Trabalho 1
Principio de Controle e Servo Mecanismos

Felipe Bandeira da Silva, 1020942
Deyd Jackson, 920895

13 de outubro de 2013

Coletânea com questões selecionadas das duas lista da 1np.

1. Encontre a transformada de Laplace para as seguintes funções:

b)

$$f(t) = 0.03(1 - cos(2t))$$

Aplicando a tranformada inversa de Laplace,

$$F(s) = \frac{0.03}{s} - \frac{0.03s}{s^2 + 4}$$

2. Determine o valor final da função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é dada por:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

expandindo em frações parciais,

$$F(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}$$

aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$f(t) = 10u(t) - 10e^{-t}$$

para $t > 0$,

$$f(t) = 10 - 10e^{-t}$$

3. Represente as seguintes equações diferenciais no domínio complexo $s = \sigma + j\omega$.

a) $2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3 = 0$ para $x(0) = 3$ e $x\dot{(0)} = 0$

Aplicando as propriedades de Laplace para equações diferenciais,

$$2(sX(s) - 3s - 0) + 7(sX(s) - 3) + 3X(s) = 0$$

Isolando $X(s)$,

$$X(s) = \frac{6s + 21}{9s + 3} = \frac{2s + 7}{3s + 1}$$

b) $\ddot{x} + 3\ddot{x} + 6x = 0$ para $x(0) = 0$ e $x\dot{(0)} = 3$

Aplicando novamente Laplace,

$$sX(s) - 3 + 3(sX(s)) + 6X(s) = 0$$

Isolando $X(s)$,

$$X(s) = \frac{3}{4s + 6}$$

4. Obtenha a resposta temporal do sistema abaixo para uma entrada do tipo impulso unitário em $t = 0$. Encontre seu valor em regime permanente.

$$G(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+6)}$$

Considerando que,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

O Laplace do impulso é 1, desenvolvendo,

$$Y(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+6)} 1 = \frac{5/3}{s^2} + \frac{5/9}{s} + \frac{-5/9}{s+6}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace é possível obter a resposta temporal,

$$y(t) = \frac{5t}{9} + \frac{5}{9} + \frac{-5}{9} e^{-6t}$$

O valor de $y(t = 0)$ é portanto,

$$y(0) = 0$$

O seu valor em regime permanente por ser encontrado, aplicando o teorema do valor final de Laplace,

$$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{5(s+2)}{s(s+6)} = \infty$$

5. Determine a transformada inversa de Laplace e o valor em regime estacionário dos seguinte sinais,

a) $Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando LI,

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Valor em regime permanente,

$$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = 0$$

b) $Y(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{\frac{2+5j}{2}}{s+1+2j} + \frac{\frac{2-5j}{2}}{s+1-2j}$$

Aplicando LI,

$$y(t) = \frac{2+5j}{2}e^{-(1+2j)t} + \frac{2-5j}{2}e^{-(1-2j)t}$$

Valor em regime permanente,

$$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{2s+12}{s^2+2s+5} = 0$$

6. Um dado sistema em repouso é submetido a uma entrada $u(t)$ do tipo exponencial decrescente com constante de tempo unitária e valor inicial $t = 0$ igual a 1. Sabendo que o comportamento dinâmico do sistema é dado por $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$, encontre a equação que determina a resposta temporal.

O sistema é,

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$$

Aplicando a Laplace e considerando os valores iniciais iguais a zero,

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = U(s)$$

Isolando $X(s)$,

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}U(s)$$

Sabendo que a transformada de Laplace da exponencial do problema é,

$$U(s) = \frac{1}{1 + s}$$

A reposta para tal pode ser encontrada,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\left(\frac{1}{s + 1}\right) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Expandindo em frações parciais para facilitar a aplicação do Laplace inverso,

$$Y(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{1}{s + 1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace de tal forma que a resposta temporal , para $t \geq 0$, é,

$$y(t) = e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t}$$

7. Obtenha a função de transferência de malha fechada do sistema a seguir,

A função de malha aberta é,

$$G(s) = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

O ganho de realimentação é unitária, portanto a equação de transferência pode ser obtida usando,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Substituindo os valores,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+s+2}$$

8. O circuito elétrico abaixo é utilizado para carregar um capacitor em um circuito eletrônico. Obtenha a função de transferência que representa a tensão do capacitor em relação a entrada $i(t)$.

É sabido que a impedância capacitiva é dada por $\frac{1}{sC}$ e indutiva é sL. O resistor em paralelo com o capacitor produz uma impedância,

$$R||\frac{1}{sC} = \frac{R}{sRC+1}$$

Esta nova impedância em paralelo com o indutor produz,

$$\frac{R}{sRC+1}||sL = \frac{sRL}{s^2RLC+sL+R}$$

A tensão no capacitor é mesma no resistor e indutor, utilizando $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$, é possível encontra a função de transferência para o circuito,

$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{sRL}{s^2RLC+sL+R}$$

Onde $\dot{V}$, $\dot{I}$ e $\dot{Z}$ são grandezas vetoriais.

