

Matrice ONI 2023 X Writeup

Camburu Luca

25 Iunie 2025

1 Introducere

Bucata asta va fi realizată numai pentru a da continuitate sursei de pe kilonova (aici) pentru cei ce nu vor să citească editorialul dat de comisie. Mai mult, acest document e doar un exercițiu de latex, întrucât, pe lângă faptul că soluția mea e diferită de cele oficiale, mai e și destul de laborioasă (ca întotdeauna, din ce observ).

2 Partea inteligibilă și comună

Notăm matricea dată cu A . Fie un element din matrice $A[i][j]$.

Notăm rațiile de pe linii cu $l[i]$, iar cele de pe coloane cu $c[j]$.

Avem $A[i][j] = A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[i]$.

În același timp, avem $A[i][j] = A[1][1] + (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$

Doar am ales 2 drumuri diferite (primul e $(1, 1) \rightarrow (i, 1) \rightarrow (i, j)$, iar al doilea e $(1, 1) \rightarrow (1, j) \rightarrow (i, j)$).

Avem $A[i][j] = A[1][1] + (i-1)c[1] + (j-1)l[i] = A[1][1] + (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$

Adică $(i-1)c[1] + (j-1)l[i] = (j-1)l[1] + (i-1)c[j]$

Grupăm termenii și ajungem la

$$(i-1)(c[1] - c[j]) = (j-1)(l[1] - l[i]), \forall i \in [2, n], \forall j \in [2, m]$$

Avem

$$\frac{c[j] - c[1]}{j-1} = \frac{l[i] - l[1]}{i-1}$$

$$\frac{c[j] - c[1]}{j-1} = \frac{l[i] - l[1]}{i-1} = \frac{l[i+1] - l[1]}{i+1-1}$$

(doar am ales următoarea linie și același j)

$$\frac{l[i] - l[1]}{i - 1} = \frac{l[i + 1] - l[1]}{i} = \frac{l[i] - l[1] - l[i + 1] + l[1]}{i - 1 - i} = \frac{l[i] - l[i + 1]}{-1} = l[i + 1] - l[i]$$

$$\frac{c[j] - c[1]}{j - 1} = l[i + 1] - l[i] \Rightarrow$$

diferențele dintre rațiile oricăror 2 linii consecutive sunt constante.

Pe același principiu,

$$l[i + 1] - l[i] = \frac{c[j] - c[1]}{j - 1} = \frac{c[j + 1] - c[1]}{j + 1 - 1} = \frac{c[j] - c[1] - c[j + 1] + c[1]}{j - 1 - j} = \frac{c[j] - c[j + 1]}{-1} = c[j + 1] - c[j]$$

$$l[i + 1] - l[i] = c[j + 1] - c[j], \forall i \in [2, n - 1] \forall j \in [2, m - 1]$$

Notăm această rație a rațiilor cu R . Astfel, un element $A[i][j]$ se poate exprima în funcție de $(A[1][1], l[1], c[1], R)$

Scriem

$$A[i][j] = A[1][1] + (i - 1)c[1] + (j - 1)l[i]$$

Adică

$$A[1][1] + (i - 1)c[1] + (j - 1)(l[1] + (i - 1)R)$$

$$A[1][1] + (i - 1)c[1] + (j - 1)l[1] + (i - 1)(j - 1)R,$$

$$\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, m]$$

Vrem elementul cel mai mare, iar toate variabilele sunt pozitive, așadar cel mai mare element este $A[n][m]$.

Ce vrem să aflăm este numărul soluțiilor inecuației

$$A[1][1] + (N - 1)c[1] + (M - 1)l[1] + (N - 1)(M - 1)R \leq T$$

cu următoarele condiții:

$$\begin{cases} A[1][1] \geq 0, \\ c[1] \geq 1, \\ l[1] \geq 1, \\ R \geq 0 \end{cases}$$

3 *Panaetism* și algebruh

3.1

$A[1][1]$ este cam foarte liber, așadar, în loc de 4 variabile, ajungem la 3, având de calculat de fapt

$$answer = \sum_{(c[1], l[1], R)} T - (N-1)c[1] - (M-1)l[1] - (N-1)(M-1)R + 1$$

Doar am trecut restul chestiilor în cealaltă parte.
Complexitatea $O(T^3)$ se face de aici ușor.

