12$$

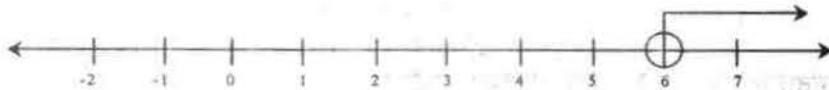
$$\text{अथवा, } 9x - 6 > 8x$$

$$\text{अथवा, } 9x - 8x > 6$$

$$\therefore x > 6$$

समूहमा व्यक्त गर्दा, $\{7, 8, \dots\}$

सङ्ख्या रेखामा -



उदाहरण 2

$-2 < x \leq 3$ लाई समूहमा र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

उत्तर :

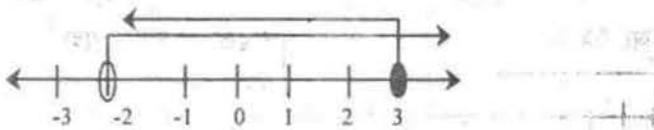
$-2 < x \leq 3$ लाई दुई भागमा विभाजन गर्नुपर्छ ।

यसलाई $-2 \leq x$ अथवा $x > -2$ र $x \leq 3$ मा विभाजन गर्न सकिन्दै ।

समूहमा व्यक्त गर्दा, $x > -2$ लाई $\{ -1, 0, 1, 2, \dots \}$

र $x < 3$ लाई $\{ 3, 2, 1, 0, -1, \dots \}$ लेख्नु पर्दै ।

सङ्ख्या रेखामा व्यक्त गर्दा -



उदाहरण 3

रु. 15 को कापी एउटा र रु. 8 को केही कलम किन्नु छ । यदि आफूसँग रु. 100 मात्र छ भने बढीमा कतिओटा कलम किन्न सकिएला ?

उत्तर :

कलम x ओटा किन्दा जम्मा खर्च रु. $(15+8x)$ हुन्दै । जम्मा खर्च रु. 100 वा 100 भन्दा कम हुनुपर्ने भएकाले,

$$15+8x \leq 100$$

$$\text{अथवा } 8x \leq 100 - 15$$

$$\text{अथवा } 8x \leq 85$$

$$\text{अथवा } x \leq \frac{85}{8}$$

$$\therefore x \leq 10\frac{5}{8}$$

x पूर्ण सङ्ख्या भएकाले यो असमानता मान्य हुने x को अधिकतम मान 10 हुन्दै । त्यसैले बढीमा 10 ओटा कलम किन्न सकिन्दै ।

उदाहरण 4

$y = 3x - 2$ मा x को मान $x \leq -3$ भए y को मान कति हुन्दै ?

उत्तर :

$$y = 3x - 2 \leq 3 \times (-3) - 2 \quad (\text{किनभने } x \leq -3)$$

$$= -11$$

$$\therefore y \leq -11$$

अभ्यास 12.1

1. निम्नलिखित असमानताहरू हल गर र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

(क) $7x - 2(x-3) < 16$	(ख) $3(x-1) - x < 5$
(ग) $x - (4x-1) < -8$	(घ) $5 - 2(x+3) > -1$
(ड) $2(x+5) < 4 + 5x$	(च) $3 + 2(2x-3) < 3x + 4$
(छ) $\frac{3}{2}x - \frac{8}{3} > \frac{x}{6}$	(ज) $\frac{x-2}{3} > \frac{3x-1}{4}$
(झ) $\frac{x+4}{6} - \frac{x}{3} \geq x - 4$	(झ) $3 - \frac{1}{6}x \geq x - \frac{1}{2}$
(ट) $0.3x \geq 0.8 - 0.1x$	(ठ) $0.7x + 0.6 \leq 0.5x + 1$
(ड) $-3 < x \leq 3$	(ठ) $-4 \leq x \leq -1$

2. $y = 4 - 6x$ मा x को मान $x > -2$ भए y को मान कति हुन्छ ?

3. समीकरण $5x + 7y + 9 = 0$ दिइएको छ ।
 - (क) x को मान $x \leq 8$ भए y को मान कति हुन्छ ?
 - (ख) y को मान $y > -7$ भए x को मान कति हुन्छ ?

4. रामले साथीहरूका लागि रु. 12 को विस्कुट 3 पाकेट र रु. 3 को चियाका केही कप मगाएछ । यदि उसींग रु. 80 मात्र छ भने बढीमा कति कप चिया मगाउन सकिन्छ ?

5. कुनै सङ्ख्याको 5 गुणामा 9 घटाउदा -3 भन्दा बढी भएछ । यो भनाइ मात्य हुने न्यूनतम पूर्णसङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

6. एउटा डटपेनको मूल्य रु. 8 पर्छ । एउटाको रु. 3 पर्ने सिसाकलम जम्मा 15 ओटा किन्दा आफूसँग रु. 100 मात्र छ भने डटपेन बढीमा कतिओटा किन्न सकिन्छ ?
 - (क) डटपेन x ओटा किन्दा सिसाकलम कतिओटा किन्न सकिन्छ ?
 - (ख) x को प्रयोगबाट जम्मा खर्च निकाल्दा कति हुन्छ ?
 - (ग) माथि प्रश्नका सम्बन्धलाई असमानतामा व्यक्त गर ।
 - (घ) (ग) को असमानता हल गरेर किन्ने डटपेनको अधिकतम सङ्ख्या निकाल ।

12.2 दुई चलयुक्त युगप्त समीकरणको लेखाचित्रद्वारा हल (Solving Two Unknown Simultaneous Equations by graphing)

शिवले शिला र कैलाशलाई रु. 9 बाडेर लिनु भनी दिएछन् । अब शिला र कैलाशले पाउने हिस्सा कति कति हुन सक्छ ? फेरि, शीलाले जति रकम खर्च गर्दै कैलाशले त्यसको दोब्बर खर्च गर्दै भने शिला र कैलाशले गर्ने खर्च कति कति होला ?

यी दुई भनाइलाई तलको तालिकामा प्रस्तुत गर ।

पहिलो भनाइ अनुसार :

शिलाको भाग : (x) रु.	0	1	2	4	5	7	
कैलाशको भाग : (y) रु.	9	8	7	6		3	1 0

तालिकामा शिला र कैलाशको भाग जम्मा गर्दा 9 हुन्छ । यहाँ शिलाको भागलाई x ले र कैलाशको भागलाई y ले जनाउँदा, $x+y=10$ हुन्छ । यसमा x र y दुवै चलराशि भएको हुनाले $x+y = 9$ लाई दुई चलयुक्त समीकरण भनिन्छ ।

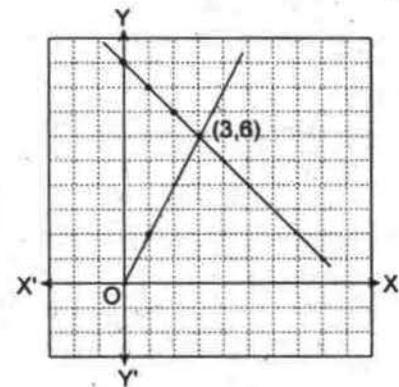
दोस्रो भनाइअनुसार :

शिलाको भाग : (x) रु.	0	1	2	3	5
कैलाशको भाग : (y) रु.	0	2	6	8	

यस भनाइलाई समीकरणमा लेख्दा, $2x = y$ हुन्छ । किन ? छलफल गर ।

माथिका दुवै भनाइलाई ग्राफपेपरमा अड्कन गरी कोर्दा निम्नबमोजिम हुन्छ ।

माथिका भनाइहरूलाई सरल रेखामा व्यक्त गर्दा, ग्राफ कापीमा एकआपसमा कुन बिन्दुमा काटेका छन् ? निर्देशाङ्क पनि भन्न सक्छौ ? यसरी दुई चलयुक्त युगपथ समीकरणहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दु नै सो समीकरणहरूको हल हुन्छ । यहाँ समीकरणहरू $x + y = 9$ र $y = 2x$ को हल $x=3$ र $y=6$ वा $(3,6)$ हुन्छ । के बिन्दु $(3,6)$ दुवै समीकरणलाई मान्य हुन्छ ? जाँचेर हेर ।



उदाहरण 1

लेखाचित्रद्वारा हल गर: $x+y = 10$
 $2x-y = -1$

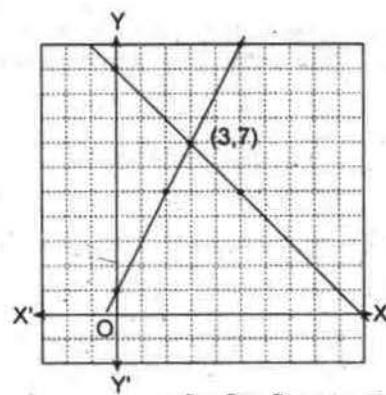
उत्तर : $x+y = 10$ (1)
 $2x-y = -1$ (2)

समीकरण (1) बाट तालिका बनाउँदा -

$x+y = 10$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr> <td>y</td><td>10</td><td>7</td><td>5</td></tr> </table>	x	0	3	5	y	10	7	5
x	0	3	5						
y	10	7	5						
अथवा, $y = 10-x$									

फेरि, समीकरण (2) बाट तालिका बनाउँदा -

$2x-y = -1$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr> <td>y</td><td>1</td><td>5</td><td>11</td></tr> </table>	x	0	2	5	y	1	5	11
x	0	2	5						
y	1	5	11						
अथवा, $2x+1 = y$									



लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा -

दुई रेखाहरू प्रतिच्छेदन भएको बिन्दु $(3, 7)$ हो ।

जाँचेर हेर्दा,

$$x + y = 10$$

$$\text{अथवा, } 3+7 = 10$$

$$\text{अथवा, } 10 = 10$$

$$2x + 1 = y$$

$$\text{अथवा, } 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$\text{अथवा, } 6+1 = 7$$

$$\text{अथवा, } 7 = 7$$

त्यसैले प्रतिच्छेदन बिन्दु $(3, 7)$ दुवै समीकरणलाई मान्य भयो ।

उदाहरण 2

बाबु र छोराको उमेरको योग 84 छ । यदि बाबुको उमेर छोराको उमेरको तीन गुण भए बाबु र छोराको उमेर पता लगाउ ।

उत्तर :

बाबुको उमेर $= x$ र छोराको उमेर $= y$ मानौ ।

$$\text{प्रश्नअनुसार, } x+y = 84 \quad \dots\dots (1)$$

$$x = 3y \quad \dots\dots (2)$$

समीकरण (1) बाट तालिका बनाउदा

$$y = 84-x$$

x	20	50	60
y	64	34	24

समीकरण (2) बाट तालिका बनाउदा

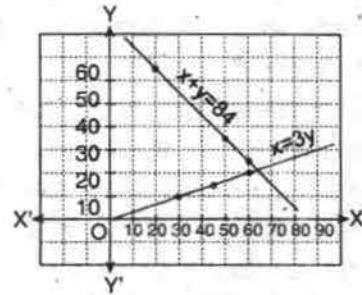
$$y = \frac{x}{3}$$

x	0	30	60	45
y	0	10	20	15

लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा -

$$\text{यहाँ, } x = 63 \text{ र } y = 21 \text{ हुन्छ ।}$$

त्यसैले बाबुको उमेर $= 63$ हुन्छ र छोराको उमेर $= 21$ वर्ष हुन्छ ।



अध्यात्म 12.2

1. निम्न समीकरणहरू लेखाचित्रद्वारा हल गर र जाँचेर पनि हेर ।

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (क) $2x-y = 5$, $x-y = 1$ | (ख) $3x+y = 7$, $x = 2y$ |
| (ग) $x+y = 2$, $3x-y = 10$ | (घ) $2x-y = -5$, $x+y = -1$ |
| (ङ) $-x-y = -5$, $2x+y = -1$ | (च) $3x+y = 8$, $2x+y = 7$ |
| (छ) $4x+y = 2$, $3x-2y = 7$ | (ज) $2x+y = 4$, $x+2y = -1$ |
| (झ) $3x+2y = 1$, $2x-3y = 5$ | (झ) $4x+2y = 2$, $x-3y = 11$ |
| (ट) $2x+2y = 0$, $5x+y = -8$ | |

2. निम्न शाब्दिक समस्यालाई समीकरणहरूमा व्यक्त गर र लेखाचित्रद्वारा हल गर ।
- दुई सद्भ्याहरूको योग 21 र अन्तर 1 भए ती सद्भ्याहरू पता लगाउ ।
 - दुई सद्भ्याहरूको फरक 5 छ । एउटा सद्भ्या अर्कोभन्दा दोब्बर भए ती सद्भ्याहरू पता लगाउ ।
 - दुई सद्भ्याहरूको फरक 15 छ । ठूलो सद्भ्याको दोब्बर र सानो सद्भ्याको पाँच गुणा बराबर भए ती सद्भ्याहरू निकाल ।
 - बाबुको उमेर छोराको उमेरको दोब्बर छ । तिनीहरूको उमेरको अन्तर 25 भए उनीहरूको उमेर निकाल ।
 - रमेशको उमेर रविको भन्दा 5 वर्षले बढी छ । रमेशको 5 वर्ष पछिको उमेर रविको हालको उमेरभन्दा दोब्बर हुन्छ भने तिनीहरूको वर्तमान उमेर निकाल ।

12.3 सरल रेखाको भुकाव (Slope of a straight line)

एउटा रेखा A(1,3) र B(5,6) विन्दुहरू भएर गएछ । A बाट x - अक्षसँग समानान्तर हुने गरी खिचिएको रेखा र B बाट y - अक्षसँग समानान्तर हुने गरी खिचिएको रेखा आपसमा काटिने विन्दुलाई C मान्दा, C को निर्देशाङ्कहरू C(5,3) हुन्छन् ।

$$\text{यहाँ, } AC = 5-1 = 4$$

$$BC = 6-3 = 3 \text{ हुन्छ } \text{ र }$$

AC लाई विन्दु A र B को x - निर्देशाङ्कको फरक र BC लाई विन्दु A र B को y - निर्देशाङ्कको फरक भनिन्छ ।

यसको अर्थ रेखा AB, विन्दु A देखि विन्दु B सम्म x - अक्षमा 4 एकाइ परिवर्तन र y - अक्षमा 3 एकाइ परिवर्तन भएको छ ।

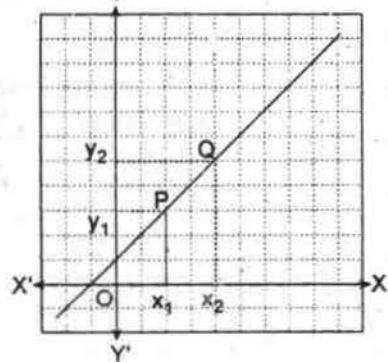
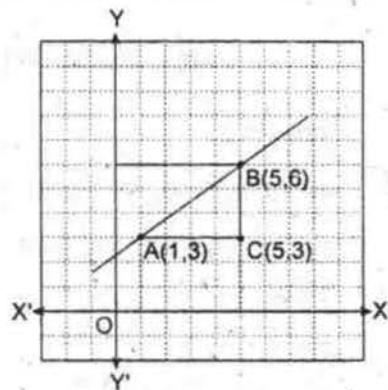
यदि एउटा रेखा P(x₁,y₁) र Q(x₂,y₂) विन्दुहरू भएर जान्छ भने PQ का लागि,

$$x - \text{निर्देशाङ्कको फरक} = x_2 - x_1 \text{ र }$$

$$y - \text{निर्देशाङ्कको फरक} = y_2 - y_1 \text{ हुन्छ ।}$$

y - निर्देशाङ्कको फरक र x - निर्देशाङ्कको फरकको अनुपातलाई यसको भुकाव भनिन्छ ।

$$\text{रेखाको भुकाव} = \frac{y - \text{निर्देशाङ्कको फरक}}{x - \text{निर्देशाङ्कको फरक}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



उदाहरण 1

एउटा रेखा $L(6,2)$ र $M(-2,6)$ विन्दुहरू भएर जान्छ ।

- (क) रेखाको लेखाचित्र खिच ।
- (ख) LM मा y -निर्देशाङ्कको फरक र x -निर्देशाङ्कको फरक पता लगाऊ ।
- (ग) LM को झुकाव पता लगाऊ ।

उत्तर: (क) $L(6,2)$ लाई $L(x_1, y_1)$ र $M(-2,6)$ लाई $M(x_2, y_2)$ मान्दा

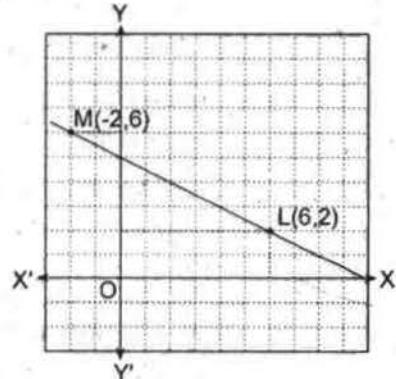
LM मा y -निर्देशाङ्कको फरक

$$y_2 - y_1 = 6 - 2 \\ = 4$$

LM मा x -निर्देशाङ्कको फरक

$$x_2 - x_1 = -2 - 6 \\ = -8$$

$$(ख) \text{ झुकाव } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$



नोट : दुईओटा विन्दुहरूबाट एउटा मात्र सरल रेखाको लेखाचित्र खिच्न सकिन्दै ।

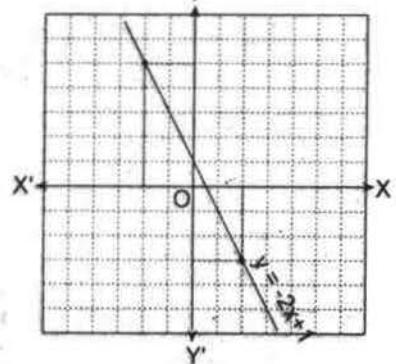
उदाहरण 2

समीकरणहरू (क) $y = -2x + 1$ र (ख) $y = \frac{1}{2}x - 2$ प्रत्येकका लागि x र y को सम्बन्ध जनाउने तालिका बनाइ त्यसको आधारमा लेखाचित्र बनाऊ र त्यसमा कुनै दुईओटा विन्दुहरू लिई रेखाको झुकाव पता लगाऊ ।

उत्तर:

(क) $y = -2x + 1$ को तालिका

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3



यसको आधारमा लेखाचित्र बनाउँदा दायाँ देखाएजस्तो चित्र बन्दै ।

यसमा विन्दुहरू $(-1, 3)$ र $(2, -3)$ लिईं,

$$\text{झुकाव } = \frac{-3 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = -2$$

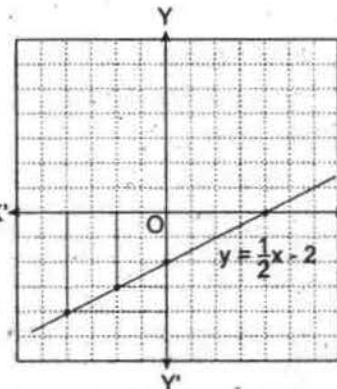
(ख) $y = \frac{1}{2}x - 2$ को तालिका

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-3	-2	-1	0

यसको आधारमा लेखाचित्र बनाउंदा, दायाँ देखाएजस्तो हुन्छ ।

यसमा विन्दुहरू $(-4, -4)$ र $(0, -2)$ लिंदा ।

$$\text{भुकाव} = \frac{-2 - (-4)}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



माथि उदाहरण 2 मा अरू विन्दुहरूको जोडा लिए पनि भुकाव एउटै हुन्छ, जस्तै (क) मा विन्दुहरू $(-2, 5)$ र $(0, 1)$ लिंदा ।

$$\text{भुकाव} = \frac{1 - 5}{0 - (-2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

(ख) मा विन्दुहरू $(-2, -3)$ र $(4, 0)$ लिंदा,

$$\text{भुकाव} = \frac{0 - (-3)}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

यहाँ (क) मा भुकाव सधै -2 हुन्छ र (ख) मा भुकाव सधै $\frac{1}{2}$ हुन्छ ।

त्यसैले,

एउटा रेखाको भुकाव जुनसुकै विन्दुबाट नापे पनि एउटै हुन्छ र रेखा $y = mx + c$ मा भुकाव m हुन्छ ।

उदाहरण 3

तलको प्रत्येक रेखाको भुकाव निकाल र लेखाचित्र पनि बनाउ ।

$$(क) y - 3x = 2 \quad (ख) 3x + 4y + 8 = 0$$

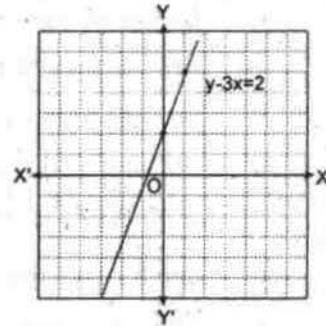
उत्तर: (क) $y - 3x = 2$

यसलाई $y = mx + c$ सँग तुलना गर्दा

$$\text{अथवा } y = 3x + 2$$

\therefore भुकाव (m) = 3 . यसलाई रेखाचित्रमा देखाउंदा,

x	0	1
y	2	5



$$(ख) 3x + 4y + 8 = 0$$

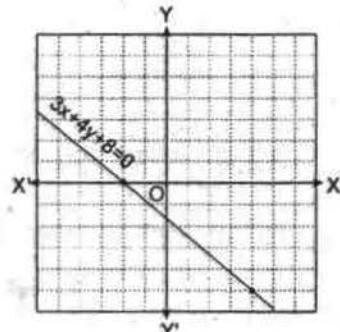
$$\text{अथवा } 4y = -3x - 8$$

$$\text{अथवा } y = -\frac{3}{4}x - 2, \text{ यसलाई } y = mx + c \text{ सँग}$$

तुलना गर्दा

$$\therefore \text{भुकाव } (m) = -\frac{3}{4}, \text{ यसलाई रेखाचित्रमा देखाउंदा}$$

x	0	4
y	-2	-5



माथि उदाहरण 3 (क) मा भुकाव धनात्मक छ र तिनीहरूको लेखाचित्र दायाँतिर माथि देखाइएको छ भने
 (ख) मा भुकाव ऋणात्मक छ र त्यसको लेखाचित्र बायाँतिर माथि देखाइएको छ।

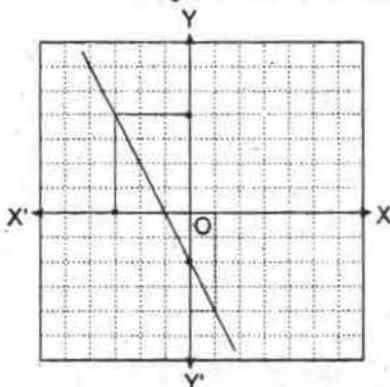
त्यसकारण

रेखाको भुकाव	लेखाचित्र
धनात्मक	दायाँतिर माथि
ऋणात्मक	बायाँतिर माथि

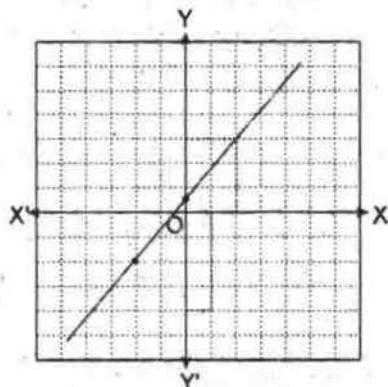
अध्यात्म 12.3

1. तलका प्रत्येक रेखाको भुकाव कति छ ? निकाल ।

(क)



(ख)



2. दिइएका दुई विन्दुहरू भएर जाने रेखाको भुकाव पत्ता लगाऊ ।

(क) A(3,9), B(6,3)

(ख) C(9,8), D(7,2)

(ग) E(-3,-1), F(-1,1)

(घ) K(1,-2), L(3,-6)

(ड) M(-8,-1), N(-5,6)

(च) U(0,0), V(3,-2)

(छ) W(0,6), x(7,0)

(ज) P(3,1), Q(5,1)

3. प्रश्न नं. 2 का रेखाहरूको लेखाचित्र “दायाँतिर माथि” वा “बायाँतिर माथि” के हुन्छ, लेख ।

4. तल दिइएका समीकरणहरूको भुकाव पत्ता लगाऊ र लेखाचित्र बनाऊ ।

(क) $y = 3x + 6$

(ख) $y = -2x - 3$

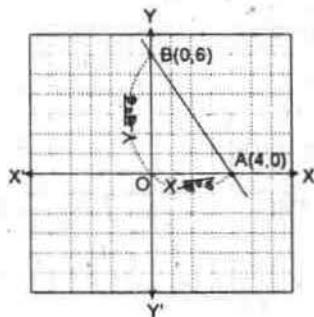
(ग) $x + y = 1$

(घ) $4y - 2x = 8$

12.4 सरल रेखाका खण्डहरू (Intercepts of a straight line)

दिइएको लेखाचित्रमा रेखा AB ले x - अक्षको विन्दु A(4,0) मा काटदा, $OA = 4$ हुने गरी काटेको छ भने y - अक्षको विन्दु B(0,6) मा काटदा $OB = 6$ हुने गरी काटेको छ । यहाँ OA र OB लाई क्रमशः रेखा AB को x - खण्ड (x-intercept) र y - खण्ड (y-intercept) भनिन्छ । त्यसैले, रेखा AB को

$$x - \text{खण्ड} = 4 \text{ र } \\ y - \text{खण्ड} = 6 \text{ हुन्छ।}$$



उदाहरण 1

रेखा $y = 2x + 4$ को x - खण्ड र y - खण्ड निकाल र यसको लेखाचित्र पनि बनाऊ।

उत्तर:

यहाँ x - अक्षमा कुनै पनि विन्दुको y - निर्देशाङ्क 0 हुन्छ भने y - अक्षमा कुनै पनि विन्दुको x - निर्देशाङ्क 0 हुन्छ। त्यसकारणले x - खण्ड र y - खण्ड निकालनका लागि कमशः $y = 0$ र $x = 0$ प्रतिस्थापन गर्नुपर्छ।

$$\therefore x - \text{खण्ड} : y = 2x + 4 \text{ मा } y = 0 \text{ प्रतिस्थापन गरेर} \\ 0 = 2x + 4$$

$$\therefore x = -2$$

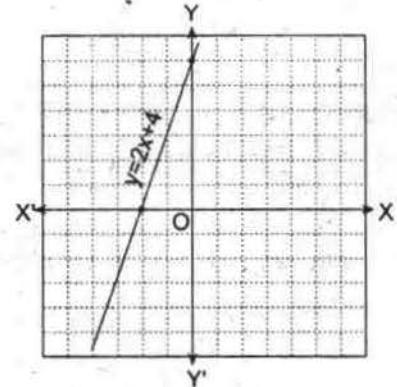
$$\therefore x - \text{खण्ड} = -2$$

$$y - \text{खण्ड} : y = 2x + 4 \text{ मा } x = 0 \text{ प्रतिस्थापन गरेर} \\ y = 2 \times 0 + 4$$

$$\therefore y = 4$$

$$\therefore y - \text{खण्ड} = 4$$

यसबाट लेखाचित्र दायाँ देखाएजस्तो बन्छ।



उदाहरण 2

रेखा $3x+2y=6$ को लेखाचित्र बनाऊ र त्यो रेखाको x - खण्ड र y - खण्ड पत्ता लगाऊ।

उत्तर :

$$x - \text{खण्ड} : 3x + 2y = 6 \text{ मा } y = 0 \text{ प्रतिस्थापन गरेर} \\ 3x + 2 \times 0 = 6$$

$$\therefore x = 2$$

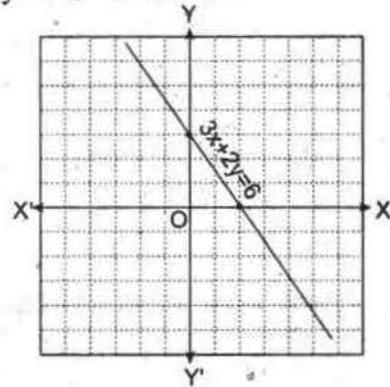
$$\therefore x - \text{खण्ड} = 2$$

$$y - \text{खण्ड} : 3x + 2y = 6 \text{ मा } x = 0 \text{ प्रतिस्थापन गरेर} \\ 3 \times 0 + 2y = 6$$

$$\therefore y = 3$$

$$\therefore y - \text{खण्ड} = 3$$

यसबाट लेखाचित्र दायाँ देखाएजस्तो हुन्छ।



नोट: समीकरण $ax+by+c=0$ भएको रेखाको खण्डहरू पत्ता लगाउन क्रमैसँग x - खण्डका लागि $y = 0$ र y - खण्डका लागि $x = 0$ प्रतिस्थापन गर्नुपर्छ।

उदाहरण 3

रेखा $y = -\frac{3}{2}x - 6$ ले x -अक्ष र y -अक्ष कुनकुन बिन्दुमा काट्छ, पत्ता लगाई ती बिन्दुहरूको आधारमा लेखाचित्र बनाउ ।

उत्तर : रेखा $y = -\frac{3}{2}x - 6$ को x -खण्ड निकालन $y = 0$ प्रतिस्थापन गर्दा,

$$0 = -\frac{3}{2}x - 6$$

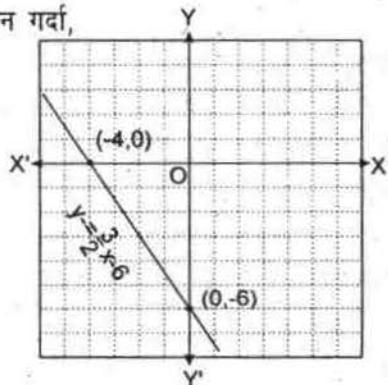
$$\therefore x = -4$$

$\therefore x$ -खण्ड निकालत $x = 0$ प्रतिस्थापन गर्दा

$$y = -\frac{3}{2} \times 0 - 6$$

$$\therefore y = -6$$

$$\therefore y - खण्ड = -6$$

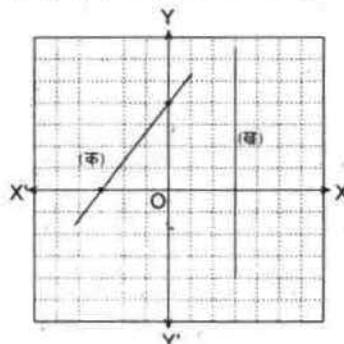


त्यसकारणले रेखाले x -अक्षमा बिन्दु $(-4, 0)$ र y -अक्षमा बिन्दु $(0, -6)$ मा काट्छ । यी बिन्दुहरूलाई अड्कन गरी लेखाचित्र बनाउँदा, माथि देखाएजस्तो चित्र बन्दछ ।

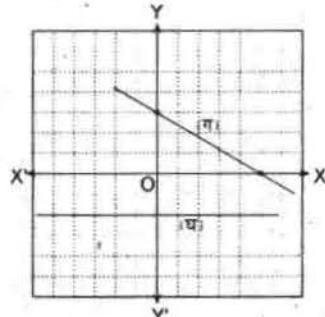
अध्यायका 12.4

1. रेखा (क), (ख), (ग) र (घ) प्रत्येकको x -खण्ड र y -खण्ड पत्ता लगाउ ।

(क)



(ख)



2. तलका प्रत्येक समीकरणले जनाउने रेखाको x -खण्ड पत्ता लगाउ ।

(क) $y = 2x + 4$

(ख) $y = -x - 3$

(ग) $y + x - 2 = 0$

(घ) $3x + 2y - 6 = 0$

3. तलका प्रत्येक समीकरणमा रेखाको y -खण्ड पत्ता लगाउ ।

(क) $y = 3x + 1$

(ख) $y = -5x - 6$

(ग) $x - y + 4 = 0$

(घ) $2x - 3y - 4 = 0$

4. तलका प्रत्येक रेखाले x -अक्ष र y -अक्षमा कुन-कुन बिन्दुमा काट्छ पत्ता लगाई ती बिन्दुहरूको आधारमा लेखाचित्र बनाउ ।

(क) $y = x + 2$

(ख) $y = -3x + 6$

(ग) $y = \frac{1}{2}x + 3$

(घ) $y = -\frac{4}{5}x - 8$

(ङ) $2x + y = 4$

(च) $3x - 2y + 12 = 0$

12.5 गुणनखण्ड विधिबाट वर्ग समीकरणको हल

(Solving Quadratic Equation by Factorization)

डिग्री 2 भएको एक चलयुक्त समीकरणलाई वर्ग समीकरण भन्दछन् । जस्तै :

(i) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (iii) $x^2 = 36$ (iv) $7x^2 - 175 = 0$

चलको घाताङ्क 2 र 1 दुवै समावेश भएको वर्गसमीकरणलाई मिश्रित वर्ग समीकरण (Mixed Quadratic Equation) भनिन्छ । जस्तै - माथिको उदाहरणमा (i) र (ii) मिश्रित वर्ग समीकरण हुन् भने चलको घाताङ्क 1 नभएको समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (Pure Quadratic Equation) भनिन्छ । जस्तै माथिको उदाहरणमा (iii) र (iv) शुद्ध वर्ग समीकरण हुन् ।

समीकरणमा रहेको चलको मान पता लगाउनुलाई समीकरणको हल गरेको भनिन्छ । एक चलयुक्त रेखीय समीकरणमा चलको मान एउटा मात्र हुन्छ भने वर्ग समीकरणमा चलको मान दुईओटा हुन्छन् । ती मानहरूलाई त्यस समीकरणको मूल वा मूलहरू (Roots) भन्दछन् ।

उदाहरण 1

हल गर : $x^2 - 5x + 6 = 0$

उत्तर :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - (3+2)x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{यदि } (x-3) = 0 \text{ भए } x = 3 \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{यदि } (x-2) = 0 \text{ भए } x = 2 \text{ हुन्छ ।}$$

त्यसैले x को मान 2 वा 3 हुन्छ ।

नोट: $xy = 0$ भएको समीकरणको गुणनखण्डहरू x र y हुन् । ती दुईको गुणनफल 0 हुनुमा x र y मध्ये कुनै एकको मान 0 हुनुपर्दछ वा दुवैको मान 0 हुनुपर्दछ ।
त्यसैले, $x = 0$ अथवा $y = 0$

उदाहरण 2

x को मान निकाल ।

$$9x^2 - 64 = 0$$

उत्तर : $9x^2 - 64 = 0$

$$\text{अथवा, } (3x)^2 - (8)^2 = 0$$

$$\text{अथवा, } (3x+8)(3x-8) = 0$$

$$\text{यदि } (3x + 8) = 0 \text{ भए } 3x = -8 \text{ हुन्छ } | \text{ त्यसैले } x = \frac{-8}{3} \text{ हुन्छ } |$$

$$\text{यदि } (3x - 8) = 0 \text{ भए } 3x = 8 \text{ हुन्छ } | \text{ त्यसैले } x = \frac{8}{3} \text{ हुन्छ } |$$

$$\therefore x = \pm \frac{8}{3} \text{ अथवा } x = \pm 2\frac{2}{3}$$

आठ्यात्ता 12.5

1. हल गर ।

(क) $x^2 + x = 0$

(घ) $x^2 - x - 2 = 0$

(छ) $x^2 + 3x - 4 = 0$

(ज) $x^2 - x - 12 = 0$

(ट) $x^2 + 3x - 10 = 0$

(त) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(ध) $x^2 - 25 = 0$

(फ) $x^2 - 12x + 36 = 0$

(ख) $x^2 - x = 0$

(ड) $x^2 + x - 2 = 0$

(ज) $x^2 - 3x - 4 = 0$

(ट) $x^2 - x - 20 = 0$

(द) $x^2 - 9x + 18 = 0$

(थ) $x^2 + 8x + 16 = 0$

(न) $x^2 + 10x + 25 = 0$

(ग) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(च) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(झ) $x^2 - 9 = 0$

(ठ) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(ण) $x^2 - x - 30 = 0$

(द) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(प) $x^2 - 36 = 0$

2. x को मान पत्ता लगाऊ ।

(क) $2x^2 + 3x = 0$

(घ) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

(छ) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(ज) $2x^2 - x - 3 = 0$

(ट) $9x^2 - 4 = 0$

(त) $16x^2 + 1 + 8x = 0$

(ध) $6x^2 + 7x + 2 = 0$

(फ) $10x^2 - 7x + 1 = 0$

(ख) $2x^2 - 3x = 0$

(ड) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

(ज) $3x^2 - 4x - 4 = 0$

(ट) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(द) $16x^2 - 1 = 0$

(थ) $16x^2 - 9 = 0$

(न) $6x^2 + x - 2 = 0$

(ग) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

(च) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

(झ) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

(ठ) $9x^2 + 9x + 2 = 0$

(ण) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

(द) $16x^2 - 24x + 9 = 0$

(प) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

3. हल गर ।

(क) $(x+1)^2 - 4 = 0$

(घ) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 0$

(ख) $(x-3)^2 - 25 = 0$

(ड) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0$

(ग) $(x+5)^2 - 36 = 0$

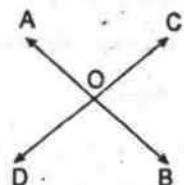
(च) $\left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0$

13.1 कोणहरू (Angles)

1. शीर्षभिमुख कोणहरू (Vertically Opposite Angles)

चित्रमा, AB र CD दुई रेखाहरू विन्दु O मा काटिएका छन्।

अब प्रोटेक्टरको सहायताले निम्न तालिका भर।



कोण	$\angle AOD$	$\angle COB$	$\angle AOC$	$\angle BOD$
नाप				

के $\angle AOD = \angle COB$ र $\angle AOC = \angle BOD$ छन्?

