

## PROPUESTA DE TRANSICIÓN GEOMÉTRICA PARA LA MEJORA DE DESEMPEÑO EN UNIONES DE FUNDICIÓN TIPO “T”

### RESUMEN

El diseño de los componentes mecánicos debe considerar que la forma de éstos satisfagan las necesidades funcionales, e implica que el material del componente ya ha sido previamente determinado por algún análisis. El diseño geométrico de la pieza se rige por la función y la adecuada distribución de esfuerzos mecánicos.

Este trabajo presenta un método de mejora geométrica experimental para una unión T. Se propusieron diferentes formas de transición geométrica y se analizaron éstas bajo condiciones de carga por medio de un programa de elemento finito. Se encontró una distribución mejorada de esfuerzos utilizando como criterio el valor de la dispersión y el crecimiento de área de la sección.

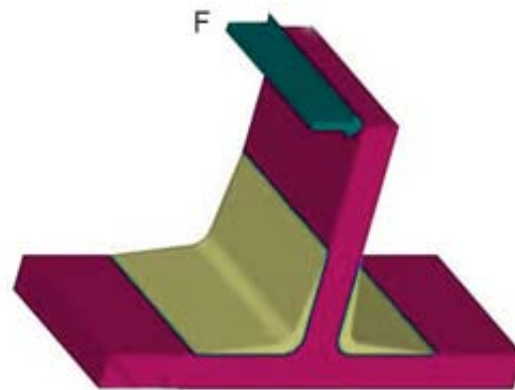
**Palabras clave:** elemento finito, concentración de esfuerzos, curvas de forma libre, optimización de forma.

### ABSTRACT

The mechanical design of components must have as the highest priority the functional needs. If the material of the component has been previously determined, the geometry is conditioned by an adequate stress distribution.

This work presents an experimental geometric improvement method for a T union. Different transitions were proposed, and were analyzed under a load situation with a finite element software. A better stress distribution was found, using dispersion versus area growth criteria.

**Keywords:** Finite element, notch stress, free form curves, shape optimization.



Perfil T 20 x 20

Figura 1 Estándar VDG de la unión T y la propuesta de modificación de curvatura de transición de este trabajo.

### INTRODUCCIÓN

En el diseño de componentes y estructuras mecánicas se analizan los aspectos funcionales, se dimensiona y se calculan los esfuerzos debidos a las cargas que soportarán y se analizan los aspectos del proceso de manufactura que influyen directamente con la forma última del producto. Resulta deseable que las piezas sean mejoradas bajo criterios de minimización de los esfuerzos máximos sin menoscabo del aumento de material para lograrlo y poder así garantizar tanto los costos como la vida útil del componente. Esto es posible desde la fase de análisis y diseño del componente por medio de técnicas de elemento finito y la aplicación de criterios de mejora. El propósito de este trabajo consiste en seleccionar la curvatura de la transición que mejor presente una distribución de esfuerzos y minimizar el área transversal.

## Estándares de unión T

Las uniones entre paredes sirven como refuerzo en estructuras mecánicas y son también transiciones geométricas que originan concentraciones de esfuerzo. Existe un espectro amplio de uso de esta unión "T", por lo que los tipos y las condiciones de carga son muy variados. Se seleccionó el caso para el presente estudio y se consideró la geometría inicial de acuerdo a los estándares recomendados por la VDG-Verein Deutsche Gisserei (por sus siglas en alemán "Asociación de Fundidores Alemanes").

En la figura 2 y la tabla I se muestran los diseños estandarizados para una base con espesor mayor a 25mm y un espesor menor a 25mm respectivamente. En el diseño se busca una transición geométrica suave desde la pared a la costilla.

Tabla I. Parámetros de diseño transición "T"		
Descripción	Nom.	Parámetro (mm)
Espesor de pared	E	20
Espesor de costilla	e	20
Longitud de pared (sobre la base)	L1	240
Longitud de costilla (sobre la vertical)	L2	190
Radio menor (transición pared-pendiente)	r	10

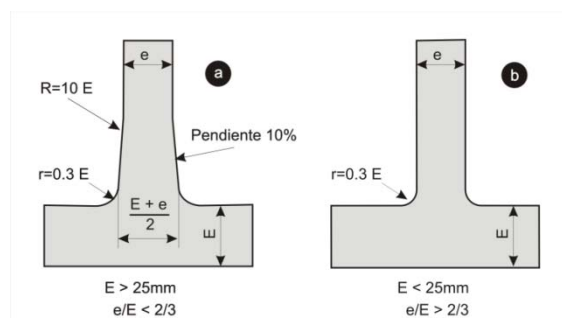


Figura 2.-Diseños estandarizados VDG-Verein Deutsche Gisserei (a) espesor mayor a 25mm y (b) espesor menor a 25mm.

