

---

## Relatorio, Laboratorio 3

### Servo 1

---

Felipe Bandeira da Silva  
10 de setembro de 2013

**Questão 1.** Faça a expansão em frações parciais das funções abaixo com o auxílio do Matlab e em seguida obtenha a transformada inversa de laplace.

(a)

$$F(s) = \frac{10(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)^2}$$

Usando a seguinte sequência de comandos para a obtenção da expansão,

```
1 a = [1 2];  
  b = [1 4];  
3 num = 10*conv(a, b);  
  a = [1 1];  
5 b = [1 3];  
  c = [1 5];  
7 den = conv(conv(a, b), conv(c, c));  
  [r, p, k] = residue(num, den);
```

Resultado,

```
1 r =  
2   -2.1875  
   3.7500  
4    1.2500  
   0.9375  
6  
7 p =  
8   -5.0000  
   -5.0000
```

$$\begin{array}{l} 10 \quad -3.0000 \\ 12 \quad -1.0000 \\ \mathbf{k} = \\ 14 \quad [] \end{array}$$

Rearranjando os valores do resíduos, polos e termo de evidenciamento,

$$F(s) = \frac{-2.1875}{s+5} + \frac{3.75}{s+5} + \frac{1.25}{s+3} + \frac{0.9375}{s+1}$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = -2.1875e^{-5t} + 3.75e^{-5t} + 1.25e^{-3t} + 0.9375e^{-t}$$

(b)

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

Usando a mesma ideia do item (a) é possível obter,

$$\begin{array}{l} \mathbf{r} = \\ 2 \quad -0.5000 - 0.2887 \mathbf{i} \\ \quad -0.5000 + 0.2887 \mathbf{i} \\ 4 \quad 1.0000 + 0.0000 \mathbf{i} \\ \mathbf{p} = \\ 6 \quad -0.5000 + 0.8660 \mathbf{i} \\ 8 \quad -0.5000 - 0.8660 \mathbf{i} \\ \quad 0.0000 + 0.0000 \mathbf{i} \\ 10 \quad \mathbf{k} = \\ 12 \quad [] \end{array}$$

Rearranjando os termos,

$$F(s) = \frac{-0.5000 - 0.2887j}{s - (-0.5000 + 0.8660j)} + \frac{-0.5000 + 0.2887j}{s - (-0.5000 - 0.8660j)} + \frac{1}{s}$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = (-0.5 - 0.2887j)e^{(-0.5+0.866j)t} + (-0.5 + 0.2887j)e^{(-0.5-0.866j)t} + 1$$

(c)

$$F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Usando a mesma ideia do item (a) é possível obter,

	r =	
2		-6.0000
		-4.0000
4		3.0000
	p =	
6		-3.0000
		-2.0000
8		-1.0000
	k =	
10		2

Rearranjando os termos,

$$F(s) = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Aplicando a transformada inversa de laplace,

$$f(t) = -6e^{-3t} - 4e^{-2t} + 3e^{-t} + 2\delta(t)$$

**Questão 2.** Com base no sistema definido pela seguinte função de transferência, obtenha:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s(s+1)}$$

- (a) Função temporal  $y(t)$  que representa a resposta do sistema quando excitado por um impulso unitário  $x(t) = \delta(t)$  e rampa unitário  $x(t) = r(t)$

O  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$  com isto é possível obter a resposta  $Y(s)$  ao impulso,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot 1$$

Usando o comando "residue" para a expansão em frações parciais, temos,

$$Y(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{3}{s}$$

Aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$ ,

$$\mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{3}{s+1} + \frac{3}{s}\right),$$

Resolvendo para  $t$ , encontra-se a resposta para o **impulso** ,

$$y(t) = 3 - 3e^{-t} \quad (1)$$

Para o degrau unitário o  $\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$ , a resposta a excitação,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s^3 + s^2}$$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$ , encontra-se a resposta para o **degrau** ,

$$y(t) = 3 - 3t + 3e^{-t} \quad (2)$$

Para a ultima resposta, a  $\mathcal{L}$  da rampa unitária é  $\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{s^2}$ , logo,

