А. Н. Тихонов, О регуляризации некорректно поставленных задач, *Докл. АН СССР*, 1963, том 153, номер 1, 49–52

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 153, № 1

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода, задаче Коши для уравнения эллиптического типа, задаче аналитического продолжения и т. д. Некорректно поставленные задачи в последнее время привлекают к себе большое внимание (см., например, ([1]), где приводится литература по этому вопросу).

Задача R определения функции $z(s) \in Z$ по данной функции $u(x) \in U$: $z(s) = R[s, u(x)]$ (где Z и U — соответствующие функциональные пространства) называется корректно поставленной, если:

1°. Всякой функции $u(x) \in U$ соответствует решение задачи $z(s)$.

2°. Решение $z(s)$ заданием $u(x)$ определяется однозначно.

3°. Решение задачи $z(s)$ непрерывно зависит от $u(x)$ в метриках Z и U.

Пусть дана некорректная задача $z = R[s, u]$. В качестве иллюстрирующего примера будем брать уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, z(s)] = \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \qquad c \leqslant x \leqslant d. \tag{1}$$

Не всякой функции $\bar{u}(x)$ соответствует решение задачи $\bar{z}(s)$.

Рассмотрим следующий вопрос о решении некорректно поставленных задач.

Известно, что некоторой функции $\bar{u}(x)$ соответствует решение задачи $\bar{z}(s) = R[s, \bar{u}(x)]$; пусть задана функция $\tilde{u}(x)$, приближение $\bar{u}(x)$ с известной точностью δ: $\| \bar{u}(x) - \tilde{u}(x) \| < \delta$. Определить $\tilde{z}(s)$ — приближенное значение $\bar{z}(s)$ с заданной точностью $\| \tilde{z}(s) - \bar{z}(s) \|_z \leqslant \varepsilon$, если δ — точность задания $\tilde{u}(x)$ — достаточно мала. При этом $\tilde{z}(s)$ совсем не обязано быть равным $R[s, \tilde{u}(x)]$, которое вообще может не существовать.

Будем называть оператор (или алгоритм) $R_\delta[s, u(x)]$ регуляризующим, если:

1°. $R_\delta[s, \tilde{u}(x)]$ определен для всех $\tilde{u} \in U$ и $\delta > 0$.

2°. Если для $\bar{u}(x)$ существует $\bar{z}(s) = R[s, \bar{u}(x)]$, то для любого ε существует такое $\delta(\varepsilon, \bar{z})$, что если $\| \tilde{u}(x) - \bar{u}(x) \|_U < \delta$, то $\| \tilde{z}_\delta(s) - \bar{z}(s) \|_Z \leqslant \varepsilon$, где $\tilde{z}_\delta(s) = R_\delta[s, \tilde{u}]$.

Будем называть задачу $z(s) = R[s, u(x)]$ регуляризуемой, если она допускает хотя один регуляризующий алгоритм.

Очевидно, что если задача $z = R[s, u]$ корректна, то она регуляризуема, так как, полагая $R_\delta[s, u] = R[s, u]$ для любых δ, получим регуляризующий алгоритм.

В зависимости от нормы z мы можем различать слабую регуляризацию, равномерную регуляризацию и регуляризацию n-го порядка гладкости.

Регуляризующие алгоритмы представляют практический способ решения некорректных задач.

В ([2]) дан равномерно регуляризующий алгоритм для уравнений первого рода. В настоящей статье для этого же класса задач приводятся регуляризующие алгоритмы n-го порядка гладкости.

1. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода (1) и будем для простоты предполагать, что ядро непрерывно и при $\bar{u}(x) = 0$ имеется лишь единственное решение $\bar{z}(\delta) \equiv 0$. Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M_n^\alpha [z(s); \bar{u}(x)] = N[z(s); \bar{u}(x)] + \alpha\Omega^{(n)}[z], \tag{2}$$

где

$$N[z(s); \bar{u}(x)] = \int_c^d [A[x, z(s)] - \bar{u}(x)]^2 dx$$

и регуляризующий функционал

$$\Omega^{(n)}[z] = \int_a^b \left\{\sum_{i=0}^{n+1} K_i(s)(z^{(i)}(s))^2\right\} ds,$$

где $K_i(s)$ — непрерывные функции, $K_i(s) > 0$.