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- proponer diferentes curvaturas de transición en la unión T con mejor desempeño que la radial
- estimar la distribución de los esfuerzos mediante una simulación de elemento finito
- encontrar el caso óptimo en función del incremento de material vs la reducción de esfuerzos.

## APROXIMACIÓN CIRCULAR CON CURVAS DE BEZIER

Las curvas de Bezier se basan en el polinomio de Bernstein a su vez se define como

$$B(u, i) = \frac{n!}{i! \cdot (n - i)!} \cdot u^i \cdot (1 - u)^{n-i} \quad \text{Ec(1)}$$

La variable paramétrica tiene un rango de  $0 < u < 1$ .

Una curva de Bezieres un conjunto de puntos de control  $\{P\} = P_0..P_n$  en donde n es el orden del polinomio.

$$C(u, P) = \sum_{i=0}^n (P_i \cdot B(u, i)) \quad \text{Ec(2)}$$

Es posible aproximar un círculo utilizando una curva de Bezier de orden  $n=3$  (o mayor, pero la aproximación de orden tres es razonablemente buena). Para ello es necesario colocar los puntos de control intermedios a una distancia  $k$  como se muestra en la figura 4.

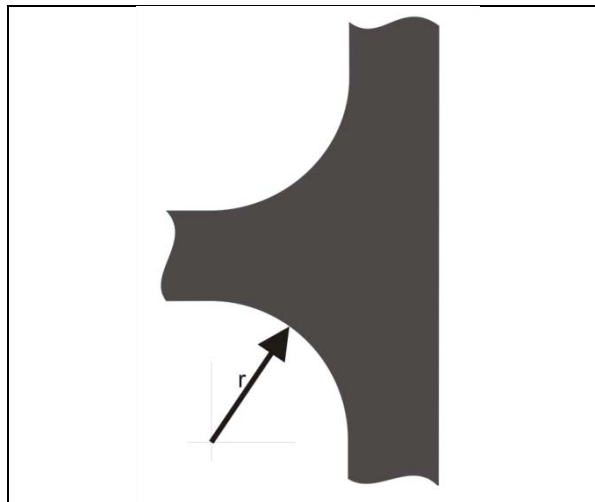


Figura 3.- Radio de unión del componente T. El valor de r se define en los estándares VDG.

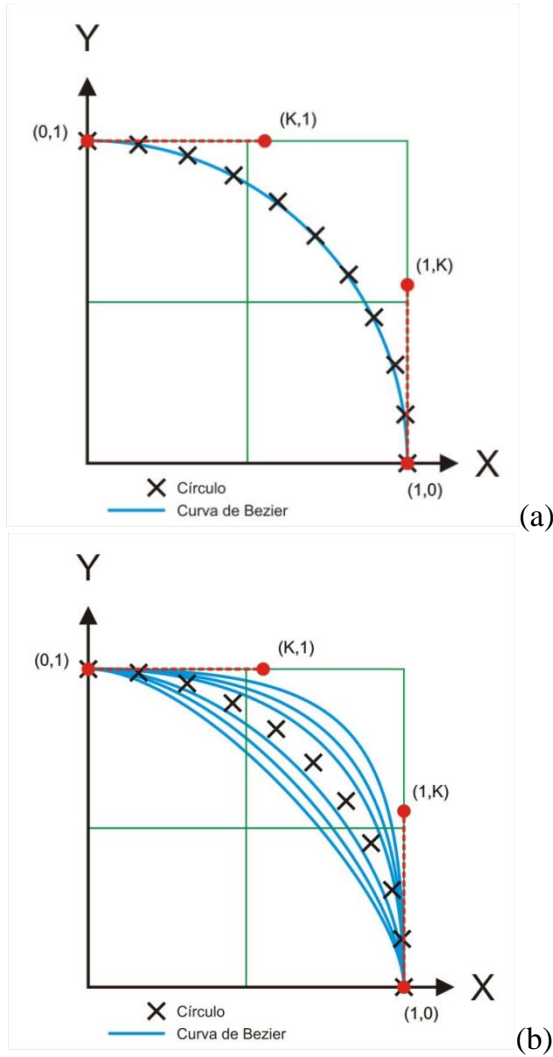


Figura 4.- (a) Aproximación del radio de unión con una curva de Bezier. Los puntos de control posicionados según la ecuación 6. (b) Modificación de la curvatura de la unión con una curva de Bezier con diferentes valores de k para la posición de los puntos de control.