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^4 + s^3}$$

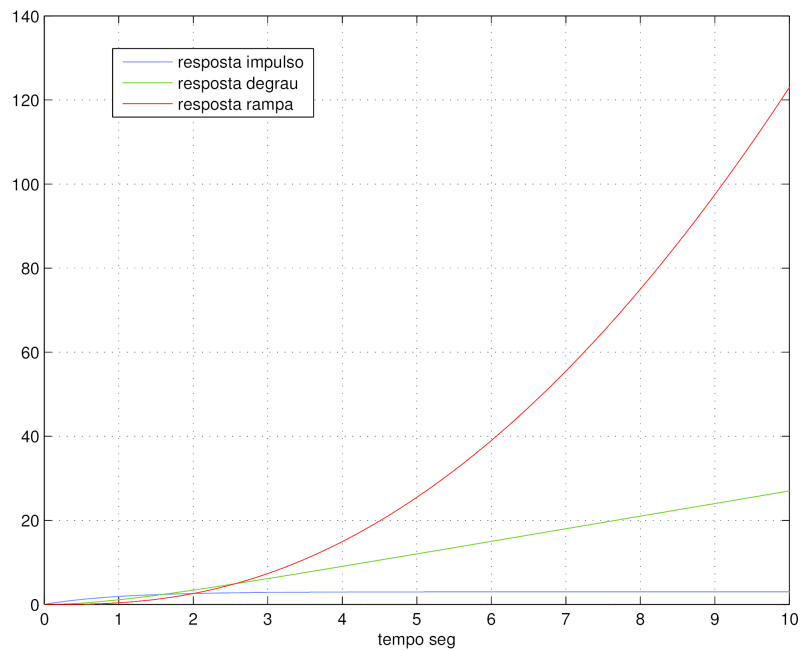
Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1}$$

Aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$ , encontra-se a resposta para a **rampa** ,

$$y(t) = \frac{3t^2}{2} - 3t + 3 - 3e^{-t} \quad (3)$$

- (b) Apresente um um mesmo gráfico a resposta  $y(t)$  obtida no item anterior, considerando um intervalo de tempo de 0seg a 10seg com passo de 0.01seg.



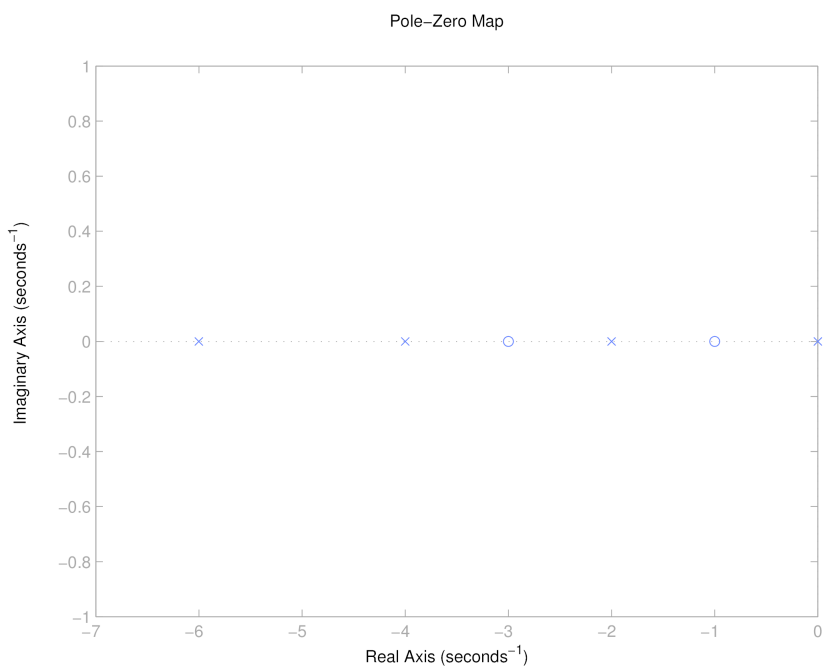
**Questão 3.** Encontre os zeros, polos e ganho da função de transferência abaixo. Em seguida, represente e identifique os polos e zeros no plano-s.

