АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ и ОКЕАНА

Том V

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1969

Ф И З И К А   А Т М О С Ф Е Р Ы   И   О К Е А Н А

Том V **1969** **№ 1**

УДК 551.52

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В. Ф. ТУРЧИН, В. З. НОЗИК

Для решения обратных задач геофизики, которые, как правило, оказываются математически некорректными, необходимо иметь некоторую дополнительную (априорную) информацию об искомой функции, чаще всего — информацию о ее гладкости. В настоящей работе эта информация задается с помощью некоторого априорного распределения вероятностей, и весь подход к решению задачи является статистическим. При определенном выборе априорной вероятности восстановленная функция удовлетворяет регуляризованному уравнению Филлипса и Тихонова, однако статистический подход позволяет сформулировать единый алгоритм определения параметра регуляризации α и указать ошибку восстановления. Предложенный метод реализован в виде программ для вычислительной машины. С целью проверки метода проведен ряд математических экспериментов.

В геофизике часто возникает необходимость решения так называемых обратных задач, например, определения свойств атмосферы по характеристикам пропущенного излучения, вычисления распределения масс по измеренному гравитационному полю и т. п. При строгой математической постановке вопроса такие задачи оказываются, как правило, некорректными, т. е. сколь угодно малые вариации начальных данных могут приводить к сколь угодно большим вариациям искомых функций. Выход из этой трудности заключается в привнесении в задачу дополнительной априорной информации о гладкости искомой функции. Приближенное решение, найденное при этом предположении, называется регуляризованным. Разным способам внесения априорной информации соответствуют разные способы регуляризации.

Мы ограничимся рассмотрением линейной задачи, которую можно записать в виде

$$K\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \tag{1}$$

где $\mathbf{f}$ — известная функция; $\boldsymbol{\varphi}$ — искомая функция; K — линейный оператор. В работах [1, 2] предложен метод регуляризации, заключающийся в том, что задача (1) заменяется на следующую задачу минимизации функционала от $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\|K\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f}\| + \alpha\Omega[\boldsymbol{\varphi}] = \min. \tag{2}$$

Здесь $\Omega[\boldsymbol{\varphi}]$ — так называемый регуляризующий функционал, который принимает тем большие значения, чем менее гладка функция $\boldsymbol{\varphi}$. Если, например, $\boldsymbol{\varphi}$ и некоторое число ее производных являются дифференцируемыми функциями, то $\Omega(\boldsymbol{\varphi})$ может быть взято в виде нормы какой-либо производной φ. (Заметим, что мы намеренно не уточняем, к каким пространствам принадлежат $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{f}$ и как определена норма $\|\ldots\|$, ибо для идеи метода это несущественно.) Величина α носит название параметра регуляризации. Чем больше α, тем больше вес регуляризующего функционала в левой части (2) и тем более заглаженным получается решение (2). При $\alpha = 0$ решение задачи (1), если оно существует, является также решением задачи (2).

Филлипс [1] получает уравнение (2) как уравнение для самой гладкой (т. е. обеспечивающей минимальное значение Ω) функции из множества всех функций, приближенно удовлетворяющих уравнению (1). Параметр α (точнее α^{-1}) имеет смысл неопределенного множителя Лагранжа в задаче на условный экстремум и должен быть определен из условия

$$\|K\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f}\| = s, \tag{3}$$

где s — погрешность, с которой задана функция $\mathbf{f}$. Однако при практическом применении этого метода Филлипс находит, что величина α, определяемая из (3), оказывается завышенной, т. е. соответствующее решение $\boldsymbol{\varphi}$ слишком заглажено, и гораздо лучшие результаты можно получить, если взять меньшее значение α.

А. Н. Тихонов [2] постулирует уравнение (2), рассматривает последовательности регуляризованных решений при $\alpha \to 0$ и доказывает ряд теорем о сходимости этих последовательностей.

