

Le jeu de Hex



Le but du projet est d'étudier les propriétés du jeu de Hex. On établira notamment le théorème de Hex et notamment la notion de "vol de stratégie" due au mathématicien John Nash.

1. Le Jeu de Hex

1.1. Un peu d'histoire. — Le texte qui suit est extrait de la page Wikipedia consacrait au jeu de Hex.

Le jeu de Hex est un jeu de société combinatoire abstrait pour deux joueurs. Il se joue sur un tablier en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Toutes les dimensions du côté du losange sont possibles, la plus traditionnelle est celle composée par 11 hexagones, mais on trouve aussi les valeurs 13 ou 19. L'un des inventeurs du jeu, John Nash, préconise un tablier de taille 14×14 .

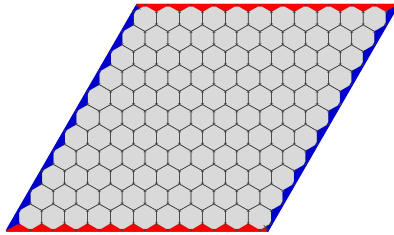
Le premier énoncé de la règle du jeu est l'œuvre de Piet Hein lors d'une conférence en 1942 au Parenthesis, l'association des mathématiciens de l'Université de Copenhague. L'auteur cherchait alors à imaginer un jeu équitable, progressif, fini, clair, stratégique et décisif. Le jeu porte alors le nom de Polygone.

En 1948, et de manière indépendante, un jeune mathématicien de l'Université de Princeton du nom de John Nash réinvente le jeu et le diffuse au Fine Hall, une salle commune aux élèves et aux professeurs du département de mathématiques. Il en perçoit l'intérêt en théorie des jeux et démontre l'existence

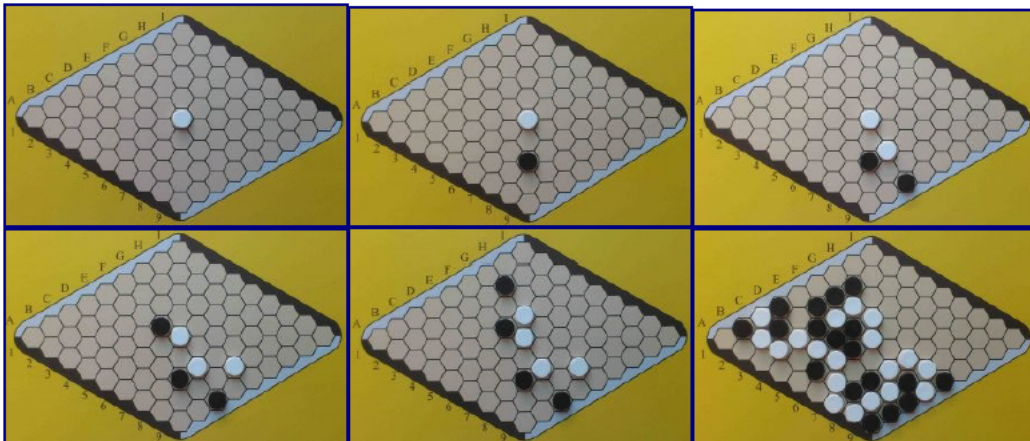
d'une stratégie gagnante pour le premier joueur¹. Cependant, sa preuve est non constructive, c'est-à-dire qu'elle n'indique pas de stratégie gagnante.



1.2. Les règles du jeu. — On joue à deux sur un plateau en forme de losange pavé par des hexagones.



A tour de rôle, chaque joueur place un pion de sa couleur sur n'importe laquelle des cases encore libres. Deux des côtés opposés du plateau sont blancs et les deux autres noirs. Pour gagner, il faut relier les deux côtés à sa couleur par une chaîne ininterrompue de pions.



2. Stratégie gagnante

En théorie des jeux, le terme de stratégie possède une signification particulière. Une stratégie pour Bleu, s'il commence, indique le premier coup joué, puis le deuxième coup, en fonction du premier coup de Rouge, etc. Une stratégie gagnante assure la victoire quels que soient les choix que fait la partie adverse.

2.1. "Après vous....", une formule gagnante. — Pour illustrer cette idée nous allons faire un autre jeu qui se joue à deux joueurs : on se donne 12 objets. Chacun leur tour, les joueurs en prennent un ou deux. Le gagnant est celui qui prend le(s) dernier(s) objet(s).

1. Pouvez-vous trouver une stratégie gagnante ?

Si vous ne savez pas comment commencer, essayez de jouer avec seulement trois objets. Ensuite, passez à 6, 9 et enfin 12 objets.

