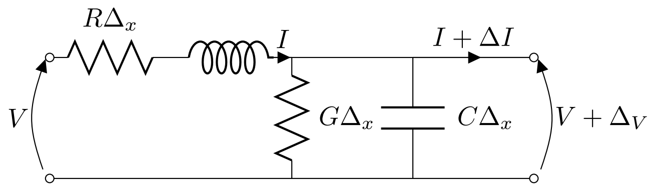
# Linha de Transmissão Longa

Felipe Bandeira da Silva

1 de novembro de 2013

Será utilizada o modelo de parâmetro distribuído, onde:
R - Resistência da LT
L - Indutância da LT
C - Capacitância da LT
G - Condutância do AR




Pela lei das malhas,

$$V = (R\Delta_x)I + (L\Delta_x)\frac{\partial I}{\partial t} + V + \Delta V \tag{1}$$

Desenvolvendo 1,

$$\Delta V = -(R\Delta_x)I - (L\Delta_x)\frac{\partial I}{\partial t} \tag{2}$$

Pela lei dos nós,

$$I = (G\Delta_x)(V + \Delta V) + (C\Delta_x)\frac{\partial(v + \Delta V)}{\partial t} + I + \Delta I \tag{3}$$

$$\Delta I = (G\Delta_x)(V + \Delta V) - (C\Delta_x)\frac{\partial(v + \Delta V)}{\partial t} \tag{4}$$

$$\Delta I = -(G\Delta_x V) - (G\Delta_x \Delta V) - (C\Delta_x)\frac{\partial V}{\partial t} - (C\Delta V)\frac{\partial \Delta V}{\partial t} \tag{5}$$

Substituindo o valor de $\Delta V$ dado pela equação (2) na equação (5) temos,

$$\begin{aligned} \Delta I = & \\ & -(G\Delta_x V) - (G\Delta_x)(-(R\Delta_x)I - (L\Delta_x)\frac{\partial I}{\partial t}) \\ & -(C\Delta_x)\frac{\partial V}{\partial I} - (C\Delta_x)\frac{\partial}{\partial t}\left(-(R\Delta_x)I - (L\Delta_x)\frac{\partial I}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Simplificando,

$$\Delta I = -(G\Delta_x V) + GR\Delta_x^2 I + GL\Delta_x^2\frac{\partial I}{\partial t} - C\Delta_x\frac{\partial I}{\partial t} + C\Delta_x^2 R\frac{\partial I}{\partial t} + CL\Delta_x^2\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{7}$$

Dividindo a equação 2 por $\Delta_x$, temos,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8}$$

Aplicando o limite na equação 8, e tendendo $\Delta_x \to 0$ temos,

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\lim_{\Delta\to 0} RI - \lim_{\Delta\to 0} L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{10}$$

Dividindo a equação 7 por $\Delta_x$ temos,

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -GV + GR\Delta_x I + GL\Delta_x\frac{\partial I}{\partial t} - C\frac{\partial V}{\partial t} + CL\Delta_x\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{11}$$

Aplicando o limite na equação 11 e tendendo $\Delta_x \to 0$ temos,

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \\ &\quad - \lim_{\Delta \to 0} (GV) + \lim_{\Delta \to 0} (GR\Delta_x I) + \lim_{\Delta \to 0} \left( GL\Delta_x \frac{\partial I}{\partial t} \right) \\ &\quad - \lim_{\Delta \to 0} \left( C\frac{\partial C}{\partial t} \right) + \lim_{\Delta \to 0} \left( CL\Delta_x \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \tag{12}$$

Simplificando,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -GV - C\frac{\partial V}{\partial t} \tag{13}$$

As equações 10 e 13 são chamadas de equações fundamentais de propagação. Derivando a equação 10 em relação a $x$, temos,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -R\frac{\partial I}{\partial x} - L\frac{\partial \frac{\partial I}{\partial t}}{\partial t} \tag{14}$$