El vector de puntos de control es:

$$\begin{aligned} P_x^T &= [1, 1, k, 0] \\ P_y^T &= [0, k, 1, 1] \end{aligned}$$

La posición de  $P_1$  y  $P_2$  hace que los segmentos  $P_0-P_1$  y  $P_2-P_3$  sean axiales a los lados del componente, garantizando con esto continuidad geométrica.

Ya que la curva de Bezier interpola los puntos  $P_0$  y  $P_n$ , la mayor desviación de una aproximación ocurre en  $u=1/2$ , esto es, a la mitad de la trayectoria cuando ambas componentes cartesianas del círculo valen  $\cos(45)=\sqrt{2}/2$ .

La sumatoria de los polinomios de la curva de Bezier para  $n=3$ :

$$C(u,P)=u^3P_3-(u-1)^3P_0+3u(u-1)^2P_1-3u^2(u-1)P_2 \quad \text{Ec (3)}$$

Sustituyendo para  $u=1/2$ :

$$C\left(\frac{1}{2}, P\right) \rightarrow \frac{P_0}{8} + \frac{3 \cdot P_1}{8} + \frac{3 \cdot P_2}{8} + \frac{P_3}{8} \quad \text{Ec(4)}$$

Resolviendo para  $k=P_2$  en  $P_x$ :

$$\frac{P_{x0}}{8} + \frac{3 \cdot P_{x1}}{8} + \frac{3 \cdot k}{8} + \frac{P_{x3}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Ec(5)}$$

entonces

$$k = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \quad \text{Ec(6)}$$

#### Cálculo del error máximo

El radio aproximado por  $C(u)$  para cualquier valor de la variable paramétrica  $u$  es:

$$\rho(u) = \sqrt{C(u, P_y)^2 + C(u, P_x)^2} \quad \text{Ec (7)}$$

Para

$$\frac{d}{dx} \rho(u) = 0 \quad \text{Ec (8)}$$

Resolviendo el máximo/mínimo:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} u_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \quad \text{Ec (9)}$$

Por lo que el máximo error radial en esta aproximación es de

$$\varepsilon = \rho(u_1) - 1 = 2.725 \times 10^{-4} \quad \text{Ec (10)}$$

Esto es, el error radial en esta aproximación es de 0.02725% del radio del círculo.

### Transiciones propuestas

Para la modificación de forma de la transición se determinaron posiciones de los puntos de control {P} en los extremos, desde la posición del ajuste circular hasta un valor de  $2 \frac{1}{2}$  el valor del espesor  $e$ . Este valor límite concuerda con los utilizados en la industria de la fundición y será utilizado en trabajos posteriores a éste para la validación práctica de la forma. En la figura 5 se marcan las posiciones de los puntos de control. Los puntos de control interiores (0,10k) y (10k,0) permanecen fijos en todos los casos (ecuación 6). El cuadro experimental se muestra en la tabla II.

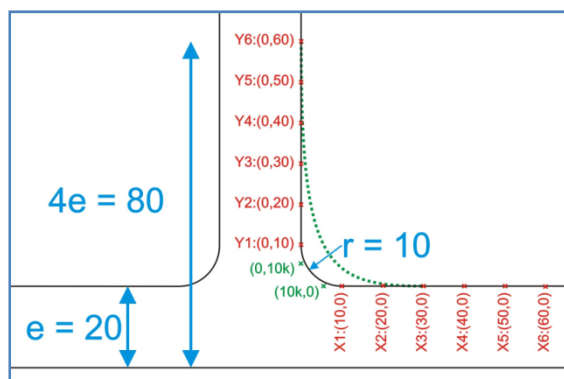


Figura 5.-Posición de los puntos de control para la generación de la curvatura. En verde punteado se muestra el caso X3Y6: {(0,60), (0,10k), (10k,0), (30,0)}.

Tabla II. Cuadro experimental						
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X1	X1Y1	X1Y2	X1Y3	X1Y4	X1Y5	X1Y6
X2	X2Y1	X2Y2	X2Y3	X2Y4	X2Y5	X2Y6
X3	X3Y1	X3Y2	X3Y3	X3Y4	X3Y5	X3Y6
X4	X4Y1	X4Y2	X4Y3	X4Y4	X4Y5	X4Y6
X5	X5Y1	X5Y2	X5Y3	X5Y4	X5Y5	X5Y6
X6	X6Y1	X6Y2	X6Y3	X6Y4	X6Y5	X6Y6

El cambio de curvatura de transición provoca un aumento de área de la sección transversal, y por lo tanto la cantidad de material (y en consecuencia costo de producción). La tabla III muestra los valores de área para cada uno de los casos de análisis.

El valor de área mínimo es  $8,252.27 \text{ mm}^2$ . El valor máximo de  $8,766.92 \text{ mm}^2$ , lo cual significa un aumento del 6.24% de material en los casos extremos.