La stratégie gagnante est de laisser l'adversaire commencer et de l'emmener vers la situation de trois objets. Dans cette situation, vous avez dû voir que si l'adversaire commence alors vous êtes sûr de gagner. Pour le jeu de Hex, bien que la situation soit plus compliquée, on a un phénomène analogue.

2.2. Le Hex 3×3 . — Pour s'en convaincre, on peut étudier le cas 3×3 .

1. Etudier l'existence d'une stratégie gagnante pour un Hex 3×3 .
2. Même question si la case du milieu est interdite au début.

2.3. Le Hex 4×4 . — On en déduit que la personne qui commence gagne à chaque coup. Que se passe-t-il pour un Hex 4×4 ?

1. Vérifier que si le premier joueur commence en $B3$ alors il gagne toujours.

On peut évidemment aller plus loin.....avec un Hex 5×5 !

2.4. Le Hex 5×5 . —

1. Vérifier que si le premier joueur commence en $C3$ alors il gagne....

On ne va pas tenter l'expérience plus longtemps car il est devenu vite difficile de décrire les stratégies gagnantes. En général, on joue sur un Hex 11×11 ... Le point important que nous allons démontrer est qu'il existe toujours une stratégie gagnante.

2.5. Et le Tic-Tac-Toe ?— Tout le monde a joué au Tic-Tac-Toe. Il se joue sur une grille carrée de 3×3 cases. Deux joueurs s'affrontent. Ils doivent remplir chacun à leur tour une case de la grille avec le symbole qui leur est attribué : O ou X.

Le gagnant est celui qui arrive à aligner trois symboles identiques, horizontalement, verticalement ou en diagonale.

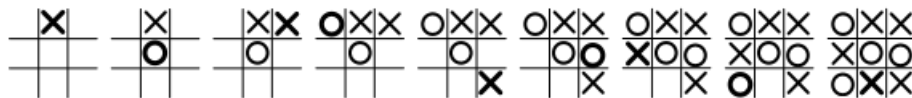
Ce jeu est évidemment très différent du jeu de Hex.

1. Existe-t-il une stratégie gagnante ?
2. Sinon, peut-on donner quelques règles pour au pire faire match nul ?

Voici deux parties possibles :



et un match nul !



Le Morpion est une version plus complexe puisque le plateau n'est plus dans ce cas limité et qu'il demande l'alignement en droites ou diagonales de 5 pions.

3. Le théorème d'existence de Nash

Nous allons démontrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur. Pour cela, nous allons procéder en deux temps. Tout d'abord nous allons démontrer qu'il y a impossibilité d'avoir une partie nulle. Ensuite, en

utilisant l'argument du "vol de stratégie" développée par Nash, nous en déduirons l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur.

3.1. Impossibilité d'une partie nulle. —

1. Montrer qu'une partie nulle pourrait seulement arriver dans le cas où toutes les cases du plateau sont occupées.

On a donc un plateau de la forme :



1. On note B l'ensemble des cases de pions blancs reliés au côté blanc en haut à gauche. Montrer que soit B relie les deux côtés blancs, soit dans le cas contraire, il existe un chemin de pions noirs reliant les deux côtés noirs.

La comparaison avec le Tic-Tac-Toe est encore intéressante. Le match nul n'existe pas et c'est précisément une partie de l'argumentation entrant dans la démonstration de l'existence d'une stratégie gagnante.

3.2. L'argument de "vol de stratégie". — Supposons qu'il existe une stratégie gagnante pour les noirs. Cette stratégie peut être assimilée à un programme informatique qui gagne infailliblement lorsqu'il joue en second. Supposons aussi que le joueur des blancs possède ce logiciel.

1. Montrer par un raisonnement par l'absurde que dans ce cas, les blancs peuvent aussi gagner ! Décrire la procédure.

Autrement dit, nous venons de démontrer qu'il n'existe pas de stratégie gagnante pour les noirs. Est-ce que cela implique qu'il en existe une pour les blancs ?

3.3. Le théorème de Hex. — En combinant les deux résultats précédents, en déduire qu'il existe une stratégie gagnante pour les blancs. Ceci dit, on ne sait toujours pas la trouver !