Теоретико-вероятностный подход к проблеме был развит в работах [3, 4]. Были получены статистически обоснованные оценки ошибки восстановления функции $\boldsymbol{\varphi}$ и алгоритмы вычисления параметра регуляризации α. Хотя методы, развитые в этих работах, применимы для любых линейных уравнений вида (1), конкретные формулы и результаты относились к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода с разностным ядром. В настоящей работе мы рассмотрим общий случай уравнений (1) с произвольным линейным оператором K, а также самый общий случай регуляризации, включая усреднение по параметру α. Мы затронем лишь узловые моменты теории, поскольку детальное обсуждение различных ее аспектов проведено в работах [3, 4].

Так как для применения методов вычислительной математики уравнение (1) должно быть так или иначе алгебраизировано, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $\boldsymbol{\varphi}$ в уравнении (1) есть вектор в n-мерном пространстве искомых функций, $\mathbf{f}$ — вектор в m-мерном пространстве начальных данных, а K — прямоугольная матрица соответствующей размерности. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1a}$$

Будем считать, что величины f_i измеряются со среднеквадратичной ошибкой s_i, независимой при различных i и распределенной по нормальному закону. Тогда условная вероятность того, что при данном векторе $\boldsymbol{\varphi}$ (характеризующем «состояние природы») в результате измерений будет получен данный вектор $\mathbf{f}$, есть

$$P(\mathbf{f}|\boldsymbol{\varphi}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2}} \exp\left\{-\frac{(f_i - \sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j)^2}{2s_i^2}\right\}. \tag{4}$$

Введем диагональную матрицу ошибок W с матричными элементами

$$W_{ij} = \frac{1}{s^2}\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j. \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$P(\mathbf{f}\,|\,\varphi) = c_1 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, B\varphi) + (\mathbf{b}, \varphi)\right\}, \tag{6}$$

$$B \equiv K^{+}WK, \qquad \mathbf{b} \equiv K^{+}W\mathbf{f} \tag{7}$$

где c_1 — константа, не зависящая от φ.

Введем, далее, положительно определенную симметричную матрицу Ω, с помощью которой образуем регуляризующий функционал

$$\Omega[\varphi] = (\varphi, \Omega\varphi). \tag{8}$$

При практических приложениях в качестве Ω будем брать такую матрицу, что (8) дает конечноразностное приближение к интегралу

$$\int \left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right]^2 dx, \tag{9}$$

где $k = 0, 1$ или 2. (Значение $k = 0$ используется в тех случаях, когда регуляризация основывается не на непрерывности функции $\varphi(x)$, а на ее ограниченности.)

С помощью функционала (8) образуем статистический ансамбль гладких функций с параметром гладкости α (см. [3])

$$P_\alpha(\varphi) = c_\alpha \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\varphi, \Omega\varphi)\right\}, \tag{10}$$

где константа c_α определяется из условия нормировки. Найдем зависимость c_α от α, которая нам понадобится в дальнейшем,

$$1 = c_\alpha \int \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\varphi, \Omega\varphi)\right\} d\varphi = c_\alpha \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\mathrm{Det}\,(\alpha\Omega)}}. \tag{11}$$

Так как

$$\mathrm{Det}\,(\alpha\Omega) = \alpha^n\,\mathrm{Det}\,(\Omega), \tag{12}$$

находим

$$c_\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{Det}\,(\Omega)}{(2\pi)^n}}\,\alpha^{n/2} \equiv c_2\alpha^{n/2}. \tag{13}$$

Простейший способ регуляризации — считать распределение $P_\alpha(\varphi)$ априорной вероятностью для искомой функции φ, т. е. искать решение в статистическом ансамбле (10) с заданным параметром гладкости α. Тогда по формуле Бейеса получаем апостериорное распределение для φ

$$P(\varphi\,|\,\mathbf{f}, \alpha) = \frac{P(\mathbf{f}\,|\,\varphi)P_\alpha(\varphi)}{\int P(\mathbf{f}\,|\,\varphi)P_\alpha(\varphi)\,d\varphi}. \tag{14}$$

Используя (6) и (10), находим

$$P(\varphi\,|\,\mathbf{f}, \alpha) = c_3 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, [B + \alpha\Omega]\varphi) + (\mathbf{b}, \varphi)\right\}, \tag{15}$$

где c_3 — константа, не зависящая от φ.