Tabla III. Valores de área ( $\text{mm}^2$ ) de la sección transversal para cada experimento						
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X1	8252	8279	8305	8332	8358	8385
X2	8279	8315	8352	8389	8423	8460
X3	8305	8352	8399	8445	8492	8536
X4	8332	8389	8445	8502	8557	8616
X5	8358	8423	8492	8557	8626	8691
X6	8385	8460	8536	8616	8691	8767

El caso X1Y1 ajusta al perfil circular.

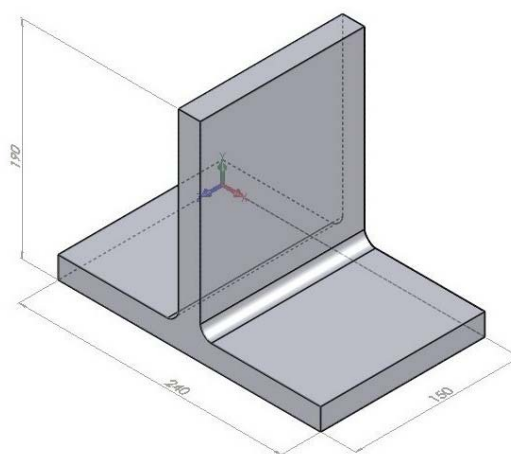


Figura 6.-Dimensiones de diseño del perfil 3D de la unión T de prueba.

## ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO

La discretización se realizó empleando una geometría construida en un ambiente de CAD 3D para usar un mallado con elementos hexaédricos.

### Variables tecnológicas

El material seleccionado para la simulación es hierro fundido nodular comercial. Los valores de Poisson, el módulo de elasticidad y la densidad se muestran en la tabla X.

Tabla IV. Datos usados en el programa de FEM.	
Tipo de análisis	Estático
Tipo de elemento	Hexaedro de 8 nodos
Número de elementos	6141
Número de nodos	9212
Coefficiente de Poisson.	0.33
Módulo de elasticidad (GPa)	125
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	7200

### Condiciones frontera

Los grados de libertad para la pared lateral derecho son cero; en la pared lateral izquierda están restringidos en el plano YZ como se muestra en la figura 7. La carga (0.667 MPa) actúa uniformemente distribuida sobre la superficie desde la cúspide hasta 30mm.

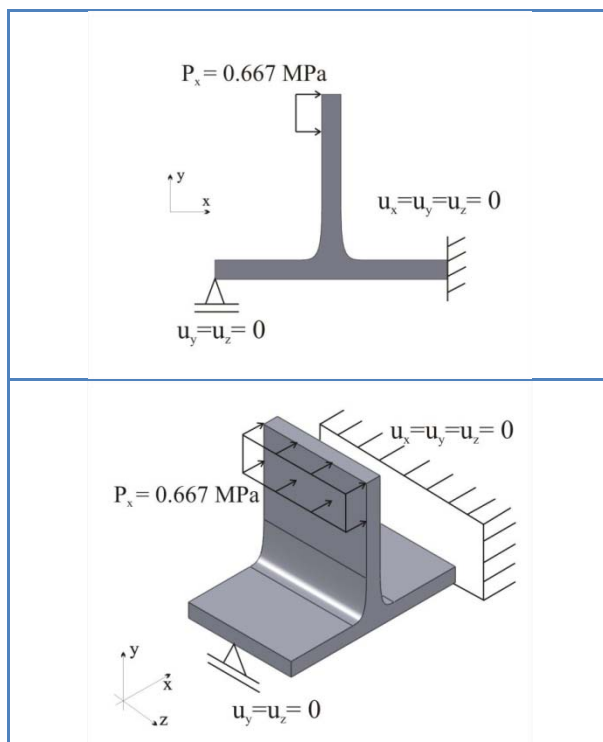


Figura 7.-Condiciones frontera para el análisis FEM.

## RESULTADOS

La figura 8 presenta la distribución de esfuerzos von Mises en la unión radial y en la cual se observa una concentración de esfuerzos en el cambio de sección con un  $\sigma_{\max} = 44\text{N/mm}^2$ . El área de la sección transversal es de  $8,250\text{ mm}^2$ .

