Cálculo I

Notas de Aula - Sistemas de Informação

Prof. Daniel

Universidade Estadual de Montes Claros - Unimontes

Conteúdo

Capítulo 1

Funções de uma Variável Real

Referências:

- Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções.
  Gelson Iezzi. (Parte de funções)
- Cálculo Volume 1. Guidorizzi. (Parte de funções)

Definição: Uma função real de variável real, f, é uma terna $(A, B, a \mapsto b)$ onde $A, B \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $b \in B$ e $a \mapsto b$ é uma regra de associação entre elementos de A e B, que satisfaz:

(i) Cada elemento $a \in A$ está associado a um <u>único</u> elemento $b \in B$.

Matematicamente: f é função de A em B $\iff \forall a \in A, \exists! b \in B \mid f(a) = b$.

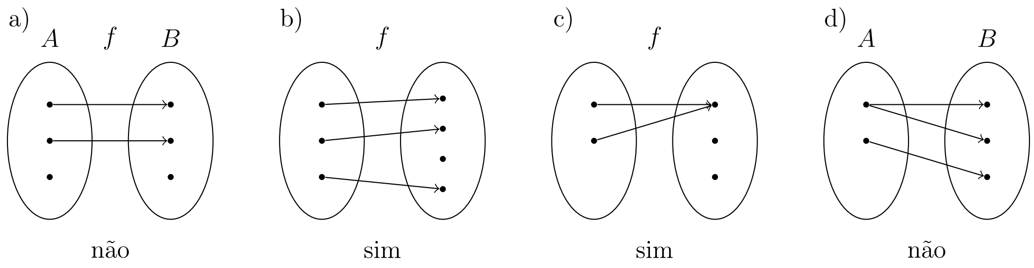
Notação:

- $A = D(f) = D_f$ (domínio de f).
- $B = CD(f) = CD_f$ (Contradomínio de f).
- $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$ (Gráfico de f).

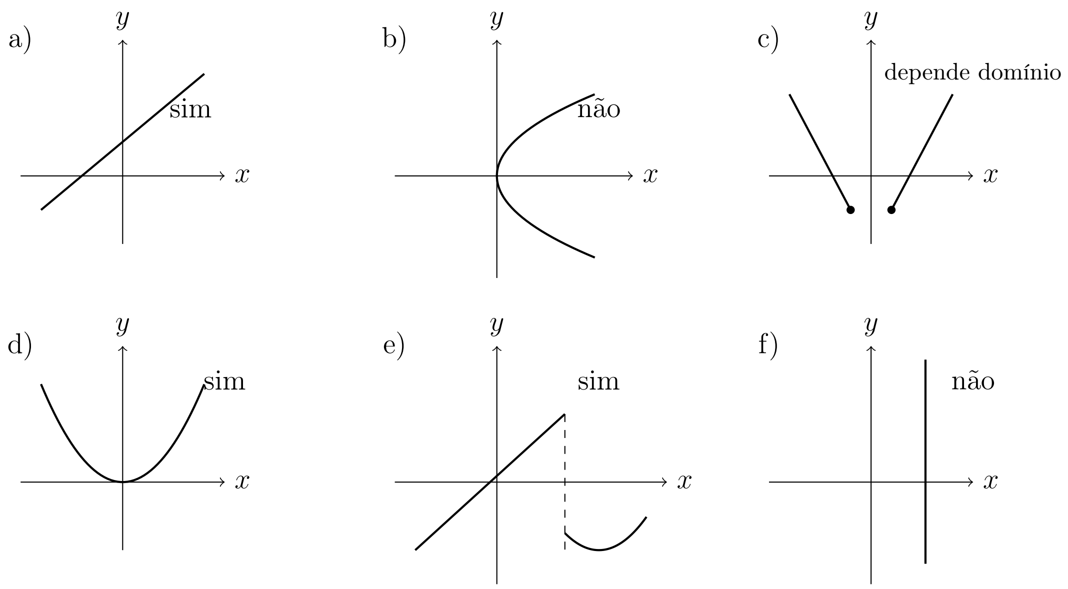
Uma função f é usualmente representada por:

$$\begin{array}{rcl} f: \underbrace{A}_{\text{domínio}} & \to & \underbrace{B}_{\text{contra-domínio}} \\ a & \mapsto & \underbrace{f(a) = b}_{\text{lei de formação ou regra de associação}} \end{array}$$

Exemplos (Para ver se entendeu o conceito).



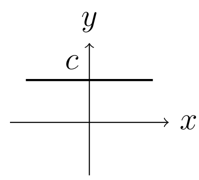
Exemplos 2: (Reconhecimento de funções através de gráficos - Teste da Reta Vertical)



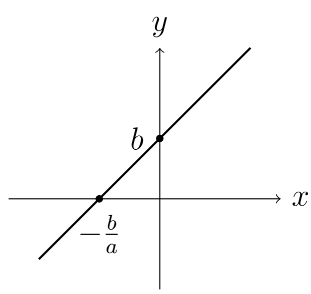
Exemplo: Qual o domínio das funções f e g definidas pelas equações (a) $y = \sqrt{x-2}$ e (b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$.

