

# Økonometri II

## *Eksamensopgaver*

Aalborg University Business School  
Kasper Kann og Daniel Behr  
Student ID: 20134818 og 20195227  
januar 2022

# Contents

<b>1 Eksamensopgave 1</b>	<b>1</b>
1.1 Use the following data from your exercises:	2
1.2 Make sure that you first remove the seasonality (run an F-test to see if this is necessary). Make sure to write the regression equations and hypotheses when you perform these procedures.	2
1.3 Plot the series with and without seasonality on the same graph.	6
1.4 If there is a trend in the data, detrend the variables using HP-filter. Use the HP-filter with $\lambda = 1600$ . Don't forget to re-normalize the series	7
1.5 Explore the dynamic correlations (or cross-correlations) using real GDP as a reference variable. You can make a Table like the one in Lecture no. 2. Also, show the plots of dynamic correlations. The plots should clearly show all the statistically relevant lags.	9
1.6 Calculate cyclical volatility of your data.	12
1.7 Do a short and precise commentary on the correlations and volatility (e.g., which variable is the most and least volatile, which variables are procyclical and countercyclical, which variables lag and lead the business cycle, etc.).	13
<b>2 Eksamensopgave 2</b>	<b>14</b>
2.1 Mathematically derive the equation for Dicky-Fuller test.	15
2.1.1 A sequential ADF test on it. Please follow the sequential process (as shown in Pfaff's figure 3.3) carefully.	16
2.1.2 Cross-check your results with Philip-Perron test for unit root	19
2.1.3 Do you suspect your time series to be affected by a structural break? If yes, then perform a structural break unit root test using Zivot and Andrews test in R. Does your result regarding the unit root change or hold?	19
<b>3 Eksamensopgave 3</b>	<b>21</b>
3.1 Chose any timeseries of your choice:	22
3.2 1. Find the order of integration (by performing the unit root test - make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)	22
3.2.1 Inspektion af data	22
3.2.1.1 Seasonality og trend	22
3.2.2 Unit root tests	24
3.2.3 Seriekorrelation	26
3.3 2. Look at acf and pacf of you data and fit an ARIMA model.	27
3.3.1 Robusthedstest	29
3.3.1.1 Normality	29
3.3.1.2 Lags(Har vi rette antal lags med)	30
3.3.1.3 ARCH	30
3.4 3. Perform an in-sample forecast of your selected models	31
3.5 4. Compare your foretasted models with the performance of an AR(1) model.	32
3.6 5. Perform forecast evaluations of your models using:	32
3.6.1 Regression based method:	32
3.6.2 Mean square prediction error (MPSE)	33

3.6.3	Root Mean Square Error (RMSE)	33
<b>4</b>	<b>Eksamensopgave 4</b>	<b>34</b>
4.1	Theoretical part	35
4.1.1	Assume a simple ARDL (1,1) model as follows:	35
4.2	Empirical part	36
4.2.1	Choose time series data of your choice for at least 3 variables (preferably monthly/quarterly data without too many structural breaks)	36
4.2.2	Assume, you are interested in investigating the following relationship	36
4.2.2.1	Please briefly motivate (theoretically), why do you think this relation-ship should exist in your data?	36
4.2.3	1. Find the order of integration (by performing the unit root test -make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)	37
4.2.3.1	make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)	40
4.2.4	2. Perform both Engle-Granger test for cointegration and ARDL bounds test for cointegration. Is there cointegration in your data?	43
4.2.4.1	Engle-Granger	43
4.2.4.2	ARDL-bounds	44
4.2.5	3. What are the cointegration parameters	45
4.2.6	4. Assume, cointegration exists in your model, perform an error correction model. Please interpret the error correction model (i.e., interpret the coefficient on the error term, interpret the short-run and long-run relationships).	46
4.2.6.1	Speed of adjustment	48
4.2.7	Diagnostics:	50
4.2.7.1	Perform serial correlation and ARCH test	50
4.2.7.2	Test the model for the assumption of normality	51
4.2.7.3	Show parameter stability of your model using strucchange pack-age in R. Are your estimates reliable? Remember, strucchange package in R only recognises models coded using lm() function.	52
<b>5</b>	<b>Appendix</b>	<b>53</b>
5.1	HP-filter	53
5.2	Unit root cirkel	55
5.3	Antagelser	56
5.3.1	Gauss-Markov Antagelser - Unbiasedness of OLS	56
5.3.2	Asymptotiske egenskaber i OLS ved tidsserier	57
5.4	Teoretisk del	58
5.5	Basic concepts of time series data	59
5.5.1	Main components of time series data(seasonal, cyclical, trend, stochastic)	59
5.5.2	Random walk process	59
5.5.3	White Noise (Purely Random Process)	61
5.5.4	Stationarity	61
5.5.5	Trend- Versus Difference-Stationary Series	62

5.5.6	Unit root tests(Dickey Fuller and ADF)	62
5.6	Univariate time series analysis	64
5.6.1	Auto regressive (AR)	64
5.6.2	Moving average (MA)	64
5.6.3	Autoregressive-moving-average models (ARMA)	64
5.6.4	Autoregressive integrated moving average (ARIMA)	64
5.7	Introduction to multivariate Time Series Analysis	65
5.7.1	Cointegration	65
5.7.2	Error correction model(ECM)	65
5.7.3	Autoregressive distributed lag model(ARDL)	65
5.7.4	Engle-Granger Procedure	65
5.7.5	Vector autoregressive (VAR) modeller	66
5.7.6	Cholesky decomposition	68
5.8	Flere Begreber	69
5.9	Udledninger	74
5.9.1	Basale udledninger	74
5.9.2	Tidsserie-relevante udledninger	76
5.9.3	Moving Average Process	79
5.9.4	Autoregressive Processes	85
<b>6</b>	<b>Tau-værdier (Kritiske værdier)</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Sequential process</b>	<b>93</b>
<b>8</b>	<b>Litteraturliste</b>	<b>94</b>

# 1 Eksamensopgave 1

## Econometrics II: Time Series Data Homework and Reading Assignment #1

September 22, 2021

### 1 Reading Assignment

- Pages 3-21 and 53-59 in Pfaff
- Sections 1.1, 2.2 - 2.9, 3.1, 4.1 - 4.2 in Enders.

### 2 Homework Assignment

Note: If you prefer, feel free to re-write the questions in Danish and answer the assignment in Danish (Max 4 people per group!).

- Use the the following data from your exercises (If you are feeling adventurous, feel free to get newer QUARTERLY data )
  - Use data in constant prices (preferable).
    - \* Real GDP
    - \* Real house prices
    - \* Real stock of credit
    - \* Stock prices
- Make sure that you first remove the seasonality (run an  $F$ -test to see if this is necessary). Make sure to write the regression equations and hypotheses when you perform these procedures.
- Plot the series with and without seasonality on the same graph.

1

- If there is a trend in the data, detrend the variables using HP-filter. Use the HP-filter with  $\lambda = 1600$ . Don't forget to re-normalize the series.
- Explore the dynamic correlations (or cross-correlations) using real GDP as a reference variable. You can make a Table like the one in Lecture no. 2. Also, show the plots of dynamic correlations. The plots should clearly show all the statistically relevant lags.
- Calculate cyclical volatility of your data.
- Do a short and precise commentary on the correlations and volatility (e.g., which variable is the most and least volatile, which variables are procyclical and countercyclical, which variables lag and lead the business cycle, etc.).

2

### 1.1 Use the following data from your exercises:

Her har vi valgt dataet fra vores øvelser. Det indeholder:

- Real GDP
- Real House prices
- Real stock og credit
- Stock prices

### 1.2 Make sure that you first remove the seasonality (run an F-test to see if this is necessary). Make sure to write the regression equations and hypotheses when you perform these procedures.

Først prøver vi at undersøge om der er seasonality i vores data ved hjælp af dummy-variabel metoden. Metoden kan opstilles:

$$BNP_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$Huspriser_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$kredit_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$aktiepriser_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

#### Nulhypotese

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (\text{No seasonality})$$

#### Alternativ hypotese

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4 \neq 0 \quad (\text{Seasonality})$$

F-testen går ind og bruger dummy variablerne ved at sætte et enkelt kvartal til at være 1, fx.  $D_2 = 1$ , og sætter de resterende til at være 0. Det betyder at der kun fås data fra et bestemt kvartal i regressionen, og man kigger derfor på kvartalerne individuelt istedet for at kigge på den samlede tidsserie. Man kan derfor finde ud af om kvartalerne i sig selv er signifikante eller ej. Hvis de er signifikante, så vil der være seasonality i det pågældende kvartal.

Ved at plotte vores tidsserie kan vi se om der kan være en tendens til seasonality eller ej.

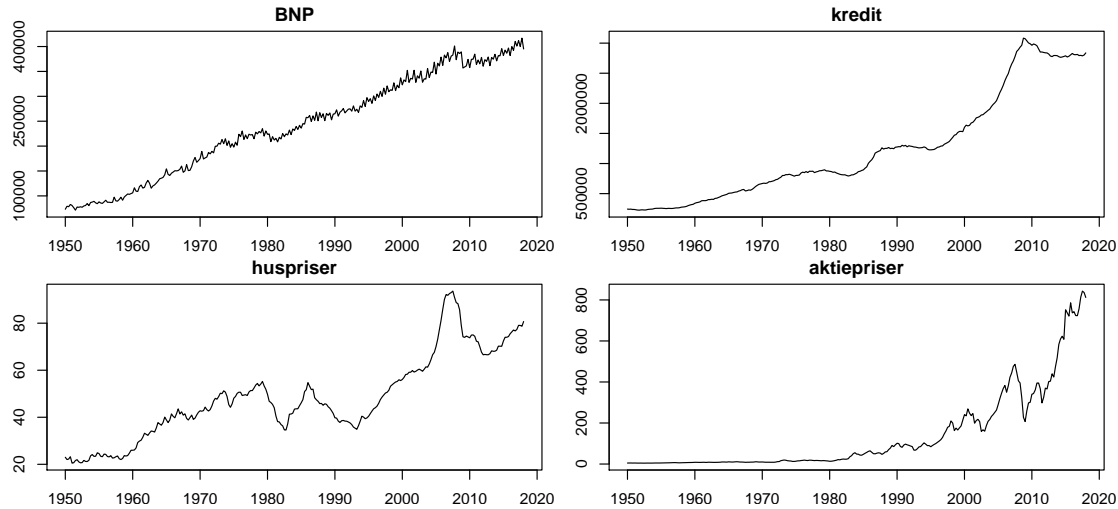


Figure 1: Plot af vores data

I figur 1 kan vi se alt vores data og inspicere det for seasonality. Umiddelbart kan det ikke ses, at der skulle være seasonality i andet end BNP. Dette vil vi dog teste yderligere med en F-test.

Kører F-test for alle variable:

Table 1: Linær regression med BNP

<i>Dependent variable:</i>	
BNP_ts	
BNP_q1	−8,861.92 (17,443.13)
BNP_q2	−3,495.05 (17,506.68)
BNP_q3	−9,262.14 (17,506.68)
Constant	245,469.00*** (12,379.09)
R <sup>2</sup>	0.001
Adjusted R <sup>2</sup>	−0.01
Residual Std. Error	102,080.60 (df = 269)
F Statistic	0.13 (df = 3; 269)

Note: \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Tabel 1 viser, at BNP ikke har nogle signifikante værdier, så er der ikke seasonality i vores data. Dette giver også mening, fordi vi i ikke har en økonomi, som er stærk præget af sæsoner. Et eksempel på dette kunne være et land, som afhænger meget af landbrug eller turisme. I tabellen er det estimatoren der står udenfor (−8,861.92), og standard fejlen der står i parantes (17,443.13), mens p-værdier er markeret med stjerner.

Table 2: Linæer regression med kredit

	<i>Dependent variable:</i>
	kredit_ts
kredit_q1	−2,491.25 (150,063.10)
kredit_q2	−18,603.02 (150,609.80)
kredit_q3	−12,516.77 (150,609.80)
Constant	1,243,937.00*** (106,497.20)
R <sup>2</sup>	0.0001
Adjusted R <sup>2</sup>	−0.01
Residual Std. Error	878,198.60 (df = 269)
F Statistic	0.01 (df = 3; 269)
<i>Note:</i> *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

Tabel 2 viser, at kredit har ikke nogle signifikante værdier, og der derfor heller ikke er seasonality i kredit. Hvis der skulle have været seasonality i kredit, så skulle der også have været seasonality i nogle af de variable, som kredit er korrelerede med. Det kunne fx. være BNP eller huspriser.

Table 3: Linæer regression med huspriser

	<i>Dependent variable:</i>
	huspriser_ts
huspriser_q1	−0.38 (3.06)
huspriser_q2	−0.68 (3.07)
huspriser_q3	−0.35 (3.07)
Constant	48.46*** (2.17)
R <sup>2</sup>	0.0002
Adjusted R <sup>2</sup>	−0.01
Residual Std. Error	17.90 (df = 269)
F Statistic	0.02 (df = 3; 269)
<i>Note:</i> *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

Tabel 3 viser, at huspriser har ikke nogle signifikante værdier, og derfor heller ikke har seasonality i sig. Man kunne argumentere for, at det muligvis er nemmere at sælge boliger om sommeren og der derfor kunne være tendens til seasonality, men dette kan dog ikke bevises empirisk, og det må derfor være så små stigninger, at de ikke er signifikante.



Table 4: Linæer regression med aktiepriser

	<i>Dependent variable:</i>
	aktiepriser_ts
aktiepriser_q1	4.26 (34.17)
aktiepriser_q2	−2.81 (34.30)
aktiepriser_q3	−2.84 (34.30)
Constant	139.30*** (24.25)
R <sup>2</sup>	0.0002
Adjusted R <sup>2</sup>	−0.01
Residual Std. Error	199.97 (df = 269)
F Statistic	0.02 (df = 3; 269)
<i>Note:</i>	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Til sidst kan vi i Tabel 4 se på aktiepriserne, at vi ikke har noget seasonality. Når man kigger på de generelle aktiepriser giver dette god mening. Hvis man skulle finde seasonality i aktier, så ville man skulle kigge på specifikke aktier hvis indkomst afhænger af sæsonindtjening.

Hvis vi havde haft seasonality kan vi bruge residualerne til at fjerne dette, og man ville kunne lave en sammenligning bagefter.

### 1.3 Plot the series with and without seasonality on the same graph.

Da vi ikke har seasonality i vores data, er dette lidt en hypotetisk opgave, men vi vil stadigvæk udføre den for alle vores variable.

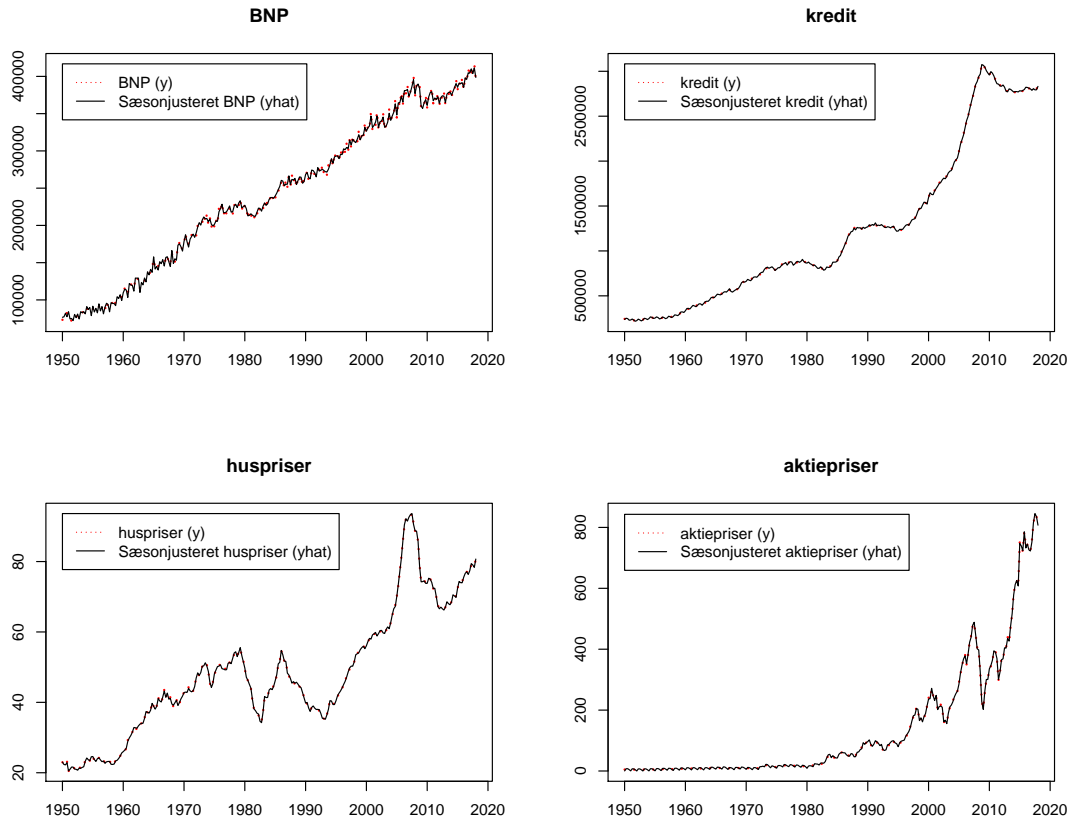


Figure 2: Plot af vores data uden/med sæsonjusteret variable

I figur 2 kan vi se, at den sæsonjusterede og den oprindelige data følger hinanden i alle tilfælde. Konklusionen må derfor være, at der ikke er seasonality i nogle af vores variable.

#### 1.4 If there is a trend in the data, detrend the variables using HP-filter. Use the HP-filter with $\lambda = 1600$ . Don't forget to re-normalize the series

Bare ved at se på vores plots fra tidligere opgaver, kan vi se, at de fleste variabler har en opadgående trend efter et vist tidspunkt. Vi vil derfor detrende med **HP-filteret**.

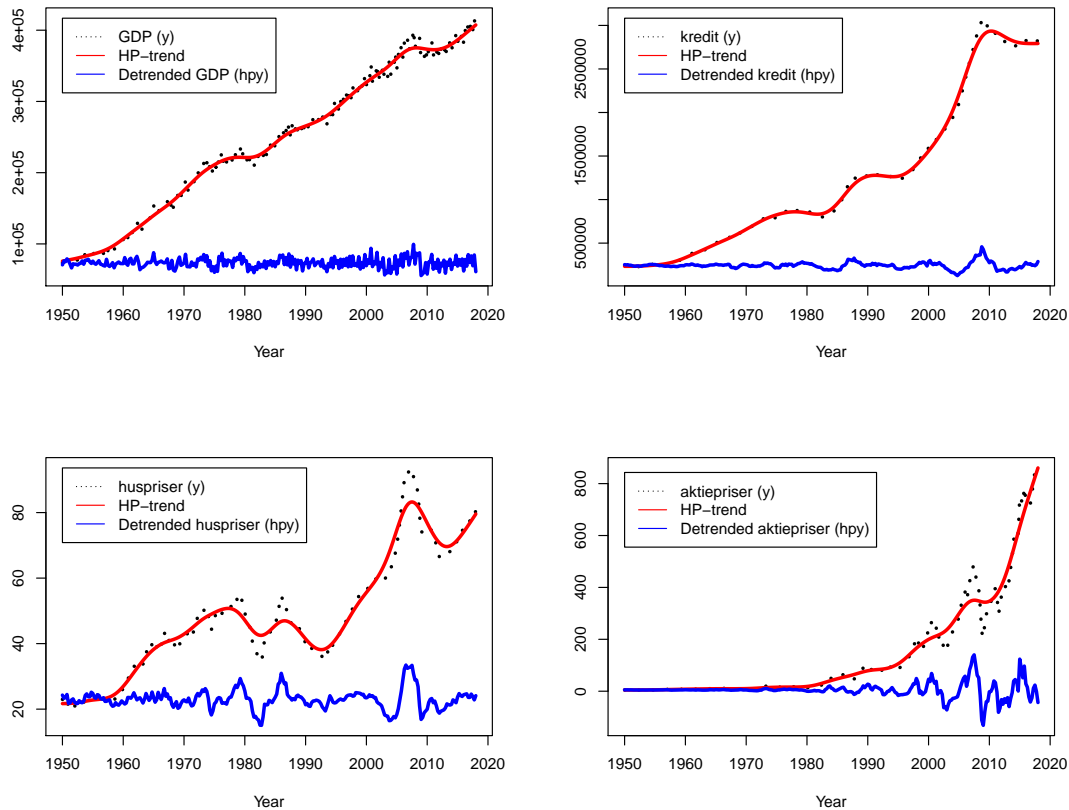


Figure 3: Normal data, data med hp-trend og detrended data

På figur 3 kan vi se, hvordan afvigelserne (de sorte prikker) svinger fra trenden (den røde) i den blå linje. Dette kan bedre vises, hvis vi laver 4 nye figurer, hvor vi laver trenden til en nullinje og undlader selve trend-linjen. Dette kan ses nedenfor:

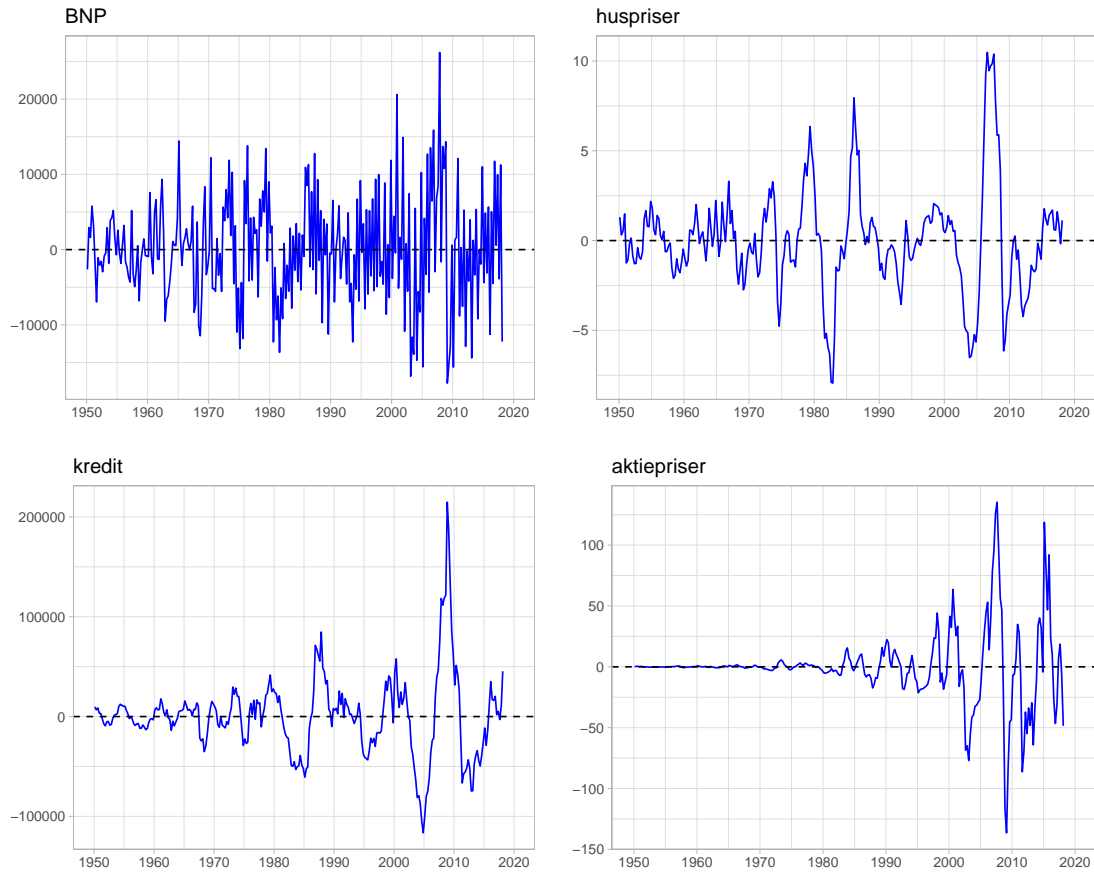


Figure 4: Cykliske afvigelser fra trenden(nullinjen)

På figur 4 har vi kun de cykliske udsving fra trenden. Her ser det ud til, at BNP har flere udsving end huspriser, kredit og aktiepriser, og derfor kan være mere volatil. Dog skal vi huske på, at BNP er en del af konjunkturcyklerne, mens huspriser, kredit og aktiepriser er en del af de finansielle cykler, som er 3-4 gange så lange som en konjunkturcyklen (Borio, 2012).