Напомним основные факты о нормальном распределении в n-мерном пространстве. Общий вид нормального распределения

$$P(\varphi) = c \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, A\varphi) + (\mathbf{a}, \varphi)\right\}, \tag{16}$$

где A — произвольная положительно определенная симметричная матрица; $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Константа c определяется из условия нормировки:

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{Det}\,(A)}{(2\pi)^n}}. \tag{17}$$

Математическое ожидание вектора $\boldsymbol{\varphi}$ есть вектор $A^{-1}\mathbf{a}$

$$\langle \varphi_i \rangle = (A^{-1}\mathbf{a})_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Корреляционная матрица компонент вектора $\boldsymbol{\varphi}$ есть матрица A^{-1}

$$\langle (\varphi_i - \langle \varphi_i \rangle)(\varphi_j - \langle \varphi_j \rangle) \rangle = (A^{-1})_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

В частности, дисперсия φ_i определяется через диагональный матричный элемент

$$\langle (\varphi_i - \langle \varphi_i \rangle)^2 \rangle = (A^{-1})_{ii} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Нормальное распределение (15) дает наиболее полное решение задачи при заданном априори α. В качестве восстановленной функции $\boldsymbol{\varphi}$ естественно принять математическое ожидание $\boldsymbol{\varphi}$ по распределению (15)

$$\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_\alpha = (B + \alpha\Omega)^{-1}\mathbf{b}, \tag{21}$$

(см. формулы (18) и (16)). Функция $\langle \varphi \rangle_\alpha$ удовлетворяет уравнению типа (2) (см. [3]). Ошибка восстановления φ_i определяется как корень из дисперсии φ_i

$$\sigma_i = \sqrt{\langle (\varphi_i - \langle \varphi_i \rangle_\alpha)^2 \rangle_\alpha} = \sqrt{([B + \alpha\Omega]^{-1})_{ii}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

(см. формулы (16) и (20)).

Параметр α может быть приближенно вычислен, если известна приближенная величина функционала (8) для ожидаемого решения $\boldsymbol{\varphi}$. Обозначим ее через Ω_0. Тогда разумно выбрать такое α, что

$$\langle (\boldsymbol{\varphi}, \Omega\boldsymbol{\varphi}) \rangle = \Omega_0, \tag{23}$$

где усреднение производится по ансамблю гладких функций (10). Вычислим это среднее, пользуясь формулой (19) и симметричностью матрицы Ω

$$\langle (\boldsymbol{\varphi}, \Omega\boldsymbol{\varphi}) \rangle = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \langle \varphi_i \varphi_j \rangle = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \frac{1}{\alpha} (\Omega^{-1})_{ij} = \frac{n}{\alpha}. \tag{24}$$

Отсюда $\alpha = n / \Omega_0$.

Допустим теперь, что параметр α (или Ω_0), характеризующий гладкость функции $\boldsymbol{\varphi}$, априори нам неизвестен. Значит ли это, что регуляризация невозможна?

Легко видеть, что нерегуляризованное решение уравнения (1) есть бейесова оценка $\boldsymbol{\varphi}$ с априорной вероятностью $P(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{const}$. Но неопределенность величины α отнюдь не влечет предположения $P(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{const}$, ибо это предположение означает полное отсутствие корреляций между значениями φ_i. В то же время, если $\boldsymbol{\varphi}$ изображает непрерывную физическую функцию, то между значениями φ_i с близкими i должна существовать корреляция, хотя степень коррелированности (зависящая от параметра α) нам неизвестна и может быть произвольной. Такое предположение относительно $\boldsymbol{\varphi}$ описывается априорной вероятностью

$$P(\boldsymbol{\varphi}) = \int_0^\infty P(\alpha) P_\alpha(\boldsymbol{\varphi})\, d\alpha \tag{25}$$

где $P(\alpha)$ — априорная вероятность α, которую мы можем считать принимающей постоянное значение в любой сколь угодно большой области положительных α.

