MATEMÁTICA COMPUTACIONAL TEORIA DOS NÚMEROS

Reginaldo Morais de Macedo, M.Sc., D.Sc.

- Bacharel em Administração e Matemática.
- Doutor em Administração.
- Mestre em Desenvolvimento Social.
- Especialista em Ciência de Dados; Sistema Financeiro e Mercado de Capitais; Saúde Pública; Educação a Distância; Engenharia de Produção; e Administração de Sistemas de Informação.
  MBA em Gestão de Projetos e Gestão Pública.

TEORIA DOS NÚMEROS

- Parte da Matemática relacionada ao estudo dos Números Inteiros, suas propriedades e relações. Tópicos:
  - Fundamentação axiomática
  - Divisibilidade
  - Congruência
  - Funções aritméticas
  - Raízes Primitivas
  - Aplicações

Fundamentação Axiomática (Benatti; Benatti, 2019) (Axiomas Algébricos)

- **Axioma 1**: $\mathbb{N}$ é fechado para operações de soma e multiplicação, ou seja:
- Para todo a, $b \in \mathbb{N}$, temos: $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \,.\, B \in \mathbb{N}$

- **Axioma 2**: (propriedade associativa)
- Para todo a, b, $c \in \mathbb{Z}$, temos $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$

FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA (BENATTI; BENATTI, 2019) (AXIOMAS ALGÉBRICOS)

- **Axioma 3**: (existência de elemento neutro)
- Neutro aditivo: $a + 0 = a$
- Neutro multiplicativo: $1 \, . \, a = a$

- **Axioma 4**: (existência de oposto para soma)
- $\forall a \in \mathbb{Z}$, existe $-a$, portanto, $a + (-a) = 0$

Fundamentação Axiomática (Benatti; Benatti, 2019) (Axiomas Algébricos)

- **Axioma 5**: (propriedade comutativa). Para todo a, $b \in \mathbb{Z}$, temos:
- $a + b = b + a$
- $a \,.\, b = b \,.\, a$
- **Axioma 6**: (propriedade distributiva). Para todo a, $b \in \mathbb{Z}$, temos:
- $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$

Fundamentação Axiomática (Benatti; Benatti, 2019) (Axiomas de Ordem)

- **Ordenação**
- Existe uma relação de ordem entre os números inteiros, denotada por $\leq$, cuja definição formal é:
- $a \leq b$ existe se $r \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + r$.
- ou seja, $a \leq b$ se $b - a$ for um número real (inteiro não negativo).

Fundamentação Axiomática (Benatti; Benatti, 2019) (Axiomas Algébricos)

- **Tricotomia**

- $a < b$ ou $b < a$ ou $b = a$

- Não existe outra alternativa além destas três.

Provas Matemáticas (Carnielli; Epstein, 2009)

- Prova é uma comunicação de uma análise lógica dos argumentos, suas interações e dos resultados obtidos.

- Tipos: direta; por indução; por contradição (*reductio ad absurdum*); por contraposição; por construção; por exaustão; pela negativa; por força bruta; por impossibilidade.

Prova Por Construção (Carnielli; Epstein, 2009)

- Para provar o 5º postulado de Euclides, pode-se construir duas retas (*restrições se aplicam!*) interceptadas por uma reta perpendicular (ângulos de 90º).

Prova Por Contra-Exemplo (Carnielli; Epstein, 2009; Gersting, 2017)

- Prove que nem todos os primos são ímpares.
- $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2 \text{ e } x \text{ é primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

- Prove ou encontre um contra-exemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$".
- $n = 1; n! = 1; n^2 = 1$ (**V**); $n = 2; n! = 2; n^2 = 4$ (**V**);
- $n = 3; n! = 6; n^2 = 9$ (**V**); $n = 4; n! = 24; n^2 = 16$ (**F**);

Prova por Exaustão (Gersting, 2017 , p. 92?)

- *“Embora ‘provar a falsidade por um contra-exemplo’ sempre funcione, ‘provar por um exemplo’ quase nunca funciona. Uma exceção ocorre quando a conjectura é uma asserção sobre um coleção finita [...] Uma* ***demonstração por exaustão*** *significa que foram esgotados todos os casos possíveis [...]”.*

PROVA POR EXAUSTÃO (GERSTING, 2017 , P. 93?)

- Prove a conjectura de que um número inteiro n entre 1 e 20 se for divisível por 6 também é divisível por 3.
- 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20: não divisível por 6 e por 3; (F)
- 3, 9, 15: não divisível por 6, mas divisível por 3; (F)
- 6, 12, 18: divisível por 6 e por 3; (V)

Prova por Contradição (Carnielli; Epstein, 2009)

- Prove que a diagonal de um quadrado com lados de tamanho 1 não é uma razão entre números inteiros.
- Suponha que $\sqrt[2]{2} = \frac{p}{q}$, p e q inteiros. Suponha também que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, isto é, nenhum número divide ambos p e q.
- Então, $p = \sqrt[2]{2}\, q$ e $p^2 = 2\, q^2$. Logo, p^2 é par e p é, portanto par, também.

Prova por Contradição (Carnielli; Epstein, 2009)

- Assim, desde que $\frac{p}{q}$ é fração irredutível, q é ímpar. Mas, se $p = 2r, então, (2\,r)^2 = 2\,q^2\ e\ 4r^2 = 2q^2$.
- Portanto, $2r^2 = q^2$ o que significa que q^2 é par e, assim q é par!
- Tem-se, então, uma contradição.
- Portanto, $\sqrt[2]{2} = \frac{p}{q}$ é necessariamente uma suposição falsa.

Prova por Indução Finita (Benatti; Benatti, 2019)

- Seja $a \in \mathbb{N}$ e P uma propriedade, temos que:

- I. P(a) é verdadeira.
- II. Para $k \geq a$, se P(k) é verdadeira, então P (k + 1) é verdadeira.

- Nestas condições, P(n) é verdadeira para todo e qualquer $n \geq a$

Prova por Indução Finita (Benatti; Benatti, 2019) – Exemplo 1

- Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, prove que:

$$0 + 1 + 2 + \ \dots + n = \frac{n\,.\,(n+1)}{2}$$

- Para n = 0, tem-se:

$$0 = \frac{0\,.\,(0+1)}{2}$$

- Agora, assume-se que, para $k \in \mathbb{N}$, arbitrariamente, tem-se

$$0 + 1 + 2 + \ \dots + k = \frac{k\,.\,(k+1)}{2}$$

Prova por Indução Finita (Benatti; Benatti, 2019) – Exemplo 1

- Deve-se provar que para *k + 1*, $\frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$

$$0 + 1 + 2 + \ ... + k + 1 = 0 + 1 + 2 + \cdots + k + k + 1 =$$

$$= \frac{k\,(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k\,.(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\,.(k+2)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)\,.\,((k+1)+1)}{2}$$

Prova por Indução Finita (Benatti; Benatti, 2019) – Exemplo 2

- Dado $n \in \mathbb{N}^*$ qualquer, prove que:

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ \ldots+\frac{n}{n\,.\,(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$$

- Para $n = 1$, tem-se:

$$\frac{1}{1\,.\,2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$$

- Agora, assume-se que, para $k \in \mathbb{N}^*$, arbitrariamente, tem-se

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{k\,.\,(k+1)}=\frac{k}{(k+1)}$$