9. Encontre as funções de transferência para as posições dos corpos m_1 e m_2

As equações para a figura são: Para o corpo m_1

$$m_1\ddot{x_1} = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x_1} - \dot{x_2}) + u$$

Para o corpo m_2

$$m_2\ddot{x_2} = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x_2} - \dot{x_1})$$

Simplificando as equações para os dois sistemas,

$$m_1\ddot{x_1} + b\dot{x_1} + (k_1 + k_2)x_1 = b\dot{x_2} + k_2x_2 + u$$

$$m_2\ddot{x_2} + b\dot{x_2} + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x_1} + k_2x_1$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace para as duas equações e considerando as condições iniciais nulas,

$$(m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2))X_1(s) = (bs + k_2)X_2(s) + U(s) \tag{1}$$

$$(m_2s^2 + bs + (k_2 + k_3))X_2(s) = (bs + k_2)X_1(s) \tag{2}$$

Simplificando a equação 2 de tal forma que se substitui em 1,

$$((m_1s^2+bs+k_1k_2)(m_2s^2+bs+k_2+k_3)-(bs+k_2)^2)X_1(s) = (m_2s^2+bs+k_2+k_3)U(s)$$

Logo,

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \tag{3}$$

Obtendo tambem,

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \tag{4}$$

Logo as equações 3 e 4 são funções de transferências para os corpos m_1 e m_2.

10.Encontre a função de transferência equivalente para o sistema apresentado na figura abaixo.

G_1 e G_2 formam um arranjo em paralelo, G_3 representa o ganho em malha aberta, G_4 representa o feedback, logo $\frac{G_3}{1+G_3G_4}$, formando o ganho de realimentação para tanto, a equação final fica,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G1 + G2}{1 + (G_1 + G_2)\frac{G_3}{1+G_3G_4}}$$

11. Considere a resposta ao degrau unitário do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Obtenha o tempo de subida, o máximo sobre-sinal, o tempo de acomodação com tolerância de 2% e o erro em regime permanente.

A função de transferência em malha fechada é,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

Onde $C(s)$ representa a saída e $R(s)$ representa a entrada. Comparando a função de transferência com a forma padrão de um sistema de 2ª ordem que é,

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

Nota-se então que, $\omega_n = 1$ e $2\zeta\omega = 1$. Aplicando as equação já conhecidas para tal analise, é possivel, obter,

$$\zeta = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\omega_d = \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = (1-0.5^2)^{1/2} = 866.0E-3$$

$$\beta = tg^{-1}\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = tg^{-1}\frac{0.866}{0.5} = 1.047$$

Tempo de subida,

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 2.418$$

Tempo de pico,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 3.628$$

Máximo sobressinal,

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 16.5\%$$

Tempo de acomodação(critério 2%),

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8$$

12. Considere o sistema de malha fechada dado como:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Determine os valores de ζ e ω_n de modo que o sistema responda a uma entrada em degrau com aproximadamente 5% de sobressinal e com um tempo de acomodação de 2 segundos (utilize o critério de 2% de tolerância).

Sabendo que,

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} = 4$$

Torna,

$$\sigma = 2$$

Usando,

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.05$$

Encontra-se,

$$\zeta = 690.1E - 3$$

Finalmente,

$$\omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} = 2.898$$

13. Considere o sistema de malha fechada apresentado na figura abaixo, Determine o intervalo de valores de K para que o sistema seja estável.

A equação de malha fechada do sistema é,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-2)}{K(s-2)+s^3+7s^2+31s+25}$$

Rearranjando os denominador,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-2)}{s^3 7s^2+s(31+K)+25+2K}$$

Aplicando o critério de estabilidade de Routh,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 31+K \\ s^2 & 7 & 25+2K \\ s^1 & \frac{5K+192}{7} & 0 \\ s^0 & 2K+25 & 0 \end{array}$$

O sistema é estável para,

$$2K+25>0$$

e

$$\frac{5K+192}{7}>0$$

14. Determine o valor de k para que o coeficiente de amortecimento ζ seja 0,5. A partir daí, obtenha o tempo de subida, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação (tolerância de 5%) da resposta ao degrau unitário.

A função de transferência pode ser encontrada, de tal forma que, a primeira função da malha interna é,

$$= \frac{\frac{16}{s+4/5}}{1 + k\frac{16}{s+4/5}} = \frac{80}{80k + 5s + 4}$$

O ganho $\frac{1}{s}$ produz,

$$= \frac{80}{5s^2 + 80ks + 4s}$$

A função para a ultima malha fechada é,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{80}{5s^2+80ks+4s}}{1 + \frac{80}{5s^2+80ks+4s}} = \frac{80}{5s^2 + s(80k+4) + 80}$$

Comparando com a forma padrão de um sistema de segunda ordem, é possível obter,

$$\omega_n = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$2\zeta\omega_n = 80k + 4$$

Desenvolvendo ζ, é possível facilmente adquirir.

$$2 \times 0.5 \times 4\sqrt{5} = 80k + 4$$

O valor de k é portanto,

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{20} = 61.80E-3$$

Para o cálculo do tempo de subida é necessário encontrar β,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 4\sqrt{5}\sqrt{1-0.5^2} = 7.746$$

$$\beta = tg^{-1}\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = tg^{-1}\frac{7.746}{4.472} = 1.047$$

O tempo de subida é portanto,

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi-1.047}{7.746} = 270.4E-3$$

O tempo de pico é,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 405.6E-3$$

Máximo sobre sinal,

$$M_p = 163.0E-3$$

O tempo de acomodação,

$$t_s = 335.4E-3$$

15. Encontre o erro estacionário deste sistema para uma entrada em degrau, rampa e parábola.

O sistema final é,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Considerando o degrau unitário, o sistema responde,

$$C(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10} \left(\frac{1}{s} \right)$$

O valor em regime permanente é,

$$\lim_{s \to \infty} sC(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10}{s^2 + s + 10} = 1$$

Nota-se portanto que o erro em regime estacionário é 0%

Considerando a rampa, o sistema responde,

$$C(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10} \left(\frac{1}{s^2} \right)$$

O valor em regime permanente é,

$$\lim_{s \to \infty} sC(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10}{s^3 + s^2 + 10s} = \infty$$

Nota-se portanto um erro ∞%