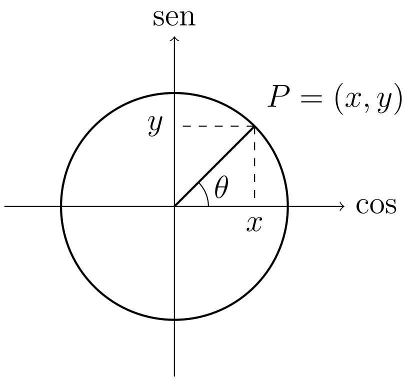
Capítulo 2

Funções Trigonométricas

Definição (seno e cosseno): Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Faça um ângulo de θ radianos com lado inicial sobre o eixo x (sentido anti-horário) e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência unitária, centrada na origem. Se $P = (x, y)$, então definimos $\operatorname{sen}\theta = y$ e $\cos\theta = x$.



Observação: Note que sen e cos estão definidos em $\mathbb{R}$ e assumem valores em $[-1, 1]$.

- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (por Pitágoras) (Identidade Fundamental)

- $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$ (função ímpar) $\to$ *nome é por causa de* $x^3, x^5 \ldots$
- $\cos(-t) = \cos(t)$ (função par) $\to$ *nome é por causa de* x^2

- $\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \\ \cos(t + 2\pi) = \cos t \end{array}\right\}$ (Função periódica: Quando $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ e $p \neq 0$. O menor número real p, positivo, que satisfaz a condição acima, é chamado de período de f.)

Definição (tangente, secante, cotangente e cossecante): As funções tangente e secante são definidas por:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \quad \text{e} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad (\text{onde } \cos t \neq 0)$$

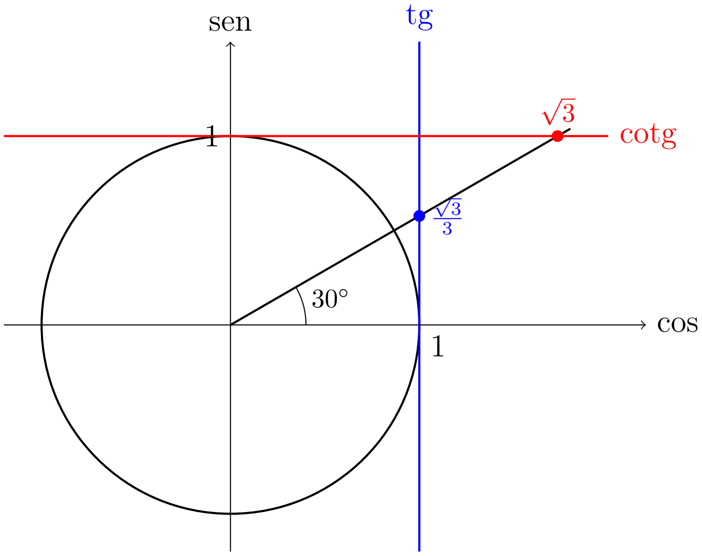
$\therefore D_{\text{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

As funções cotangente e cossecante são definidas por:

$$\text{cotg}\, t = \frac{\cos t}{\text{sen}\, t} \quad \text{e} \quad \text{cosec}\, t = \frac{1}{\text{sen}\, t} \quad (\text{onde } \text{sen}\, t \neq 0)$$

Portanto, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto:

$$D_{\text{tg}} = D_{\text{sec}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



- $\text{tg}(t+\pi) = \text{tg}(t)$
- $\text{cotg}(t+\pi) = \text{cotg}(t)$
- $\sec(t+2\pi) = \sec(t)$
- $\text{cosec}(t+2\pi) = \text{cosec}(t)$

<u>Identidades</u>:

Usando a Identidade Fundamental:

$$\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1 \tag{I}$$

Temos:

- $\text{tg}^2\, t + 1 = \sec^2 t \quad (\div \text{ a identidade (I) por } \cos^2 t)$
- $1 + \text{cotg}^2\, t = \text{cosec}^2\, t \quad (\div \text{ a identidade (I) por } \text{sen}^2\, t)$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\, t \cdot \text{cosec}\, t &= 1 \\ \cos t \cdot \sec t &= 1 \\ \text{tg}\, t \cdot \text{cotg}\, t &= 1 \end{aligned}\right\} \text{direto da definição, pois um é o inverso do outro.}$$

[*Veja formulário de Trigonometria no Apêndice do Leithold, pág. F2*]

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$ (II)

- $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$ (III)

Obs: Todas as outras identidades seguem de I, II e III.