**1.5 Explore the dynamic correlations (or cross-correlations) using real GDP as a reference variable. You can make a Table like the one in Lecture no. 2. Also, show the plots of dynamic correlations. The plots should clearly show all the statistically relevant lags.**

Med krydskorrelationer kan vi se, hvilke variabler, der er afhængige af hinanden, og hvordan de opfører sig i forhold til hinanden. I denne opgave skal vi se, hvordan de er afhængige af BNP.

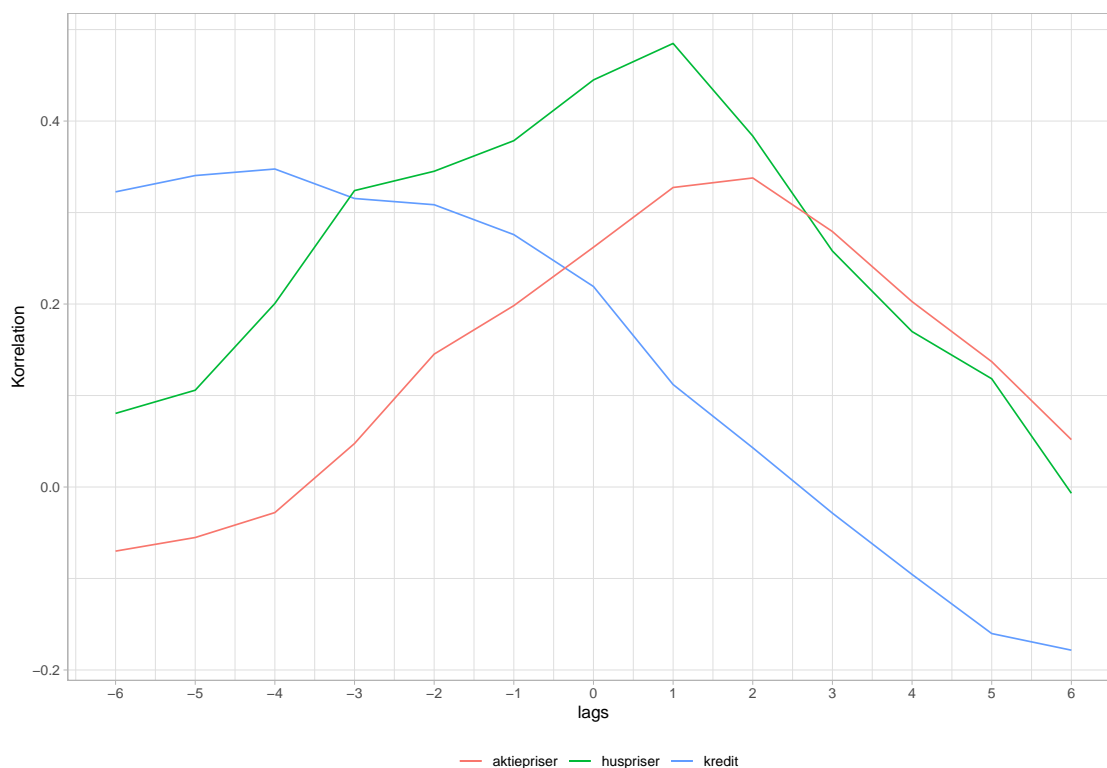


Figure 5: Krydskorrelation med BNP som referencevariabel

På figur 5 kan vi se, at BNP leder kredit ved lag -4, mens huspriser leder BNP ved lag 1 og aktiepriserne leder BNP ved lag 2.

Kredit reagerer altså et år (4 kvartaler) langsommere end BNP på stød til økonomien, mens BNP reagerer hhv. 1 og 2 kvartaler langsommere end huspriser og BNP.

De specifikke korrelationer kan ses på tabel 5 nedenfor:

Table 5: Krydskorrelation med BNP som referencevariabel

lags	kredit	huspriser	aktiepriser
-6	0.322624405026198	0.0804670507129494	-0.0700658363574013
-5	0.340445443068852	0.105807471254522	-0.0552092784555296
-4	0.347576928435119	0.200597558585477	-0.0279506342709945
-3	0.315365974117988	0.324016730440721	0.0475511435082158
-2	0.30855573762351	0.345145646223187	0.145257103812127
-1	0.275870708070284	0.378525660775729	0.198240312334703
0	0.219161104570844	0.444958892866889	0.262078851534217
1	0.112006483372774	0.484855699495344	0.327392278535095
2	0.0428805631214971	0.383645980149364	0.337795781593063
3	-0.0285672810062044	0.257949300288704	0.279232463256133
4	-0.0955701225755898	0.169916828419852	0.202644366328116
5	-0.160182622021407	0.118309996479215	0.137015383913197
6	-0.178363765944123	-0.00683764282901576	0.0518009882396847

Her kan vi se, som vi allerede har bekræftet, at det er ved de rød-markerede lags, der er størst korrelation mellem de forskellige variabel. Vi kan altså se at Kredit har størst korrelation ved -4 og -5 lags. Huspriser har størst korrelation ved 0 og 1 lag. Aktiepriser har størst korrelation med BNP ved 1 og 2 lags. Der tegner sig altså et mønster af, at Huspriser og aktiepriser korrelerer nogenlunde på samme tid mens Kredit reagerer 4 til 5 kvartaler langsommere end BNP. BNP “leder” altså kredit.

For at udpensle dette kan vi også prøve at plotte de cykliske bevægelser i figur 6 på næste side, så vi kan se, hvordan udsvingene fungerer og hvordan variablerne reagerer overfor hinanden:

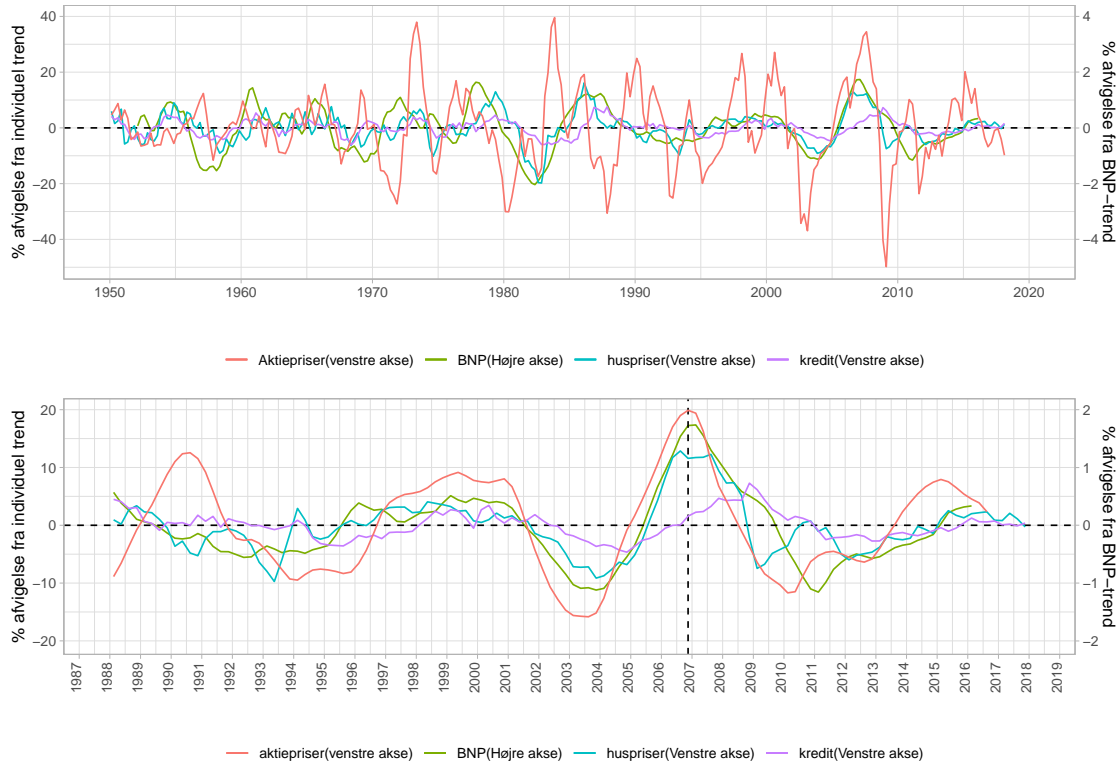


Figure 6: Cykliske afvigelser fra trenden

I figur 6 har vi i den øverste figur lavet et glidende gennemsnit af BNP for at mindske de mange cykliske udsving. Her er det svært at sammenligne variablene, fordi tidsperioden er lang. I den nederste figur tilføjer vi et glidende gennemsnit til aktiepriser for at gøre det endnu nemmere at sammenligne, hvordan de forskellige variable reagerer over for stød. Vi er ikke direkte interesseret i udsvingenes størrelse, så glidende gennemsnit vil ikke påvirke tidligere analyse fra krydskorrelationen i figur 5.

På figur 6 kan vi bekæfte, hvad vi allerede har set i tidligere krydskorrelationer. Aktiepriser og huspriser leder BNP, mens BNP leder kredit. Aktiepriser og huspriser reagerer altså på et stød 1-2 kvartaler hurtigere end BNP, mens Kredit reagerer 4-6 kvartaler langsommere end BNP.

## 1.6 Calculate cyclical volatility of your data.

Volatiliteten kan bruges til at beskrive, hvor følsomme vores variable er over for fx. stød til økonomien. Her vil jeg udregne volatiliteten på vores data på følgende måde:

### Absolute (cyclical) Volatility

Det er denne volatility der er vist i tabellen. Det er målt som en standard afvigelse af procentvise fluktationer omkring den langsigtede trend.

$$Volatility(x) = s.d.[(\frac{x_t - trend(x)_t}{trend(x)_t}) \cdot 100]$$

### Relative (cyclical) Volatility

Der er nogen forfattere der foretrækker denne form for Volatility.

$$Volatility(\frac{x}{y}) = (\frac{\ln(x)}{\ln(y)})$$

Opstiller en tabel i  $\mathbb{R}$ , hvor jeg også tilføjer krydskorrelationerne for lag [-1:1]

Table 6: Volatilitet og krydskorelation

Variabel	Volatilitet	Krydskorrelation med BNP		
		$x_{t-1}$	$x_t$	$x_{t+1}$
BNP	3.11	-0.061	1	-0.061
kredit	2.75	0.26	0.22	0.11
huspriser	5.37	0.38	0.44	0.48
aktiepriser	13.85	0.2	0.26	0.32

Dette viser hvad vi allerede har belyst. Nemlig at aktiepriser er det mest volatile, mens kredit er det mindst volatile. Umiddelbart er dette overraskende, da man kunne tro, at BNP netop var det mindst volatile.



**1.7 Do a short and precise commentary on the correlations and volatility (e.g., which variable is the most and least volatile, which variables are procyclical and countercyclical, which variables lag and lead the business cycle, etc.).**

Som vi allerede har nævnt ovenfor, så har BNP en tendens til at lede Kredit, mens Aktiepriser og huspriser bliver påvirket på nogenlunde samme tid som BNP, hvoraf vi ikke mener, at de leder hinanden. Korrelationerne kan ses i tabel 5. Vi kan også i tabellen se, at Aktiepriser og huspriser er procykliske, mens kredit er countercyklisk det første år, men så bliver procyklisk. Det ser altså ud til, at kredit kan skifte lidt. Vi kan også i tabel 6 se, at aktiepriser og huspriser har den største volatilitet, hvilket betyder, at de er mere følsomme overfor udsving end de to andre variable.

## 2 Eksamensopgave 2

### Econometrics II: Time Series Data Homework and Reading Assignment #2

September 22, 2021

#### 1 Reading Assignment

- Sections 2.8 - 2.12 in Enders.

#### 2 Homework Assignment

- Mathematically derive the equation for Dicky-Fuller test.
- Take one of the time series from homework assignment #1 and run:
  - 1. A sequential ADF test on it. Please follow the sequential process (as shown in Pfaff's figure 3.3) carefully.
  - 2. Cross-check your results with Philip-Perron test for unit root
  - 3. Do you suspect your time series to be affected by a structural break? If yes, then perform a structural break unit root test using Zivot and Andrews test in R. Does your result regarding the unit root change or hold?
  - Note: Make sure you describe the equation along with the null hypotheses of these tests.

You can also perform the above tasks on any time series data of your choice!

## 2.1 Mathematically derive the equation for Dicky-Fuller test.

Vi starter med at opskrive en variable  $Y_t$  på en AR(1) process

$$Y_t = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Så trækkes  $Y_{t-1}$  fra på begge sider

$$Y_t - Y_{t-1} = \theta Y_{t-1} - Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi trækker den nutidige værdi fra den tidligere værdi for at få  $\Delta Y_t$ , og  $Y_t$  sættes uden for parentes

$$\Delta Y_t = (\theta - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi kalder  $(\theta - 1)$  for  $\pi$  for at generalisere.

$$\Delta Y_t = \pi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvor vi antager at  $\epsilon$  følger en white noise process.

$$\epsilon \sim IID(0, \sigma^2)$$

Der gælder forskellige ting for  $\theta$  :

Hvis  $|\theta| < 1$  så er det en stationær process

Hvis  $|\theta| = 1$  så er der unit root i tidsserien, og processen er ikke stationær

Hvis  $|\theta| > 1$  så eksplodere processen

Når vi laver en unit root test, så bruger vi

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \theta = 1 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese:**

$$H_1 : \theta < 1 \quad (\text{No unit root})$$

Grunden til vi tester om theta er mindre end 1 er, at det kun er der hvor det er en stationær process. Vi kan altså ikke bruge den alternative hypotese at theta er forskellige fra 1.

Efter omskriv så kan vi opskrive vores hypoteser på følgende måde

**Nulhypotese:**

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese**

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Der gælder for Dickey-Fuller testen at hvis  $\pi = 0$  så er  $\theta = 1$ , og det betyder at der er unit root i vores tidsserie. Vi skal ikke bruge vores almindelige t-værdier, men derimod sammenligne dem med DF(tau)-statistikkerne som kan ses i appendix.

**2.1.1 A sequential ADF test on it. Please follow the sequential process (as shown in Pfaff's figure 3.3) carefully.**

I denne opgave bruger vi BNP, som vi også har brugt tidligere.

Her skal vi først teste vores data for unit root. Dette gøres fordi, at unit root kan give problemer i ens modeller, da det gør det sværere at forudsige fremtidige bevægelser. Unit root er en tilfældig trend i en tidsserie, som også bliver kaldt "random walk with drift".

En ADF-test er blot en videreudvikling af DF-testen, og tester også for unit root i ens data. Hvis T-værdierne fra ADF er mindre end tau værdierne, så kan man forkaste  $H_0$ .

Opstiller hypoteser

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

**Den alternative hypotese:**

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Estimerer vores regressioner:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{No intercept, no trend})$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{Intercept, no trend})$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{Intercept, trend})$$

Table 7: Regression uden intercept og trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
L(BNP_ts, 1)	0.0032937	0.0024327	1.353927	0.1768878

**Når  $T < \text{Tau}$ , så kan vi forkaste  $H_0$**

**Når  $T > \text{tau}$ , så kan vi ikke forkaste  $H_0$**

Her kan vi se, at pga. vores T værdi større end -1.95(jf. appendix) på et 5% sigfikansniveau, kan vi ikke afvise vores nulhypotese. Det tyder derfor på, at der er unit root i vores regression uden intercept og uden trend.

Table 8: Regression med intercept uden trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2606.9064523	1620.6080890	1.6085977	0.1088730
L(BNP_ts, 1)	-0.0059439	0.0062339	-0.9534896	0.3411949

Når  $T < \text{Tau}$ , så kan vi forkaste  $H_0$

Når  $T > \text{tau}$ , så kan vi ikke forkaste  $H_0$

Her kan vi se, at vi stadigvæk ikke kan afvise nulhypotesen, da vores T-værdi stadigvæk er større end vores tau værdi -2.89 på et 5% signifikansniveau.

Table 9: Regression med intercept og trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	25881.2431844	3321.8685952	7.791170	0
L(BNP_ts, 1)	-0.3788454	0.0480916	-7.877578	0
trend(diff(BNP_ts))	1934.9044044	247.8154911	7.807843	0

Når  $T < \text{Tau}$ , så kan vi forkaste  $H_0$

Når  $T > \text{tau}$ , så kan vi ikke forkaste  $H_0$

Her har vi en T-værdi, der er mindre end vores tau-værdi -3.45 Derfor kan nulhypotesen afvises på et 5% signifikansniveau, og det tyder på, at der i regressionen med intercept og trend, ikke er unit root.

Så gør vi det samme, men nu med  $\Delta BNP$ . Opstiller hypoteser

**Nulhypotesen**

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

**Den alternative hypotese**

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Plotter først vores data for at se, om det ser stationært ud:

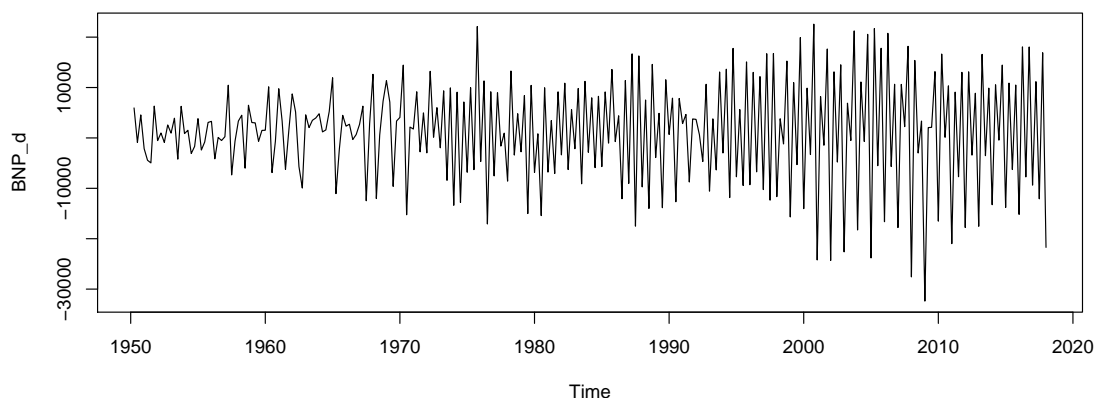


Figure 7: Plot af DeltaBNP

I figur 7 kan vi se, at vores data har nogle få store udsving, men at det ellers ser rimelig stationært ud. Dog tester vi yderligere ved hjælp af regressioner, ligesom vi gjorde tidligere.

Table 10: DeltaBNP-Regression uden intercept og trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
L(BNP_d, 1)	-1.697383	0.0442467	-38.36178	0

Her kan vi afvise nulhypotesen, fordi T-værdien er mindre end tau-værdien. Det tyder derfor ikke på, at der er unit root i vores første difference af BNP uden intercept og trend.

Table 11: DeltaBNP-Regression med intercept uden trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2081.148555	445.9826255	4.666434	4.8e-06
L(BNP_d, 1)	-1.721867	0.0429583	-40.082236	0.0e+00

Igen kan vi kigge på vores T-værdier og afvise unit root i første difference af BNP med intercept uden trend.

Table 12: DeltaBNP-Regression med intercept og trend

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2069.2803868	895.6673205	2.3103225	0.0216301
L(BNP_d, 1)	-1.7218712	0.0430394	-40.0068239	0.0000000
trend(BNP_d)	0.3466849	22.6755436	0.0152889	0.9878130

Til sidst kan vi afvise unit root i første difference af BNP med trend og intercept. Dog tyder det på, at der er både trend og intercept i vores data, da disse værdier ikke kan afvises på et 5% signifikans niveau jf. vores tau-værdi fra appendix:  $-3.45$

Ved at tage første difference og tilføje trend og intercept, har vi fjernet alt unit root i BNP, og vi kan derfor kalde BNP for en  $I(1)$ -process.