Substituindo o valor de $\frac{\partial I}{\partial x}$ dado pela equação 13 na equação 14, temos,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -R\left(-GV - C\frac{\partial V}{\partial t}\right) - L\frac{\partial - GV - L\frac{\partial V}{\partial t}}{\partial t} \tag{15}$$

$$= RGV + RC\frac{\partial V}{\partial t} + LG\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{16}$$

$$= RGV + (RC + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{17}$$

Derivando a equação 13 em relação a "x", temos,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} \tag{18}$$

Substituindo o valor de $\frac{\partial V}{\partial x}$ dada pela equação 10 na equação 18, temos,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -G\left(-RI - L\frac{\partial I}{\partial t}\right) - L\frac{\partial}{\partial t}\left(-RI - L\frac{\partial I}{\partial t}\right) \tag{19}$$

$$= RGI + LG\frac{\partial I}{\partial t} + RC\frac{\partial I}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{20}$$

$$= RGI + (RC + LG)\frac{\partial I}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{21}$$

Antes de resolver as equações 17 e 21, se faz necessário,

$$V = \sqrt{2}V_{ef}e^{j\omega t} \tag{22}$$

$$I = \sqrt{2}I_{ef}e^{j\omega t} \tag{23}$$

Derivando,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = j\omega\sqrt{2}V_{ef}e^{j\omega t} \tag{24}$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = j\omega V$$

Derivando novamente,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = j\omega j\omega\sqrt{2}V_{ef}e^{j\omega t} \tag{25}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = j\omega j\omega V$$

Aplicando para a corrente,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = j\omega\sqrt{2}I_{ef}e^{j\omega t} \tag{26}$$

Logo,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = j\omega I$$

Desenvolvendo a equação 17, temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= RGV + (RC + LG)j\omega V + LCj\omega j\omega V \\ &= RGV + (Rj\omega C + Gj\omega L)v + j\omega Lj\omega CV \\ &= RGV + V(R(j\omega C) + G(j\omega L)) + (j\omega L)(j\omega C)V \\ &= V\left((R + j\omega L)(G + j\omega C)\right) \end{aligned} \tag{27}$$

Desprezando o valor da susceptância, $G = 0$ e lembrando $R + j\omega L = Z$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - VZY = 0 \tag{28}$$

Seja $\frac{d}{dx} = D$ logo $\frac{d^2}{dx^2} = D^2$ é possivel desenvolver a equação 28 até,

$$D^2V - ZVY = 0 \tag{29}$$

Temos,

$$(D^2 - ZY)V = 0 \tag{30}$$

Com $V \neq 0$,

$$D^2 - ZY = 0 \tag{31}$$

Sendo soluções de 31,

$$D_1 = \sqrt{ZY} \tag{32}$$

$$D_2 = -\sqrt{ZY} \tag{33}$$

A solução da equação diferencial é,

$$V = A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \tag{34}$$

Comprovando que a equação 34 é solução para a equação 17,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{ZY} A_1 e^{\sqrt{ZY}x} - \sqrt{ZY} A_2 e^{-\sqrt{ZY}x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \sqrt{ZY}\sqrt{ZY} A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + \sqrt{ZY}\sqrt{ZY} A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \\ &= ZY A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + ZY A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \\ &= ZY \left( A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + ZY A_2 e^{\sqrt{ZY}x} \right) \\ &= ZYV \end{aligned} \tag{35}$$

Com a equação 35 se prova a solução da equação 34.

Sabendo que,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -RI - Lj\omega I = -I(R + j\omega L) \tag{36}$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -IZ$$

Para tanto,

$$\sqrt{ZY}A_1e^{\sqrt{ZY}x} - \sqrt{ZY}A_2e^{-\sqrt{ZY}x} = -IZ \tag{37}$$

$$-I = \frac{\sqrt{ZY}}{Z}A_1e^{\sqrt{ZY}x} - \frac{\sqrt{ZY}}{Z}A_2e^{-\sqrt{ZY}x} \tag{38}$$

Sabendo que,

$$\frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} \tag{39}$$

Rearranjando a equação 38,

$$-I = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}A_1e^{\sqrt{ZY}x} - \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}A_2e^{-\sqrt{ZY}x} \tag{40}$$

Finalmente,

$$V = A_1e^{\gamma x} + A_2e^{-\gamma x} \tag{41}$$

$$I = \frac{1}{Z_C}A_1e^{\gamma x} + \frac{1}{Z_C}A_2e^{-\gamma x} \tag{42}$$

Onde, $\gamma$ é conhecido como constante de propagação sendo um número adimensional, $Z_C$ é conhecida como impedância caractéristica e é independente do comprimento da linha.

