UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO – DCC

EXERCÍCIO IV: TEORIA DOS NÚMEROS

RAMON LOPES DE QUEIROZ

MONTES CLAROS – MG

NOVEMBRO / 2025

RAMON LOPES DE QUEIROZ

EXERCÍCIO IV: TEORIA DOS NÚMEROS

Atividade avaliativa apresentada para atendimento de requisito parcial para aprovação na disciplina Matemática Computacional do Curso de Graduação em Bacharelado em Sistemas de Informação – 1º período

Professor: Dr. Reginaldo Morais de Macedo

MONTES CLAROS – MG

NOVEMBRO / 2025

Atividade IV:

Questão 1: Demonstre que para todo e qualquer n∈N tem-se que 04+14+24+34+...+n4 = 30n(n+1)(2n+1)(3n2+3n−1):

R: Seja P(n) a proposição: 04+14+...+n4=30n(n+1)(2n+1)(3n2+3n−1)

Caso Base (n=1):

Lado Esquerdo (LE): 04+14=1

Lado Direito (LD): 301(1+1)(2∗1+1)(3∗12+3∗1−1) = 301(2)(3)(3+3−1) = 301(2)(3)(5) = 3030=1

Como LE=LD, a proposição P(1) é verdadeira.

2. Hipótese de Indução (P(k)):

Assumimos que P(k) é verdadeira para um k natural qualquer: 04+...+k4=30k(k+1)(2k+1)(3k2+3k−1)

3. Passo Indutivo (Provar P(k+1)):

Queremos provar que: (04+...+k4)+(k+1)4=30(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)(3(k+1)2+3(k+1)−1)

Vamos simplificar o lado direito (nosso objetivo):
LDk+1=30(k+1)(k+2)(2k+3)(3(k2+2k+1)+3k+3−1)
LDk+1=30(k+1)(k+2)(2k+3)(3k2+6k+3+3k+2)
LDk+1=30(k+1)(k+2)(2k+3)(3k2+9k+5)

Agora, vamos trabalhar o lado esquerdo usando a hipótese de indução: LEk+1=(04+...+k4)+(k+1)4 LEk+1=[30k(k+1)(2k+1)(3k2+3k−1)]+(k+1)4

Colocamos 30(k+1) em evidência: LEk+1=30(k+1)∗[k(2k+1)(3k2+3k−1)+30(k+1)3]
LEk+1=30(k+1)∗[k(6k3+6k2−2k+3k2+3k−1)+30(k3+3k2+3k+1)]
LEk+1=30(k+1)∗[k(6k3+9k2+k−1)+30k3+90k2+90k+30]
LEk+1=30(k+1)∗[6k4+9k3+k2−k+30k3+90k2+90k+30]
LEk+1=30(k+1)∗[6k4+39k3+91k2+89k+30]

Agora, vamos expandir o polinômio do nosso objetivo LDk+1 para verificar se é o mesmo: $(k+2)(2k+3)(3k2+9k+5)$ $=(2k2+3k+4k+6)(3k2+9k+5)$ $=(2k2+7k+6)(3k2+9k+5)$ $=2k2(3k2+9k+5)+7k(3k2+9k+5)+6(3k2+9k+5)$ $=(6k4+18k3+10k2)+(21k3+63k2+35k)+(18k2+54k+30)$ $=6k4+(18+21)k3+(10+63+18)k2+(35+54)k+30$ $=6k4+39k3+91k2+89k+30$

Como o polinômio resultante é idêntico ao que encontramos no LEk+1, provamos que LEk+1=LDk+1.

Conclusão: Visto que P(1) é verdadeira e que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in N$.

Questão 2: Calcule, utilizando o Algoritmo de Euclides, os seguintes MDCs:

a. 180 e 50:

$180=3*50+30$

$50=1*30+20$

$30=1*20+10$

$20=2*10+0$

MDC(180, 50) = 10

b. 2268 e 540:

$2268=4*540+108$

$540=5*108+0$

MDC(2268, 540) = 108

c. 145350 e 1980:

$145350=73*1980+990$

1980=2∗990+0

MDC(145350, 1980) = 990

Questão 3: Considere que três amigos estão percorrendo repetidamente um determinado percurso de 1,5km. Os tempos para percorrê-lo são, respectivamente, 10, 12 e 15 minutos. A atividade termina quando os três se encontram no ponto de partida pela primeira vez. Neste sentido, calcule o tempo total da atividade e quantos kms cada um terá percorrido ao encerrá-la.