### 2.1.2 Cross-check your results with Philip-Perron test for unit root

Da vi gerne vil krydstjekke vores resultater fra tidligere, kan vi bruge Philip-Perron testen. I  $\mathbb{R}$  er **nulhypotesen for PP testen givet ved:**

$$H_0 : \theta = 1 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese:**

$$H_1 : \theta < 1 \quad (\text{No unit root})$$

Det betyder at hvis vi kan afvise  $H_0$  så er der IKKE unit root i vores tidsserie, og hvis vi IKKE kan forkaste  $H_0$  så kan der være unit root i vores tidsserie i levels.

Table 13: PP-test for BNP og DeltaBNP

pvalue	Variabel
0.01	BNP_ts
0.01	BNP_d

Da vi får en p-værdi på 0.01 for begge, kan vi forkaste på en 5% signifikansniveau, at det skulle være unit root i vores data. Vores data er altså stationært. Vi ved at PP-testen medtager intercept og trend, og vores resultater hænger derfor sammen med ADF-testen, som vi kørte tidligere.

### 2.1.3 Do you suspect your time series to be affected by a structural break? If yes, then perform a structural break unit root test using Zivot and Andrews test in R. Does your result regarding the unit root change or hold?

Et strukturelt brud er når tidsserien ikke befinder sig omkring samme gennemsnit gennem hele serien. Så hvis der fx. er et stort spring/stød et sted i tidsserien, kan det give mening at teste de to forskellige "perioder" med hver deres gennemsnit. I denne test bruger vi både intercept og trend, da vi tidligere har fundet, at dette var mest optimalt for vores tidsserie.

za-testen giver "En potentiel break position" ved observation nr. 118.

Ligesom ved det almindelige plot kan vi se, at der er et potentielt break omkring kvartal (år 1979, 2. kvartal). Det kan faktisk også ses et break omkring finanskrisen, men za-testen kan kun finde ét breakpoint.

Vi får en T-statistik på  $-4.6565$ , hvor den kritiske værdi for et 10% signifikansniveau er  $-4.82$ . Vi kan altså på et 10% signifikansniveau afvise unit root i vores data. Så vi kan godt have en stationær process, selvom der er strukturelle breaks i vores tidsserie.

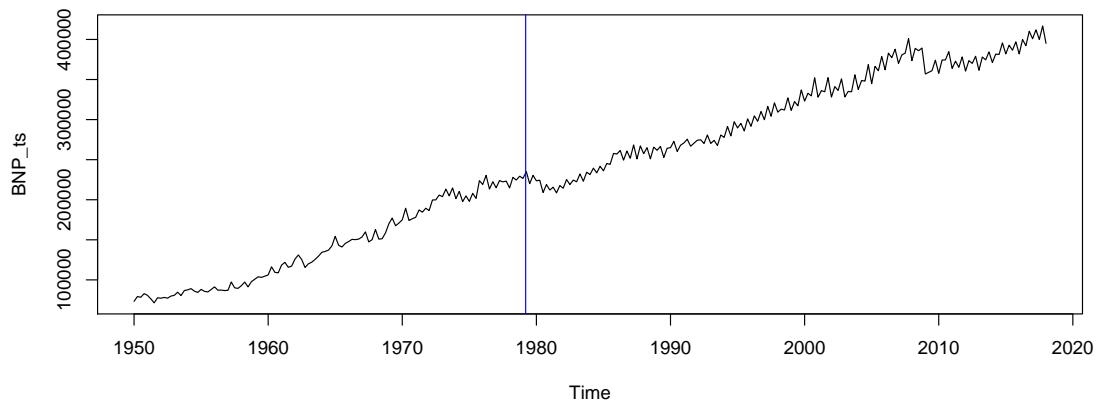


Figure 8: Plot af potentiel break i vores tidsserie

Her kan vi ved den blå linje se, at der sker en skift i gennemsnittet for vores data. Det får altså et stød nedad og forbliver nede i det “niveau”. Det er derfor et strukturel break.



### 3 Eksamensopgave 3

#### Econometrics II: Time Series Data Homework and Reading Assignment #3

October 12, 2021

##### 1 Reading Assignment

- Section 2.9 Enders
- Chapter 3 in Enders.
- Chapter 1 in Pfaff.

##### 2 Homework Assignment

- Choose any time series of your choice (preferably monthly/quarterly data without too many structural breaks)
- Perform the following:
  - 1. Find the order of integration (by performing the unit root test - make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)
  - 2. Look at `acf` and `pacf` of your data and fit an ARIMA model. Also, check `auto.arima`, what does it suggest to be the best model. You should select a few competing models (at least 2 models).
    - \* Make sure your models clear the diagnostic tests before using them for forecasting.
  - 3. Perform an in-sample forecast of your selected models

1

- 4. Compare your foretasted models with the performance of an AR(1) model.
- Perform forecast evaluations of your models using:
  - \* Regression based method
  - \* Mean square prediction error (MPSE)
  - \* Root Mean Square Error (RMSE)

Note: Please include your equations and formulae of your methods (whenever applicable)

2

### 3.1 Chose any timeseries of your choice:

Vi vælger igen BNP\_ts, som vi også brugte i Eksamenssæt 2.

### 3.2 1. Find the order of integration (by performing the unit root test - make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)

#### 3.2.1 Inspektion af data

Først kan vi lave en inspektion af vores data for at se, hvordan det ser ud. Om det ser ud til, at der kunne være seasonality, unit root, struktural breaks eller måske en opadgående trend.

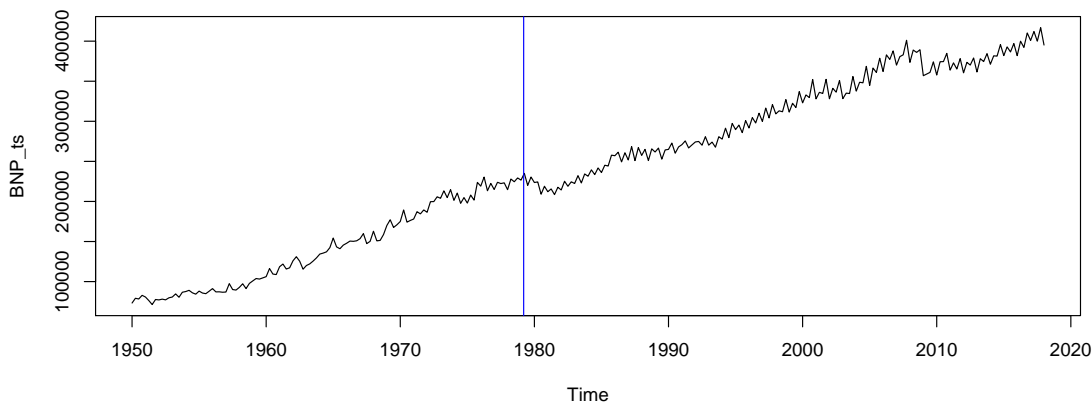


Figure 9: Plot af potentiel break i vores tidsserie

Her kan vi se, at der måske er en trend, og måske et struktural break omkring 1979.

#### 3.2.1.1 Seasonality og trend

Inden vi laver unit root tests, vil vi først teste for seasonality, så vi er sikre på, at dette ikke er til stede. Dette gøres ved at bruge dummy-variabel metoden:

$$BNP_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

**Nulhypotese**

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (\text{No seasonality})$$

**Alternativ hypotese**

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4 \neq 0 \quad (\text{Seasonality})$$

F-testen går ind og bruger dummy variablerne ved at sætte et enkelt kvartal til at være 1, fx.  $D_2 = 1$ , og sætter de resterende til at være 0. Det betyder at der kun fås data fra et bestemt kvartal i regressionen, og

man kigger derfor på kvartalerne individuelt istedet for at kigge på den samlede tidsserie. Man kan derfor finde ud af om kvartalerne i sig selv er signifikante eller ej. Hvis de er signifikante, så vil der være seasonality i det pågældende kvartal.

Table 14

	<i>Dependent variable:</i>
	BNP_ts
q1	−8,861.918 (17,443.130)
q2	−3,495.046 (17,506.670)
q3	−9,262.135 (17,506.670)
Constant	245,469.000*** (12,379.090)
Observations	273
R <sup>2</sup>	0.001
Adjusted R <sup>2</sup>	−0.010
Residual Std. Error	102,080.600 (df = 269)
F Statistic	0.130 (df = 3; 269)
<i>Note:</i> *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

I tabellen kan man først se estimaterne, derefter kan standardafvigelsen ses i parantesen og til sidst kan man se “p-værdierne” opløftet i stjerner. Der er ikke nogle signifikante P-værdi, så vi kan afvise nulhypotesen. Dette tyder på, at der ikke er seasonality i vores data.

Nu vil vi gerne se, om der er en trend i vores data. Dette gøres ved at plotte residualerne.

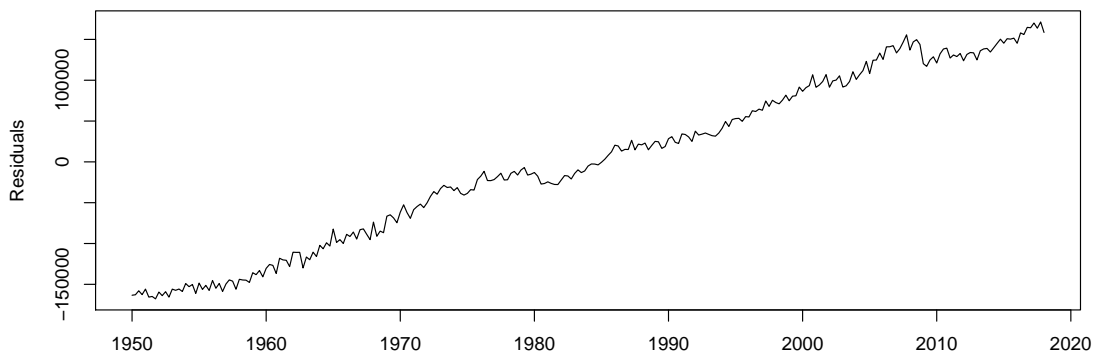


Figure 10: Plot af residualer

Det ligner der er en klar opadgående trend, og at residualerne ikke flukturerer omkring en bestemt midelværdi.

### 3.2.2 Unit root tests

Da vores tiddsserie har tegn på en trend kan vi nu teste for unit root med en tidsserie, der indeholder en trend. Dog vælger vi alligevel at undersøge alle muligheder end blot med trend, så vi undersøger:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{No intercept, no trend})$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{Intercept, no trend})$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \delta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{Intercept, trend})$$

Så vil vi bruge ADF-testen til at teste for unit root.

Her skal vi bruge tau-værdierne til at vurdere, om vi har unit roots eller ej, så først opstiller vi vores nulhypoteser:

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

**Den alternative hypotese:**

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Hvis T-værdierne fra ADF er mindre end tau værdierne, så kan man forkaste  $H_0$ .

Hvis T-værdier fra ADF er større end tau værdierne, så kan vi **IKKE** forkaste  $H_0$

Vi udfører først testen på følgende vis:

- Uden trend og drift.
- Uden trend og med drift.
- Med trend og med drift.

Table 15: ADF-test for BNP-modeller

	none	drift	trend
Unit root	4.134608	-0.3285513	-3.291536
drift		10.9056709	11.108403
trend			5.417225

Her får vi en masse forskellige værdier, så skal sammenlignes med tau-værdierne, man kan få fra cval i selve adf-testen.

Når  $T < \text{Tau}$ , så kan vi forkaste  $H_0$

Når  $T > \text{tau}$ , så kan vi ikke forkaste  $H_0$

Table 16: Tau værdier for ADF-testen på 5% signifikansniveau

	none	drift	trend
Unit root	-1.95	-2.87	-3.42
drift		4.61	4.71
trend			6.30

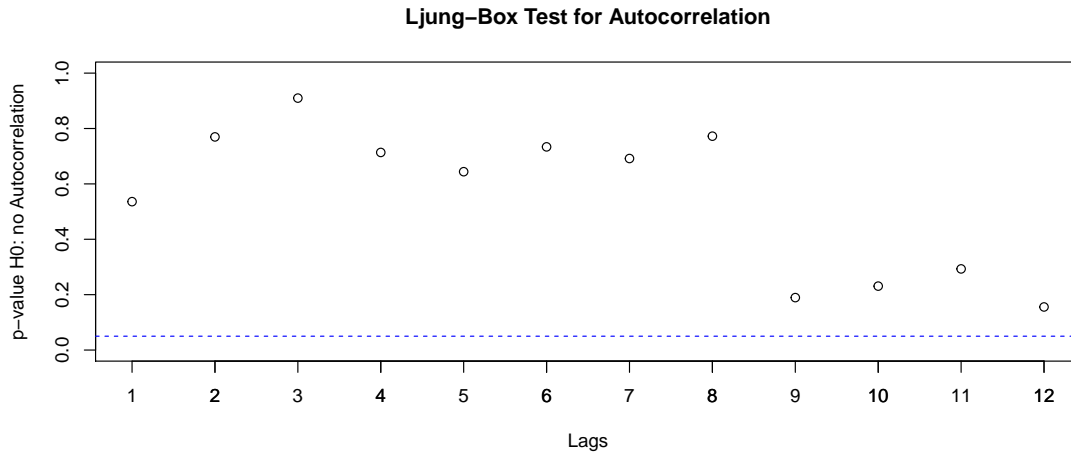
De oprindelige tau-værdier kan godt være svære at forholde sig til, da de kommer i mange forskellige signifikansniveauer og hypoteserne ikke er klare. Derfor har vi fundet en pakke på [R-bloggers](#), som opstiller det hele for os.

```
## =====
## At the 5pct level:
## The model is of type none
## tau1: The null hypothesis is not rejected, unit root is present
## =====
## =====
## At the 5pct level:
## The model is of type drift
## tau2: The first null hypothesis is not rejected, unit root is present
## phi1: The second null hypothesis is rejected, unit root is present
##      and there is drift.
## =====
## =====
## At the 5pct level:
## The model is of type trend
## tau3: The first null hypothesis is not rejected, unit root is present
## phi3: The second null hypothesis is not rejected, unit root is present
##      and there is no trend
## phi2: The third null hypothesis is rejected, unit root is present
##      there is no trend, and there is drift
## =====
```

Da vi har unit root i levels, så kigger vi først, om det kan skyldes seriekorrelation, men ellers går vi videre til at tage first difference.

### 3.2.3 Seriekorrelation

Vi tester nu om vores unit root skyldes seriekorrelation. Vi tester efter seriekorrelation med Ljungs-box for at se, om det er seriekorrelation, der er problemet.



Vi kan som ovenfor også se, at der op til 7 lags er seriekorrelation, men at denne forsvinder ved lag 7.

Lagsne kan fjernes manuelt for at eliminere unit root, eller man kan tage første difference og få en I(1) process, og måske eliminere unit root på den måde. Vi vælger selv at tage forskellen og få en I(1) process så:

$$\Delta y = y_t - y_{t-1}$$

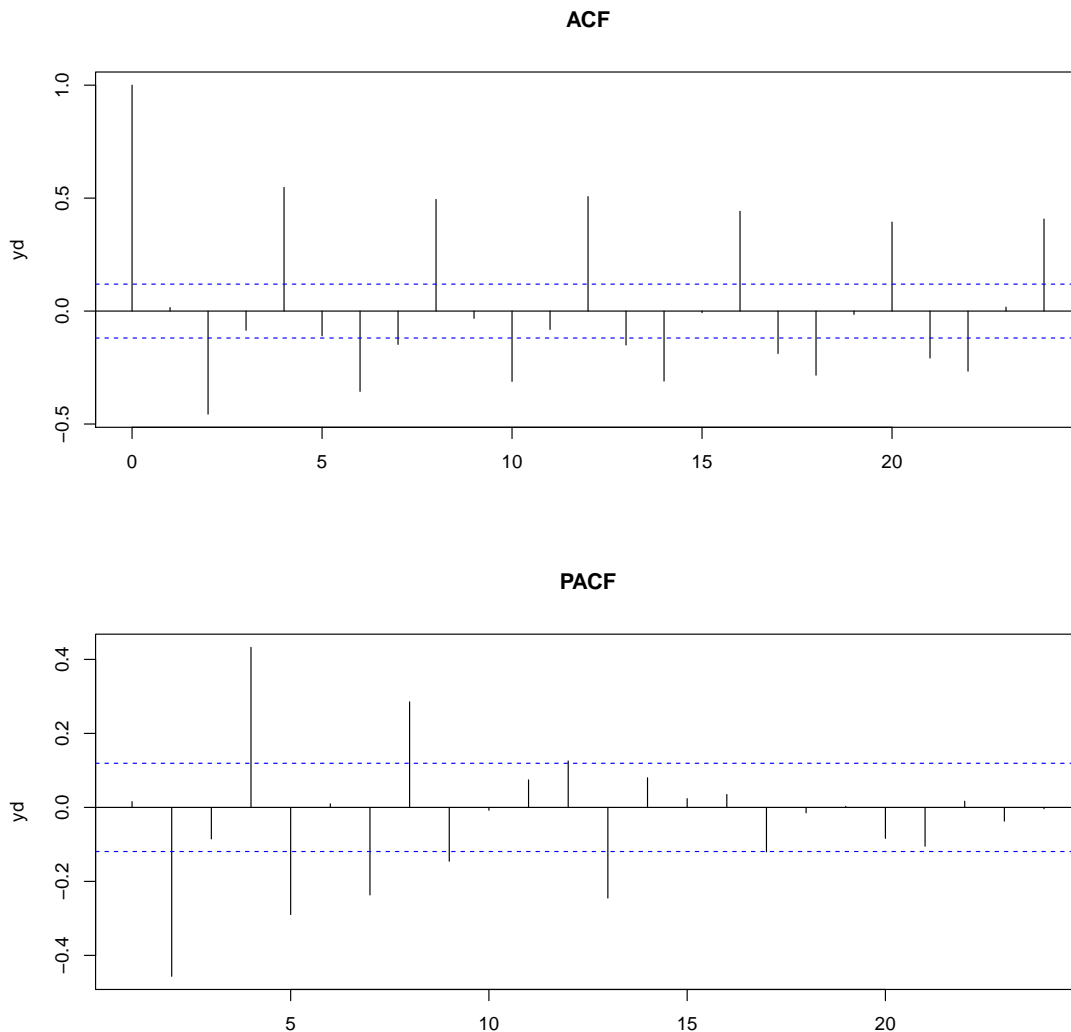
Derefter tester vi igen for unit root med Philips-Perron testen.

Her får vi en p-værdi på 0.01, og vi kan derfor afvise på et 5% signifikansniveau, at der skulle være unit root i vores tidsserie. Vi har altså fjernet unit root i vores data ved en I(1)-process. Konklusionen er dermed, at vores BNP data er en I(1)-process

### 3.3 2. Look at acf and pacf of you data and fit an ARIMA model.

Man kan bruge ACF og PACF til at undersøge hvilken type model, der kan være et godt match til ens tidsserie. De kan ikke 100% fortælle hvilken rigtig model, man skal anvende, men de er gode pejlemærker og fungerer godt sammen med yderligere analyse.

Plotter for vores  $I(1)$ -process( $y_d$ ), da vi skal bruge stationært data i vores model, da det ikke giver mening at forecaste med ustabilt data. Da vi arbejder med kvartalsvis data, er der 4 lags på et år.



#### ACF

ACF fortæller noget om variabelen og dets egne laggede værdier. Kigger vi på grafen kan vi se, at den aftager over tid og lagsne skifter i signifikans. Dette kunne tyde på, at vi har  $MA(2)$ -process.

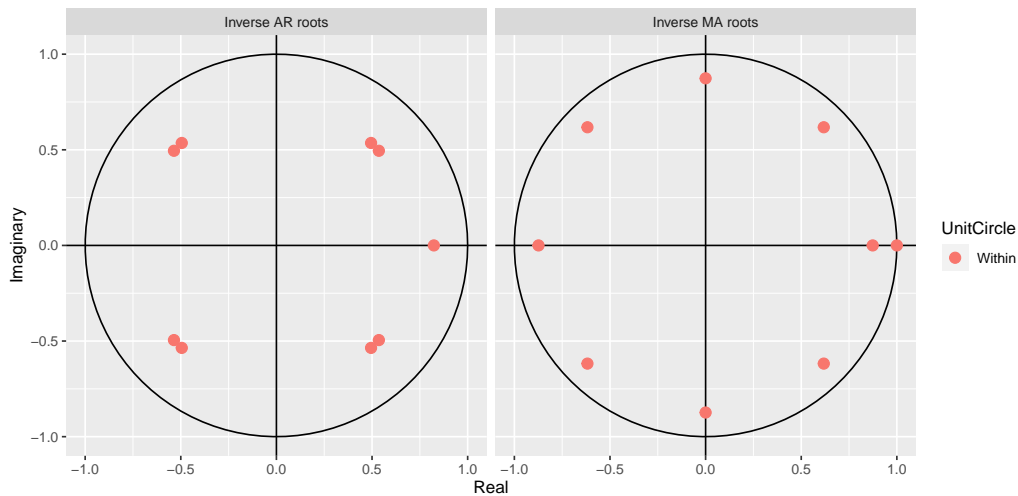
## PACF

PACF tester for en serie af lags i tidsserien. Og den tester derfor på tværs af flere lags end ACF. Kigger vi på grafen ovenfor, kan vi se, at der er en stærk korrelation i andet kvartal. Derudover er mange af lagsne ikke signifikante. Dette kunne tyde på en AR(2)-process.

Sammenholder man de to grafer vil det tyde på, at vi har at gøre med en ARIMA(2,1,2) process, men vi kan teste dette bedre ved hjælp af  $\mathbb{R}$ , frem for visuel inspektion.

Dette kan gøres med `auto.arima`, som finder den optimale model for tidsserien.

Her får vi givet ARIMA(1,1,1)(2,1,2) som den bedste model. Den vil vi nu teste om er stationær ved hjælp af unit root cirklen.

