

# Обратные задачи в моделировании нейронных дифференциальных уравнений в частных производных

Александр Терентьев

Московский физико-технический институт,  
Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Кафедра интеллектуальных систем  
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

20 декабря 2025 г.

# Классификация траекторий динамических систем

## Проблема

В задачах EEG трудность вызывает получение точного сигнала от головного мозга. Исследователи встречаются со следующими проблемами. Высокая чувствительность прибора к движениям и тремору, обусловленному психоэмоциональным напряжением пациента, вызывает помехи в работе, что может затруднить диагностику.

## Цель

Целью работы является предложить метод решения восстановления источников сигнала ЭЭГ и уменьшения уровня шума в их определении. Предлагается использовать физико-информированный подход в восстановлении, использующийся в задачах восстановления временных рядов, вносящий априорные знания о модели для уменьшения уровня шума от данных.

# Постановка обратной задачи

## Дано

1.  $\mathcal{D} = \{X_i\}_{i=1}^N$  - набор данных пространственно-временных рядов ЭЭГ, где  $X_i = \chi(r, t) : \mathbb{R}^{(3 \times 1)} \rightarrow \mathbb{R}^K$  - пространственно-временной ряд сигналов  $K$ .
2.  $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$  - конечный набор источников сигналов.

## Найти

1.  $D(\hat{s}|X, \mathcal{D})$  - суперпозиция пространственно-временных рядов ЭЭГ  $X_i$  по  $M$  источникам
2.  $G(\hat{X}(t+1)|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})$  - восстановление пространственно-временных рядов ЭЭГ  $X_i$  на основе  $s$  источника

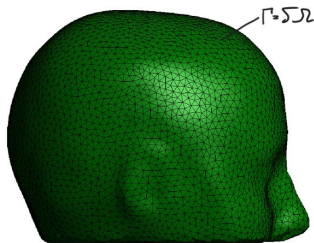
## Критерий

MSE - ошибка предсказаний рядов  $\|\hat{X} - X\|_2$

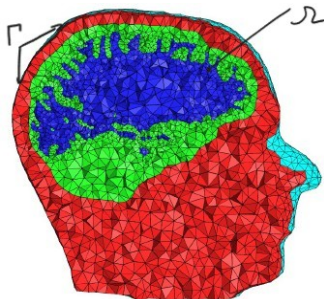
## О схеме восстановления источников сигналов

$$\chi_i : (N_x \times N_y \times N_z \times T) \xrightarrow{D(\hat{s}|X, \mathcal{D})} s \xrightarrow{G(\hat{X}|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})} \hat{\mathbf{X}}$$

Метод Inverse NPDE



Поверхность головы  $\Gamma$

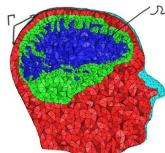


Разрез объема головы  $\Omega$

# Воостановление электромагнитных потенциалов

## Уравнения Максвелла в СГС

1.  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
2.  $\square \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$
3.  $\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$
4.  $\square = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$



Разрез объема головы  $\Omega$

## Задача nPDE

Необходимо восстановить  $\rho, \phi, \mathbf{A}, \mathbf{j}$  Моделируется нейросетью с 8 выходами. Граничное условие:  $\phi|_{\Gamma} = 0, \mathbf{A}|_{\Gamma} = 0$

## Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 + R(\mathbf{w})$$

# Энергия в качестве регуляризации

## Идея

1. Требуется добиться разряженного распределения зарядов. Обычные методы регуляризации не решают данную задачу.
2. Предлагается в качестве регуляризации брать энергию электрического поля

## Подсчет энергии

1.  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$
2. Граничное условие  $\mathcal{E}(\mathbf{r} = -\infty) = 0$

## Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 - \mathcal{E} + \text{BCSLoss}_{\mathcal{E}} + \text{PDELoss}_{\mathcal{E}}$$

## Недостаток

Требуется интегрирование по всему объему головы, точность интегрирования напрямую зависит от сходимости метода решения PDE.

## Регуляризация: связь энергии и произведения $\phi\rho$

Лемма (о связи энергии и произведения потенциала на плотность заряда)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  с конечным объёмом,  $\phi\rho \in L^1(\Omega)$ , и пусть  $r_1, \dots, r_K \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu$  с плотностью  $\rho(r) > 0$  п.в. Пусть

$$E = \int_{\Omega} \phi(r)\rho(r) dr, \quad \hat{E}_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\phi(r_i)\rho(r_i)}{\rho(r_i)}.$$

Тогда  $\mathbb{E}[\hat{E}_K] = E$  и  $\hat{E}_K \rightarrow E$  почти наверное при  $K \rightarrow \infty$ . Если дополнительно  $\phi\rho/\rho \in L^2(\mu)$ , то

$$\sqrt{K}(\hat{E}_K - E) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \text{Var}_{\mu}\left(\frac{\phi\rho}{\rho}\right).$$

В частности, регуляризатор  $\lambda E$  приближён выборочной регуляризацией  $\lambda \hat{E}_K$  с погрешностью  $O_p(1/\sqrt{K})$ .

# Эксперимент 1: реальные данные (Brunton)

## Данные

## Результат

Точность восстановления на датчиках незначительно отличаются для разных методов. Они уже хорошо отображают потенциалы в пространство источников.

Метод	Sensor MSE
InPDE	0.025
Loretta	0.028

Сравнение средней квадратичной ошибки восстановления потенциала на датчиках



## Эксперимент 2: синтетические данные

### Модель

Смоделирована шапочка EEG на овальной голове, дискретизация 50 Гц, 2 источника сигналов. Преимущество такого эксперимента по сравнению с реальными данными в том, что известны истинные источники сигналов, а также потенциалы в глубине головы.

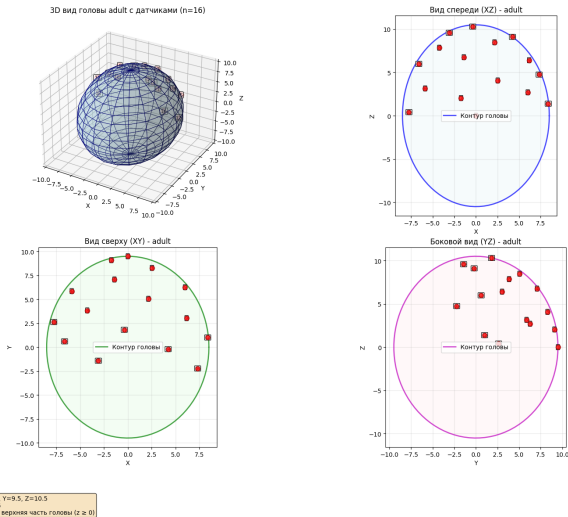
### Результат

Точность на датчиках — примерно одинаковая, но в глубине головы наше восстановление точнее (см. таблицу).

Метод	MSE на сенсорах	MSE в глубине головы
InPDE	0.005	0.02
Loretta	0.007	0.1

Сравнение точности восстановления потенциала на датчиках и в глубине головы

# Синтетические данные — визуализация



Вид синтетической головы и расположение датчиков: 3D вид (верхний левый) и проекции спереди/сверху/боковой.

## Выводы и планы на будущее

1. Сравнивать методы только по MSE на датчиках нецелесообразно — лучше оценивать восстановленные источники по задачам: регрессии или классификации.
2. В перспективе: завершить теорию регуляризации, исследовать дополнительные регуляризаторы (не только энергия), выполнить сравнение на побочных задачах и расширить набор методов для регуляризации.

1. Zhen Qi, Gregory M. Noetscher, Alton Miles, etc., Enabling electric field model of microscopically realistic brain