R: Tempos: 10, 12, 15

10=2∗5

12=22∗3

15=3∗5

MMC(10,12,15)=22∗3∗5=4∗3∗5=60

1. Tempo total da atividade: Os amigos se encontrarão no ponto de partida após **60 minutos** (ou 1 hora).

2. Distância percorrida por cada um (Percurso = 1,5 km):

Amigo 1 (10 min/volta):

Voltas: 60min/10min=6 voltas

Distância: 6∗1,5km= **9 km**

Amigo 2 (12 min/volta):

Voltas: 60min/12min=5 voltas

Distância: 5∗1,5km= **7,5 km**

Amigo 3 (15 min/volta):

Voltas: 60min/15min=4 voltas

Distância: 4∗1,5km= **6 km**

Questão 4: Transcreva os seguintes números decimais em binário, octal e hexadecimal.

a. 15:

Binário: 1111_2

Octal: 17_8

Hexadecimal: F_16

b. 64:

Binário: 1000000_2

Octal: 100_8

Hexadecimal: 40_16

c. 170:

Binário: 10101010_2

Octal: 252_8

Hexadecimal: AA_16

d. 2354:

Binário: 100100110010_2

Octal: 4462_8

Hexadecimal: 932_16

Questão 5: Verifique se os seguintes números são divisíveis por 6, 7, 8, 9 ou 11, utilizando os critérios de divisibilidade.

a. 13.574:

Por 6: Não (Soma dos dígitos = 20, não é div. por 3).

Por 7: Não ($1357-2\ast4=1349\Rightarrow134-2\ast9=116\Rightarrow11-2\ast6=-1$).

Por 8: Não (574 não é div. por 8).

Por 9: Não (Soma dos dígitos = 20).

Por 11: Sim (Soma alternada: $4-7+5-3+1=0$).

b. 900.851:

Por 6: Não (É ímpar).

Por 7: Sim ($90085-2\ast1=90083\Rightarrow9008-2\ast3=9002\Rightarrow900-2\ast2=896\Rightarrow89-2\ast6=77$).

Por 8: Não (É ímpar).

Por 9: Não (Soma dos dígitos = 23).

Por 11: Não (Soma alternada: $1-5+8-0+0-9=-5$).

c. 155.848:

Por 6: Não (Soma dos dígitos = 31, não é div. por 3).

Por 7: Sim ($15584-2\ast8=15568\Rightarrow1556-2\ast8=1540\Rightarrow154-2\ast0=154\Rightarrow15-2\ast4=7$).

Por 8: Sim (848 é div. por 8).

Por 9: Não (Soma dos dígitos = 31).

Por 11: Sim (Soma alternada: $8-4+8-5+5-1=11$).

d. 30.735.936:

Por 6: Sim (É par e a soma dos dígitos = 36, que é div. por 3).

Por 7: Sim (3073593−2∗6=3073581⇒...⇒29−2∗4=21).

Por 8: Sim (936 é div. por 8).

Por 9: Sim (Soma dos dígitos = 36).

Por 11: Sim (Soma alternada: 6−3+9−5+3−7+0−3=0).

Questão 6: Liste os dez primeiros pares de números primos primos.

Resolução:

1. (3, 5)
2. (5, 7)
3. (11, 13)
4. (17, 19)
5. (29, 31)
6. (41, 43)
7. (59, 61)
8. (71, 73)
9. (101, 103)
10. (107, 109)

Questão 7: Calcule os números de Mersenne M3, M7, M11 e M19. Indique e prove quais deles são, realmente, números primos.

R: A fórmula do número de Mersenne é Mp=2p−1.

M3

Cálculo: M3=23−1=8−1= **7**

Prova: 7 é divisível apenas por 1 e 7. **É primo.**

M7

Cálculo: M7=27−1=128−1= **127**

Prova: Para testar a primalidade de 127, verificamos divisores primos até 127≈11.2.