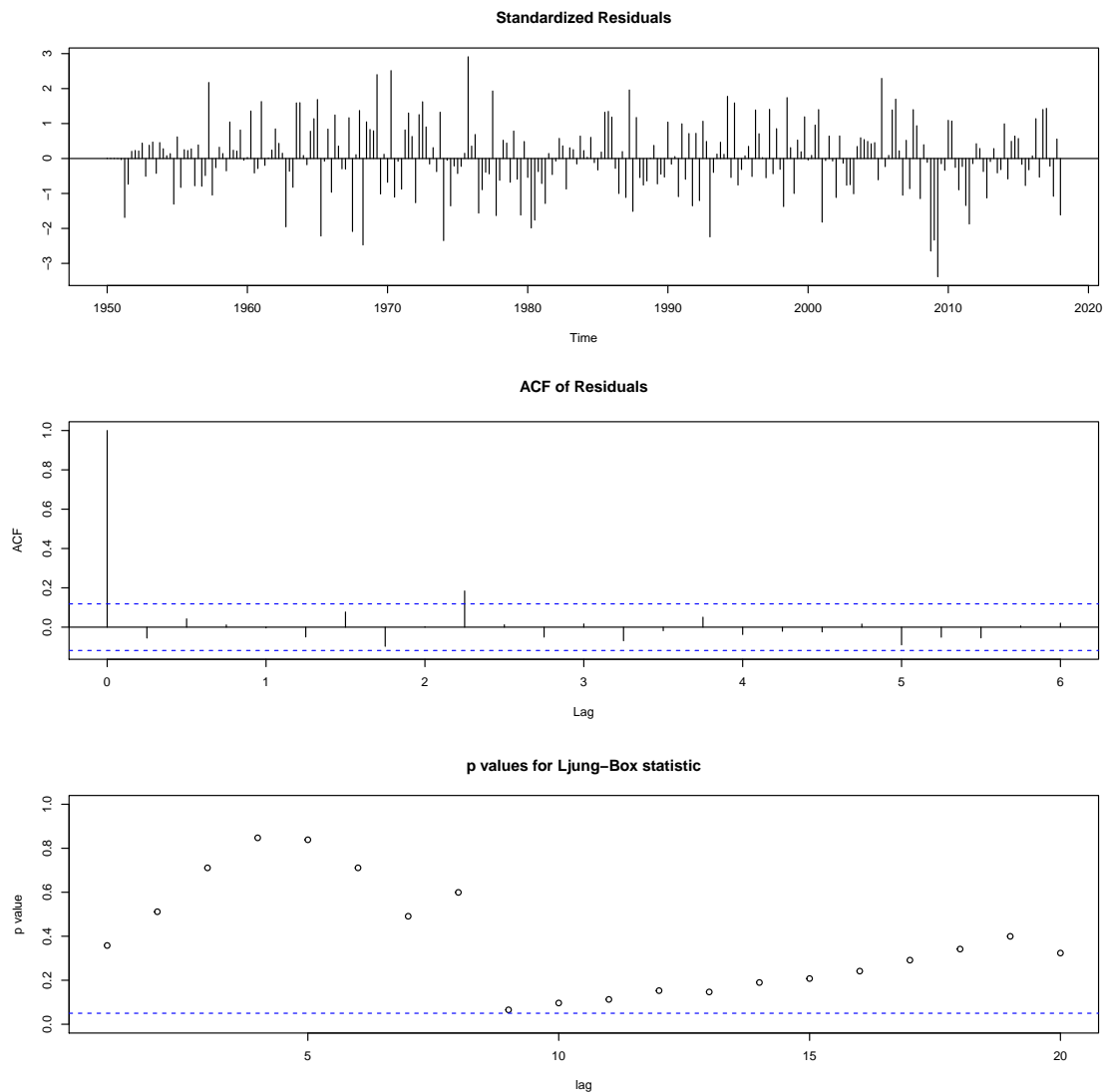


Da alle de inverse rødder af AR og MA er indenfor unit root cirklen, så er ARIMA modellen stationær, og vi kan derfor bruge den til at forecaste med senere. Generelt set viser unit root cirklen som regel kun dem, som falder inden for cirklen, men vi kan også simulere et scenarie, hvor de falder udenfor. Dette gøres i appendix.



### 3.3.1 Robusthedstest

For at være sikre på, at vores resultater er korrekte, kører vi en robusthedstest.



Her kan vi se, at residualerne svinger omkring middelværdien (0-linjen), Vores ACF ser ud som den skal med undtaget af et enkelt lag(2.25 ca) og vores Ljung box viser ikke tegn på seriekorrelation.

#### 3.3.1.1 Normality

Næst vil teste om residualerne er normalfordelte. Dette gøres igennem Jarque-Bera-testen, hvor hypoteserne kan opstilles:

**Nulhypotese:**

$$H_0 : \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

(Residualer er normalfordelte)

### Alternativ hypotese:

$$H_1 : \epsilon \neq N(0, \sigma^2)$$

(Residualerne er ikke normalfordelte)

Her får vi en p-værdi på 0.1205, så vi kan ikke forkaste nulhypotesen på et 5% signifikansniveau. Det vil altså sige, at vores residualer ser ud til at være normalfordelte. Hvis residualerne ikke er normalfordelte, bliver vi nødt til at lave flere tests med fx. dummy variable, kigge på strukturel breaks eller lignende.

#### 3.3.1.2 Lags(Har vi rette antal lags med)

Derefter kan vi teste om vi har den korrekte mængde lags med i modellen. Dette gøres ved at teste vores ARIMA model. Her får vi, at vi har de rette AR og MA lags. Dette giver også bedst mening, da vi har brugt auto.arima funktionen, som finder ud af dette automatisk.

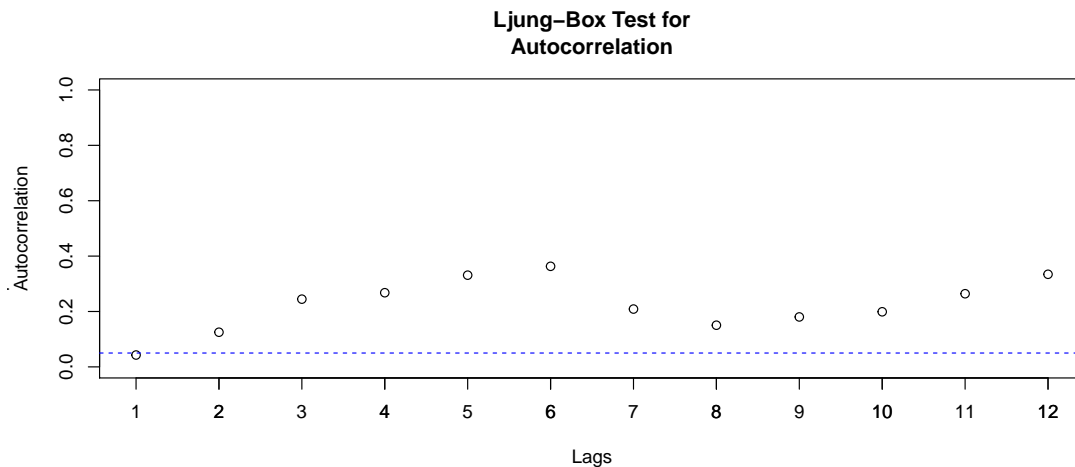
#### 3.3.1.3 ARCH

Derefter tester vi for heteroskedasticitet i vores model. Dette vil man ikke have i modellen, da det leder til ineffektive standard errors og skaber seriekorrelation i fejlldet. Dette kan vi teste for ved hjælp af ARCH-testen.

$$H_0 : \text{No autocorrelation/no heteroskedacity}$$

$$H_1 : \text{Autocorrelation/heteroskedacity}$$

Så laver vi ARCH-testen



Vi kan på figuren se, at vi ikke kan forkaste  $H_0$ . Dette betyder, at vi ikke har autokorrelation i vores model.

Vi bryder derfor ikke TS4 omhandlende homoskedasticitet. Jf. appendix.

Vi har nu testet vores data og konkluderer, at det godt kan bruges til forecasting i de næste opgaver.

### 3.4 3. Perform an in-sample forecast of your selected models

Vi vælger at tage de to bedste og de to dårligste modeller at forecaste for, at man kan se en klar forskel i hvorfor man skal vælge de rigtige modeller:

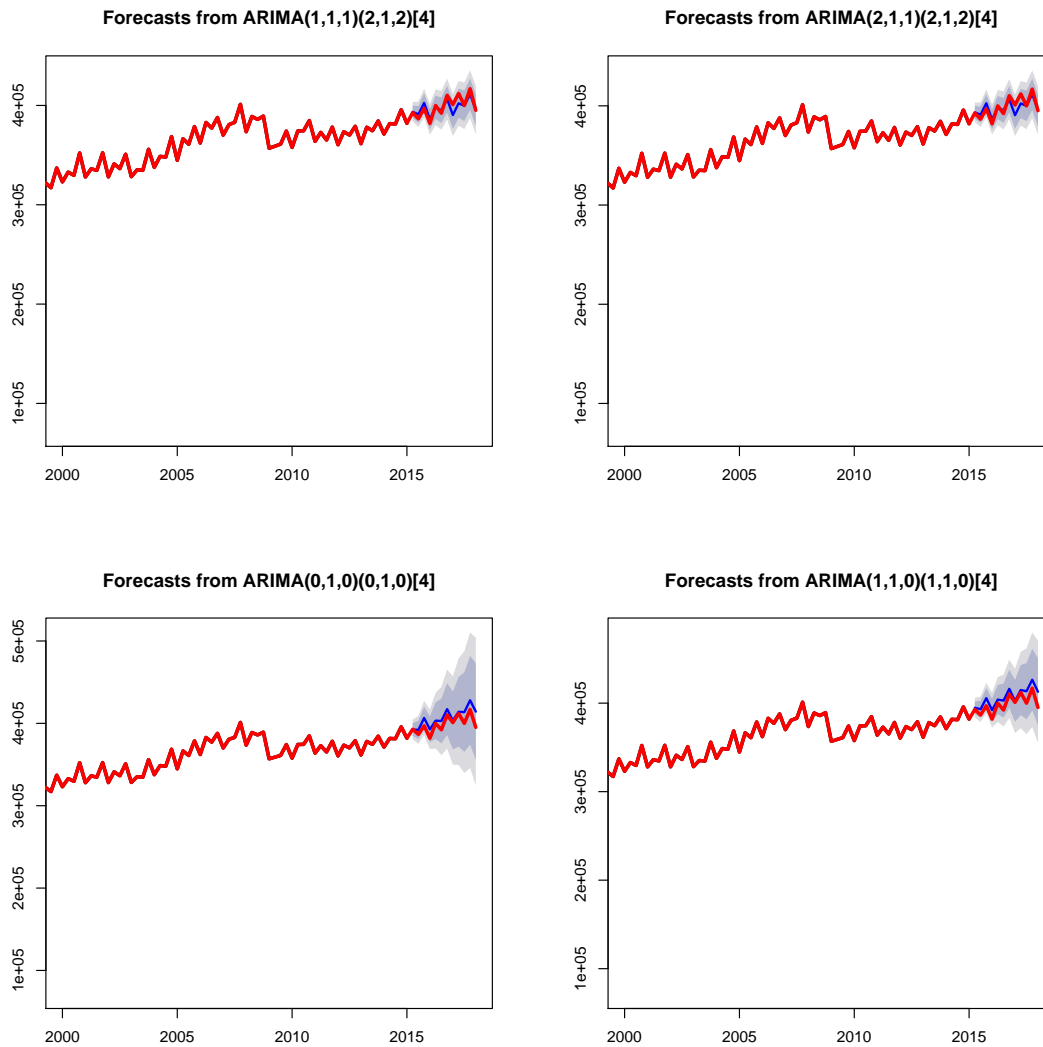


Figure 11: Plot af forecasts

Her kan vi se, at den øverste til venstre, er den bedste model, men den nederste til venstre er den dårligste model. Den øverste til højre, er den næstbedste, mens den nederste til højre er den næstdårligste model. Det kan vi bla. se på konfidensintervallerne (de blå skygger), hvor et højere konfidensinterval betyder større usikkerhed i modellen.

### 3.5 4. Compare your foretasted models with the performance of an AR(1) model.

En AR(1) er det samme som en ARIMA(1,0,0) og er ikke en særlig god måde at forecaste på. Dette kan vi se i plottet.

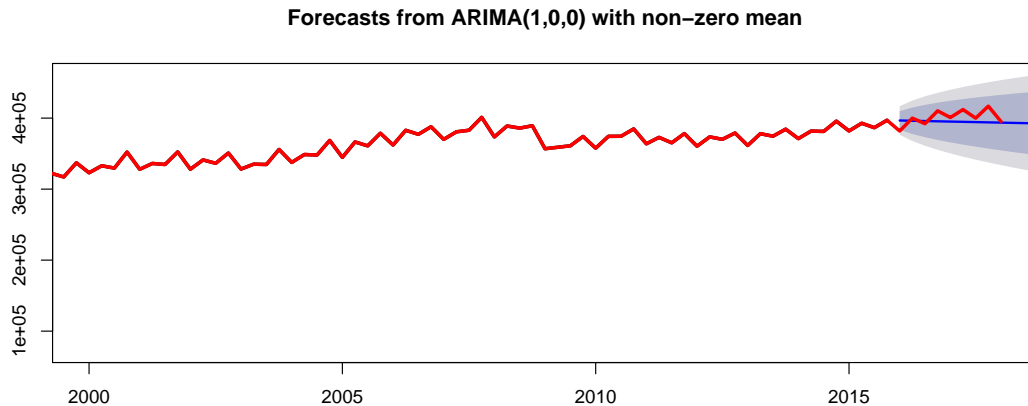


Figure 12: Plot af AR(1)

Selv vores dårligste ARIMA modeller er bedre end vores AR(1) model. AR modellen kan kun forudsige linært.

### 3.6 5. Perform forecast evaluations of your models using:

Der er forskellige måder at evaluere sine forecasts på. Nogle af dem vil vi gennemgå i dette afsnit.

#### 3.6.1 Regression based method:

Nu laver vi en regression af det reelle data på det forecastede data. Regressionen kan ses nedenfor:

$$\underbrace{[Y_a]_{263}^{272}}_{\text{reelle data}} = \alpha_A + \beta_A \underbrace{[\hat{Y}_A]_{263}^{272}}_{\text{forecastede data}} + [\epsilon]_1^9$$

Vi kan nu opstille hypoteserne vi skal teste.

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \alpha_A = 0 \text{ og } \beta_A = 1 \quad (\text{Ikke Forecast bias})$$

**Alternativ hypotese:**

$$H_1 : \alpha_A \neq 0 \text{ og } \beta_A \neq 1 \quad (\text{Forecast bias})$$

Vi tester altså hvor godt det forecastede in-sample data passer på det reelle data. Dette kaldes også forecast bias.

Table 17: Test for forecast bias i vores modeller

Model	Pvalue	RSS
Bedste	0.437	283462839
Næst Bedst	0.479	277429211
Dårligste	0.001	291300020
Næst Dårligst	0.001	245415408

Ved den bedste og næst bedste model kan vi ikke afvise nulhypotesen, da vi har en høj p-værdi. Dette betyder, at modellerne ikke viser tegn på forecast bias. Ved den dårligste og næst dårligste model kan vi til gengæld godt afvise nulhypotesen, da vi har en lav p-værdi. Dette tyder på, at der i de to dårligste modeller, er forecast bias. Når man har to modeller, hvor man ikke kan afvise forecast bias, så skal man vælge den med lavest RSS(Residual standard error). Det tyder faktisk på, at dette er vores “næst-bedste” model.

### 3.6.2 Mean square prediction error (MPSE)

Her bruger vi gennemsnittet fra de forecastede modeller.

Her bruger vi den bedste, næst-bedste, næst-dårligste, dårligste og til sidst vores AR model.

Table 18: Tabel med MPSE for vores udvalgte modeller

	Bedste	Næst-Bedst	Dårligste	Næst-Dårligst	AR-model
MPSE	16328244	11417411	753203433	725807117	232311195

Her kan vi se, at MPSE faktisk er lavest ved den næstebedste model. Dette tyder på, at vores bedste model måske ikke er den bedste alligevel, som vi også opdagede i forrige opgave.

### 3.6.3 Root Mean Square Error (RMSE)

Table 19: Tabel med RMSE for vores udvalgte modeller

	Bedste	Næst-Bedst	Dårligste	Næst-Dårligst	AR-model
RMSE	4040.822	3378.966	27444.55	26940.81	15241.76

Her bruger vi den bedste, næst-bedste, næst-dårligste, dårligste og til sidst vores AR model. Her ser vi samme tendens som ved MPSE. Den næstbedste model er stadigvæk den bedste ift. RMSE, og det kunne tyde på, at auto.arima måske ikke har valgt den bedste model.

## 4 Eksamensopgave 4

### Econometrics II: Time Series Data Homework and Reading Assignment #4

October 12, 2021

#### 1 Reading Assignment

- Chapter 6 in Enders

#### 2 Homework Assignment

##### 2.1 Theoretical part

- Assume a simple ARDL (1,1) model as follows:

$$Y_t = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Please derive an error correction model from the above equation.

##### 2.2 Empirical part

- Choose time series data of your choice for at least 3 variables (preferably monthly/quarterly data without too many structural breaks)
- Assume, you are interested in investigating the following relationship

$$Y_t = \mu + \phi_1 X_{1t} + \phi_2 X_{2t} + \varepsilon_t$$

Please briefly motivate (theoretically), why do you think this relationship should exist in your data?

1

- 1. Find the order of integration (by performing the unit root test - make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)
- 2. Perform both Engle-Granger test for cointegration and ARDL bounds test for cointegration. Is there cointegration in your data?
- 3. What are the cointegrating parameters?
- 4. Assume, cointegration exists in your model, perform an error correction model. Please interpret the error correction model (i.e., interpret the coefficient on the error term, interpret the short-run and long-run relationships).
- **Diagnostics:**
  - Perform serial correlation and ARCH test
  - Test the model for the assumption of normality
  - Show parameter stability of your model using `strucchange` package in R. Are your estimates reliable? Remember, `strucchange` package in R only recognises models coded using `lm()` function.

Note: Please include your equations and formulae of your methods (whenever applicable)

2

## 4.1 Theoretical part

### 4.1.1 Assume a simple ARDL (1,1) model as follows:

$$Y_t = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Please derive an error correction model from the above equation:

Vi starter med at trække  $Y_{t-1}$  fra på begge sider

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} - Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi får forskellen på  $Y_t$  på venstreside, hvor vi på højreside der kan vi tage  $Y_{t-1}$  udenfor parantes

$$\Delta Y_t = \mu - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi trækker nu  $\beta_0 X_{t-1}$  fra på begge sider

$$\Delta Y_t - \beta_0 X_{t-1} = \mu - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \beta_0 X_t - \beta_0 X_{t-1} + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Da vi på højre side både har den nutidige værdi af  $X$  ( $X_t$ ), og den tidligere værdi af  $X$  ( $X_{t-1}$ ), så får vi forskellen i  $X$  ( $\Delta X_t$ ).

$$\Delta Y_t - \beta_0 X_{t-1} = \mu - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \beta_0 \Delta X_t + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Nu flytter vi  $-\beta_0 X_{t-1}$  over på højreside

$$\Delta Y_t = \mu - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \beta_0 \Delta X_t + \beta_0 X_{t-1} + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi tager nu  $X_{t-1}$  udenfor parantes

$$\Delta Y_t = \mu - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \beta_0 \Delta X_t + (\beta_0 + \beta_1) X_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi rykker nu rundt på udtrykket

$$\Delta Y_t = \beta_0 \Delta X_t + \epsilon_t - (1 - \alpha_1) Y_{t-1} + \mu + (\beta_0 + \beta_1) X_{t-1}$$

Vi kan tage  $(1 - \alpha_1)$  udenfor parantes. De udtryk der ikke har ganget det på, de bliver nu divideret med  $(1 - \alpha_1)$ .

$$\Delta Y_t = \beta_0 \Delta X_t + \epsilon_t - (1 - \alpha_1) \left[ Y_{t-1} + \frac{\mu}{(1 - \alpha_1)} + \frac{(\beta_0 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1)} X_{t-1} \right]$$

Nu bruger vi udtrykket  $\theta \equiv (1 - \alpha_1)$  og  $\phi \equiv (\beta_0 + \beta_1)$ . Det sætter vi nu ind i ligningen

$$\Delta Y_t = \beta_0 \Delta X_t + \epsilon_t - \theta \left[ Y_{t-1} + \frac{\mu}{\theta} + \frac{\phi}{\theta} X_{t-1} \right]$$

Vi ganger nu  $\theta$  ind i parantesen

$$\Delta Y_t = \beta_0 \Delta X_t + \epsilon_t - \theta Y_{t-1} - \mu - \phi X_{t-1}$$

Vi har nu udedledt en ARDL(1,1) model til at blive en ECM model.

## 4.2 Empirical part

### 4.2.1 Choose time series data of your choice for at least 3 variables (preferably monthly/quarterly data without too many structural breaks)

Her skal vi bruge 3 variable i stedet for kun en enkelt, som i tidligere eksamenssæt. Vi vælger at bruge dataet fra det empiriske projekt, hvor inflation, renten og unemployment indgår i en periode fra 1950-2000.

### 4.2.2 Assume, you are interested in investigating the following relationship

$$Y_t = \mu + \phi_1 X_{1t} + \phi_2 X_{2t} + \epsilon_t$$

#### 4.2.2.1 Please briefly motivate (theoretically), why do you think this relation-ship should exist in your data?

$$Y_t = \mu + \phi_1 X_{1t} + \phi_2 X_{2t} + \epsilon_t$$

Overstående forhold stammer fra følgende generelle form:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{P_y} a_i Y_{t-i} + \sum_{j=0}^{p_{x_1}} \phi_{1,j} X_{1,t-j} + \sum_{l=0}^{p_{x_2}} \phi_{2,l} X_{2,t-l} + \epsilon_t$$

hvor  $Y, X_1, X_2$  enten er  $I(0)$  eller  $I(1)$  processer.  $p_y$  er antallet af lags på  $Y$  i modellen, mens  $p_{x_1}$  og  $p_{x_2}$  er antallet af lags på  $X_1$  og  $X_2$ . Når  $a_i = \phi_{1,j} = \phi_{2,l} = 0$  for alle  $i, j, l$  findes der ikke noget langsigtet forhold mellem variablene.

Og det er netop det langsigtede forhold, som vi er interesserede i at finde i vores model. Hvis vi kan finde, at der er et langsigtet forhold, så kan vi også udregne langsigtede estimater og speed of adjustment.