$$G(s) = \frac{4s^2 + 16s + 12}{s^4 + 12s^3 + 44s^2 + 48s}$$

Para a solução deste problema, criei o seguinte código,

```
num = [4 16 12];  
2 den = [1 12 44 48 0];  
z = roots(num);  
4 p = roots(den);  
k = 1;  
6 fun = zpk(z, p, k);
```

Obtendo os polos e zeros no plano-s,



**Questão 4.** Dados os zeros, polos e ganho K a seguir, obtenha a função de transferência que representa o respectivo sistema:

- (a) Não existe zeros, os polos estão em  $-2 \pm 5j$  e o ganho é 10.

Para a solução, o seguinte código foi utilizado,

```

z = [];
2 p = [-2+5j -2-5j];
k = 10;
4 zpk(z, p, k);

```

Resultando na seguinte função de transferência,

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 29}$$

- (b) O zero está em 0, os polos estão em  $-1 \pm 2j$  e o ganho é 1.

Usando o mesmo código do item a, a função de transferência fica,

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

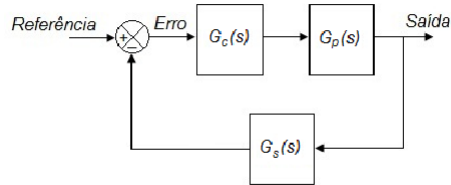
- (c) Os zeros estão em 0 e -1, os polos estão em -2, -3 e  $-2 \pm 5j$  e o ganho é 4.

A função de transferência é,

$$G(s) = \frac{4s(s+1)}{(s+2)(s+3)(s^2+4s+29)}$$

**Questão 5.** Obtenha a função de transferência equivalente dos sistemas abaixo, sendo:

(a) Figura 1



Usando os comandos *series* e *feedback* é possível criar a função de transferência, para tanto o código abaixo foi construído,

```

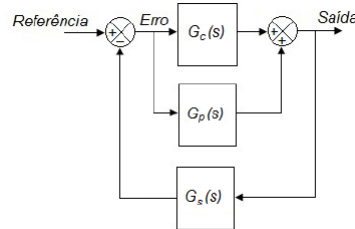
1 gc = tf([1 0],[1 1])
2 gp = tf([2],[1 1 2])
3 gs = tf([1],[1 0.5])
4 s = series(gc, gp)
5 f = feedback(s, gs)
6

```

Resultando na seguinte equação de transferência,

$$H(s) = \frac{2s^2 + s}{s^4 + 2.5s^3 + 4s^2 + 5.5s + 1}$$

(b) Figura 2



Com uma pequena alteração do código usando no item a, para suportar a associação em paralelo

```

1 gc = tf([1 0],[1 1])
2 gp = tf([2],[1 1 2])
3 gs = tf([1],[1 0.5])
4 p = parallel(gc, gp)
5 f1 = feedback(p, gs)
6

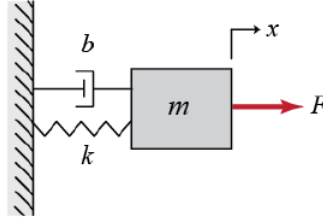
```



Resultando na seguinte equação de transferência,

$$H(s) = \frac{s^4 + 1.5s^3 + 4.5s^2 + 4s + 1}{s^4 + 3.5s^3 + 5s^2 + 7.5s + 3}$$

**Questão 6.** Com base no sistema dinâmico abaixo, obtenha analiticamente as matrizes de estado (**A**, **B**, **C**, **D**) considerando a posição  $x(t)$  e a velocidade  $\frac{dx(t)}{dt}$  com variáveis de estado,  $F(t)$  como entrada e  $x(t)$  como saída. Em seguida utilize o Matlab para encontrar a função de transferência correspondente. Considere  $m = 1.0kg$ ,  $b = 0.2Ns/m$ ,  $k = 3.0N/m$