Prova por Indução Finita (Benatti; Benatti, 2019) – Exemplo 2

Deve-se provar que para *k + 1*, $\frac{(k+1)}{(\,(k+1)+1)}$

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{k\,.\,(k+1)}+\frac{1}{(k+1).\,(\,(k+1)+1)}=$$

$$=\frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1).(\,(k+1)+1)}=\frac{k\,.(\,(k+1)+1)}{(k+1).(\,(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)\,.(\,(k+1)+1)}=$$

$$=\frac{k\,.(\,(k+1)+1)+1}{(k+1).(\,(k+1)+1}+\frac{k.(k+1)+k+1}{(k+1)\,.(\,(k+1)+1)}=\frac{(k+1).(k+1)}{(k+1).((k+1)+1)}=\frac{(k+1)}{((k+1)+1)}$$

PROVA POR INDUÇÃO FINITA
EXEMPLO 3

- Prove que: $1 + 3 + 5 + \ \ldots + (2n \ - 1) = n^2$
- Para $n = 1$, tem-se: $1 = 1^2$
- Agora, assume-se que, para $k \in \mathbb{N}^*$, arbitrariamente, tem-se: $1 + 3 + \cdots + (2k \ - 1) = k^2$
- Para $k + 1$, tem-se que:

$$[\ \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \ \ldots + (\mathbf{2k} \ - \mathbf{1})] + [(2k + 1)]$$

$$k^2 + (2k + 1) = (k + 1)\ (k + 1) = (k + 1)^2$$

Prova por Indução Finita
Exemplo 4

- Dado $n \in \mathbb{N}^*$ qualquer, prove que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Para $n = 1$, tem-se: $1 = \frac{1(1+1)(2\,.\,1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$
- Agora, assume-se que, para $k \in N^*$, arbitrariamente, tem-se

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Prova por Indução Finita
Exemplo 4/1

- Para k+1, tem-se que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
- Para k+1, substitua k por k + 1: $\frac{(k+1)(k+1+1)(2\ (k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)2}{6} =$$
$$\frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} =$$
$$\frac{(k+1)[2k^2 + 3k + 4k + 6]}{6} = \frac{(k+1)[(k)(2k+3) + 2(2k+3)]}{6} =$$
$$\frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6}$$

Prova por Indução Finita
Exemplo 4/2

- Para *k+1*, tem-se que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
- Para *k+1*, substitua k por k + 1:

$$\frac{(k+1)(k+1+1)(2\ (k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k^2+2k+k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)2}{6} =$$

$$\frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6(k^2 + 2k + 1)}{6} = \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} =$$

$$\frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

Divisibilidade(Benatti; Benatti, 2019)

- Busca-se a solução da equação $a.\ x = b$, em que a, b $\in \mathbb{Z}$.

- Dados a, b $\in \mathbb{Z}$, diz-se que b divide a se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b\ .\ c$

- Notação $b\,|\,a$ (lê-se ***b divide a***).

DIVISIBILIDADE – CASOS ESPECIAIS E INDETERMINAÇÕES (BENATTI; BENATTI, 2019)

- $\frac{0}{0} = 0, \textit{pois}\ 0 . 0 = 0;\ \frac{0}{0} = 150\ \textit{pois}\ 0 . 150 = 0;$
- $\frac{\infty}{\infty}$

- Outras indeterminações:
  - $0 . \infty$
  - $\infty - \infty$
  - 0^0
  - ∞^0
  - 1^∞

Divisibilidade – Teoremas (Benatti; Benatti, 2019)

- Considerando $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

I. $1 \mid a$

II. $a \mid a$

III. se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$

IV. se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$

V. se $a \mid b$, então $(b/a) \mid b$

VI. se $a \mid b$, então $a \mid mb$ para todo $m \in \mathbb{Z}$

VII. se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (mb + nc)$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$

VIII. se $a \mid b$ e $a \mid (b+c)$, então $a \mid c$

Divisibilidade – Teoremas (Benatti; Benatti, 2019)

- Se $a\,|\,b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$

- Se $a\,|\,b$, então:
  - $a\,|\,-b$
  - $-a\,|\,b$
  - $-a\,|\,-b$
  - $|a| \mid |b|$

Divisibilidade – Teoremas (Benatti; Benatti, 2019)

- Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a > 0$, existem (e são únicos) inteiros, q, r, com $0 \leq r < a$ e $b = q.a + r$, em que os inteiros q e r passam a ser denominados, respectivamente, quociente e resto.

- Este teorema é o fundamento para o algoritmo da operação de divisão. (Faça você mesmo!)

Divisibilidade – Teoremas (Benatti; Benatti, 2019)

- Se a, $b \in \mathbb{N}^*$, existem únicos inteiros $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$, tal que $a = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \ldots + r_1 b^1 + r_0 b^0$, em que: $k \geq 0$; $0 \leq r_i < a$ para $0 \leq i \leq k$, $r_k \neq 0$.

- Exemplos: 5435 em diferentes bases numéricas
  - Base 10 = $\mathbf{5}.10^3 + \mathbf{4}.10^2 + \mathbf{3}.10^1 + \mathbf{5}.10^0 = 5435$
  - Base 2: $\mathbf{1}.2^{12} + \mathbf{0}.2^{11} + \mathbf{1}.2^{10} + \mathbf{0}.2^9 + \mathbf{1}.2^8 + \mathbf{0}.2^7 + \mathbf{0}.2^6 + \mathbf{1}.2^5 + \mathbf{1}.2^4 + \mathbf{1}.2^3 + \mathbf{0}.2^2 + \mathbf{1}.2^1 + \mathbf{1}.2^0 = 1\ 0101\ 0011\ 1011$
  - Base 8: $\mathbf{1}.8^4 + \mathbf{2}.8^3 + \mathbf{4}.8^2 + \mathbf{7}.8^1 + \mathbf{3}.8^0 = 12473$

Divisibilidade (Base 10) – Alguns Critérios

#	Um número n é divisível por # se, e somente se,
1	*todo número natural é divisível por 1*
2	*terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8 (ou seja, se for par)*
3	*a soma dos seus algarismos for divisível por 3*
4	*o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4*
5	*o seu último algarismo for 0 ou 5*
6	*for divisível por 2 e por 3*
7	*o dobro do seu último algarismo subtraído do número sem o último algarismo resultar em um número divisível por 7. O processo se repete até que o último algarismo seja menor ou igual a 7*
8	*os últimos 3 algarismos formarem um número divisível por 8*
9	*a soma dos seus algarismos for divisível por 9*
10	*o último algarismo for 0*

DIVISIBILIDADE (BASE 10) – ALGUNS CRITÉRIOS

#	Um número n é divisível por # se, e somente se,
11	*a soma dos algarismos nas posições pares (ímpares) menos a soma dos algarismos nas posições ímpares (pares) for divisível por 11*
12	*for divisível por 3 e por 4*
14	*for divisível por 2 e por 7*
15	*for divisível por 3 e por 5*
16	*os últimos 4 algarismos forem divisíveis por 16*
18	*for divisível por 2, por 3 e por 9*
20	*for divisível por 4 e por 5*
22	*os últimos 2 algarismos forem divisíveis por 11*
24	*for divisível por 3 e por 8*
25	*os últimos 2 algarismos forem divisíveis por 25*
26	*for divisível por 2 e por 13*
27	*for divisível por 3 e por 9*

DIVISIBILIDADE (BASE 10) – ALGUNS CRITÉRIOS

#	Um número n é divisível por # se, e somente se,
28	*for divisível por 4 e por 7*
30	*for divisível por 2, por 3 e por 5*
32	*for divisível por 4 e por 8*
33	*a soma dos seus algarismos for divisível por 3*
34	*for divisível por 2 e por 17*
35	*for divisível por 5 e por 7*
36	*for divisível por 4 e por 9*
38	*for divisível por 2 e por 19*
39	*a soma dos seus algarismos for divisível por 3*
40	*for divisível por 4 e por 10*
42	*for divisível por 2, por 3 e por 7*
44	*for divisível por 4 e por 11*
45	*for divisível por 3, por 5 e por 9*

