Задание 1

Терентьев Александр Б05-003

September 2023

1 Задача 1

$$d(det(X)) = \langle det(X)X^{-T}, dh\rangle$$

$$d(det(X^{-1}+A)) = \langle det(X^{-1}+A)(X^{-1}+A)^{-T}, d(X^{-1}+A)\rangle =$$

$$\langle det(X^{-1}+A)X^{-1}+A^{-T}, X^{-1}d(X)X^{-1}\rangle = \langle X^{-T}det(X^{-1}+A)(X^{-1}+A)^{-T}X^{-T}, dX\rangle$$

$$\nabla_x f = X^{-T}det(X^{-1}+A)(X^{-1}+A)^{-T}X^{-T}$$

2 Задача 2

2.1 Пункт а

$$d\|(A+tI_n)^{-1}b\| = \|y\|^{-1}\langle y, dy\rangle$$

$$d((A+tI_n)^{-1}b) = d((A+tI_n)^{-1})b = -(A+tI_n)^{-1}I_n dt(A+tI_n)^{-1}b$$

$$\frac{\langle y, -(A+tI_n)^{-1}(A+tI_n)^{-1}bdt\rangle}{\|y\|^{-1}} = \frac{\langle -b^T(A+tI_n)^{-T}(A+tI_n)^{-T}y, dt\rangle}{\|y\|^{-1}} =$$

$$\frac{\langle -y^T(A+tI_n)^{-1}y, dt\rangle}{\|y\|}$$

$$\nabla_x f = \frac{-y^T(A+tI_n)^{-1}y}{\|y\|}$$

$$d\nabla_x f = \langle \frac{y^T(A+tI_n)^{-1} * y + 2y^T(A+tI_n)^{-2}y}{\|y\|}, dt\rangle$$

$$\nabla_x^2 f = \frac{y^T(A+tI_n)^{-1} * y + 2y^T(A+tI_n)^{-2}y}{\|y\|}$$

3 Задача 3

$$Ax = b$$
$$d(A)x + Adx = db$$
$$dx = A^{-1}(db - d(A)x)$$
$$\nabla_b L = A^{-T} * \nabla_x L$$
$$dL = \langle \nabla_x L, -A^{-1}d(A)x \rangle == \langle -A^{-T}\nabla_x L x^T, d(A) \rangle$$
$$\nabla_A L = -A^{-T}\nabla_x L x^T$$

4 Задача 4

4.1 Пункт а

$$f(x) = \langle a, x \rangle - ln(1 - \langle b, x \rangle) = \langle a, dx \rangle - \frac{d(1 - \langle b, x \rangle)}{1 - \langle b, x \rangle} = \langle a, dx \rangle + \frac{\langle b, dx \rangle}{1 - \langle b, x \rangle}$$

$$\nabla_f(x) = a + \frac{b}{1 - \langle b, x \rangle}$$

Стационарные точки:

$$a + b = a\langle b, x \rangle$$

Существует, если

$$b = \alpha a, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$1 + \alpha = \langle b, x \rangle$$
$$\alpha < 0 \Longrightarrow 1 + \alpha = \langle b, x \rangle\text{- стационарные точки}$$

4.2 Пункт б

$$f(x) = \langle c, x \rangle exp(1 - \langle Ax, x \rangle)$$
$$df(x) = \langle c, dx \rangle exp(1 - \langle Ax, x \rangle) - \langle c, x \rangle exp(1 - \langle Ax, x \rangle) d\langle Ax, x \rangle$$

$$\langle c, x \rangle exp(1 - \langle Ax, x \rangle) d\langle Ax, x \rangle = \langle c, x \rangle exp(1 - \langle Ax, x \rangle)(\langle Adx, x \rangle + \langle Ax, dx \rangle)$$

$$\nabla_f(x) = exp(1 - \langle Ax, x \rangle)\{-\langle c, x \rangle(Ax + A^T x + c)\}$$

Стационарные точки существют если

$$= \alpha Ax, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2\langle c, x \rangle = \alpha$$
$$\langle c, x \rangle = \frac{\alpha}{2}, -2 \leq alpha \leq 2$$

4.3 Пункт в

$$f(x) = \langle X^{-1}, I_n \rangle - \langle A, X \rangle$$

$$df(x) = \langle X^{-1} dX X^{-1}, I_n \rangle - \langle A, dX \rangle = \langle I_n, X^{-T} X^{-T} dX \rangle - \langle A, dX \rangle = \langle X^{-2T} - A, dX \rangle$$

Стационарные точки

$$X^{-2T} = A$$

$$X^2 = A^{-T}$$

Стационарные точки существуют, если существует такая матрица B, что

$$A = B^2, X = B^{-T}$$

5 Задача 4

$$Q^T \Lambda Q = X$$

$$dX = -Q^T dQ Q^T \Lambda Q + Q^T d\Lambda Q + Q^T \Lambda dQ$$

$$df = \langle \nabla_X f, dX \rangle$$

$$df = \langle \nabla_X f, Q^T d\Lambda Q \rangle$$

$$df = \langle Q \nabla_X f Q^T, d\Lambda \rangle$$

$$Q \nabla_X f Q^T = \nabla_\Lambda f$$

$$\nabla_X f = Q^T \nabla_\Lambda f Q$$