Relatório, Laboratório 3.
Servo 1

Felipe Bandeira da Silva

10 de setembro de 2013

Questão 1. Faça a expansão em frações parciais das funções abaixo com o auxílio do Matlab e em seguida obtenha a transformada inversa de laplace.

(a)

$$F(s) = \frac{10(s+2)(s+4}{(s+1)(s+3)(s+5)^2}$$

Usando a seguinte sequência de comandos para a obtenção da expansão,

```
a = [1 2];
b = [1 4];
num = 10*conv(a, b);
a = [1 1];
b = [1 3];
c = [1 5];
den = conv(conv(a, b), conv(c, c));
[r, p, k] = residue(num, den);
```

Resultado,

```
r =
    -2.1875
     3.7500
     1.2500
     0.9375

p =
    -5.0000
    -5.0000
    -3.0000
    -1.0000

k =
    []
```

Rearranjando os valores do resíduos, polos e termo de evidenciamento,

$$F(s) = \frac{-2.1875}{s+5} + \frac{3.75}{s+5} + \frac{1.25}{s+3} + \frac{0.9375}{s+1}$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = -2.1875e^{-5t} + 3.75e^{-5t} + 1.25e^{-3t} + 0.9375e^{-t}$$

(b)

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

Usando a mesma ideia do item (a) é possível obter,

```
r =
    -0.5000 - 0.2887i
    -0.5000 + 0.2887i
     1.0000 + 0.0000i

p =
    -0.5000 + 0.8660i
    -0.5000 - 0.8660i
     0.0000 + 0.0000i

k =
     []

```

Rearranjando os termos,

$$F(s) = \frac{-0.5000 - 0.2887j}{s - (-0.5000 + 0.8660j)} + \frac{-0.5000 + 0.2887j}{s - (-0.5000 - 0.8660j)} + \frac{1}{s}$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = (-0.5 - 0.2887j)e^{(-0.5+0.866j)t} + (-0.5 + 0.2887j)e^{(-0.5-0.866j)t} + 1$$

(c)

$$F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Usando a mesma ideia do item (a) é possível obter,

```
r =
    -6.0000
    -4.0000
     3.0000
p =
    -3.0000
    -2.0000
    -1.0000
k =
     2

```

Rearranjando os termos,

$$F(s) = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = -6e^{-3t} - 4e^{-2t} + 3e^{-t} + 2\delta(t)$$

Questão 2. Com base no sistema definido pela seguinte função de transferência, obtenha:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s(s+1)}$$

(a) Função temporal $y(t)$ que representa a resposta do sistema quando excitado por um impulso unitário $x(t) = \delta(t)$ e rampa unitário $x(t) = r(t)$

O $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ com isto é possível obter a resposta $Y(s)$ ao impulso,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot 1$$

Usando o comando "residue"para a expansão em frações parciais, temos,

$$Y(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{3}{s}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$,

$$\mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}(-\frac{3}{s+1} + \frac{3}{s}),$$

Resolvendo para t, encontra-se a resposta para o **impulso** ,

$$y(t) = 3 - 3e^{-t} \tag{1}$$

Para o degrau unitário o $\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$, a resposta a excitação,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s^3 + s^2}$$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$, encontra-se a resposta para o **degrau** ,

$$y(t) = 3 - 3t + 3e^{-t} \tag{2}$$

Para a ultima resposta, a $\mathcal{L}$ da rampa unitária é $\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{s^2}$, logo,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^4 + s^3}$$

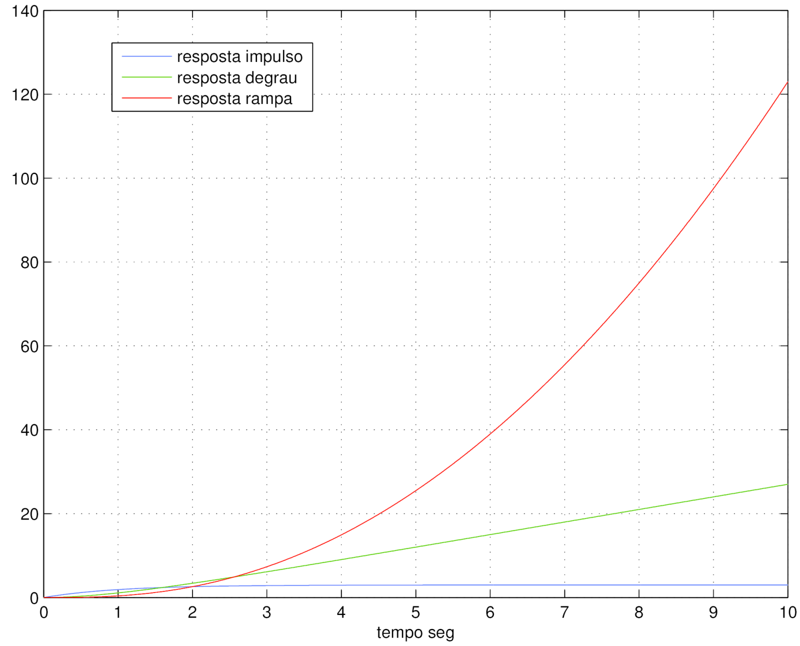
Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$, encontra-se a resposta para a **rampa** ,

$$y(t) = \frac{3t^2}{2} - 3t + 3 - 3e^{-t} \tag{3}$$

(b) Apresente um um mesmo gráfico a resposta $y(t)$ obtida no item anterior, considerando um intervalo de tempo de 0seg a 10seg com passo de 0.01seg.