3.2

Pentru mai mult, fixăm R și notăm cu

$$d_A = \sum_{(c[1], l[1])}^{expr > 0} A + 1 - (N-1)c[1] - (M-1)l[1]$$

Ce rămâne de calculat este

$$\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{T}{(N-1)(M-1)} \rfloor} d_{T-(N-1)(M-1)R}$$

Prin $expr > 0$, mă refer la faptul că $A + 1 - (N-1)c[1] - (M-1)l[1] \geq 0$.
Pentru calculul unui d_A cu A fixat, mai fixăm și $c[1]$, astfel având

$$A + 1 - (N-1)c[1] \geq (M-1)l[1]$$

$$1 \leq l[1] \leq \frac{A + 1 - (N-1)c[1]}{M-1}$$

Așadar, sunt $\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor$ valori pe care le poate lua $l[1]$ pentru a respecta inegalitatea. Expresia lui d_A se reduce la

$$\sum_{c[1]=1}^{\lfloor \frac{A+1}{N-1} \rfloor} (A+1-(N-1)c[1]) \lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor - (M-1) \frac{(\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor)(\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \rfloor + 1)}{2},$$

care se poate calcula în $O(T^2)$, chiar dacă arată monstruos (o să ajungă **mult** mai rău).

3.3

Observația esențială constă în valorile în care trebuie să calculăm suma. Astfel, are loc o trecere $A \rightarrow A + (N-1)(M-1)$, așa că multe expresii se simplifică.

Pentru început, redefinim răspunsul ca fiind,

$$\sum_{i=1} d_{A_i},$$

$$\text{unde } \begin{cases} A_1 = T \bmod ((N-1)(M-1)) \\ A_i = A_{i-1} + (N-1)(M-1) \\ A_i \leq T \end{cases}$$

Acum vom căuta să vedem cum realizăm tranziția $A_i \rightarrow A_{i+1}$ în $O(T)$.

Avem

$$\begin{aligned} d_{A_{i+1}} &= \sum_{c[1]=1}^{\lfloor \frac{A_{i+1}+1}{N-1} \rfloor} \left(\left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) \left(\left\lfloor \frac{A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \right. \\ &\quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \left(\left\lfloor \frac{A_{i+1}+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)}{2} \right) \\ &= \sum_{c[1]=1}^{\lfloor \frac{A_i+1+(N-1)(M-1)}{N-1} \rfloor} \left(\left(A_i + (N-1)(M-1) + 1 - (N-1)c[1] \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 + (N-1)(M-1) - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \right. \\ &\quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i+(N-1)(M-1)+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)}{2} \right) \\ &= \sum_{c[1]=1}^{\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \rfloor + M-1} \left(\left(A_i + (N-1)(M-1) + 1 - (N-1)c[1] \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1 \right) \right. \\ &\quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1 \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N \right)}{2} \right) \end{aligned}$$

Pentru intervalul $\left[\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + M-1 \right]$, calculul expresiei se poate realiza brut, deoarece se vor efectua cel mult $O(M)$ operații, care se amortizează la $O(T)$ complexitate totală. Voi nota rezultatul acestui calcul cu B .

Expresia devine

$$\begin{aligned}
& B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left(A_i + (N-1)(M-1) + 1 - (N-1)c[1] \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \right. \\
& \quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N \right)}{2} \right) \\
& = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \right. \\
& \quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N \right)}{2} \right) \\
& = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) (N-1) + \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) \right. \\
& \quad \left. - (M-1) \frac{\left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N \right)}{2} \right) \\
& \quad = B + (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) \\
& \quad + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \left(A_{i+1} + 1 - (N-1)c[1] \right) \\
& \quad - \frac{M-1}{2} \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{A_i + 1 - (N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B + (N-1)(A_{i+1}+1) \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \\
&+ (A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \\
&- \frac{M-1}{2} \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N(N-1) \right) \\
&= B + (N-1)(A_{i+1}+1) \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \\
&+ (A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \\
&- \frac{M-1}{2} \left(\sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} N(N-1) \right) \\
&= B + (N-1)(A_{i+1}+1) \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \\
&+ (A_{i+1}+1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) - (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right) \\
&- \frac{M-1}{2} \left(N(N-1) \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + (2N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A_i+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)
\end{aligned}$$