Теорема 1. *Для любой функции $\bar{u}(x) \in L_2$ и любого $\alpha > 0$ существует единственная $2(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция $z_n^\alpha(s)$, реализующая минимум сглаживающего функционала $M_n^\alpha[z, \bar{u}(x)]$.*

Функция $z_n^\alpha(s)$ определяется уравнением Эйлера

$$L_n^\alpha[z] = \alpha\left\{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{ds^i}\left(K_i(s)\frac{d^i z}{ds^i}\right)\right\} - \left\{\int_a^b \bar{K}(s, \zeta)\, z(\zeta)\, d\zeta - \bar{b}(s)\right\} = 0 \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\pi^l(s) = \left\{\sum_{i=l+1}^{n+1}(-1)^{i-l-1}[K_i(s)\, z^i(s)]^{(i-l-1)}\right\}\Bigg|_{a,b} = 0 \quad (l = 1, \ldots, n+1), \tag{4}$$

где

$$\bar{K}(s, \zeta) = \int_a^b K(\xi, s)\, K(\xi, \zeta)\, d\xi, \qquad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s)\, \bar{u}(\xi)\, d\xi.$$

С помощью функции Грина для краевой задачи

$$\tilde{L}_n[z] = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{ds^i}[K_i z^{(i)}] = f, \quad \pi^l(a) = \pi^l(b) = 0, \quad l = 1, \ldots, n+1,$$

уравнение (3) преобразуется в уравнение Фредгольма второго рода, имеющее при $\alpha > 0$ лишь тривиальное решение, что и доказывает существование функции $z_n^\alpha(s)$.

Теорема 1'. *Для любой функции $\bar{u}(x) \in L_2$ и любого $\alpha > 0$ существует функция $z_{(-1)}^\alpha(s) \in L_2$, реализующая минимум функционала $M_{(-1)}^\alpha[z, \bar{u}]$.*

Эта функция определяется как решение уравнения

$$\alpha K_0(z)\, z(s) = \int_a^b \bar{K}(s, \xi)\, z(\xi)\, d\xi - \bar{b}(s), \tag{3*}$$

для которого соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2. *Если $\bar{u}(x) = A[x, \bar{z}(s)]$, $\bar{z} \in \bar{C}^{(n+1)}$, то для любого $\varepsilon > 0$ и вспомогательных чисел $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ существуют такое $\delta(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, что если: 1) $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} \leqslant \delta$, где $\tilde{u}_\delta(x) \in L_2$; 2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ имеет по-*

рядок δ^2: $\gamma_1 \leqslant \delta^2/\bar{\alpha}(\delta) \leqslant \gamma_2$, *то* $\tilde{z}^{\bar{\alpha}}_{\delta, n}(s)$, *реализующие минимум функционала* $M^{\bar{\alpha}}_n[z, \tilde{u}_\delta(x)]$, *таковы, что*

$$|z^{\bar{\alpha}}_{\delta, n}(s)^{(i)} - \bar{z}(s)^{(i)}| \leqslant \varepsilon, \quad a \leqslant s \leqslant b, \quad i = 0, \ldots, n,$$

при $\delta < \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$.

Теорема 2'. *Если* $\bar{u}(x) = A[x, \bar{z}(s)]$, $\bar{z} \in L_2$, *то для любого* ε *и вспомогательных чисел* $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2$ *существует такое* $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, *что если*: 1) $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} \leqslant \delta$, *где* $\tilde{u}_\delta(x) \in L_2$; 2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ *имеет порядок* δ^2: $\gamma_1 \leqslant \delta^2/\bar{\alpha}(\delta) \leqslant \gamma_2$, *то* $z^{\bar{\alpha}(\delta)}_{\delta, n}(s)$, *реализующая минимум функционала* $M^{\bar{\alpha}(\delta)}_n[z, \tilde{u}_\delta(x)]$, *сходится слабо к* $\bar{z}(s)$.

