

Обратные задачи в моделировании нейронных дифференциальных уравнений в частных производных

Александр Терентьев

Московский физико-технический институт,
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра интеллектуальных систем
Научный руководитель: д.ф .- м.н. Стрижов Вадим Викторович

20 декабря 2025 г.

Классификация траекторий динамических систем

Проблема

В задачах ЭЭГ трудность вызывает получение точного сигнала от головного мозга. Исследователи встречаются со следующими проблемами. Высокая чувствительность прибора к движениям и tremору, обусловленному психоэмоциональным напряжением пациента, вызывает помехи в работе, что может затруднить диагностику.

Цель

Целью работы является предложить метод решения восстановления источников сигнала ЭЭГ и уменьшения уровня шума в их определении. Предлагается использовать физико-информированный подход в восстановлении, использующийся в задачах восстановления временных рядов, вносящий априорные знания о модели для уменьшения уровня шума от данных.

Постановка обратной задачи

Дано

1. $\mathcal{D} = \{X_i\}_{i=1}^N$ - набор данных пространственно-временных рядов ЭЭГ, где $X_i = \chi(r, t) : \mathbb{R}^{(3 \times 1)} \rightarrow \mathbb{R}^K$ - пространственно-временной ряд сигналов K .
2. $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$ - конечный набор источников сигналов.

Найти

1. $D(\hat{s}|X, \mathcal{D})$ - суперпозиция пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i по M источникам
2. $G(\hat{X}(t+1)|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})$ - восстановление пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i на основе s источника

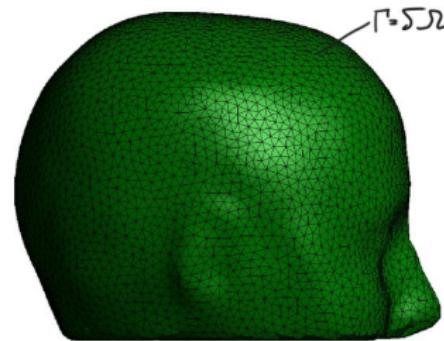
Критерий

MSE - ошибка предсказаний рядов $\|\hat{X} - X\|_2$

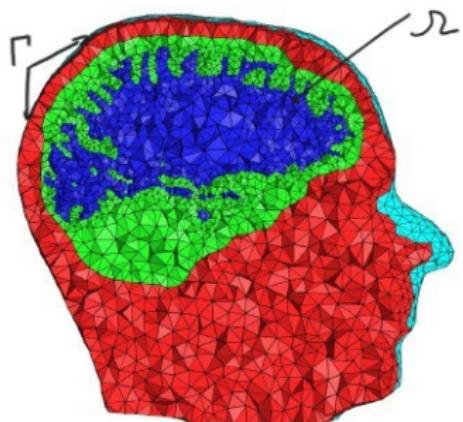
О схеме восстановления источников сигналов

$$\chi_i : (N_x \times N_y \times N_z \times T) \xrightarrow{D(\hat{s}|X, \mathcal{D})} s \xrightarrow{G(\hat{X}|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})} \hat{\mathbf{X}}$$

Метод Inverse NPDE



Поверхность головы Γ

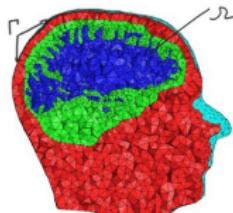


Разрез объема головы Ω

Восстановление электромагнитных потенциалов

Уравнения Максвелла в СГС

1. $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
2. $\square \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}$
3. $\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$
4. $\square = \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$



Разрез объема головы Ω

Задача nPDE

Необходимо восстановить $\rho, \phi, \mathbf{A}, \mathbf{j}$ Моделируется нейросетью с 8 выходами. Границочное условие: $\phi|_{\Gamma} = 0, \mathbf{A}|_{\Gamma} = 0$

Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 + R(\mathbf{w})$$

Энергия в качестве регуляризации

Идея

1. Требуется добиться разряженного распределения зарядов.
Обычные методы регуляризации не решают данную задачу.
2. Предлагается в качестве регуляризации брать энергию
электрического поля

Подсчет энергии

1. $\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$
2. Границное условие $\mathcal{E}(\mathbf{r} = -\infty) = 0$

Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 - \mathcal{E} + \text{BCSLoss}_{\mathcal{E}} + \text{PDELoss}_{\mathcal{E}}$$

Недостаток

Требуется интегрирование по всему объему головы, точность
интегрирования напрямую зависит от сходимости метода
решения PDE.