Não é div. por 2, 3, 5.

127/7=18.1

127/11=11.5

Como não possui divisores primos menores ou iguais à sua raiz, **é primo.**

M11

Cálculo: M11=211−1=2048−1= **2047**

Prova: Para testar M11, os divisores devem ter a forma 2kp+1. Neste caso, 2k(11)+1.

Para k=1: 2(1)(11)+1=23.

Testando a divisão: 2047/23=89.

Como 2047=23∗89, **não é primo.**

M19

Cálculo: M19=219−1=524288−1= **524287**

Prova: 524287 é um número primo de Mersenne conhecido (o 7º, M7 na sequência de índices primos). A prova manual (teste de divisão) é computacionalmente intensiva, mas pode-se afirmar que **é primo.** (A prova formal usa o Teste de Lucas-Lehmer).

Questão 8: Divida 100 em duas parcelas tais que uma seja divisível por 7 e a outra por 11.

R

$x+y=100$

$x=7k1$ (múltiplo de 7)

$y=11k2$ (múltiplo de 11)

$7k1+11k2=100$

MDC(7,11)=1, e 1 divide 100, sabemos que existem soluções.

$7x+11y=1$: $11=1*7+4$ $7=1*4+3$ $4=1*3+1$

$1=4-3$ $1=4-(7-4)=2*4-7$ $1=2*(11-7)-7=2*11-2*7-7$ $1=7(-3)+11(2)$

A solução geral é: $k1=-300+(11/1)t=-300+11t$ $k2=200-(7/1)t=200-7t$

Como as parcelas x e y devem ser positivas:
$x=7k1>0 \Rightarrow 7(-300+11t)>0 \Rightarrow -2100+77t>0 \Rightarrow 77t>2100 \Rightarrow t>27.27$
$y=11k2>0 \Rightarrow 11(200-7t)>0 \Rightarrow 2200-77t>0 \Rightarrow 2200>77t \Rightarrow t<28.57$

O único valor inteiro para t que satisfaz $27.27<t<28.57$ é $t=28$.

Calculando k1 e k2: $k1=-300+11(28)=-300+308=8$ $k2=200-7(28)=200-196=4$

As parcelas são:

Parcela 1 (x): $7*k1=7*8=$ **56**

Parcela 2 (y): $11*k2=11*4=$ **44**

Questão 9: Determine todas as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas:

a. $56x+72y=40$

1. MDC(56,72)=8
2. Como 8 divide 40, existem soluções.
3. Dividimos a equação por 8: $7x+9y=5$
4. Solução para $7x+9y=1$: $1=4*7-3*9$. ($x0=4$, $y0=-3$)
5. Multiplicar por 5: $xp=4*5=20$; $yp=-3*5=-15$.
6. Solução Geral (para $a=7,b=9$):

$x=20+9t$

$y=-15-7t$

b. $24x+138y=18$

1. MDC(24,138)=6
2. Como 6 divide 18, existem soluções.
3. Dividimos a equação por 6: $4x+23y=3$
4. Solução para $4x+23y=1$: $1=6*4-1*23$. ($x0=6$, $y0=-1$)
5. Multiplicar por 3: $xp=6*3=18$; $yp=-1*3=-3$.
6. Solução Geral (para $a=4,b=23$):

$x=18+23t$

$y=-3-4t$

c. $221x+35y=11$

1. MDC(221,35)=1
2. Como 1 divide 11, existem soluções.
3. Solução para $221x+35y=1$: $1=16*221-101*35$. ($x0=16$, $y0=-101$)
4. Multiplicar por 11: $xp=16*11=176$; $yp=-101*11=-1111$.
5. Solução Geral (para $a=221,b=35$):

$x=176+35t$

$y=-1111-221t$

Questão 10: Determine se as seguintes equações diofantinas possuem soluções. Em havendo, resolva-as.

a. $6x+51y=22$:

MDC(6,51)=3.

Como 3 **não** divide 22.

Não possui soluções inteiras.

b. $18x+5y=48$:

MDC(18,5)=1.