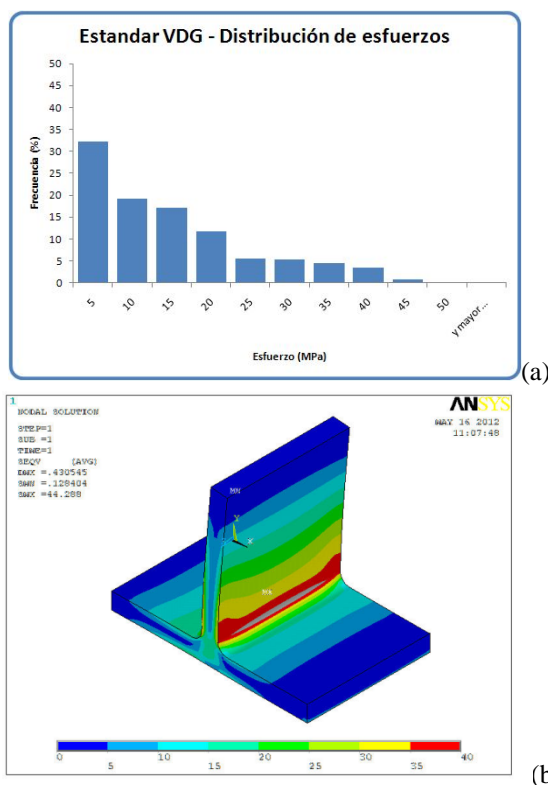


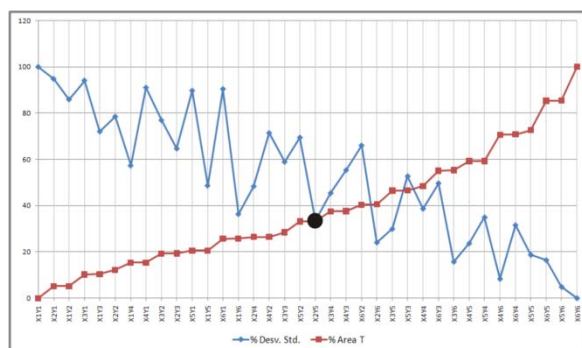
Figura 8 Distribución de esfuerzos de la unión T para el estándar VDG. (a) Distribución de esfuerzos y (b) gráfico tridimensional de colores de dicha distribución.

La tabla V muestra los valores de esfuerzo máximo para el resto de los casos. La tabla VI los valores de la desviación estándar de estas distribuciones.

Tabla V. Valores de esfuerzo máximo de la simulación FEM para cada experimento						
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X1	44.28	38.59	35.64	33.98	32.43	30.99
X2	44.90	38.37	35.34	33.71	32.17	30.64
X3	45.69	39.28	35.37	33.55	31.96	30.34
X4	46.14	39.21	35.56	33.37	31.76	30.15
X5	44.92	39.09	35.54	33.23	31.58	30.00
X6	45.90	39.55	35.54	33.11	31.48	29.84

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
<b>X1</b>	10.259	9.923	9.593	9.242	9.035	8.741
<b>X2</b>	10.135	9.747	9.416	9.028	8.671	8.449
<b>X3</b>	10.118	9.709	9.280	8.958	8.589	8.250
<b>X4</b>	10.045	9.577	9.195	8.797	8.440	8.074
<b>X5</b>	10.014	9.531	9.132	8.708	8.322	7.991
<b>X6</b>	10.031	9.449	9.059	8.628	8.267	7.875

Con los valores de las tablas III y VI se construyó la gráfica de la figura 9, en donde se relaciona el valor del área de la sección transversal y la desviación estándar de la distribución de esfuerzos. El punto de cruce marca el caso en donde hay un aumento de área (y por lo tanto de material) con la menor dispersión de esfuerzos en el componente. Este caso es el X2Y5 marcado también en las tablas V y VI.

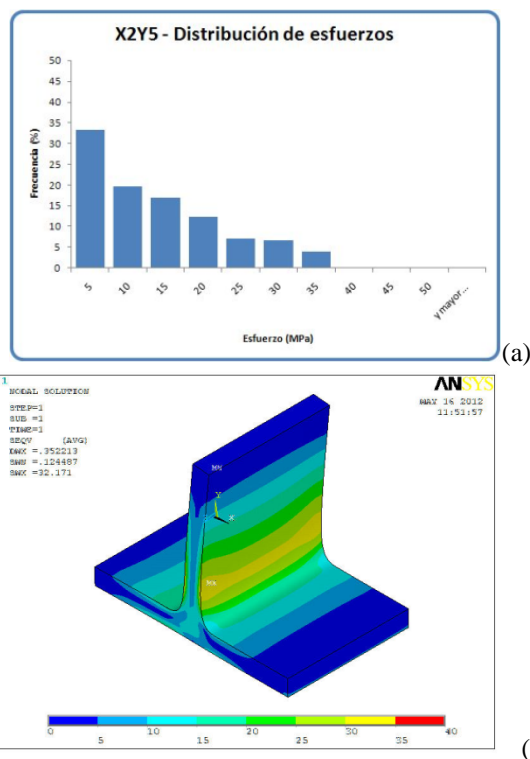


**Figura 9.** Relación entre la desviación estándar de esfuerzos y el área del perfil de la unión T para cada simulación. El punto negro marca el mejor caso.