По формуле Бейеса получаем апостериорное распределение

$$P(\varphi|\mathbf{f}) = \frac{\int P(\alpha) P_\alpha(\varphi) P(\mathbf{f}|\varphi)\, d\alpha}{\int P(\alpha) P_\alpha(\varphi) P(\mathbf{f}|\varphi)\, d\alpha\, d\varphi}. \tag{26}$$

Рассмотрим произвольную функцию $F(\varphi)$ и ее среднее значение по распределению (26)

$$\langle F(\varphi)\rangle = \int P(\varphi|\mathbf{f}) F(\varphi)\, d\varphi. \tag{27}$$

Поставим перед собой задачу выразить $\langle F(\varphi)\rangle$ через интеграл по α от среднего значения той же функции по апостериорному ансамблю (14) в случае определенного α

$$\langle F(\varphi)\rangle_\alpha = \int P(\varphi|\mathbf{f}, \alpha) F(\varphi)\, d\varphi. \tag{28}$$

Вводя распределения

$$P(\mathbf{f}|\alpha) = \int P(\mathbf{f}|\varphi) P_\alpha(\varphi)\, d\varphi, \tag{29}$$

$$P(\alpha|\mathbf{f}) = \frac{P(\alpha) P(\mathbf{f}|\alpha)}{\int P(\alpha) P(\mathbf{f}|\alpha)\, d\alpha}, \tag{30}$$

находим

$$\langle F(\varphi)\rangle = \int \langle F(\varphi)\rangle_\alpha P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha. \tag{31}$$

Таким образом, $\langle F(\varphi)\rangle$ получается путем дополнительного усреднения $\langle F(\varphi)\rangle_\alpha$ по α с весовой функцией $P(\alpha|\mathbf{f})$, т. е. апостериорной плотностью вероятности параметра гладкости α при известном результате измерений $\mathbf{f}$.

Положив $P(\alpha) = \text{const}$, из (6), (10), (13), (29), (30) находим

$$P(\alpha|\mathbf{f}) = c_4 \alpha^{n/2} \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, [B + \alpha\Omega]\varphi) + (\mathbf{b}, \varphi)\right\} d\varphi, \tag{32}$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$P(\alpha|\mathbf{f}) = c_5 \alpha^{n/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{b}, [B + \alpha\Omega]^{-1}\mathbf{b})\right\} \cdot [\operatorname{Det}(B + \alpha\Omega)]^{-1/2}, \tag{33}$$

где c_5 не зависит от α и может быть найдено из условия нормировки с помощью численного интегрирования.

Положив $F(\varphi) = \varphi$, из (21) и (31) получаем

$$\langle\varphi\rangle = \int (B + \alpha\Omega)^{-1} \mathbf{b} P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha. \tag{34}$$

Вычислим дисперсию

$$\langle(\varphi_i - \langle\varphi_i\rangle)^2\rangle = \langle\varphi_i^2\rangle - \langle\varphi_i\rangle^2 = \int \langle\varphi_i^2\rangle_\alpha P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha - \langle\varphi_i\rangle^2. \tag{35}$$

Из (22) находим

$$\langle \varphi_i^2 \rangle_\alpha = ([B + \alpha\Omega]^{-1})_{ii} + \langle \varphi_i \rangle_\alpha^2. \tag{36}$$

Отсюда для квадрата ошибки восстановления получаем

$$\sigma_i^2 = \langle (\varphi_i - \langle \varphi_i \rangle)^2 \rangle = \int ([B + \alpha\Omega]^{-1})_{ii} P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha + \\ + \int \langle \varphi_i \rangle_\alpha^2 P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha - \left[\int \langle \varphi_i \rangle_\alpha P(\alpha|\mathbf{f})\, d\alpha \right]^2. \tag{37}$$

Вычисление по формулам (34) и (37) с помощью численного интегрирования является наиболее надежным способом восстановления функции φ и оценки ошибки восстановления. Однако если измерение $\mathbf{f}$ дает достаточно большое количество информации о параметре α, то функция $P(\alpha|\mathbf{f})$ будет иметь резкий максимум при некотором значении α_0. Тогда вместо усреднения по α можно воспользоваться формулами (21) и (22), положив (апостериори) $\alpha = \alpha_0$.