Divisibilidade (Base 10) – Critérios

- Verifique se 66.885 é divisível por 7.
- 6688 –10 = 6678
- 667 –16 = 651
- 65 – 2 = 63
- 63 / 7 = 9, logo 66.885 é divisível por 7

- Verifique se 65.219 é divisível por 11.
- (6 + 2 + 9) – (5 + 1) = 17 – 6 = 11, logo 65.219 é divisível por 11

Máximo Divisor Comum (Benatti; Benatti, 2019)

- **Definição:**
- Para $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos, um número $c \in \mathbb{Z}$ é divisor comum de a e b se $c \mid a$ e $c \mid b$. O conjunto dos divisores comuns de a e b é dado por $D(a, b)$.
- **Definição:**
- Diz-se que c é o máximo divisor comum entre a e b se $c = max\ D(a,b)$. Representação: $mdc(a, b)$

Máximo Divisor Comum (Benatti; Benatti, 2019)

- $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
- $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 30\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- $D = A \cap B = \{1, 2, 5, 10\}$
- Max (D) = 10 ou mdc(A, B) = 10

Máximo Divisor Comum – Algoritmo de Euclides (Benatti; Benatti, 2019)

- Dados a, b, $x \in \mathbb{Z}$, tem-se $mdc(a, b + ax)$.
- Calcule mdc(5460, 1200).

- 5460 = 4 . 1200 + 660
- 1200 = 1 . 660 + 540
- 660 = 1 . 540 + 120
- 540 = 4 . 120 + 60
- 120 = 2 . 60 + 0
- Logo, mdc(5460, 1200) = 60

Máximo Divisor Comum – Algoritmo de Euclides (Benatti; Benatti, 2019)

- Dados a, b, $x \in \mathbb{Z}$, tem-se $mdc(a, b + ax)$.
- Calcule mdc(696, 145).

- $696 = 4 \,.\, 145 + 116$
- $145 = 1 \,.\, 116 + 29$
- $116 = 4 \,.\, 29 + 0$
- Logo, mdc(696, 145) = 29.

Mínimo Múltiplo Comum (Benatti; Benatti, 2019)

- Dados a, b, $x \in \mathbb{Z}^*$, o mínimo múltiplo comum de a e b é definido por: mmc(a, b) = minM$^+$(a, b).
- Neste sentido, o mmc entre a e b é dado pelo menor inteiro positivo divisível simultaneamente por a e por b.
- Calcule o mmc(18, 27)
- A={18, 36, 54, 72, 90, ...}
- B={27, 54, 81, 108, ...}
- Logo, MinM$^+$(A, B) = 54

CONGRUÊNCIA (BENATTI; BENATTI, 2019)

- Se $n \in \mathbb{Z}^*$, tal que $n > 1$, os números a, b, $\in \mathbb{Z}$ são congruentes módulo n se $n \mid (a - b)$.
- $a \equiv b \ (mod\ n)$, se e somente se, existir um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + nq$, em que:
- $\boldsymbol{a = pn + r}$ e $\boldsymbol{b = qn + s}$, então $a \equiv b \ (mod\ n)$, isto é, $n \mid (a - b)$ e $a - b = pn + r - (qn + s) = pn + r - qn - s = pn - qn + r - s = n(p - q) + (r - s)$. Portanto, $n \mid (r - s)$.
- Como $0 \leq |r - s| < n$, tem-se $(r - s) = 0$ que implica $r = s$. Logo: $a - b = n(p - q) + (r - s) = n(p - q)$, uma vez que $(r - s) = 0$. Então, $a \equiv b$, se e somente se, $r = s$.

Congruência (Exemplos) (Benatti; Benatti, 2019)

- $9 \equiv 5\ (mod\ 2)$, uma vez que: *9 / 2, tem resto 1 e 5 / 2, também tem resto 1, observando-se que a diferença entre 9 e 5 é número múltiplo de 2 (no caso 4).*
- $23 \equiv 11\ (mod\ 6)$
- $32 \equiv 8\ (mod\ 8)$
- $29 \equiv 3\ (mod\ 13)$
- $72.216 \equiv 34.216\ (mod\ 1000)$
- $-9 \equiv 31\ (mod\ 10)$
- $123 \equiv -135\ (mod\ 6)$

Congruência (Exemplo Simples)

- João, Pedro, Tiago e Lucas preparam sacos com 12 frutas em cada. Considerando que João tinha 127, Pedro tinha 185, Tiago, 205 e Lucas 161 frutas, quantos sacos foram formados no total e quantas frutas eventualmente sobraram?
- $127 \equiv 7 \ (mod\ 12)$; sacos: 10; $185 \equiv 5 \ (mod\ 12)$; sacos: 15;
- $205 \equiv 1 \ (mod\ 12)$; sacos: 17; $161 \equiv 5 \ (mod\ 12)$; sacos: 13;

- Sobra total: $7 + 1 + 5 + 5 = 18$ (ou seja, mais 1 saco).
- Sacos: $10 + 17 + 15 + 13 + 1$, sobrando, então 6 frutas.

Números Primos (Peruzzo, 2012)

- É todo e qualquer número maior que 1 que é divisível somente por si mesmo e por 1.
- $P = \{ p \in \mathbb{N} \ | p \text{ é } primo \}$
- Números primos menores que 100: $P = \{ p \in \mathbb{N} \mid p$ é primo e $2 \leq x \leq 100\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$
- Os números não primos são chamados **compostos**, exceto 0 (zero) e 1 (um) que não são primos nem compostos.

Números Primos (Peruzzo, 2012)

- Existem infinitos números primos.
- Com exceção de 2 e 3 não existem dois primos consecutivos, uma vez que certamente um deles seria divisível por 2.
- Adrian-Marie Legendre provou que não existe uma função algébrica racional que sempre forneça números primos. É possível gerar alguns números primos em determinados intervalos, mas não todos.

Tipos de Primos: Primos Entre Si

- Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$, tais que $mdc(a, b) = 1$, então a e b são primos entre si.
- Observe que todos os primos são primos entre si.
- Determine se 55 e 68 são primos entre si.
- A={1, 5, 11, 55} B={1, 2, 4, 17, 34, 68}
- mdc(a, b)={1}, logo 55 e 68 são primos entre si.
- Um número primo não é primo entre si com outro número caso seja um de seus divisores.

Tipos de Primos: Primos Gêmeos (Peruzzo, 2012)

- **Primos Gêmeos**: quando a diferença entre os dois números primos é igual a 2. Ex: 3 e 5; 5 e 7; 11 e 13; 17 e 19, etc. (a lista é infinita?)
- Não existem 3 números primos gêmeos consecutivos, uma vez que um deles necessariamente seria divisível por 3.
- Há 24.412.679 primos gêmeos com 10 dígitos ou menos.
- Em set./2016 um número primo gêmeo calculado tinha 388.342 dígitos.

