Matrice ONI 2023 X Writeup

Camburu Luca

25 Iunie 2025

1 Introducere

Bucata asta va fi realizată numai pentru a da continuitate sursei de pe kilonova (aici) pentru cei ce nu vor să citească editorialul dat de comisie. Mai mult, acest document e doar un exercițiu de latex, întrucât, pe lângă faptul că soluția mea e diferită de cele oficiale, mai e si destul de laborioasă (ca întotdeauna, din ce observ).

2 Partea inteligibilă și comună

Notăm matricea dată cu A. Fie un element din matrice $A[i][j]$.

Notăm rațiile de pe linii cu $l[i]$, iar cele de pe coloane cu $c[i]$.

Avem $A[i][j] = A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[i]$.
În același timp, avem $A[i][j] = A[1][1] + (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$
Doar am ales 2 drumuri diferite (primul e $(1,1) \to (i,1) \to (i,j)$, iar al doilea e $(1,1) \to (1,j) \to (i,j)$).

Avem $A[i][j] = A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[i] = A[1][1] + (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$
Adică $(i-1)c[1] + (j-1)l[i] = (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$
Grupăm termenii și ajungem la

$$(i-1)(c[1]-c[j]) = (j-1)(l[1]-l[i]), \forall i \in [2,n], \forall j \in [2,m]$$

Avem

$$\frac{c[j]-c[1]}{j-1} = \frac{l[i]-l[1]}{i-1}$$

$$\frac{c[j]-c[1]}{j-1} = \frac{l[i]-l[1]}{i-1} = \frac{l[i+1]-l[1]}{i+1-1}$$

(doar am ales următoarea linie și același j)

$$\frac{l[i]-l[1]}{i-1} = \frac{l[i+1]-l[1]}{i} = \frac{l[i]-l[1]-l[i+1]+l[1]}{i-1-i} = \frac{l[i]-l[i+1]}{-1} = l[i{+}1]{-}l[i]$$

$$\frac{c[j]-c[1]}{j-1} = l[i+1]-l[i] \Rightarrow$$

diferențele dintre rațille oricăror 2 linii consecutive sunt constante.

Pe același principiu,

$$l[i{+}1]{-}l[i] = \frac{c[j]-c[1]}{j-1} = \frac{c[j+1]-c[1]}{j+1-1} = \frac{c[j]-c[1]-c[j+1]+c[1]}{j-1-j} = \frac{c[j]-c[j+1]}{-1} = c[j{+}1]{-}c[j]$$

$$l[i+1]-l[i] = c[j+1]-c[j], \forall i \in [2, n-1] \forall j \in [2, m-1]$$

Notăm această rație a rațiilor cu R. Astfel, un element $A[i][j]$ se poate exprima în funcție de $(A[1][1], l[1], c[1], R)$

Scriem

$$A[i][j] = A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[i]$$

Adică

$$A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)(l[1] + (i-1)R)$$

$$A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[1] + (i-1)(j-1)R,$$

$\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, m]$

Vrem elementul cel mai mare, iar toate variabilele sunt pozitive, așadar cel mai mare element este $A[N][M]$.
Ce vrem să aflăm este numărul soluțiilor inecuației

$$A[1][1] + (N-1)c[1] + (M-1)l[1] + (N-1)(M-1)R \leq T$$

cu următoarele condiții:

$$\begin{cases} A[1][1] \geq 0, \\ c[1] \geq 1, \\ l[1] \geq 1, \\ R \geq 0 \end{cases}$$

3 *Panaetism* și algebruh

3.1

$A[1][1]$ este cam foarte liber, așadar, în loc de 4 variabile, ajungem la 3, având de calculat de fapt

$$answer = \sum_{(c[1],l[1],R)} T - (N-1)c[1] - (M-1)l[1] - (N-1)(M-1)R + 1$$

Doar am trecut restul chestiilor în cealaltă parte.
Complexitatea $O(T^3)$ se face de aici ușor.

3.2

Pentru mai mult, fixăm R și notăm cu

$$d_A = \sum_{(c[1],l[1])}^{expr>0} A + 1 - (N-1)c[1] - (M-1)l[1]$$

Ce rămâne de calculat este

$$\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{T}{(N-1)(M-1)} \rfloor} d_{T-(N-1)(M-1)R}$$

Prin $expr > 0$, mă refer la faptul că $A + 1 - (N-1)c[1] - (M-1)l[1] \geq 0$. Pentru calculul unui d_A cu A fixat, mai fixăm și $c[1]$, astfel având

$$A + 1 - (N-1)c[1] \geq (M-1)l[1]$$

$$1 \leq l[1] \leq \frac{A + 1 - (N-1)c[1]}{M-1}$$

Așadar, sunt $\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor$ valori pe care le poate lua $l[1]$ pentru a respecta inegalitatea. Expresia lui d_A se reduce la

$$\sum_{c[1]=1}^{\lfloor \frac{A+1}{N-1} \rfloor} (A+1-(N-1)c[1]) \lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor - (M-1) \frac{(\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor)(\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor + 1)}{2},$$

care se poate calcula în $O(T^2)$, chiar dacă arată monstruos (o să ajungă **mult** mai rău).

3.3

Observația esențială constă în valorile în care trebuie să calculăm suma. Astfel, are loc o trecere $A \to A + (N-1)(M-1)$, așa că multe expresii se simplifică.

Pentru început, redefinim răspunsul ca fiind,

$$\sum_{i=1} d_{A_i},$$

unde $\begin{cases} A_1 = T \bmod ((N-1)(M-1)) \\ A_i = A_{i-1} + (N-1)(M-1) \\ A_i \leq T \end{cases}$

Acum vom căuta să vedem cum realizăm tranziția $A_i \to A_{i+1}$ în $O(T)$.