I vores eget data, er vi interesserede i at finde det langsigtede forhold mellem renten, inflationen og arbejdsløshed(unemployment).

$$renten_t = \mu + \phi_1 inflation_t + \phi_2 unemployment_t + \epsilon_t$$

Forud for analysen har vi allerede en idé om, at disse tre har langsigtede forhold, da de spiller en stor rolle i makroøkonomien i samfundet og pengepolitikken.



**4.2.3 1. Find the order of integration (by performing the unit root test -make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)**

Vi undersøger først for unit root, og order of integration ved hjælp af Dickey-fuller-testen. Denne kan udledes:

Vi starter med at opskrive en variable  $Y_t$  på en AR(1) process

$$Y_t = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Så trækkes  $Y_{t-1}$  fra på begge sider

$$Y_t - Y_{t-1} = \theta Y_{t-1} - Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi trækker den nutidige værdi fra den tidligere værdi for at få  $\Delta Y_t$ , og  $Y_t$  sættes uden for parentes

$$\Delta Y_t = (\theta - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi kalder  $(\theta - 1)$  for  $\pi$  for at generalisere.

$$\Delta Y_t = \pi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvor vi antager at  $\epsilon$  følger en white noise process.

$$\epsilon \sim IID(0, \sigma^2)$$

Der gælder forskellige ting for  $\theta$  :

Hvis  $|\theta| < 1$  så er det en stationær process

Hvis  $|\theta| = 1$  så er der unit root i tidsserien, og processen er ikke stationær

Hvis  $|\theta| > 1$  så eksplodere processen

Når vi laver en unit root test, så bruger vi

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \theta = 1 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese:**

$$H_1 : \theta < 1 \quad (\text{No unit root})$$

Grunden til vi tester om theta er mindre end 1 er, at det kun er der, hvor det er en stationær process. Vi kan altså ikke bruge den alternative hypotese at theta er forskellige fra 1.

Efter omskriv kan vi opskrive vores hypoteser på følgende måde

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Der gælder for Dickey-Fuller testen at hvis  $\pi = 0$  så er  $\theta = 1$ , og det betyder at der er unit root i vores tidsserie. Vi skal ikke bruge vores almindelige t-værdier, men derimod sammenligne dem med DF(tau)-statistikkerne som kan ses i appendix.

**Hvis vi kan forkaste  $H_0$  så er der IKKE unit root i vores data, og tidsserien er derfor stationær.**

Vi laver en ADF test på vores modeller uden intercept og trend ved hjælp af URCA pakken i R. Ligningerne for de forskellige modeller afhængig af om de er med eller uden intercept og trend, kan opstilles:

$$\Delta inflation_t = \delta inflation_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{No intercept, no trend})$$

$$\Delta unemployment_t = \delta unemployment_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{No intercept, no trend})$$

$$\Delta renten_t = \delta renten_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{No intercept, no trend})$$

Vi laver vores ADF test:

Table 20: T-statistikker for ADF

	Inflation	Unemployment	Renten
T-statistik	-0.9210956	-0.7838464	-0.8338285

Og i denne test skal vi tage udgangspunkt i tauværdierne fra denne tabel:

Table 21: Tau værdier for ADF-test

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

**Når  $T < \text{Tau}$ , så kan vi forkaste  $H_0$**

**Når  $T > \text{tau}$ , så kan vi ikke forkaste  $H_0$**

Som udgangspunkt ser det ud til, at der er unit root i alt vores data. Vi prøver derfor at tage første difference og ser, om det fjerner problemet:

Table 22: T-statistikker af første difference for ADF

	Inflation	Unemployment	Renten
T-statistik	-12.14566	-5.943212	-5.549646

Vi har nu meget højere t-statistikker og kan forkaste vores  $H_0$ , som tester for unit root. Vores variable er derfor I(1) processor. Alternativt kan man finde order of integration på alt sit data med denne simple

kommando i  $\mathbb{R}$ , *ndiffs*:

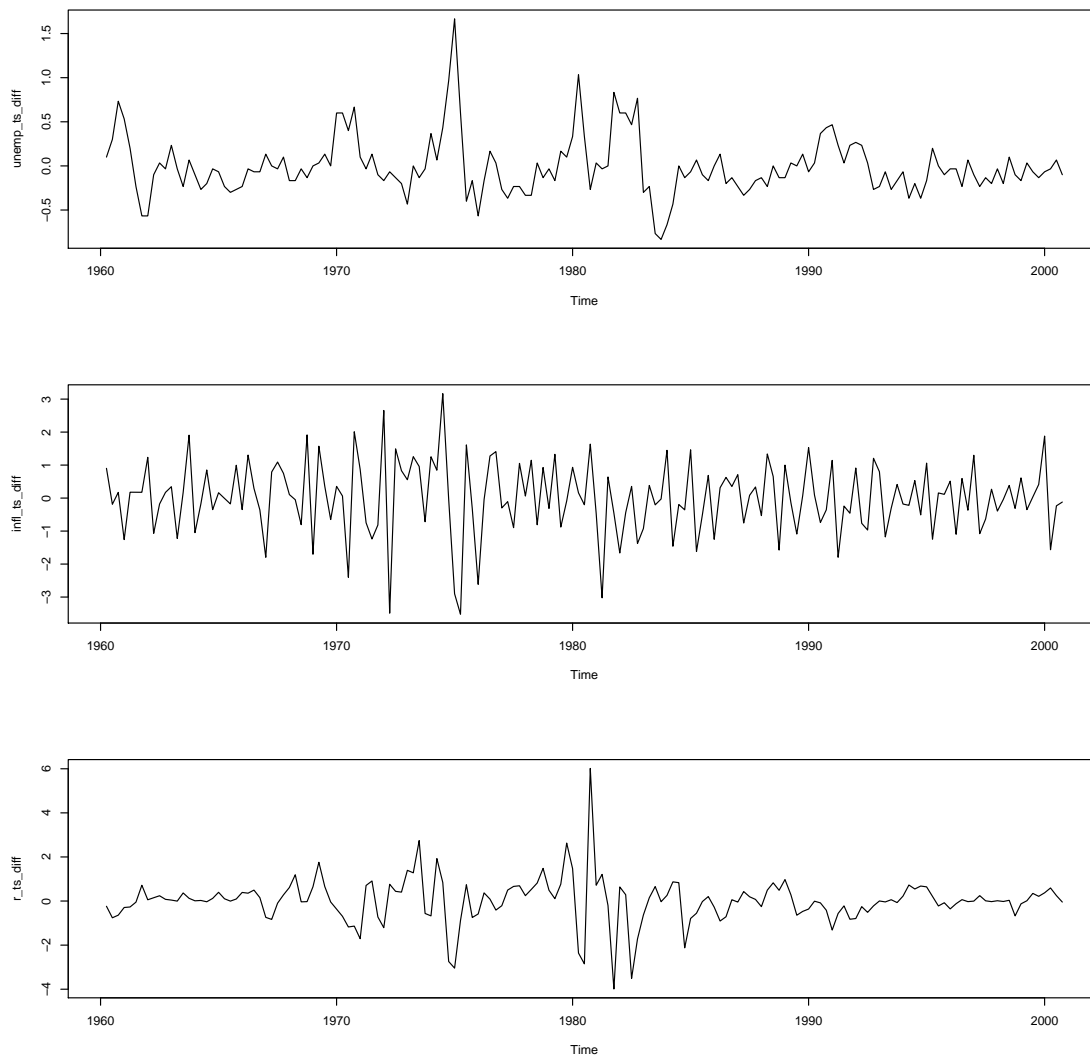
Table 23: Ndiffs for at finde I-processor

	Inflation	Unemployment	Renten
I-process	1	1	1

Dette viser os også, at vi har en  $I(1)$ -process. Vi kunne godt have gjort det samme med modeller, med trend og intercept, men dette havde givet samme resultater.

#### 4.2.3.1 make sure your unit root tests are not affected by serial correlation issues)

Vi har konstateret, at der ikke er unit root i vores I(1)-data. Men vi vil stadigvæk gerne teste om der er seasonality i og derefter om der er seriekorrelation. Først plotter vi vores data:



Umiddelbart er det svært at spotte, om der er seasonality i vores data, så vi tester det også ved at teste hver enkelt kvartal i en regression. En såkaldt “dummyvariabel”-Metode, der også kan opstilles matematisk:

$$BNP_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$Huspriser_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$kredit_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

$$aktiepriser_t = \alpha + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \epsilon_t$$

**Nulhypotese**

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (\text{No seasonality})$$

**Alternativ hypotese**

$$H_1 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \neq 0 \quad (\text{Seasonality})$$

F-testen går ind og bruger dummy variablerne ved at sætte et enkelt kvartal til at være 1, fx.  $D_2 = 1$ , og sætter de resterende til at være 0. Det betyder at der kun fås data fra et bestemt kvartal i regressionen, og man kigger derfor på kvartalerne individuelt istedet for at kigge på den samlede tidsserie. Man kan derfor finde ud af om kvartalerne i sig selv er signifikante eller ej. Hvis de er signifikante, så vil der være seasonality i det pågældende kvartal.

Table 24: Test for seasonality på vores 3 variable

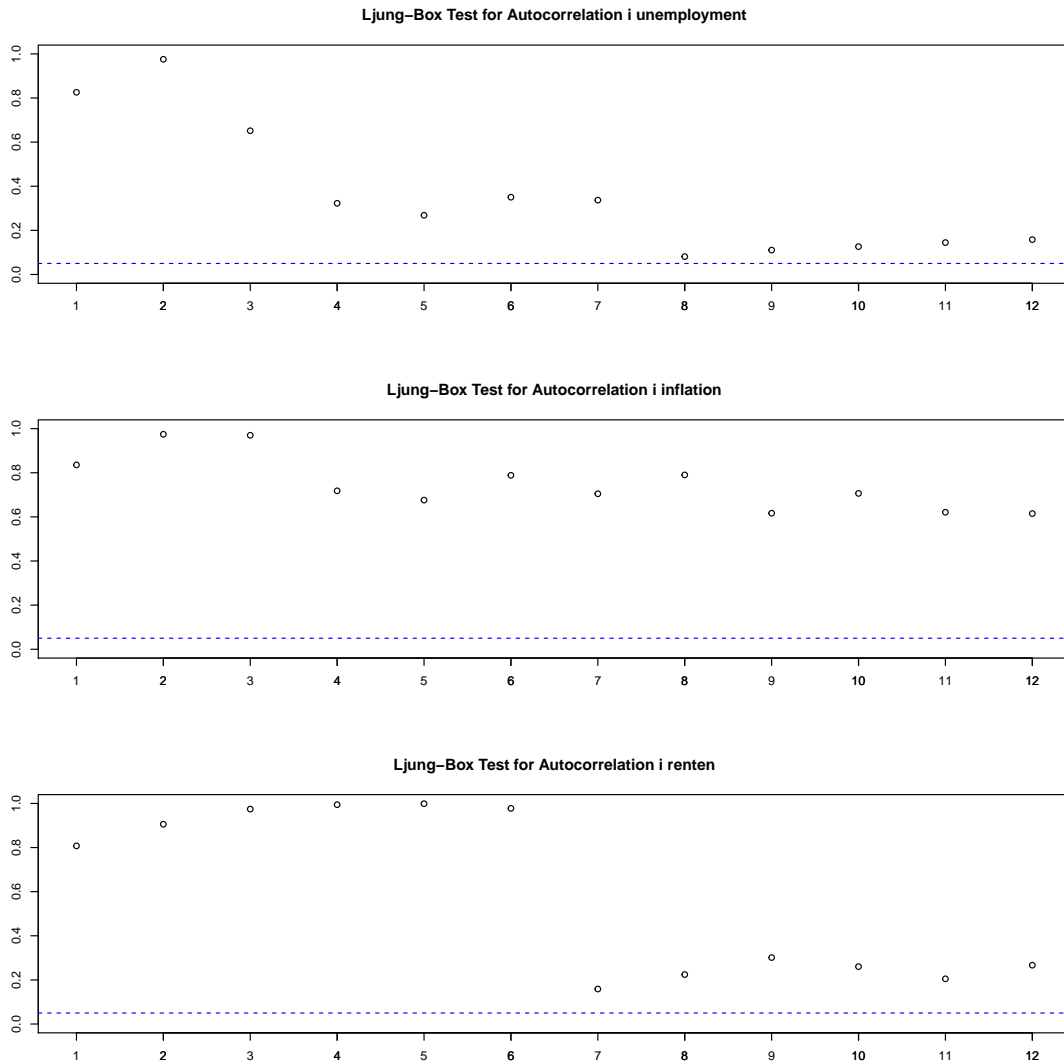
	<i>Dependent variable:</i>		
	unemp_ts_diff	infl_ts_diff	r_ts_diff
	(1)	(2)	(3)
q1	0.001 (0.074)		
q2	0.003 (0.073)		
q3	-0.023 (0.073)		
q1_infl_diff		-0.079 (0.240)	
q2_infl_diff		-0.588** (0.238)	
q3_infl_diff		-0.145 (0.238)	
q1_r_diff			-0.026 (0.231)
q2_r_diff			0.263 (0.229)
q3_r_diff			0.139 (0.229)
Constant	-0.002 (0.052)	0.209 (0.169)	-0.079 (0.162)
Observations	163	163	163
R <sup>2</sup>	0.001	0.044	0.013
Adjusted R <sup>2</sup>	-0.018	0.026	-0.006
Residual Std. Error (df = 159)	0.331	1.080	1.038
F Statistic (df = 3; 159)	0.055	2.435*	0.677

*Note:*

\*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Vi kan på alle tre regressioner se, at vi ikke har statistisk signifikante resultater med undtagelse af inflation kvartal 2. Dette tyder på, at vi ikke har seasonality i dataet generelt, men at der kan være et lille problem i andet kvartal af inflationsdataet. Dette kan man gå ind og fjerne, hvis man skal bruge dataet til at forecaste eller lignende, hvor der kan opstå upræcise resultater som følge af seasonalitet, men vi er som udgangspunkt ikke nervøse for, at en lille mængde seasonality vil påvirke resten af opgaven, da vi allerede ved fra tidligere, at der ikke var unit root i vores I(1)-data.

Til sidst vil vi gerne se, om der er seriekorrelation og evt. løse det ved at tilføje lags indtil, der ikke længere er seriekorrelation i vores data.



Her kan vi se, at seriekorrelation bliver løst hhv. i 1,2 og 5 lags for unemployment, inflation og renten. Og må derfor konstatere, at seriekorrelation ikke længere er et problem i vores tidsserier.

#### 4.2.4 2. Perform both Engle-Granger test for cointegration and ARDL bounds test for cointegration. Is there cointegration in your data?

##### 4.2.4.1 Engle-Granger

Da vi nu ikke har unit root i vores data, og ingen af vores variable er I(2), Kan vi først lave en Engle-Granger test, som opstilles:

$$\Delta \hat{\epsilon} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\epsilon}_{t-1} + u_t$$

Hvis  $\gamma_1 = 0$ , er der unit root og  $\hat{\epsilon}$  er i I(1). Så hypoteserne kan altså opstilles:

**Nulhypotese:**

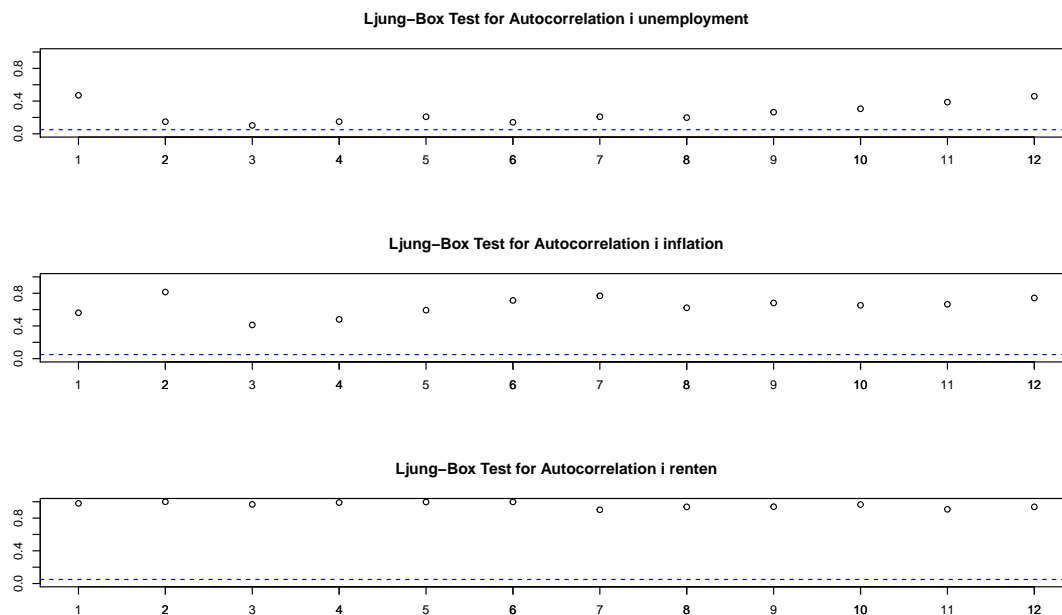
$$\gamma_1 = 0 \quad (\text{Unit root(No cointegration)})$$

**Alternativ Hypotese:**

$$\gamma_1 \neq 0 \quad (\text{No unit root(Cointegration)})$$

Først laver vi en Engle-Granger test for cointegration, da vi ved at alle vores variable er I(1). Dette gøres ved at lave en regression med vores modeller i levels og derefter finde residualerne fra disse modeller. Intercept og trend medtages ikke, da vi antager at residualerne har et gennemsnit på 0 og en begrænset varians.

Opstillingen af regressionerne vises ikke, men vi bruger nu Ljungs-box til at se om der er seriekorrelation i vores modeller og for at finde mængden af lags, der skal til for at fjerne eventuel seriekorrelation:



Her finder vi frem til, at seriekorrelationen bliver løst i lag 1, 2, 2 for hhv. unemployment, inflation og renten.

Vi kan nu teste vores  $H_0$  hypotese for cointegration og sammenligne vores T-statistikker med Tau-værdierne.

Table 25: T-statistikker for cointegrationstest

	Unemployment	Inflation	Renten
T-statistik	-3.470121	-2.286299	-2.756024

Og disse skal sammenlignes med:

Table 26: Kritiske værdier for cointegrationstest

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Hvis vi først kigger på Unemployment, så får vi en T-statistik på -3.47, som er lavere end den tau-kritiske værdi på -2.58, så vi kan afvise unit root i residualerne for unemployment(nulhypotesen) på et 1% signifikansniveau. Inflation kan vi afvise unit root i residualerne på et 5% signifikansniveau, og ved Renten kan vi igen afvise unit root i residualerne på et 1% signifikansniveau. Disse resultater antyder altså, at vores residualer i modellerne er stationære. Hvis vi havde vist estimatorne for vores modeller her, ville vi kunne se nogle  $\beta$ -værdier. Dette er vores cointegrations parametre og vores “lang-sigt” parameter.

#### 4.2.4.2 ARDL-bounds

Nu vil vi lave en ARDL-bounds test, som også tester for cointegration(long-run relationship). ARDL-bounds testen er en avanceret version af Engle-Granger testen. Denne kan teste for long-run relationships på tværs af I()-processor. Hvor Engle-Granger testen primært kan bruges på samme type. Da vi har I(1)-processer giver det ikke så meget mening at også lave en ARDL-test, men da dette bliver efterspurgt i opgaven, så laver vi en hurtigt nedenfor.

Vi opstiller ligningen:

$$\Delta y_t = \beta_i \Delta y_{t-i} + \alpha_i \Delta x_{t-i} + \theta_1 y_{t-1} + \mu + \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi ved at den ene del af ligningen viser det langsigtede forhold, og en anden del der beholder vi de signifikante lags for modellen:

$$\Delta y_t = \underbrace{\beta_i \Delta y_{t-i} + \alpha_i \Delta x_{t-i}}_{\text{Beholder alle signifikante lags}} + \underbrace{\theta_1 y_{t-1} + \mu + \phi_1 x_{t-1}}_{\text{Langsigtede forhold}} + \epsilon_t$$

Vi fjerner alle insignifikante lags, og bruger modellen til at finde t-værdier, så vi kan se om der er cointegration:

Ud fra denne kan vi nu opstille hypoteser:

**Nulhypotese:**

$$H_0 : \theta_1 = \phi_1 = 0 \quad (\text{No cointegration})$$



**Alternativ hypotese:**

$$H_1 : \theta_1 \neq \phi_1 \neq 0 \quad (\text{Cointegration})$$

Først finder vi t-statistikken for vores variable i rækkefølgen: Unemployment, inflation, renten

Table 27: T-statistikker for cointegrationstest

	Unemployment	Inflation	Renten
T-statistik	-6.092088	-9.256908	-4.911564

Hvor vi kan finde Tau-værdierne, så vi kan se om vores hypotese kan afkræftes eller ej:

Table 28: Kritiske værdier for cointegrationstest

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Vi kan for alle 3 variable se, at T-statistikken er mindre en tau-værdierne, og vi kan derfor afkræfte nulhypotesen. Det vil altså sige, at det tyder på, at der er cointegration jf. vores ARDL tests. Det betyder, at der er et langsigtet forhold mellem vores variable.

Når vi har fundet tegn på cointegration kan vi gå videre med vores ECM model, som er en Error correction model, der bruges, når der er cointegration i ens tidsserier. Den tager højde for cointegrationen, og man kan ved hjælp af ECM fx. forecaste, med cointegration i ens modeller. Dette gøres i opgave 4, og vi går nu istedet videre til at besvare opgave 3 omkring cointegrations parametre.

#### 4.2.5 3. What are the cointegration parameters

Cointegrations parameterne er  $\beta$ -værdierne og disse kan bruges til at udregne vores langsigtede effekter, som vi gør næste opgave, hvor vi også kommenterer på teorien bag effekterne.

**4.2.6 4. Assume, cointegration exists in your model, perform an error correction model. Please interpret the error correction model (i.e., interpret the coefficient on the error term, interpret the short-run and long-run relationships).**

ECM fungerer ved, at man opstiller sine regressioner i levels og fjerner de variable, der ikke er signifikante for modellen. Når man til sidst har fjernet alle de ikke-signifikante variable, fjerner man også levels fra modellen og laver en restricted model.