Регуляризация: связь энергии и произведения потенциала на плотность заряда

Лемма (о связи энергии и произведения потенциала на плотность заряда)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с конечным объёмом, $\phi\rho \in L^1(\Omega)$, и пусть $r_1, \dots, r_K \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu$ с плотностью $p(r) > 0$ п.в. Пусть

$$E = \int_{\Omega} \phi(r)\rho(r) dr, \quad \hat{E}_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\phi(r_i)\rho(r_i)}{p(r_i)}.$$

Тогда $\mathbb{E}[\hat{E}_K] = E$ и $\hat{E}_K \rightarrow E$ почти наверное при $K \rightarrow \infty$. Если дополнительно $\phi\rho/p \in L^2(\mu)$, то

$$\sqrt{K}(\hat{E}_K - E) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \text{Var}_{\mu}\left(\frac{\phi\rho}{p}\right).$$

В частности, регуляризатор λE приближён выборочной регуляризацией $\lambda \hat{E}_K$ с погрешностью $O_p(1/\sqrt{K})$.

Эксперимент 1: реальные данные (Brunton)

Данные

Результат

Точность восстановления на датчиках незначительно отличаются для разных методов. Они уже хорошо отображают потенциалы в пространство источников.

Метод	Sensor MSE
InPDE	0.025
Loretta	0.028

Сравнение средней квадратичной ошибки восстановления потенциала на датчиках

Эксперимент 2: синтетические данные

Модель

Смоделирована шапочка EEG на овальной голове, дискретизация 50 Гц, 2 источника сигналов. Преимущество такого эксперимента по сравнению с реальными данными в том, что известны истинные источники сигналов, а также потенциалы в глубине головы.

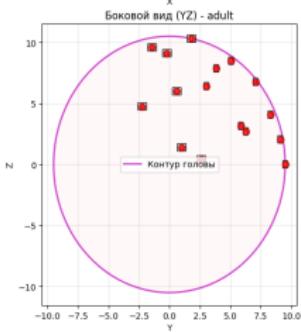
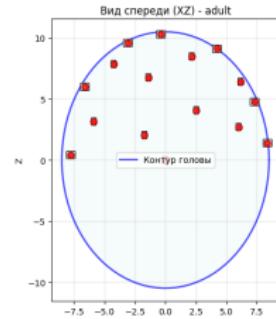
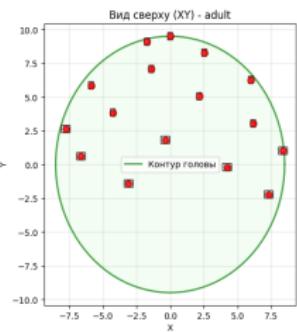
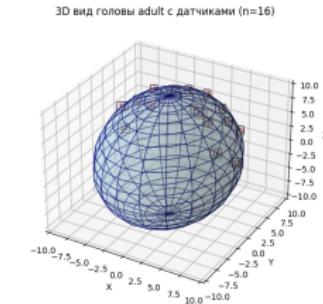
Результат

Точность на датчиках — примерно одинаковая, но в глубине головы наше восстановление точнее (см. таблицу).

Метод	MSE на сенсорах	MSE в глубине головы
InPDE	0.005	0.02
Loretta	0.007	0.1

Сравнение точности восстановления потенциала на датчиках и в глубине головы

Синтетические данные — визуализация



Размеры головы: X=8.5, Y=9.5, Z=10.5
Тип: adult, Датчиков: 16
Распределение: Только верхняя часть головы ($z \geq 0$)

Вид синтетической головы и расположение датчиков: 3D вид (верхний левый) и проекции спереди/сверху/боковой.

Выводы

1. Сравнил различные методы регуляризации в обратной задаче восстановления источников сигналов ЭЭГ, предложил новый метод регуляризации на основе энергии электрического поля и его аппроксимированную версию.
2. Провел эксперименты на реальных и синтетических данных, показал преимущество предложенного метода регуляризации по сравнению с базовыми методами.
3. Сделаны выводы о том, что методы не имеют большого преимущества по MSE на датчиках, но различия проявляются в глубине головы.
4. Следует сравнивать методы по качеству восстановления источников, либо качестве решения побочных задач (регрессии, классификации) на восстановленных источниках.

Схожие работы

1. Zhen Qi, Gregory M. Noetscher, Alton Miles, etc., Enabling electric field model of microscopically realistic brain