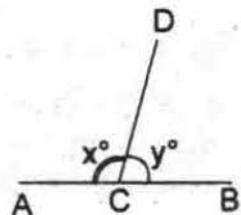
यसबाट तिमीहरू के निष्कर्ष निकालन सक्छौ?

निष्कर्ष : दुईओटा रेखाहरू वा रेखाखण्डहरू एक आपसमा काटदा बनेका शीर्षभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन्।

2. आसन्न कोणहरू (Adjacent Angles)

चित्रमा, एउटा सरल रेखाखण्ड AB मा अर्को विन्दुबाट खिचिएको रेखाखण्ड CD ले बनाएका आसन्न कोणहरू x° र y° छन्।

के $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$ हुन्छ? नापेर हेर।



निष्कर्ष : एउटा सरल रेखाखण्डलाई अर्को सरल रेखाले काटदा बनेका एकजोडा आसन्न कोणहरूको जोड 180° हुन्छ।

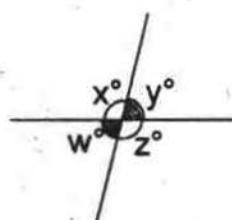
चित्रमा, के

$$x^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$y^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

$$w^\circ + z^\circ = 180^\circ$$
 र

$$x^\circ + w^\circ = 180^\circ$$
 हुन्छ? नापेर हेर।

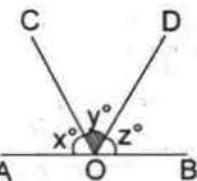


3. सरल कोण (Straight Angle)

चित्रमा, एउटा सरलरेखा AB को माथितर (एकैतिर) बनेका आसन्न कोणहरू x° , y° र z° छन्। ती कोणहरूलाई नापेर हेर।

के $x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$ हुन्दै ?

निष्कर्ष :- एउटा सरल रेखाखण्डको कुनै विन्दुमा एकैतिर बनेका कोणहरूको जोड 180° हुन्दै।



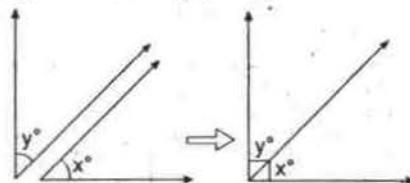
4. समपूरक कोणहरू (Complementary Angles)

यदि दुईओटा कोणहरूको जोड 90° अथवा एक समकोण हुन्दै भने त्यस्ता कोणहरूलाई एकअर्काका समपूरक कोणहरू भनिन्दै। 60° र 30° एकअर्काका समपूरक कोणहरू हुन्।

चित्रमा,

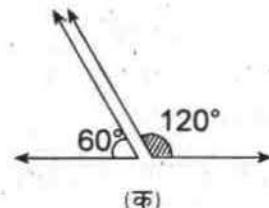
$x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ हुन्दै।

त्यसैले x° र y° एकअर्काका समपूरक कोणहरू हुन्।



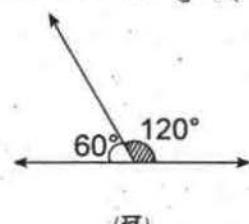
5. परिपूरक कोणहरू (Supplementary Angles)

यदि दुईओटा कोणहरूको जोड 180° हुन्दै भने तिनीहरूलाई एकअर्काका परिपूरक कोणहरूभनिन्दै। 60° र 120° अथवा 100° र 80° एकअर्काका परिपूरक कोणहरू हुन्।



(क)

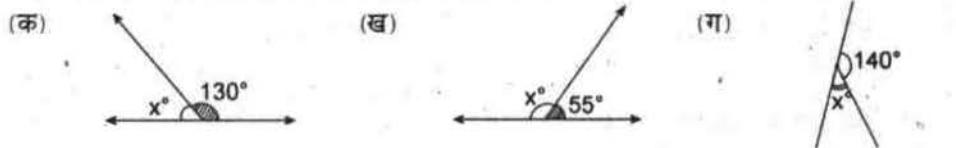
यदि परिपूरक कोणहरू एउटै सिधा रेखामा बनेका छन् भने तिनीहरू आसन्न कोणहरू हुन्दैन्। माथिको चित्र (क) मा देखाइएका 60° र 120° का कोणहरू एउटै रेखामा बनाउंदा चित्र (ख) मा देखाइए जस्तो हुन्दै। यस्तो अवस्थामा 60° र 120° का कोणहरू आसन्न कोणहरू हुन्दैन्।



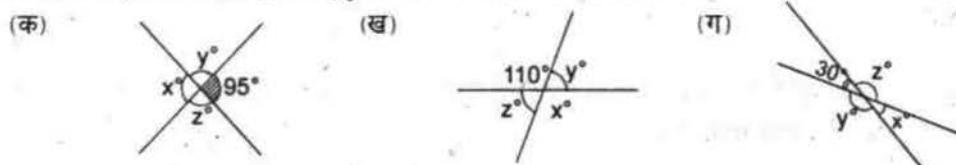
(ख)

अध्यात्म 13.1

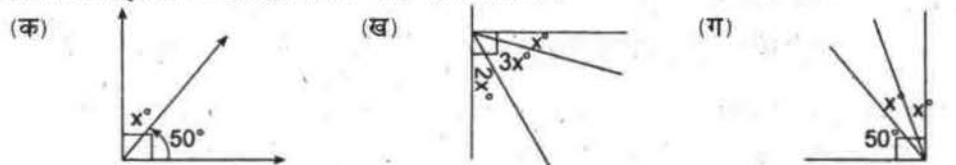
1. तलका प्रत्येक अवस्थामा x° को मान पत्ता लगाऊ।



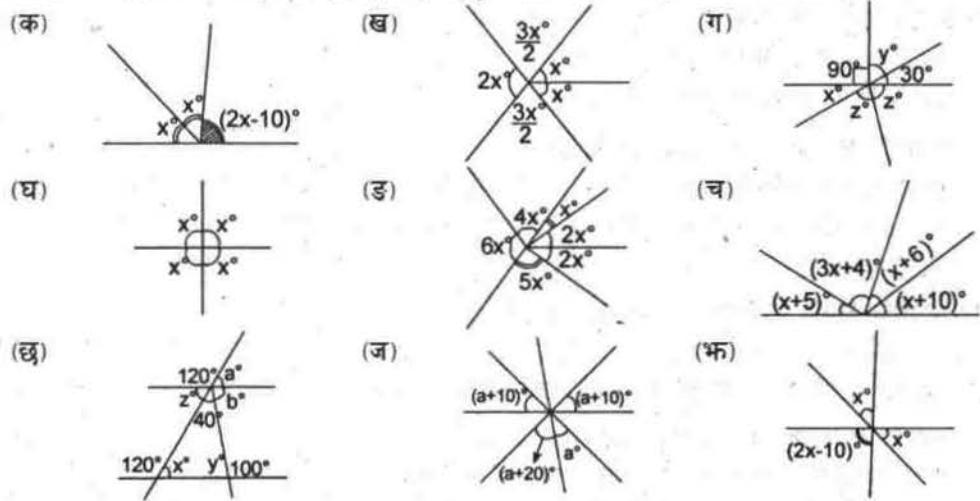
2. तलका चित्रहरूका आधारमा x° , y° र z° का मान पत्ता लगाऊ।



3. तलका चित्रहरूका आधारमा x° को मान पत्ता लगाऊ।



4. तलका चित्रहरूका आधारमा a° , b° , c° , x° , y° र z° का मानहरू पत्ता लगाऊ।



5. 30° , 40° , 45° र 80° का कोणहरूका समपूरक र परिपूरक कोणहरू पत्ता लगाऊ।

6. यदि $9x^\circ$ र $6x^\circ$ एकअर्काका समपूरक कोणहरू भए ती कोणहरू पत्ता लगाऊ।

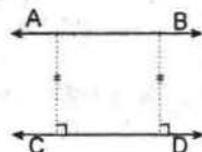
7. यदि $(2x+20)^\circ$ र $(3x-40)^\circ$ ले एक सरल कोण बनाउँछ भने x को मान निकाल।

13.2 समानान्तर रेखाहरू (Parallel lines)

13.2.1. समानान्तर रेखाहरू (Parallel Lines)

(क) दुईओटा रेखाहरूलाई दुवै छेऊतिर जति लम्ब्याइए पनि आपसमा काटिदैनन् भने तिनीहरूलाई समानान्तर रेखाहरू भनिन्छ ।

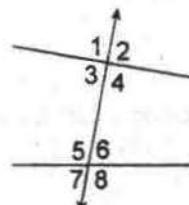
चित्रमा दिइएका रेखाहरू AB र CD समानान्तर छन् ।
यसलाई $AB \parallel CD$ भनिन्छ ।



(ख) दुई समानान्तर रेखाहरू बीचको दूसी सधैं वरावर हुन्छ । चित्रमा A र C बीचको दूरी र B र D बीचको दूरी वरावर हुन्छ ।

13.2.2 छेदकले समानान्तर रेखाहरूसँग बनाउने कोणहरू (Angles formed by a transversal with the parallel lines)

चित्रमा दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा बनेका कोणहरूलाई 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ले जनाइएका छन् । यी कोणहरूमध्ये रेखाहरूभन्दा बाहिर परेका कोणहरू 1, 2, 7, 8 लाई बाहिरी कोणहरू भनिन्छ भने भित्र परेका कोणहरू 3, 4, 5, 6 लाई भित्री कोणहरू भनिन्छ ।



(क) एकान्तर कोणहरू (Alternate Angles)

दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू भनिन्छ । माथिको चित्रमा दिइएका कोणहरूमध्ये 4 र 5, 3 र 6 एकान्तर कोणहरू हुन् ।

(ख) क्रमागत भित्री कोणहरू (Co-interior Angles)

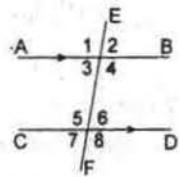
दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा छेदकको एकैतिर परेका दुवै भित्री कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ । माथिको चित्रमा 3 र 5, 4 र 6 क्रमागत भित्री कोणहरू हुन् ।

(ग) सङ्गत कोणहरू (Corresponding Angles)

दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा छेदकको एकैतिर परेका एउटा भित्री एउटा बाहिरी अनासन्न कोणहरूलाई सङ्गत कोणहरू भनिन्छ । माथिको चित्रमा 1 र 5 एकजोडा सङ्गत कोणहरू हुन् । त्यसै 3 र 7, 2 र 6, 4 र 8 पनि जोडा सङ्गत कोणहरू हुन् ।

क्रियाकलाप ।

चित्रमा देखाइजस्तै गरी सेट स्ववायरको सहायताले दुईओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD खिची एउटा छेदक EF ले काट । यसरी बनेका कोणहरू 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 लाई प्रोटेक्टरको सहायताले नापी तलको तालिका भर ।



		सङ्गत कोणहरू	एकान्तर कोणहरू	क्रमागत भित्री कोणहरू
$\angle 1 = \dots$	$\angle 5 = \dots$	$\angle 1 = \angle 5 = \dots$	$\angle 3 = \angle 6 = \dots$	$\angle 3 + \angle 5 = \dots$
$\angle 3 = \dots$	$\angle 7 = \dots$	$\angle 3 = \angle 7 = \dots$		
$\angle 2 = \dots$	$\angle 6 = \dots$	$\angle 2 = \angle 6 = \dots$	$\angle 4 = \angle 5 = \dots$	$\angle 4 + \angle 6 = \dots$
$\angle 4 = \dots$	$\angle 8 = \dots$	$\angle 4 = \angle 8 = \dots$		

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख ।

निष्कर्ष : समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बनेका

- (क) सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्दैन् ।
- (ख) एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्दैन् ।
- (ग) क्रमागत भित्री कोणहरूको योग 180° को हुन्दै ।

दुईओटा रेखाहरू समानान्तर हुने अवस्था :

दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा निम्नलिखितमध्ये कुनै एउटा अवस्था मान्य भएमा ती रेखाहरू समानान्तर हुन्दैन् ।

- (क) सङ्गत कोणहरू बराबर भएमा,
- (ख) एकान्तर कोणहरू बराबर भएमा,
- (ग) क्रमागत भित्री कोणहरूको योग 180° भएमा ।

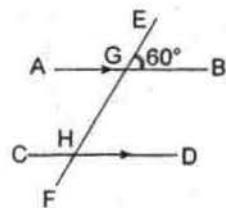
उदाहरण 1

सौंको चित्रमा AB//CD र EF छेदक हो । यदि $\angle EGB = 60^\circ$ भए बाँकी सबै कोणहरूको नाप निकाल ।

उत्तर: दिएको, $\angle EGB = 60^\circ$

त्यसैले,

- (i) $\angle AGE + \angle EGB = 180^\circ$ – (सरल कोण)
 $\angle AGE = 180^\circ - \angle EGB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- (ii) $\angle AGH = \angle EGB = 60^\circ$ – (शीर्षभिमुख कोणहरू बराबर हुने भएकाले)
- (iii) $\angle BGH = 180^\circ - \angle EGB$
 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ – (सरल कोण)
- (iv) $\angle GHD = \angle AGH = 60^\circ$ – (एकान्तर कोणहरू बराबर हुने भएकाले)
- (v) $\angle GHC = \angle AGE = 120^\circ$ – (सङ्गत कोणहरू बराबर हुने भएकाले)



- (vi) $\angle CHF = \angle AGH = 60^\circ$
(vii) $\angle DHF = \angle BGH = 120^\circ$

— (सङ्गत कोणहरू वरावर हुने भएकाले)
— सङ्गत कोणहरू

उदाहरण 2

दिएको चित्रमा x को मान निकाल ।

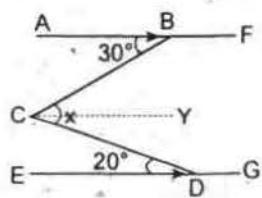
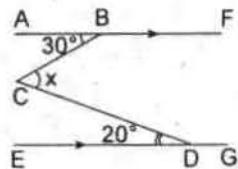
उत्तर:

जुस्ति: विन्दु C भएर जाने तथा AF र EG संग समानान्तर हुने रेखा XY खिचौं ।

$$\begin{aligned}\angle BCY &= \angle ABC \quad (\text{एकान्तर कोण } AF//XY) \\ \therefore \angle BCY &= 30^\circ \\ \angle YCD &= \angle CDE \quad (\text{एकान्तर कोण } XY//ED) \\ \therefore \angle YCD &= 20^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \angle BCY + \angle YCD \\ &= 30^\circ + 20^\circ \\ &= 50^\circ \\ \therefore x &= 50^\circ\end{aligned}$$

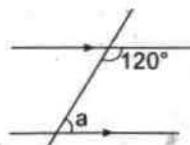
[नोट : दिएको चित्रमा BC लाई EG सम्म लम्ब्याएर पनि माथिको समस्या हल गर्न सकिन्दछ ।]



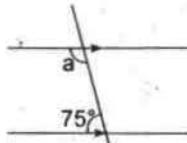
अध्यात्म 13.2

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काटेको छ । थाहा नभएको कोण पत्ता लगाऊ ।

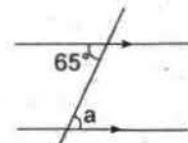
(क)



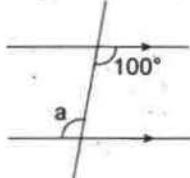
(ख)



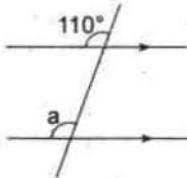
(ग)



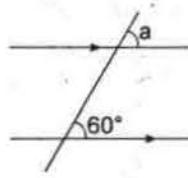
(घ)



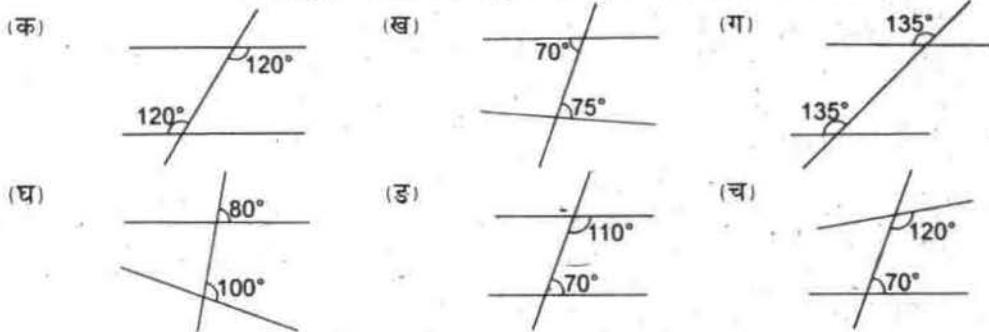
(ङ)



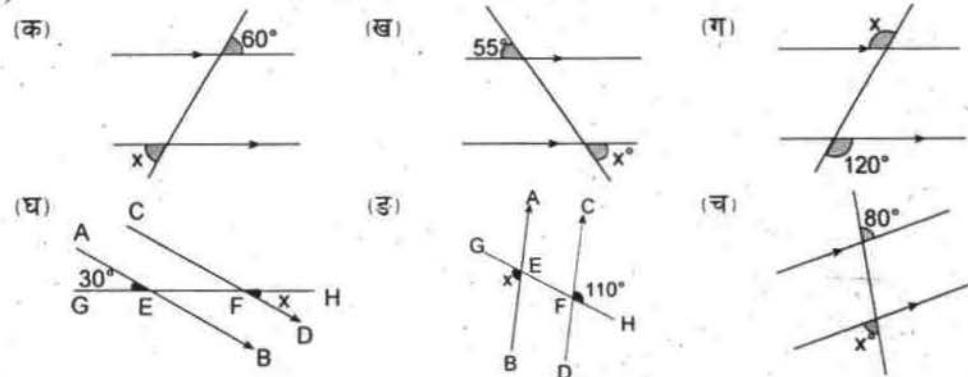
(च)



2. तलका प्रत्येक अवस्थामा रेखाहरू समानान्तर छन् वा छैनन् ? कारणसहित लेख ।

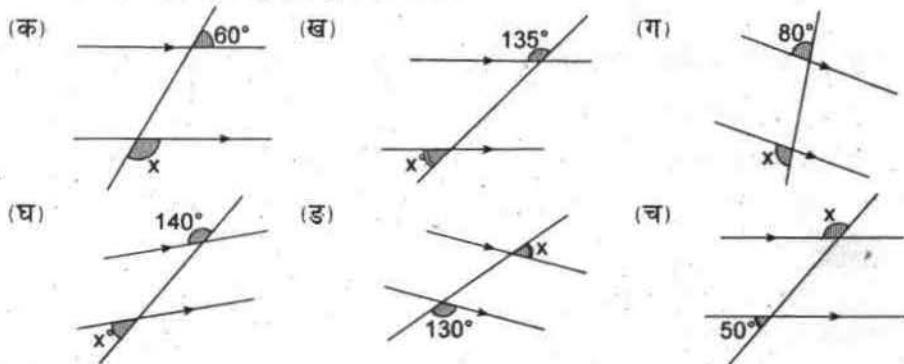


3. (i) तलका प्रत्येक अवस्थामा x को मान पत्ता लगाऊ ।



(ii) यदि माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा छायापारेको कोणहरूलाई बाहिरी एकान्तर कोणहरू भन्दून भने बाहिरी एकान्तर कोणहरूलाई मान्य हुने एउटा वाक्य लेख ।

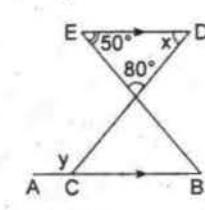
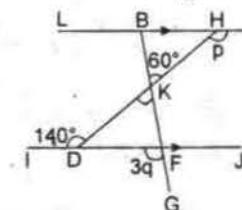
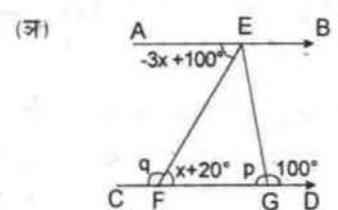
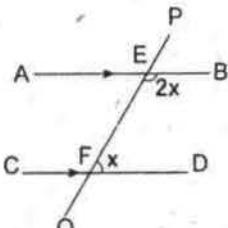
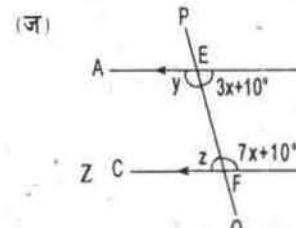
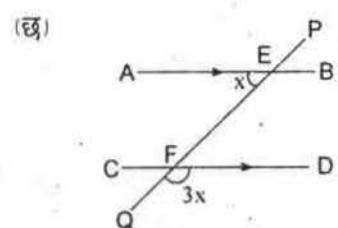
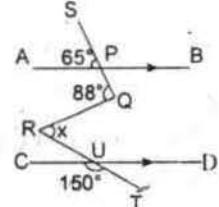
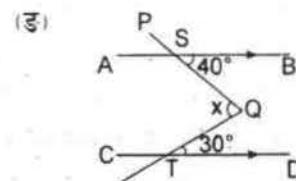
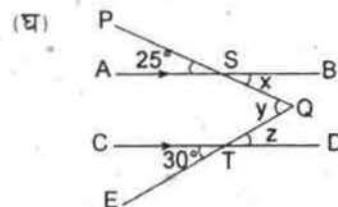
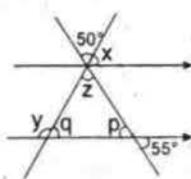
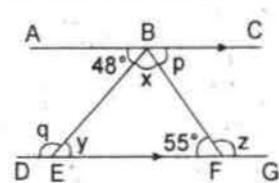
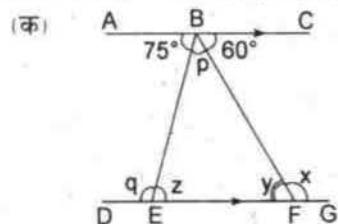
4. (i). तलका प्रत्येक अवस्थामा x को मान निकाल ।



(ii) x र दिएको कोणको योगफल कति डिग्री हुन्दै ?

(iii) रङ्गाइएका कोणहरूलाई बाहिरी कमागत कोणहरू भन्दून भने यी कोणहरूलाई मान्य हुने एउटा वाक्य लेख ।

5. तलका प्रत्येक अवस्थामा p, q, x, y र z का मान पता लगाउ ।



13.3 कोणहरूको रचना (Construction of Angles)

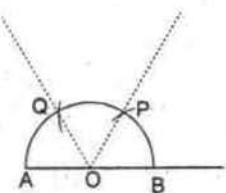
अधिल्लो कक्षामा तिमीहरूले कोणहरूको रचनासम्बन्धी केही जानकारीहरू पाइसकेका छौं । यस कक्षामा केही थप जानकारीहरू पाउनेछौं ।

(अ) 75° नाप भएको कोणको रचना: तल दिइएका चरणअनुसार रचना गर ।

चरण ।

एउटा रेखा खिच । यसको कुनै बिन्दु O मा OA वरावरको चाप लिई अर्धवृत्त खिच र त्यही चाप घटबढ नगरी B मा कम्पासको सियो राखी चाप P काट र त्यही चापले P मा कम्पासको सियो राखी चाप Q काट । PO र QO जोड्दा

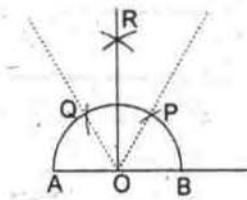
$$\angle POB = \angle POQ = \angle QOA = 60^\circ \text{ हुन्छ ।}$$



चरण 2

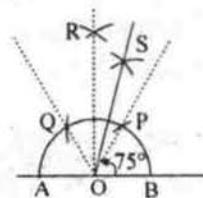
P मा कम्पासको सियो राखी PQ को आधाभन्दा बढी वा वरावर चाप लिएर काट र त्यही चाप घटबढ नगरी Q मा कम्पासको सियो राखी पहिलाको चापमा काट्ने गरी अर्को चाप काट । चापहरू काटिएको विन्दुको नाम R राख ।

RO जोड्दा $\angle BOR = \angle ROA = 90^\circ$ हुन्छ ।



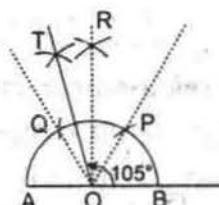
चरण 3

चरण 2 का तरिकाले $\angle ROP = 30^\circ$ को अर्धक SO खिच । त्यसैले $\angle SOR = \angle POS = 15^\circ$ हुन्छ । र $\angle BOS = \angle BOP + \angle POS$
 $= 60^\circ + 15^\circ$
 $= 75^\circ$ नै चाहिएको कोण हो ।



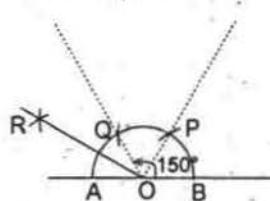
(आ) 105° को नाप भएको कोणको रचना

75° को कोण खिच्दा अपनाइएका चरणहरू 1 र 2 दोहोन्याऊ । $\angle ROQ$ लाई आधा गर्ने रेखा OT खिच । यसो गर्दा $\angle TOQ = \angle ROT = 15^\circ$ हुन्छ । त्यसैले, $\angle BOT = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ नै चाहिएको कोण हो ।



(इ) 150° नाप भएको कोणको रचना

75° को कोण खिच्दा अपनाइएको चरण 1 दोहोन्याऊ । 60° नाप भएको $\angle AOQ$ लाई आधा गर्न QA को आधाभन्दा बढी चाप निश्चित गरी कम्पासको सियो A र Q मा राखी दुईओटा चापहरू विन्दु R मा काट्ने गरी खिच र RO जोड ।

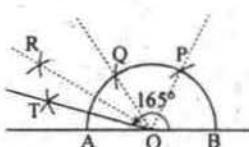


यहाँ, $\angle AOR = \angle ROQ = 30^\circ$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\angle BOR = \angle BOP + \angle POQ + \angle QOR$
 $= 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ$
 $= 150^\circ$ नै चाहिएको कोण हो ।

(ई) 165° नाप भएको कोणको रचना ।

150° को कोण खिच्दाका चरणहरू दोन्याऊ । 30° नाप भएको कोण ROA लाई आधा गर्ने रेखा TO खिच । यहाँ, $\angle ROT = \angle TOA = 15^\circ$ हुन्छ ।



त्यसैले, $\angle BOT = \angle BOP + \angle ROT$
 $= 150^\circ + 15^\circ$
 $= 165^\circ$ नै चाहिएको कोण हो ।

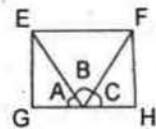
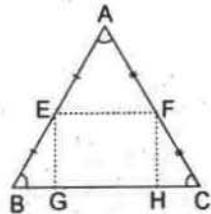
आध्यात्मा 13.3

1. तलका नाप भएका कोणहरू रुलर र कम्पासको सहायताले खिच ।
 (क) 30° (ख) 45° (ग) 60° (घ) 90° (ङ) 120°
 (च) 75° (छ) 105° (ज) 135° (झ) 150° (ञ) 165°
2. रेखा AB का दुई बिन्दुहरू P र Q मा $75^\circ/75^\circ$ का कोणहरू बनाउने रेखाहरू (P र Q का दायाँतिर ABको माथि बनाउने रेखाहरू) PR र QS खिच । के PR र QS समानान्तर हुन्छन् ? कारण देउ ।
3. रेखा AB मा दुई बिन्दुहरू P र Q लेउ । P र Q मा $105^\circ/105^\circ$ का कोणहरू बनाउने रेखाहरू P र Q को बायाँतिर AB को माथि PR र QS खिच PR र QS किन समानान्तर हुन्छन् ? कारण देउ ।
4. रेखा AB को बिन्दु P र Q मा $90^\circ/90^\circ$ का कोणहरू बनाउने रेखाहरू PR र QS खिच । अब रचनाको आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको जवाफ देउ ।
 (क) के PR र QS दुवै रेखाहरू रेखा AB मा लम्ब छन् ?
 (ख) के PR र QS दुवै समानान्तर छन् ?
5. रेखा AB मा बिन्दुहरू P र Q लिएर बिन्दु P मा P को बायाँतिर पर्ने गरी 150° को कोण बनाउने रेखा PR खिच र बिन्दु Q मा Q को दायाँतिर 150° को कोण बनाउने रेखा QS खिच । के PR र QS समानान्तर छन् ? छैनन् भने किन ? कारण देउ ।

क्रियाकलाप ।

- (क) चित्रमा देखाइए जस्तै $\triangle ABC$ अभ्यास पुस्तिकामा रचना गरेर कैैचीले काट ।
- (ख) त्रिभुज आकारको कागजको टुकालाई चित्रमा देखाइए जस्तै गरी डट रेखा EF मा पट्याउ ।
- (ग) EG र FH मा पनि पट्याउ ।
- (घ) अब तिमीहरूले लिएको कागजको टुका (त्रिभुज) चतुर्भुज $EFHG$ जस्तो बन्नो ?
- (ङ) यसरी $\angle A$, $\angle B$ र $\angle C$ लाई नखप्ट्याई मिलाएर जोड्दा सरल कोण बन्न्छ ।
यस प्रयोगबाट तिमीहरू के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ?

