- Matemática computacional -

Pensamento computacional -

• O artigo tem como objetivo diferenciar o PC do raciocínio lógico tradicional e sua importância na resolução de problemas.
A computação visa "raciocinar sobre o raciocínio", definindo-a como o processo de sistematizar, representar e automatizar a resolução de problemas por meio de modelos e algoritmos. O foco do PC está na construção de produtos (processos, algoritmos) e no processo de sua construção, ou seja, o raciocínio por trás deles, que envolve abstração, automação e análise.

* **PC** - O pensamento computacional (PC) engloba uma série de técnicas e habilidades:
  - Formular um problema de maneira a ser resolvida por um computador.
  - Organizar e analisar dados.
  - Construir algoritmos eficientes e eficazes.
  - Generalizar soluções para problemas semelhantes.
  - Usar uma linguagem p/ traduzir a solução construída.

Ainda é reforçado que PC é uma habilidade básica e crucial para lidar com a complexidade do mundo.

* **Abstração** - É uma ferramenta que permite simplificar a realidade ao destacar "elementos relevantes e ignorar detalhes secundários. É essencial para a construção de modelos e na representação de dados e processos, facilitando a análise.
* **Análise** - Técnicas que verificam a correção e a eficiência de algoritmos e soluções, assegurando que eles sejam apropriados e otimizados para resolver os problemas propostos.
* **Técnicas e Métodos** - As técnicas se apoiam na formalização do raciocínio, na criação de modelos matemáticos, e na transforma-

ção de modelos num projeto concreto. O desenvolvimento do PC não é apenas a produção de produtos finais, mas o processo de abstração que envolvem vários passos.

* Três pilares do PC-
  - Abstração - Simplificação da realidade focando no importante.
  - Automação - Transformar processos em etapas automatizáveis.
  - Análise - Avaliação da correção, eficácia e eficiência das soluções.

Esses pilares sustentam o desenvolvimento das habilidades necessárias para a resolução de problemas, além de promover uma compreensão mais profunda sobre como o raciocínio computacional pode ser usados em áreas além da informática.

Conjuntos-

- Conjuntos = Representados por letras Maiúsculas.
- Elementos = Representados por letras minúsculas.

- $x \in A$ = x é elemento/pertence a A.
- $x \notin A$ = x não pertence a A.

Ex.- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

-Conjuntos numéricos-

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ Naturais
$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ Inteiros
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$ Racionais
$\mathbb{R}$ = Reais

• Características -

- Igualdade = Se dois conjuntos tem os mesmos elementos, são iguais.

$A = \{5, 3, 1\}$ $B = \{1, 3, 5\}$ $A = B$

- Cardinalidade = Número de elementos distintos em um conjunto.

$A = \{4, 6, 7, 8, 11\}$ $|A| = 5$ $A = \{1, 1, 3, 3, 5, 5\}$ $|A| = 3$

- Unitário = Possui apenas um elemento.

$A = \{x \mid x$ é par entre 11 e 13$\}$ $A = \{12\}$

- Vazio = Conjunto sem elementos.

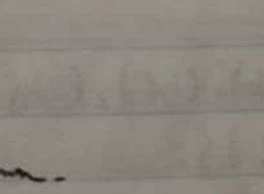
$A = \{\ \}$ ou $A = \emptyset$

- Universo = Todos os elementos de um problema, incluindo os que não pertencem aos conjuntos analisados.

$U = A + A'$ complemento de A

• Diagrama de Euler-Venn -

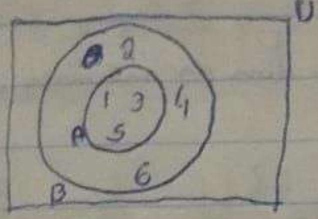
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{a, b, c, d, e\}$



• Subconjuntos -

- A é um subconjunto de B se todos os elementos de A pertencem a B.

$A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A \subseteq B$ = A é um subconjunto de B.
$A \subset B$ = A está contido em B.
$B \supset A$ = B contém A.
$A \not\subset B$ = A não é um subconjunto de B.
$A \subset A$ = Todo subc. é conjunto dele mesmo.
$\emptyset \subset A$ = Vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
$A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$.