Величина α_0 есть по существу статистическая оценка параметра α по методу наибольшего правдоподобия. Структуру совокупности функций с априорным распределением (26) можно назвать «слоистой», понимая под слоями ансамбли гладких функций с различными α. Границы между этими слоями не являются определенными, так как ансамбли определяются вероятностно. Однако если задана функция φ, то можно с помощью методов математической статистики оценить значение α, характеризующее слой, из которого, по всей вероятности, была взята эта функция. Когда мы измеряем функцию $\mathbf{f}$ для определения функции φ, последняя нам, разумеется, не известна. Но известна вероятностная характеристика процесса, порождающего значения $\mathbf{f}$ при заданных значениях φ. Таким образом, для определения α получаем следующую двуступенчатую схему:

$$\alpha \xrightarrow{P_\alpha(\varphi)} \varphi \xrightarrow{P(f\,|\,\varphi)} \mathbf{f},$$

из которой находим условную вероятность $\mathbf{f}$ при заданном α, выражаемую формулой (30). Если эта функция известна, то оценка α по заданному $\mathbf{f}$ есть классическая задача математической статистики.

В работе [4] был предложен другой метод выбора α, а именно, метод нахождения наиболее гладкого допустимого ансамбля. Там же было показано, что величина α_0, найденная по этому методу, может рассматриваться как статистическая оценка параметра α. Метод наиболее гладкого допустимого ансамбля, развитый в [4], и метод наиболее вероятного ансамбля, изложенный в настоящей работе, приводят к близким результатам, асимптотически совпадающим, когда дисперсия оценки α стремится к нулю.

В некоторых случаях может оказаться, что мы располагаем более подробной априорной информацией об искомой функции φ, чем информация, выраженная формулами (10) или (25). Например, при определении вертикального профиля температуры атмосферы по инфракрасному спектру уходящего излучения (см. [5]) можно использовать результаты измерений профиля температуры в данном географическом пункте, выполнявшиеся в течение некоторого отрезка времени с помощью прямых методов. Эти результаты дают обильную информацию о статистической природе ожидаемой функции φ. С их помощью можно вычислить среднюю функцию

$$\varphi_0 = \langle \varphi \rangle_{\text{выб}} \tag{38}$$

и корреляционную матрицу C с элементами

$$C_{ij} = \langle (\varphi_i - \varphi_{0i})(\varphi_j - \varphi_{0j}) \rangle_{\text{выб}}. \tag{39}$$

В этих формулах усреднение проводится по конечной выборке, поэтому соответствующие величины надо рассматривать как выборочные. Не огра-