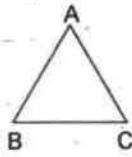
निष्कर्ष : त्रिभुजका 3 ओटै कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।



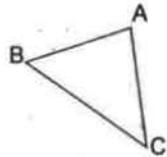
त्रिभुजका भुजा र कोणको परीक्षण

(Verification of Sides and Angles of Triangles)

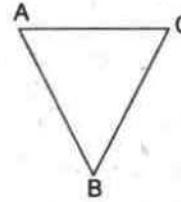
प्रयोग 1 : त्रिभुजका कोणहरूको योगफल परीक्षण



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

माथी चित्रमा देखाइए जस्ता फरक-फरक 3 ओटा त्रिभुजहरू अभ्यास पुस्तिकामा सार र कोणहरू ABC , BCA , CAB लाई प्रोटेक्टरको सहायताले नापी तलको तालिकामा भर ।

चित्र नं.	$\angle BAC$	$\angle ABC$	$\angle ACB$	$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$
(1)				
(2)				
(3)				

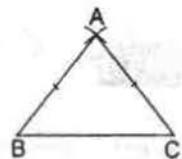
माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्यौ ? लेख । तिमीहरूको निष्कर्ष तलको निष्कर्षसँग मिल्द्य ?

निष्कर्ष: त्रिभुजका कोणहरूको योग 180° हुन्दै।

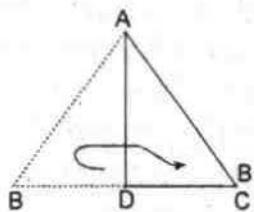
प्रबानी 2 – समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 2

- चित्रमा देखाइएजस्तो दुईओटा भुजाहरू बराबर भएको एउटा $\triangle ABC$ रचना गरेर कैरीले काट।

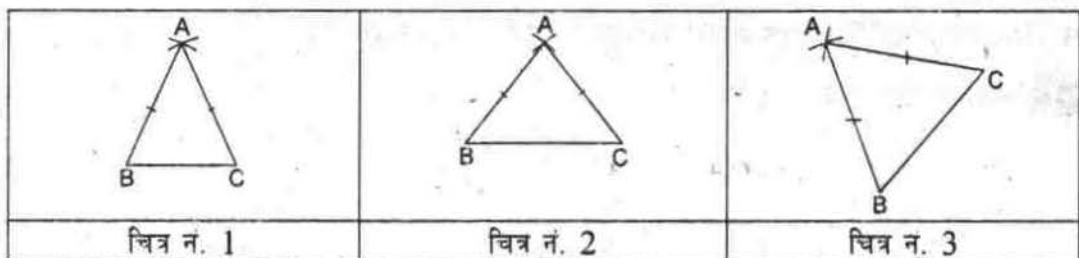


- सो त्रिभुजाकार कागजको टुकालाई तलको चित्रमा देखाइए जस्तै गरी B र C खप्टिने गरी बीचमा पट्याउ।



- के कोण B र कोण C बराबर हुन्दैन ?
माथिको प्रयोगबाट के निष्कर्ष निकालन सक्छौ ?

निष्कर्ष :- समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्दैन।



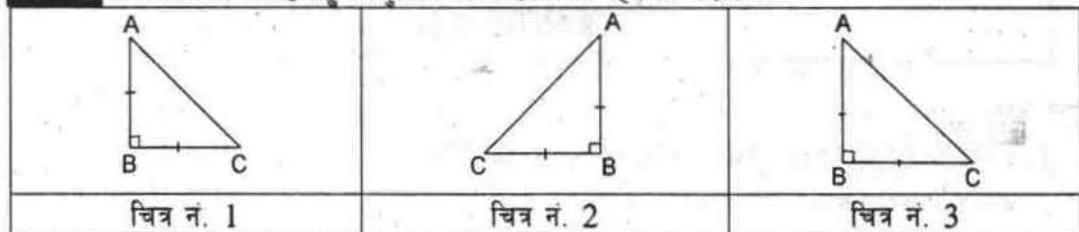
नोट: $\triangle ABC$ मा $AB=AC$ भएकाले तीनको सम्मुखमा पर्ने कोणहरू $\angle B$ र $\angle C$ नाई आधारका कोणहरू भनिन्दू।

चित्र नं.	$\angle ABC$	$\angle ACB$	परिणाम
(1)			
(2)			
(3)			

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निष्कन्दू ?

निष्कर्ष : समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्दैन।

प्रयोग 3 – समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको परीक्षण

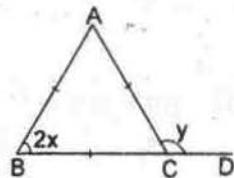


चित्र नं.	$\angle BAC$	$\angle BCA$	परिणाम
(i)			
(ii)			
(iii)			

निष्कर्ष :- समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका प्रत्येक आधारका कोणहरू 45° हुन्दैन्।

उदाहरण 1

संगैको चित्रको आधारमा x र y का मानहरू निकाल ।



उत्तर:

यहाँ, 1. $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$ (त्रिभुजका तीनौओटा कोणहरूको जोड 180° हुने भएकाले)

or, $2x + x + 2x = 180^\circ$ (समद्विबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुने भएकाले)

or, $6x = 180^\circ$

$\therefore x = \frac{180^\circ}{6}$

$\therefore x = 30^\circ$

2. $\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$ (सरल कोण)

or, $2x + y = 180^\circ$

or, $2 \times 30^\circ + y = 180^\circ$

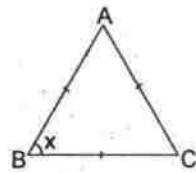
or, $60^\circ + y = 180^\circ$

or, $y = 180^\circ - 60^\circ$

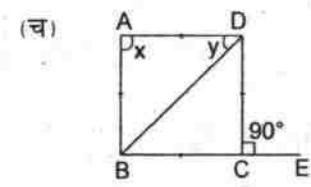
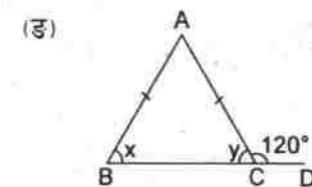
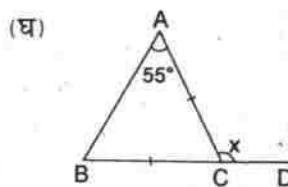
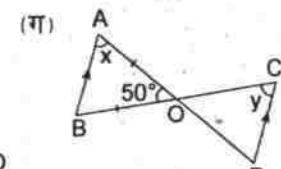
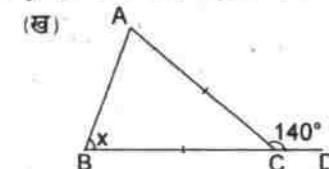
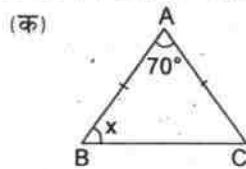
$\therefore y = 120^\circ$

अध्यात्म 14

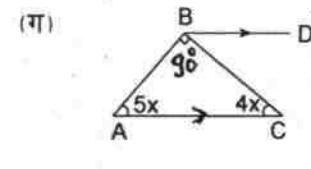
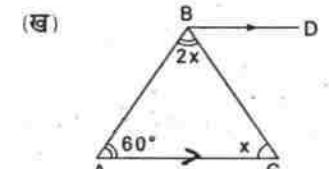
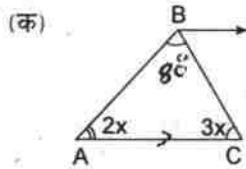
1. संगैको चित्रमा $AB = BC = CA$ भए x को मान निकाल ।



2. तलका चित्रहरूका आधारमा x र y को मान पत्ता लगाऊ ।



3. तलका प्रत्येक चित्रमा $\angle CBD$ को नाप पत्ता लगाऊ ।



4. भुजाको लम्बाइ 6 cm भएको एउटा समबाहु $\triangle ABC$ को रचना गर । त्यसका कोणहरू नापी तलको तालिका भर ।

कोण	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	परिणाम
नाप				

तालिकाबाट के निष्कर्ष निस्कन्द ? लेख ।

5. समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षविन्दुबाट आधारको मध्यविन्दुसम्म खिचिएको रेखा आधारसंगै लम्ब हुन्दै भनी प्रयोगात्मक परीक्षणका आधारमा प्रमाणित गर ।

6. समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्दैन् भनी प्रयोगात्मक परीक्षणका आधारमा प्रमाणित गर ।

नियमित बहुभुज (Regular Polygon)

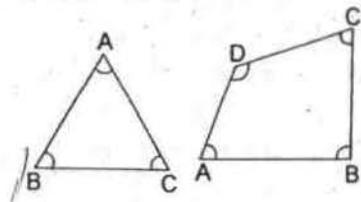
1. नियमित बहुभुज (Regular Polygon)

सबै भुजा र कोणहरू वरावर भएको वहुभुजलाई नियमित वहुभुज भनिन्छ । समवाहु त्रिभुज र वर्ग नियमित वहुभुज हुन् ।

2. वहुभुजका भित्री कोणहरू (Interior Angles of a Polygon)

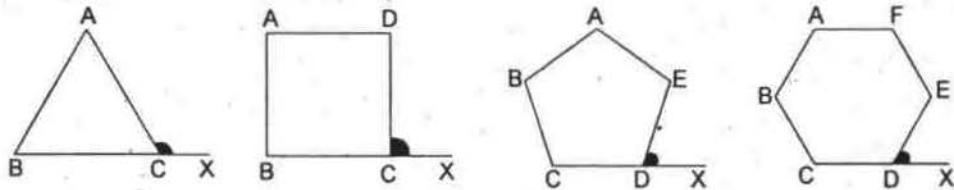
वहुभुजका भुजाहरूले भित्रपटि बनाएका कोणहरूलाई भित्री कोणहरू भनिन्छ ।

दिइएको $\triangle ABC$ मा $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ भित्री कोणहरू हुन् भने चतुर्भुज $ABCD$ मा $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ भित्री कोणहरू हुन् ।



3. वहुभुजका बाहिरी कोणहरू (Exterior Angles of a Polygon)

दिइएका चित्रहरूमा प्रत्येक वहुभुजको एउटा भुजालाई एकातर्फ विन्दु X सम्म लम्ब्याउंदा बनेको कोणलाई छाया पारेर देखाइएको छ ।



यसरी एउटा भुजालाई लम्ब्याउंदा बाहिरपट्टी बनेको कोणलाई बाहिरी कोण भनिन्छ ।

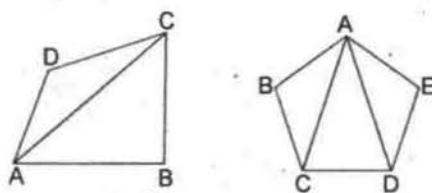
4. वहुभुजका भित्री कोणहरू र तिनीहरूका नाप

(Interior Angles of a Polygon and their Measurements)

तिमीहरूले त्रिभुजका 3 ओटा कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ भन्ने क्रा थाहा पाइसकेका छौ ।

अब कुनै पनि वहुभुजका साथै नियमित वहुभुजका भित्री र बाहिरी कोणहरूका नापवारे थाहा पाउनेछौ ।

क्रियाकलाप ।



माथि चित्रमा, एउटा चतुर्भुज र एउटा पञ्चभुज देखाइएको छ । यिनीहरूलाई अभ्यास पुस्तिकामा सारी विकर्णहरू चित्रमा देखाइएजस्तै गरी जोड ।

अब, निम्न प्रश्नहरूको जवाफ देउ ।

- चतुर्भुज ABCD लाई विकर्ण AC ले कतिओटा त्रिभुजहरूमा विभाजन गरेको छ ?
- चतुर्भुज ABCD का भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ?
- कतिओटा त्रिभुजहरू मिलेर पञ्चभुज ABCDE बनेको छ ?
- पञ्चभुज ABCDE का भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ? कक्षामा छलफल गरी पता लगाउ ।

के माथिको क्रियाकलापको आधारमा निम्नलिखित निष्कर्षमा पुग्न सकिन्दू ?

- चतुर्भुजका भित्री कोणहरूको योगफल = $2 \times (\text{त्रिभुजको भित्री कोणहरूको योगफल})$
- पञ्चभुजका भित्री कोणहरूको योगफल = $3 \times (\text{त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योग})$

के माथिकै तरिकाबाट पद्धति, सप्तभुजका भित्री कोणहरूको योगफल निकाल्न सक्छौ ।

क्रियाकलाप 2

क्रियाकलाप 1 मा गरिएको अवलोकन तथा निष्कर्षलाई तालिकामा राखेर हेर ।

बहुभुज (Polygon)	भुजाको सङ्ख्या (n)	त्रिभुजको सङ्ख्या	भित्री कोणहरूको जोड
त्रिभुज		3	$1 = 3 - 2$ $180^\circ = 180^\circ \times (3 - 2)$
चतुर्भुज		4	$2 = (4 - 2)$ $360^\circ = 180^\circ \times (4 - 2)$
पञ्चभुज		5	$3 = (5 - 2)$ $540^\circ = 180^\circ \times (5 - 2)$
षट्भुज		6	?

सप्तभुज		7	?	?
		n	n - 2	$180^\circ \times (n - 2)$

माथिको कियाकलापबाट,

$$\text{वहुभुजको भित्री कोणहरूको योगफल} = 180^\circ \times (n - 2) \quad \text{अथवा}$$

$$\text{वहुभुजको भित्री कोणहरूको योगफल} = 180^\circ \times (\text{भुजाको सङ्ख्या} - 2)$$

5. नियमित वहुभुजको भित्री कोणको नाप

यदि नियमित वहुभुजमा भुजाको सङ्ख्या n छ भने

$$\text{भित्री कोणको योग} = 180^\circ (n - 2) \text{ हुन्छ।}$$

फेरि, वहुभुजमा भुजाको सङ्ख्या n ओटा भुजा भएको नियमित वहुभुजमा n ओटा भित्री कोणहरू हुन्छन्। त्यसकारण n भुजा भएको वहुभुजको

$$\text{प्रत्येक भित्री कोण} = \frac{180^\circ \times (n - 2)}{n} \text{ हुन्छ। त्यसैले,}$$

यदि नियमित वहुभुजको भित्री कोणलाई x ले जनाइयो भने

$$x = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

उदाहरण 1

नियमित षड्भुजको भित्री कोण कति हुन्छ ?

उत्तर : नियमित षड्भुजमा भुजाको सङ्ख्या (n) = 6

यदि भित्री कोण x छ भने

$$x = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

$$= \frac{180^\circ \times (6-2)}{6}$$

$$= \frac{180^\circ \times 4}{6}$$

$$= 120^\circ$$

∴ आवश्यक भित्री कोण = 120°

6. नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप

चित्रमा देखाइएको एउटा नियमित बहुभुजको एउटा भुजा AB लाई सिधा P सम्म लम्ब्याउँदा बनेको बाहिरी कोण PBC = y र y सँग आसन्न भिन्नी कोण ABC लाई x ले जनाउँदा,

$$x + y = 180^\circ \text{ (सरल कोण)}$$

$$\therefore y = 180^\circ - x$$

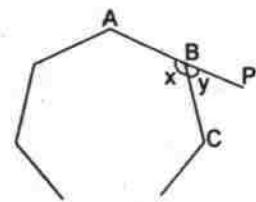
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

$$= \frac{180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ}{n}$$

$$\therefore y = \frac{360^\circ}{n}$$

त्यसैले,

नियमित बहुभुजको बाहिरी कोण
$y = \frac{360^\circ}{n}$



उदाहरण 2

नियमित अष्टभुजको बाहिरी कोणको नाप कति हुन्छ ?

उत्तर :

नियमित अष्टभुजमा भुजाको सङ्ख्या (n) = 8

यदि बाहिरी कोण y भए

$$\text{बाहिरी कोण } (y) = \frac{360^\circ}{n}$$

$$= \frac{360^\circ}{8}$$

$$= 45^\circ$$

\therefore आवश्यक बाहिरी कोण 45° हुन्छ ।

अध्यात्म 15.1

1. तल दिइएका नियमित बहुभुजको भिन्नी कोणको नाप सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ ।

(क) पञ्चभुज (Pentagon)

(ख) सप्तभुज (Heptagon)

(ग) अष्टभुज (Octagon)

(घ) नवभुज (Nonagon)

(ङ) दशभुज (Decagon)

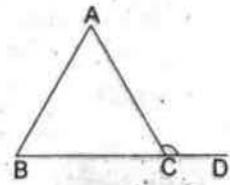
(च) द्वादशभुज (Dodecagon)

2. तल दिइएका प्रत्येक नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप सूत्र प्रयोग गरी पता लगाउ ।

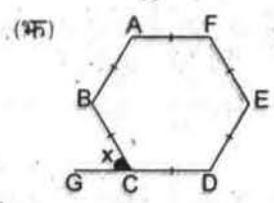
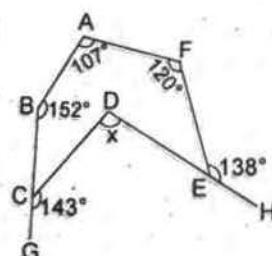
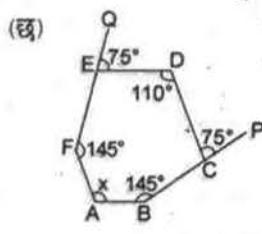
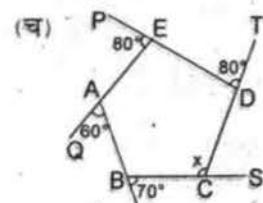
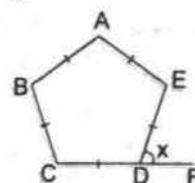
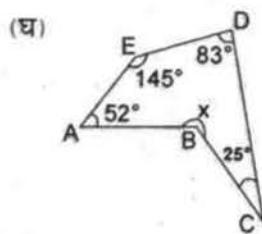
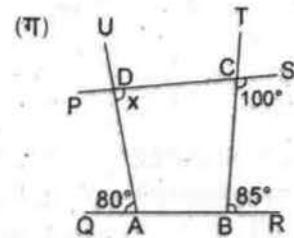
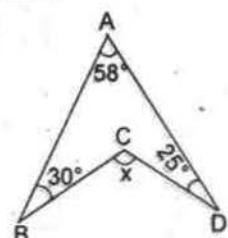
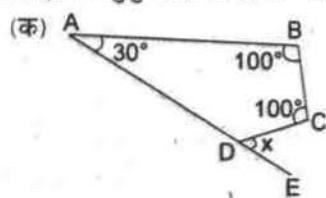
- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (क) पञ्चभुज (Pentagon) | (ख) सप्तभुज (Heptagon) |
| (ग) अष्टभुज (Octagon) | (घ) नवभुज (Nonagon) |
| (ड) दशभुज (Decagon) | (च) द्वादशभुज (Dodecagon) |

3. त्रिभुज ABC को एउटा भुजा BC लाई D सम्म लम्ब्याइएको छ ।

- (क) $\angle A$ र $\angle B$ को नाप प्रोटेक्टरले नापी योगफल निकाल ।
 (ख) $\angle ACD$ को नाप प्रोटेक्टरले निकाल ।
 (ग) $\angle A$ र $\angle B$ को योगफलसँग $\angle ACD$ को नाप बराबर
छ कि छैन ? हेर ।
 (घ) यस क्रियाकलापको आधारमा के निष्कर्ष निकाल्यौ, लेख ।
 (ड) भुजा AB लाई E सम्म लम्ब्याउँदा $\angle CBE$ कुनकुन
कोणको योगफलसँग बराबर हुन्दू, भन्न सक्छौ ?



4. दिइएका बहुभुजहरूमा x को मान निकाल ।

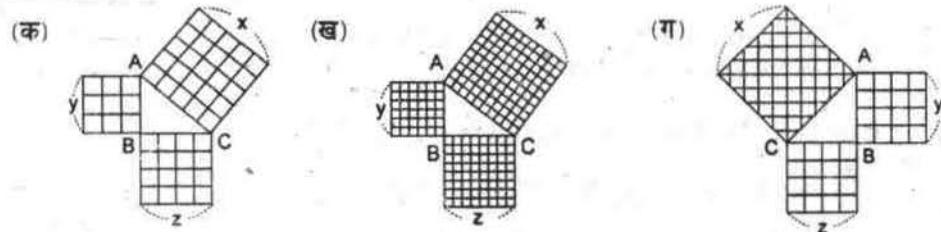
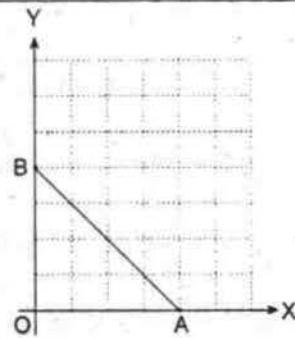


15.2 पाइथागोरस साध्य (Pythagoras Theorem)

वर्गांकित कागज (Squared paper) मा x -अक्षमा 4cm र y - अक्षमा 3cm हुने गरी कमशः बिन्दुहरू A र B चिह्न लगाई जोड्दा कस्तो त्रिभुज बन्दछ ? AB लाई स्केलले नापेर AB को लम्बाइ कति रहेछ हेर। त्यसरी नै

- (i) OA = 4cm, OB = 4cm
- (ii) OA = 4cm, OB = 5cm
- (iii) OA = 4cm, OB = 6cm हुँदा AB को लम्बाइ कति हुन्छ। हेर।

क्रियाकलाप 1



माथिका चित्रहरू (क), (ख) र (ग) मा समकोण त्रिभुज ABC को भुजाहरूमा खिचिएका वर्गहरूमा भएका एकाइ वर्गहरू (Unit Squares) गन्ती गरी तलको तालिका उत्तर पुस्तिकामा सार र लेख।

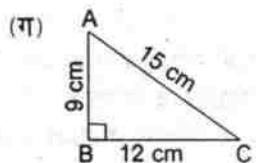
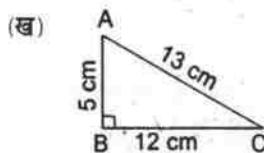
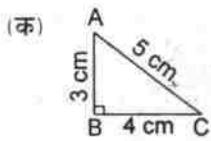
चित्र नं.	भुजा AC मा खिचेको वर्गको क्षेत्रफल (P)	भुजा AB मा खिचेको वर्गको क्षेत्रफल (Q)	भुजा BC मा खिचेको वर्गको क्षेत्रफल (R)	क्षेत्रफल (Q+R)	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

१. यस परीक्षणबाट के निष्कर्षमा पुरन सकिन्छ ?

कुनै पनि समकोण त्रिभुजको कर्णमा बनेका वर्गको क्षेत्रफल अरू दुई भुजाहरूमा बनेका वर्गहरूको क्षेत्रफलको योगसंग बराबर हुन्छ।

यो तथ्यलाई पाइथागोरसको साध्य (Pythagoras Theorem) भनिन्छ। भन्डै 2500 वर्षअघि ग्रीक (Greek) गणितज्ञ पाइथागोरसले यो तथ्य पत्ता लगाई स्थापित गरेका थिए।

क्रियाकलाप 2



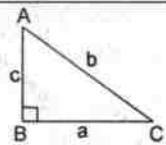
चित्रमा देखाएको नाप भएको समकोण त्रिभुजहरू अभ्यास पुस्तिकामा खिच र प्रत्येक भुजाको वर्ग निकाली तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

समकोण $\triangle ABC$	AB	BC	CA	AB^2	BC^2	CA^2	$AB^2 + BC^2$	निष्कर्ष
(क)								
(ख)								
(ग)								

? के तिमीले तालिकाको आधारमा तलको तथ्य पुष्टि गर्न सक्छौ ?

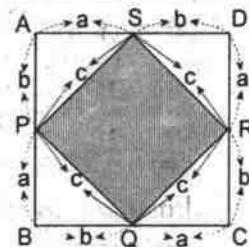
कुनै पनि समकोणी त्रिभुजमा कर्णको वर्ग बाँकी भुजाको वर्गहरूको योगसँग बराबर हुन्छ ।

चित्रमा $b^2 = a^2 + c^2$



पाइथागोरस साध्यका सङ्क्षेपमा प्रमाण

एउटा भुजाको लम्बाई $a+b$ को वर्ग ABCD मा दार्या जस्तो गरी विन्दुहरू P,Q,R र S दिँदा APS~DSR~CRQ~BQP हुन्छ । त्यसैले भित्र छाया परेको चतुर्भुज PQRS पनि वर्ग हुन्छ ।



यस वर्ग PQRS को एउटा भुजाको लम्बाइलाई c मान्दा, वर्ग PQRS को क्षेत्रफल $= c^2$ (i)

तर (वर्ग PQRS को क्षेत्रफल) $=$ (वर्ग ABCD को क्षेत्रफल) – उल्लेखित 4 ओटा समकोण त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलको योग

$$\begin{aligned}
 &= (a+b)^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times ab \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\
 &= a^2 + b^2 \quad \text{(ii)}
 \end{aligned}$$

(i) र (ii) बाट $a^2 + b^2 = c^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

संगैको चित्रमा भन्याडको लम्बाइ कति होला ?

उत्तर : यहाँ पर्खाल र जमिनले एकआपसमा समकोण बनाउँच्छन् ।

भन्याड, पर्खाल र जमिनले बनाएको त्रिभुज समकोणी त्रिभुज ABC हो, जसमा

$$AB = 12\text{m}, BC = 5\text{m} \text{ र } AC = ?$$

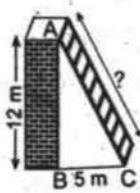
समकोणी त्रिभुज ABC मा पाइथागोरस साध्यबाट,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\therefore AC = \pm \sqrt{169} = \pm 13$$

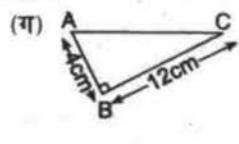
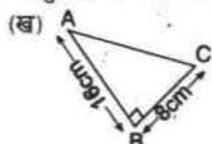
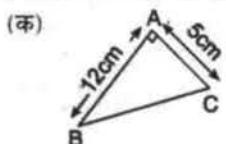
तर AC भन्याडको लम्बाइ भएकाले ऋणात्मक हुँदैन ।

$$AC = 13\text{ m} \text{ (भन्याडको लम्बाइ)}$$

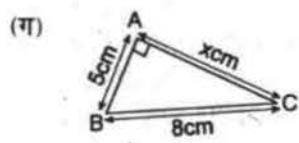
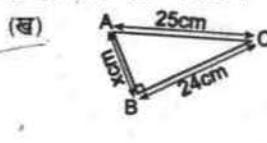
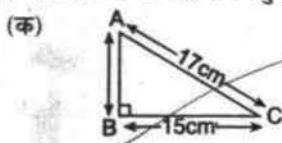


अध्यात्म 15.2

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा समकोणी त्रिभुजको कर्णको नाप पत्ता लगाऊ ।



2. तलका प्रत्येक समकोणी त्रिभुजमा x को नाप पत्ता लगाऊ ।



3. निम्नलिखित भुजाको नाप भएका त्रिभुजहरू समकोण त्रिभुज हुन् वा हैनन् पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ ।

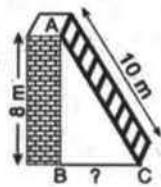
(क) $5\sqrt{3}\text{ cm}, 5\text{ cm}, 10\text{ cm}$

(ख) $8\text{ cm}, 7\text{ cm}, 10\text{ cm}$

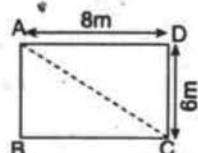
(ग) $9\text{cm}, 10\text{cm}, 12\text{cm}$

(घ) $9\text{cm}, 40\text{cm}, 41\text{cm}$

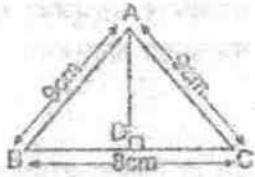
4. एउटा घरमा 10m लामो भन्याडले भित्ताको 8m माथि छोएको रहेछ । पर्खालको फेदबाट भन्याडले भुइँमा छोएको भाग कति टाढा रहेछ ?



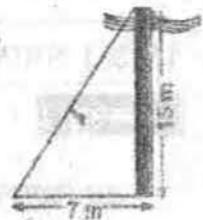
5. एउटा खेतको लम्बाइ 8m र चौडाइ 6m रहेछ । शिव A बाट B भएर C मा पुगेद्दैन् र कैलाश A बाट सिधै हिँडेको C मा पुगेद्दै । कसले छोटो बाटो हिँडेद्दै ? तिनीहरूले हिँडेको दूरीमा कति फरक छ ?



6. रौपीको शिख ABC समत्रिकातु किन्नु हो : A बाट BC तरामा AD खिचेको छ । यदि आउनार $BC = 8\text{cm}$ र $AB = AC = 9\text{cm}$ भए तराहुँ AD को लाग किंतु होला ?



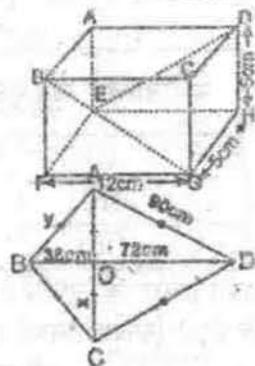
7. एउटा किलोलीको सम्पाद तारद्वे अस्त्रवाहको छ : सम्पादको लम्बाई 15m र सम्पादको फेवाहाट साथै जिमिचाहा छोएको भाग सम्पादको दूसी 7m रहेद्य भए त्याँको लागो तार उचोपग निर्णय्यो ?



8. एउटा घेलगाकार निलालम्ब सिंचान देखाएँ यससे यसी गरी सिंचाकलम्ब राखिएको छ । त्यहाँ निलालम्ब 13cm लाग्ने छ र निलालम्बको व्यास 4cm रहेद्य भए तराहुँ किंतु होला ?



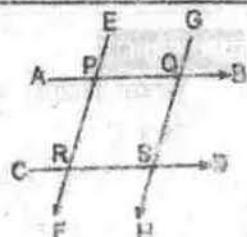
9. सैरीको पहाडुखाला EFGHI को लम्बाई 12cm , चौडाह 5cm र उचाई 5cm रहेद्य भए मोहडाहरु ABFE, EFGH र AEHD को विकर्ण कम्शः निकाला ।
10. दिइएको चौराङ्गाको चित्रवाह x र y का लम्बाहरुहरु पता लगाउ ।



15.3 समावान्तर चतुर्भुज, आयत र वर्षका गुणहरूको परीक्षण (Verification of Properties of Parallelogram, Rectangle and Square)

चित्रमा दुई जोडा समावान्तर रेखाहरु $AB \parallel CD$ र $EF \parallel GH$ आपसमा कार्तिका सम्बन्ध सहजमा देख $PQRS$ बनेको छ । $PQRS$ लाई समावान्तर चतुर्भुज भनिन्दू ।

समावान्तर चतुर्भुज $PQRS$ का $QR \parallel RS$ र $PR \parallel QS$ छ, किम ? अधिलाई कक्षामा समावान्तर चतुर्भुजको लालबो परिवर्तन घाता पाइएको हो ।



सम्मुख भजाहरु समावान्तर भएको चतुर्भुजलाई समावान्तर चतुर्भुज भनिन्दू ।

समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूः

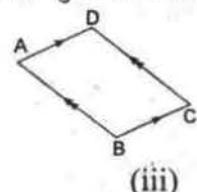
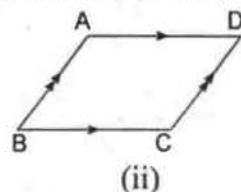
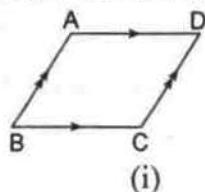
- समानान्तर चतुर्भुजमा-
- (क) दुई जोडा सम्मुख भुजाहरू वरावर हुन्छन्।
 - (ख) दुई जोडा सम्मुख कोणहरू वरावर हुन्छन्।
 - (ग) विकर्णहरू आपसमा समाविभाजन भई काटिन्छन्।

अब यी गुणहरू परीक्षण गर्दै जाओँ।

15.3.1 समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको जस्तै समानान्तर चतुर्भुजहरू सेट स्ववाएर प्रयोग गरी अभ्यास पुस्तिकामा खिच ।



अब सम्मुख भुजा रूलरले नापेर तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

समानान्तर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाको नाप		सम्मुख भुजाको नाप		परिणाम
	AD	BC	AB	CD	
(i)					
(ii)					
(iii)					

तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्यौ ?