Conjunto das partes - Formado por todos os subconjuntos de um conjunto.

$A = \{1,2,3\}$ $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,2\}, \{1,2,3\}$

$n(P) = 2^n$ $3(P) = 2^3 = 8$ $4(P) = 2^4 = 16$

- Produto cartesiano - $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{a,b,c\}$

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$.

A = 3 elementos
B = 3 elementos
$A \times B = 3 \times 3 = 9$

- União. P é a união de A e B, se todos os elementos de A e B estiverem em P, não havendo outros elementos além disso.

A B

$P = A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,5,7\}$ $\overset{A \cup B}{P} = \{1,2,3,4,5,7\}$

- Interseção. P é a interseção de A e B, se possuir apenas os elementos em comum de A e B.

A B

$P = A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

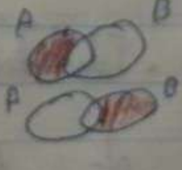
$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,5,7\}$ $\overset{A \cap B}{P} = \{3\}$

- Diferença - P é a diferença de A e B se conter apenas os elementos de A que não estão em B.

$P = A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

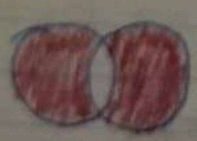
$A = \{1,2,3,4\}$ $\overset{A-B}{P} = \{1,2,4\}$

$B = \{3,5,7\}$ $\underset{B-A}{P} = \{5,7\}$



- Diferença Simétrica - $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$ *Remove só a interseção

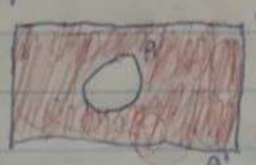
$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \{1,2,4,5,7\}$



- Complemento. O complemento de A (A') é tudo que faz parte do universo mas não faz parte do A.

$A' = U - A$

$U = A + A'$



$A' = \{x \mid x \notin A\}$

- Propriedades.

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A - A = \emptyset$

$A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A - \emptyset = A$

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A - B \neq B - A$, em geral

$A \cup U = U$ $\qquad$ $U - A' = A$

$A \cap A = A$ $\qquad$ $(A')' = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad$ $\emptyset' = U \leftrightarrow U' = \emptyset$

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cap U = A$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Lógica Proposicional.

- Lógica clássica - Princípio
  - Identidade - Toda proposição é idêntica a ela mesma.
  - Não contradição - Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
  - Terceiro excluído - Uma proposição é verdadeira ou falsa exclusivamente, não havendo outra alternativa.

- Proposição - Simples - Apenas uma sentença (letra minúscula).
  Compostas - Mais de uma sentença (letra maiúscula).

. Conectivos -

conjunção

$- e (\wedge)$. $\underbrace{\text{Maria foi ao cinema}}_{C}$ e $\underbrace{\text{Marta ao teatro}}_{T}$. $C \wedge T$

disjunção

$- ou (\vee)$ - $\underbrace{\text{Maria foi ao cinema}}_{C}$ ou $\underbrace{\text{ao teatro}}_{T}$. $C \vee T$ * Uma não afeta a outra.

- Condicional - se (proposição 1) [antecedente], então (proposição) [consequente]
$(\rightarrow)$ se $\underbrace{\text{Alberto é poliglota}}_{P}$, então $\underbrace{\text{fala vários línguas}}_{L}$ $P \rightarrow L$

- Bicondicional - (proposição 1) se, e somente se, (proposição 2), sendo que $p \leftrightarrow q$, equivale $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow$.
$(\leftrightarrow)$
$\underbrace{\text{Só ganharás o dinheiro}}_{P}$ se, e somente se, $\underbrace{\text{completares o trabalho.}}_{Q}$
$P \leftrightarrow Q$

- Negação $(\neg)$ - Inversor de valor lógico.
Luís não recebeu o seu pagamento na data prevista $\rightarrow \neg T$

. Prioridades - $() \vec{>} (\neg) \vec{>} (\wedge)(\vee) \vec{>} (\rightarrow)(\leftrightarrow)$

. Tabela-Verdade e Valor-Verdade -

		conjunção	disjunção	condicional	bicondic
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

- Conjunção - se tudo for V é V.
- Disjunc - Se tudo F, é F
- Cond - Apenas V F é falsa.
- Bicond - 2 iguais é V.
- Negac - Inverte o valor.