Exemplos (seguem de II e III):

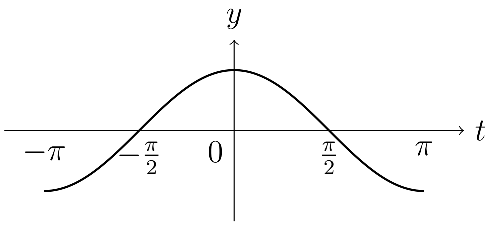
$$\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u \quad , \quad \cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

Donde:

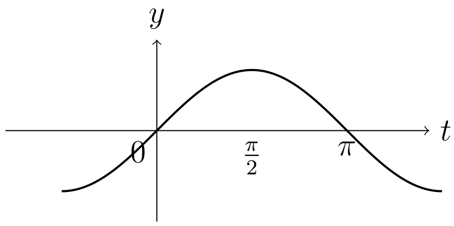
$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2} \quad \Bigg| \quad \cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$$

Gráficos:

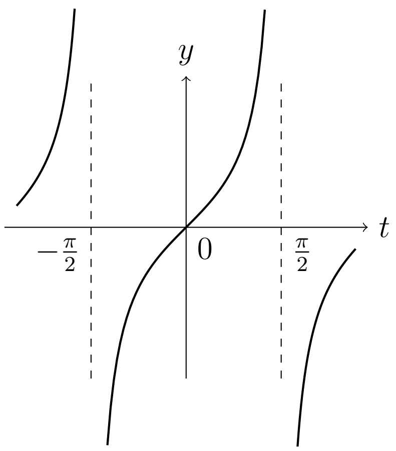
cos



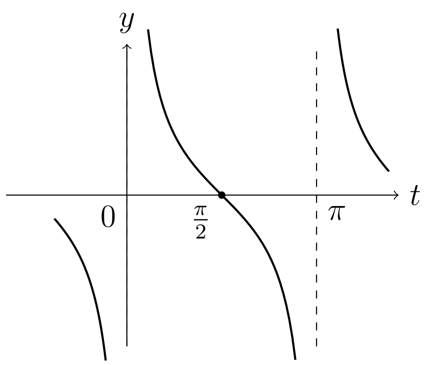
sen



$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$



$\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$



Transformações de Gráficos

O gráfico de uma função senoidal (seno ou cosseno) pode sofrer transformações e ser escrito na forma $f(x) = A \operatorname{sen}(Bx + C) + D$. Os parâmetros afetam a curva da seguinte maneira:

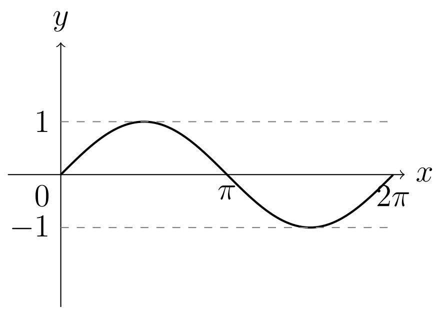
- $|A|$ altera a **amplitude** (a distância do eixo central até o pico máximo).

- O fator B altera o **período**, que passa a ser $\frac{2\pi}{|B|}$.
- $-\frac{C}{B}$ determina o **deslocamento de fase** (translação horizontal).
- D determina o **deslocamento vertical**.

