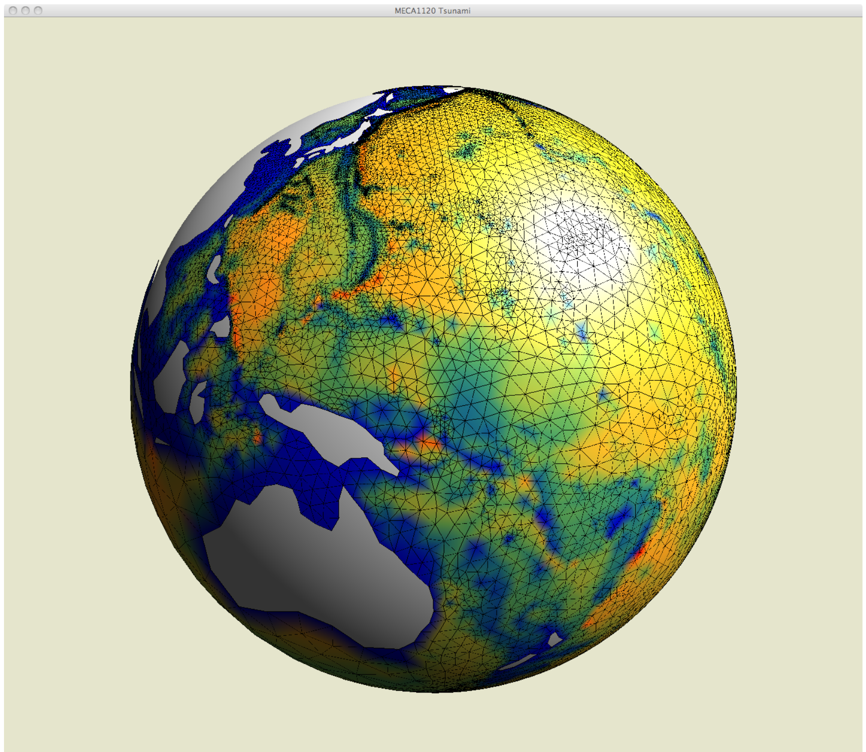
1 Modélisation d'un tsunami par éléments finis



L'objectif du projet est de vous initier aux difficultés de la mise au point et de la certification d'une application numérique. Rassurez-vous : il ne s'agit nullement de vous transformer en experts de l'architecture de grandes applications numériques ! Nous nous limiterons à l'écriture d'un tout petit programme C pour simuler le tsunami qui a dévasté le Japon en 2011.

1.1 La projection stéréographique...

Pour résoudre un problème sur la sphère, nous allons considérer une projection stéréographique de tous les points de l'océan sur un plan. Si le rayon de la terre est R et le centre de la terre est à l'origine, les coordonnées stéréographiques (x, y) de tout point (x_*, y_*, z_*) de la surface terrestre sont définies par les expressions suivantes. Le changement de variable inverse se déduite aisément en tenant compte que $(x_*^2 + y_*^2 + z_*^2) = R^2$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2Rx_*}{R + z_*} & \qquad x_* &= \frac{4R^2 x}{4R^2 + x^2 + y^2} \\
y &= \frac{2Ry_*}{R + z_*} & \qquad y_* &= \frac{4R^2 y}{4R^2 + x^2 + y^2} \\
& & \qquad z_* &= \frac{(4R^2 - x^2 - y^2)R}{4R^2 + x^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

L'intérêt de ce changement de variables est de pouvoir résoudre les équations des eaux peu profondes sur un plan et non sur la surface de notre bonne vieille planète. Evidemment, il faudra légèrement modifier les équations pour tenir compte de la forme sphérique...

1.2 Les équations à résoudre...

Les équations des eaux profondes linéaires s'écrivent pour les coordonnées stéréographiques :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{4R^2+x^2+y^2}{4R^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big(hu\Big) + \left(\frac{4R^2+x^2+y^2}{4R^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\Big(hv\Big) &= \frac{(xu+yv)h}{2R^2}\\
\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{4R^2+x^2+y^2}{4R^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big(g\eta\Big) &= -\gamma u + fv\\
\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{4R^2+x^2+y^2}{4R^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\Big(g\eta\Big) &= -\gamma v - fu
\end{aligned}
\right.
$$

Les inconnues η et $\mathbf{u} = (u, v)$ représentent respectivement l'élévation du niveau de la mer par rapport à une hauteur de référence ($z = 0$) et la vitesse horizontale moyenne sur la colonne d'eau. Les deux dernières équations expriment la conservation de la quantité de mouvement, tandis que la première relation provient de la conservation de la masse d'eau. Pour terminer la description du modèle, il reste à définir un certain nombre de paramètres matériels ou de termes de forçage.