. Tautologia - Tudo V. . Contradição - Tudo F . Contigência - Tem V e F.

Teoria dos números -

- Parte dos números inteiros, suas propriedades e relações.

- Axioma 1: Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot B \in \mathbb{N}$

- Axioma 2: Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Propriedade associativa)

- Axioma 3: $N + 0 = N$ (Neutro aditivo)
  $1 \cdot N = N$ (Neutro multiplicativo)

para todo

- Axioma 4: $\forall a \in \mathbb{Z}$, existe $-a$, portanto, $a + (-a) = 0$.

- Axioma 5: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (propriedade comutativa).

- Axioma 6: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (propriedade distributiva).

- Ordenação - $a \leq b$ existe se $n \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + n$.

  * b é maior ou igual a a, se $b - a$ ~~for~~ 0 ou maior (inteiro positivo).

- Tricotomia - $a = b$, $a < b$ ou $b < a$. Não existe outra opção.

- Prova -

  - por construção - Fornece um método para construir um objetos além de provar sua existência.

• por contra exemplo - Basta encontrar um valor que quebre a regra para ser o contra exemplo.

• por exaustão - Esgota todos os casos possíveis para provar.

• por contradição - Assume que a negação da preposição é falsa, para confirmar que ela é verdadeira.

• por indução finita - Prova que um método é válido para todos os números naturais.

- Divisibilidade - Dado $a, b \in \mathbb{Z}$, diz-se que $b \mid a$, se existe $c \in \mathbb{Z}$, tal que $a = b \cdot c$.

• Indeterminações - $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

• Teoremas - • $1 \mid a$

$a \mid a$

se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.

se $a \mid b$, então $(b/a) \mid b$.

se $a \mid b$, então $a \mid mb$ para todo $m \in \mathbb{Z}$

se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (mb + nc)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

se $a \mid b$ e $a \mid (b+c)$, então $a \mid c$.

se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.

se $a \mid b$, então: $a \mid -b$

$-a \mid b$

$-a \mid -b$

$|a| \mid |b|$

$b = \underset{\text{quociente}}{q} \cdot a + \underset{\text{resto}}{r} = a \mid b$

• Base 10 - 1- todo nº é divisível por 1.
2- termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.
3- A soma dos algarismos for divisível por 3.
4- O nº formado pelos 2 últimos algs for divisível por 4.
5- Último alg. for 0 ou 5.
6- For divisível por 2 e por 3.
7- Pega o último algarismo, tira do número, e diminui o número novo pelo dobro do algarismo. Faz isso até o último algarismo seja menor ou igual a 7 (0 conta como divisível).
8- Os 3 últimos forem divisíveis por 8.
9- A soma dos algarismos for divisível por 9.
10- O último alg for 0.
11- A soma dos algs. nas posições pares menos a soma dos algs nas posições ímpares for divisível por 11 (0, 11, 22...).

• MDC - $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 30\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$D = (A \cap B) = \{1, 2, 5, 10\}$

$\max D = 10$.

$MDC(5460, 1200) = 5460 = 4 \cdot 1200 + 660$

$1200 = 1 \cdot 660 + 540$

$(a, b + ax)$

$660 = 1 \cdot 540 + 120$

$540 = 4 \cdot 120 + 60$

$120 = 2 \cdot 60 + \underline{0}$

MDC

5460, 1200	2
2730, 600	2
1365, 300	5
273, 60	3
91, 20	

$2 \cdot 2 = 4$, $5 \cdot 3 = 15$, $4 \cdot 15 = 60$

Multiplica os primos que operaram os dois ao mesmo tempo.

• MMC - $A = \{18, 36, 54, 72, 90 \ldots\}$
$B = \{27, 54, 81, 108 \ldots\}$
$MMC(A,B) = 54$

$$\begin{array}{c|c} 18, 27 & 2 \\ 9, 27 & 3 \\ 3, 9 & 3 \\ 1, 3 & 3 \\ 1, 1 & \end{array} \quad 54$$

Multiplica apenas os primos.