Cred că vedeți deja unde mă duc cu chestia asta. De aici, definim 3 șiruri astfel:

$$\begin{cases} \alpha_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \\ \beta_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 \\ \gamma_A = \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \end{cases}$$

Răspunsul devine

$$\begin{aligned} &= B + (N-1)(A_{i+1} + 1) \left\lfloor \frac{A_i + 1}{N-1} \right\rfloor - (N-1)^2 \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \\ &+ (A_{i+1} + 1)\alpha_{A_i} - (N-1)\gamma_{A_i} - \frac{M-1}{2} \left(N(N-1) \left\lfloor \frac{A_i + 1}{N-1} \right\rfloor + \beta_{A_i} + (2N-1)\alpha_{A_i} \right). \end{aligned}$$

De aici, singura responsabilitate este de a determina recurențele celor 3 șiruri. Ele se vor realiza asemănător cu ce am făcut până acum.

Voi nota bucățile realizate brut, prin același argument ca pentru șirul d , cu A , B și Γ , după șirul pe care-l reprezintă.

$$\begin{aligned} \alpha_{A_{i+1}} &= A + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1 \right) \\ \alpha_{A_{i+1}} &= A + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} (N-1) \\ \boxed{\alpha_{A_{i+1}} &= A + \alpha_{A_i} + (N-1) \left\lfloor \frac{A_i + 1}{N-1} \right\rfloor} \end{aligned}$$

Pentru β , avem

$$\begin{aligned} \beta_{A_{i+1}} &= B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1 \right)^2 \\ \beta_{A_{i+1}} &= B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + 2(N-1) \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + (N-1)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\beta_{A_{i+1}} = B + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor^2 + 2(N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} (N-1)^2$$

$$\boxed{\beta_{A_{i+1}} = B + \beta_{A_i} + 2(N-1)\alpha_{A_i} + (N-1)^2 \left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor}$$

Iar pentru γ , avem

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left(\left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor + N-1 \right)$$

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} \left(c[1](N-1) + c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor \right)$$

$$\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + (N-1) \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] + \sum_{c[1]=1}^{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor} c[1] \left\lfloor \frac{A+1-(N-1)c[1]}{M-1} \right\rfloor$$

$$\boxed{\gamma_{A_{i+1}} = \Gamma + (N-1) \frac{\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{A_i+1}{N-1} \right\rfloor + 1 \right)}{2} + \gamma_{A_i}}$$

Pentru a menține aceste șiruri, se utilizează variabile simple de tip `int`, întrucât este nevoie la fiecare pas doar de termenul anterior. Complexitate $O(T)$, iar memorie $O(1)$. Se mai poate și precalcuła inversul modular al lui 2, dacă este nevoie, însă aritmetica modulară nu dă bătăi de cap aici.

4 Concluzie

Din simplul motiv că trebuie să evaluezi doar în puncte din $(N-1)(M-1)$ în $(N-1)(M-1)$, se reduc părțile întregi și expresia se simplifică, nu foarte mult, dar suficient pentru $O(T)$. Nu recomand această soluție, pentru că cele oferite de comisie sunt mult mai elegante și mai ușor de scris, poate chiar și de gândit. Eu m-am obișnuit cu felul ăsta de spargeri foarte laborioase, care, deși sunt greoaie, ajung la răspunsul corect. Așa că nu m-am gândit deloc la ecuații diofantice, MUULT mai ușor de băgat și mult mai documentate. Ca idee, în concurs tot soluția asta aș fi încercat-o, pentru că nu știu dacă stăpânesc algoritmul lui Euclid extins așa de bine, iar soluția cu programare dinamică din editorial încă mi-e neclară (în sensul că nu înțeleg de ce ar fi alea singurele recurențe posibile).