Como 1 divide 48, **possui solução.**

Solução para $18x+5y=1$: $18(2)+5(-7)=1$.

Multiplicando por 48: $18(2*48)+5(-7*48)=48$.

Solução particular: $x0=96$, $y0=-336$.

c. $33x+14y=115$:

MDC(33,14)=1.

Como 1 divide 115, **possui solução.**

Solução para $33x+14y=1$: $33(3)+14(-7)=1$.

Multiplicando por 115: $33(3*115)+14(-7*115)=115$.

Solução particular: $x0=345$, $y0=-805$.

d. $123x+360y=99$:

MDC(123,360)=3.

Como 3 divide 99, **possui solução.**

Dividindo por 3: $41x+120y=33$.

Solução para $41x+120y=1$: $41(41)+120(-14)=1$.

Multiplicando por 33: $41(41*33)+120(-14*33)=33$.

Solução particular: $x0=1353$, $y0=-462$.

e. 14x+35y=93:

MDC(14,35)=7.

Como 7 **não** divide 93.

Não possui soluções inteiras.

f. 158x+57y=7:

MDC(158,57)=1.

Como 1 divide 7, **possui solução.**

Solução para $158x+57y=1$: $158(-22)+57(61)=1$.

Multiplicando por 7: $158(-22*7)+57(61*7)=7$.

Solução particular: $x0=-154$, $y0=427$.

Questão 11: Calcule os primeiros 10 números da sequência de Sophie German e verifique quantos deles são, realmente, números primos.

R: Um número primo p é um primo de Sophie Germain se 2p+1 (chamado de "primo seguro") também for um número primo.

1. p=2: 2(2)+1=5 (Primo) -> **2**
2. p=3: 2(3)+1=7 (Primo) -> **3**
3. p=5: 2(5)+1=11 (Primo) -> **5**
4. p=7: 2(7)+1=15 (Não primo)
5. p=11: 2(11)+1=23 (Primo) -> **11**
6. p=13: 2(13)+1=27 (Não primo)

7. p=17: 2(17)+1=35 (Não primo)
8. p=19: 2(19)+1=39 (Não primo)
9. p=23: 2(23)+1=47 (Primo) -> **23**
10. p=29: 2(29)+1=59 (Primo) -> **29**
11. p=31: 2(31)+1=63 (Não primo)
12. p=37: 2(37)+1=75 (Não primo)
13. p=41: 2(41)+1=83 (Primo) -> **41**
14. p=43: 2(43)+1=87 (Não primo)
15. p=47: 2(47)+1=95 (Não primo)
16. p=53: 2(53)+1=107 (Primo) -> **53**
17. ...
18. p=83: 2(83)+1=167 (Primo) -> **83**
19. ...
20. p=89: 2(89)+1=179 (Primo) -> **89**

Os 10 primeiros números da sequência: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

Verificação: A pergunta "quantos deles são, realmente, números primos" refere-se aos números p encontrados. Por definição, todos os números p na sequência de Sophie Germain **são números primos**. Portanto, **10** deles são primos.

Questão 12: Verifique se são primos entre si os seguintes conjuntos de números.

a. 2; 5; 997:

MDC(2,5)=1.

Como o MDC de um subconjunto dos números já é 1, o MDC do conjunto total (2,5,997) obrigatoriamente é 1.

São primos entre si.

b. 20; 21; 41:

Fatoração: 20=22∗5; 21=3∗7.

MDC(20,21)=1.

O MDC do conjunto (20,21,41) também é 1.

São primos entre si.

c. 8191; 4367:

Usando o Algoritmo de Euclides: 8191=1∗4367+3824 4367=1∗3824+543 3824=7∗543+23 543=23∗23+14 23=1∗14+9 14=1∗9+5 9=1∗5+4 5=1∗4+1

O MDC(8191,4367)=1.

São primos entre si.

d. 1191; 23:

O número 23 é primo.

Precisamos apenas verificar se 1191 é múltiplo de 23.

1191/23≈51.78.

Como 23 é primo e não divide 1191, o MDC(1191,23)=1.

São primos entre si.