TIPOS DE PRIMOS (PERUZZO, 2012)

- **Primos Primos**: quando a diferença entre os dois números primos é igual a 4. Ex: 3 e 7; 7 e 11; 13 e 17; 19 e 23; 37 e 41, etc.
- **Primos Triplos**: quando (p, p+2, p+6) ou (p, p+4, p+6) são todos primos. Ex: (5, 7 e 11); (7, 11 e 13); (11, 13 e 17); (13, 17 e 19).
- **Primos Primordiais**: são expressos na forma $p_n\# - 1$ ou $p_n\# + 1$, em que $p_n\#$ é o produto de todos os primos menores ou iguais a n. Ex: p7# = 2 . 3 . 5 . 7 = 211

TIPOS DE PRIMOS (PERUZZO, 2012)

- **Primos Fatoriais**: $n! \mp 1$ onde:
  - n! –1 é primo para n=3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, ...
  - n! + 1 é primo para n=1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, ...

- **Primos Quadrados Centralizados**: que são expressos na forma $n^2 + (n+1)^2$. Ex: 5, 13, 41, 61, 113, 181, 313, 421, 613, 761, 1013, etc.

TIPOS DE PRIMOS (PERUZZO, 2012)

- **Primos de Fermat**: $F_n = 2^{2^n} + 1$, com n = 0, 1, 2, 3, (...). Os primeiros quatro números da série são, de fato, primos, mas o quinto é composto.

- **Primos de Sophie Germain**: $S_n = 2p + 1$, onde p é primo. Nem todos os números da série são primos, por exemplo, $S_7 = 15$ e $S_{13} = 27$.

TIPOS DE PRIMOS (PERUZZO, 2012)

- **Primos de Marin Mersenne**: $M_n = 2^p - 1$, onde p é primo. Nem todos os números da série são primos, por exemplo, $M_{11} = 2047$.

- "***Os maiores primos encontrados atualmente são deste tipo. Até hoje, apenas poucas dezenas deles foram descobertos, de modo que os números de Mersenne são muito raros***" (p. 33)

Tipos de Primos (Peruzzo, 2012)

- **Primos de Cullen**: são todos os primos gerados pela fórmula $C_n = n \, . \, 2^n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Em 2009, o maior número de Cullen era $6679881 \, . \, 2^{6679881} + 1$.
- **Primos de Wilson**: são primos definidos por $p^2 \mid [(p - 1)! + 1]$ ou $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$. Ex: são conhecidos 5, 13 e 563.
- **Primos Gaussianos**: são primos na forma $4n + 3$, para $n \in \mathbb{N}$. Ex: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107, 127,

Tipos de Primos (Peruzzo, 2012)

- **Primos de Wieferich**: é o número primo expresso por $p^2 \mid (2^{p-1} - 1)$, ou seja, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Ex: 1093 e 3511. Exceto estes primos não existem outros inferiores a $6E10^9$.
- **Pares de Wieferich**: são números primos (n. nec. de Wieferich) p e q que satisfazem as seguintes relações de congruência

$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q^2} \text{ e } q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

- Ex: 2 e 1093; 3 e 1.006.003; 5 e 1.645.333.507; 83 e 4.871; 911 e 318.971; 2903 e 18.787.

TIPOS DE PRIMOS (PERUZZO, 2012)

- **Primos de Fibonacci**: são os números primos presentes na sequência de Fibonacci a qual pode ser definida por $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ou $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
- "***Nesta sequência, os números 0 e 1 são especiais e dão origem aos demais números, e cada número seguinte da série é formado pela soma dos dois anteriores***" (p. 37). Observação: para demonstrações gráficas, a série inicia-se no 1, o qual se repete.
- Ex: primos de Fibonacci: 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1.597, ...

O crivo de Eratóstenes (Peruzzo, 2012)

- Liste todos os números naturais até o número limite.
- Marque o número 2 (1º primo);
- Elimine todos os números pares;
- Marque o número 3 (2º primo);
- Elimine todos os números divisíveis por 3;
- Prossiga marcando todos os números primos e eliminando seus múltiplos até atingir o número primo cujo quadrado seja igual ou superior ao número limite.

O crivo de Eratóstenes (Peruzzo, 2012)

1	• 2	• 3	4	• 5	6	• 7	8	9	10
• 11	12	• 13	14	15	16	• 17	18	• 19	20
21	22	• 23	24	25	26	27	28	• 29	30
• 31	32	33	34	35	36	• 37	38	39	40
• 41	42	• 43	44	45	46	• 47	48	49	50
51	52	• 53	54	55	56	57	58	• 59	60
• 61	62	63	64	65	66	• 67	68	69	70
• 71	72	• 73	74	75	76	77	78	• 79	80
81	82	• 83	84	85	86	87	88	• 89	90
91	92	93	94	95	96	• 97	98	99	100

TESTE DA RAIZ (PERUZZO, 2012)

- Para encontrar os números primos até o número n, basta eliminar os múltiplos dos números até $\sqrt{n}$.
- Isto significa que para determinar se um número n é primo, é suficiente testar a divisibilidade pelos primos p tais que $p \leq \sqrt{n}$.
- Ex: 151 é primo? Lembrando que $\sqrt{151} \cong 12{,}28$.
- Aplicando-se os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 7 e 11 (maior primo inferior a $\sqrt{151}$, e não havendo divisibilidades), prova-se que 151 é primo.

Teorema Fundamental da Aritmética (Peruzzo, 2012)

- Todo número inteiro $n \in \mathbb{N} \mid n > 1$ pode ser expresso como o produto de números primos, de forma única, sob a seguinte estrutura:

- $n = p_1^{\alpha 1} . p_2^{\alpha 2} . p_3^{\alpha 3} \ldots p_k^{\alpha k}$ ou $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$

- Exemplos: $6 = 2 . 3$; $80 = 2^4 . 5$;
- $1.048.576 = 2^{20}$ $1.048.577 = 17 . 61681$

Teorema dos Números Primos (Peruzzo, 2012)

- Gauss denominou π(x) a quantidade de números primos até o valor de *x*:
- $\forall x \geq 0$ e $x \in \mathbb{N}$, tem-se que $\pi(x)=\{p \in \mathbb{N} \mid p \leq x\}$
- A distribuição dos números primos aproximava-se de:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \text{ sendo que: } \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Teorema dos Números Primos (Peruzzo, 2012)

x	$\pi(x)$	$\pi(x) / x$	$1 / ln(x)$
10	4	0,4000	0,4343
100	25	0,2500	0,2171
1.000	168	0,1680	0,1448
10.000	1.229	0,1229	0,1086
100.000	9.592	0,0959	0,0869
1.000.000	78.498	0,0758	0,0724
10.000.000	664.579	0,0665	0,0620
100.000.000	5.761.455	0,0576	0,0543

TETRAÇÃO (*TETRATION*)

- **Exponenciação ou Potência** (a^b ou $a\uparrow b$)
- $3^4 = 3\uparrow 4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 9 \,.\, 9 = 81$
- **Tetração ou Superpotência** (^{b}a ou $a\uparrow\uparrow b$)
- $^{4}3 = 3\uparrow\uparrow 4 = \mathbf{3^{(3^{(3^3)})}} = \mathbf{3^{3^{27}}} = \mathbf{3^{7.625.597.484.987}}$

TETRAÇÃO (*TETRATION*)

a	a + a	a . a	a^a	$^a a$
0	0	0	erro	erro
1	2	1	1	1
2	4	4	4	4
3	6	9	27	7,63e+12
4	8	16	256	$4^{1,34078e+154}$
5	10	25	3125	$5^{5^{1,91101e+2184}}$

Fatorial e seus Tipos

- **Fatorial (n!)**
- $n! = \prod_{k=1}^{n} k = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(\ldots).\,3\,.\,2\,.\,1 \;\forall n \in \mathbb{N}$
  - $4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$
  - $(4!)! = (4\,.\,3.\,2.\,1)! = 24! = 620.448.401.733.239.439.360.000$