A equação diferencial para o sistema pode ser encontrada, o pistão exerce sobre o sistema uma força,

$$F_b(x) = b \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

A mola exerce sobre o sistema uma força,

$$F_k(x) = kx \quad (5)$$

A contribuição de todas as forças,

$$F_r = F(x) - (F_b(x) + F_k(x)) \quad (6)$$

Onde  $F_r = m \frac{d^2x}{dt^2}$  é a força resultante, desenvolvendo a equação 6,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - \left( \frac{dx}{dt} + kx \right)$$

Portanto a equação diferencial final,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \quad (7)$$

Substituindo em 7 os valores proposto pelo problema,

$$1 \frac{d^2x}{dt^2} + 0.2 \frac{dx}{dt} + 3x = F \quad (8)$$

Desenvolvendo 8 para se obter as matrizes de estados,

$$q_1(t) = x(t) \quad (9)$$

$$q_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (10)$$

Derivando  $q_1(t)$ , é possível afirmar  $\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t)$ , desenvolvendo,

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = 1 \left( -3x(t) - 0.2 \frac{dy(t)}{dt} \right) + F \quad (11)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = -3q_1(t) - 0.2q_2(t) + F \quad (12)$$

Colocando os termos nas formas matriciais, a equação de estado fica,

$$\begin{bmatrix} \frac{dq_1(t)}{dt} \\ \frac{dq_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (13)$$

E a equação de saída,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} u \quad (14)$$

Em outros termos, as matrizes de estados são,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as matrizes de estados é possível encontrar a função de transferência do sistema, usando o comando *ss2tf* que retorna o numerador e denominador da função de transferência, tenho como resposta,

```

1 a = [0 1; -3 -0.2];
2 b = [0;1];
3 c = [1 0];
4 d = [0];
5 [num, den]=ss2tf(a, b, c, d)
6
7 num =
8      0      -0.0000      1.0000
9 den =
10      1.0000      0.2000      3.0000

```

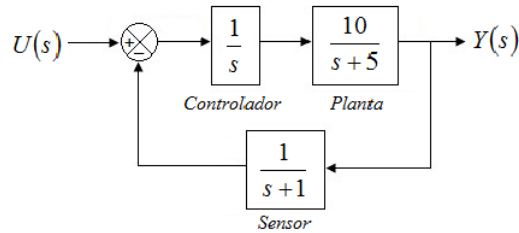
O que é totalmente coerente com a seguinte resposta analítica, aplicando a transformada inversa de laplace em 8,

$$s^2 X(s) + 0.2sX(s) + 3X(s) = F(s)$$

Fazendo saída sobre a entrada, obtenho a mesma função que o comando *ss2tf*.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 3} \quad (15)$$

**Questão 7.** Com o auxílio do Matlab, obtenha as matrizes de estado  $(A, B, C, D)$  do sistema mostrado a seguir:



O Matlab disponibiliza a função *tf2ss* que encontra uma de varias solução possíveis para as matrizes de estados. Antes se faz necessário encontrar a função de transferência para o problema, o código abaixo encontra a função de transferência para o problema 7,

```
1 controlador = tf([1], [1 0])
  planta = tf([10], [1 5])
3 sensor = tf([1], [1 1])
  h1 = series(controlador, planta)
5 funcao_transferencia = feedback(h1, sensor)
```

Após a execução do código, a seguinte função foi obtida,

$$H(s) = \frac{10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10}$$

Usando *tf2ss*,

```
1 [A, B, C, D] = tf2ss([10 10], [1 6 5 10])
```

Retorna as matrizes de estados,

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 0 \quad 10 \quad 10 ]$$

$$D = [ 0 ]$$