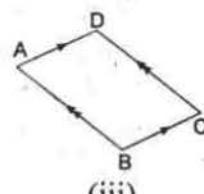
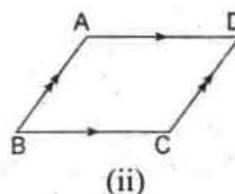
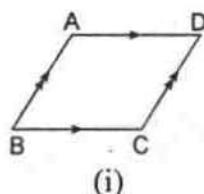
के तिमो निष्कर्ष तलका भनाइसंग मिल्दै ?

निष्कर्ष: समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू वरावर हुन्छन्।

15.3.2 समानान्तर चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 2

चित्रमा दिइएका जस्तै तीनओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू सेट स्ववाएर प्रयोग गरी अभ्यास पुस्तिकामा खिच ।



अब सम्मुख कोणहरू नापी कोणहरूको नाप तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

समानान्तर चतुर्भुज	सम्मुख कोण		सम्मुख कोण		परिणाम
	$\angle A$	$\angle C$	$\angle B$	$\angle D$	
(i)					
(ii)					
(iii)					

2

तालिकाको आधारमा के निष्कर्ष निकाल्यौ ?

तिमीले निकालेको निष्कर्षसँग तलको निष्कर्ष मिल्दै ?

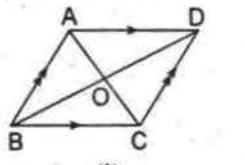
निष्कर्ष: समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू विराबर हुन्छन् ।

15.3.3 समानान्तर चतुर्भुजको विकर्णहरूको परीक्षण

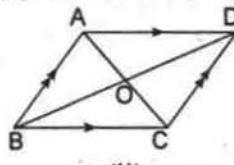
समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा AC र BD जोडेको छ । यसरी जोडिने रेखाखण्डहरू AC र BD लाई समानान्तर चतुर्भुजको विकर्ण भनिन्दै ।

क्रियाकलाप 3

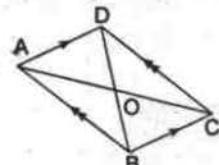
चित्रमा दिएजस्तै तीनओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू सेटस्क्रिप्ट एर प्रयोग गरी अभ्यास पुस्तिकामा खिच ।



(i)



(ii)



(iii)

अब विकर्णका खण्डहरूको नाप रूलरले नाप र तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

समानान्तर चतुर्भुज	विकर्ण AC का खण्डहरू		विकर्ण BD का खण्डहरू		निष्कर्ष
	AO	CO	BO	DO	
(i)					
(ii)					
(iii)					

निष्कर्ष निकाल्यौ ?

तिमीले निकालेको निष्कर्षसँग तलको निष्कर्ष मिल्दै ?

निष्कर्ष: समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन भई काटिन्दैन् ।

15.3.4 समानान्तर चतुर्भुज हुने अवस्था

हामीले समानान्तर चतुर्भुजको विभिन्न गुणहरू अध्ययन गर्याँ। अब कुनै चतुर्भुज केकसो अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ, विचार गरीँ।

कुनै चतुर्भुज निम्न लिखितमध्ये कुनै एउटा मान्य भएमा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ।

समानान्तर चतुर्भुज हुने अवस्था- (क) दुईजोडा सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएमा।

(ख) दुईजोडा सम्मुख भुजाहरू बराबर भएमा।

(ग) दुईजोडा सम्मुख कोणहरू बराबर भएमा।

(घ) विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन भई काटिएमा।

(ङ) एकजोडा सम्मुख भुजाहरू बराबर र समानान्तर भएमा।

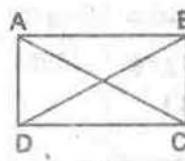
15.3.5 आयत (Rectangle)

तिमीहरूले अधिल्लो कक्षामा आयतको परिभाषा याहा पाइसकेका छौं। यदि समानान्तर चतुर्भुजका सबै कोणहरू 90° का छन् भने त्यस समानान्तर चतुर्भुजलाई आयत भनिन्छ। आयतमा स.च. का सबै गुणहरू हुन्छन्। यसका अतिरिक्त आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन्।

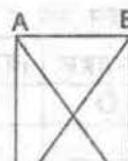
आयतका विकर्णहरूको परीक्षण

नियमकलामा

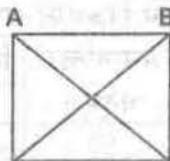
तल दिइएका जस्तै फरकफरक नापका आयतहरू सेट स्वायरको प्रयोग गरी अभ्यास पुस्तिकामा रचना गर।



(i)



(ii)



(iii)

अब सबै आयतका विकर्णहरू AC र BD नापी तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र भर।

आयत	AC	BD	परिणाम
(i)			$AC = BD$
(ii)			$AC = BD$
(iii)			$AD = BD$

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्यौ ?

के तिम्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्छ ?

निष्कर्ष: आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन्।

15.3.6 वर्ग (Square)

तिमीहरूले अधिल्लो कक्षामा वर्गको परिभाषा थाहा पाइसकेका छौं।

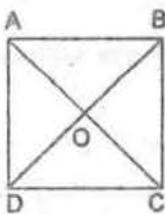
आसन्न भुजाहरू वराबर भएको आयतलाई वर्ग भनिन्छ । वर्गमा आयतका सबै गुणहरू हुन्छन् । यसका अतिरिक्त वर्गका विकर्णहरू समकोण हुनेगरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

वर्गका विकर्णहरूको परीक्षण

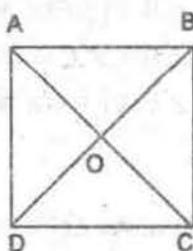
क्रियाकलाप (i)

तल दिइएका जस्तै फरकफरक नापका वर्गहरू सेट स्वायरको प्रयोग गरी अभ्यासपुस्तिकामा रचना गर ।

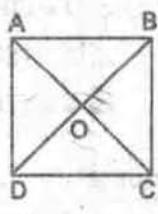
(i)



(ii)



(iii)



अब विकर्णका खण्डहरूका नाप रूलरले नाप, कोणहरूका नाप प्रोटेक्टरले नाप र तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

वर्ग	AO	CO	BO	DO	$\angle AOB$	$\angle COD$	$\angle AOD$	$\angle BOC$	परिणाम
(i)									
(ii)									
(iii)									

तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्यौ ?

के तिस्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्दू ?

निष्कर्ष: वर्गका विकर्णहरू समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्दून् ।

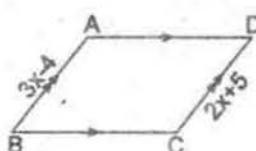
उदाहरण 1

संगैको समानान्तर चतुर्भुजको भुजा AB को लम्बाइ पत्ता लगाउ ।

$$3x - 4 = 2x + 5 \quad (\text{स.च. का सम्मुख भुजाहरू})$$

$$\text{or } 3x - 2x = 5 + 4$$

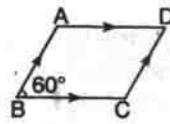
$$\text{or } x = 9$$



$$\begin{aligned}\therefore AB &= 3x - 4 \\ &= 3 \times 9 - 4 \\ &= 27 - 4 = 23 \\ \therefore AB &= 23\text{cm}\end{aligned}$$

उदाहरण 2

समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा $\angle B = 60^\circ$ भए बाँकी कोण पत्ता लगाऊ ।



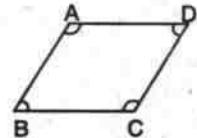
$$\begin{aligned}\text{उत्तर: } \angle D &= 60^\circ && (\angle B \text{ को सम्मुख कोण}) \\ \angle C &= 180^\circ - 60^\circ && (\angle B + \angle C = 180^\circ \text{ क्रमागत भिन्नी कोण भएकाले}) \\ \therefore \angle A &= 120^\circ && (\angle C \text{ को सम्मुख कोण})\end{aligned}$$

उदाहरण 3

प्रमाणित गरि कि चतुर्भुज ABCD मा $\angle A = \angle C$ र $\angle B = \angle D$ भए चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

उत्तर: चतुर्भुजको भिन्नी कोणहरूको योगफल 360° भएकाले

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ \text{यहाँ, } \angle A &= \angle C \text{ र } \angle B = \angle D \text{ भएकाले} \\ \angle A + \angle B + \angle A + \angle B &= 360^\circ \\ \text{अर्थात्, } 2\angle A + 2\angle B &= 360^\circ \\ \therefore \angle A + \angle B &= 180^\circ\end{aligned}$$

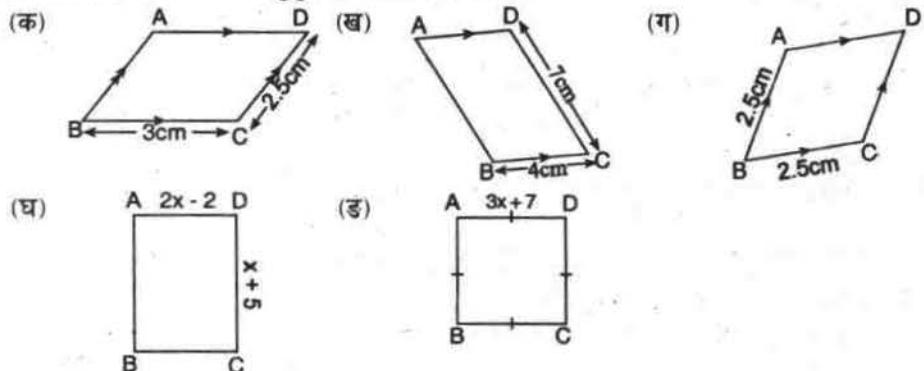


रेखा AD र BC का लागि क्रमागत भिन्नी कोणहरूको योगफल 180° भएकाले $AD \parallel BC$ हुन्छ । उसै गरी $\angle C + \angle B + \angle C + \angle B = 360^\circ$
अथवा, $\angle C + \angle B = 180^\circ$ हुन्छ ।

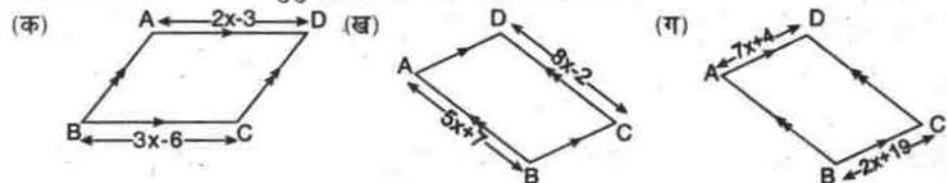
रेखा AB र DC का लागि क्रमागत भिन्नी कोणहरूको योगफल 180° भएकाले $AB \parallel DC$ हुन्छ ।
त्यसकारणले चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो ।

अध्यात 15.3

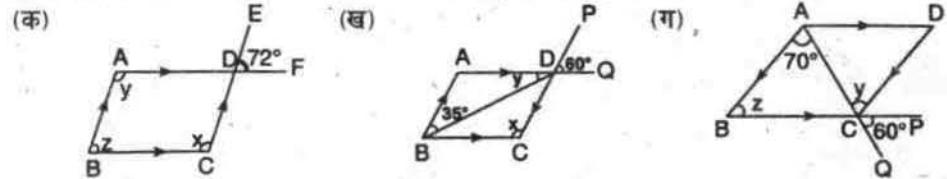
1. तलका प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुजको परिमिति निकाल ।



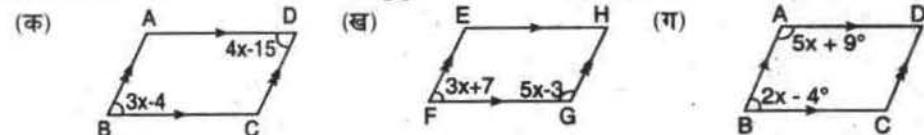
2. तलका प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुजमा x को मान पत्ता लगाऊ ।



3. तलका प्रत्येक अवस्थामा याहा नभएका कोणहरू x, y र z पत्ता लगाऊ ।

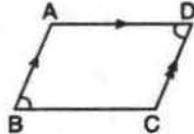


4. तलका प्रत्येक अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुजका भित्री कोणहरू पत्ता लगाऊ ।

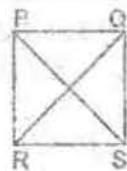
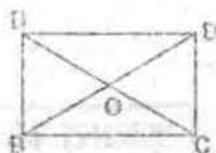


5. समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा तल दिइएका प्रस्तुतिकरण हेर र प्रत्येक भनाई किन त्यस्ता भएका हुन्, त्यसको कारण लेख ।

याहा पाएको तथ्य	कारण
(क) $\angle A = 180^\circ - \angle B$	(क)
(ख) $\angle C = 180^\circ - \angle B$	(ख)
(ग) $\angle A = \angle C$	(ग)



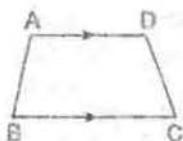
6. चित्रमा एउटा आयत ABCD देखाइएको छ । यसका-
 (द) सम्मुख भुजाहरू R कोणहरू नापेर तालिकामा देखाउँ ।
 (ख) विकर्णका खण्डहरू नापेर देखाउँ ।
 (ग) तालिकामाट के निश्चयी आउँदै ? लेख
 7. चित्रमा एउटा वर्ग PQRS देखाइएको छ । अब
 यसका सम्मुख भुजाहरू, कोणहरू र विकर्णहरू
 नापेर तालिकामा देखाउँ । के सबै वर्गमा आयत र
 स.च.का सबै गुणहरू मान्य हुँदै रहेउँ ?



15.4 समलम्ब चतुर्भुजको रचना (Construction of Trapezium)

एकजोडा भुजाहरू समानान्तर भएको चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज भनिन्छ ।

चित्रमा देखाइएको चतुर्भुजमा एकजोडा भुजाहरू AD र BC
 समानान्तर भएकाले AD||BC समलम्ब चतुर्भुज हो ।

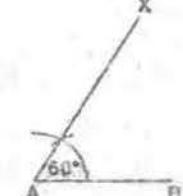


उदाहरण १

प्रश्न एउटा 6 cm जामो रेखाङ्काड AB खिच र विन्दु A मा 60° को कोण बनाउने रेखा AX खिच ।

उत्तर:

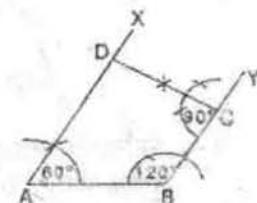
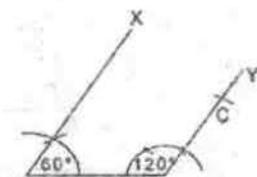
उत्तर एउटा 6 cm जामो रेखाङ्काड AB खिच र विन्दु A मा 60° को कोण बनाउने रेखा AX खिच ।



उत्तर २ $\angle X \parallel \angle Y$ भएकोले विन्दु B मा 120° को कोण
 बनाउनुपर्ने रेखा BY खिच । BY मा 3 cm को
 चापले C मा काट ।

उत्तर ३ विन्दु C मा 90° को कोण खिच । 90° कोण बनाउने
 रेखा र AX काटिएको विन्दुको नाम D राख ।

चाहिएको श.ल.च. ABCD हो ।



उदाहरण 2

$AB = 5\text{cm}$, विकर्ण $AC = 7\text{cm}$, $\angle CAB = 30^\circ$, $CD = 3\text{cm}$, तथा $AB \parallel DC$ अस्ति स.ल.च. को रचना बता।

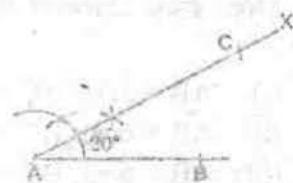
उत्तर:

उदाहरण 2 5cm लाई एकटा रेखाखण्ड AB बिच।

विन्दु A मा 30° को कोण

बनाउने रेखा AX बिच।

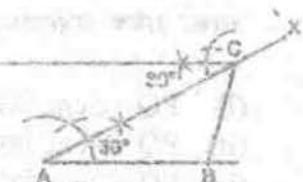
AX पर 7cm को जाप्तै C मा काट।



उदाहरण 3

B र C जोड। $AB \parallel DC$ बनाउनुपर्यन्त शएक्काले AC को

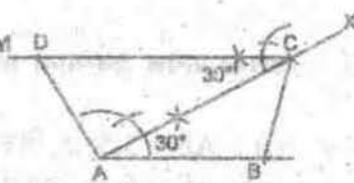
विन्दु C मा 30° को कोण बनाउने रेखा CY बिच।



उदाहरण 3

CY मा 8cm बराबरको चापले D मा काट। A र D जोड।

जाहिएको स.ल.च. $ABCD$ हो।

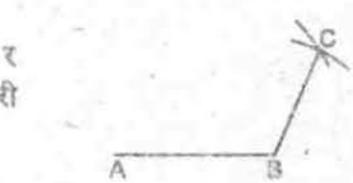


उत्तर:

उदाहरण 2

4cm लाई एकटा रेखाखण्ड AB बिच। A बाट 7cm र

B बाट 3.5cm का दुईओटा चापहरू C र D काटिने बताएँ।

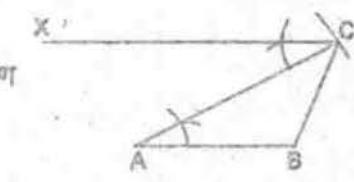


उदाहरण 2

BC र AC लाई जोड।

विन्दु C मा $\angle BAC$ बराबरको कोण

(एकान्तर कोण) $\angle ACX$ बिच।

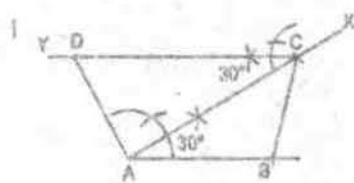


उदाहरण 3

A बाट 4.5cm को चापले CY को विन्दु D मा काट।

AD जोड।

$ABCD$ जाहिएको स.ल.च. हो।



अध्यात्म 15.4

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा समलम्ब चतुर्भुज ABCD को रचना गर ।
 - (i) AB = 5cm, BC = 3.5cm, $\angle DAB = 75^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$ र AD//BC
 - (ii) AB = 6cm, BC = 4cm, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$ र AD//BC
 - (iii) AB = 6cm, BC = 5cm, $\angle DAB = 120^\circ$, $\angle BCD = 75^\circ$ र AD//BC
2. तलका प्रत्येक अवस्थामा समलम्ब चतुर्भुज रचना गर ।
 - (i) PQ = 5cm, विकर्ण PR = 8cm, $\angle QPR = 45^\circ$, RS = 7cm, PQ//SR
 - (ii) PQ = 4cm, विकर्ण PR = 6cm, $\angle QPR = 30^\circ$, RS = 5cm, PQ//SR
 - (iii) PQ = 3cm, विकर्ण PR = 8cm, $\angle QPR = 75^\circ$, RS = 4cm, PQ//SR
3. तलका प्रत्येक अवस्थामा समलम्ब चतुर्भुज ABCD रचना गर ।
 - (i) AB = 3.5cm, विकर्ण AC = 7cm, AD = BC = 4cm
 - (ii) AB = 6cm, विकर्ण AC = 8cm, AD = BC = 5cm
 - (iii) AB = 5.5cm, विकर्ण AC = 7.5cm, CD = 7cm, BC = 4cm

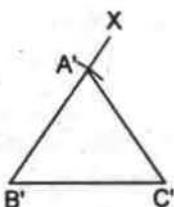
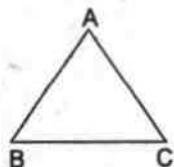
16.1 त्रिभुजहरूको अनुरूपताको परीक्षण (Test of Congruency of Triangles)

क्रियाकलाप 1

दिएको ΔABC लाई किंतु दोषोटा फरक तरिकाले रचना गर्न सकिन्द्र प्रयास गरी हेर। केही तरिकाहरू तल दिइएका छन्।

तरिका 1

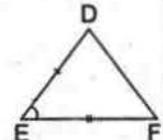
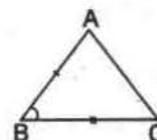
BC को नाप बराबरको रेखाखण्ड $B'C'$ खिच र $\angle ABC$ बराबर हुने गरी विन्दु B' मा $\angle XB'C'$ खिच। $B'X$ मा BA नाप लिई $B'A'$ काट र $A'C'$ जोड।



अब ΔABC र $\Delta A'B'C'$ का सम्पूर्ण सङ्गति भागहरू बराबर छन् वा छैनन् नापी हेर।

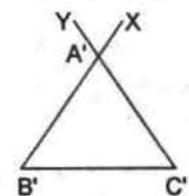
यहाँ दुईओटा त्रिभुजहरूमा दुईओटा भुजा र ती भुजाले बनाएको कोण प्रयोग गरी अनुरूप त्रिभुजको रचना गर्न सम्भव भयो। त्यसैले यो तथ्य अनुरूपताको परीक्षणका लागि प्रयोग गर्न सकिन्द्र।

एउटा त्रिभुजका दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरूका बीचको कोणसँग अर्को त्रिभुजका दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरूका बीचको कोण अलगअलग आपसमा बराबर भएमा ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन्। यसलाई भु.को.भु. (SAS) तथ्य भनिन्द्र।



तरिका 2

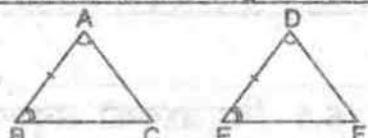
BC को नाप बराबरको रेखाखण्ड $B'C'$ खिच र B' मा $\angle B$ बराबरको कोण $XB'C'$ र C' मा $\angle C$ बराबरको कोण $YC'B'$ खिच। $B'X$ र $C'Y$



काटिएको विन्तुलाई A' मान । अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का सङ्गति भागहरू बराबर छन् वा छैनन् नाप ।

यहाँ दुईओटा त्रिभुजहरूमा एउटा भुजा र त्यसमा आधारित दुई कोणको आधारमा अनुरूप त्रिभुजहरू रचना गर्न सम्भव भयो । त्यसैले यो त्रिभुजहरूको अनुरूपताको परीक्षणकालागि एउटा तथ्य हुन सक्छ ।

एउटा त्रिभुजका एउटा भुजा र त्यसमा आधारित दुई कोणहरूसँग अर्को त्रिभुजका एउटा भुजा र त्यसमा आधारित दुई कोणहरू अलगअलग बराबर भएमा ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई को.भु.को. (ASA) भनिन्छ ।

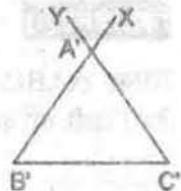


$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

तरिका 3

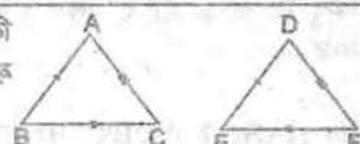
BC बराबर हुने गरी $B'C'$ खिची B' बाट BA बराबरको र C' बाट CA बराबरको चापहरू A' मा काटिने गरी खिच र $A'B'$ र $A'C'$ जोड ।

$\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का सङ्गति भागहरू बराबर छन् वा छैनन् नाप ।



यहाँ दुईओटा त्रिभुजहरूमा तीनबोटै भुजाहरूको नापको आधारमा अनुरूप त्रिभुजहरू रचना गर्न सम्भव भयो । त्यसैले यो त्रिभुजहरूको अनुरूपताको परीक्षणका लागि एउटा तथ्य हुनसक्छ ।

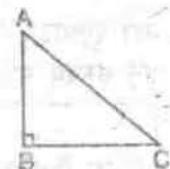
दुईबोटा त्रिभुजहरूमा एउटा त्रिभुजको तीनबोटै भुजाहरू अर्को त्रिभुजको तीनबोटै भुजाहरूसँग अलगअलग आपसमा बराबर भएमा ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । यसलाई भु.भु.भु. (SSS) तथ्य भनिन्छ ।



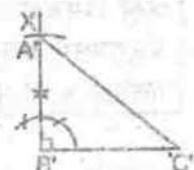
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

तरिका 4

समकोणी त्रिभुज ABC सँग अनुरूप हुने त्रिभुजको रचना क्रियाकलाप ।
मा गरेका तरिका बाहेक द्यूँ तरिकाले गर्न सक्छौं, तलको तरिका हेर ।

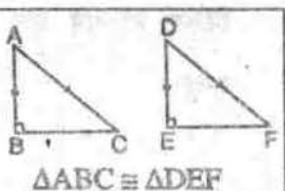


BC बराबर हुने गरी $B'C'$ खिच र B' मा 90° को कोण खिच । B' मा 90° को कोण बनाउने रेखा $B'X$ मा काटिने गरी C' मा कम्पाशको सियो राखी AC बराबरको चाप A' काट र $A'C'$ जोड । अब त्रिभुजहरू ABC र $A'B'C'$ का सङ्गति भागहरू बराबर छन् वा छैनन् नाप ।



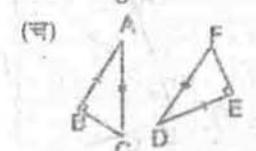
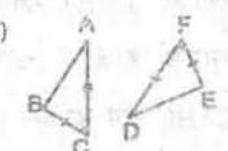
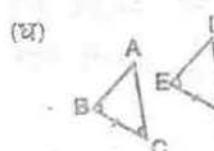
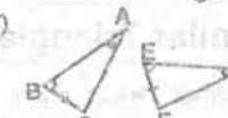
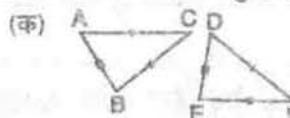
यहाँ दुईओटा त्रिभुजहरूमा समकोण, कर्ण र भुजा प्रयोग गरी अनुरूप त्रिभुजहरूको रचना गर्न सम्भव भयो । त्यसैले यो समकोण त्रिभुजहरूको अनुरूपताको परीक्षणका लागि तथ्य हुनसक्छ ।

एउटा समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजासंग अको समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजा अलगअलग बराबर भएमा ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । यो तथ्यलाई स.क.भ. (R.H.S.) तथ्य भनिन्छ ।

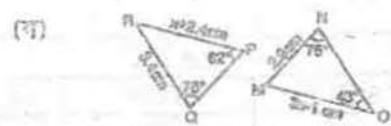
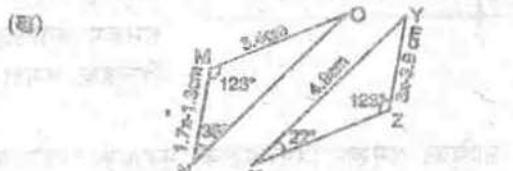
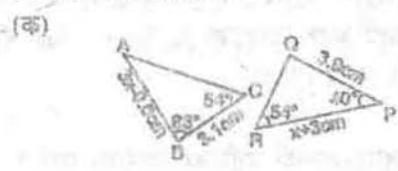


तथ्यांक 16.1

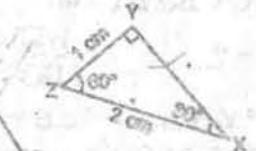
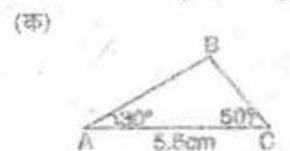
1. तलका प्रत्येक जोडा त्रिभुजहरू कुन तथ्यको अंदारमा अनुरूप छन्, तथ्य पता लगाई लेख ।



2. तलका प्रत्येक जोडा त्रिभुजहरू अनुरूप छन्, तर्थे π को मान निकाल र याहाँ नभएका भुजा तथा कोणहरू पता लगाउ ।

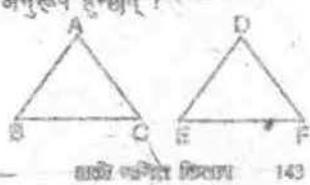


3. तलका प्रत्येक त्रिभुजहरू अनुरूप छन्, तर्थे सहभत शुलाहरू छुट्याउ ।

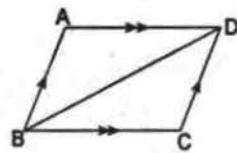


4. तलका प्रत्येक अवस्थामा केकस्ता अवस्था धरेपछि ΔABC र ΔDEF अनुरूप हुन्नान् ?

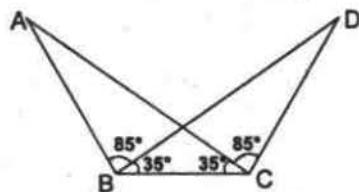
- (क) $AB = DE$, $\angle B = \angle E$
- (ख) $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$
- (ग) $AC = DF$, $BC = EF$



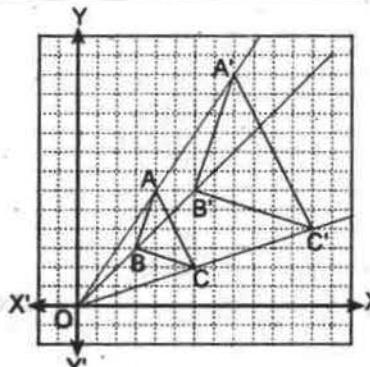
5. चतुर्भुज ABCD मा AD//BC र AB//DC हो । BD विकर्ण हो भने कुन तथ्यको आधारमा $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ हुन्छ ?



6. कुन तथ्यको आधारमा $\triangle ABC$ र $\triangle DBC$ अनुरूप हुन्छन् ?



16.2 समरूप त्रिभुजहरू (Similar Triangles)



संगैको चित्रमा एउटा विन्दु O लाई केन्द्र मानी $\triangle ABC$ लाई 2 गुणाको $\triangle A'B'C'$ बनाइएको छ । यहाँ $\triangle ABC$ सँग $\triangle A'B'C'$ समरूप हुन्छ र $\triangle A'B'C'$ लाई $\frac{1}{2}$ गुणाको चित्र बनाएपछि $\triangle ABC$ सँग समरूप हुन्छ ।

संगैको चित्रमा $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ समरूप त्रिभुजहरू हुन् र यसलाई जनाउन $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ लेखिन्छ जसमा \sim ले समरूप जनाउँछ । यहाँ शीर्ष विन्दुहरू A, B र C का सङ्गत शीर्ष विन्दुहरू क्रमशः A', B' र C' हुन् ।

माथिका समरूप त्रिभुजहरूका भुजाहरू र कोणहरू नापेर तलको तालिका कापीमा सार र के निष्कर्ष निस्किन्छ, हेर ।

$\triangle ABC$			$\triangle A'B'C'$		
AB =	BC =	CA =	$A'B' =$	$B'C' =$	$C'A' =$
$\angle A =$	$\angle B =$	$\angle C =$	$\angle A' =$	$\angle B' =$	$\angle C' =$

यो तालिकाबाट,

$\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ मा

$$\frac{A'B'}{AB} = 2, \quad \frac{B'C'}{BC} = 2, \quad \text{and} \quad \frac{C'A'}{CA} = 2, \text{ हुन्छन् ।}$$

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B' \text{ र } \angle C = \angle C' \text{ हुन्छन् ।}$$

त्यसकारण $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ समरूप त्रिभुजहरू हुन् ।

समरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गत भुजाहरूका अनुपात र सङ्गत कोणहरू समानुपात हुन्छन् ।

उदाहरण 5

संगैको चित्रमा $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ भए भुजा AB को लम्बाइ र $\angle C$ र $\angle Q$ को नाप करि हुन्छ ?