- **Fatorial Dupla (n!!)**
- $n!! \begin{cases} n\,.\,(n-2)\ldots 4\,.\,2\ (par) & Ex: 4!! = 4\,.\,2 = 8 \\ n\,.\,(n-2)\ldots 3\,.\,1\ (ímpar) & Ex: 5!! = 5\,.\,3\,.\,1 = 15 \end{cases}$

FATORIAL E SEUS TIPOS

- **Subfatorial (!n)**
  - $!n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\,(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^n.\frac{1}{n!})$ ou
  - $!4 = 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}(-1)^4.\frac{1}{4!}\right)$
  - $!4 = 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+1.\frac{1}{4!}\right)$
  - $!4 = 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) = 24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right) = 9$
- Aproximação por *e*: $!n = \left[\frac{n!}{e}\right]$ onde [ ] representa arredondar para o inteiro mais próximo

Fatorial e seus Tipos

- **Primorial (n#)**
  - $n\# = \prod_{p \le n} p$ *em que p é primo!*
  - $4\# = 3 \,.\, 2 = 6$; $11\# = 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 2 = 210$

Fatorial e seus Tipos

- **Superfatorial (Sloane; Plouffe) [sf(n)]**
  - $sf(n) = \prod_{k=1} k! = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} = 1^{n}.2^{n-1}.3^{n-2} \ldots (n-1^{2}).1$
  - $sf(4) = 4!\,.\,3!\,.\,2!\,.\,1! = 24\,.\,6\,.\,2\,.\,1 = 288$
  - $sf(4) = 1^{4}.2^{3}.3^{2}.4^{1} = 1\,.\,8\,.\,9\,.\,4 = 288$
  - $sf(10) = 10!\,.\,9!\,.\,8!\,.\,7!\,.\,6!\,.\,5!\,.\,4!\,.\,3!\,.\,2!\,.\,1!$
  - $sf(10) = 1^{10}.2^{9}.3^{8}.4^{7}.5^{6}.6^{5}.7^{4}.8^{3}.9^{2}.10^{1}$
  - $sf(10) =$ 6.658.606.584.104.736.522.240.000.000

FATORIAL E SEUS TIPOS

- **Superfatorial (Pickover) [(n$) ou sf$(n)$]**
  - Uso potencial na geração de chaves de criptografia

  - $\boldsymbol{n}\$ = {}^{n!}n! = (\boldsymbol{n}!) \uparrow\uparrow (\boldsymbol{n}!)$
  - $\mathbf{3}\$ = {}^{3!}3! = {}^{6}6$
  - $\mathbf{4}\$ = {}^{4!}4! = {}^{24}24$

  - $\mathbf{4}\$ = \mathbf{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24^{24}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$

FATORIAL E SEUS TIPOS

- **Fatorial Exponencial (n$)**
  - $n\$ = n^{n-1^{\cdots^{1}}}$
  - $4\$ = 4^{3^{2^{1}}} = 64^{2^{1}} = 4096^{1} \quad = 4.096$
  - $5\$ = 5^{4^{3^{2^{1}}}} = 625^{3^{2^{1}}} = 244.140.625^{2^{1}} = 59.604.644.775.390.625$

- **Hiperfatorial H(n)**
  - $H(n) = n^{n}\,(n-1)^{n-1} \ldots 2^{2}.1^{1}$
  - $H(4) = 4^{4}\,.\,3^{3}\,.\,2^{2}.\,1^{1} = 256\,.\,27\,.\,4\,.\,1 = 27.648$
  - $H(9) = 9^{9}\,.\,8^{8}\,.\,7^{7}.\,6^{6}.\,5^{5}\,.\,4^{4}\,.\,3^{3}\,.\,2^{2}.\,1^{1}$
  - $H(9) = 21.577.941.222.941.856.209.168.026.828.800.000$

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

- Exemplo: a infância de Diofanto durou 1/6 de sua vida; sua barba cresceu após 1/12; depois de 1/7 ele se casou, e seu filho nasceu 5 anos depois do casamento; o filho viveu a metade da idade de seu pai e o pai morreu 4 anos depois do filho. Se x foi a idade com que Diofanto morreu, a equação é:
- $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x, logo\ x = 84$ ou
- $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$

EQUAÇÕES DIOFANTINAS (BURTON, 2016)

São equações do tipo $ax + by = c$, sendo que a, b e c são inteiros dados e a e b são diferentes de 0 (zero).

A solução procurada é um par de inteiros x_0 e y_0 que ao serem substituídos na equação original, satisfaçam-na, ou seja, $ax_0 + by_0 = c$.

A equação diofantina admite solução, se e somente se, $d \mid c$, em que $d = mdc(a, b)$. Se existe x_0 e y_0, isto traz a:

$x' = x_0 + s.t = x_0 + (b/d).t$

$y' = y_0 - r.t = y_0 - (a/d).t$

[Demonstração: próximos 3 slides]

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

Se existe x_0 e y_0, existem r e s, números inteiros, para os quais $a=d.r$ e $b=d.s$

Logo, $c=ax_0+by_0 = d.r.x_0+d.s.y_0 = d(r.x_0 + s.y_0)$

Supondo que $d|c$, $c=d.t$, em que t é um número inteiro qualquer. Logo, $c=d.t = (ax_0+by_0).t = a(t.x_0)+b(t.y_0)$, assim, a equação diofantina $ax + by = c$, tem $x = t.x_0$ e $y=t.y_0$ como solução particular.

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

Supondo que exista uma segunda solução x' e y', então: $ax_0 + by_0 = c = ax' + by' = a(x' - x_0) = b(y_0 - y')$.

Considerando que $a=d.r$ e $b=d.s$, substituindo na equação anterior (e cancelando-se o fator comum d), tem-se: $r(x' - x_0) = s(y_0 - y')$. $r \mid s(y_0 - y')$, com $mdc(r, s)=1$; $r \mid (y_0 - y') \therefore y_0 - y' = r.t$

Substituindo-se, tem-se: $x' - x_0 = s.t$, o que traz a:

$x' = x_0 + s.t = x_0 + (b/d).t$

$y' = y_0 - r.t = y_0 - (a/d).t$

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

(Prova)

$$ax' + by' = a\left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t\right] + b\left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right]$$

$$ax' + by' = (a.x_0 + b.y_0) + \left[\left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)\right]t$$

$$ax' + by' = c + 0.t$$

$$ax' + by' = c$$

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

- Considere a equação diofantina linear: $172x + 20y = 1000$
- Calcular o mdc pelo Algoritmo de Euclides:

Q	8	1	1	2
172	20	12	8	4
R	12	8	4	0

- Temp M: $4 = 12 - 1 . 8$
- Temp N: $8 = 20 - 1 . 12$
- Temp O: $12 = 172 - 8 . 20$

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

$4 = 12 - 1.\ 8$

$4 = 12 - (20 - 1\ .\ 12)$

$4 = 12 - 20 + 12$

$4 = 2\ .\ 12 - 20$

$4 = 2\ .\ (172 - 8\ .\ 20) - 20$

$4 = 2\ .\ 172 - (16\ .\ 20) - (1\ .\ 20)$

$4 = 2.\ 172 - 17\ .\ 20$

$1000 = 4\ .\ 250$

$1000 = 250\ .\ [(2\ .\ 172) - (17\ .\ 20)]$

$1000 = 500\ .\ 172 - 4250\ .\ 20$

Equações Diofantinas (Burton, 2016)

Solução particular: $x_0 = 500$; $y_0 = -4250$ || ***Eq. 172x + 20y=1000***

Solução geral: $x' = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y' = y_0 - \frac{a}{d}t$, onde t é um número qualquer

$x' = 500 + \left(\frac{20}{4}\right).t = 500 + 5t = -100;$

$y' = -4250 - (\frac{172}{4})t = -4250 - 43t \cong -98{,}83$

t é um número inteiro qualquer entre $-98{,}83$ e $-100{,}0,$ $isto$ é, $t = -99.$

Substituindo t para cálculo de x' e y', tem-se:

$x' = 5t + 500 = (5 . -99) + 500 = -495 + 500 = 5$
$y' = -43t - 4250 = (-43 . -99) - 4250 = 4257 - 4250 = 7$

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL (MODELAGEM MATEMÁTICA FORMAL)

Reginaldo Morais de Macedo, M.Sc., D.Sc.