La figura 10 presenta la distribución de esfuerzos von Mises en la unión X2Y5 y en la cual se observa una concentración de esfuerzos en el cambio de sección con un  $\sigma_{\max} = 32.17 \text{ N/mm}^2$ . El esfuerzo promedio es de  $\sigma_{\text{prom}} = 11.027$ . El área de la sección transversal es de  $8,423 \text{ mm}^2$ .

Comparando los resultados de tabla para la geometría del estándar VDG (figura 8) y el caso encontrado X2Y5 (figura 10), puede verse que la razón de reducción del esfuerzo es de 28% y el aumento de masa de 2.07%.

En la figura 11 se muestran los cambios geométricos en la zona crítica por cada modificación de curvatura para algunos casos. Nótese la continuidad geométrica suave provocada por el reposicionamiento de los puntos de control {P}.



**Figura 10.** El mejor caso de la unión T (X2Y5) según el criterio mostrado en la figura 9. (a) distribución de esfuerzos y (b) gráfico tridimensional de colores de dicha distribución.



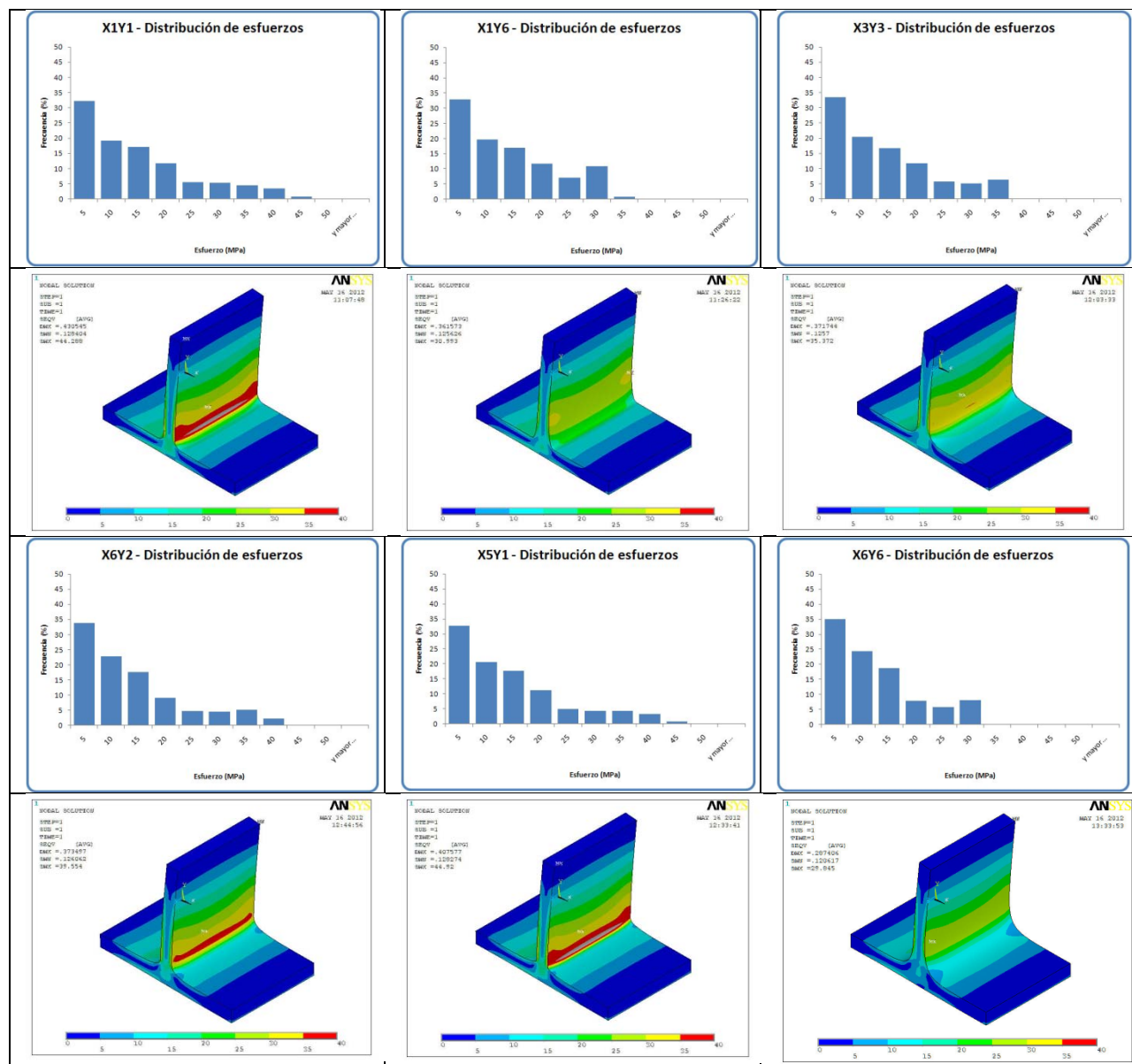


Figura 11 Distribución de esfuerzos de la unión T para varios casos.