- La masse volumique de l'eau et la gravité sont respectivement données par ρ et g.
- La profondeur de l'océan est notée h.
  On néglige l'impact de l'élévation dans le bilan de masse.
  Par contre, il faudra bien tenir compte de la bathymétrie !
- Tous les effets dissipatifs (effets visqueux, effets des tourbillons de petites échelles, frottement exercé par le fond du bassin) sont modélisés par un terme proportionnel à la vitesse : une telle approximation est évidemment discutable ! Elle a toutefois le mérite de la simplicité et de fournir des prédictions acceptables. Ce facteur de proportionnalité est noté γ.
- Le terme de Coriolis fait intervenir un facteur $f = 2\Omega \sin\theta$ où Ω et θ sont respectivement la vitesse de rotation de la terre et la latitude.
- On imposera une condition initiale en élévation : c'est le déplacement d'une partie de la mer qui va générer le tsunami. On supposera -par contre- que l'océan est au repos : ce qui n'est pas totalement exact, puisqu'il y a les marées et les courants océaniques globaux qu'on supposera donc ici négligeables par rapport à l'effet du tsunami...

Les paramètres à utiliser dans les simulations sont :

$\Omega = 2\pi \ / \ 86\ 400$	$\gamma = 10^{-7}$
$g = 9.81$	$R = 6\ 371\ 220$

1.3 La méthode numérique...

Il s'agit de résoudre les équations -ci dessus- en utilisant la méthode de Galerkin discontinue avec des fonctions de forme de degré un et de degré trois. La numérotation des degrés de liberté correspondra exactement à la convention utilisée dans le devoir 5. Pour l'intégration temporelle, on fera usage de la méthode d'Euler explicite.

On peut montrer que les équations discrètes à résoudre sont :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} < \phi_i \phi_j >_e \frac{dH_j^e}{dt} &= < \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} h u_e^h + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} h v_e^h \right) \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) >_e \\
&\quad + < \phi_i \left(\frac{h(xu + yv)}{R^2} \right) >_e + \ll \phi_i h u_n^* \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) \gg_e \qquad i = 1, \ldots, n \\
\sum_{j=1}^{n} < \phi_i \phi_j >_e \frac{dU_j^e}{dt} &= < \phi_i \big(f v_e^h - \gamma u_e^h \big) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} g \eta_e^h \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) >_e \\
&\quad + < \phi_i \left(\frac{g x \eta}{2R^2} \right) >_e + \ll \phi_i n_x g \eta^* \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) \gg_e \qquad i = 1, \ldots, n \\
\sum_{j=1}^{n} < \phi_i \phi_j >_e \frac{dV_j^e}{dt} &= < \phi_i \big(-f u_e^h - \gamma v_e^h \big) + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} g \eta_e^h \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) >_e \\
&\quad + < \phi_i \left(\frac{g y \eta}{2R^2} \right) >_e + \ll \phi_i n_y g \eta^* \left(\frac{4R^2 + x^2 + y^2}{4R^2} \right) \gg_e \qquad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

où $n = 3$ et $n = 10$ si on utilise des fonctions de forme de degré un ou trois. Le calcul des flux aux interfaces se fait exactement comme dans le devoir 8 :-) Les intégrales se font sur le plan stéréographique. Trois maillages en coordonnées stéréographiques avec la bathymétrie et la condition initiale sont fournis par nos soins. Pour chaque sommet, nous vous fournissons les deux coordonnées stéréographiques et la bathymétrie. On vous fournit également une fonction permettant de calculer la valeur initiale de l'élévation qui va générer le tsunami d'Okada.

1.4 Ce que vous devrez réaliser !

L'objet du projet est de réaliser un petit code d'éléments finis permettant de prédire le tsunami et de valider votre code avec une solution analytique : il s'agit d'un petit laboratoire numérique où vous allez être confrontés à des comportements numériques un petit peu inhabituels et où il s'agira de les interpréter correctement : il y a peu à programmer et beaucoup à comprendre !

Votre programme consistera d'un unique fichier avec les fonctions

```
void tsunamiCompute(double dt, int nmax, int sub, int order);
void tsunamiAnimate();
```

où on spécifie le pas de temps, le nombre maximal d'itérations, le nombre d'itérations entre chaque sauvegarde de résultats dans un fichier et l'ordre de l'interpolation. L'appel de `tsunami(0.1,400,100,1)` va générer la création de 4 fichiers qui s'appelleront respectivement :

```
tsunami_100.txt
tsunami_200.txt
tsunami_300.txt
tsunami_400.txt
```

contenant l'ensemble des inconnues dans un vecteur de taille $3 \times n \times N$ avec n le nombre local d'inconnues par triangle et N le nombre de triangles du maillage. Pour une approximation linéaire et cubique, nous aurons $n = 3$ et $n = 10$ respectivement.