- Bacharel em Administração e Matemática.
- Doutor em Administração.
- Mestre em Desenvolvimento Social.
- Especialista em Ciência de Dados; Sistema Financeiro e Mercado de Capitais; Saúde Pública; Educação a Distância; Engenharia de Produção; e Administração de Sistemas de Informação.
  MBA em Gestão de Projetos e Gestão Pública.

Problemas, Modelagem e Resolução

- Os problemas podem ser resolvidos por meio de duas estratégias de enfrentamento e resolução:

- 1. modelos matemáticos formais: (sistemas de) (in)equações que permitem a explicitação do problema e sua resolução.
- 2. algoritmos: normalmente para problemas que demandam a execução de ações processuais e que, normalmente, não podem ser definidos sob a forma 1.

Formato de Modelo Matemático

- **Variáveis**: o que se pretende calcular/descobrir;
- **Objetivo**: o que se pretende atingir (otimização) e que pode ser um valor específico, o máximo ou o mínimo possíveis.
- **Restrições**: Fatores endógenos ou exógenos que atuam direta ou indiretamente sobre a situação abstraída pelo modelo e que precisam ser compreendidas e levadas em consideração na modelagem.

TIPOS DE RESTRIÇÕES

- **Endógenas**: possuem certo grau de controle por parte dos gestores e estão limitadas ao ambiente interno da organização: tempo disponível; matéria-prima; questões de fornecimento e produção estabelecidas contratualmente, etc;
- **Exógenas**: normalmente, a organização “pode responder” (quando consegue) às mudanças ocorridas no meio ambiente: taxação, políticas econômicas, alterações de demanda, comportamento do consumidor;

Modelos de Otimização (Maximização)

- A empresa XYZ fabrica 2 produtos, A e B, cujos lucros unitários são R$ 500,00 e R$ 800,00. A empresa possui 8h diárias disponíveis para produção. O prod. A requer 1h e o prod. B requer 2h. São utilizadas 2 matérias-primas (MP), M e N, cujas disp. são, resp., 20u. e 10u. O prod. A consome 2u. da MP M e 4u. da MP N, enquanto o prod. B consome 4u. da MP M e 2u. da MP N. Considerando que a demanda pelo prod. A é de 10u./dia e a demanda pelo prod. B é de 8u./dia, monte o plano de produção que otimiza a produção e maximiza a lucratividade.

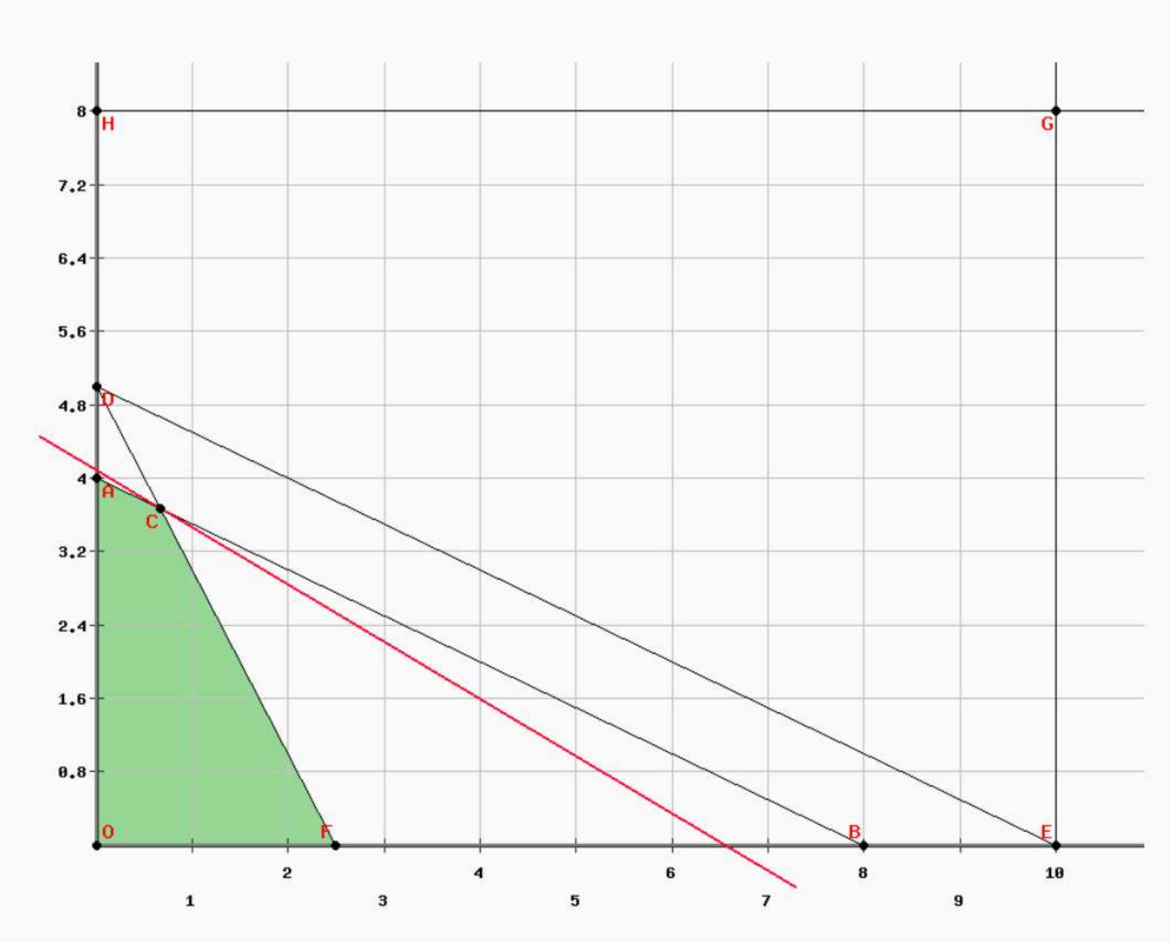
Modelos de Otimização (Maximização)

Prod.	Lucro (R$)	Tempo (h.)	MP M (u.)	MP N (u.)	Demanda (u.)
A	500	1	2	4	10
B	800	2	4	2	8
	Disp.	8	20	10	

Modelos de Otimização (Maximização)

- **Var**: qA; qB;
- **Obj**: Max Lucro = 500 . qA + 800 . qB;
- **Sujeito a**: (Restrições)
- **Tempo**: 1 . qA + 2 . qB <= 8;
- **MP M**: 2 . qA + 4 . qB <= 20;
- **MP N**: 4 . qA + 2. qB <= 10;
- **Dem A**: qA <= 10;
- **Dem B**: qB <= 8;
- **N. Neg**: qA, qB >= 0;