• Congruência - De $m \in \mathbb{Z}^*$ (não negativo), tal que $m > 1$, $a, b, \in \mathbb{Z}$ são congruentes se $|m| = m \mid (a-b)$.

$a \equiv b \pmod{m}$ → a e b deixam o mesmo resto se divididos por m

Ex. - $9 \equiv 5 \pmod{2}$ - $9/2 = 4$, resto 1
$5/2 = 2$, resto 1 } são congruentes.

Ex2. - J, P, T, L preparam sacos com 12 frutas. J tinha 127, P tinha 185, T tinha 205 e L tinha 161 frutas. Quantos sacos foram formados e quantas frutas sobraram?

número, resto, divisor, quociente

$127 \equiv 7 \pmod{12} = 10$
$185 \equiv 5 \pmod{12} = 15$
$205 \equiv 1 \pmod{12} = 17$
$161 \equiv 5 \pmod{12} = 13$

$$\begin{array}{r|l} 127 & 12 \\ \hline 120 & 10 \\ 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 185 & 12 \\ \hline 180 & 15 \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 205 & 12 \\ \hline 204 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 161 & 12 \\ \hline 156 & 13 \\ 5 & \end{array}$$

Sobra $= 7 + 5 + 5 + 1 = 18$ → 1 saco + 6 resto

Sacos $= 10 + 15 + 17 + 13 + 1 = 56$

56 sacos, 6 frutas sobrando.

• Números primos - Qualquer número maior que 1 que é divisível somente por si mesmo e por 1.

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}.

* Primos entre si - Todos os primos são primos entre si. Se um primo for um dos divisores do outro, eles não são primos entre si.

* Primos gêmeos - Quando as diferenças entre dois primos é igual a 2.

• Teorema fundamental da aritmética - Todo número inteiro $n \in \mathbb{N} \mid n > 1$, pode ser expresso como o produto de nº primos, como a seguir:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k} \rightarrow \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Ex. $6 = 2 \cdot 3$.
$80 = 2^4 \cdot 5$.
$1048576 = 2^{20}$ ou $17 \cdot 61681$

• Teorema dos números primos - $\pi(x)$ determina o nº de primos até x

$\forall x \geq 0, x \in \mathbb{N}$, tem-se que $\pi(x) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq x\}$.

Ex. x	$\pi(x)$	$\pi(x)/x$	$1/\ln(x)$
10	4 (2,3,5,7)	0,4	0,4343
20	8 (2,3,5,7,11,13,17,19)	0,4	0,3338

- Tetração -

* Exponenciação ou potência (a^b ou $a \uparrow b$) - $3^4 = 3\uparrow 4 = 3.3.3.3 = 81$.

* tetração ou superpotência (${}^b a$ ou $a \uparrow\uparrow b$) - ${}^4 3 = 3\uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^{3}}} = 3^{7625597484987}$

0	Eno	Eno
1	${}^1 1$	1
2	${}^2 2$	4
3	3^{3^3}	$7.63e^{+12}$

- Fatorial -

* Fatorial ($m!$) - $4! = 4.3.2.1 = 24$

* Fatorial Dupla ($m!!$) - par = $4! = 4.2 = 8$
impar = $5! = 5.3.1 = 15$

* Subfatorial ($!m$) - $!4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$.

* Primordial ($m\#$) - $\prod p \leq m\ p$ em que p é primo. $4\# = 3.2 = 6$.

* Superfatorial (Sloane) - $4!.3!.2!.1! = 288$
$1^4.2^3.3^2.4^1 = 288$

* Superfatorial (pickover) - $m\$ = {}^{m!}m! = {}^{3!}3! = {}^6 6$

* Fatorial exponencial ($m\$$) = $4^{3^{2^1}} = 4096$.

• Hiperfatorial ($H_{(n)}$) - $4^4 . 3^3 . 2^2 . 1^1 = 27648$.

Seminários 1, 2, 3 -

• Seminário 1 - Equações, relações e função - Uma equação matemática é uma igualdade que contém pelo menos uma incógnita.