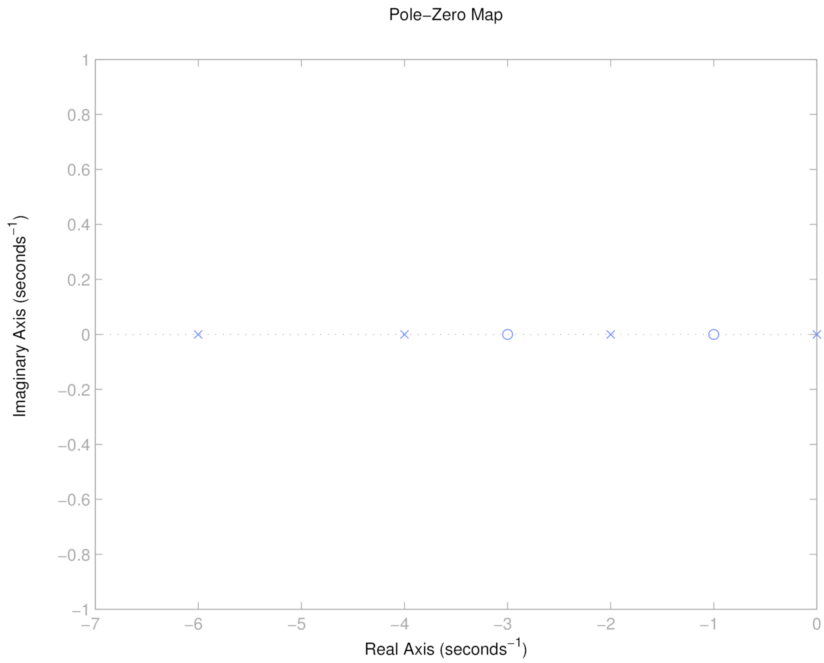
Questão 3. Encontre os zeros, polos e ganho da função de transferência abaixo. Em seguida, represente e identifique os polos e zeros no plano-s.

$$G(s) = \frac{4s^2 + 16s + 12}{s^4 + 12s^3 + 44s^2 + 48s}$$

Para a solução deste problema, criei o seguinte código,

```
num = [4 16 12];
den = [1 12 44 48 0];
z = roots(num);
p = roots(den);
k = 1;
fun = zpk(z, p, k);
```

Obtendo os polos e zeros no plano-s,



Questão 4. Dados os zeros, polos e ganho K a seguir, obtenha a função de transferência que representa o respectivo sistema:

(a) Não existe zeros, os polos estão em $-2 \pm 5j$ e o ganho é 10.

Para a solução, o seguinte código foi utilizado,

```
z = [];
p = [-2+5j -2-5j];
k = 10;
zpk(z, p, k);
```

Resultando na seguinte função de transferência,

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 29}$$

(b) O zero está em 0, os polos estão em $-1 \pm 2j$ e o ganho é 1.

Usando o mesmo código do item a, a função de transferência fica,

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

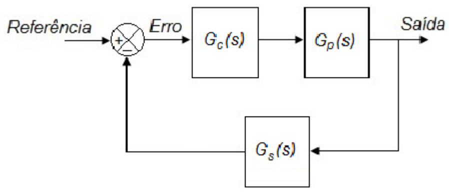
(c) Os zeros estão em 0 e -1, os polos estão em -2, -3 e $-2 \pm 5j$ e o ganho é 4.

A função de transferência é,

$$G(s) = \frac{4s(s+1)}{(s+2)(s+3)(s^2 + 4s + 29)}$$

Questão 5. Obtenha a função de transferência equivalente dos sistemas abaixo, sendo:

(a) Figura 1



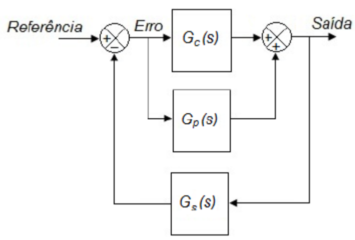
Usando os comandos *series* e *feedback* é possível criar a função de transferência, para tanto o código abaixo foi construído,

```
gc = tf([1 0],[1 1])
gp = tf([2], [1 1 2])
gs = tf([1], [1 0.5])
s = series(gc, gp)
f = feedback(s, gs)
```

