

**Вступительное испытание НИУ ВШЭ 2018 г.**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Время выполнения задания — 240 мин.**

Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов. Допускается использование бухгалтерского калькулятора и таблиц статистических распределений; черновики собираются, но не проверяются.

**Задача 1 (Теория чисел).** Найти наибольшее натуральное  $k$  такое, что при любом нечетном  $n$  число  $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$  делится нацело на  $2^k$ .

**Задача 2 (Математический анализ).** Вычислить двойной интеграл  $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где  
 $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq x \leq 2y \leq 4x\}$ .

**Задача 3 (Алгебра).** Пусть для  $j = 0, \dots, n$   $a_j = a_0 + jd$ , где  $a_0, d$  фиксированные действительные числа. Вычислить определитель матрицы  $A$  размера  $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

**Задача 4 (Алгоритмы).** Имеется бинарное дерево размера  $n$ , причём известно, что для любой вершины высота левого поддерева равна высоте правого. Для каждой вершины известны указатели на левого сына, правого сына и непосредственного предка.

(а) Напишите псевдокод функции, принимающей два указателя на вершины данного дерева и возвращающей указатель на их наименьшего общего предка. Оцените количество операций перехода по указателям, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать функция.

(б) Оптимизируйте алгоритм, чтобы он работал за время  $O(\log n)$ , а дополнительной памяти использовал  $O(1)$ .

**Задача 5 (Алгоритмы).** (а) Напишите псевдокод для процедуры `inplace rotate`. Данная процедура принимает на вход массив с  $n$  элементами и параметр  $k$  и должна поменять местами блок элементов с 1-го по  $k$ -й с блоком элементов с  $(k+1)$ -го по  $n$ -й. Порядок внутри блоков не должен меняться. Оцените число операций чтения и записи, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать процедура.

(б) Оптимизируйте процедуру так, чтобы она требовала  $O(1)$  дополнительной памяти и  $O(n)$  времени.

**Задача 6 (Графы).** В плоском двусвязном графе 8 граней (считая внешнюю) — 3 треугольника, 4 четырёхугольника и пятиугольник. Сколько в этом графе вершин и рёбер? Приведите пример диаграммы графа.

**Задача 7 (Оптимизация).** Решить задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{при условии, что} \\ x^T P x - q^T x + w \leq 0 \end{aligned}$$

где  $A \in R^{m \times n}$  ( $\text{rank}(A) = m$ ),  $b \in R^m$ ,  $P$  — положительно определенная симметричная матрица,  $q \in R^n$ ,  $w \in R$ .

**Задача 8 (Алгебра).** Пусть дана матрица  $P$ , такая, что  $P^2 = P$  (такая матрица называется идемпотентной относительно умножения), а  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ее собственные числа. Докажите, что  $\sum_i \lambda_i \leq n$ .

**Вступительное испытание НИУ ВШЭ 2018 г.**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Задача 9 (Теория вероятностей).** Независимые случайные величины  $X, Y$  и  $Z$  принимают только целые значения:  $X$  – от 1 до 15 с вероятностью  $1/15$ ,  $Y$  – от 1 до 10 с вероятностью  $1/10$ ,  $Z$  – от 1 до 8 с вероятностью  $1/8$ . Найти вероятность того, что  $X, Y$  и  $Z$  примут различные значения ( $X \neq Y, Y \neq Z, Z \neq X$ ).

**Задача 10 (Математическая статистика).** Демограф желает найти приближенный доверительный интервал для вероятности рождения мальчика. Известно, что выборочная доля родившихся мальчиков составляет за год (365 дней)  $\hat{p} = 0,53$ . Найдите приближенный доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность рождения мальчика с надежностью  $\gamma = 0,95$ .