Avem

$$d_{A_{i+1}} = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1]\right)\left(\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right) - (M-1)\frac{\left(\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right)\left(\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right)}{2} \right)$$

$$= \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1+(N-1)(M-1)}{N-1} \right\rfloor} \left(\left(A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]\right)\left(\left\lfloor \frac{A_i+1+(N-1)(M-1)-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right) - (M-1)\frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right)\left(\left\lfloor \frac{A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor\right)}{2} \right)$$

$$= \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + M-1} \left(\left(A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]\right)\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1\right) - (M-1)\frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1\right)\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N\right)}{2} \right)$$

Pentru intervalul $\left[\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \rfloor + M - 1\right]$, calculul expresiei se poate realiza brut, deoarece se vor efectua cel mult $O(M)$ operații, care se amortizează la $O(T)$ complexitate totală. Voi nota rezultatul acestui calcul cu B.

Expresia devine

$$B+\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Bigg(\Big(A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)$$

$$-(M-1)\frac{\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N\Big)}{2}\Bigg)$$

$$=B+\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Bigg(\Big(A_{i+1}+1-(N-1)c[1]\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)$$

$$-(M-1)\frac{\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N\Big)}{2}\Bigg)$$

$$=B+\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Bigg(\Big(A_{i+1}+1-(N-1)c[1]\Big)(N-1)+\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor\Big)\Big(A_{i+1}+1-(N-1)c[1]\Big)$$

$$-(M-1)\frac{\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N\Big)}{2}\Bigg)$$

$$=B+(N-1)\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Big(A_{i+1}+1-(N-1)c[1]\Big)$$

$$+\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor\Big)\Big(A_{i+1}+1-(N-1)c[1]\Big)$$

$$-\frac{M-1}{2}\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1}\right\rfloor}\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N-1\Big)\Big(\Big\lfloor\frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1}\Big\rfloor+N\Big)$$

$$= B + (N-1)(A_{i+1}+1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

$$+(A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)$$

$$-\frac{M-1}{2} \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N(N-1) \right)$$

$$= B + (N-1)(A_{i+1}+1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

$$+(A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)$$

$$-\frac{M-1}{2} \left(\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} N(N-1) \right)$$

$$= B + (N-1)(A_{i+1}+1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

$$+(A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)$$

$$-\frac{M-1}{2} \left(N(N-1) \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)$$

Cred că vedeți deja unde mă duc cu chestia asta. De aici, definim 3 șiruri astfel:

$$\begin{cases} \alpha_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \\ \beta_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 \\ \gamma_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \end{cases}$$

Răspunsul devine

$$= B + (N-1)(A_{i+1}+1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

$$+(A_{i+1}+1)\alpha_{A_i} - (N-1)\gamma_{A_i} - \frac{M-1}{2}\left(N(N-1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + \beta_{A_i} + (2N-1)\alpha_{A_i} \right).$$

De aici, singura responsabilitate este de a determina recurențele celor 3 șiruri. Ele se vor realiza asemănător cu ce am făcut până acum.

Voi nota bucățile realizate brut, prin același argument ca pentru șirul d, cu A, B și Γ, după șirul pe care-l reprezintă.

$$\alpha_{A_{i+1}} = A + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right)$$

$$\alpha_{A_{i+1}} = A + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} (N-1)$$

$$\boxed{\alpha_{A_{i+1}} = A + \alpha_{A_i} + (N-1)\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor}$$

Pentru β, avem

$$\beta_{A_{i+1}} = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right)^2$$

$$\beta_{A_{i+1}} = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + 2(N-1)\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + (N-1)^2 \right)$$

$$\beta_{A_{i+1}} = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + 2(N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} (N-1)^2$$

$$\boxed{\beta_{A_{i+1}} = B + \beta_{A_i} + 2(N-1)\alpha_{A_i} + (N-1)^2 \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor}$$

Iar pentru γ, avem

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \Big(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \Big)$$

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \Big(c[1](N-1) + c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \Big)$$

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor$$

$$\boxed{\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + (N-1) \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \Big(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \Big)}{2} + \gamma_{A_i}}$$

Pentru a menține aceste șiruri, se utilizează variabile simple de tip `int`, întrucât este nevoie la fiecare pas doar de termenul anterior. Complexitate $O(T)$, iar memorie $O(1)$. Se mai poate și precalcula inversul modular al lui 2, dacă este nevoie, însă aritmetica modulară nu dă bătăi de cap aici.

Pentru cazurile $N = 1$ sau $M = 1$ sau combinate, răspunsurile se realizează prin analizarea formulei lui $A[N][M]$, care se simplifică extraordinar de mult. Ajung niște sume Gauss, asemănător cu ce am făcut până acum.

4 Concluzie

Din simplul motiv că trebuie să evaluezi doar în puncte din $(N-1)(M-1)$ în $(N-1)(M-1)$, se reduc părțile întregi și expresia se simplifică, nu foarte mult, dar suficient pentru $O(T)$. Nu recomand această soluție, pentru că cele oferite de comisie sunt mult mai elegante și mai ușor de scris, poate chiar și de gândit. Eu m-am obișnuit cu felul ăsta de spargeri foarte laborioase, care, deși sunt greoaie, ajung la răspunsul corect. Așa că nu m-am gândit deloc la ecuații diofantice, MUULT mai ușor de băgat și mult mai documentate. Ca idee, în concurs tot soluția asta aș fi încercat-o, pentru că nu știu dacă stăpânesc algoritmul lui Euclid extins așa de bine, iar soluția cu programare dinamică din editorial încă mi-e neclară (în sensul ca nu înțeleg de ce ar fi alea singurele recurențe posibile).