Из теорем 1, 2 и 1', 2' следует, что решение краевой задачи (3), (4) представляет регуляризирующий алгоритм n-го порядка гладкости, если $\bar{z} \in C^{n+1}$ и решение уравнения (3*) представляет алгоритм слабой регуляризации для $\bar{z} \in L_2$.

Аналогично ([2]) все эти результаты переносятся на многомерные задачи и на операторные уравнения первого рода

$$A[x, z(s)] = \bar{u}(x),$$

где $A[x, z]$ — оператор, действующий из C в L_2, ограниченный в том смысле, что почти для всякого x

$$|A[x, z(s)]| \leqslant A(x) \|z\|_C, \qquad \int_c^d A^2(x)\,dx = A_0 < +\infty.$$

Конечноразностная аппроксимация рассматриваемой задачи трактуется аналогично ([2]):

2. Рассмотрим весьма важный специальный случай рассматриваемой задачи, когда

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = \bar{u}(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

(т. е. когда $a = c$, $b = d$) и когда для $K(x, s)$ существует ядро половинного порядка, т. е.

$$K(x, s) = \int_{c'}^{d'} \hat{K}(\xi, x)\, \hat{K}(\xi, s)\, d\xi.$$

В этом случае алгоритм для получения $z^\alpha(s)$ упрощается. Уравнение для определения $z^\alpha(s)$ можно писать в виде

$$L^{(\alpha)}_n[z] = \alpha \tilde{L}_n[z] - \left\{\int_a^b K(s, \zeta)\, z(\zeta)\, d\zeta - \bar{u}(s)\right\} = 0 \tag{3'}$$

с условиями

$$\pi^l(a) = \pi^l(b) - 0 \quad (l = 1, \ldots, n + 1). \tag{4'}$$

В самом деле, рассмотрим функцию

$$v(\xi) = \int_a^b K(\xi, s)\, z(s)\, ds, \qquad c' \leqslant \xi \leqslant d'.$$

Поставим задачу: считая $v(\xi)$ заданной функцией, найти $z(s)$. Эта задача эквивалентна исходной и определяет ту же функцию $z(s)$. Применяя к этой задаче изложенный выше основной алгоритм, получим для определения $z^{\alpha}(s)$ задачу (3*),(4*), непосредственно определяемую заданием $K(x, s)$, $\bar{u}(x)$.

3. К рассматриваемому специальному случаю (п. 2) относится задача о продолжении потенциала в сторону возмущающих масс, определяемая уравнением Пуассона

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{(x-s)^2+h^2}z(s)\,ds=\bar{u}(x), \qquad c\leqslant x\leqslant d.$$

Если $z(s)$ отлична от нуля только для $a\leqslant s\leqslant b$ и (c, d) — область задания $\bar{u}(x)$ — содержит (a, b), то можно пользоваться специальным алгоритмом (3′), (4′). Если же (c, d) не содержит (a, b), то надо пользоваться общим алгоритмом (3), (4).

Аналогичные соображения относятся как к обратной задаче теплопроводности обычного типа

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-(x-s)^2/4a^2t}z(s)\,ds=u(x),$$

так и к обратной задаче второго типа, соответствующей задаче определения исторического климата [3].

Задача об аналитическом продолжении с дуги L_1 на контур L_2, определяемая уравнением

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (z\subset L_1,\ \zeta\subset L_2)$$

решается при помощи основного алгоритма.

Задачи оптимального регулирования приводят к некорректно поставленным вариационным задачам, и метод регуляризации находит применение также и при решении этих задач.

Изложенные методы испытаны на электронных вычислительных машинах и дали весьма эффективные результаты.

Поступило
15 VIII 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, О решении некоторых некорректно поставленных задач, Новосибирск, 1963. [2] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). [3] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 42, 199 (1935).