

# Trabalho 1

## Principio de Controle e Servo Mecanismos

Felipe Bandeira da Silva

12 de outubro de 2013

Coletânea com questões selecionadas das duas lista da 1np.

1. Encontre a transformada de Laplace para as seguintes funções:

2. Determine o valor final da função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace é dada por:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

expandindo em frações parciais,

$$F(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}$$

aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$f(t) = 10u(t) - 10e^{-t}$$

para  $t > 0$ ,

$$f(t) = 10 - 10e^{-t}$$

3. Represente as seguintes equações diferenciais no domínio complexo  $s = \sigma + j\omega$ .

a)  $2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3 = 0$  para  $x(0) = 3$  e  $\dot{x}(0) = 0$

Aplicando as propriedades de Laplace para equações diferenciais,

$$2(sX(s) - 3s - 0) + 7(sX(s) - 3) + 3X(s) = 0$$

Isolando  $X(s)$ ,

$$X(s) = \frac{6s + 21}{9s + 3} = \frac{2s + 7}{3s + 1}$$

b)  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = 0$  para  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 3$

Aplicando novamente Laplace,

$$sX(s) - 3 + 3(sX(s)) + 6X(s) = 0$$

Isolando  $X(s)$ ,

$$X(s) = \frac{3}{4s + 6}$$

4. Obtenha a resposta temporal do sistema abaixo para uma entrada do tipo impulso unitário em  $t = 0$ . Encontre seu valor em regime permanente.

$$G(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+6)}$$

Considerando que,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

O Laplace do impulso é 1, desenvolvendo,

$$Y(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+6)} 1 = \frac{5/3}{s^2} + \frac{5/9}{s} + \frac{-5/9}{s+6}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace é possível obter a resposta temporal,

$$y(t) = \frac{5t}{9} + \frac{5}{9} + \frac{-5}{9}e^{-6t}$$

O valor de  $y(t=0)$  é portanto,

$$y(0) = 0$$

O seu valor em regime permanente por ser encontrado, aplicando o teorema do valor final de Laplace,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5(s+2)}{s(s+6)} = \infty$$

5. Determine a transformada inversa de Laplace e o valor em regime estacionário dos seguinte sinais,

a)  $Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando LI,

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Valor em regime permanente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = 0$$

b)  $Y(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{\frac{2+5j}{2}}{s+1+2j} + \frac{\frac{2-5j}{2}}{s+1-2j}$$

Aplicando LI,

$$y(t) = \frac{2+5j}{2}e^{-(1+2j)t} + \frac{2-5j}{2}e^{-(1-2j)t}$$

Valor em regime permanente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = 0$$

6. Um dado sistema em repouso é submetido a uma entrada  $u(t)$  do tipo exponencial decrescente com constante de tempo unitária e valor inicial  $t = 0$  igual a 1. Sabendo que o comportamento dinâmico do sistema é dado por  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$ , encontre a equação que determina a resposta temporal.

O sistema é,

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$$

Aplicando a Laplace e considerando os valores iniciais iguais a zero,

$$s^2 X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = U(s)$$

Isolando  $X(s)$ ,

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} U(s)$$

Sabendo que a transformada de Laplace da exponencial do problema é,

$$U(s) = \frac{1}{1 + s}$$

A resposta para tal pode ser encontrada,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{1}{s + 1} \right) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Expandindo em frações parciais para facilitar a aplicação do Laplace inverso,

$$Y(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{1}{s + 1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace de tal forma que a resposta temporal, para  $t \geq 0$ , é,

$$y(t) = e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t}$$

7. Obtenha a função de transferência de malha fechada do sistema a seguir,

A função de malha aberta é,

$$G(s) = \frac{2}{s} \left( \frac{1}{s+1} \right)$$

O ganho de realimentação é unitária, portanto a equação de transferência pode ser obtida usando,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Substituindo os valores,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$



8. O circuito elétrico abaixo é utilizado para carregar um capacitor em um circuito eletrônico. Obtenha a função de transferência que representa a tensão do capacitor em relação a entrada  $i(t)$ .

É sabido que a impedância capacitiva é dada por  $\frac{1}{sC}$  e indutiva é  $sL$ . O resistor em paralelo com o capacitor produz uma impedância,

$$R || \frac{1}{sC} = \frac{R}{sRC + 1}$$

Esta nova impedância em paralelo com o indutor produz,

$$\frac{R}{sRC + 1} || sL = \frac{sRL}{s^2RLC + sL + R}$$

A tensão no capacitor é mesma no resistor e indutor, utilizando  $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$ , é possível encontrar a função de transferência para o circuito,

$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{sRL}{s^2RLC + sL + R}$$

Onde  $\dot{V}$ ,  $\dot{I}$  e  $\dot{Z}$  são grandezas vetoriais.

9.

10.

11. Considere a resposta ao degrau unitário do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Obtenha o tempo de subida, o máximo sobre-sinal, o tempo de acomodação com tolerância de 2% e o erro em regime permanente.

A função de transferência em malha fechada é,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Onde  $C(s)$  representa a saída e  $R(s)$  representa a entrada. Comparando a função de transferência com a forma padrão de um sistema de 2ª ordem que é,

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Nota-se então que,  $\omega_n = 1$  e  $2\zeta\omega_n = 1$ . Aplicando as equação já conhecidas para tal análise, é possível, obter,

$$\zeta = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} = (1 - 0.5^2)^{1/2} = 0.866$$

$$\beta = tg^{-1} \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = tg^{-1} \frac{0.866}{0.5} = 1.047$$

Tempo de subida,

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 2.418$$

Tempo de pico,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 3.628$$

Máximo sobressinal,

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 16.5\%$$

Tempo de acomodação(critério 2%),

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8$$

12. Considere o sistema de malha fechada dado como:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Determine os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  de modo que o sistema responda a uma entrada em degrau com aproximadamente 5% de sobressinal e com um tempo de acomodação de 2 segundos (utilize o critério de 2% de tolerância).