Vi laver ECM-modeller for unemployment, inflation og renten og opstiller resultaterne i en tabel nedenfor:

Table 29

	<i>Dependent variable:</i>		
	Unemplpoyment	Inflation	Renten
	(1)	(2)	(3)
infl_ts_diff	-0.017 (0.019)		0.098 (0.064)
unemp_ts_diff		-0.314 (0.337)	-1.828*** (0.230)
r_ts_diff	-0.157*** (0.020)	0.152 (0.098)	
L(unemp_ts, 1)	-0.061*** (0.014)	-0.094 (0.061)	-0.157*** (0.048)
L(infl_ts, 1)	0.045*** (0.011)	-0.144*** (0.048)	0.167*** (0.038)
L(r_ts, 1)	0.014 (0.009)	0.084** (0.037)	-0.049 (0.030)
Constant	0.097 (0.083)	0.568 (0.352)	0.612** (0.281)
Observations	163	163	163
R <sup>2</sup>	0.453	0.115	0.359
Adjusted R <sup>2</sup>	0.435	0.087	0.339
Residual Std. Error (df = 157)	0.247	1.045	0.842
F Statistic (df = 5; 157)	25.970***	4.100***	17.590***

*Note:*

\*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Estimaterne kan bruges til at finde de kortsigtede og langsigtede forhold mellem variablene.

**Inflation og renten:**

Her kan vi se den kortsigtede effekt på 0.152, som betyder at når inflationen stiger, så stiger renten også. Dette følger teorien.

Det langsigtede udregnes:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(r\_ts, 1)}{L(infl\_ts, 1)} = -\left(\frac{0.084}{-0.144}\right) = 0.583$$

Her kan vi se, at inflation og renten har et positivt langsigtet forhold. Det vil altså sige, at hvis inflationen stiger, så hæves renten også. Dette stemmer overens med teorien.

**Inflation og unemployment:**

Den kortsigtede effekt er -0.314. Dette er et negativt forhold, som betyder at når inflationen stiger, så falder arbejdsløsheden. Dette stemmer også overens med teorien.

Den langsigtede udregnes:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(unemp\_ts, 1)}{L(infl\_ts, 1)} = -\left(\frac{-0.094}{-0.144}\right) = -0.652$$

Vi kan se, at inflationen og unemployment har et negativt langsigtet forhold. Det vil sige, at når inflationen stiger, så falder arbejdsløsheden. Dette er også hvad vi forventer ift. teorien.

### Unemployment og inflation:

Det kortsigtede forhold er her -0.017. Dette betyder, at når arbejdsløsheden stiger, så falder inflationen. Dette giver mening ift. teorien, og vi prøver at udregne det langsigtede forhold:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(infl\_ts, 1)}{L(unemp\_ts, 1)} = -\left(\frac{0.045}{-0.061}\right) = 0.737$$

Her kan vi se, at unemployment og inflationen har et positivt forhold. Dette giver ikke mening ift. teorien, fordi man ville forvente, at når arbejdsløsheden steg, så ville inflationen falde. Vi har dog med data at gøre i en periode, med oliekriser og andre specielle tider, hvor virkeligheden nogengange har vist sig at være anderledes end teorien.

### Unemployment og renten:

Den kortsigtede effekt er negativ på -0.157. Dette betyder at når arbejdsløsheden stiger, så falder renten. Dette giver mening ift. teorien om, at man vil prøve at sænke renten for at fastholde arbejdskraft. Vi udregner også den langsigtede effekt:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(r\_ts, 1)}{L(unemp\_ts, 1)} = -\left(\frac{0.014}{-0.061}\right) = 0.223$$

Her kan vi se at unemployment og renten har et positivt langsigtet forhold. Dette giver ikke mening ift. teorien, da man ville forvente, at renten skulle falde, når arbejdsløsheden stiger. Vi har dog igen at gøre med data med oliekriser og lignende, hvor renten har set enorme højder, som måske kan forklare dette resultat.

### Renten og inflation:

Den kortsigtede effekt mellem renten og inflationen er 0.098. Dette betyder, at når renten stiger, så stiger inflationen også. Dette giver ikke meningen ift. teorien, og vi prøver at udregne den langsigtede effekt:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(infl\_ts, 1)}{L(r\_ts, 1)} = -\left(\frac{0.167}{-0.049}\right) = 3.4$$

Her kan vi se, at der er et langsigtet positivt forhold mellem renten og inflation. Da vi har at gøre med 1 lag, så kan dette være på grund af prizepuzzle, som gør at øgede renter på kort sigt kan presse virksomheder til at øge deres priser og dermed inflationen i markedet. Dette er en anamoli ift. normalteori, som er vidt diskuteret i litteraturen.

### Renten og unemployment:

Den kortsigtede effekt mellem renten og unemployment er negativ på -1.828. Dette betyder, at når renten stiger, så falder arbejdsløsheden. Dette giver heller ikke mening ift. teorien, og vi udregner derfor også den langsigtede effekt:

$$-\frac{\phi_1}{\theta_1} = -\frac{L(unemp\_ts, 1)}{L(r\_ts, 1)} = -\left(\frac{-0.157}{-0.049}\right) = -3.20$$

Her kan vi se, at det langsigtede forhold mellem renten og unemployment er stærk negativt. Det betyder altså, at når renten stiger, så falder arbejdsløsheden. Dette giver igen ikke mening ift. til teorien, og vi refererer til nogle af forklaringerne ovenfor.

#### 4.2.6.1 Speed of adjustment

Nu vil vi undersøge error-term-relationship, som også kaldes speed of adjustment. Denne fortæller noget om, hvor hurtigt en variabel vender tilbage til tidligere niveau, når der sker et stød til den. Den fortæller altså hvor hurtigt modellen konvergerer mod sit langsigtede ligevægt.

Vi opstiller en tabel for vores estimator:

Table 30

	<i>Dependent variable:</i>		
	Unemployment	Inflation	Renten
	(1)	(2)	(3)
infl_ts_diff	-0.041** (0.020)		0.095 (0.067)
L(error_ecm_r, 1)			-0.061* (0.032)
unemp_ts_diff		-0.169 (0.301)	-1.380*** (0.225)
r_ts_diff	-0.156*** (0.021)	0.193** (0.095)	
L(error_ecm_unemp, 1)	-0.064*** (0.015)		
L(error_ecm_infl, 1)		-0.152*** (0.048)	
Constant	-0.004 (0.021)	0.003 (0.082)	0.004 (0.071)
Observations	163	163	163
R <sup>2</sup>	0.321	0.100	0.256
Adjusted R <sup>2</sup>	0.309	0.083	0.242
Residual Std. Error (df = 159)	0.273	1.048	0.901
F Statistic (df = 3; 159)	25.105***	5.863***	18.241***

*Note:* \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Her kan vi kigge på coefficienterne igen. Her skal vi være opmærksomme på, at de altid er negative, og de er altid mellem  $[-1 : 0]$

### Unemployment:

Her kan vi se, at vi har en error coefficient på -0.064. Dette betyder, at hvis der sker et stød til arbejdsløshed, så vil den efter et kvartal være vendt tilbage mod sin langsigtede ligevægt med 6,4%.

### Inflation:

Her har vi en coefficient på -0.152. Dette betyder, at hvis der sker et stød til inflationen, så vil den efter et

kvartal være vendt tilbage mod sin langsigtede ligevægt med 15,2%.

**Renten:**

Her har vi en coefficient på -0.061. Dette betyder, at hvis der sker et stød til inflationen, så vil den efter et kvartal være vendt tilbage mod sin langsigtede ligevægt med 6,1%.

## 4.2.7 Diagnostics:

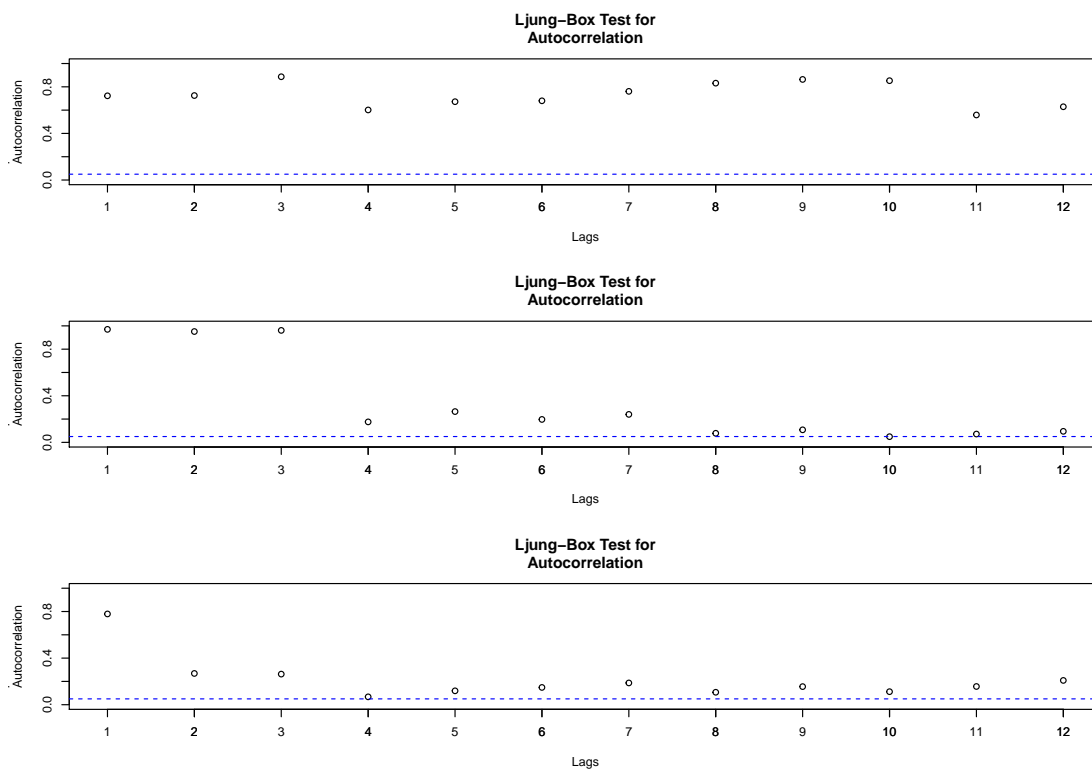
Vi laver diagnostics test på vores modeller for at teste vores resultater. På den måde kan man verificerer, hvad man har lavet.

### 4.2.7.1 Perform serial correlation and ARCH test

Først tester vi for seriekorrelation på vores ECM modeller. Dette gøres ved at finde residualerne fra vores modeller og lave en Ljungs-box. Den tester for følgende hypoteser:

$$H_0 : \text{No serielcorrelation}$$

$$H_1 : \text{Serielcorrelation}$$



I plottene ovenfor tester vi for seriekorrelation i ecm-modellerne for unemployment, inflation og renten. Her kan vi se, at der i plottene ikke er serielcorrelation. Dog har vi været nødsaget til at tilføje 2 lags til inflationsmodellen for at fjerne dette.

Næst vil vi lave en ARCH test, som tester for heteroskedasticitet i modellen. Dette er heller ikke ønskeligt, da det kan skabe biased resultater, da det leder til ineffektive standard errors og skaber seriekorrelation i fejllædet. Opstiller hypoteser:

$$H_0 : \text{No autocorrelation/no heteroskedasticity}$$

$$H_1 : \text{Autocorrelation/heteroskedasticity}$$

Table 31: ARCH test af vores ECM-modeller

	Unemployment	Inflation	Renten
Pvalue	0.0005172	0.0223802	0.0124556

Da vi på alle modellerne får lave p-værdier, kan vi på et 5% signifikansniveau afvise  $H_0$ . Dette betyder, at der er autokorrelation/heteroskedasticitet i modellen. Dette er ikke godt, da det betyder, at TS4 er brudt, og kan give biased resultater.

#### 4.2.7.2 Test the model for the assumption of normality

Næst vil teste om residualerne er normalfordelte. Dette gøres igennem Jarque-Bera-testen, hvor hypoteserne kan opstilles:

**Nulhypotese:**

$$H_0 : \epsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{Residualer er normalfordelte})$$

**Alternativ hypotese:**

$$H_1 : \epsilon \neq N(0, \sigma^2) \quad (\text{Residualerne er ikke normalfordelte})$$

Table 32: Normality-test af vores ECM-modeller

	Unemployment	Inflation	Renten
Pvalue	0.0005172	0.0223802	0.0124556

Her kan vi på alle vores 3 variable forkaste  $H_0$  på et 5% signifikansniveau. Dette betyder, at der ikke er nogle af vores residualer i ECM-modellerne, som er normalfordelte. Dette bryder TS6, og er ikke optimalt, men estimererne kan stadigvæk godt være BLUE. Vi ved også fra forelæsningerne, at normalfordeling kan være svært at opnå i ens data.

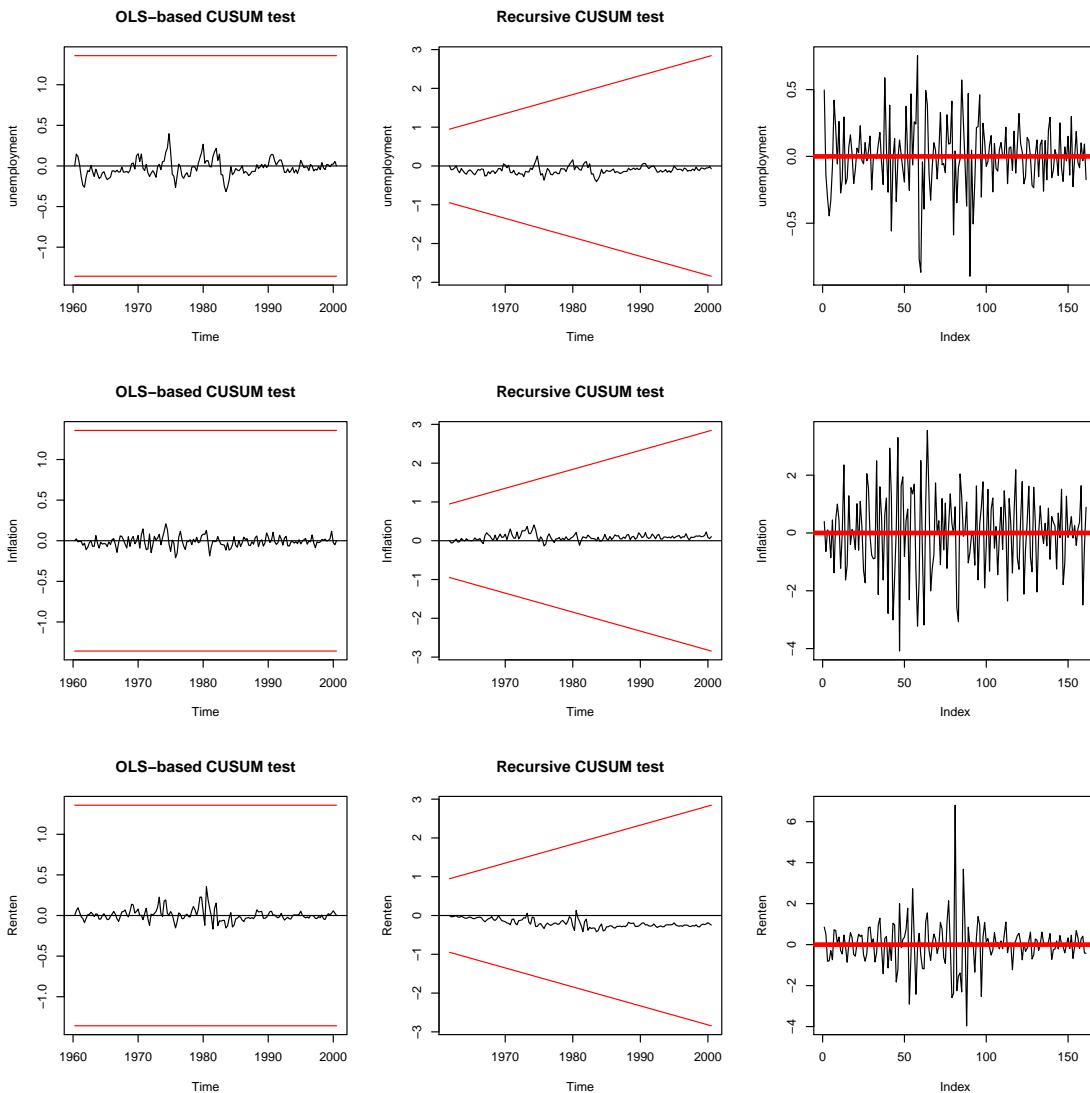
Her kunne vi også have anvendt shapiro.testen istedet. Hvis residualerne ikke er normalfordelte, kunne vi lave flere tests med fx. dummy variable, kigge på strukturel breaks eller parameter stability test, og netop det sidste vil vi kigge på i næste opgave.

#### 4.2.7.3 Show parameter stability of your model using strucchange pack-age in R. Are your estimates reliable? Remember, strucchange package in R only recognises models coded using `lm()` function.

Denne test bruges for at undersøge om der er strukturelle brud i vores ecm modeller. Dette er ikke nødvendigvis et problem, men hvis det ændrer på dataen markant, så kan strukturelle brud give misvisende resultater og være svært at forecaste med.

```
## integer(0)
```

```
## integer(0)
```



```
## integer(0)
```

Ud fra overstående plots kan vi se, at der ikke er noget af vores data, som indeholder strukturelle brud. Dermed kan vi konstatere, at vores estimater er stabile.



## 5 Appendix

### 5.1 HP-filter

Hodrick-Prescott filteret <sup>1</sup> eller dekomponeringen også kaldt for HP filter er et matematisk værktøj, som anvendes til at fjerne cykliske komponenter fra en tidsserie af data. HP filteret kan således anvendes i projektet til at analysere konjunkturcyklernes påvirkning af de finansielle markeder. Filteret anvendes praktisk til at gøre kurverne mere smooth, fremfor en trendlinje.

HP filteret blev oprindeligt introduceret af E.T. Whittaker i 1923 og blev introduceret til økonomi af økonomerne Edward Prescott og Robert Hodrick. Matematisk kan trend komponentet i HP filteret opstilles på følgende formel:

$$\min_{T_t} \sum_{t=1}^m C_t^2 + \lambda \sum_{t=2}^{m-1} ((T_{t+1} - T_t) - (T_t - T_{t-1}))^2$$

Hvor  $T_t$  er trendkomponentet og  $C_t$  er det cykliske komponent. Dette er udledt fra hele vores datasæt  $y_t$  på følgende:

$$y_t = T_t + C_t$$

$m$  angiver antallet af observationer,  $t$  er en tidsperiode, og  $\lambda$ -værdien er vores parameter, der bruges til at gøre trenden mere smooth. Det er altså en parameter, der går ind og straffer variationer fra trenden. Jo højere denne er, jo mere bliver variationer straffet, og desto mere jævn bliver vores trend. Ved meget høje lambda værdier kommer det ofte til at ligne lineære kurver. Det første led i ligningen minimerer forskellen på dataserien og trenden, hvor det andet led bruges som et "straffed", der tager udgangspunkt i lambda værdien og straffer variationer i trenden (Klitgaard & Ehmsen, 2020).

Justeringen af tendensen i tidsserien for at gøre de kortsigtede udsving mere følsomme opnås ved at definere størrelsen på parameteren  $\lambda$ , som en multiplikator. Det er altså analytikeren, som bestemmer størrelsen på parameteren og dermed bestemmer, hvor smooth kurven for tidsserien bliver. En klar fordel ved HP filteret er dens evne til at gøre trendvækst meget varierende frem for konstant over for eksempel en 40 årig periode. Ulempen ved værktøjet er, at forskellen mellem trenden og konjunkturcyklen er vilkårlig, da det afhænger af den individuelle bestemte smoothing parameter,  $\lambda$ .

Måden hvorpå lambda værdien fastsættes er forsøgt beskrevet flere gange, og der er flere forskellige konklusioner omkring det. Hodrick og Prescott fastsatte i 1981 lambda værdien til at være 1600 for konjunkturcykler i kvartalsvis data. Da vores eget data er kvartalsvis, så er dette vores udgangspunkt. Der har dog været flere meninger om dette undervejs og i 2002 udarbejdede Morten O. Ravn og Harald Uhlig en rapport, der forsøgte at belyse dette emne (Ravn & Uhlig, 2002). De udledte ligningen:

$$\lambda_a = \frac{1}{a^4} a_1$$

Hvor HP-parameteren,  $\lambda$  skal justeres med forskellen i data frekvensen opløftet i 4. Her tager vi altså den oprindelige frekvens på 1600, som er for kvartalsvis data og justerer den efter frekvensen af det data, vi bruger. Hvis vi fx. valgte at kigge på finansielt data i kvartalsvis data, så ved vi, at finansielle cykler er 4

<sup>1</sup>Hele afsnittet om HP-filteret er kopieret direkte fra vores 4. Semester projekt

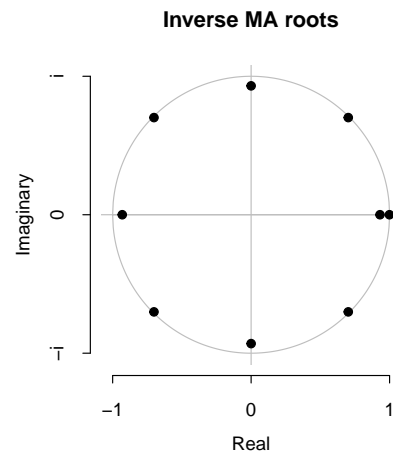
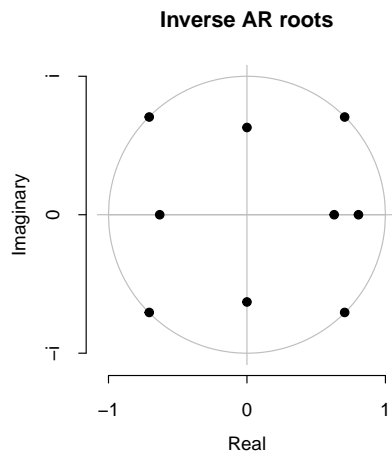
gange længere end konjunkturcykler, og man skulle derfor justere overstående ligning på følgende måde:

$$4^4 * 1600 = 409600$$

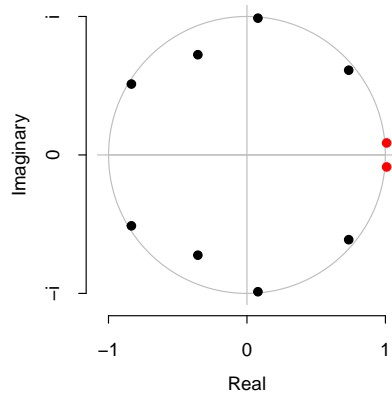
Og så har vi hermed  $\lambda$  værdien for finansielle cykler(finansielt data) i kvartalsvise perioder. Det kunne fx. være aktiepriser over en given tidsperiode. Dette læner sig også op ad nyere litteratur, hvor de foreslår, at man skal bruge en lambda værdi på 400.000 for denne datatype (BIS, 2017, p 4).