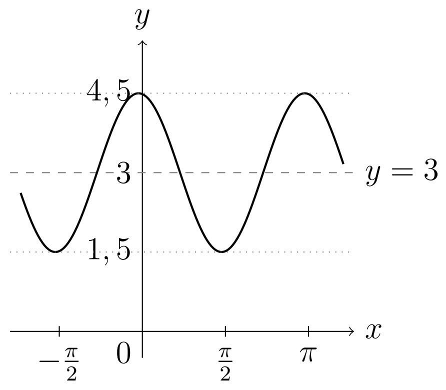
Exemplo: Compare o gráfico padrão da função $f(x) = \text{sen}(x)$ com a função transformada $g(x) = \frac{3}{2}\,\text{sen}(2x + 8) + 3$.
Note como o gráfico de $g(x)$ sofreu as seguintes alterações:

- Foi deslocado 3 unidades para cima (oscilando em torno de $y = 3$).
- Sua amplitude passou a ser $1,5$ (oscilando entre os picos de $1,5$ e $4,5$).
- Suas ondas ficaram mais frequentes, pois o período caiu pela metade ($P = \frac{2\pi}{2} = \pi$).
- Sofreu um deslocamento de fase horizontal de $-\frac{8}{2} = -4$ radianos.

$f(x) = \text{sen}(x)$



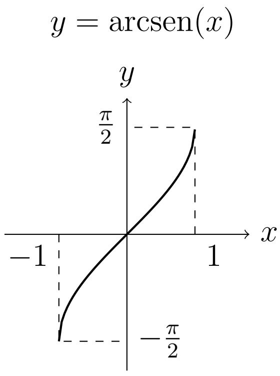
$g(x) = \frac{3}{2}\,\text{sen}(2x + 8) + 3$

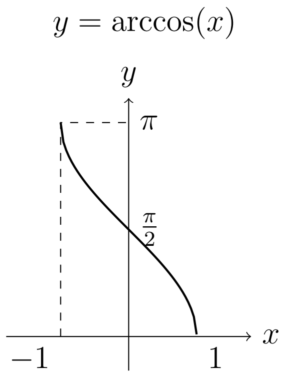


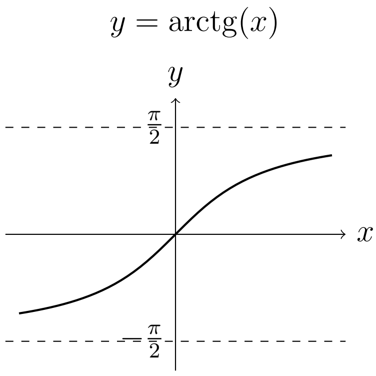
Funções Trigonométricas Inversas

Para que uma função admita inversa, ela precisa ser bijetora. Como as funções trigonométricas são periódicas (e portanto, não injetoras em $\mathbb{R}$), restringimos seus domínios a intervalos específicos para definir suas inversas:

- **Arco Seno:** $y = \text{arcsen}(x) \iff \text{sen}\, y = x$.
  Domínio: $x \in [-1, 1]$; Imagem: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- **Arco Cosseno:** $y = \arccos(x) \iff \cos y = x$.
  Domínio: $x \in [-1, 1]$; Imagem: $y \in [0, \pi]$.
- **Arco Tangente:** $y = \text{arctg}(x) \iff \text{tg}\, y = x$.
  Domínio: $x \in \mathbb{R}$; Imagem: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.







Exercícios de Fixação e Aprofundamento:

1. Calcule o valor exato de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   (Dica: use a identidade $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$*).*

2. **(Equações Trigonométricas)** Resolva a equação $\text{sen}(2x) = \frac{1}{2}$ para o intervalo $x \in [0, 2\pi]$.

3. **(Interseção de Curvas)** Encontre as coordenadas dos pontos de interseção entre os gráficos de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

4. **(Domínio com Restrições)** Determine o domínio das seguintes funções compostas:

   (a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ para $x \in [0, 2\pi]$

   (b) $g(x) = \ln(\text{sen}\, x)$ para $x \in [0, 2\pi]$

   (Dica: Lembre-se que o argumento da raiz quadrada não pode ser negativo e o argumento do logaritmo natural deve ser estritamente positivo. Use o ciclo trigonométrico para fazer o estudo de sinal!)

5. **(Avaliação de Inversas)** Calcule o valor exato de:

   (a) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

   (b) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ *(Cuidado com o intervalo de definição da imagem do arco seno!)*