Modelos de Otimização (Maximização) Método Gráfico



- (0;0) = 0
- (0; 4) = 3200
- (0,6; 3,67) = 3266,67
- (2,5; 0) = 1250,0

Modelos de Otimização (Minimização)

- A empresa ABC está desenvolvendo seu plano de produção com vistas à minimização dos seus custos. Atualmente, a empresa fabrica os produtos X (prod. mínima: 1.000u.), Y (prod. Mínima: 1.500u.) e Z (prod. Mínima: 2.000u.) e para isto adquire os seguintes lotes de matérias-primas com seus principais fornecedores:

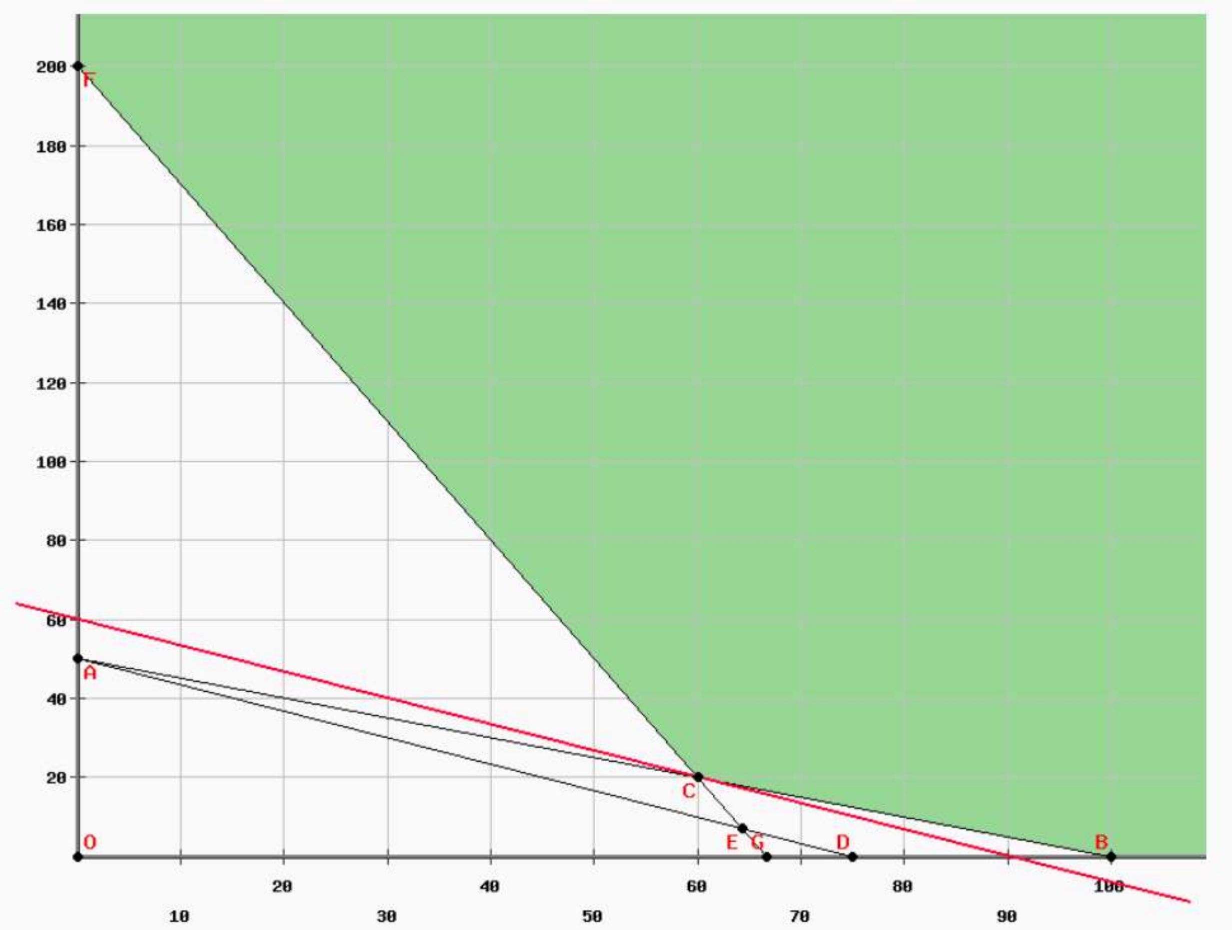
- Lote 1, fabrica 10u. X, 20u. Y; 30u. Z: vr: 100,00;
- Lote 2, fabrica 20u. X, 30u. Y; 10u. Z: vr. 150,00; e

- Monte o modelo matemático que otimiza o plano de produção e garante o menor custo de aquisição de matéria-prima.

Modelos de Otimização (Minimização)

- **Var**: qL1; qL2;
- **Obj**: Min Custo = 100 . qL1 + 150 . qL2;
- **Sujeito a**: (Restrições)
- **Prod. Mín. X**: 10 . qL1 + 20 . qL2 >= 1000;
- **Prod. Mín. Y**: 20 . qL1 + 30 . qL2 >= 1500;
- **Prod. Mín: Z**: 30 . qL1 + 10 . qL2 >= 2000;
- **N. Neg**: qL1, qL2 >= 0;

Modelos de Otimização (Maximização) Método Gráfico



- (100; 0) = 10000
- (60; 20) = 9000
- (0; 2000) = 30000

Modelos de Otimização (Minimização)

- A siderúrgica ABC está desenvolvendo seu plano de produção com vistas à minimização dos seus custos. O aço especial mais vendido pela empresa tem a seguinte formulação.
  - Fe, entre 65% e 70%, R$ 4,00/kg;
  - C, entre 15% e 25%, R$ 0,15/kg;
  - Ni, entre 3% e 15%, R$ 170,00/kg;
  - Cr, entre 2% e 14%, R$ 300,00/kg;
  - Vn, entre 1% e 13%, R$ 1.540,00/kg.
- Sabendo-se que não pode haver desperdício de matéria-prima, monte o plano de produção que minimiza o custo de fabricação desta liga especial.

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO (MINIMIZAÇÃO)

- **Var**: qFe; qC; qNi, qCr, qVn;
- **Obj**: Min Custo = 4 . qFe + 0,15 . qC + 170 . qNi + 300 . qCr + 1540 . qVn;
- **Sujeito a**: (Restrições)
- **Min Fe**: qFe >= 0,65; **Max Fe**: qFe <= 0,70;
- **Min C**: qC >= 0,15; **Max C**: qC <= 0,25;
- **Min Ni**: qNi >= 0,03; **Max Ni**: qNi <= 0,15;
- **Max Cr**: qCr >= 0,02; **Max Cr**: qCr <= 0,14;
- **Max Vn**: qVn >= 0,01; **Max Vn**: qVn <= 0,13;
- **Mistura**: qFe + qC + qNi + qCr + qVn = 1;
- **N.Neg**: qFe, qC, qNi, qCr, qVn >= 0;

Modelos de Otimização (Minimização)

A solução ótima é Z = 29.2975

$X_1 = 0.69$

$X_2 = 0.25$

$X_3 = 0.03$

$X_4 = 0.02$

$X_5 = 0.01$

Modelos de Otimização (Minimização)

- A siderúrgica ABC está desenvolvendo seu plano de produção com vistas à minimização dos seus custos. No momento, a empresa utiliza dois materiais reciclados, MR1 e MR2 cujas composições e custos são:
- **MR1**: 70% Fe; 15% C; 5% Ni; 5% Vn; 5% Cr; custo: R$ 77,00; e,
- **MR2**: 60% Fe; 25% C; 10% Ni; 3% Vn; 2% Cr; custo: R$ 32,00.
- O aço mais vendido pela empresa tem a seguinte formulação: Fe, entre 65% e 70%; C, entre 18% e 23%; Ni, entre 3% e 15%; Cr, entre 2% e 14%; e Vn, entre 1% e 13%.
- Sabendo-se que não pode haver desperdício de matéria-prima, monte o modelo matemático.