## 5.2 Unit root cirkel

Her kan vi se eksempler på hvordan det ser ud, hvis vores data ikke er inden for unit root cirklen:



**Inverse roots of AR characteristic polynomial**



## 5.3 Antagelser

### 5.3.1 Gauss-Markov Antagelser - Unbiasedness of OLS

**TS1. Linear in parameters**

**TS2. Zero conditional mean**

$$E(\epsilon_t | X) = 0, \text{ for } t = 1, \dots, n.$$

TS2. holder ikke ved omitted variables, measurement error in regressor osv.

**TS.3 No Perfect Collinearity**

Når TS1 til og med TS3 holder så er OLS estimatorerne unbiased betinget af X, og det betyder at

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$$

**TS4. Homoscedasticity**

Betinget af X så er variansen af  $\epsilon_t$  den samme for alle  $t$ .

$$Var(\epsilon_t | X) = Var(\epsilon_t) = \sigma^2, \text{ for } t = 1, \dots, n.$$

TS4 holder ikke ved ARCH.

**TS5. No Serial Correlation**

Betinget af X, så er fejllenede i forskellige perioder ikke korrelerede for alle  $t$ .

$$Corr(\epsilon_t, \epsilon_s | X) = 0, \text{ for alle } t \neq s$$

Vi kan opdage seriekorrelation ved at teste residualerne for autokorrelation. TS5 holder ikke når vi udlader vigtige variabler, for det vil få fejllenede til at være korreleret. Hvis vi ikke har opskrevet regressionen på den rigtige form (måske noget skulle have stået i anden).

Hvis TS1 til TS5 holder så er OLS estimatorerne de beste lineære unbiased estimator (BLUE) betinget på X.

**TS6. Normality**

Fejllenede  $\epsilon_t$  er uafhængige af X og følgende gælder:

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Hvis TS1 til TS5 holder, så er alle OLS estimatorne normalfordelte betinget på X.

### 5.3.2 Asymtopiske egenskaber i OLS ved tidsserier

#### TS1' Linear and weak dependence

Nu er  $x_t$  og  $y_t$  svagt stationærer.

#### TS2' Zero Conditional mean

$$E(\epsilon_t \mid x_t) = 0, \text{ for } t = 1, \dots, n.$$

Denne antagelse er væsentlig svagere end TS2.

#### TS3' No Perfect Collinearity

Hvis antagelserne fra TS1' til TS3' holder, så er OLS estimatorerne konsistente.

#### TS4' Homoscedasticity

Fejllenede er homoskedastiske på samme tid, hvis vil sige at variansen til fejllenede  $\sigma^2$  givet alle  $x_t$ .

$$Var(\epsilon_t \mid x_t) = \sigma^2$$

#### TS5' No Serial Correlation

$$Corr(\epsilon_t, \epsilon_s \mid x_t, x_s) = 0$$

Hvis antagelserne fra TS1' til TS5' holder, så er OLS estimatorerne asymtopisk normalfordelte.

## 5.4 Teoretisk del

### Key topics:

#### Basic concept of time series data

- Main components of time series data (seasonal, cyclical, trend, stochastic)
- Random walk process, white noise process
- Stationarity – unit root tests (Dickey Fuller and ADF)

#### Univariate time series analysis

- AR and MA process
- ARIMA models

#### Introduction to Multivariate Time Series Analysis

- ARDL model (Engle-granger, ARDL bounds)
- Error correction model
- Cointegration
- VAR model, SVAR model (Cholesky decomposition)

**Note:** You can be asked any question related to the course (not included in the list).

## 5.5 Basic concepts of time series data

### 5.5.1 Main components of time series data (seasonal, cyclical, trend, stochastic)

En typisk tidsserie kunne opskrives på følgende måde:

$$X_t = seasonal_t + trend_t + cyclical_t + \epsilon_t$$

Hvor vi har følgende komponenter:

- Seasonal: Variablen kan være påvirket af forskellige sæsoner
- Cyclical: Variablen er påvirket af forskellige cyklusser (fx. finansielle cykler)
- Trend: Variablen kan have en opadgående/nedadgående trend, eller ingen trend
- Stochastic/Irregular variation: Den del, der gør tidsserien tilfældig, fordi den har et randomt komponent.

### 5.5.2 Random walk process

En random walk process/model antager, at alle værdier tager et skridt væk fra sin oprindelige værdi, når man lagrer den med en periode. Der findes en Random walk uden drift, der kan opskrives fra en AR(1) model, hvor man sætter  $\theta = 1$  og  $\mu = 0$

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvor fejlleddet  $\epsilon_t$  følger en white-noise process:

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Og hvor flere perioder opskrives/udledes:

$$Y_T = Y_{T-1} + \epsilon_T$$

$$Y_T = Y_{T-2} + \epsilon_{T-1} + \epsilon_T$$

Hvor vi så kan lave et generelt udtryk:

$$Y_T = Y_0 + \sum_1^T \epsilon_t$$

Nu skal vi huske definitionen på stationære processor. Her husker vi, at  $\text{mean}(\mu)$  skal være uændret, når variansen er uændret. Det betyder altså, at de to gerne skal være begrænsede konstanter. Så hvis vi udleder:

$$E\{Y_T\} = E\{Y_0 + \sum_1^T \epsilon_t\} = Y_0 \quad (\text{mean})$$

$$\text{Var}\{Y_T\} = \text{Var}\{Y_0 + \sum_1^T \epsilon_t\}$$

$$\text{Var}\{Y_T\} = 0 + \sum_1^T \text{Var}\{\epsilon_t\}$$

$$Var\{Y_T\} = Var\{Y_0 + \sum_1^T \epsilon_t\}$$

$$Var\{Y_T\} = T\sigma^2 \quad (\text{Variance})$$

Her kan vi se, at vores mean er en konstant, mens vores varians er en funktion af tiden( $T$ ). Vi får altså problemer med stationærhed i denne model. Dette kan dog løses ved at tage differencen i vores tidsserie. Dette gør vi stor brug af i dette kursus.

Udover Random walk uden drift, så kan vi også have random walk med drift. Før tog vi afsæt i vores AR(1) model, hvor man satte  $\theta = 1$  og  $\mu = 0$ . Nu tillader vi at  $\mu \neq 0$  og vi får dermed drift med i modellen. Den opskrives nu indeholdende  $\mu$  da denne kan være forskellig fra nul:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvor fejlløbet  $\epsilon_t$  stadigvæk følger en white-noise process:

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Afhængig af  $\mu$  vil tidsserien nu drifte opad eller nedad. Dette kaldes også en stocastic trend(tilfældig trend). Forskellen fra tidligere er, at nu er hverken mean eller varians konstante. Dette kan vi udlede:

$$\begin{aligned} E\{Y_T\} &= \mu + Y_{T-1} + \epsilon_T \\ &= \mu + \mu + Y_{T-2} + \epsilon_{T-1} + \epsilon_T \\ &= Y_0 + \sum_1^T \mu + \sum_1^T \epsilon_T \\ E\{Y_0 + \sum_1^T \mu + \sum_1^T \epsilon_T\} &= Y_0 + T\mu \end{aligned} \quad (\text{mean})$$

Her kan vi se, at mean ikke er en konstant. Nu prøver vi med variansen:

$$\begin{aligned} Var\{Y_T\} &= Var\{Y_0 + \sum_1^T \mu + \sum_1^T \epsilon_t\} \\ Var\{Y_T\} &= 0 + 0 + \sum_1^T Var\{\epsilon_t\} \\ Var\{Y_T\} &= T\sigma^2 \end{aligned}$$

Her kan vi også se, at variansen ikke er en konstant. Vi har altså stadigvæk et problem med stationærhed, men dette kan igen løses ved hjælp af at differenciere tidsserien  $Y_t$ . Det gøres således:

$$Y_t - Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2} + \epsilon_t$$



På venstre side får vi nu forskellen i  $Y_t$ , og på venstre side går de to  $Y_{t-1}$  ud med hinanden:

$$\underbrace{Y_t - Y_{t-1}}_{\Delta Y_t} = \underbrace{Y_{t-1} - Y_{t-1}}_0 + \epsilon_t$$

Ved indsættelse får vi at:

$$\Delta Y_t = \epsilon_t$$

Når en process kan laves stationær ved at tage “first difference” så kaldes det for “difference stationary process”.

### 5.5.3 White Noise (Purely Random Process)

Det er en stokastisk process som er en middelværdi på 0:

$$E(\epsilon_t) = 0$$

En konstant varians:

$$E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$$

som ikke er seriekorreleret:

$$E(\epsilon_t \epsilon_\tau) = 0$$

for  $t \neq \tau$  Det kan skrives på måden

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Hvor IID står for en tilfældig variable der er individuelt og identisk fordelt (independent and identically distributed).

### 5.5.4 Stationarity

Vi har to former for stationaritet:

Strict stationarity: som er en process, som forudsætter at “joint probability distribution” af en tilfældig variabel ikke forandrer sig over tid.

En joint probability funktion har forskellige moments/øjeblikke afhængig af tidsperioden. En strict stationarity skal være uforanderlig over hele perioden. Vi arbejder dog også med weak stationarity.

Weak stationarity: forudsætter, at det kun er de to første moments/øjeblikke, der er uforanderlige. Det betyder altså, at mean(uden trend) skal være uforandret, når variansen er uforandret. Disse to “følger hinanden” - Groft sagt.

I dette kursus arbejder vi mest med weak stationarity. Da det er det mest sandsynlige i reel data.

### 5.5.5 Trend- Versus Difference-Stationary Series

Når man taler om trends i tidsserier, så kan der være to forskellige former for trends. Vi har en forudsigelig trend, som altid vender tilbage til den langsigtede ligevægt ved stød. Hvis denne trend fjernes fra dataet, får vi en tilfældig stationær process. Dette kaldes også for en Trend-stationary serie.

Derudover så har vi en difference-stationary serie, hvor trenden kan være tilfældig. Her vil stød være permanente, fordi man aldrig vil vende tilbage til den langsigtede ligevægt. Her skal man differencere serien med sig selv x-antal gange for at få en tilfældig stationær process.

### 5.5.6 Unit root tests(Dickey Fuller and ADF)

Dickey-fuller testen bruges til at teste for unit roots i tidsserie. ADF-testen er en avanceret version af denne. Vi udleder Dickey-fuller testen nedenfor:

Vi starter med at opskrive en variable  $Y_t$  på en AR(1) process

$$Y_t = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Så trækkes  $Y_{t-1}$  fra på begge sider

$$Y_t - Y_{t-1} = \theta Y_{t-1} - Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi trækker den nutidige værdi fra den tidligere værdi for at få  $\Delta Y_t$ , og  $Y_t$  sættes uden for parentes

$$\Delta Y_t = (\theta - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi kalder  $(\theta - 1)$  for  $\pi$  for at generalisere.

$$\Delta Y_t = \pi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvor vi antager at  $\epsilon$  følger en white noise process.

$$\epsilon \sim IID(0, \sigma^2)$$

Der gælder forskellige ting for  $\theta$  :

Hvis  $|\theta| < 1$  så er det en stationær process

Hvis  $|\theta| = 1$  så er der unit root i tidsserien, og processen er ikke stationær

Hvis  $|\theta| > 1$  så eksplodere processen

Når vi laver en unit root test, så bruger vi

**Nulhypotesen:**

$$H_0 : \theta = 1 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese:**

$$H_1 : \theta < 1 \quad (\text{No unit root})$$

Grunden til vi tester om  $\theta$  er mindre end 1 er, at det kun er der hvor det er en stationær process. Vi kan altså ikke bruge den alternative hypotese at  $\theta$  er forskellige fra 1.

Efter omskriv så kan vi opskrive vores hypoteser på følgende måde

**Nulhypotese:**

$$H_0 : \pi = 0 \quad (\text{Unit root})$$

**Alternative hypotese**

$$H_1 : \pi < 0 \quad (\text{No unit root})$$

Der gælder for Dickey-Fuller testen at hvis  $\pi = 0$  så er  $\theta = 1$ , og det betyder at der er unit root i vores tidsserie. Vi skal ikke bruge vores almindelige t-værdier, men derimod sammenligne dem med DF(tau)-statistikkerne som kan ses i appendix under tau-kritiske værdier.

## 5.6 Univariate time series analysis

### 5.6.1 Auto regressive (AR)

En tidsserie er en AR hvis nutidige værdier af tidsserien kan blive fundet ud fra tidligere værdier af tidsserien. Dette kan opskrives på ligningen med ordnen  $p$

$$y_t = c + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Hvor  $c$  er en konstant (intercept), og hvor antallet af laggede værdier kan bestemmes af ACF og PACF. Hvis vi skal bruge en AR(1), så kan det opskrives som nedenfor

$$y_t = c + \beta_1 y_{t-1} + \epsilon_t$$

Eksempler kan være aktiepriser og temperaturen.

### 5.6.2 Moving average (MA)

Det er en process hvor den nutidige værdi af en serie er bestemt af en lineær kombination af tidligere fejlled. Vi antager generelt set at fejlledene er normalfordelt. Dette kan opskrives med ordnen  $q$ , ordnen angiver hvor mange lags der skal med.

$$y_t = c + \epsilon_t + \beta_2 \epsilon_{t-1} + \beta_3 \epsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$

Hvor  $\epsilon_t$  er en white noise process. Hvis vi vil se på en MA(1) process, så ser den ud som nedenfor:

$$y_t = c + \epsilon_t + \beta_2 \epsilon_{t-1}$$

Vi har brugt andre beta-værdier for at gøre det mere tydeligt at der er tale om to forskellige processer.

### 5.6.3 Autoregressive-moving-average models (ARMA)

ARMA modeller kan bruges til at fortolke eller forecaste på tidsserier. Delen med AR der laver man en regression på variabelens laggede værdier, hvor MA delen er en regression af den lineære samling af fejlled. ARMA modeller beskrives oftest som ARMA( $p, q$ ), hvor  $p$  angiver ordnen for AR delen, og  $q$  angiver ordnen for MA delen.

### 5.6.4 Autoregressive integrated moving average (ARIMA)

Det er en model der bygger ovenpå en ARMA model, og de kan begge bruges til at forecaste tidsserier med. En ARIMA(1,0,0) er en AR(1), en ARIMA(0,1,0) er en I(1) og en ARIMA(0,0,1) er en MA(1) process.

$$ARIMA \quad \underbrace{(p, d, q)}_{\text{(den ikke stationære del af modellen)}} \quad \underbrace{(P, D, Q)}_{\text{(sæson delen af modellen)}}$$

## 5.7 Introduction to multivariate Time Series Analysis

### 5.7.1 Cointegration

Cointegration opstår, når to eller flere variable har et langsigtet forhold med hinanden. Ofte bliver det langsigtede forhold beskrevet som en ligevægt, som modeller vender tilbage til ved stød eller lignende. Man vil gerne have cointegration i sine modeller, da man så bedre kan arbejde med dem uanset om det  $I(0)$  eller  $I(1, \dots, x)$ -processer. Det kan man fordi, at de altid finder tilbage til den samme ligevægt, og det derfor er optimalt at anvende dem til estimering og forecasting.

### 5.7.2 Error correction model(ECM)

Når der er cointegration mellem flere variable, så vil der opstå perioder, hvor variablerne differenciere sig fra hinanden i form af fx. et stød eller andre faktorer, der gør, at de afviger fra den langsigtede ligevægt. Ved cointegration vil de altid komme tilbage til den langsigtede ligevægt, men det kan ikke siges, hvornår præcis dette sker. Her kommer ECM-modellen i spil. Med modellen kan man estimere afvigelsen fra den langsigtede ligevægt. ECM-modellen kan altså bruges til at finde "speed of adjustment" i vores variable.

Her skal vi huske, at hvis der ikke er cointegration, så er der risiko for, at modellerne ikke konvergerer mod den langsigtede ligevægt, men istedet kommer længere og længere væk fra hinanden.

### 5.7.3 Autoregressive distributed lag model(ARDL)

En ARDL-model tager højde for de samme ting, som ECM-modellen, men den er specificeret på en anden måde. Det langsigtede forhold er stort set det samme som i ECM-modellen, og om man bruger den ene eller anden er mere et spørgsmål om præference frem for reel funktion.

### 5.7.4 Engle-Granger Procedure

Engle-Granger kan bruges til at teste for cointegration. Dette kan gøres på to eller flere variable. Hvis vi har at gøre med to variable, så er der ikke cointegration, hvis begge variable er stationære, eller hvis de er af forskellige order of integration. Hvis vi har med tre eller flere variable at gøre, så gælder det at minimum to af disse, skal have samme order of integration. Første step i Engle-Granger proceduren er altså at finde order of integration ved hjælp af fx. en ADF-test. Dette uddyber vi i "Basic concepts of time series data".

Når vi så har konkluderet, at der et langsigtet forhold(cointegration) mellem vores variable, kan man opstille en ECM model. Her ville vi kunne bruge OLS til parameter estimation og bla. få estimatoren speed of adjustment, som er ret interessant i makroøkonomi.

En af problemerne/begrænsningerne ved ECM er, at den kører i flere steps. Og hvis man laver fejl i step 1, så bliver den videreført i step 2, fordi man bruger residualerne fra step 1. Dette kunne fx. være misspecifikation, som kom med videre i hele modellen, og man dermed fik biased resultater.

### 5.7.5 Vector autoregressive (VAR) modeller

VAR modeller bliver brugt til at forecaste fremtidige værdier af variable, hvor der differentieres mellem VAR, RVAR og SVAR.

#### Den simple form for VAR

Vi vil i dette afsnit beskrive den simple form for VAR, og opskrive den på matematisk form. En VAR model kan bruges til at beskrive sammenhængene mellem flere variable både i nutidige og tidligere perioder. Det er en meget anderkendt og brugt økonometrisk metode i dag. Vi vil nu opskrive metoden på ligningsform, hvor vil bruge de tre variable  $x$ ,  $y$  og  $z$ .

$$x_t = b_{10} - b_{12}z_t - b_{13}y_t + a_{11}x_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + a_{13}y_{t-1} + e_{1t}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}x_t - b_{23}y_t + a_{21}x_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + a_{23}y_{t-1} + e_{2t}$$

$$y_t = b_{30} - b_{31}x_t - b_{32}z_t + a_{31}x_{t-1} + a_{32}z_{t-1} + a_{33}y_{t-1} + e_{3t}$$

Flytter alle termer med nutidige værdier over på venstresiden:

$$x_t + b_{12}z_t + b_{13}y_t = b_{10} + a_{11}x_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + a_{13}y_{t-1} + e_{1t}$$

$$b_{21}x_t + z_t + b_{23}y_t = b_{20} + a_{21}x_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + a_{23}y_{t-1} + e_{2t}$$

$$b_{31}x_t + b_{32}z_t + y_t + b_{30} + a_{31}x_{t-1} + a_{32}z_{t-1} + a_{33}y_{t-1} + e_{3t}$$

Opstiller på matrice form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 1 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \\ y_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \end{bmatrix}}_{\Gamma_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}}_{e_t}$$

For at gøre det mere overskueligt kan det opstilles på en generel form, hvor de forskellige værdier er angivet i underbrackets under deres respektive matricer.

$$By_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 y_{t-1} + e_t$$

Den generelle form er ikke påvirket af antallet af variable og vil derfor altid forblive den samme.

Generelle VAR modeller kan ikke estimeres, da der er interaktion mellem  $x_t$ ,  $y_t$  og  $z_t$ . Dette har resulteret i et andet framework, der kaldes en Reduced VAR model, som kan estimeres ved hjælp af OLS.

### Reduced form VAR model (RVAR)

Vi opskriver først VAR på den generelle form:

$$By_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 y_{t-1} + e_t$$

Flytter matricen  $B$

$$y_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 y_{t-1} + B^{-1}e_t$$

Vi kan ikke estimere modellen hvor de nutidige værdier for  $x$  og  $z$  optræder flere steder i de to ligninger, så vil effekterne af deres samtidige effekter fanges i fejlleddet. Derfor angiver vi nu parametrene som funktioner af VAR modellens parametre. Vi opstiller dem derfor som  $A$  matricer og kalder  $\epsilon$  for fejlleddet. Dette gøres for at illustrere, at vi er gået fra en generel VAR model til en Reduced form VAR model.

$$y_t = \underbrace{B^{-1}\Gamma_0}_{A_0} + \underbrace{B^{-1}\Gamma_1}_{A_1} y_{t-1} + \underbrace{B^{-1}e_t}_{\epsilon}$$

Så vi får:

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + \epsilon$$

Modellen kan nu estimeres, da der ikke længere er missspecifikation i modellen/fejlleddet.

Kritikken på RVAR modellen går på, at man går ind og fjerner nogle komponenter for at kunne estimere. Det er derfor ikke den bedst mulige estimation. I 1980 publicerer Christopher A. Sims en artikel, der skal løse problemerne med at estimere uden restriktioner. Dette bliver kaldt for Structural VAR modeller, og kan estimere mange variable på tværs af tidsperioder uden restriktioner. Denne vil vi beskrive nedenfor.

### Structural VAR model (SVAR)

I SVAR modellen tillader vi variable at påvirke hinanden på samme tid, og det er derfor den type VAR model, hvor der er færrest restriktioner, som rent faktisk kan estimeres. Forskellen fra VAR er, at her vil vi ikke lade  $x$  blive påvirket i samme periode af  $z$  og  $y$ . Vi vil istedet lade  $z$  blive påvirket af  $x$  i samme periode, og  $y$  vil vi lade blive påvirket af  $z$  og  $x$  i samme periode.