## CONCLUSIONES

Se propusieron ecuaciones de curvaturas de transición en la unión T con mejor desempeño que la radial. Estas curvas conservan las restricciones de entrada de tener continuidad geométrica, aproximar circular con error razonable y tener la capacidad de modificar la curvatura sin elevar el grado del polinomio.

Para cada caso se estimó la distribución de los esfuerzos mediante una simulación de elemento finito (ver figura 123). Se encontró el caso óptimo en función del incremento de material contra la distribución de esfuerzos (ver figura9).

Para el caso mejor, el aumento de material es del 2.07%, lo cual significa una mejoría de desempeño con un mínimo de aumento de material de producción.

Es deseable que los modelos de componentes de maquinaria contengan matemática de curvas y superficies libres para obtener una distribución uniforme mejorada de esfuerzos.

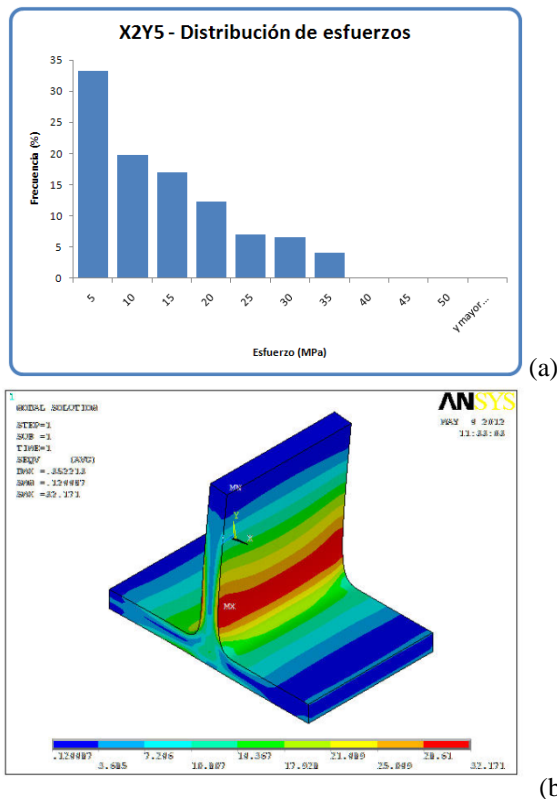


Figura 12.- (a) Histograma y (b) gráfico tridimensional de colores de la distribución de esfuerzos de la unión T para el mejor caso X2Y5.

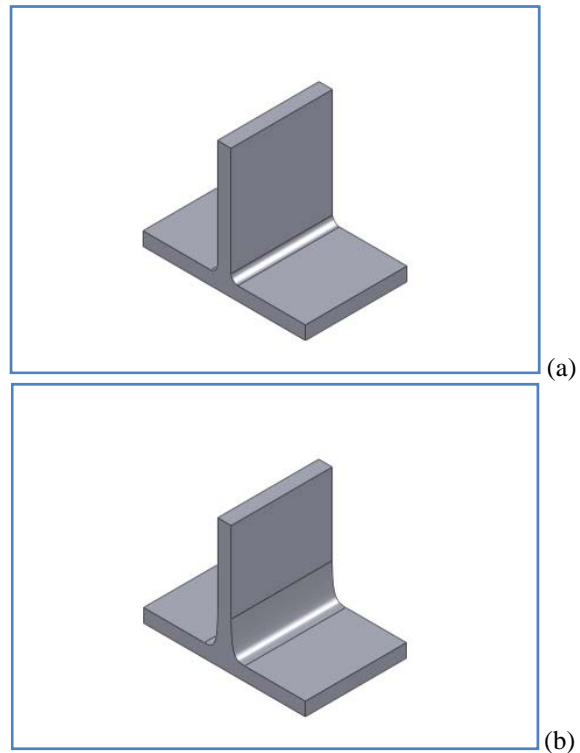


Figura 13.- Modificación geométrica mejorada. (a) Ajuste circular y (b) criterio de mejor distribución de esfuerzos del caso X2Y5.

El presente estudio contempla solamente la mejora en la distribución de esfuerzo y no las condiciones de manufactura impuestas por el diseño resultante.