Modelos de Otimização (Maximização)

	MR 1	MR 2	Min	Max
Fe	0,70	0,60	0,65	0,70
C	0,15	0,25	0,18	0,23
Ni	0,05	0,10	0,03	0,15
Cr	0,05	0,03	0,02	0,14
Vn	0,05	0,02	0,01	0,13

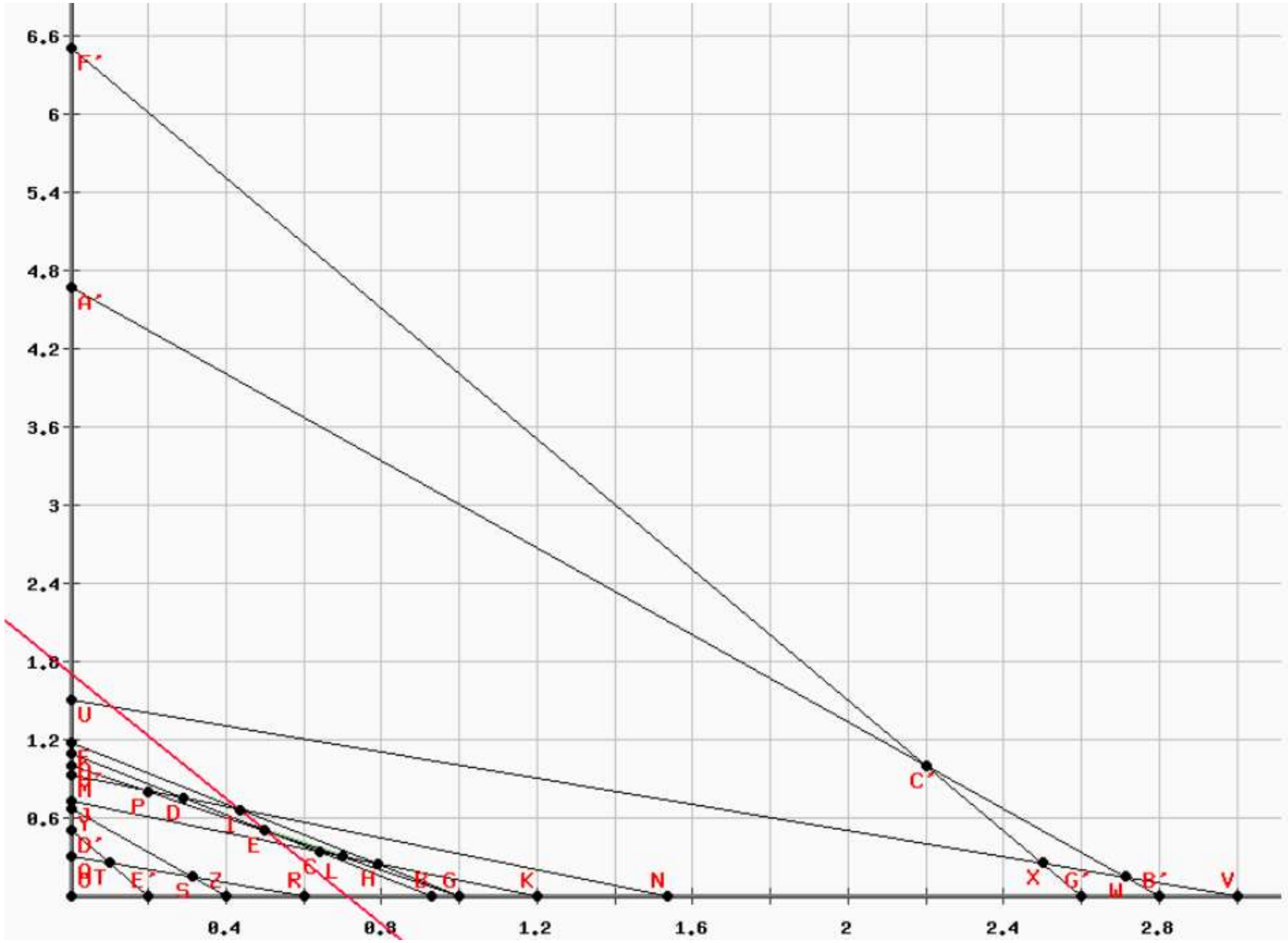
Modelos de Otimização (Minimização)

- **Var**: qMR1; qMR2;
- **Obj**: Min Custo = 77 . qMR1 + 32 . qMR2;
- **Sujeito a**: (Restrições)
- **Min Fe**: 0,70 . qMR1 + 0,60 . qMR2 >= 0,65;
- **Max Fe**: 0,70 . qMR1 + 0,60 . qMR2 <= 0,70;
- **Min C**: 0,15 . qMR1 + 0,25 . qMR2 >= 0,18;
- **Max C**: 0,15 . qMR1 + 0,25 . qMR2 <= 0,23;
- **Min Ni**: 0,05 . qMR1 + 0,10 . qMR2 >= 0,03;
- **Max Ni**: 0,05 . qMR1 + 0,10 . qMR2 <= 0,15;

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO (MINIMIZAÇÃO)

- **Min Cr**: 0,05 . qMR1 + 0,03 . qMR2 >= 0,02;
- **Max Cr**: 0,05 . qMR1 + 0,03 . qMR2 <= 0,14;
- **Min Vn**: 0,05 . qMR1 + 0,02 . qMR2 >= 0,01;
- **Max Vn**: 0,05 . qMR1 + 0,02 . qMR2 <= 0,13;
- **Mistura**: qMR1 + qMR2 = 1
- **N. Neg**: qMR1, qMR 2 >= 0;

Modelos de Otimização (Minimização)



- $(0{,}5;\ 0{,}5) = 54{,}5$

Modelos de Otimização (Minimização)

- **Min Fe**: 0,70 . **0,5** + 0,60 . **0,5 =** 0,350 + 0,300 = 0,650 >= 0,65;
- **Max Fe**: 0,70 . **0,5** + 0,60 . **0,5 =** 0,350 + 0,300 = 0,650 <= 0,70;
- **Min C**: 0,15 . **0,5** + 0,25 . **0,5** = 0,075 + 0,125 = 0,200 >= 0,18;
- **Max C**: 0,15 . **0,5** + 0,25 . **0,5** = 0,075 + 0,125 = 0,200 <= 0,23;
- **Min Ni**: 0,05 . **0,5** + 0,10 . **0,5** = 0,025 + 0,050 = 0,075 >= 0,03;
- **Max Ni**: 0,05 . **0,5** + 0,10 . **0,5** = 0,025 + 0,050 = 0,075 <= 0,15;
- **Min Cr**: 0,05 . **0,5** + 0,03 . **0,5** = 0,025 + 0,015 = 0,040 >= 0,02;
- **Max Cr**: 0,05 . **0,5** + 0,03 . **0,5** = 0,025 + 0,015 = 0,040 <= 0,14;
- **Min Vn**: 0,05 . **0,5** + 0,02 . **0,5** = 0,025 + 0,010 = 0,035 >= 0,01;
- **Max Vn**: 0,05 . **0,5** + 0,02 . **0,5** = 0,025 + 0,010 = 0,035 <= 0,13;
- **Mistura**: **0,5** + **0,5** = 1