उत्तर

समरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गती भुजाहरूका अनुपात सबै बराबर हुने भएकाले

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} \text{ हुन्छ।}$$

यहाँ, AB = x cm मान्दा

$$\frac{6}{x} = \frac{5}{9}$$

$$\text{अथवा, } 5x = 9 \times 6$$

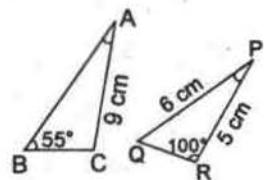
$$\text{अथवा, } x = 10.8$$

$$\therefore AB = 10.8$$

समरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गती भुजाहरू बराबर हुने भएकाले

$$\angle B = \angle Q \text{ र } \angle C = \angle R$$

$$\therefore \angle Q = 55^\circ \text{ र } \angle C = 100^\circ \text{ हुन्छ।}$$



उदाहरण 6

चित्रमा $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ र $AB=20$ cm, $AC=25$ cm,

$AE=10$ cm र $DE=6$ cm भए x र y को मान पत्ता

लगाउँ।

उत्तर:

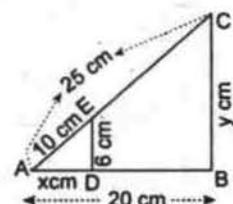
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ मा BC को सङ्गती भुजा DE हो र BC र DE को अनुपात $= \frac{BC}{DE}$ हो। AB को सङ्गत भुजा AD हो र AB र AD को अनुपात $= \frac{AB}{AD}$ हो। AC को सङ्गत भुजा AE हो र AC र AE को अनुपात $= \frac{AC}{AE}$ हो।

समरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गती भुजाहरू समानुपातिक हुन्छ। त्यसैले,

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ वा, } \frac{y}{6} = \frac{20}{x} = \frac{25}{10}$$

$$\text{पहिलो र तेस्रो अनुपातबाट } \frac{y}{6} = \frac{25}{10} \therefore y = 15 \text{ cm}$$

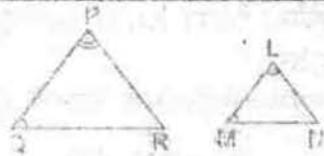
$$\text{दोस्रो र तेस्रो अनुपातबाट } \frac{20}{x} = \frac{25}{10} \therefore x = 8 \text{ cm}$$



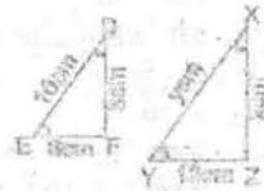
प्र० २

1. तीनों त्रिकोण $\triangle PQR \sim \triangle LMN$ हैं। इसके लिए रुज़हरूको पहिला व दूसरा स्वतंत्र लिखें।

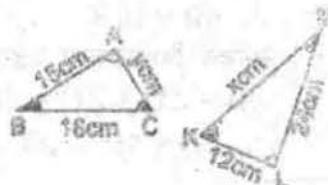
$$\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{PR}{LN}$$



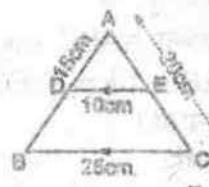
2. तीनों त्रिकोण $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$ हैं। $DE = 10\text{cm}$, $EF = 6\text{cm}$, $DF = 8\text{cm}$ व $YZ = 12\text{cm}$ घए x र y को जाप पता लगाओ।



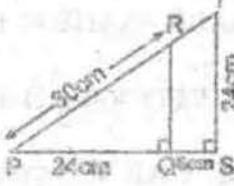
3. तीनों त्रिकोण $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ हैं। $AB = 15\text{cm}$, $BC = 18\text{cm}$, $LM = 24\text{cm}$ व $KL = 12\text{cm}$ घए x र y को जाप पता लगाओ।



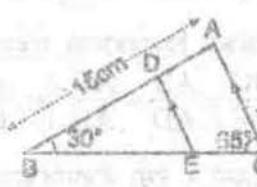
4. तीनों त्रिकोण $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ हैं। $AD = 15\text{cm}$, $DE = 10\text{cm}$, $BC = 25\text{cm}$ व $AC = 20\text{cm}$ घए AB र AE को जाप पता लगाओ।



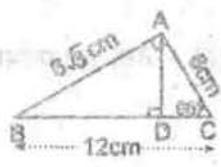
5. तीनों त्रिकोण $\triangle PQR \sim \triangle PST$ हैं। $PR = 30\text{cm}$, $PQ = 24\text{cm}$, $QS = 8\text{cm}$ व $ST = 24\text{cm}$ घए RQ र RT को जाप पता लगाओ।



6. तीनों त्रिकोण $\triangle ABC \sim \triangle ABD$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 65^\circ$, $AC : DE = 5 : 3$ व $AB = 15\text{cm}$ घए $\angle BDE$ र $\angle BE$ को जाप पता लगाओ।



7. तीनों त्रिकोण $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$, $\angle C = 60^\circ$, $AB = 6\sqrt{3}\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$ व $CA = 6\text{cm}$ घए $\angle BAD$, $\angle AD$ र $\angle CD$ को जाप पता लगाओ।



16.3 विभूजहरू समरूप हुने आदेश

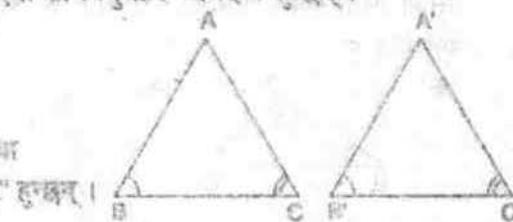
दुईजोडा भुजाहरूसँग निम्नलिखितमध्ये एउटा भाव्य बताएँ की विभूजहरू समरूप हुन्छन्।

(क) दुईजोडा भुजाहरू बोकहरू वरावर छन्।

$$\angle B = \angle B'$$

र $\angle C = \angle C'$ भएमा

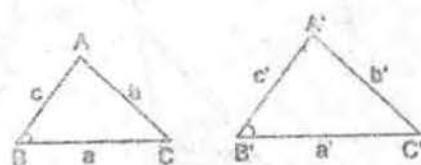
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ हुन्छन्।}$$



(ख) दुईजोडा भुजाहरूको लम्बापात्र र तिनीहरू बीचमो कोण वरावर छन्।

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \text{ र } \angle C = \angle C' \text{ भएमा}$$

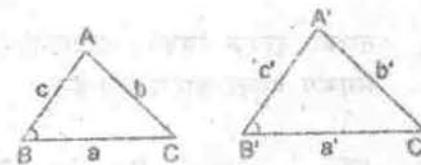
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ हुन्छन्।}$$



(ग) सहगती भुजाहरू समानुपात छन्।

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ भएमा}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ हुन्छन्।}$$



उदाहरण 7

दिइएको चित्रमा समकोणी विभूज $\triangle ABC$ मा $\angle A = 90^\circ$ छ। शीर्षविन्दु A बाट आधार BC मा सम्पर्क दियेको विभूजहरू कुराहरू प्रमाणित गर।

(क) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}$$

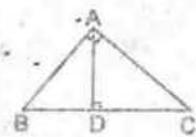
उत्तर:

(क) $\triangle ABC$ र $\triangle DBA$ मा

$$\angle BAC = \angle BDA = 90^\circ \text{ र } \angle ABC = \angle DBA \text{ (साफाकोण)}$$

दुईजोडा कोणहरू वरावर भएकाले

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ हुन्छ।}$$

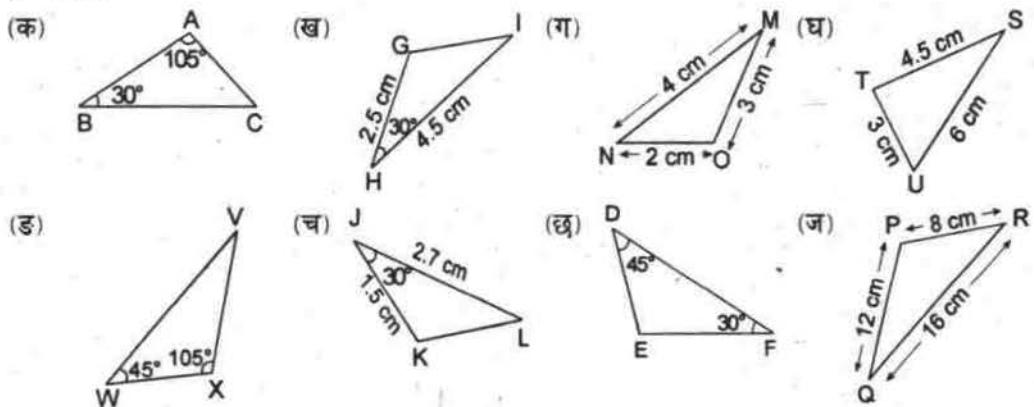


(ख) समरूप विभूजहरू $\triangle ABC$ र $\triangle DBA$ मा सहगती भुजाहरू समानुपात भएकाले

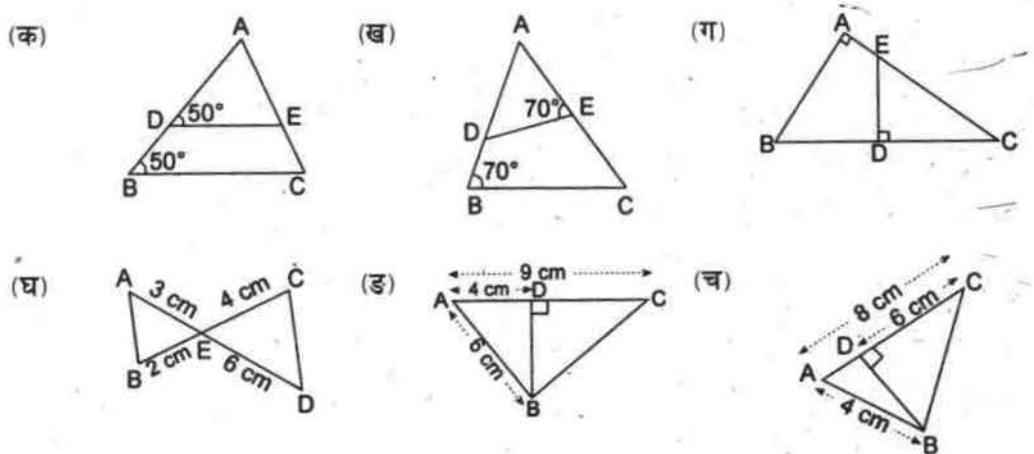
$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD} \text{ हुन्छ।}$$

अध्यात्म 16.3

1. तलका चित्रहरूबाट समरूप त्रिभुजहरूका जोडा पत्ता लगाऊ र ती त्रिभुजहरू समरूप भएका कारण पनि देउ ।



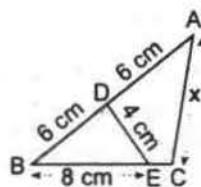
2. तलका प्रत्येक चित्रको आधारमा-चिह्न प्रयोग गरी समरूप त्रिभुजहरू लेख र ती त्रिभुजहरू समरूप भएका कारण पनि देउ ।



3. संगैको चित्रमा,

(क) $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ प्रमाणित गर ।

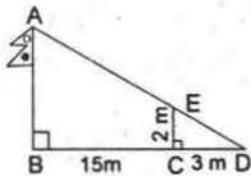
(ख) x को मान पत्ता लगाउ ।



4. संगैको चित्रमा

(क) $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ प्रमाणित गर ।

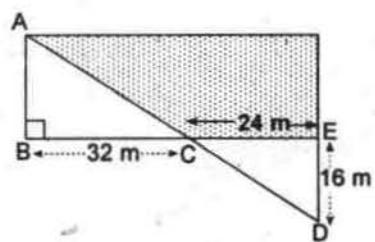
(ख) भन्डाको उचाइ पत्ता लगाउ ।



5. संगैको चित्रमा

(क) $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ प्रमाणित गर ।

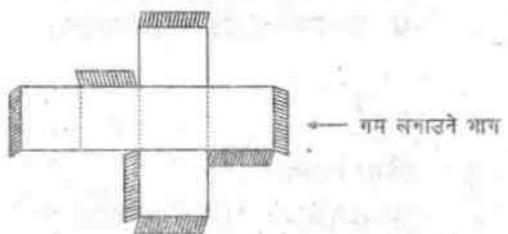
(ख) चौडाइ पत्ता लगाउ ।



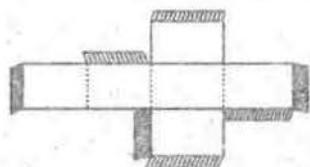
ठोस आकारहरू (Solid Shapes)

अधिला कक्षाहरूमा तिमीहरूले केही ठोस वस्तुहरू र तिनीहरूका जालीहरू (nets) का बारेमा जानकारी लिइसकेका छौं। यहाँ केही थप ठोस वस्तुहरू र तिनीहरूका जालीहरूका बारेमा जानकारी पाउनेछौं।

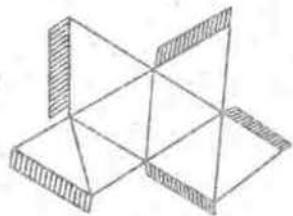
1. घन (Cube) को जाली



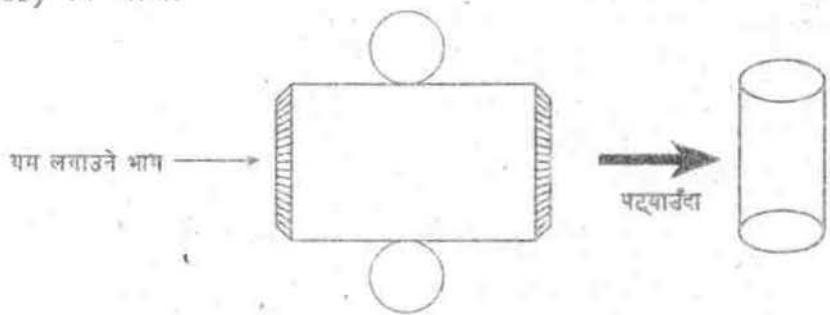
2. षट्मुखा (Cuboid) को जाली



3. अष्टाहेड्रन (Octahedron) को जाली

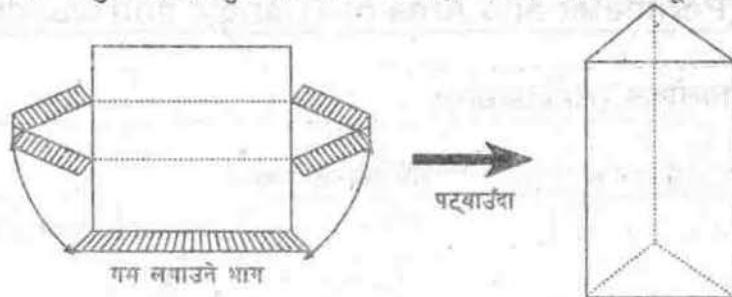


4. बेलन (Cylinder) को जाली



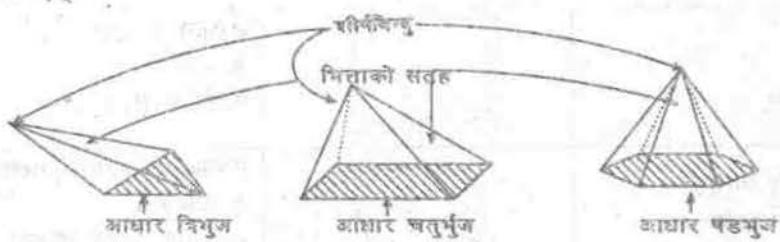
5. त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

छेउघेउ दुईओटा अनुरूप त्रिभुजहरू र बीचमा अन्य तीनओटा आयातकार सतहहरूबाट बनेको तीन आयामिक ठोस वस्तुहरूलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म भनिन्छ । यसको जाली र नमूना तल दिइएको छ ।

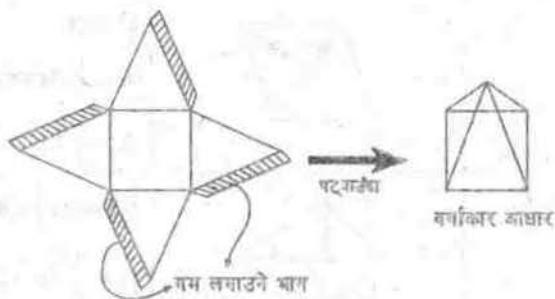


6. पिरामिड (Pyramid)

आधार त्रिभुज वा चतुर्भुज वा अन्य वहुभुज भएर अन्य सतहहरूको एउटा साझा शीर्षविन्दु भएको तीन आयामिक ठोस वस्तुलाई पिरामिड भनिन्छ । तलका चित्रहरूमा पिरामिडका केही नमूनाहरू देखाइएका छन् ।



पिरामिडको जाली:



आठ्यात्स 17

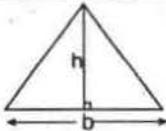
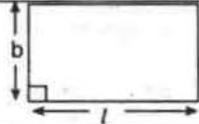
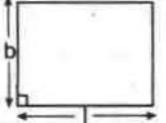
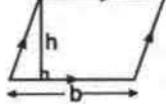
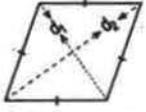
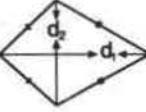
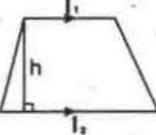
- माथि चित्रमा दिइएका घन, षड्मुखा, बहुटाहेडून, बेलन, त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिडका जालीहरूलाई देस गर । रेखाङ्कनमा काट, पट्याउ र यस लगाई टाँचिर ठोस वस्तुका नमूनाहरू तिर्मीण गर ।

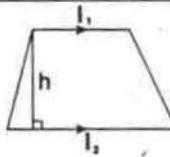
एकाइ
18

त्रिभुज र चतुर्भुजको परिमिति र क्षेत्रफल (Perimeter and Area of Triangle and Quadrilateral)

18.1 पुनरावलोकन (Revision)

केहि ज्यामितीय आकृतिहरूका क्षेत्रफल र परिमितिसम्बन्धी तथ्यहरू :

त्रिभुज (Triangle)		क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × उचाइ $A = \frac{1}{2}b \times h$
आयत (Rectangle)		क्षेत्रफल = लम्बाइ × चौडाइ $A = l \times b$ परिमिति (P) = $2(l+b)$
वर्ग (Square)		क्षेत्रफल = (<भुजा>) ² $A = l^2$ परिमिति (P) = $4l$
समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)		क्षेत्रफल = आधार × उचाइ $A = b \times h$ P=2(एक जोडा आसन्न भुजाहरूको जोड़)
समवाहु चतुर्भुज (Rhombus)		क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}$ (विकर्णहरूको गुणनफल) $A = \frac{1}{2} (d_1 \times d_2), \quad P = 4l$
चड्गा (Kite)		क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (विकर्णहरूको गुणनफल) $A = \frac{1}{2} (d_1 \times d_2)$
समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)		क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समानान्तर भुजाहरूको योग) × उचाइ $A = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \times h$

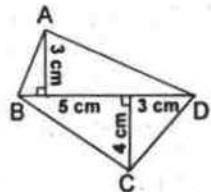
समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)		क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समानान्तर भुजाहरूको योग) × उचाइ $A = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \times h$
चतुर्भुज (Quadrilateral)		क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{विकर्ण} \times (\text{लम्बहरूको योगफल})$ $A = \frac{1}{2} d (P_1 + P_2)$

उदाहरण 1

चित्रमा दिइएको चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल निकाल ।

उत्तर:

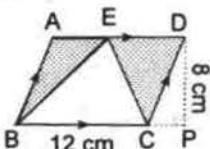
$$\begin{aligned}\text{चतुर्भुज } ABCD \text{ को क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \text{ विकर्ण (लम्बहरूको योग)} \\ &= \frac{1}{2} (5+3)(3+4) \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \\ &= 28 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



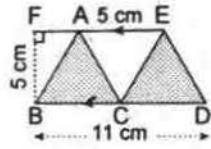
उदाहरण 2

तलका चित्रहरूमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल निकाल ।

(क)



(ख)



उत्तर:

$$\begin{aligned}(\text{k}) \text{ छाया परेको भागको क्षेत्रफल} &= ABCD - \Delta EBC \\ &= 12 \times 8 - \frac{1}{2} 12 \times 8 \\ &= 48 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{ख}) \text{ छाया परेको भागको क्षेत्रफल} &= \text{स.ल.च. } ABDE - \Delta ACE \\ &= \frac{1}{2} \times (5+11) \times 5 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \\ &= \frac{1}{2} \times 16 \times 5 - \frac{1}{2} \times 25 \\ &= 40 - 12.5 \\ &= 27.5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

प्र० 13

1. तल विशेषत्वों अनुसारकृती मेनवाल र परिमिति निकाल ।

(क)



(ख)



(ग)



2. तल विशेषत्वों अनुसारकृती मेनवाल र परिमिति निकाल ।

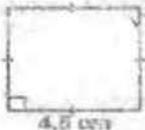
(घ)



(ज)

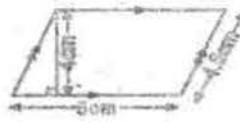


(म)

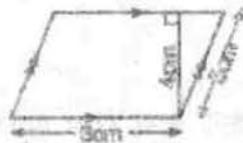


3. तल विशेषका समानांतर चतुर्भुजका क्षेत्रफल र परिमिति निकाल ।

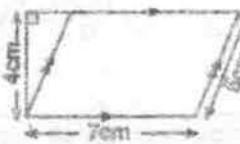
(क)



(ख)



(ग)



(घ)

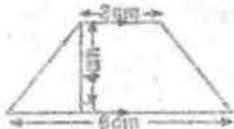


4. तल विशेषका चतुर्भुजहरुका क्षेत्रफल निकाल ।

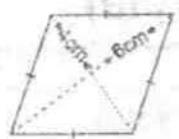
(क)



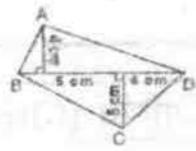
(ख)



(म)

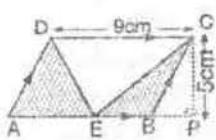


(घ)

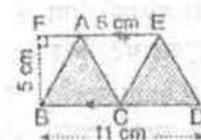


5. तलका चित्रहरूमा रडगाइएको भागको क्षेत्रफल निकाल।

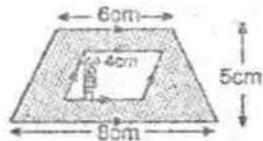
(म)



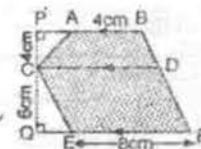
(घ)



(ग)



(घ)



वृत्त (Circle)

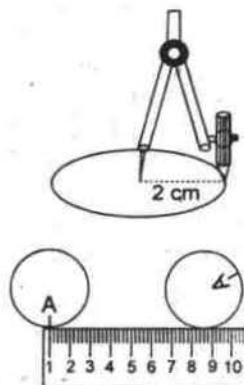
19.1 वृत्तको परिधि (Circumference of Circle)

क्रियाकलाप ।

एउटा बाक्सो कागज (Card-board sheet) मा 2cm अर्धव्यास (4cm) व्यास भएको एउटा वृत्त खिच र यसलाई कैचीले काट ।

अब चित्रमा देखाइएअनुसार चक्रकाको छेउमा एउटा चिह्न A राखी A ले रेखाको ठीक छेउ विन्दुमा छुने गरी घुमाउदै जाऊ । फेरि चिह्न A ले रेखामा छुने अवस्थासम्म घुमाउदै जाऊ । यस रेखाखण्डको लम्बाई नै वृत्तको परिधिसँग वरावर हुन्छ । अब वृत्तको परिधि (Circumference-C) लाई व्यास (Diameter-d) ले भाग गरी हेर कति आउदू ? यस्तो प्रयोग फरकफरक व्यास भएका वृत्ताकार चक्रका बनाइ व्यास र परिधिको नापलाई तलको तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार र लेख ।

वृत्तको व्यास	वृत्तको परिधि	$\frac{\text{वृत्तको परिधि } C}{\text{व्यास } d}$
2cm	6.28cm	$\frac{6.28}{2} = 3.14$
3cm	9.42cm	
4cm	12.56cm	
5cm		
6cm		
7cm		



माथिको तालिकाबाट वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात सधैँ भन्डै $\frac{22}{7}$ वा 3.14 को नजिकमा रहेको हुन्छ । सबै वृत्तहरूमा $\frac{C}{d} = 3.14$ नै हुन्छ । तसर्थ यसलाई अचल राशि (Constant Quantity) भनिन्दू र यो अचल राशिलाई ग्रिक अक्षर π (पाइ) ले जनाइन्दू । त्यसैले $\frac{C}{d} = \pi$ हुन्छ ।

$$\text{अतः } C = \pi d = 2\pi r$$

उदाहरण 1

14cm व्यास भएको वृत्तको परिधि कति हुन्छ ?

उत्तर

यहाँ व्यास (d) = 14cm , परिधि (C) = ?

$$\begin{aligned}\text{फेरि} \quad C &= \pi d \\ &= \frac{22}{7} \times 14 \\ &= 44 \text{ cm}\end{aligned}$$

किनकि $\pi = \frac{22}{7}$

फरक $= 44 - 43.96 = 0.04 \text{ cm}$

अब, यहाँ 43.96 लाइ एकाइमा शून्यान्त गर्दा 44cm नै हुन्छ ।

त्यसैले π को मान $\frac{22}{7}$ हुन्छ ।

अतः $\pi = \frac{22}{7}$ वा $\pi = 3.14$ पनि राख्ने हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा वृत्तको परिधि 6.28cm छ भने यसको अर्धव्यास कति होला ? ($\pi = 3.14$ मानेर हिसाब गर ।

उत्तर:

यहाँ, वृत्तको परिधि (C) = 6.28cm, अर्धव्यास (r) = ?

$$\text{सूत्रानुसार, } C = 2\pi r$$

$$\text{अथवा } 6.28 = 2 \times 3.14 \times r$$

$$\therefore r = \frac{6.28}{2 \times 3.14} = 1\text{cm. } \therefore \text{अर्धव्यास} = 1\text{cm.}$$

अध्यात्म 19.1

- तलका प्रत्येक वृत्तको परिधि पत्ता लगाऊ । [$\pi = 3.14$]

(क) व्यास = 4cm (ख) अर्धव्यास = 1.5cm (ग) व्यास = 5cm
 (घ) अर्धव्यास = 3cm (ड) व्यास = 7cm (च) अर्धव्यास = 5cm
- तलका प्रत्येक वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाऊ । [$\pi = 3.14$]

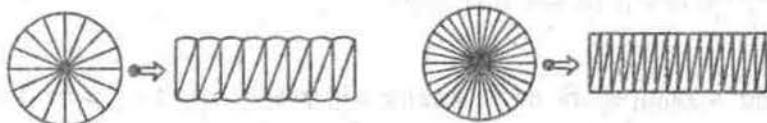
(क) परिधि = 47.1cm (ख) परिधि = 56.52cm (ग) परिधि = 34.54cm
 (घ) परिधि = 21.98cm (ड) परिधि = 9.42cm (च) परिधि = 37.68cm
- एउटा रिकापीको व्यास 14cm छ भने यसको घेरा कति होला ? [$\pi = \frac{22}{7}$]
- एउटा घोडा 6.5m लामो डोरीले किलामा बाँधिएको छ । डोरी तन्किने गरी किलाको बरिपरि । पूरा एक चक्कर घुम्छ भने घोडाले कति दूरी पार गन्यो होला? $\pi = 3.14$ मानेर हिसाब गर ।
- एउटा साइकलको पाइयाको अर्धव्यास 50cm रहेछ । यदि साइकलको पाइयाले 500 चक्कर लगाउँछ भने कति दूरी पार गर्ला, यदि 1km दूरी पार गर्नुछ भने पाइयाले कम्तीमा कति चक्कर पूर्णपर्द्ध होला? [$\pi = 3.14$]
- एउटा मोटरको पाइया 400 चक्कर घुम्दा 1km 256m दूरी पार गरेछ भने पाइयाको व्यास कति रहेछ ? [$\pi = 3.14$]
- एउटा गोलो रुखको फेदको बरिपरि वाँधन 5.809m लामो डोरी चाहिन्छ भने रुखको फेदको व्यास कति होला ? [$\pi = 3.14$]

19.2 वृत्तको क्षेत्रफल (Area of Circle)

1. वृत्तको क्षेत्रफलको सूत्र (Formula for Area of a Circle)

कियाकलाप 2

एउटा वृत्ताकार कागजको टुका लेउ र चित्रमा देखाइए जस्तै गरी बराबर भागमा काटदै जाऊ। काटेका टुकाहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी मिलाउ।



यहाँ टुकाहरूलाई सानो गर्दै जाऊ। उक्त टुकाहरू मिलाउदा बनेको आकृति आयताकार हुन्छ। सोही आयतमा लम्बाइ = परिधिको आधा र चौडाइ = अर्धव्यास हुन्छन्।

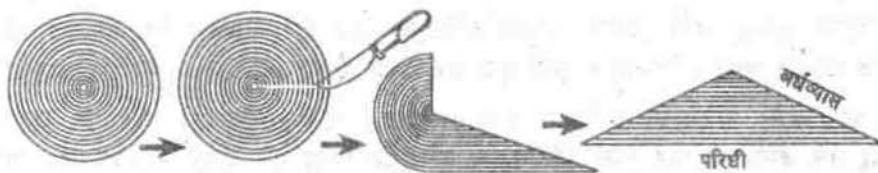
त्यसैले वृत्तको अर्धव्यासलाई r मान्दा

$$\begin{aligned}\text{वृत्तको क्षेत्रफल} &= \text{आयताकार आकृतिको क्षेत्रफल} \\ &= (\text{लम्बाइ}) \times (\text{चौडाइ}) \\ &= \pi r \times r \\ &= \pi r^2 \quad \text{माथिको कियाकलापबाट,} \\ &\text{वृत्तको क्षेत्रफल (A)} = \pi r^2\end{aligned}$$

2. वृत्तको क्षेत्रफल निकाल्ने वैकल्पिक तरिका (Alternative method)

कियाकलाप 3

एउटा भसिनो किला सभतल सतह वा काठको फलेकमा ठोकी किलाको वरिपरि धागो घुमाउदै जाऊ र चित्रमा देखाइए जस्तै वृत्ताकार चक्का बनाऊ। चक्कालाई चित्रमा जस्तै काट र त्रिभुजाकार आकृतिमा लैजाऊ।



$$\begin{aligned}\text{यहाँ, त्रिभुजको आधार} &= \text{वृत्तको परिधि} = 2\pi r \\ \text{त्रिभुजको उचाइ} &= \text{वृत्तको अर्धव्यास} = r \\ \text{र वृत्तको क्षेत्रफल} &= \text{त्रिभुजको क्षेत्रफल}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{उचाइ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

त्यसैले, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

उदाहरण 3

7cm अर्धव्यास भएको वृत्तको क्षेत्रफल कति हुन्छ?

उत्तर:

यहाँ, अर्धव्यास (r) = 7cm

सूत्रअनुसार,

$$\text{क्षेत्रफल (A)} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} 7 \times 7 \text{ वर्ग से.मी.} = 154 \text{ वर्ग से.मी.}$$

अध्याय 19.2

- तलका प्रत्येक अवस्थामा वृत्तको क्षेत्रफल पता लगाऊ।

(क) अर्धव्यास = 8cm	(ख) व्यास = 4cm	(ग) अर्धव्यास = 7cm
(घ) व्यास = 2.8cm	(ड) अर्धव्यास = 6.5cm	(च) व्यास = 18cm
(छ) अर्धव्यास = 5.6cm	(ज) व्यास = 14cm	(झ) अर्धव्यास = 5cm
(ञ) व्यास = 30cm	(ट) परिधि = 44cm	(ठ) परिधि = 88cm
- एउटा वृत्ताकार पिंड भएको दूधको बढाको व्यास 14cm छ भने यसले टेवुलमा कति ठाउँ ओगट्छ?
- एउटा सोलीको पिंड वृत्ताकार छ र यसको व्यास 6cm छ भने सोलीको पिंडको क्षेत्रफल कति हुन्छ?
- तलका प्रत्येक अवस्थामा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल निकाल।

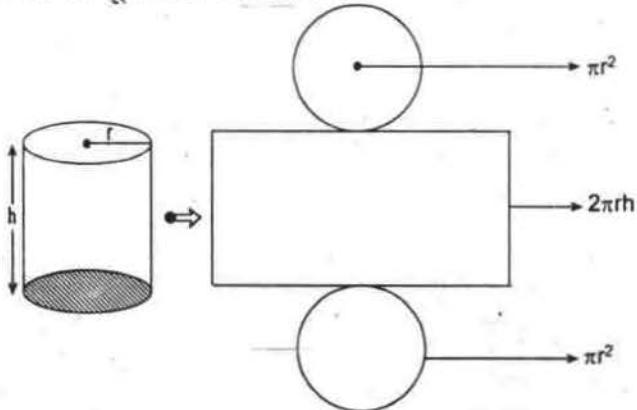
(क)	(ख)	(ग)	(घ)
- एउटा वृत्तको क्षेत्रफल 78.5cm^2 रहेछ भने वृत्तको

(क) अर्धव्यास	(ख) परिधि पता लगाऊ।
---------------	---------------------
- एउटा वृत्तको परिधि 62.8cm रहेछ भने वृत्तको अर्धव्यास र क्षेत्रफल पता लगाऊ।
- एउटा किलामा लामो डोरीले बाँधिको बाखाले डोरी बधिको किलाको वरिपरि डोरी तन्किने गरी घाँस खाँदा 12.56m^2 क्षेत्रफलको घाँस खाएछ भने

(क) डोरीको लम्बाइ कति रहेछ?	(ख) बाखाले घाँस खाएको जमिन वरिपरिको घेरा कति रहेछ?
-----------------------------	--

20.1 बेलना र त्रिभुजाकार प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of Cylinder and Triangular Prism)

(अ) बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल



आधारको अर्धव्यास = r

उचाइ = h

एउटा बेलना चित्रमा देखाइए जस्तै काटदा आयताकार भाग र वृत्ताकार भागमा छुट्टिन्दू ।
आयताकार भागनै बेलनाको बक सतह (Curved surface) हो ।

यहाँ, (आयतको लम्बाइ) = (वृत्तको परिधि)

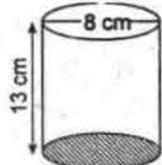
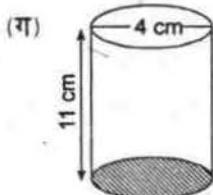
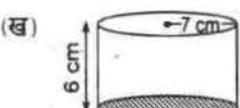
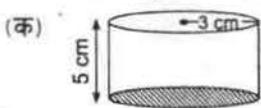
$$= 2\pi r$$

त्यसैले,

बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल	$= (\text{आयतको क्षेत्रफल}) + 2 \times (\text{वृत्तको क्षेत्रफल})$
A	$= 2\pi rh + 2\pi r^2$
	$= 2\pi r (h + r)$

उदाहरण 1

तलका बेलनाहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।



समाधान:

$$(क) 2\pi r(h+r) = 2 \times 3.14 \times 3 \times (3+5) \\ = 150.72 \text{ cm}^2$$

$$(ख) 2\pi r(h+r) = 2 \times 3.14 \times 7 \times (7+6) \\ = 571.48 \text{ cm}^2$$

$$(ग) अर्धव्यास (r) = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm भएकाले}$$

$$2\pi r(r+h) = 2 \times 3.14 \times 2 \times (2+11) \\ = 163.28 \text{ cm}^2$$

$$(घ) अर्धव्यास = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm भएकाले}$$

$$2\pi r(r+h) = 2 \times 3.14 \times 4 \times (4+13) \\ = 427.04 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2

(क) एउटा बेलनाको आधारको परिधि 31.4 cm र उचाइ 7 cm छ भने पूरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

(ख) एउटा बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल 628 cm^2 र आधारको अर्धव्यास 4 cm छ भने उचाइ कति होला ?