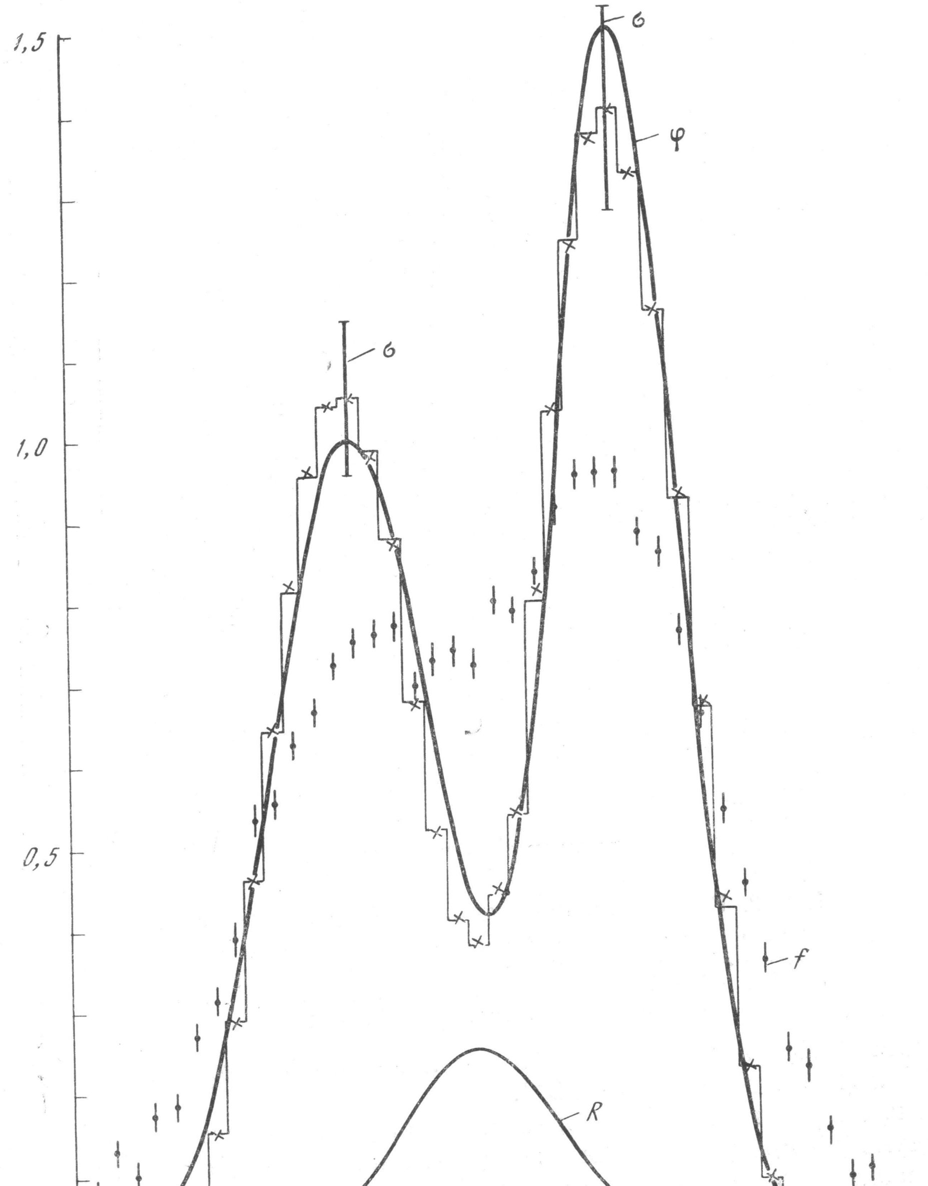

Рис. 1. Восстановление функции $\varphi(j)$ по результату ее свертки с кривой разрешения $R(j)$

ничивая общности, положим $\varphi_0 = 0$ (для этого требуется лишь незначительное переопределение правой части в уравнении (1)). Зная корреляционную матрицу C, в качестве априорного распределения для φ можно взять такое нормальное распределение, чтобы корреляционная матрица для него совпадала с C, т. е.

$$P(\varphi) = \mathrm{const} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, C^{-1}\varphi)\right\}. \tag{40}$$

Таким образом, знание корреляционной матрицы для φ дает нам регуляризующий функционал без всякой неопределенности в константе регу-