4. Les problèmes de Hein

Comme dans tous les jeux de stratégie, on peut se poser des problèmes : ce sont des configurations pour lesquelles on doit chercher le premier coup des blancs qui donne inmanquablement la victoire aux blancs. Voici trois configurations proposées par Hein, l'inventeur du jeu :

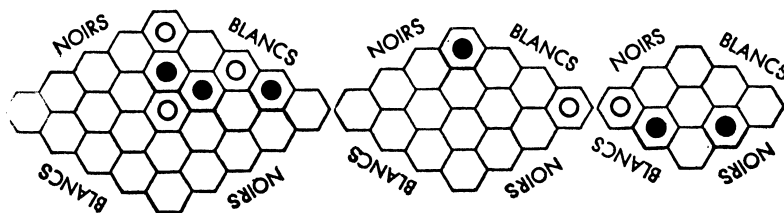


Fig. 36
Trois problèmes de Hex.

5. Une variante : le Hex $m \times n$

On peut modifier le jeu de Hex en prenant des côtés de tailles différentes. Intuitivement, on imagine que le joueur devant relier les côtés les plus grand a plus de chances de gagner.

Dans le cas d'un plateau $n \times (n + 1)$, Martin Gardner a mis au point une stratégie gagnante pour le joueur ayant le côté le plus grand lorsqu'il joue en second. Si le premier joueur joue une case, alors le second joueur joue la case associée sur le diagramme suivant :

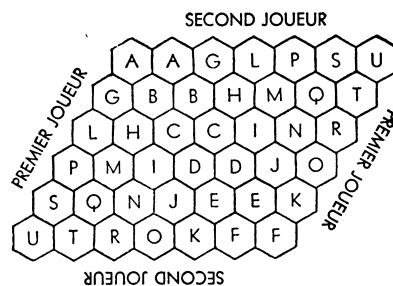


Fig. 37

Plan d'appairage des cases par le second joueur pour gagner sur un tableau à côtés inégaux.

1. Pouvez-vous expliquer pourquoi c'est une stratégie gagnante ?

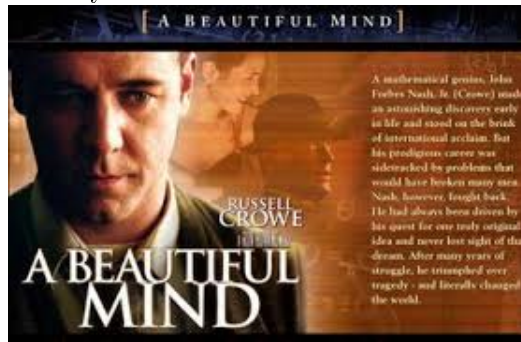
6. Quelques mots sur les mathématiciens qui apparaissent dans ce projet

Toutes les biographies qui suivent proviennent des pages Wikipedia correspondantes.

6.1. John Nash. — John Nash Jr est un mathématicien et économiste américain né le 13 juin 1928. Il a travaillé sur la théorie des jeux, la géométrie différentielle, et les équations aux dérivées partielles. Il a partagé le prix Nobel d'économie en 1994 avec Reinhard Selten et John Harsanyi pour leurs travaux sur la théorie des jeux.



À l'aube d'une carrière mathématique prometteuse, John Nash a commencé à souffrir de schizophrénie. Il a appris à vivre avec cette maladie seulement vingt-cinq ans plus tard. Sa vie, romancée, est racontée dans le film *Un homme d'exception* (*A Beautiful Mind*) (2001) réalisé par Ron Howard et le livre *Un cerveau d'exception* de Sylvia Nasar.



6.2. Martin Gardner. — Martin Gardner (né le 21 octobre 1914 à Tulsa, Oklahoma et mort le 22 mai 2010 à Norman, Oklahoma) est un grand spécialiste des mathématiques récréatives.



Il est un des pères fondateurs du scepticisme scientifique aux États-Unis.

6.3. Piet Hein. — Piet Hein (16 décembre 1905 - 17 avril 1996) est un poète et scientifique danois célèbre pour avoir créé un genre de poème nommé grook et en avoir écrit plus de 7 000. Il est un descendant direct du pirate Piet Hein.



Il a notamment inventé le jeu de Hex et a instauré l'usage de la superellipse dans l'architecture scandinave. Le superuf est un gadget créé par Hein, par révolution d'une superellipse autour de son axe.

Références

Ce projet est basé sur de nombreuses lectures mais parmi celles-ci, on trouve principalement :

- Frédéric Le Roux, « Le jeu de Hex » Images des Mathématiques, CNRS, 2012.
- Martin Gardner, Problemes Et Divertissements Mathematiques Tome 1, 1964.
- Les pages de Wikipedia concernant la plupart des objets évoqués dans ce projet.