## RECONOCIMIENTOS Y EQUIPO UTILIZADO

El presente trabajo fue realizado como parte del proyecto de investigación 103.5-11-6844 UANL-CA-166 patrocinado por SEP-PROMEP. Se utilizó el equipo de las instalaciones del Departamento de Mecatrónica de la FIME-UANL:

- Licencia de software ANSYS v.11
- MathCAD r14
- SolidWorks v2011
- Equipo de cómputo PC DELL Precision M70, 1.32GHz, 2 GB RAM y Disco Duro de 80 GB.

Los resultados de este trabajo han sido implementados con éxito en la empresa de fundición alemana dedicada a la fabricación de máquinas Heidenreich&Harbeck ([www.hh-moelln.de](http://www.hh-moelln.de)), la cual tiene un convenio de cooperación con la Universidad Técnica de HamburgHarburg ([www.tuhh.de](http://www.tuhh.de)), Alemania, en donde los autores tuvieron estancia académica.



## REFERENCIAS

- [BEND03] Bendsøe, M.P., Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, Berlin (2003)
- [ENGE96] Engeln-Müllges. *Numerik Algorithmen*. VDI Verlag, 1996.
- [FARI97] Farin, G. *Curves and surfaces for CAGD*. Academic Press, 1997.
- [LOPE01a] López, E., Colás, R., Ramírez, F., Rall, K. Maquinado de una sucesión de curvas. *Revista Ingenierías* Vol. IV, No. 11, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Abril-Junio 2001.
- [MORR72] Morris, A. J. (1972), *Structural Optimization by Geometric Programming*, *International Journal of Solids and Structures*, 8, pp. 847-864.
- [PEDE82] Pedersen, P. and C.L. Laursen, Design for Minimum Stress Concentration by Finite Elements and Linear Programming. *Journal of Structural Mechanics*, 1982-83, 10:375-391.
- [PETE96] Petersson, J.: On stiffness maximization of variable thickness sheet with unilateral contact. *Q. Appl. Math.* 54, 541-550 (1996)
- [PIEG97] Piegel, Les *The NURBS Book*. Springer Verlag, 1997.
- [RAMI01a] Ramírez, F. "Validating of optimization models for the Bio-Cast-Design". Master Thesis, Technische Universität Hambrug-Harburg, 2001.
- [RAMI01b] Ramírez, F., "Konstruktionselemente in grossen Sandgussteilen". Interner Bericht, Technische Universität Hambrug-Harburg, 2001.
- [RAMI04] Ramírez, F., López, E. Ortiz, U. "Diseño óptimo de elementos mecánicos usando algoritmos de crecimiento biológico". *Revista Ingenierías* Vol. VII, No. 22, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Enero-Marzo 2004.
- [REUT00] Reuter R, Hoffmann R (2000) *Bewertung von Berechnungsergebnissen mittels Stochastischer Simulationsverfahren*, VDI-Berichte Nr. 1559, 275-297
- [SCHM01] Schmidt, Th., "Kerbwirkung in rotationssymmetrischen Bauteilen". Interner Bericht, Heidenreich & Harbeck, 2001.
- [SCHU02] Schumacher A, Merkel M, Hierold R (2002a) Parametrisierte CAD-Modelle als Basis für eine CAE-gesteuerte Komponentenentwicklung, VDI Berichte 1701, 517-535
- [VAND99] Vanderplaats, G.N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*. 1999, Colorado Springs, CO: Vanderplaats Research & Development Inc.
- [VOND90] Vonderhagen H. (1990) *Konstruktionsrichtlinien zur Erhöhung der Gestaltsteifigkeit und -festigkeit von Eisengussbauteilen im Werkzeugmaschinenbau*. Bericht des Laboratoriums für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre. RWTH Aachen.
- [WANG02] Wang, D., Zhang, W. H., and Jiang, J. S. (2002), *Truss Shape Optimization with Displacement Constraints*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp. 3597-3612.
- [WASS84] Wassermann K. (1984) *Three-dimensional Shape-Optimization of Arch Dams with prescribed Shape-functions*. *Journal of Structural Mechanics* 11 Nr 4: 465-489
- [WECK95] Weck M, Asbeck J. (1995) Beanspruchungsgerechte Gestaltung von Gusschülen im Werkzeugmaschinenbau. VDI-Berichte 1173. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [WECK96] Weck M, Förtsch F. (1986) Spannungsoptimierung offener Ausrundungen in Maschinenbauteilen. *Konstruktion* 38 Nr 6: 213-219.
- [ZIEN67] Zienkiewicz, O.; R. Taylor. "The finite element method". Ed. Mc Graw Hill, 1967.