उत्तर:

$$(क) प्रश्नबाट $2\pi r = 31.4$$$

$$\text{त्यसैले } r = \frac{31.4}{2 \times 3.14} = 5 \text{ cm}$$

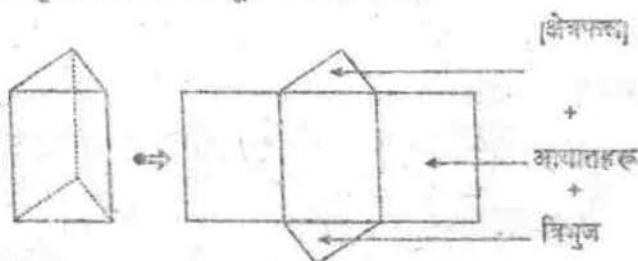
$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)} = 2\pi r(r+h) = 2 \times 3.14 \times 5 \times (5+7) \\ = 376.8 \text{ cm}^2$$

$$(ख) प्रश्नबाट, 628 = 2\pi r(r+h)$$

$$= 2 \times 3.14 \times 4 \times (4+h) \\ = 25.12 \times (4+h)$$

$$\therefore h = \frac{628}{25.12} - 4 \\ = 21 \text{ cm}$$

(ब) विभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल



एउटा विभुजाकार प्रिज्म चित्रमा देखिए जस्तै काट्दा आयताकार भाग र विभुजाकार भागमा छुट्टिन्थ । त्यसैले,

विभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल = (आयताहरूको क्षेत्रफल) + 2 × (विभुजको क्षेत्रफल)
जल्ला,

$$\text{आयतको क्षेत्रफल} = (\text{बाधारको विभुजको परिमिति}) \times (\text{उचाइ})$$

उदाहरण 3

सूरीको चित्रमा प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल ।

यहाँ ΔABC गा

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{14} = 5 \text{ से.मी.}$$

त्यसैले,

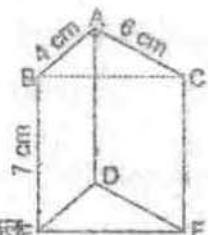
$$\begin{aligned} \text{पूरा सतहको क्षेत्रफल } (A) &= \text{विभुजको परिमिति} \times \text{उचाइ} + \text{दुईबोटा विभुजको क्षेत्रफल} \\ &= 94 + 14\sqrt{13} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$= (3 + 4 + 5) \text{ cm} \times 7 \text{ cm} + 2 \left(\frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \right)$$

$$= 12 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} + 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$$

$$= 84 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2$$

$$= 96 \text{ cm}^2$$



अभ्यास 20.1

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल ।

(क) उचाइ = 20cm

(ख) लम्बाइ = 6cm

(ग) लम्बाइ = 15cm

अर्धव्यास = 7cm

व्यास = 3.5cm

अर्धव्यास = 4cm

(घ) उचाइ = 15.2cm

(ङ)

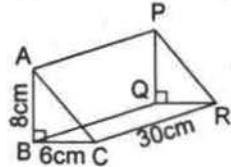
(च)

व्यास = 14.5cm

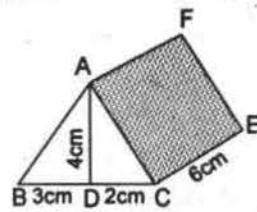


2. तलका प्रत्येक त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल ।

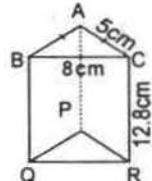
(क)



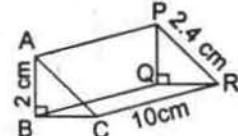
(ख)



(ग)



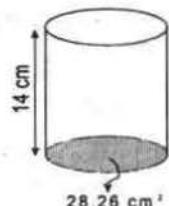
(घ)



3. एउटा बट्टाको आकृति बेलनाकार छ । आधारको क्षेत्रफल 28.26cm^2 र उचाइ 14cm छ भने पूरा सतहको क्षेत्रफल कति रहेछ ?

4. एउटा पाइपको दुकाको बाहिरी परिधि 15.7cm छ । यसको लम्बाइ 84cm रहेछ भने

(क) व्यास कति रहेछ ? (ख) बक्सतहको क्षेत्रफल कति रहेछ ?



5. एउटा बाँसको दुड्गोको लम्बाइ 15cm र पिंधको क्षेत्रफल 50.24cm^2 रहेछ भने बाँसको बक्सतहको क्षेत्रफल कति रहेछ ?

6. एउटा बेलनाकार ट्याइकीको बक्सतहको क्षेत्रफल 301.44m^2 रहेछ । यदि आधारको अर्धव्यास 6m रहेछ भने ट्याइकीको गहिराइ कति रहेछ ?

7. एउटा ह्युम पाइपको अर्धव्यास 40cm र बक्सतहको क्षेत्रफल 37.68m^2 रहेछ । उत्त पाइपको लम्बाइ कति होला ?

8. एउटा बेलनाकार द्युवलाइटको परिधि 12.8cm र लम्बाइ 80cm छ भने बक्सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

20.2 बेलना र त्रिभुजाकार प्रिज्मको आयतन

(Volume of Cylinder and Triangular Prism)

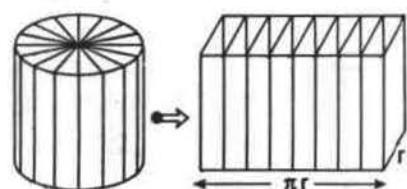
क्रियाकलाप ।

एउटा बेलनाकार वस्तु (प्रयोगका लागि गिलो माटोको बेलना बनाउँदा राम्रो हुन्छ ।) लेउ र चित्रमा देखाइए जस्तै गरी काटेर दुकाहरूलाई मिलाएर आयताकार ठोस वस्तु बनाऊ ।

यहाँ, बेलनाको उचाइ = आयताकार ठोसको उचाइ = h

बेलनाको अर्धव्यास = आयताकार ठोसको चौडाइ = r

$\frac{1}{2}$ (बेलनाको परिधि) = आयताकार ठोसको लम्बाइ = πr



$$\begin{aligned}
 \text{र बेलनाको आयतन} &= \text{आयतकार ठोसको आयतन} \\
 &= \text{लम्बाइ} \times \text{चौडाइ} \times \text{उचाइ} \\
 &= \pi r \times r \times h \\
 &= \pi r^2 h \\
 &= (\text{आधारको क्षेत्रफल}) \times (\text{उचाइ}) \\
 \text{बेलनाको आयतन (V)} &= (\text{आधारको क्षेत्रफल}) \times (\text{उचाइ}) \\
 &= A \times h \quad (A = \text{आधारको क्षेत्रफल}) \\
 &= \pi r^2 h
 \end{aligned}$$

उदाहरण 1

एउटा बेलनाको आधारको परिधि 43.96cm रहेछ । यदि उचाइ 14cm भए आयतन कति होला ?

उत्तर:

$$\begin{aligned}
 \text{बेलनाको परिधि} &= 43.96\text{cm} \\
 \text{उचाइ (h)} &= 14\text{cm} \\
 \text{आयतन (V)} &= ? \\
 \text{अब, परिधि} &= 43.96 \\
 \text{अथवा, } 2 \times 3.14 \times r &= 43.96 \\
 \therefore r &= \frac{43.96}{2 \times 3.14} = 7\text{cm}
 \end{aligned}$$

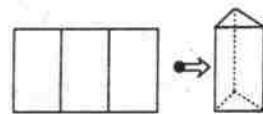
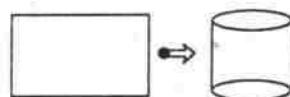
$$\begin{aligned}
 \text{आयतनको सूत्रबाट } V &= \pi r^2 h = 3.14 \times 7 \times 7 \times 14 \text{cm}^3 \\
 &= 2154.04\text{cm}^3
 \end{aligned}$$

क्रियाकलाप 2

दुईओटा वरावर साइजका कागजका टुक्रा लेऊ र चित्रमा देखाइए जस्तै आकृति बनाऊ ।

के बेलना र प्रिज्मको आयतनको सूत्रको प्रकृति एउटै हुन्छ ?

बेलनाको आयतन जस्तै प्रिज्मको आयतन पनि आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ नै हुन्छ ।



उदाहरण 2

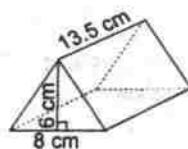
संगैको चित्रमा प्रिज्मको उचाइ = 13.5cm त्रिभुजाकार आधारको उचाइ = 6cm

छ । त्रिभुजको आधार = 8cm भए, आयतन कति होला ?

उत्तर

$$\begin{aligned}
 \text{प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \\
 &= 24\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रिज्मको आयतन} &= \text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ} \\
 &= 24 \times 13.5 \\
 &= 324\text{cm}^3
 \end{aligned}$$

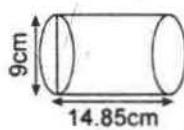


अधियांत्र 20.2

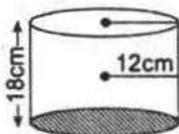
1. तलका प्रत्येक बेलनाकार वस्तुको आयतन निकाल ।

(क) लम्बाइ = 15cm, व्यास = 6cm (ख) उचाइ = 12.8cm, अर्धव्यास = 7cm

(ग)

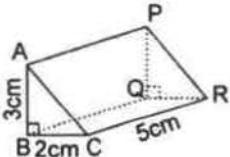


(घ)

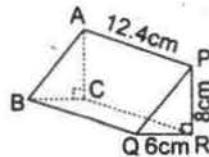


2. तलका प्रत्येक त्रिभुजाकार पिञ्जमको आयतन निकाल ।

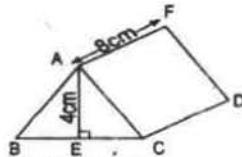
(क)



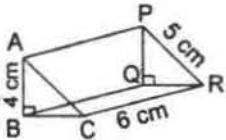
(ख)



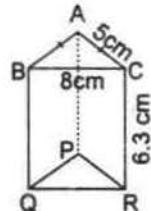
(ग)



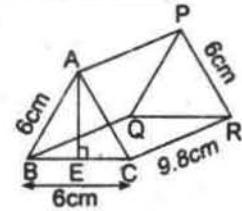
(घ)



(ङ)



(च)



3. एउटा बेलनाकार वस्तुको बक्सतहको क्षेत्रफल 8792cm^2 र लम्बाइ 7cm रहेछ भने आयतन कति होला ?

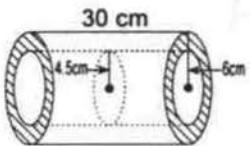
4. एउटा बेलनाकार द्याइकीको व्यास 14m र बक्सतहको क्षेत्रफल 263.76cm^2 रहेछ भने द्याइकीमा कति m^3 पानी अटाउला ? यदि प्रतिमिनेट 1.2m^3 पानी बग्ने पाइपले द्याइकी भर्नुपन्यो भने कति समयमा द्याइकी भरिएला ?

5. एउटा बेलनाकार इनार बनाउदा 452.16m^3 माटो निस्कियो । उक्त इनारको उचाइ 4m रहेछ भने आधारको क्षेत्रफल कति रहेछ ?

6. एउटा बेलनाकार बाल्टिनको व्यास 0.5m र आयतन 98125cm^3 रहेछ भने बाल्टिनको उचाइ कति रहेछ ?

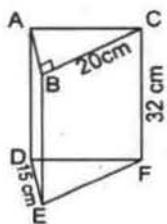
7. एउटा मटीतेलको द्याइकीको व्यास 1m रहेछ । यदि द्याइकीमा 942l मटीतेल अटाउदो रहेछ भने द्याइकीको उचाइ कति रहेछ ? ($1000\text{cm}^3 = 1\text{l}$ हुन्दै ।)

8. एउटा 30cm लामो बाँसको दुइयोको भित्री अर्धव्यास 4.5cm र बाहिरी अर्धव्यास 6cm रहेछ, भने बाँसको मात्र आयतन कति रहेछ ?



9. 17cm कर्ण र एउटा भुजा 15cm भएको समकोणी त्रिभुज आधार हुने प्रिज्मको लम्बाई 18cm भए यसको आयतन कति होला ?

10. एउटा बट्टाको आकृति प्रिज्माकार छ र त्यसको नाप दायाँ चित्रमा दिइएको छ। यसमा कति l पानी अदृढ ? [$1000 \text{ cm}^3 = 1l$]

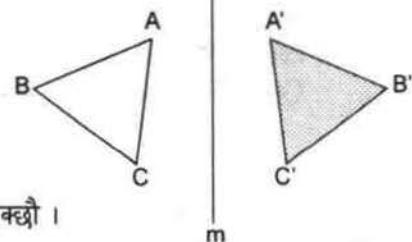


21.1 परावर्तन (Reflection)

परावर्तन एक प्रकारको स्थानान्तरण हो । तिमीहरूले अधिल्लो कक्षामा परावर्तनका बारेमा केही जानकारी पाइसकेका छौं । यस पाठमा केही थप जानकारी प्राप्त गर्नेछौं ।

कुनै अक्षमा गरिने स्थानान्तरणलाई परावर्तन भनिन्छ ।

चित्रमा, $\triangle ABC$ लाई रेखा m (परावर्तनको अक्ष) मा परावर्तन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\triangle A'B'C'$ हो ।



यो उदाहरणबाट तिमीहरू परावर्तनका बारेमा निम्न कुरा भन्न सक्छौं ।

कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई परावर्तन गर्दा

- आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब परावर्तनको अक्षबाट बराबर दूरीमा पर्दछन् ।
- आकृति र प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् ।
- आकृति र प्रतिविम्ब एकअर्काका उल्टो आकृतिका रूपमा हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएको चित्रमा रेखा m परावर्तनको अक्ष हो । $\triangle ABC$ लाई m मा परावर्तन गरी प्रतिविम्बलाई चित्रमा देखाऊ ।

उत्तर:

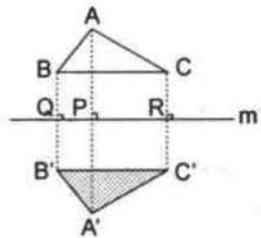
परावर्तन गर्ने तरिका निम्नानुसार छन् ।

(क) परावर्तनको अक्ष m मा लम्ब हुनेगरी

(90° को कोण बन्ने गरी) AP खिच ।

AP लाई $AP = A'P$ हुनेगरी A' सम्म

लम्बाऊ ।



(ख) परावर्तनको अक्षमा लम्ब हुने गरी BQ खिच र BQ लाई $BQ = B'Q$ हुने गरी B' सम्म लम्बाऊ ।

(ग) त्यसैगरी C लाई C' सम्म लम्बाऊ ।

अब A', B', C' क्रमसँग जोडै जाँदा बन्ने $\triangle A'B'C'$ नै परावर्तनको प्रतिविम्ब हो ।

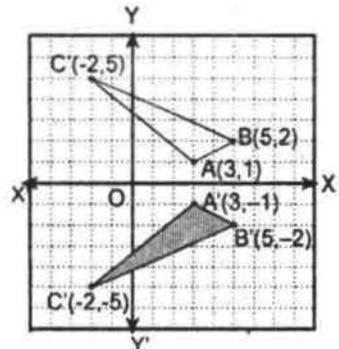
उदाहरण 2

A (3,1), B (5,2), C (-2,5) त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू हुन्। ΔABC लाई लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर । ΔABC लाई X -अक्षमा परावर्तन गर र प्रतिविम्बका शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेख ।

उत्तर:

ΔABC लाई X-अक्षमा परावर्तन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ लाई माथिको लेखाचित्रमा छाया पारेर देखाइएको छ । लेखाचित्रका आधारमा प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू निम्न छन् ।

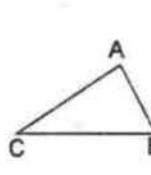
$$\begin{aligned}A(3,1) &\rightarrow A'(3,-1), \\B(5,2) &\rightarrow B'(5,-2) \\C(-2,5) &\rightarrow C'(-2,-5)\end{aligned}$$



अभ्यास 21.1

1. तलका प्रत्येक ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिएको परावर्तनको अक्ष p मा परावर्तन गरी बन्ने प्रतिविम्बलाई चित्रमा देखाउ ।

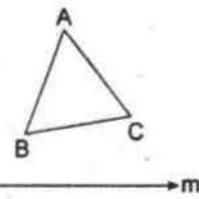
(क)



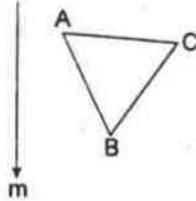
(ख)



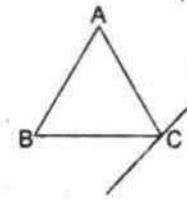
(ग)



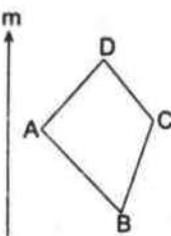
(घ)



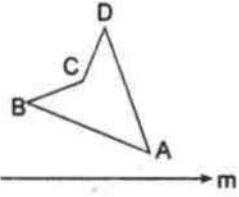
(ङ)



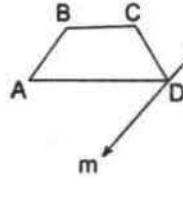
(च)



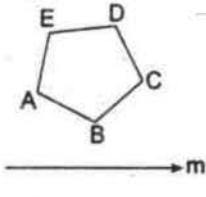
(छ)

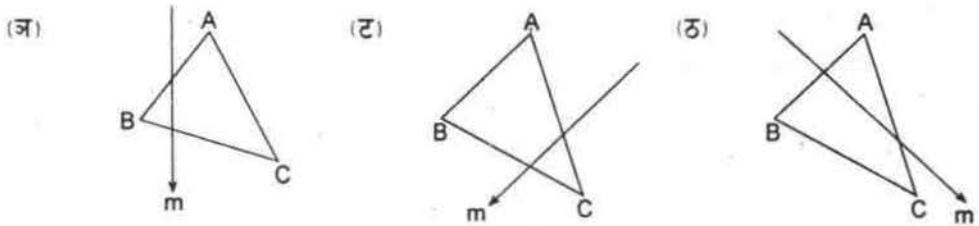


(ज)



(झ)



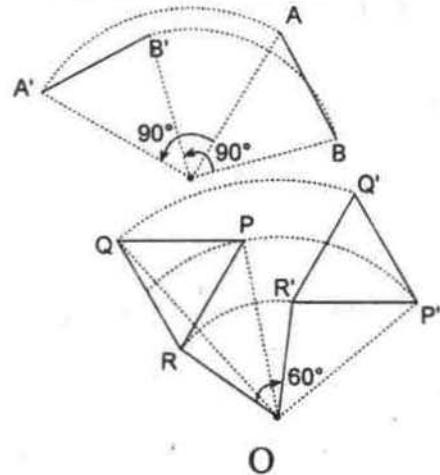


2. विन्दुहरू $A(2,5)$, $B(1,5)$, $C(5,0)$, $D(3,1)$, $E(-5,2)$ लाई ग्राफ पेपरमा अड्कन गरी X -अक्षमा परावर्तन गरेर प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू लेखे ।
3. विन्दुहरू $A(5,7)$, $B(-3,1)$, $C(2,0)$, $D(3,-6)$ र $E(5,-7)$ लाई ग्राफ पेपरमा अड्कन गरी Y -अक्षमा परावर्तन गरेर प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू लेखे ।
4. $P(-1,3)$, $Q(3,1)$ र $R(5,2)$ एउटा त्रिभुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔPQR लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी X -अक्षमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ लाई छाया पारेर देखाउँ र प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू पनि लेखे ।
5. $W(3,1)$, $X(2,5)$, $Y(1,7)$ र $Z(-3,4)$ एउटा चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् । चतुर्भुज $WXYZ$ लाई लेखाचित्रमा देखाई Y -अक्षमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बलाई छाया पारेर देखाउँ ।

21.2 परिक्रमण (Rotation)

कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई दिएको कोण र दिशामा दिएको विन्दुको बरिपरि परिक्रमण गरी स्थानान्तरण गर्नुलाई परिक्रमण भनिन्छ । संगैको चित्रमा रेखाखण्ड AB लाई विन्दु O को बरिपरि घडीको सुईको विपरीत वा धनात्मक दिशामा परिक्रमण गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $A'B'$ हो ।

संगैको चित्रमा ΔPQR लाई घडीको सुईको दिशा वा ऋणात्मक दिशामा विन्दु O को बरिपरि 60° परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta P'Q'R'$ हो । ΔPQR र $\Delta P'Q'R'$ नापी हेर ।



माथिका उदाहरणहरूको आधारमा के तिमीहरू परिक्रमणका बारेमा निम्न कुराहरू भन्न सक्छौ ? परिक्रमणको विन्दु, कोण र दिशा दिइएमा ज्यामितीय आकृतिलाई परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब पत्ता लगाउन सकिन्दू ।

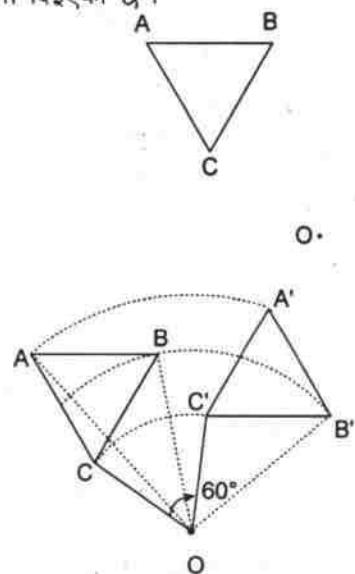
- घडीको सुईको दिशामा भएको परिक्रमणलाई ऋणात्मक परिक्रमण र घडीको सुईको उल्टो दिशामा भएको परिक्रमणलाई धनात्मक परिक्रमण भनिन्दू ।

- परिक्रमणले समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिलाई एउटै दिशा र उत्तिकै कोणमा स्थानान्तरण गर्दछ ।
- परिक्रमणमा आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

दिइएको ज्यामितीय आकृतिलाई परिक्रमण गर्ने तरिका तलको उदाहरणमा दिइएको छ ।

उदाहरण 1

संगैको चित्रमा दिइएको $\triangle ABC$ लाई बिन्दु O को वरिपरि 60° को क्रृणात्मक दिशामा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब खिचेर देखाउ ।



उत्तर :

तरिका

(क) A र O जोड । O लाई केन्द्र र OA अर्धव्यास लिएर बिन्दु A लाई 60° को क्रृणात्मक दिशामा परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब A' चिह्न लगाऊ ।

(ख) B र O जोड । O लाई केन्द्र र OB लाई अर्धव्यास लिएर बिन्दु B लाई 60° को क्रृणात्मक दिशामा परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब B' चिह्न लगाऊ ।

(ग) C र O जोड । O लाई केन्द्र र OC लाई अर्धव्यास लिएर बिन्दु C लाई 60° को क्रृणात्मक दिशामा बिन्दु O को वरिपरि परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब C' चिह्न लगाऊ ।

रूलरको सहायताले $A'B'C'$ क्रमसँग जोड्दा बन्ने त्रिभुज $A'B'C'$ को 60° को क्रृणात्मक दिशामा बिन्दु O को वरिपरि भएको परिक्रमणको प्रतिविम्ब हो ।

उदाहरण 2

$A(3,2)$, $B(5,2)$ र $C(3,-2)$ त्रिभुज ABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । $\triangle ABC$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर र उदगम बिन्दु O को वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गर र प्रतिविम्ब $\triangle A'B'C'$ का शीर्षबिन्दुका निरैशाङ्कहरू लेख ।

उत्तर: $\triangle ABC$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

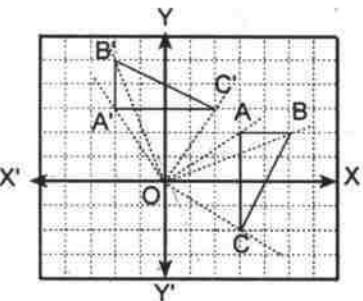
$\triangle ABC$ लाई उद्गम बिन्दु O को वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा परिकमण गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\triangle A'B'C'$ हो ।

$\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का निर्देशाङ्कहरू निम्नानुसार छन् ।

$$A(3,2) \rightarrow A'(-2,3)$$

$$B(5,2) \rightarrow B'(-2,5)$$

$$C(3,-2) \rightarrow C'(2,3)$$

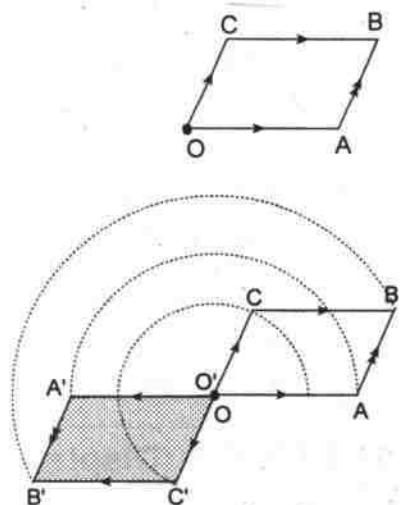


उदाहरण ३

सँगैको चित्रमा दिइएको चतुर्भुज $OABC$ लाई केन्द्रबिन्दु O को वरिपरि 180° को धनात्मक दिशामा परिकमण गर र यसरी बन्ने प्रतिविम्बको चित्र खिचेर देखाउ ।

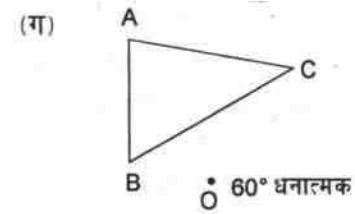
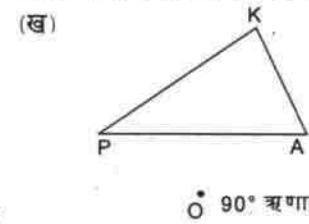
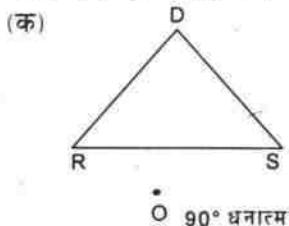
उत्तर:

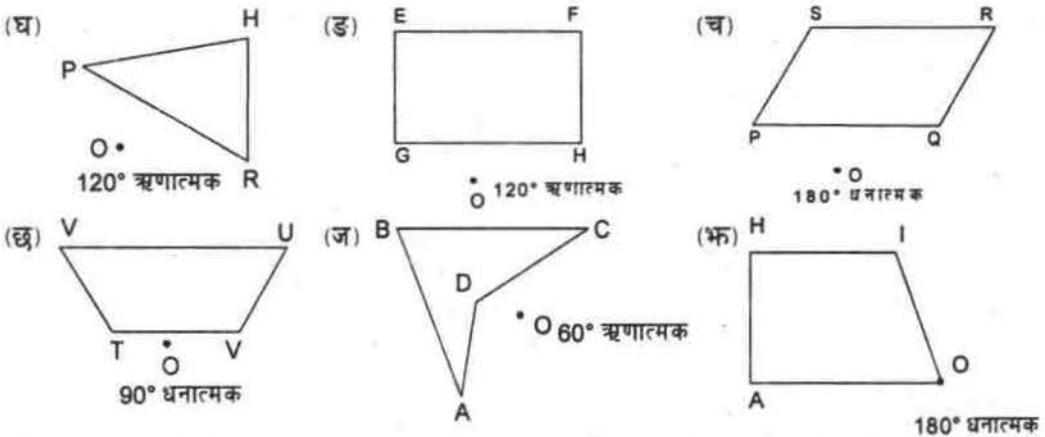
चतुर्भुज $\square OABC$ लाई बिन्दु O को वरिपरि 180° को धनात्मक दिशामा परिकमण गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $R, OA'B'C'$ हो ।



अध्यात्म 21.2

1. तल दिइएका ज्यामितीय आकृतिलाई परिकमणको केन्द्रबिन्दु O र दिएको दिशा तथा कोणमा परिकमण गर र यसरी बन्ने प्रतिविम्बको चित्र खिचेर देखाउ ।

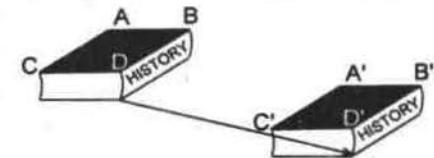




2. विन्दुहरू $A(2,3)$ र $B(-1,7)$ लाई 90° धनात्मक दिशामा विन्दु O को वरिपरि परिकमण गर र प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू पनि लेख ।
3. $P(3,1)$, $Q(5,0)$ र $R(3,-1)$ एउटा त्रिभुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔPQR लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी विन्दु O को वरिपरि 90° को ऋणात्मक दिशामा परिकमण गर र यसरी बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू पनि लेख ।
4. $A(1,5)$, $B(5,5)$, $C(6,-5)$ र $D(1,-2)$ एउटा चतुर्भुज $ABCD$ का शीर्षविन्दुहरू हुन् । चतुर्भुज $ABCD$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी विन्दु O को वरिपरि 180° मा परिकमण गर र यसरी बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू लेख ।

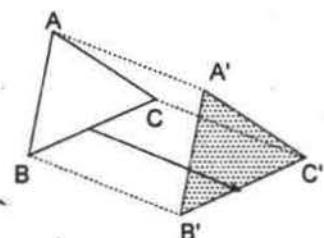
21.3 विस्थापन (Displacement)

संगैको चित्रमा एउटा पुस्तक $ABDC$ छ । पुस्तक $ABDC$ लाई सार्दा (घचेटदा) $A'B'D'C'$ बनेको छ । यहाँ, AA' , BB' , CC' र DD' को सम्बन्ध के होला ।



क्रियाकलाप ।

- (क) सेट स्वचायरको एउटा त्रिकोणलाई कपीमाथि राख्नेर ट्रेस गर । त्यसको नाम ΔABC राख ।
- (ख) त्यो त्रिकोणलाई ΔABC माथि पहिलेजस्तै गरी राखी सोही कापीको पानामा अलिकति घचेटेर पर सार ।
- (ग) सो ठाउँमा सोही त्रिकोण ट्रेस गर र $\Delta A'B'C'$ खिच । अब AA' , BB' , CC' जोड र नाप । के $AA' = BB' = CC'$ छन् ? के AA' , BB' , CC' तीनौटा रेखाहरू समानान्तर छन् ?