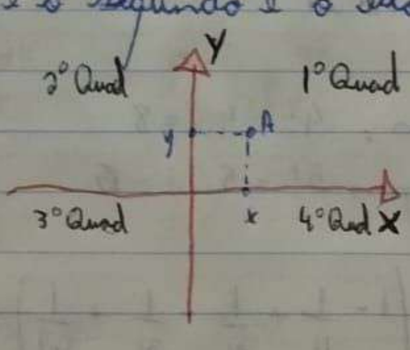
raiz

$ax + b = 0$

- Condições de existência - o denominador nunca pode ser 0. O radicando não pode ser negativo. O logaritmando deve ser positivo e diferente de 1.

• Um par ordenado é um conjunto de 2 elementos. O primeiro é o eixo x (eixo das abscissas) e o segundo é o eixo das ordenadas.

• Plano cartesiano



A (x, y)

• Relação - $y = 2x$ $\quad x = 1$, $y = 2$ $\quad$ x = Domínio, y = Imagem

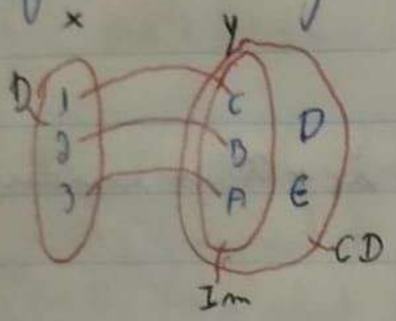
• Função - $f(x) = ax + b$
$f(x) = 2x^2 + 3$ → Lei de formação.
$f(2) = 2.2 + 3 = 7$ → Valor numérico.

D = Valores de x.
Im = Valores de y usados.
CD = Valores de y possíveis.

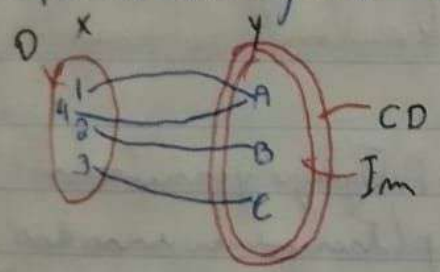
• Função crescente - x aumenta, f(x) também
• Função decrescente - x aumenta, f(x) diminui
• Função constante - x aumenta, f(x) é o mesmo

• Função inversa (f^{-1}) - É a que desfaz a função $f(x)$.

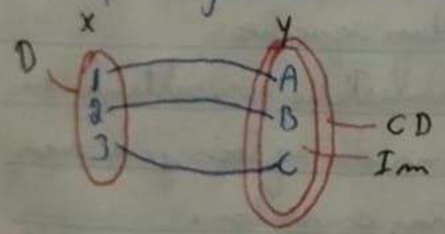
• Função injetora - Elementos no domínio sempre resultam em elementos diferentes na imagem.



• Função sobrejetora - A imagem é igual o contradomínio.



• Função bijetora - É injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



• Seminário 2 - Função polinomial de 1º grau, equações e sistemas lineares.

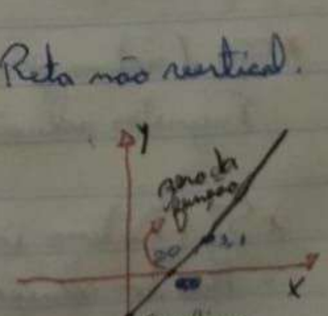
- Função afim - $f(x) = \underbrace{\overset{\text{coef. angular}}{a}x + b}_{\text{coeficientes}} \rightarrow$ coef. linear   Gráfico - Reta não vertical.

coef. angular - Define a inclinação da reta
a > 0 - reta sobe
a < 0 - reta desce

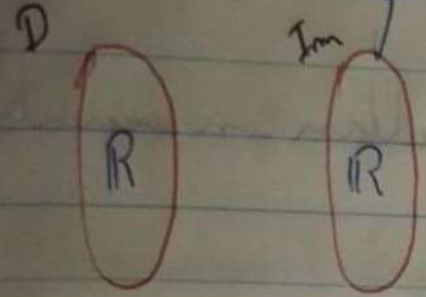
coef. linear - intercepta o eixo y.

