№3

а) $z_i \sim \mathcal{N}\left(z_i \mid (0,0)^T, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$ $\qquad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

$H_0: \rho = 0$

$T(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\Sigma_1' = A \Sigma_1 A^T$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\eta = x - y \quad \xi = x + y$

$\xi^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \xi^2 - \eta^2 = 4xy$

$\eta^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad xy = \frac{\xi^2 - \eta^2}{4} = \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\rho & 1+\rho \\ 1-\rho & \rho-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\rho+1) & 0 \\ 0 & 2(1-\rho) \end{pmatrix}$

$\left(\frac{\xi}{2}\right) \sim \frac{\rho+1}{2} \;\Big|\; \frac{1}{n}\sum\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \sim \frac{\rho+1}{2n}\chi(n)$

$\left(\frac{\eta}{2}\right) \sim \frac{\rho-1}{2} \;\Big|\; \frac{1}{n}\sum\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sim \frac{\rho-1}{2n}\chi(n)$

$\chi_n \to \mathcal{N}(n; 2n)$

$$\boxed{T(z) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\rho+1}{2} + \frac{\rho-1}{2}; \frac{(\rho+1)^2}{2n} + \frac{(\rho-1)^2}{2n}\right) = \mathcal{N}\left(\rho; \frac{1+\rho^2}{n}\right)}$$

б) Т.к. 95% $\xi \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ это $|\xi| \leq 2\sigma$, то критерий: $|T(z)| \leq 2\sqrt{\frac{1+\rho^2}{n}}$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

в) $T(z) \sim \mathcal{N}\left(\rho; \frac{1+\rho^2}{n}\right)$

Пусть $z_i \sim \mathcal{N}\left((\rho, 0)^T, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$

По критерию выборка подходит, если $T(z) \in \left[\rho_0 - 2\sqrt{\frac{1+\rho^2}{n}}; \rho_0 + 2\sqrt{\frac{1+\rho^2}{n}}\right]$

Вероятн. косат. $\mathbb{P}(\;) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \rho_0}{\sqrt{2\frac{1+\rho^2}{n}}}\right)\right]\Bigg|_{\rho_0 - 2\sqrt{\frac{1+\rho^2}{n}}}^{\rho_0 + 2\sqrt{\frac{1+\rho^2}{n}}} =$