$$\vec{a}_1 = a\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = a\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) = \frac{a}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_B = m\vec{a}_1 + \vec{d} + 3n\vec{d} = am\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \frac{a}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} + \frac{3na}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_B = a\left[m\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}\right] = a\begin{pmatrix}m\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + n\sqrt{3}\\ m\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}_B| = a\sqrt{\left(m\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + n\sqrt{3}\right)^2 + \left(m\frac{1}{2}\right)^2} = a\sqrt{m^2 + 3n^2 + 3mn + m + 2n + \frac{1}{3}}$$

$$\vec{r}_A = 3l\vec{d} = \frac{3la}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}la\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}_A| = la\sqrt{3}$$

Condição: achar $l$, $m$ e $n$ de forma que $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B|$. Depois, obter posições usando os índices encontrados e gerar o ângulo entre os vetores.

$$|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B|$$

$$la\sqrt{3} = a\sqrt{m^2 + 3n^2 + 3mn + m + 2n + \frac{1}{3}}$$

$$l = \sqrt{\frac{m^2 + 3n^2 + 3mn + m + 2n + \frac{1}{3}}{3}}$$

$$l = \sqrt{\frac{m^2}{3} + n^2 + mn + \frac{m}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{1}{9}}$$

$$3l^2 = m^2 + 3n^2 + 3mn + m + 2n + \frac{1}{3}$$

$$m^2 + 3n^2 + 3mn + m + 2n + \frac{1}{3} - 3l^2 = 0$$

Proposta: distorcer os vetores da rede de forma a induzir uma superposição do tipo AB. Para isso encontramos, para vários ângulos de torção, a menor distância entre pontos do tipo A de uma rede com os pontos B da outra rede, e os respectivos vetores de separação no plano $xy$, sem considerar a separação no eixo $z$. Considerando os pontos encontrados para a menor separação temos:

$$\vec{r}_1 = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2$$

Adicionando o vetor separação $\vec{s}_t$ encontrado de forma a induzir a superposição temos:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{s}_t = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2 + \vec{s}_t$$

Mas queremos adicionar a distorção diretamente aos vetores da rede, então é preciso decompor o vetor separação. Supondo:

$$\vec{s}_t = m\vec{s}_1 + n\vec{s}_2$$

$$\vec{r}_2 = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2 + m\vec{s}_1 + n\vec{s}_2$$

$$\vec{r}_2 = m\left(\vec{a}_1 + \vec{s}_1\right) + n\left(\vec{a}_2 + \vec{s}_2\right)$$

Tornando os novos vetores de rede:

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{a}_1 + \vec{s}_1$$

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{a}_2 + \vec{s}_2$$

Usando o sistema de coordenadas cartesiano temos:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformando para o sistema de coordenadas da rede usando a matriz de troca de base $M$, temos:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}x + y \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x - y \end{pmatrix}$$

Dividindo as componentes do vetor $\vec{s}_t$ nas coordenadas da rede por $m$ e $n$ teremos a distorção que pode ser adicionada diretamente aos vetores de rede:

$$\vec{s}_f = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x+y}{m} \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x-y}{n} \end{pmatrix} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x+y}{m} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x-y}{n} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{a}_1 + \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x+y}{m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x+y}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{a}_2 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x-y}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x-y}{n} \end{pmatrix}$$