Ex $x-2$

x	y
3	1
2	0
0	-2



• Domínio e Imagem - $ax + b$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}$

Pois a reta cresce infinitamente.

• Valor máximo e mínimo - Não tem. A função tende de $+\infty$ em uma direção, a $-\infty$ na outra.

- Sistemas lineares - Conjunto de duas ou mais equações que devem ser resolvidas simultaneamente.

$$\begin{cases} 2x + \cancel{y} = 7 \\ x - \cancel{y} = -1 \end{cases}$$

$3x = 6$

$x = 2$

$x - y = -1$

$2 - y = -1$

$-y = -3 \cdot (-1)$

$y = 3$

$S = \{2, 3)$

• Multiplique por números p/ transformar uma das variáveis p/ cortar (y e $-y$).

• Some termo a termo as duas equações.

• Substitua a resultante em uma das equações para encontrar o valor.

• Classificação de sistemas:

* SPD (Sistema possível e determinado) - 1 única solução, retas concorrentes (cruzam em um único ponto).

* SPI (sistema possível e indeterminado) - Infinitas soluções, retas coincidentes (mesma reta, sobrepostas).

* SI (Sistema impossível) - Não tem soluções, retas paralelas (não se cruzam).

• Seminário 3 - Relações Quadráticas, função de 2º grau e > 2º grau -

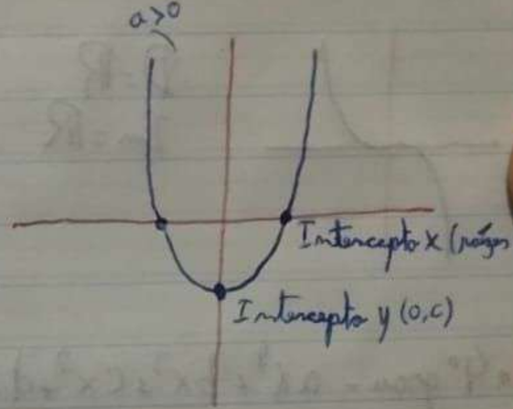
- Relação Quadráticas - É uma equação em x e y onde o maior grau é 2.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

a - Define a concavidade da parábola.
  $a>0$ - Concavidade para cima (boca feliz ∪).
  $a<0$ - Concavidade para baixo (boca triste ∩).

b - Define onde a inclinação toca no eixo y

c - Intercepto y (0,c).



• Domínio e Imagem -

$D = \mathbb{R}$
$I_m = a>0 = [y_v + \infty)$
$a<0 = (-\infty, y_v]$

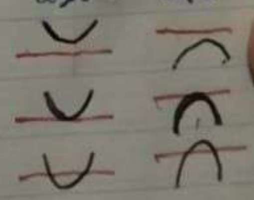
Soma e Produto

$S = \dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2$

$P = \dfrac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$

• Valores mínimos e máximos -
  Se $a>0$, possui um valor mínimo (y_v).
  Se $a<0$, possui um valor máximo (y_v).

• Gráficos -



• Bháskara.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Raízes - $\Delta<0$ - N̄ tem.
$\Delta=0$ - Duas raízes reais iguais.
$\Delta>0$ - Duas raízes reais e distintas.

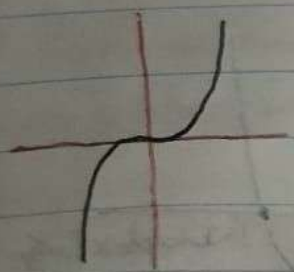
- Equacões > 2° grau -

- $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Onde $a_m \neq 0$ é o coef. dominante e m é o grau.

$D = \mathbb{R}$ $\quad x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

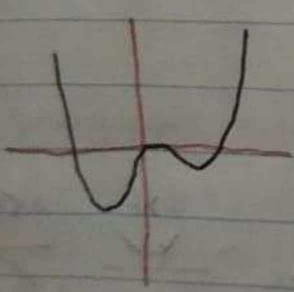
- 3° grau - $ax^3 + bx^2 + cx + d$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

Não possui min e max global, só local (as curvas do ~).

- 4° grau - $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [y_{min}, +\infty)$ $a > 0$
$(-\infty, y_{max}]$ $a < 0$