

Обратные задачи в моделировании нейронных дифференциальных уравнений в частных производных

Александр Терентьев

Московский физико-технический институт,
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра интеллектуальных систем
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

20 декабря 2025 г.

Классификация траекторий динамических систем

Проблема

В задачах EEG трудность вызывает получение точного сигнала от головного мозга. Исследователи встречаются со следующими проблемами. Высокая чувствительность прибора к движениям и тремору, обусловленному психоэмоциональным напряжением пациента, вызывает помехи в работе, что может затруднить диагностику.

Цель

Целью работы является предложить метод решения восстановления источников сигнала ЭЭГ и уменьшения уровня шума в их определении. Предлагается использовать физико-информированный подход в восстановлении, использующийся в задачах восстановления временных рядов, вносящий априорные знания о модели для уменьшения уровня шума от данных.

Постановка обратной задачи

Дано

1. $\mathcal{D} = \{X_i\}_{i=1}^N$ - набор данных пространственно-временных рядов ЭЭГ, где $X_i = \chi(r, t) : \mathbb{R}^{(3 \times 1)} \rightarrow \mathbb{R}^K$ - пространственно-временной ряд сигналов K .
2. $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$ - конечный набор источников сигналов.

Найти

1. $D(\hat{s}|X, \mathcal{D})$ - суперпозиция пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i по M источникам
2. $G(\hat{X}(t+1)|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})$ - восстановление пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i на основе s источника

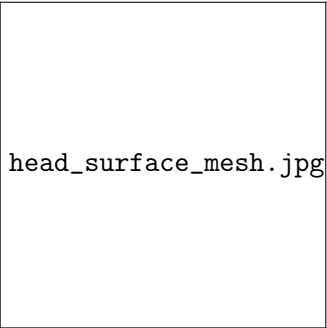
Критерий

MSE - ошибка предсказаний рядов $\|\hat{X} - X\|_2$

О схеме восстановления источников сигналов

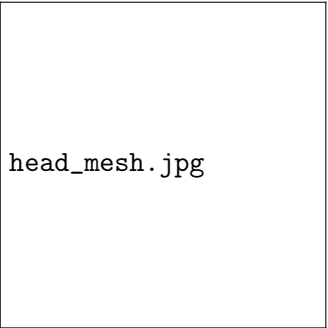
$$\chi_i : (N_x \times N_y \times N_z \times T) \xrightarrow{D(\hat{s}|X, \mathcal{D})} s \xrightarrow{G(\hat{X}|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})} \hat{\mathbf{X}}$$

Метод Inverse NPDE



head_surface_mesh.jpg

Поверхность головы Γ



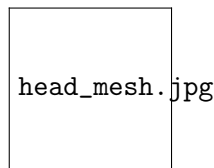
head_mesh.jpg

Разрез объема головы Ω

Воостановление электромагнитных потенциалов

Уравнения Максвелла в СГС

1. $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
2. $\square \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$
3. $\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$
4. $\square = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$



Разрез объема головы Ω

Задача nPDE

Необходимо восстановить $\rho, \phi, \mathbf{A}, \mathbf{j}$ Моделируется нейросетью с 8 выходами. Граничное условие: $\phi|_{\Gamma} = 0, \mathbf{A}|_{\Gamma} = 0$

Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 + R(\mathbf{w})$$

Энергия в качестве регуляризации

Идея

1. Требуется добиться наиболее простое распределение зарядов. Обычные методы регуляризации не решают данную задачу.
2. Предлагается в качестве регуляризации брать энергию электрического поля

Подсчет энергии

1. $\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$
2. Граничное условие $\mathcal{E}(\mathbf{r} = -\infty) = 0$

Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 - \mathcal{E} + \text{BCSLoss}_{\mathcal{E}} + \text{PDELoss}_{\mathcal{E}}$$

Регуляризация: связь энергии и произведения $\phi\rho$

Лемма (о связи энергии и произведения потенциала на плотность заряда)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с конечным объёмом, $\phi\rho \in L^1(\Omega)$, и пусть $r_1, \dots, r_K \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu$ с плотностью $\rho(r) > 0$ п.в. Пусть

$$E = \int_{\Omega} \phi(r)\rho(r) dr, \quad \hat{E}_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\phi(r_i)\rho(r_i)}{\rho(r_i)}.$$

Тогда $\mathbb{E}[\hat{E}_K] = E$ и $\hat{E}_K \rightarrow E$ почти наверное при $K \rightarrow \infty$. Если дополнительно $\phi\rho/\rho \in L^2(\mu)$, то

$$\sqrt{K}(\hat{E}_K - E) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \text{Var}_{\mu}\left(\frac{\phi\rho}{\rho}\right).$$

В частности, регуляризатор λE приближён выборочной регуляризацией $\lambda \hat{E}_K$ с погрешностью $O_p(1/\sqrt{K})$.

Эксперимент 1: реальные данные (Brunton)

Данные

Использованы реальные данные `brunton_uwbio(.)`.Loretta.

Результат

На датчиках MSE восстановления потенциалов у обоих методов примерно одинаковая (см. таблицу — заполните значения).

Метод	Sensor MSE	Примечания
Наш метод	—	
Loretta	—	

Сравнение MSE восстановления потенциала на датчиках (заполните данные)

Эксперимент 2: синтетические данные

Модель

Смоделирована шапочка EEG на овальной голове, дискретизация 50 Гц, 2 источника сигналов.

Результат

Точность на датчиках — примерно одинаковая, но в глубине головы наше восстановление точнее (см. таблицу).

Метод	Sensor MSE	Deep MSE	Примечания
Наш метод	—	—	
Loretta	—	—	

Сравнение по датчикам и глубине (заполните данные)

Выводы и планы на будущее

1. Сравнивать методы только по MSE на датчиках нецелесообразно — лучше оценивать восстановленные источники по задачам: регрессии или классификации.
2. В перспективе: завершить теорию регуляризации, исследовать дополнительные регуляризаторы (не только энергия), выполнить сравнение на побочных задачах и расширить набор методов для регуляризации.

1. Zhen Qi, Gregory M. Noetscher, Alton Miles, etc., Enabling electric field model of microscopically realistic brain