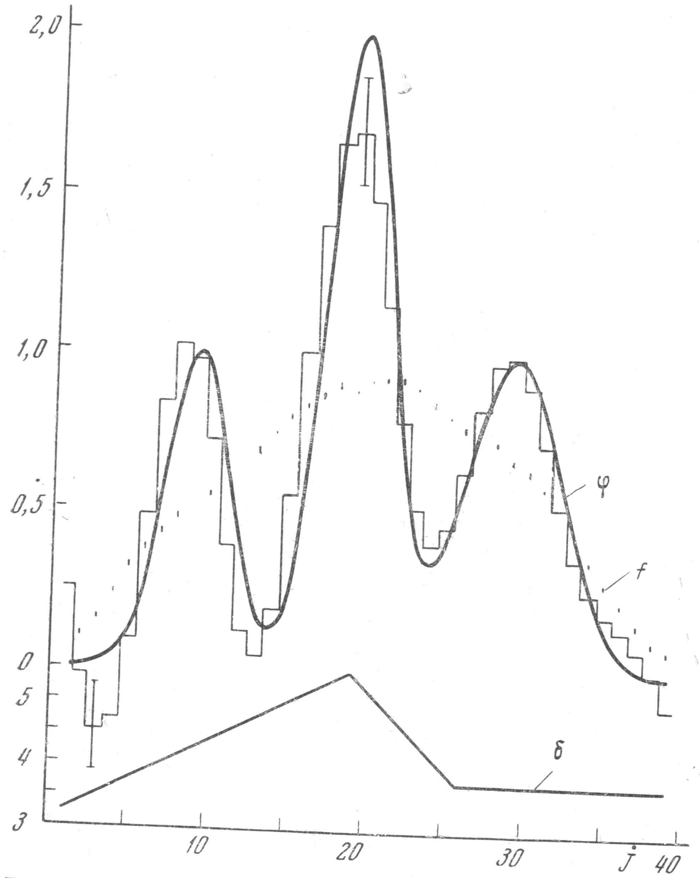

Рис. 2. Восстановление функции $\varphi(j)$ из интегрального уравнения с ядром $K(i, j)$, не являющимся разностным. Ядро $K(i, j)$ имеет вид гауссовой функции от $i - j$ с полушириной δ, зависящей от j. Эта зависимость показана в нижней части рисунка

ляризации. Восстановленную функцию и ее ошибку получаем по формулам (21) и (22), заменяя $\alpha\Omega$ на C^{-1}.

Для практического использования предложенного метода были написаны следующие программы для вычислительной машины М-20: ОБР-5 для случая разностного ядра K, включая решение с наивероятнейшим α и с усреднением по α по формуле (34); ОБР-6 — для произвольного ядра K и решения с наивероятнейшим α, ОБР-7 — для решения при заданной корреляционной матрице C. Приведем некоторые результаты расчетов.

На рис. 1 представлены результаты следующего математического эксперимента. Исходная функция φ бралась в виде суммы двух гауссианов. Затем она свертывалась с функцией разрешения R (случай разностного ядра) и к результату прибавлялась случайная ошибка, распределенная по нормальному закону. Полученная таким образом функция $\mathbf{f}$, имитирующая результат эксперимента, бралась в качестве правой части уравнения (1) и проводилось восстановление φ с помощью программы ОБР-5. Результаты восстановления вместе с теоретической ошибкой восстановления показаны крестиками для случая наивероятнейшего α (режим 2) и в виде гистограммы для случая усреднения по α (режим 3). Как видим, они весьма близки.

На рис. 2 представлен результат аналогичного эксперимента с программой ОБР-6. Ядро K было взято в виде гауссовой кривой с переменной полушириной, показанной ломаной линией в нижней части.

На рис. 3 представлены кривые зависимости $P(\alpha|\mathbf{f})$ от α для двух описанных экспериментов.

На рис. 4 представлен результат эксперимента с программой ОБР-7. Сплошная кривая — исходный температурный профиль (отклонение от средней температуры T'), пунктирная — результат восстановления по программе ОБР-7.

Физические предпосылки определения температурного профиля атмосферы по измерениям излучения Земли со спутников и процедура линеаризации уравнения описаны в [5] и мы на этом останавливаться не будем.

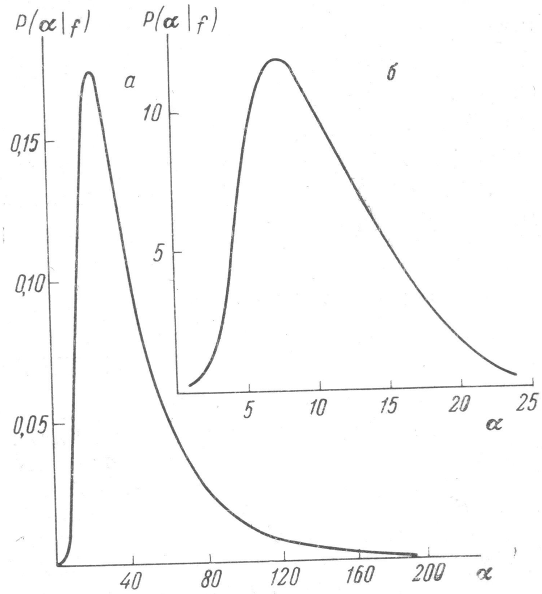

Рис. 3. Апостериорное распределение вероятностей параметра α для случаев, изображенных на рис. 1 (кривая *а*) и 2 (кривая *б*)