Exemplos:

1. **(Função constante)** $\quad f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

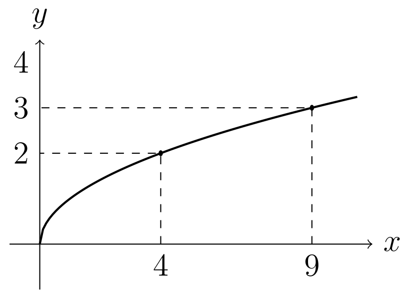


2. **(Função afim)** $\quad f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$



3. **(Função polinomial)** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

4. $f(x) = \sqrt{x}$ $(D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\})$

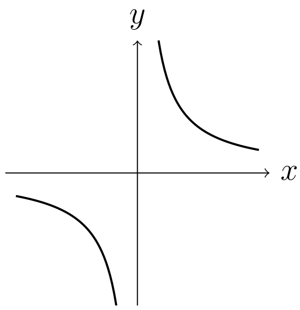


$f(0) = 0$ $f(9) = 3$

$f(4) = 2$ $f(16) = 4$

Note que os valores de y crescem mais lento que x (x vai de $4 \to 16$ enquanto y vai de $2 \to 4$).

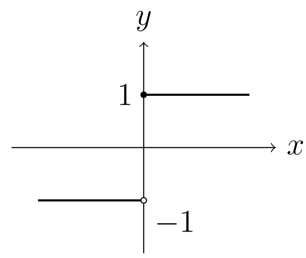
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\})$



$$f(10) = \frac{1}{10}, \quad f(100) = \frac{1}{100}$$

À medida que $x > 0$ cresce, y fica pequeno. Note que $f(-x) = -f(x)$. Logo, a parte negativa está definida. (É o espelho pela função identidade), pois se $x > 0$ e $(x, y) \in G_f \Rightarrow (-x, -y) \in G_f$.

6. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



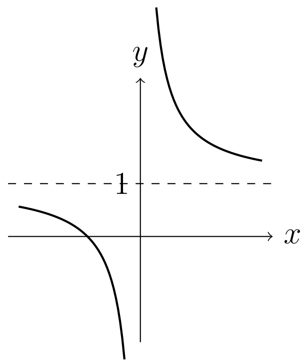
7. **(Função racional)** $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais. Note que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

   Exemplos:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

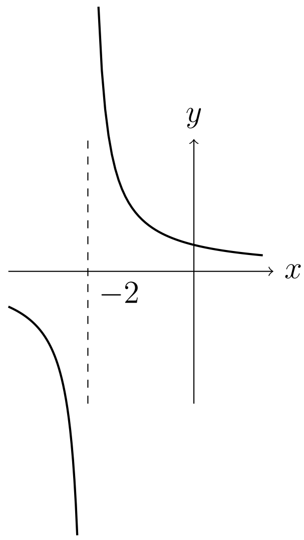
$Gr(g)$ é a translação do gráfico de f de 1 unidade para cima.



(c) $h(x) = \frac{1}{x+2}$

$Gr(h)$ é a translação do gráfico de f para a esquerda em 2 unidades.

$\frac{1}{x} = f(x) \Rightarrow h(x) = f(x+2)$
"Se x pela f alcança $\frac{1}{x}$, pela h, o $x-2$ alcança $\frac{1}{x}$ duas unidades à esquerda."



8. **(Quociente de Newton)** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Dada $f(x) = -x^2 + 2x$, simplifique:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{-x^2+2x-1}{x-1} \\ &= \frac{-(x^2-2x+1)}{x-1} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{x-1} = -(x-1) \quad \text{p/ } x \neq 1 \end{aligned}$$

9. **(Função Composta)** Dadas f e g funções. A função composta, denotada por $f \circ g$, é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Exercício: Dada $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine (a) $f \circ g$ e (b) $g \circ f$.

Solução de (a):

Primeiro, encontramos a lei de formação de $f \circ g$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Agora, determinamos o domínio $D_{f \circ g}$. Sabemos que $D_g = \mathbb{R}$ e $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

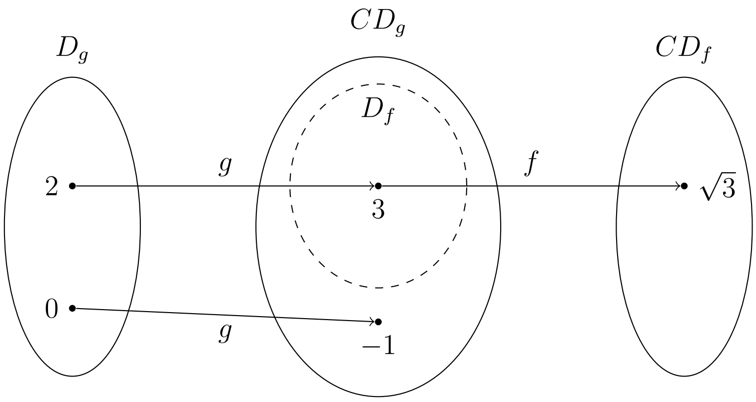
Para que $x \in D_{f \circ g}$, precisamos que $g(x) \in D_f$, ou seja:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1 \implies x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

Portanto, o domínio da função composta é:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



Exercícios:

1. Sejam f e g dadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$.

   Determine:

   (a) $f \circ g$ e $g \circ f$

   (b) $D(f \circ g)$ e $D(g \circ f)$

   (c) $f + g \quad , \quad f \cdot g$

2. Estude o sinal de:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{(1 - x)(1 - 2x)}$$

3. Esboce o gráfico:

   (a) $f(x) = |x| + |x - 2|$

   (b) $g(x) = |x| - 1$

4. Resolva as inequações:

   (a) $|2x - 3| > 3$

   (b) $|x - 1| - |x + 2| > x$

   (c) $|2x^2 - 1| < 1$