यसरी समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिका हरेक विन्दुलाई उत्तिकै दूरी र उही दिशामा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन भनिन्छ । त्यसैले विस्थापनलाई परिभाषित गर्नका लागि विस्थापनको परिमाण वा नाप र दिशा उल्लेख गर्नुपर्दछ ।

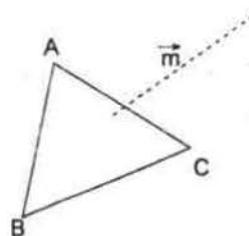
विस्थापनमा आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्दैन ।

कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई विस्थापन गर्ने तरिका तलको उदाहरणमा उल्लेख गरिएको छ ।

परिमाण र दिशा दुवै भएको मानलाई भेक्टर भनिन्छ ।

उदाहरण 1

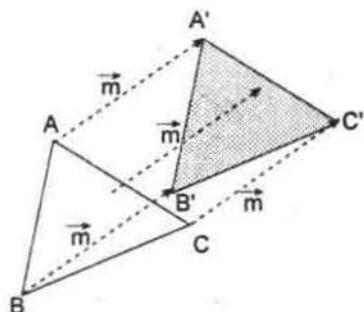
संगैको चित्रमा दिइएको $\triangle ABC$ लाई भेक्टर m को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर ।



तरिका :

- A बाट m सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी AA' खिच ।
- B बाट m सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी रेखा BB' खिच ।
- C बाट रेखा m सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी रेखा CC' खिच ।
- A', B', C' क्रमसँग जोड ।

यसरी बनेको $\triangle A'B'C'$ नै $\triangle ABC$ को विस्थापित प्रतिविम्ब हो ।

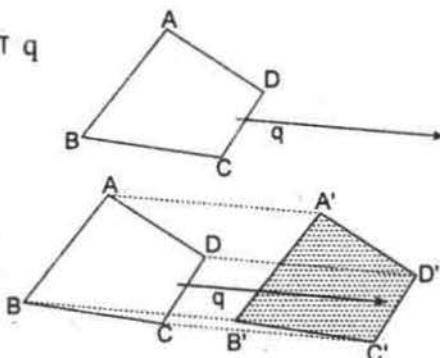


उदाहरण 2

संगैको चित्रमा दिइएको चतुर्भुज $ABCD$ लाई दिएको रेखा q को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर ।

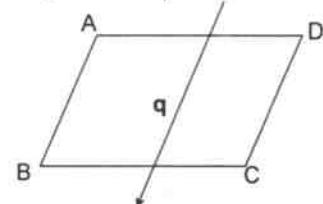
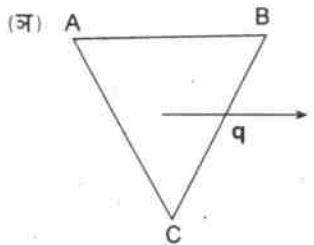
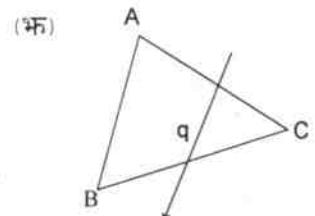
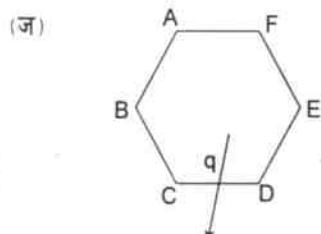
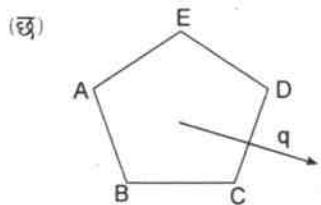
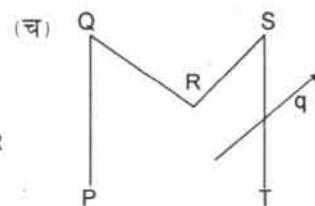
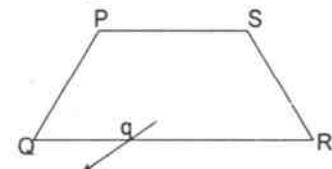
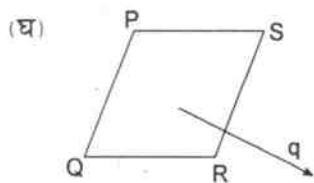
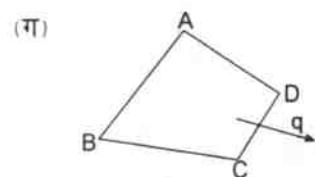
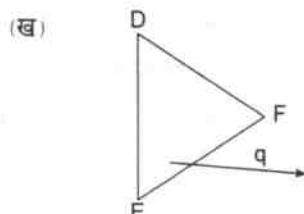
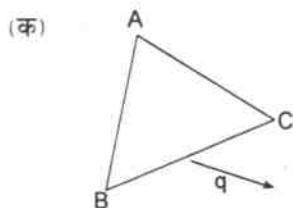
उत्तर :

चतुर्भुज $ABCD$ लाई दिएको रेखा q को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $A'B'C'D'$ हो ।



अध्यात्म 21.3

1. तल विहारका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिएको भेक्टर \vec{q} को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको चित्र खिचि छाया पारेर देखाऊ ।



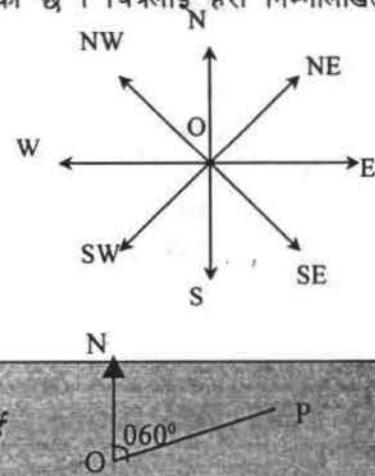
22.1 दिशास्थिति (Bearing)

क्रियाकलाप 1

सर्गैको चित्रमा कम्पासबाट देखिने दिशाहरूलाई रेखाङ्कन गरिएको छ । चित्रलाई हेरी निम्नलिखित दिशाहरू विचको कोण तीन अड्कमा निकाल ।

- (क) उत्तर (N) र उत्तर पूर्व (NE) = 045°
- (ख) उत्तर पूर्व (NE) (ग) उत्तर र दक्षिण पूर्व (SE)
- (घ) उत्तर र दक्षिण (S) (ङ) उत्तर र दक्षिण पश्चिम (SW)
- (च) उत्तर र पश्चिम (W) (छ) उत्तर र उत्तर पश्चिम (NW)
- (ज) उत्तर र उत्तर (N)

यी सबै प्रश्नमा कुन एउटा कुरा समान छ ?



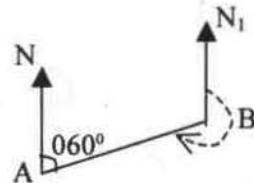
उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार मानी घडीका दिशामा कुनै दुई स्थानको दुरी 3 अड्कमा कोणको रूपमा व्यक्त गर्ने तरीकालाई दिशा स्थिति (*Three figure bearing*) वा कम्पास दिशा स्थिति (*Compass-bearing*) भनिन्छ । चित्रमा O बाट P को दिशा स्थिति 060° ले जनाइएको छ ।

उदाहरण 1

कुनै स्थान A बाट अर्को स्थान B को दिशास्थिति 060° छ भने स्थान B बाट स्थान A को दिशा स्थिति कति होला ?

उत्तर:

चित्रबाट, B बाट A को दिशा स्थिति
 $= 360^\circ - (\text{भित्री कोण } N_1 BA)$
 $= 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$



अध्यात्म 22.1

1. तलका प्रत्येक कम्पास दिशास्थितिलाई कोणमा लेख ।
- (क) उत्तर-पूर्व (NE) (ख) उत्तर-उत्तर-पूर्व (NNE)
 - (ग) उत्तर-पश्चिम (NW) (घ) उत्तर-उत्तर-पश्चिम (NNW)

2. एउटा हवाईजहाज काठमाडौंबाट 090° को दिशामा दैडिरहेको थियो । केहि किलोमिटर उडेपछि जहाजले दिशा बदलेर 300° को दिशामा उड्न थालेछ भने जहाजले कति डिग्रीको कोणमा दिशा परिवर्तन गरेको रहेछ ?
3. पोखराबाट काठमाडौंको दिशास्थिति कति होला ?
4. संगैको चित्रमा मध्यमाञ्चल विकास क्षेत्रका केहि स्थानहरु देखाइएको छ । चित्रलाई अभ्यास पुस्तिकामा ट्रेस गर र काठमाडौंलाई आधार मानी निम्नलिखित स्थानहरुको दिशास्थिति 3 अङ्कमा व्यक्त गर ।

- (क) गोसाइकुण्ड
- (ख) तातोपानी
- (ग) देवघाट
- (घ) दोलखा
- (ङ) पलान्चोक भगवती
- (च) पनौती
- (छ) जनकपुर



22.2 रूपेख द्राहित (Scale Drawing)

- (क) रूपेखको परिचय (Introduction to Scale)
काठमाडौं उपत्यका (धार्मिक स्थलहरु)



चित्रमा काठमाडौं उपत्यकाका केही महत्वपूर्ण धार्मिक स्थलहरू $1\text{cm} = 2\text{ km}$ (1:2000000) को स्केलमा रेखाइकन गरिएको छ । तलका प्रत्येक स्थान बीचको दूरी (नक्शामा) cm Scale मा नाप र वास्तविक दूरी पत्ता लगाउ ।

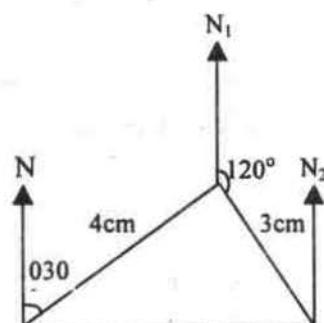
- | | | |
|-----|-------------------------------|---|
| (क) | बालाजु र बूढानीलकण्ठ | $= 4\text{cm} = 4 \times 2\text{ km} = 8\text{ km}$ |
| (ख) | बालाजु र काठमाडौं | (ग) पाटन र काठमाडौं |
| (घ) | सूर्यीविनायक र चाँगुनारायण | (ड) पशुपतिनाथ र गोकर्णश्वर । |
| (ख) | दिशा स्थितिसहितको स्केल ड्रइड | |

उदाहरण 2

एउटा हवाईजहाज 030° दिशामा 400km र 120° को दिशामा 300km उडान गर्दै भने सुरुको स्थानबाट अन्तिम स्थानसम्मको दुरी र अन्तिम स्थानसम्मबाट सुरुको स्थानको दिशा स्थिति $1\text{cm} = 100\text{km}$ को स्केल ड्रइड गरी पत्ता लगाउ ।

उत्तर :

चित्रमा सुरुको स्थान = A
 अन्तिम स्थान = B
 $AB = 5\text{cm}$ छ
 त्यसैले दूरी = $5 \times 100\text{km}$
 $= 500\text{km}$ हुन्छ ।



अब चित्रबाट $\angle ABN_2$ नाप्दा $\angle ABN_2 = 113^\circ$ छ ।

त्यसैले बाहिरी कोण = $360^\circ - 113^\circ$

त्यसैले दोस्रो स्थानबाट पहिलो दिशा = 247°

अध्यात्म 22.2

1. एउटा जहाजले A स्थानबाट 080° दिशास्थितमा B स्थान सम्म 80km र B स्थानबाट C स्थान सम्म 060° को दिशा स्थितमा 100km को यात्रा पूरा गरेछ । $1\text{cm} = 20\text{km}$ स्केल लिई ड्रइड गर र निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर पत्ता लगाऊँ :
 - A स्थानबाट C सम्मको दूरी कति होला ?
 - A स्थानबाट C को दिशास्थित कति होला ?
 - C स्थानबाट A को दिशास्थित कति होला ?

2. पाटनबाट सूर्यविनायकको दूरी 9.6km र सूर्यविनायकबाट गोदावरीको दूरी 6.8km छ । $1\text{cm} = 2\text{km}$ को स्केल ड्रइड गरी,
 - पाटनबाट गोदावरीसम्मको दूरी
 - पाटनबाट गोदावरीको दिशास्थिति
 - गोदावरीबाट पाटनको दिशास्थिति पत्ता लगाऊँ ।
(माथि परिचयमा दिइएको नक्शाबाट दिशास्थिति पत्ता लगाऊँ)

3. 120km को दूरीमा पर्ने दुई स्थानहरू A र B बाट अर्को स्थान C लाई जमिनको नापी गर्ने अमिन (Surveyor) ले अबलोकन गर्दा $\angle ABC = 65^\circ$ र $\angle BAC = 55^\circ$ पाएछन् । उचित स्केल छानी स्केल ड्रइड गर र निम्नलिखित कुरा पत्ता लगाऊँ :
 - A देखि C सम्मको दूरी
 - B देखि C सम्मको दिशास्थिति

4. एउटा गाडी T स्थानबाट 200km पूर्वको स्थान S मा पुगेको छ । गाडीले S बाट अर्को पश्चिममा पर्ने स्थान U मा 300km को यात्रा गरेछ । यो जानकारीलाई स्केल ड्रइड गरी निम्नलिखित कुरा पत्ता लगाऊँ :
 - T बाट U सम्मको दूरी
 - U बाट T सम्मको दिशास्थिति

उत्तराला (Answers)

1. समूह

अभ्यास 1.1

(पेज 2)

1. A 2. B 3. (a) { }, {4}, {5} (b) { }, {a}, {b}
- (c) { }, {2}, {3}, {4}, {2, 3}, {3, 4}, {2, 4} (d) { }, {p}, {q}, {r}, {p, q}, {q, r}, {p, r}
4. (i) $E \subset U$ (ii) $F \subseteq U$ (iii) $G \subset U$
5. (i) $A \subset M$ (ii) $B \subseteq M$; (iii) $C \subset M$ (iv) $D \subset M$
6. (i) $B \subset A$ (ii) $C \subset A$
7. $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, उपयुक्त समूहहरू $A = \{3, 9, 15\}$, $R = \{6, 12\}$
अनुपयुक्त समूह $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

अभ्यास 1.2

(पेज 4)

1. (क) {2, 3, 4, 5} (ख) {2, 3, 6, 7} (ग) {0, 1, 6, 7, 8, 9}
(घ) {0, 1, 4, 5, 8, 9} (ड) {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (च) {0, 1, 8, 9}
(छ) {0, 1, 8, 9} (ज) {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (झ) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
(ञ) \emptyset (ट) {6, 7} (ठ) {4, 5}
2. (क) $\overline{A \cup B} = \{0, 1, 8, 9\} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (ख) {0, 4, 5, 6} = $\overline{A} \cup \overline{B}$
3. (क) शिक्षकलाई देखाऊ। (ख) $A \cap B = B$ वा $B \subset A$ भएमा $\overline{A \cap B} = \overline{B}$ ले लेण्ठ सकिन्दै।
4. (क) शिक्षकलाई देखाऊ।
(ख) (i) {4, 5, 7, 8, 9, 10} (ii) {3, 5, 6, 7, 9, 10} (iii) {2, 4, 5, 6, 7, 8, 10}
(iv) {5, 7, 9, 10} (v) {5, 6, 7, 10} (vi) {4, 5, 7, 8, 10}
(vii) {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (viii) {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (ix) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
(x) {5, 7, 10} (xi) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
5. (i) {1, 3, 5} (ii) {2, 4} (iii) {1, 4, 5} (iv) {2, 4} (v) {2, 3, 5} (vi) {2, 3}
भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ।

अभ्यास 1.3

(पेज 6)

1. शिक्षकलाई देखाऊ। 2. $A - B = A - (A \cap B)$ 3. शिक्षकलाई देखाऊ।
4. (क) ठीक (ख) बेठीक (ग) बेठीक (घ) ठीक

2. पूर्णसंदर्भ

अभ्यास 2.1

(पेज 8)

1. (क) 110010101 (ख) 1000010111₂ (ग) 111111₂ (घ) 10011010010₂
(क) 14 (ख) 31 (ग) 50 (घ) 21
2. (क) 111₂ (ख) 111₂ (ग) 1111₂ (घ) 1111₂
(ड) 1000₂ (च) 1001₂ (छ) 10101₂ (ज) 10000₂ (झ) 10000₂
(ञ) 10010₂ (ट) 11000₂ (ठ) 101000₂
3. (क) 1₂ (ख) 10₂ (ग) 100₂ (घ) 1001₂ (ड) 10₂
(च) 11₂ (छ) 1110₂ (ज) 111₂ (झ) 110₂ (ञ) 100₂
(ट) 10₂ (ठ) 1111₂

5. (क) 1011_2 ,
(च) 0

(ख) 1111_2

(ग) 111_2

(घ) 10000_2

(ङ) 1111_2

अभ्यास 2.2

(पेज 13)

- | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|------------------|----------------------|
| 1. (क) 51 | (ख) 99 | (ग) 551 | (घ) 329 |
| 2. (क) 4400, | (ख) 4143, | (ग) 10401, | (घ) 34133, |
| 3. (क) 100, | (ख) 111101001_2 , | (ग) 103, | (घ) 1001001010_2 , |
| 4. (क) 11000010_2 , | (ख) 10000111_2 , | (ग) 101001_2 , | (घ) 10000010_2 , |
| 5. (क) 1010_2 , | (ख) 1000, | (ग) 344, | (घ) 1413, |
| (द) 1324, | (च) 1120, | (छ) 11230, | (ज) 10131, |
| (फ) 12200, | (ट) 11000, | (ट) 4031, | (ठ) 13012, |
| 6. (क) 131, | (ख) 11, | (ग) 204, | (घ) 40, |
| (द) 312, | (च) 23, | (छ) 40, | (ज) 30, |
| 7. 1000000001, | 8. $111011_2 > 123$, अन्तर = 21 | | |

3. वर्गमूल र घनमूल

अभ्यास 3.1

(पेज 16)

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 1. (क) ± 16 | (ख) ± 25 | (ग) ± 13 | (घ) ± 26 |
| (द) ± 22 | (च) ± 58 | (छ) ± 32 | (ज) ± 75 |
| (फ) ± 45 | (ट) ± 57 | (ट) ± 35 | (ठ) ± 81 |
| 2. (क) ± 85 | (ख) ± 124 | (ग) ± 426 | (घ) ± 252 |
| (द) ± 168 | (च) ± 123 | (छ) ± 407 | (ज) ± 253 |
| (फ) ± 108 | (ट) ± 54 | (ट) ± 67 | (ठ) ± 85 |
| (थ) ± 309 | (द) ± 1346 | (ण) ± 807 | (त) ± 905 |
| (ए) ± 125 | (द) ± 128 | (घ) ± 145 | (न) ± 148 |
| 3. (क) 6 | (ख) 96 | (ग) 225 | (घ) 45 |
| (द) $3\sqrt{2}$ | (च) $5\sqrt{2}$ | (छ) $4\sqrt{5}$ | (ज) $12\sqrt{7}$ |
| (फ) 6 | (ट) 8 | (ट) 12 | (ठ) 10 |

अभ्यास 3.2

(पेज 17)

- | | | | |
|-------------|---------------|---------------|---------------|
| 1. (क) 27 | (ख) 729 | (ग) 1331 | (घ) 2197 |
| (द) 373248 | (च) 5929741 | (छ) 1259712 | (ज) 1520875 |
| (फ) 2924207 | (ट) 238328000 | (ट) 343000000 | (ठ) 274625000 |
| 2. (क) 12 | (ख) 16 | (ग) 21 | (घ) 22 |
| (द) 15 | (च) 14 | (छ) 36 | (ज) 45 |
| (फ) 28 | (ट) 40 | (ट) 90 | (ठ) 320 |
| 3. 656 | 4. 441 | 5. 10 | 6. 17 |

4. अनुपातीकरण

अभ्यास 4.1

(पेज 18)

1. (क) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ (ख) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (ग) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (घ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (ङ) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
- (च) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ (छ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ज) $\sqrt{3}$

अभ्यास 4.2

(पेज 20)

1. (क) $8\sqrt{6}$ (ख) $3\sqrt{5}$ (ग) $-5\sqrt{3}$ (घ) $-2\sqrt{2}$ (ङ) $-6\sqrt{7}$ (च) $6\sqrt{10}$
2. (क) $3\sqrt{10}$ (ख) $3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$ (ग) $\sqrt{7} - 1$ (घ) $8\sqrt{2} - 2(3)$
3. (क) $2\sqrt{5}$ (ख) $5\sqrt{3}$ (ग) $7 - 2\sqrt{7}$ (घ) $6\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (ङ)
4. (क) $\frac{4\sqrt{15}}{10}$ (ख) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (ग) $7\sqrt{3}$ (घ) 0 (ङ) $6\sqrt{3} - \sqrt{2}$

अभ्यास 4.3

(पेज 22)

1. (क) 6.210^6 (ख) 3.810^8 (ग) 3.2810^7
(घ) 3.610^5 (छ) 2.7610^2 (च) 5.210^3
(ज) 8.310^7 (ट) 9.010^7 (झ) 2.4×10^4
2. (क) 3800000 (ख) 25000 (ग) 37200000
(घ) 25000 (छ) 44600000 (च) 0.0000025 (झ) 0.00000037
(ज) 0.0000000028 (झ) 0.000000000315
3. (क) 4.69(102) (ख) 1.01(107) (ग) 1.01 (घ) 1.0410^4
4. (क) 3.37510^3 (ख) -1.210^2 (ग) 3.676×10^4 (घ) -6.10510^6
5. (क) 9×10^8 (ख) 7×10^9 (ग) 9.5001710^7 (घ) 1.410^{11}
(छ) 1.2×10^1 (च) 4×10^1 (झ) 5.7799957×10^2
6. (क) 2.510^7 (ख) 4.2710^7 वर्ग कि.मि. (ग) 6.6610^{10} मि.
(घ) 1×10^4 वर्ग कि.मि. (छ) 1×10^{12} वर्ग मि. (च) 2.5×10^3 (झ) 8.848×10^3
(ज) 5.256×10^3 (झ) 3.1536×10^7
7. 227760 घण्टा, 2.2776×10^5 8. 1025280 मिनेट, 1.025280×10^6

5. आनुपातिक र अनानुपातिक सदृश्याहरू

अभ्यास 5.1

(पेज 25)

1. अनुपातिक सदृश्याहरू: (ख) $\sqrt{2}$ (घ) $\sqrt{5}$ (छ) $\sqrt{7}$ (ज) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 2. साँचो: ख, ग र घ भुटो: (क), (छ) र, (च)

अभ्यास 5.2

(पेज 27)

1. (क) 1.06 (ख) 0.271 (ग) 0.005 (घ) 28 (छ) 0.047 (च) 143.5 (झ) 260
2. 3.143 3. (क) 0.67 (ख) 0.667 (ग) 0.6667
4. (क) 11.19cm^2 (ख) 11.2cm^2 5. 101.06 cm^2 6. 230.4 cm^2 7. 641.1 cm^2

6. अनुपात, समानुपात र प्रतिशत

अभ्यास 6.1

(पेज 30)

1. (क) $\frac{4}{7}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{9}{20}$ (घ) $\frac{8}{3}$ (ङ) $\frac{3}{8}$ (च) $\frac{1}{240}$
2. (क) $x = 1$ (ख) $x = 5$ (ग) $x = 9$ (घ) $x = 36$
3. (क) $a = \frac{3b}{4}$ (ख) $c = \frac{7b}{5}$ (ग) $a:c = 15:28$
4. 60 ओटा 5. 2km 6. ₹ 22000 7. 5 ₹ 7
8. ₹ 24 ₹ 20 ₹ 16 9. ₹ 120000, ₹ 200000 र ₹ 280000
10. A को खर्च ₹ 70, B को खर्च ₹ 140 र C को खर्च ₹ 280

अभ्यास 6.2

(पेज 32)

1. (क) छन् (ख) छन् (ग) छैनन् (घ) छैनन्
2. (क) 8 (ख) 14 (ग) 1 (घ) 18
3. (क) 1 (ख) 5 (ग) 9 (घ) 36 4. 80 5. ₹ 140 6. 5 घण्टा 7. ₹ 270
8. 20 जना 9. 12N 10. (क) 93 जना र 155 जना (ख) 93:155:34

अभ्यास 6.3

(पेज 35)

1. (क) ₹ 2000 (ख) ₹ 2000 (ग) 400 दिन (घ) 2400 जना
(ङ) 200 जना (च) 2/ (छ) 50 m
2. 10 जना, 200 जना
3. (क) 80% (ख) 20% (ग) 60 जना
4. आइतबार 644 जना, सोमवार 623 जना, मंगलवार 651 जना, बुधवार 665 जना, विहीनवार 672 जना, शुक्रवार 581 जना
5. (क) खानामा ₹ 2100, कपडामा ₹ 1260, शिक्षामा ₹ 1750, औषधिमा ₹ 350, अन्यमा ₹ 840
(ख) 10% (ग) ₹ 700
6. (क) 20000 जना (ख) 13000 जना 7. 24449400 जना
8. ₹ 1600
9. ₹ 300000 10. 118800 जना 11. ₹ 10120
12. ₹ 1500 13. 8% 14. ₹ 1200 15. ₹ 279
16. पाइन्ट SALE मूल्यमा, छुट % भन्दा ₹ 3.25 सस्तो पर्दै।
सट छुट प्रतिशतमा, SALE मूल्यभन्दा ₹ 5 सस्तो पर्दै।
ट्राकसुट छुट प्रतिशतमा, SALE मूल्यभन्दा 10 पैसा सस्तो पर्दै।

7. नाफा र नोकसान

अभ्यास 7

(पेज 39)

1. नोकसान ₹ 175
2. नाफा % = $33\frac{1}{3}\%$ (क्रयमूल्य)
3. छुट प्रतिशत = 4.15% 4. ₹ 45 5. ₹ 10450 6. ₹ 162000
7. ₹ 5400 विक्रयमूल्य 8. 25% नाफा 9. ₹ 1280 10. ₹ 720
11. नाफा ₹ 450, 15% 12. घाटा = 20% 13. ₹ 20000 14. (क) ₹ 1257.14 (ख) ₹ 1320

8. एकिक नियम

अभ्यास 8

(पेज 42)

1. ₹ 75 2. ₹ 11000 3. 13 जना 4. ₹ 900 5. 80 जना
 6. 18 जना 7. 8000 मिनेट 8. 3 दिन, 21 दिन 9. 2 जना, ₹ 2550
 10. (क) 180 कि. मि. (ख) 13 लिटर 11. 18 जना 12. 10 जना

9. साधारण ब्याज

अभ्यास 9.

(पेज 46)

1. ₹. 6625 2. 12% प्रतिवर्ष 3. सावा ₹ 3,200, मिश्रधन ₹ 3,240 4. ₹. 1250
 5. 6 वर्ष 6. ₹. 7200 7. ₹. 55,500 8. ₹ 600 9. 10% प्रतिवर्ष
 10. 25% 11. 2.5 वर्ष 12. ₹ 2500 13. ₹ 1728, 8 वर्ष 14. ₹ 432, 4 वर्ष

10. तथ्याङ्कशास्त्र

अभ्यास 10.1

(पेज 48)

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ।

अभ्यास 10.2

(पेज 52)

1. (क) 6.75 (ख) 15cm (ग) ₹ 24 (घ) 13kg (ड) 36.5cm
 2. (क) 5.6 मिनेट (ख) 5.6 मिनेट (घ) ₹. 252
 3. (क) ₹ 2096.10 (ख) (i) ₹ 62883 (ii) ₹ 765076.50 (ग) ₹ 229522.95
 4. 42.4kg 5. 10.6 वर्ष 6. 32 जना 7. (क) 2.9 मिनेट (ख) 16 (ग) 8.61 (घ) 36

अभ्यास 10.3

(पेज 54)

1. (क) मध्यिका = 9 र मध्यक = 8.8 (ख) मध्यिका = ₹ 5 र मध्यक = ₹ 5
 (ग) मध्यिका = 3kg र मध्यक = 4kg (घ) मध्यिका = 4.5cm र मध्यक = 5cm
 (ड) मध्यिका = 6.5 र मध्यक = 7
 2. (क) 5 (ख) 4/4 जना

अभ्यास 10.4

(पेज 56)

1. (i) $Q_1 = 52, Q_2 = 61 \text{ र } Q_3 = 68$ (ii) $Q_1 = 5, Q_2 = 7 \text{ र } Q_3 = 11$
 (iii) $Q_1 = 40, Q_2 = 100 \text{ र } Q_3 = 140$ (iv) $Q_1 = 3, Q_2 = 4 \text{ र } Q_3 = 5$
 2. $Q_1 = 41.5, Q_2 = 47.5 \text{ र } Q_3 = 73$ 3. $Q_1 = 13.25, Q_2 = 17.5 \text{ र } Q_3 = 20.75$

अभ्यास 10.5

(पेज 57)

1. (क) 6 (ख) ₹ 3 (ग) 5 cm (घ) 13kg (ड) 12 cm 2. 2.5cm

अभ्यास 10.6

(पेज 58)

1. (क) 120cm (ख) 95cm (ग) 25cm 2. (क) ₹ 27 (ख) ₹ 10 (ग) ₹ 17
 3. (क) 5 (ख) 22cm (ग) 45kg (घ) 7/

अभ्यास 10.7

(पेज 60)

1. (क) कक्षा 3 (ख) 140 जना (ग) 720 जना
 2. (i) 120 (ii) 160 (3) देखि (6) सम्म शिक्षकलाई देखाऊ।

अभ्यास 10.8

(पेज 63)

1 र 2 शिखकलाई देखाऊ।

3. (क) हजारका 80 ओटा (ख) पाँच र दशका 45/45 ओटा, बीस र पचवीसका 30/30 ओटा

4. 8 वर्ग एकाइ

11. अभिव्यञ्जक**अभ्यास 11.1**

(पेज 65)

1. बहुपदिय (क) (घ) र (ड) 2. एकपदीय (ग), द्विपदीय (ख) र (घ), त्रिपदीय (क), (ड) र (च)
 3. (क) 2 (ख) 2 (ग) 3 (घ) 5 (ड) 6
 4. (क) (a) 101 (b) 12 (ख) 38 (ग) 19 (घ) 2 5. 81 6. 71 7. 8 8. 133

अभ्यास 11.2.1

(पेज 67)

1. (क) x^2+5x+6 (ख) p^2+2p-3 (ग) a^2-6a+8 (घ) $r^2-2r-48$
 (ड) $c^2+11c+24$ (च) $x^2-4x-96$
 2. (क) $4a^2+9a-9$ (ख) $6x^2-29x+35$ (ग) $2x^2+xy-21y^2$ (घ) $2a^2+9ab+9b^2$
 (ड) $14x^2+22xy-16y^2$ (च) $21x^2-xk-2k^2$ (घ) $121x^2-144y^2$ (ड) $acx^2+adxy+bcxy+bxy^2$
 (ज) $-8p^2+30pq-25q^2$ (फ) $15p^2-44py+32y^2$
 3. (क) $2a^2+22a+54$ (ख) $-2x+4$ (ग) $x^2+10x-66$ (घ) $-4p^2-46p+138$

अभ्यास 11.2.2

(पेज 68)

1. (क) a^2-4 (ख) x^2-9 (ग) $16-p^2$ (घ) x^2-y^2
 (ड) m^2-n^2 (च) a^2-b^2 (ज) $9x^2-4$ (म) m^2-81
 (फ) $16-25x^2$ (न) x^2-9y^2 (ट) k^2-4m^2 (ठ) $25p^2-t^2$
 (ड) $64h^2-k^2$ (द) $100x^2-121y^2$ (ग) $64m^2-81n^2$
 2. (क) 99 (ख) 2499 (ग) 3596 (घ) 6396 (ड) 2491 (च) 6375

अभ्यास 11.2.3

(पेज 69)

1. (क) $am+an+ar+bm+bn+br$ (ख) $pq+pr+3p-2q-2r-6$
 (ग) $3ax-2x+cx-3ay+2y-cy$ (घ) $2ax-bx-cx-6a+3b+3c$
 (ड) $2a^2-3ab-3ac+b^2+3bc$ (च) $9x^2-24xy+3xz+12y^2-6yz$
 (ज) $ax-ay-2a^2+ab+bx-by+3b^2$ (ज) $2px-3py-ap+2bp-2qx+3qy+aq-2bq$
 (म) $mx-my-2am+3bm-2nx+2ny+4an-6nb$ (ज) $9x^2-9xy+3ax+3bx+2y^2-2ay-2by$
 (ट) $2p^2+5pq-pr-25p+3q^2-qr-25q$ (ठ) $10a^2+ab-20a^2b-30abc-9b^2+18ab^2-27b^2c$
 2. (क) $a^2-b^2-c^2+2bc$ (ख) $2a^2-7ab-3ac+6b^2+4bc-2c^2$
 (ग) $m^2-3mn+m+2n^2+n-6$ (घ) $5pr-2p^2-11qr+6q^2+pq+3r^2$
 (ड) $-10a^2-9b^2+2c^2+21ab+3bc+ac$ (च) $12x^2+3y^2+2z^2-13xy-11xz+7yz$
 (ज) $2x^2-3xy-3ax+2bx+y^2+ay-by-2a^2+ab$ (ज) $2a^2-5ac+2ad+ad-3b^2-5bc+3bd+2c^2-cd$
 (फ) $2x^2+2y^2+12z^2+10xz-ax+xy-11yz+2ay-3az$
 (ग) $10m^2-180n^2-3s^2-191mn-29ms-10mp-47ns-9pn-ps$
 (ट) $12p^2-21q^2+4r^2+4pq+26pr+6ps+25qr-7qs-rs$
 (ठ) $50a^2-72b^2-105c^2-80ad+174bc-96bd-5ac-120cd$