Les résultats seront fournis dans l'ordre suivant : élévation, vitesse stéréographique horizontale, vitesse stéréographique verticale. Pour chaque champ, le valeurs nodales seront données ensuite élément par élément. Pour la numérotation des inconnues de degré trois, on utilisera la convention du devoir 5, c'est-à-dire :

```
void discShapesNodes(double *xsi, double *eta)
{
  xsi[0] = 0.0;     eta[0] = 0.0;
  xsi[1] = 1.0;     eta[1] = 0.0;
  xsi[2] = 0.0;     eta[2] = 1.0;
  xsi[3] = 1.0/3.0; eta[3] = 0.0;
  xsi[4] = 2.0/3.0; eta[4] = 0.0;
  xsi[5] = 2.0/3.0; eta[5] = 1.0/3.0;
  xsi[6] = 1.0/3.0; eta[6] = 2.0/3.0;
  xsi[7] = 0.0;     eta[7] = 2.0/3.0;
  xsi[8] = 0.0;     eta[8] = 1.0/3.0;
  xsi[9] = 1.0/3.0; eta[9] = 1.0/3.0;
}
```

Il vous est demandé :

1. De concevoir un programme permettant la simulation du tsunami avec des fonctions de forme linéaires discontinues.
2. De généraliser ce même programme à des fonctions de forme de degré trois.
3. D'optimiser votre programme afin qu'il soit le plus rapide possible.
4. De rédiger une note de synthèse d'au maximum 5 pages pour le Service d'Océanographie en expliquant comment obtenir les équations des eaux peu profondes pour les coordonnées stéréographiques. Fournir une estimation de l'ordre de précision du résultat obtenu en expliquant comment vous avez validé votre code numérique. Produire quelques illustrations pertinentes pour l'analyse de la solution. Expliquer comment vous avez optimisé votre programme afin qu'il soit le plus rapide possible. Ne pas recopier les développements théoriques du syllabus, ne pas recopier l'énoncé du problème, ne pas fournir des diagrammes incompréhensibles, ne pas donner des tableaux de chiffres indigestes. L'orthographe, le soin et la présentation seront conformes à celles d'une note fournie par un bureau d'études professionnel.

(option) Améliorer le code graphique fourni afin de réaliser une animation mettant en scène efficacement le tsunami sur base des résultats obtenus et stockés dans les fichiers.

L'entièreté de votre code sera inclus dans un unique fichier `tsunami.c` qui sera compilé avec le programme `main.c` fourni. Il vous est loisible de reprendre tout ce que vous souhaitez dans les codes fournis dans les 8 devoirs. Votre programme doit toutefois être écrit en pur C et devra être compilé sur le serveur. Lors de la soumission, un calcul d'un nombre limité de pas de temps sera effectué afin de vous permettre d'estimer la rapidité de votre programme.

Toutes les soumissions seront soumises à un logiciel anti-plagiat. En cas de fraude flagrante, les cas de plagiat seront soumis au Jury des examens. Vous êtes invités à consulter la page web de l'Université pour avoir une petite idée des sanctions possibles dans ce cas !

1.5 Evaluation du projet

L'évaluation du projet se fera sur la base suivante sur un total de 20 points :

Programme linéaire qui fonctionne	4
Programme cubique qui fonctionne	3
Précision des résultats	3
Rapidité du code de calcul	4
Rapport	6
Implémentation graphique	3

Comme vous pourrez le constater, il est parfaitement possible d'obtenir 20/20 sans réaliser l'implémentation graphique. C'est donc bien une option qu'il n'est pas indispensable de réaliser.

1.6 Grand Prix International 2012 de l'Elément le Plus Fini

Le programme correct le plus rapide recevra le Grand Prix de l'Elément le Plus Fini d'un montant de 100 euros. Ce prix a été rendu possible grâce à la contribution anonyme d'un ancien étudiant soucieux de promouvoir la qualité de la formation. La proclamation des résultats se fera sur le web avant le 15 juin 2012. Les gagnants du prix seront invités à prendre contact avec le titulaire du cours. La mesure de la rapidité du programme sera effectuée par deux tests indépendants avec le maillage le plus raffiné et des éléments cubiques. Le résultat final sera la moyenne des deux mesures. En cas de timings aberrants ou manifestement parasites, des runs complémentaires seront effectués. Le règlement du concours n'a pas été rédigé et n'est donc pas disponible auprès d'un huissier de justice à Ottignies-Louvain-la-Neuve.

Les auteurs de l'implémentation informatique graphique la plus remarquable gagneront le prix spécial des assistants d'un montant de 50 euros. Cette seconde partie du concours est également ouverte à l'équipe didactique et à tous les occupants du bâtiment Euler.