Resultando na seguinte equação de transferência,

$$H(s) = \frac{2s^2 + s}{s^4 + 2.5s^3 + 4s^2 + 5.5s + 1}$$

(b) Figura 2



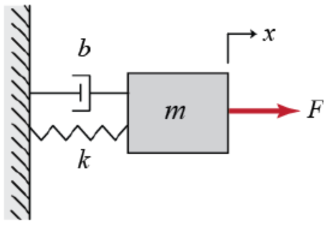
Com uma pequena alteração do código usando no item a, para suportar a associação em paralelo

```
gc = tf([1 0],[1 1])
gp = tf([2], [1 1 2])
gs = tf([1], [1 0.5])
p = parallel(gc, gp)
f1 = feedback(p, gs)
```

Resultando na seguinte equação de transferência,

$$H(s) = \frac{s^4 + 1.5s^3 + 4.5s^2 + 4s + 1}{s^4 + 3.5s^3 + 5s^2 + 7.5s + 3}$$

Questão 6. Com base no sistema dinâmico abaixo, obtenha analiticamente as matrizes de estado **(A, B, C, D)** considerando a posição $x(t)$ e a velocidade $\frac{dx(t)}{dt}$ com variáveis de estado, $F(t)$ como entrada e $x(t)$ como saída. Em seguida utilize o Matlab para encontrar a função de transferência correspondente. Considere $m = 1.0kg$, $b = 0.2Ns/m$, $k = 3.0N/m$



A equação diferencial para o sistema pode ser encontrada, o pistão exerce sobre o sistema uma força,

$$F_b(x) = b\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

A mola exerce sobre o sistema uma força,

$$F_k(x) = kx \tag{5}$$

A contribuição de todas as forças,

$$F_r = F(x) - (F_b(x) + F_k(x)) \tag{6}$$

Onde $F_r = m\frac{d^2x}{dt^2}$ é a força resultante, desenvolvendo a equação 6,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - \left(\frac{dx}{dt} + kx\right)$$

Portanto a equação diferencial final,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F \tag{7}$$

Substituindo em 7 os valores proposto pelo problema,

$$1\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2\frac{dx}{dt} + 3x = F \tag{8}$$

Desenvolvendo 8 para se obter as matrizes de estados,

$$q_1(t) = x(t) \tag{9}$$

$$q_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{10}$$

Derivando $q_1(t)$, é possível afirmar $\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t)$, desenvolvendo,

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = 1\left(-3x(t) - 0.2\frac{dy(t)}{dt}\right) + F \tag{11}$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = -3q_1(t) - 0.2q_2(t) + F \tag{12}$$

Colocando os termos nas formas matriciais, a equação de estado fica,

$$\begin{bmatrix} \frac{dq_1(t)}{dt} \\ \frac{dq_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{13}$$

E a equação de saída,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} u \tag{14}$$

Em outros termos, as matrizes de estados são,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as matrizes de estados é possível encontrar a função de transferência do sistema, usando o comando $ss2tf$ que retorna o numerador e denominador da função de transferência, tenho como resposta,

```
a = [0  1;  -3  -0.2];
b = [0;1];
c = [1  0];
d = [0];
[num,  den]=ss2tf(a, b, c, d)

num =
          0     -0.0000      1.0000
den =

     1.0000      0.2000      3.0000
```

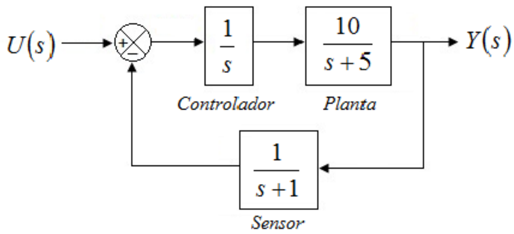
O que é totalmente coerente com a seguinte resposta analítica, aplicando a transformada inversa de laplace em 8,

$$s^2X(s) + 0.2sX(s) + 3X(s) = F(s)$$

Fazendo saída sobre a entrada, obtenho a mesma função que o comando $ss2tf$.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 3} \tag{15}$$

Questão 7. Com o auxilio do Matlab, obtenha as matrizes de estado (A, B, C, D) do sistema mostrado a seguir:



O Matlab disponibiliza a função $tf2ss$ que encontra uma de varias solução possíveis para as matrizes de estados. Antes se faz necessário encontrar a função de transferência para o problema, o código abaixo encontra a função de transferência para o problema 7,

```
controlador = tf([1], [1 0])
planta = tf([10], [1 5])
sensor = tf([1], [1 1])
h1 = series(controlador, planta)
funcao_transferencia = feedback(h1, sensor)
```

Após a execução do código, a seguinte função foi obtida,

$$H(s) = \frac{10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10}$$

Usando $tf2ss$,

```
[A, B, C, D] = tf2ss([10 10], [1 6 5 10])
```

Retorna as matrizes de estados,

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$