Задача определения температурного профиля атмосферы по спектру отраженного излучения привлекает в настоящее время внимание многих исследователей. Поскольку эта задача является некорректной, она требует регуляризации, т. е. привнесения (в более или менее явной форме) дополнительной информации об искомых функциях. В работе [6] регуляризация производится

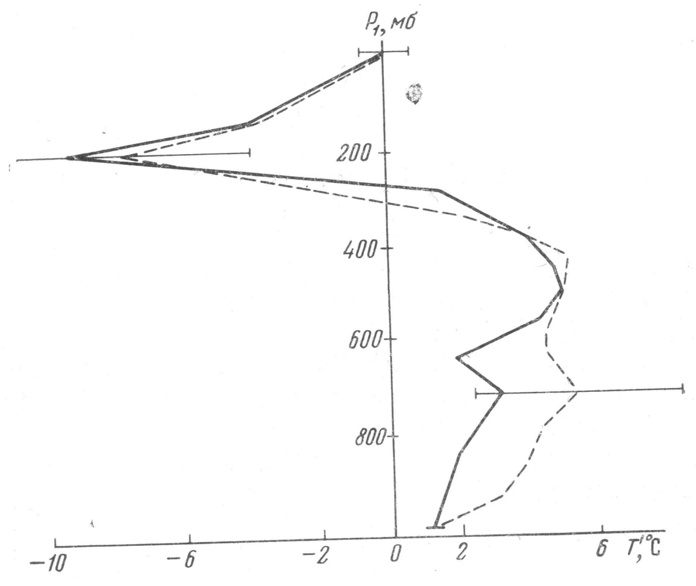

Рис. 4. Восстановление температурного профиля атмосферы по спектру проходящего излучения (математический эксперимент)

путем отбрасывания неинформативных собственных функций. В работе [7] производится регуляризация по методу А. Н. Тихонова. Отличительной чертой метода статистической регуляризации является точная и соответствующая природе объекта форма, в которой вносится априорная информация. Это дает следующие преимущества.

1) ясное представление о сущности регуляризации и о границах ее применимости,

2) однозначную статистическую оценку погрешности результата восстановления,

3) однозначную статистическую оценку параметра регуляризации при априорной информации в виде слоистого ансамбля (см. формулу (25)).

Авторы выражают благодарность М. С. Малкевичу за предоставление материалов для численных расчетов и обсуждение результатов.

Академия наук СССР
Институт прикладной математики

Поступила в редакцию
26 февраля 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J. Assoc. Comp. Mach., 9, No. 1, 1962.
2. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, 151, № 3, 1963.
3. Турчин В. Ф. Решение уравнения Фредгольма 1-го рода в статистическом ансамбле гладких функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 7, № 6, 1967.
4. Турчин В. Ф. Выбор ансамбля гладких функций при решении обратной задачи. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 8, № 1, 1968.
5. Малкевич М. С., Татарский В. И. Определение вертикального профиля температуры атмосферы по уходящему излучению в полосе поглощения CO_2. Космические исследования, 3, вып. 3, 1964.
6. Козлов В. П. О восстановлении высотного профиля температуры по спектру уходящего излучения. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 2, № 2, 1966.
7. Гласко В. Б., Тимофеев Ю. М. Использование метода регуляризации для решения задачи термического зондирования атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 3, 1968.

THE STATISTICAL REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF INCORRECT PROBLEMS

V. F. TURCHIN, V. Z. NOZIK

So called «reciprocal» problems which are often encountered in geophysics (for instance, the determination of the atmosphere properties by characteristics of transfered radiation) are as a rule mathematically incorrect. To solve such a problem one must have some additional information about the function to be found. In the present paper this information is given by an apriopi probability distribution and the approach to the problem is entirely statistical. With a definite choice of the apriori distribution the resulting function obeys the regularized equation of Phillips and Tikhonov but the present approach implies the general algorithm of the determination of the constant of regularization α and of statistical errors in resulted function. Several computer programmes based on the proposed method were written. To check the method some mathematical experiments were accomplished.