Para, $x = 0$ faz $V = V_R$

$$V_T^{FN} = A_1 + A_2 \tag{43}$$

$$I_T = \frac{1}{Z_C}A_1 - \frac{1}{Z_C}A_2 \tag{44}$$

Os valores de $A_1$ e $A_2$ são,

$$A_1 = \frac{V_R^{FN} + Z_C I_R}{2} \tag{45}$$

$$A_2 = \frac{V_R^{FN} - Z_C I_R}{2} \tag{46}$$

Substituindo 45 e 46 em 41 e 42,

$$V_T^{FN} = \frac{V_R^{FN} + Z_C I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R^{FN} - Z_C I_R}{2} e^{-\gamma x} \tag{47}$$

$$I_T = \frac{1}{Z_C} \frac{V_R^{FN} + Z_C I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{1}{Z_C} \frac{V_R^{FN} - Z_C I_R}{2} e^{-\gamma x} \tag{48}$$

Pela teoria dos quadripolos,

$$V_T^{FN} = A V_R^{FN} + B I_R \tag{49}$$

$$I_T = C V_R^{FN} + D I_R \tag{50}$$

Identificando os parametros dos quadripolos,

$$V_T^{FN} = \frac{V_R^{FN}}{2} e^{\gamma x} + \frac{Z_C I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R^{FN}}{2} e^{-\gamma x} - \frac{Z_C I_R}{2} e^{-\gamma x} \tag{51}$$

Rearranjando os termos,

$$V_T^{FN} = \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R^{FN} + Z_C \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \tag{52}$$

Sabe-se que,

$$\cosh \gamma x = \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) \tag{53}$$

$$\sinh \gamma x = \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) \tag{54}$$

Então a equação 52 fica,

$$V_T^{FN} = \cosh{(\gamma x)} V_R^{FN} + \sinh{(\gamma x)} Z_C I_R \tag{55}$$

Para a corrente,

$$I_T = \left( \frac{\frac{V_R^{FN}}{Z_C} + I_R}{2} \right) e^{\gamma x} - \left( \frac{\frac{V_R^{FN}}{Z_C} - I_R}{2} \right) e^{-\gamma x} \tag{56}$$

Rearranjando os termos,

$$I_T = \frac{V_R^{FN}}{2Z_C} e^{\gamma x} + \frac{I_R}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_R^{FN}}{2Z_C} e^{-\gamma x} + \frac{I_R}{2} e^{-\gamma x} \tag{57}$$

Para a identificação,

$$I_T = \frac{1}{Z_C} \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R^{FN} + \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \tag{58}$$

Portanto,

$$I_T = \frac{1}{Z_C} \sinh{(\gamma x)} V_R^{FN} + \cosh{(\gamma x)} I_R \tag{59}$$

Em resumo os parâmetros do quadripolos para uma linha longa são,

| | |
|---|---|
| A | $\cosh \gamma x$ |
| B | $Z_C \sinh \gamma x$ |
| C | $\frac{\sinh \gamma x}{Z_C}$ |
| D | $\cosh \gamma x$ |

Antes de finalizar, se faz necessário provar que $AD - BC = 1$

$$\cosh \gamma x \cosh \gamma x - Z_C \sinh \gamma x \frac{\sinh \gamma x}{Z_C} = 1 \tag{60}$$

Portanto,

$$\cosh^2 (\gamma x) - \sinh^2 (\gamma x) = 1 \tag{61}$$