अभ्यास 11.3.1

(पेज 71)

1. (क) $2x - 3y + 6$ (ख) $x^3 - 2x^2 + x$ (ग) $5x^3 - 3x^2 + 5$ (घ) $p^2 + 2pq + 3q^2$
(द) $x + 2xy + y$ (च) $2pq + 3p - 4q$ (छ) $-5x^4 - \frac{5x^3}{3} + \frac{10x}{3}$
2. (क) $5x^2 + 5x - \frac{9}{2}$ (ख) $4y^2 + 9y - 8$ (ग) $2x + 3$ (घ) $x - 4$
3. (4x+3) एकाइ 4. (28x-15y) एकाइ

अभ्यास 11.3.2

(पेज 72)

1. (क) $x + 4$ (ख) $x - 3$ (ग) $x + 7$ (घ) $x - 4$ (द) $x + 5$ (च) $y - 4$
(द्व) $3x - y$ (ज) $3x + 2y$ (फ) $2x + 3y$ (अ) $3x + 5y$
(ट) $4x - 10y$ र शेष $-12y^2$ (ठ) $5x + 11y$ र शेष $-2y^2$
(ड) $7x - y$ र शेष $-2y^2$ (ढ) $4x + 3y$ (ण) $5x - 6y$
(त) $x^2 + 3x + 4$ शेष 110 (थ) $x^2 - 4x - 6$ (द) $2x^2 - 4x + 1$ र शेष -16
2. (x+3) एकाइ 3. (x+5) एकाइ 4. $\ell(2x-3)$ 5. $\ell(x+2)$

अभ्यास 11.3.3

(पेज 74)

1. $a+5$ 2. $a+2$ 3. $x+4$ 4. $x+5$ 5. $x-2$
6. $y+3$ 7. $2y-1$ 8. $3p+1$ 9. $3q+5$ 10. a^2+2a+1

अभ्यास 11.4

(पेज 76)

1. (क) a^5 (ख) $-12p^6$ (ग) x^2 (घ) $-\frac{6}{y}$ (द) $\frac{10}{z}$ (च) Kh^{m+3}
2. (क) p (ख) $\frac{1}{x^5}$ अथवा x^{-5} (ग) z (घ) $-\frac{4}{a}$ (द) $\frac{3x^6}{2}$ (च) q^{3-2m}
3. (क) x^{12} (ख) p^2q^2 (ग) $x^8y^4z^{12}$ (घ) $\frac{8x^3}{y^3z^3}$
(द) $\frac{q^4}{p^4x^6}$ अथवा $q^4p^{-4}x^{-6}$ (च) $\frac{-27b^6}{a^9b^{12}}$
4. (क) $-8m^5n^4$ (ख) $-3a^6b^3$ (ग) $-8x^{3p}y^{3q+p+3}$ (घ) $\frac{4y}{3z^3}$
5. (क) $\frac{1}{2}$ (ख) -1 (ग) $\frac{3}{8}$ (घ) 12 (द) 1 (च) $\frac{-2}{3}$
(द्व) $\frac{81}{4}$ (ज) $\frac{-9}{2}$ (फ) $\frac{-2}{9}$

अभ्यास 11.5.1

(पेज 78)

1. (क) $5(x+2)$ (ख) $6(a+2)$ (ग) $2(2x+5)$ (घ) $3(a-4)$ (ङ) $n(n-6)$
 (च) $x(x+8)$ (छ) $8m(2m-3)$ (ज) $4p(p+4)$ (झ) $y(12x+1)$ (झ) $y(4x-1)$
 (ट) $7x(3y-1)$ (ठ) $3y(y-1)$
2. (क) $4(x^2-2x+4)$ (ख) $2(m^2+2m+4)$ (ग) $2p(2p^2-3p+4)$
 (घ) $-4(x-2)$ (ड) $-5(2x+1)$ (च) $P(5p-1)$
 (छ) $-x(x+5)$ (ज) $8x(1-2x)$ (झ) $y(5-y)$ (झ) $-x(x^2+2x-4)$
 (ट) $4k(15x^3-mx^2+3)$ (ठ) $5y(6x^2+7x^2-8y)$ (ड) $3pq(5p+3-8q)$

अभ्यास 11.5.2

(पेज 79)

1. (क) $(x+4)(x+5)$ (ख) $(x-3)(4+x)$ (ग) $(x+2)(4x+3)$ (घ) $(2x-1)(x-3)$
 (ड) $(p+q)(p+r)$ (च) $(r+3)(r-2)$ (छ) $(a-b)(a+1)$ (ज) $(x+5)(y+2)$
 (झ) $(p+5)(q+3)$ (ज) $(x+2)(x-y)$ (ट) $(x+1)(y+1)$ (झ) $(a+3)(a+b)$
 (ट) $(p-5)(p+3q)$ (ठ) $(1-x)(1-y)$ (ण) $(p+6q)(p-2q)$ (त) $(a+bc)(ab+c)$

अभ्यास 11.5.3

(पेज 80)

1. (क) $3,4$ (ख) $2,3$ (ग) $-4,-8$ (घ) $-2,9$ (ङ) $3,10$ (च) $2,-3$
2. (क) $(x+2)(x+5)$ (ख) $(x+3)(x+4)$ (ग) $(x+5)(x+6)$ (घ) $(x-3)(x-5)$
 (ड) $(x-5)(x-7)$ (च) $(x-3)(x-9)$ (छ) $(x+9)(x-2)$ (ज) $(x+7)(x-3)$
 (झ) $(y+8)(y-4)$ (ज) $(x-15)(x+2)$ (ट) $(y-6)(y+5)$ (झ) $(p-9)(p+2)$
 (ट) $(y+7)(y+8)$ (ठ) $(m-5)(m+1)$ (ण) $(x-40)(x-1)$ (त) $(p+30)(p-1)$
 (थ) $(x-13)(x+3)$ (द) $(x-13)(x-3)$ (घ) $(x-43)(x+1)$ (न) $(x-12)(x+4)$
 (प) $(p+11)(p+11)$ (फ) $(2-x)(11+x)$ (व) $(5-x)(3+x)$ (झ) $(1-p)(8+p)$
 (म) $(1+x)(19-x)$ (य) $(3-p)(14+p)$ (र) $(x-2y)(x-y)$ (ल) $(x+5y)(x+6y)$
 (व) $(p-3q)(p+2q)$ (श) $(x+4y)(x-y)$

अभ्यास 11.5.4

(पेज 81)

1. (क) $(3x+1)(x+1)$ (ख) $(2x+3)(x+1)$ (ग) $(3x-1)(x-1)$
 (घ) $(2m-1)(2m-3)$ (ड) $(2x-3)(2x+5)$ (च) $(3x-2)(5x-1)$
 (छ) $(4y-1)(3y+7)$ (ज) $(5x+1)(2x-1)$ (झ) $(6x-1)(2x-5)$
 (ज) $(10a-3)(5a-1)$ (ट) $(12b-5)(5b+2)$ (ठ) $(9x-4)(3x-2)$
 (ट) $(7p-2)(8p+3)$ (द) $(7x-1)(3x+4)$ (ण) $(5x-2)(3x+1)$
 (त) $(2q-5)(3-2q)$ (थ) $(12p+1)(10p-3)$ (द) $4(7t-p)(8t+p)$
 (घ) $(10s-3t)(15s+t)$ (न) $(8m-3n)(8m+5n)$ (प) $(16n+3s)(12n-5s)$
 (झ) $(10a-b)(12a+5b)$

अभ्यास 11.5.5

(पेज 83)

1. (क) $6xy$ (ख) $14y$ (ग) $24xy$ (घ) $8y$ (ङ) $30x$ (च) $20m$
2. (क) $(x+5)^2$ (ख) $(x+6)^2$ (ग) $(y-4)^2$ (घ) $(x-7)^2$ (ङ) $(x+9)^2$
 (च) $(p-12)^2$ (छ) $(3x-4)^2$ (ज) $(4p+1)^2$ (झ) $(5x-8)^2$ (ज) $(7q+1)^2$
 (ट) $(3x-11)^2$ (ठ) $(12+x)^2$ (द) $(6-5y)^2$ (द) $(5x+3)^2$ (ण) $3(x-1)^2$

अभ्यास 11.5.6

(पेज 84)

1. (क) $(x+6)(x-6)$ (ख) $(m+8)(m-8)$ (ग) $(y+7)(y-7)$ (घ) $(p+q)(p-q)$
 (द) $(p+11)(p-11)$ (च) $(1+p)(1-p)$ (छ) $(9+x)(9-x)$ (ज) $(10+x)(10-x)$
 (फ) $(15+n)(15-n)$ (ञ) $(3x+10)(3x-10)$ (ट) $(5+7y)(5-7y)$ (ठ) $(16+11y)(16-11y)$
 (ड) $3(y+3)(y-3)$ (ढ) $5(x+4)(x-4)$ (ण) $2(b+6)(b-6)$ (त) $3(4+y)(4-y)$
 (थ) $5a(a+2b)(a-2b)$ (द) $m(m+2)(m-2)$
2. (क) x^2-16 (ख) 48 वर्ग एकाइ
3. 147.84cm^2
4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ।

अभ्यास 11.6

(पेज 85)

1. (क) $(x-2)$ (ख) $(3x+y)$ (ग) $(x+7)$ (घ) $(y-8)$ (ङ) $(x-2 y)$
 (च) $(x+3)$ (छ) $2a(a+3c)$ (ज) $(x-5)$ (फ) $(a-2b)$ (ञ) $2(2m+1)$
 (ट) $(x-3)$ (ठ) x (ड) $(x+2)$ (ढ) $(x-5)$ (ण) $(x+1)$
 (त) $(x+8)$ (थ) $(x-5)$ (द) $(x+3)$ (घ) $(x-3)$ (न) $(x+7)$
 (प) $(x+2)$ (फ) $(x-1)$

अभ्यास 11.7

(पेज 87)

1. (क) $8x^2$ (ख) $12y$ (ग) $10x^2y$ (घ) $12m^4n^3p$ (ङ) $5x(3x+1)$
 (च) $6x^2(4x+1)$ (छ) $m(m+4)$ (ज) $12(x-5)$ (फ) $20(x+2)$ (ञ) $(2x+3)(2x-3)$
 (ट) $4(x+5)(x-5)$ (ठ) $2(2+x)(2-x)$ (ड) $4(x-1)(x+2)$ (ढ) $(x+1)(x+2)(x-2)$
 (ण) $(a+3)(a-2)(a-3)$ (त) $(x-4)(x-2)$ (थ) $3(x-7)(x+3)$ (द) $(x+1)(x+2)(x-3)$
 (घ) $(x-4)(x+5)(x-5)$ (न) $(x+2)(x+3)(x-2)$ (प) $(x+2)(x-4)(x+5)$

अभ्यास 11.8.1

(पेज 88)

1. (क) 0 (ख) 7 (ग) -9 (घ) 6
2. (क) $\frac{m+4}{m-6}$ (ख) $\frac{x+y}{x-y}$ (ग) $\frac{3}{x-3}$ (घ) $(a-b)$ (ङ) $\frac{x+5}{2}$ (च) $x-3$
 (छ) $\frac{1}{x+2y}$ (ज) $\frac{x-1}{x-2}$ (फ) $(x-2)$ (ञ) $\frac{x}{1-7x}$ (ट) $\frac{x-6}{x+6}$
 (ठ) $\frac{-(x+4)}{4}$ (ड) $\frac{-(p-3)}{p-6}$ (ढ) $\frac{s(s-10)}{s+8}$

अभ्यास 11.8.2

(पेज 89)

1. (क) $\frac{4x}{5}$ (ख) $\frac{11}{x}$ (ग) $\frac{x}{y}$ (घ) $\frac{7}{t+2}$ (ङ) 1 (च) $\frac{2a+1}{a+2}$
2. (क) $\frac{x}{3}$ (ख) x (ग) $\frac{4}{y}$ (घ) -2 (ङ) $\frac{2}{x+2}$ (च) $\frac{a}{a^2+1}$

3. (क) $\frac{m+6}{m+1}$ (ख) $\frac{1}{x-1}$ (ग) $\frac{1}{y+3}$ (घ) $\frac{2}{(x-5)}$ (ङ) $\frac{1}{x+2}$
 (च) $m-2$ (छ) $x+3$ (ज) $(x-4)$ (झ) $x+1$ (ञ) $3(x+1)$
 (ट) $m-1$ (ठ) $x+2$ (ड) $-5(3-x)$ (ढ) $2(p-2q)$ (ण) $\frac{(m-3)^2}{4}$ (त) $\frac{3(x+3y)}{z}$

अभ्यास 11.8.3

(पेज 92)

1. (क) $\frac{2x}{5}$ (ख) $\frac{5y}{8}$ (ग) $\frac{x^2+12}{3x}$ (घ) $\frac{17}{12y}$
 (ङ) $\frac{2+3x}{x}$ (च) $\frac{x+4y}{y}$
 2. (क) $\frac{21-x^2}{3x}$ (ख) $\frac{2n-3}{mn}$ (ग) $\frac{12y-1}{8y}$ (घ) $\frac{x-3y}{y}$
 (ঠ) $\frac{2(x+9)}{3(2x+3)}$ (চ) $\frac{7x+6}{x^2-4}$
 3. (क) $\frac{x+7}{7(x-1)}$ (ख) $\frac{2y+13}{6}$ (ग) $-\frac{1}{6(m+n)}$ (घ) $\frac{2x+7}{x-7}$
 (ঠ) $\frac{-7}{(x+2)(x-5)}$ (চ) $\frac{y^2-y+6}{3(y^2-9)}$ (ঢ) $\frac{23}{30(x-5)}$ (জ) $\frac{x+5}{x}$
 (ঝ) $\frac{x-1}{x+2}$ (ঞ) $\frac{4(x^2-x+6)}{(x-1)(x^2-9)}$ (ঠ) $\frac{x-4}{x(x-2)}$ (ঢ) $\frac{11}{(x-1)(x+3)}$
 (ঠ) $\frac{x-1}{x(x+4)}$ (ঠ) $\frac{x+5}{x+1}$ (ণ) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-3)}$ (ত) 0

अभ्यास 11.8.4

(पेज 94)

1. (क) $\frac{x(x-y)}{9}$ (ख) $\frac{-4(x-2)}{y}$ (ग) $\frac{a-3}{a+3}$ (घ) $\frac{a-3}{a-2}$ (ঠ) $\frac{x}{y}$
 (চ) $\frac{5}{x-2}$ (ঢ) $\frac{x+6}{x-3}$ (জ) $\frac{x(x+3)}{x+4}$ (ঝ) $\frac{x-3}{3}$ (ঞ) $\frac{9(x+1)}{x-2}$
 (ঠ) $\frac{x+2}{y+2}$ (ঠ) $\frac{y+2}{y+3}$ (ঢ) $\frac{a+6}{a-6}$ (ঢ) $\frac{b+1}{b+5}$ (ণ) $\frac{x+1}{x+2}$

$$(t) \frac{x^2(y-5)}{y^2(y+2)}$$

12. समीकरण, असमानता र लेखाचित्र

अभ्यास 12.1

(पेज 98)

1. (क) $x < 2$ (ख) $x < 4$ (ग) $x > 3$ (घ) $x < 0$ (ङ) $x > 2$ (च) $x < 7$ (छ) $x > 2$
(ज) $x < -1$ (झ) $4 \geq x$ (ञ) $3 \geq x$ (ट) $x \geq 2$ (ठ) $x \leq x$ (ड) $-3 < x, x \leq 3$ (ढ) $-4 \leq x, x \leq 1$
सवैको सङ्ख्यारेखा शिक्षकलाई देखाउ ।
2. $y < 10$
3. (क) $y \geq -7$ (ख) $x < 8$
4. 14 क्प 5. 2 6. (क) $15-x$ (ख) $8x+3(15-x)$ (ग) $8x+3(15-x) \leq 100$ (घ) 11

अभ्यास 12.2

(पेज 100)

1. (क) (4,3) (ख) (2,1) (ग) (3,-1) (घ) (-2,1) (ङ) (-6,11) (च) (1,5)
(छ) (1,2) (ज) (3,-2) (झ) (1,-1) (ञ) (2,-3) (ट) (-2,2)
2. (क) 11 र 10 (ख) 10 र 5 (ग) 25 र 10 (घ) बावुको 50 र छोराको 25 वर्ष
(ङ) रमेश 15 वर्ष र रवि 10 वर्ष

अभ्यास 12.3

(पेज 104)

1. (क) -2 (ख) $\frac{7}{6}$ 2. (क) -2 (ख) 3 (ग) 1 (घ) -2 (ङ) $\frac{7}{3}$
(च) $-\frac{2}{3}$ (छ) $-\frac{6}{7}$ (ज) 0
3. दायातिर माथि; (ख), (ग), (ङ) बायातिर माथि; (क), (घ), (च), (छ)
4. (क) 3 (ख) -2 (ग) -1 (घ) $\frac{1}{2}$ लेखाचित्रहरू शिक्षकलाई देखाउ ।

अभ्यास 12.4

(पेज 106)

1. (क) $x - \text{खण्ड} = -3$, $y - \text{खण्ड} = 4$ (ख) $x - \text{खण्ड} = -3$, $y - \text{खण्ड} = \text{दैन}$
(ग) $x - \text{खण्ड} = 5$, $y - \text{खण्ड} = 3$ (घ) $x - \text{खण्ड} = 0$ दैन, $y - \text{खण्ड} = -3$
2. (क) -2 (ख) -3 (ग) 2 (घ) 2
3. (क) 1 (ख) -6 (ग) 4 (घ) $-\frac{4}{3}$
4. (क) X-अक्ष; (-2,0), Y-अक्ष; (0,2) (ख) X-अक्ष; (2,0), Y-अक्ष; (0,6)
(ग) X-अक्ष; (-6,0), Y-अक्ष; (0,3) (घ) X-अक्ष; (-10,0), Y-अक्ष; (0,-8)
(ङ) X-अक्ष; (2,0), Y-अक्ष; (0,4) (च) X-अक्ष; (-4,0), Y-अक्ष; (0,6) लेखाचित्रहरू शिक्षकलाई देखाउ ।

अभ्यास 12.5

(पेज 108)

1. (क) 0,-1 (ख) 0,1 (ग) -2,-1 (घ) 2,-1 (ङ) -2,1 (च) 3,4

- | | | | | | |
|--------------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| (छ) -4,1 | (ज) 4,-1 | (भ) ±3 | (त्र) 4,-3 | (ट) 5,-4 | (ठ) 3,4 |
| (ड) -5,2 | (ढ) 3,6 | (ण) 6,-5 | (त) 1,-3 | (थ) -4 | (द) 2 |
| (ध) ±5 | (न) -5 | (प) ±6 | (फ) 6 | | |
| 2. (क) $0, -\frac{3}{2}$ | (ख) $0, \frac{3}{2}$ | (ग) $-1, \frac{1}{3}$ | (घ) $-1, -\frac{1}{2}$ | (ड) $-2, \frac{1}{3}$ | (च) $3, -\frac{1}{3}$ |
| (भ) $-3, \frac{1}{3}$ | (ज) $-1, \frac{3}{2}$ | (ट) $1, \frac{3}{2}$ | (ठ) $-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$ | (द) $\pm \frac{2}{3}$ | (द) $\pm \frac{1}{4}$ |
| (थ) $\pm \frac{3}{4}$ | (द) $\frac{3}{4}$ | (ध) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ | (न) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ | (प) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ | (फ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ |
| 3. (क) 1,-3 | (ख) 8,-2 | (ग) 1,-11 | (घ) $\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}$ | (ड) -1,8 | (च) $\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}$ |

13. कोणहरू

अभ्यास 13.1

(पेज 111)

- (क) 50 (ख) 125 (ग) 40
- (क) $x = 95, y = 85, z = 85$ (ख) $x = 110, y = 70, z = 70$ (ग) $x=30, y=150, z=150$
- (क) 40 (ख) 15 (ग) 20
- (क) 47.5 (ख) 51.4 (ग) $x = 30, y = 60, z = 75$ (घ) 90 (ड) 180 (च) 27.2
(छ) $x = 60, y = 80, z = 60, a=60, b = 80$ (ज) 35 (भ) 47.5
- समपूरक $60^\circ, 50^\circ, 45^\circ, 10^\circ$; परिपूरक $150^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 100^\circ$
- $54^\circ, 36^\circ$ 7.40°

अभ्यास 13.2

(पेज 114)

- (क) 60° (ख) 105° (ग) 65° (घ) 100° (ड) 110° (च) 60°
- (क) छन् (ख) छन् (ग) छन् (घ) छैनन् (ड) छन् (घ) छैनन्
- (क) 60° (ख) 55° (ग) 120° (घ) 30° (ड) 110° (च) 80°
ii. दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा बनेका बाहिरी एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन्।
- i. (क) 120 (ख) 45 (ग) 100
(घ) 40 (ड) 50 (च) 130 ii. 180.
iii. दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा बनेका बाहिरी क्रमागत कोणहरूको जोड 180° हुन्छ।
- (क) $p = 45^\circ, q = 105^\circ, x = 120^\circ, y = 60^\circ, z = 75^\circ$
(ख) $p = 55^\circ, q = 132^\circ, x = 77^\circ, y = 48^\circ, z = 125^\circ$
(ग) $p = 55^\circ, q = 75^\circ, x = 75^\circ, y = 150^\circ, z = 50^\circ$
(घ) $x = 25^\circ, y = 55^\circ, z = 30^\circ$
(ड) 70° (च) 53° (छ) 45° (ज) $x = 16^\circ, y = 122^\circ, z = 58^\circ$
(भ) $x = 30^\circ$ (ज) $p = 80^\circ, q = 140^\circ, x = 20^\circ$ (ट) $p = 140^\circ, q = 33.3^\circ$ (ठ) $50^\circ, 130^\circ$

अभ्यास 13.3

(पेज 118)

1. शिक्षकलाई देखाऊ।
2. समानान्तर हुन्दून्, सङ्गत कोणहरू बराबर भएकाले
3. समानान्तर हुन्दून्, सङ्गत कोणहरू बराबर भएकाले
4. (क) छन्, (ख) छन्,
5. समानान्तर हुन्दून्, क्रमागत भित्रि कोणको योग 180° नभएकाले।

14. त्रिभुज**अभ्यास 14**

(पेज 122)

1. $x = 20^\circ$
2. (क) $x = 80^\circ$ (ख) $x = 70^\circ$ (ग) $x = 65^\circ$
 (घ) $x = 80^\circ$ (ड) $x = 60^\circ, y = 60^\circ$ (च) $x = 90^\circ, y = 45^\circ$
3. (क) 66° (ख) 40° (ग) 40°
4. समबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुन्दून् अर्थात प्रत्येक कोण 60° का हुन्दून्।

15. नियमित बहुभुज**अभ्यास 15.1**

(पेज 126)

- 1 र 2 शिक्षकलाई देखाऊ।
3. (क) $\angle A = 70^\circ, \angle B = 58^\circ$, योगफल $= 128^\circ$ (ख) $\angle ACD = 128^\circ$ (ग) बराबर छ।
 (घ) त्रिभुजको दुईओटा कोणहरूको योगफल बाकी अर्को एउटा कोणको बाहिरी कोणसाग बराबर हुन्दू।
 (ड) $\angle A$ र $\angle ACB$ को योगफल
 4. शिक्षकलाई देखाऊ।

अभ्यास 15.2

(पेज 130)

1. (क) 13cm (ख) $8\sqrt{5}\text{ cm}$ (ग) $4\sqrt{10}\text{ cm}$
2. (क) $x = 8$ (ख) $x = 7$ (क) $x = \sqrt{39}$
3. समकोण त्रिभुज: (क) र (घ)
4. 6m 5. कैलाश : 4m 6. $AD = \sqrt{65}\text{ cm}$
7. $\sqrt{274}\text{ m}$ 8. $3\sqrt{17}\text{ cm}$ 9. $BE = 5\sqrt{2}\text{ cm}$ $EG = 13\text{cm}$, $DE = 13\text{cm}$
10. $x = 54\text{cm}, y = 18\sqrt{13}\text{ cm}$

अभ्यास 15.3

(पेज 137)

1. (क) 11cm (ख) 22cm (ग) 10cm (घ) $6x+6$ (ड) $12x + 28$
2. (क) $x = 3$ (ख) $x = 3$ (ग) $x = 3$
3. (क) $x = 108^\circ, y = 108^\circ, z = 72^\circ$ (ख) $x = 120^\circ, y = 25^\circ$ (ग) $x = 50^\circ, y = 70^\circ, z = 50^\circ$
4. (क) $29^\circ, 151^\circ$ (ख) $73^\circ, 107^\circ$ (ग) $46^\circ, 134^\circ$

5. (क) क्रमागत भिन्नी कोणको जोड 180° हुने भएकाले
 (ख) क्रमागत भिन्नी कोणको जोड 180° हुने भएकाले
 (ग) तथ्य कर सक्छ बाट बराबरी तथ्य
 ६ र ७ शिक्षकलाई देखाउ।

अभ्यास 15.4

(पेज 140)

शिक्षकलाई देखाउ।

16. अनुरूप र समरूप त्रिभुजहरू

अभ्यास 16.1

(पेज 143)

- अनुरूप: (क), (ग), (ङ)
- (क) $x = 1.5$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle Q = 86^\circ$, $AB = 3.9\text{cm}$, $CA = RP = 4.5\text{cm}$, $QR = 3.1\text{cm}$
 (ख) $x = 2$, $\angle M = 22^\circ$, $\angle Z = 35^\circ$, $OM = 4.9\text{cm}$, $NO = YZ = 2.1\text{cm}$, $XY = 3.4\text{cm}$
 (ग) $x = 1.7$, $\angle R = 43^\circ$, $\angle M = 62^\circ$, $RP = OM = 4.1\text{cm}$, $NO = 3.4\text{cm}$
- शिक्षकलाई देखाउ।
- (क) $BC = EF$ वा $\angle A = \angle D$ (ख) $AC = DF$ (ग) $AC = DF$ वा $\angle C = \angle F$
- को. भु. को ६. को. भु. को

अभ्यास 16.2

(पेज 146)

- उत्तर शिक्षकलाई देखाउ।

अभ्यास 16.3

(पेज 148)

- (क), (ङ) र (छ), (ख) र (च), (ग) र (ज)
- (क) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (ख) $\triangle ABC \sim \triangle AED$ (ग) $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ (घ) $\triangle ABE \sim \triangle DCE$
 (ङ) $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ (च) $\triangle ABC \sim \triangle ADB$
- (क) शिक्षकलाई देखाउ। (ख) 24cm
- (क) शिक्षकलाई देखाउ। (ख) $x = 4.8$, $y = 4.5$ ७. शिक्षकलाई देखाउ।

17. ठोस आकारहरू

अभ्यास शिक्षकलाई देखाउ।

(पेज 151)

18. त्रिभुज र चतुर्भुजको परिमिति र क्षेत्रफल

अभ्यास 18

(पेज 154)

- (क) 32cm^2 , 24cm (ख) 12cm^2 , 14cm (ग) 12cm^2 , 16cm
- (क) 16cm^2 , 16cm (ख) 2.25cm^2 , 6cm (ग) 22.25cm^2 , 18cm
- (क) 20cm^2 , 19cm (ख) 24cm^2 , 22cm (ग) 28cm^2 , 24cm (घ) 16cm^2 , 22cm
- (क) 10cm^2 (ख) 18cm^2 (ग) 12cm^2

- (घ) 40.5cm^2 (ड) 42cm^2
 5. (क) 22.5cm^2 (ख) 38.5cm^2 (ग) 23cm^2 (घ) 72cm^2

19. वृत्त

अभ्यास 19.1

(पेज 157)

- (क) 12.56cm (क) 9.42cm (ग) 15.7cm (घ) 18.84cm
 (ड) 21.98cm (च) 31.4cm
- (क) 7.5cm (ख) 9cm (ग) 5.5cm (घ) 3.5cm
 (ड) 1.5cm (च) 6cm
3. 44cm 4. 40.82cm 5. 1570m 319 चक्रका 6. 1m 7. 1.85m
- (क) 20.4cm (ख) 22.2cm (ग) 21.352cm (घ) 0.848cm

अभ्यास 19.2

(पेज 159)

- (क) 200.92cm^2 (ख) 12.56cm^2 (ग) 153.86cm^2 (घ) 6.1544cm^2
 (ड) 132.665cm^2 (च) 254.34cm^2 (छ) 98.4704cm^2 (ज) 153.86cm^2
 (झ) 78.5cm^2 (ज) 706.5cm^2 (ट) 154 cm^2 (ठ) 616cm^2
2. 153.86cm^2 3. 28.26cm^2
4. (क) 12.56cm^2 (ख) 21.5cm^2 (ग) 30.96cm^2 (घ) 4.71cm^2
5. (क) 5cm (ख) 31.4cm 6. $10\text{cm}, 314\text{cm}^2$
7. (क) 2m (ख) 12.56cm

20. वेलना र प्रिज्म (Cylinder and Prism)

अभ्यास 20.1

(पेज 162)

1. (क) 1186.92cm^2 (ख) 85.1725cm^2 (ग) 477.28cm^2 (घ) 1022.1485cm^2
 (ड) 659.1488cm^2 (घ) 477.28cm^2
2. (क) $(140+10\sqrt{61})\text{cm}^2$ (ख) $(80+12\sqrt{5})\text{cm}^2$ (ग) 254.4cm^2 (घ) 67.84cm^2
3. 320.28cm^2 4. (क) 5cm (ख) 1318.8cm^2
5. 376.8cm^2 6. 8cm 7. 15cm 8. 1024cm^2

अभ्यास 20.2

(पेज 165)

1. (क) 423.9cm^3 (ख) 1969.408cm^3 (ग) 8138.058cm^3 (घ) 8138.88cm^3
2. (क) 15cm^3 (ख) 297.6cm^3 (ग) 152cm^3 (घ) 36cm^3
 (ड) 75.6cm^3 (च) $88.2\sqrt{3}\text{ cm}^3$
3. 879200cm^3 4. $923.16\text{cm}^3, 796.3\text{min}$ वा $13\text{hrs } 16\text{mins } 18\text{secs}$
5. 113.04m^2 6. 50cm 7. 120cm , वा $1\text{m}20\text{cm}$
8. 1483.65cm^3 9. 1080cm^3 10. $4.8/$

21. स्थानान्तरण

अभ्यास 21.1

(पेज 168)

1. शिक्षकलाई देखाऊ ।
2. $A^I(2,-5), B^I(1,5), C^I(5,0), D^I(3,0), E^I(-5,-2)$
3. $A^I(-5,7), B^I(3,1), C^I(-2,0), D^I(-3,-6), E^I(-5,-7)$
4. $P^I(-1,-3), Q^I(3,-1), R^I(5,-2)$
5. $W^I(-3,1), X^I(-2,5), Y^I(-1,7), Z^I(3,-4)$

अभ्यास 21.2

(पेज 171)

1. शिक्षकलाई देखाऊ ।
2. $A^I(-2,2), B^I(7,-1)$
3. $P^I(1,-3), Q^I(2,-5), R^I(-1,3)$
4. $A^I(-1,-5), B^I(-5,-5), C^I(-6,5), D^I(-1,2)$

अभ्यास 21.3

(पेज 174)

- शिक्षकलाई देखाऊ ।

22. विशास्थिति र स्केल ड्रइड

अभ्यास 22.1

(पेज 175)

- | | | | |
|--------------------|------------------|-----------------|-------------------|
| 1. (क) 045° | (ख) 22.5° | (ग) 315° | (घ) 337.5° |
| 2. 205° | 3. 270° | | |
| 4. (क) 003° | (ख) 067° | (ग) 282° | (घ) 084° |
| (ड) 111° | (च) 127° | (छ) 148° | |

अभ्यास 22.2

(पेज 178)

- | | | |
|-----------------------|--------------------|--------------------|
| 1. (क) 178km | (ख) 68° | (ग) 248° |
| 2. (क) 9km | (ख) 145° | (ग) 325° |
| 3. (क) 126km | (ख) 114km | (ग) 325270° |
| 4. (ख) 270° | (ग) 90° | |