Modellen opstilles:

$$x_t = b_{10} + a_{11}x_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + a_{13}y_{t-1} + e_{1t}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}x_t + a_{21}x_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + a_{23}y_{t-1} + e_{2t}$$

$$y_t = b_{30} - b_{31}x_t - b_{32}z_t + a_{31}x_{t-1} + a_{32}z_{t-1} + a_{33}y_{t-1} + e_{3t}$$

Flytter nutidige værdier over på venstre side:

$$x_t = b_{10} + a_{11}x_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + a_{13}y_{t-1} + e_{1t}$$

$$b_{21}x_t + z_t = b_{20} + a_{21}x_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + a_{23}y_{t-1} + e_{2t}$$

$$b_{31}x_t + b_{32}z_t + y_t = b_{30} + a_{31}x_{t-1} + a_{32}z_{t-1} + a_{33}y_{t-1} + e_{3t}$$

Opskriver på matrice form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \\ y_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \end{bmatrix}}_{\Gamma_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}}_{e_t}$$

Vi har nu en model, der kan estimeres, som ikke undlader variable, og hvor der er færrest mulige restriktioner.

### 5.7.6 Cholesky decomposition

Cholesky decomposition er en metode i linæer algebra til at løse linære systemer, som siger:

Hvis  $A$  er en symmetrisk, positiv og afgrænset(definite) matrice, så er der minimum en “lower-triangle-matrix”  $L$  som:

$$A = LL^T$$

Cholesky decomposition kan altså bruges til at lave en “lower-triangle-matrix”, og bruges ofte til at udregne den inverse matrice  $A^{-1}$  og determinanten af  $A$ .



## 5.8 Flere Begreber

### Unit root:

Det er en stokastisk trend(kunne være random walk), som er et problem når man arbejder med tidsseriemodeller.

### Cointegration:

Hvis der findes en stationær linær sammenhæng mellem nogle variable, der ikke er stationære, så siges det at variablerne er cointegrated. Et eksempel på to variable der er cointegrated er en fuld person og personens hund (Murray, 1994). Når den fulde er ude og gå med sin hund, så løber hunden rundt omkring, og det ligner ikke der er en linær sammenhæng. De er dog ude at gå en tur sammen, og de starter og slutter det samme sted. Det skaber en linær sammenhæng.

### Philip-Perron test (PP test)

Det er en statistisk test lavet af Peter C. B. Phillips og Pierre Perron, som undersøger om der er unit root i en tidsserie.

### White Noise (Purely Random Process)

Det er en stokastisk process som er en middelværdi på 0:

$$E(\epsilon_t) = 0$$

En konstant varians:

$$E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$$

som ikke er seriekorreleret:

$$E(\epsilon_t \epsilon_t) = 0$$

for  $t \neq \tau$  Det kan skrives på måden

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Hvor IID står for en tilfældig variable der er individuelt og identisk fordelt (independent and identically distributed).

### Zivot and Andrews testen (ZA testen):

Det er en test for strukturelle brud i en tidsserie, men ZA testen kan kun finde et strukturelt brud, selvom det er meget muligt der er mere end et strukturelt brud i tidsserien. Når man laver ZA testen, så er det muligt at vælge mellem tre funktioner. Den første er ingen trend og ingen trend. Den anden er intercept men ingen trend. Den sidste er at både at have intercept og trend med.

### Seriekorrelation(autokorrelation):

Seriekorrelation kan beskrives som forholdet mellem en variabel og dens laggede version af sig selv. Så man

måler forholdet mellem variabelens nutidige værdi med en tidligere værdi. Seriekorrelation resulterer i Biased resultater og bryder med TS5.

### **Autocorrelation Function (ACF):**

Det er en funktion der beskriver hvordan nutidige værdier af en serie relatere sig til tidligere værdier af tidsserien. ACF kan på en gang medtage trend, seasonality, cyclic og residualet når ACF undersøger for korrelationer.

### **Partiel Autocorrelation Function (PACF):**

Det er en funktion der finder korrelationen af residualerne og den næste laggede værdi, og den er partiel fordi vi fjerner tidligere fundet variation inden vi finder den næste korrelation.

### **Forecast bias:**

Det er når der er stor for forskel på de rigtige værdier af en variable, og de værdier der blev forecastet. Det kan være at en model har det med at forecaste for høje værdier af en variable.

### **The lag operators:**

Til en konstant

$$L(\alpha) = \alpha \quad (1)$$

Til en variable

$$L(x_t) = x_{t-1} \quad (2)$$

Dobbelt lag til en variable

$$L^2(x_t) = L[L(x_{t-1})] = L(x_{t-1}) = x_{t-2} \quad (3)$$

Lag opløftede i n til en variable

$$L^n(x_t) = x_{t-n} \quad (4)$$

Den nutidige værdi af en variable hvor den laggede trækkes fra

$$(1 - L)x_t = x_t - L(x_t) = x_t - x_{t-1} = \Delta x_t \quad (5)$$

Forskellen mellem den laggede værdi af en periode, og den laggede værdi af to perioder

$$L(1 - L)x_t = (1 - L)x_{t-1} = x_{t-1} - L(x_{t-1}) = x_{t-1} - x_{t-2} = \Delta x_{t-1} \quad (6)$$

### **Fitted values (fittede værdier):**

Alle tidsserier kan bruges til at lave forecast på baggrund af de tidligere værdier af tidsserien. De fittede værdier er de forecastede værdier af en variable, så hvis vores variable vi forecaster er  $y_t$ , så vil de fittede værdier være  $\hat{y}_{(t|t-1)}$ .

Eksempel med BNP som værende tidsserien, så vil de fittede værdier være  $B\hat{N}P_{(t|t-1)}$

### **Procylical variable:**

En variable der flukturer på en måde, som har en positiv korrelation med BNP.

### Countercyclical variable

En variable der flukturer på en måde, som har en negativ korrelation med BNP.

### Sæsonjustere data

Økonomisk data kan have sæsoneffekter i sig, det kunne være husholdningers forbrug der generelt er større omkring jul end resten af året. Når man sæsonjustere data, så forsøger man at fjerne sæsoneffekterne. Grunden til man vil sæsonjustere data er for at gøre det nemmere at sammenligne data.

Dette gøres ved at finde residualerne for ens variabel, og finde gennemsnittet af ens fitted værdier og lægge de to sammen så:

$$\text{Residuals} + \text{mean}(\text{fitted.values})$$

### F.test

En F-test bruges til at sammenligne spredninger (kunne også være varianser). Testen bliver lavet på samme måde som en t-test, men test-størrelsen beregnes anderledes. Til F-test der bruges også en F-fordeling til at beregne testsandsynligheden.

### Shapiro.test (Shapiro-Wilk test)

Det er en test for normality, og undersøger om antagelse TS6 overholdes. Der bruges p-værdier for at undersøge hypoteserne. Hypoteserne er givet ved:

$$H_0 : \text{populationen er normalfordelt}$$

$$H_1 : \text{populationen er ikke normalfordelt}$$

### Jarque-Bera.test

Det er en statistisk test der undersøger om dataet følger en normalfordelingen, og testen undersøger derfor antagelse TS6.

### Engle.Granger test

Det er en test for cointegration, som ser på om to variable har en langsigtet effekt. Den bruger residualerne fra en regressionsmodel, og så bruges en ADF test for at se om der unit root i residualerne. Hvis der er unit root i residualerne så er variablene ikke cointegrated. Hvis der ikke er unit root i residualerne, så er variablene cointegrated. Testen kan kun bruges for variable som er af samme I process, men det må ikke være over I(1).

### ARDL bounds test

Det er en måde at undersøge om der er cointegration mellem variable, og dermed også om der er langsigtede forhold mellem variablene. Denne metode kan bruges selvom variablene både er i I(0) eller I(1) processer, men den kan ikke bruges hvis variablene er i I(2) eller over.

### **Autoregressive distributed lag (ARDL) model**

Det er en model der bruges når man har med ECM at gøre. Det er en regressionsmodel hvor koefficienterne ikke har restriktioner på samme måde som de har med ECM.

### **ECM**

Error correction modeller bliver brugt, når flere tidsserier har et langsigtet forhold med hinanden. Dette kaldes også cointegration. Man kan bruge dem til at estimere både kortsigtede og langsigtede effekter, men også bruges til at estimere speed of adjustment.

### **VECM**

Vector error correction model er en avanceret version af ECM, som kan håndtere flere forskellige afhængige variable og forskellige langsigtede forhold på tværs af hinanden. Denne model tager egentlig en VAR model og tilføjer ECM til denne VAR model. Hvor man ville gøre følgende:

- Opstil en VAR model
- Teste for cointegration (langsigtede forhold)
- Anvende VECM til at analysere estimater

### **Dickey-Fuller (DF) test**

Det er en test der kan bruges til at finde ud af om der er unit root i ens data.

### **Augmented Dickey-Fuller (ADF) test**

Den augmented Dickey-Fuller test bruges til at se om der er unit root i ens data. Det der er anderledes ved ADF er, at en ADF test er bedre end DF testen, og kan håndtere problemmet med seriekorrelation. Samtidig kan en ADF test bruges til mere komplekse modeller end DF testen.

### **Ljung-box test**

Det er en test for seriekorrelation (autokorrelation), og det betyder den tester for fejledet følger en white noise process. Hvis vi finder at der er seriekorrelation, og fejledet ikke følger en white noise process, så er det fordi vi ikke har lavet en god regression. Det kan være der mangler lags, vigtige variable osv.

### **Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) test**

Det er en test der undersøger om antagelsen om homoskedasticitet holder. Den har to test der gør mere eller mindre det samme: White's test og Breusch-Pagan/Godfrey LM test.

### **White's test**

Det er en test der bruges til at undersøge om variansen af ens fejled er konstant, altså om ens regression har heteroskedasticitet i sig.

### **Breusch-Pagan-Godfrey LM test**

Det er en test der bruges til at undersøge ens residualer for heteroskedasticitet.

### Residualer er normalfordelt

Det er det samme som antagelse TS6, og det betyder at fejllidene følger en normalfordeling og der ikke er væsentlige outliers.

### URCA pakken

URCA pakken i R har en lang række funktioner, som er relevante i tidsserie økonometri. Vi gør mest brug af ADF testen(ur.df), som tester for unit root, men vi har også anvendt bla. ur.za, som tester for strukturelle brud.

### auto.arima pakken

Auto arima pakken i R retunerer den bedste ARIMA model med hensyn til aicc, aic eller bic værdien.

### Out of sample forecast

Out of sample forecasting er når man bruger alt ens data til at forecaste fremtiden. Man bruger ofte den bedste model, som man har fundet ved in-sample forecasting.

### Spurious regressions

Spurious betyder uægte/falsk og anvendes ofte om regressioner, forhold eller lignende i statistikken. En falsk regression kan altså være en regression, der viser et forkert forhold mellem to variable, fordi der er unit root i dataet, og der ikke er taget højde for dette.

### Difference of variable

Hvis vi har en variable  $Y_t$  som står for en tidsserie og  $Y$  indikere at det er BNP. Så hvis vi skal tage "first difference" til  $Y_t$  så kommer det til at se sådan her ud:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Hvis vi nu skal tage "difference" til en variable vi allerede har taget "first difference" på (det kunne være  $\Delta Y_t$ ) så kommer det til at se sådan her ud:

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$

Sådan kunne vi blive ved, og det er særlig relevant når vi snakker om at skulle finde den rette I process.

### Glidende gennemsnit

Det er en metode til at udglatte udsving i en variable ved brug af tidligere værdier af variablen.

### Negativ $R^2$

Det er ikke godt, og det betyder at de variable man har med i sin regression ikke har særlig stor forklaringsgrad.

## 5.9 Udledninger

### 5.9.1 Basale udledninger

#### Expected value

Vi tager den forventede værdi til en konstant (a) ganget på en variable (X), og så bliver konstanten (b) lagt til. Den forventede værdi til en konstant er bare konstanten selv, så den kan man tage udenfor (a tages udenfor):

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Den forventede værdi til en variable (X) lagt til en anden variable (Y):

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Den forventede værdi til to variable ganget med hinanden. Der er det muligt at tage den forventede værdi af den ene variable ( $E(X)$ ) og gange den med den forventede værdi af den anden variable ( $E(Y)$ ). Det gælder kun hvis X og Y er uafhængige af hinanden:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

#### Variansen

Variansen til en variable er givet på følgende måde:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(XX) - E(X)E(X)$$

Når den forventede værdi af variabelen er lig nul ( $E(X)=0$ ), så er variansen til variabelen givet ved:

$$Var(X) = E(X^2)$$

Variansen til en konstant (a) ganget på en variable (X), hvor der bliver lagt en konstant til (b). Variansen til en konstant alene er 0 ( $Var(b)=0$ ), og resten er givet ved:

$$Var(aX + b) = a^2Var(X)$$

Variansen til to variable lagt sammen er givet ved:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Hvis X og Y er uafhængige, så er variansen til to variable lagt sammen givet ved:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

### Covariance

Kovariansen til to variable er givet ved:

$$Cov(X, Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Kovariansen til den samme variable er givet ved:

$$Cov(X, X) = Var(X)$$

Kovariansen til en konstant (a) ganget med en variable (X), hvor der bliver lagt en konstant til (b), med en anden lineær model (cY+d) på samme form:

$$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$$

Kovariansen til to variable lagt samme overfor en anden variable er givet ved:

$$Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$$

### 5.9.2 Tidsserie-relevante udledninger

#### Partial autocorrelation function(PACF)

Hvis vi har en AR(1) process:

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Som kan omskrives til en AR(2) process ved at tilføje  $\theta_2 Y_{t-2}$ :

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

Hvor  $\theta_2$  er den partielle korrelation der er mellem  $Y_t$  og  $Y_{t-2}$  mens alle effekter af  $Y_{t-1}$  holdes fast. Vi kan opskrive dette på en mere genrel måde:

$$\theta_1 = \rho_1$$

Og

$$\theta_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

De kan findes direkte i IR.

#### General ARMA(p,q) Process

Den generelle autoregressive moving average process (ARMA(p,q)) kan opskrives som:

$$Y_t = \mu + \theta Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + \epsilon_t + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}$$

For at gøre det mere tydeligt hvilken del der er AR og hvilken del der er MA, så har vi lavet følgende:

$$Y_t = \overset{\text{en konstant}}{\hat{\mu}} + \underbrace{\theta Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p}}_{\text{AR del}} + \overset{\text{et fejlet}}{\hat{\epsilon}_t} + \underbrace{\alpha_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}}_{\text{MA del}}$$

Hvor at fejleddet følger en white noise process:

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Hvis nu at vi har med ikke stationært data, så skal vi lave en ARIMA(p,d,q) model.



## Properties of forecasts

Hvis vi starter med at antage en AR(1) process:

$$Y_t = \mu + \theta_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi antager at fejlledeet følger en white noise process.

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Hvis vi antager at vi kender  $\mu$  og  $\theta_1$  så kan vi forcaste  $y_{t+1}$ . Vi skal være opmærksom på  $I_t$  altså hvilken order of integration serien er i perioden  $t$ .

Vi kan udlede et "one point ahead forecast" betinget af vi kender ordnen for integration. Når vi kigger på et forecast for næste periode  $y_{t+1}$  så gøres det således:

$$E_t(y_{t+1}) = E_t(\mu + \theta_1 y_t + \epsilon_t)$$

Vi har antaget at fejlledeet havde en middelværdi på 0, så den bliver 0:

$$E_t(y_{t+1}) = E_t(\mu) + E_t(\theta_1 y_t) + \underbrace{(\epsilon_t)}_0$$

Ved indsættelse fåes:

$$E_t(y_{t+1}) = E_t(\mu) + E_t(\theta_1 y_t) + 0$$

Den forventede værdi af en konstant ( $\mu$ ) er konstanten selv.

$$E_t(y_{t+1}) = \underbrace{E_t(\mu)}_{\mu} + E_t(\theta_1 y_t)$$

Ved indsættelse fåes:

$$E_t(y_{t+1}) = \mu + E_t(\theta_1 y_t)$$

Vi ved at  $E_t(y_t | I_t) = y_t$ , og derfor gælder at:

$$E_t(y_{t+1}) = \mu + \underbrace{E_t(\theta_1 y_t)}_{\theta_1 y_t}$$

Ved indsættelse fåes:

$$E_t(y_{t+1}) = \mu + \theta_1 y_t$$

Dette var udledningen af et forecast af en AR(1) process for en periode frem.

Det er også muligt at udlede et forecast for to perioder frem  $y_{t+2}$ , igen er det vigtigt at være opmærksom på at det er betinget af  $I_t$ . Det gør vi på følgende måde:

$$E_t(y_{t+2}) = E_t(\mu + \theta_1 y_{t+1} + \epsilon_{t+1})$$

Vi antager at fejlledeet følger en normal fordeling, og derfor er en middelværdi på 0:

$$E_t(y_{t+2}) = E_t(\mu) + E_t(\theta_1 y_{t+1}) + E_t(\underbrace{\epsilon_{t+1}}_0)$$

Ved at sætte det ind får vi at:

$$E_t(y_{t+2}) = E_t(\mu) + E(\theta_1 y_{t+1}) + 0$$

Den forventede værdi af en konstant ( $\mu$ ) er bare konstanten:

$$E_t(y_{t+2}) = \underbrace{E_t(\mu)}_{\mu} + E(\theta_1 y_{t+1})$$

Vi kan tage konstanten udenfor ( $\theta$ ):

$$E_t(y_{t+2}) = \mu + \theta_1 E(y_{t+1})$$

Vi indsætter  $E(y_{t+1}) = \mu + \theta y_t$ :

$$E_t(y_{t+2}) = \mu + \theta_1 \underbrace{E(y_{t+1})}_{\mu + \theta_1 y_t}$$

Ved indsættelse fåes:

$$E_t(y_{t+2}) = \mu + \theta_1(\mu + \theta_1 y_t)$$

Vi ganger nu ind i parantesen:

$$E_t(y_{t+2}) = \mu + \theta_1 \mu + \theta_1^2 y_t$$

Dermed har vi fundet forecast for to perioder frem.

Vi kan opskrive et generelt forecast for  $y_{t+j+1}$ :

$$E(y_{t+j+1}) = E(y_{t+j+1}|I_t)$$

### 5.9.3 Moving Average Process

Vi har en MA(1) process:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$$

Vi antager at vores fejllid  $\epsilon_t$  følger en normalfordeling.

#### Calculate the mean of $Y_t$

Det første vi skal gøre er at udregne den forventede værdi af  $Y_t$

$$E(Y_t) = E(\underbrace{\mu + \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}}_{Y_t})$$

Vi starter med at gange E ind i parantesen, og tage den forventede værdi til hvert led:

$$E(Y_t) = E(\mu) + E(\epsilon_{t-1}) + E(\alpha\epsilon_{t-1})$$

Den forventede værdi til en konstant ( $\mu$ ) er lig konstanten selv. Da vi antog vores fejllid har en middelværdi på 0, så giver de begge nul:

$$E(Y_t) = \underbrace{E(\mu)}_{\mu} + \underbrace{E(\epsilon_{t-1})}_0 + \underbrace{E(\alpha\epsilon_{t-1})}_0$$

Det giver os at den forventede værdi til variablen ( $Y_t$ ) er lig  $\mu$ :

$$E(Y_t) = \mu$$

#### Calculate the variance of $Y_t$

Vi lader  $Y_t$  være givet ved:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$$

Vi vælger nu at rykke  $\mu$  over på venstre side:

$$Y_t - \mu = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$$

Nu tager vi så variansen af det:

$$Var(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2]$$

Vi ved at  $Y_t - \mu$  er lig  $\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$ , så det sætter vi ind:

$$Var(Y_t) = E[(\underbrace{\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}}_{Y_t - \mu})^2]$$

Vi vælger nu at opløfte parantesen i forhold til at have det i anden ( $\wedge^2$ ):

$$Var(Y_t) = E(\epsilon_t^2 + 2\alpha\epsilon_t\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-1}^2)$$

Nu tager vi den forventede værdi til de tre led i ligningen:

$$Var(Y_t) = E(\epsilon_t^2) + 2\alpha E(\epsilon_t \epsilon_{t-1}) + \alpha^2 E(\epsilon_{t-1}^2)$$

Vi har tidligere antaget at fejleddet har en middelværdi på 0, og det betyder at  $E(\epsilon_t \epsilon_{t-1}) = 0$ :

$$Var(Y_t) = E(\epsilon_t^2) + \underbrace{2\alpha E(\epsilon_t \epsilon_{t-1})}_0 + \alpha^2 E(\epsilon_{t-1}^2)$$

Det giver os følgende:

$$Var(Y_t) = E(\epsilon_t^2) + \alpha^2 E(\epsilon_{t-1}^2)$$

Vi har antaget at fejleddet havde en konstant varians  $\sigma^2$ , og vi får derfor følgende:

$$Var(Y_t) = \underbrace{E(\epsilon_t^2)}_{\sigma^2} + \alpha^2 \underbrace{E(\epsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2}$$

Vi kan nu indsætte  $\sigma^2$  og få:

$$Var(Y_t) = \sigma^2 + \alpha^2 \sigma^2$$

Vi kan nu tage  $\sigma^2$  udenfor parentes:

$$Var(Y_t) = (1 + \alpha^2) \sigma^2$$

Vi har nu fundet variansen for  $Y_t$ .

### Calculate the autocovariance between $Y_t$ and $Y_{t-1}$

Vi starter med at lade  $Y_t$  være givet ved:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1}$$

Vi vælger nu at rykke  $\mu$  over på venstre side:

$$Y_t - \mu = \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1}$$

Vi lader  $Y_{t-1}$  være givet ved

$$Y_{t-1} = \mu + \epsilon_{t-1} + \alpha \epsilon_{t-2}$$

Vi vælger nu at rykke  $\mu$  over på venstre side:

$$Y_{t-1} - \mu = \epsilon_{t-1} + \alpha \epsilon_{t-2}$$

Vi vil nu finde kovariansen mellem  $Y_t$  og  $Y_{t-1}$ :

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)]$$

Vi indsætter nu udtrykket  $Y_t - \mu = (\epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1})$

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[\underbrace{(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})}_{Y_t - \mu}(Y_{t-1} - \mu)]$$

Nu sætter vi udtrykket  $Y_{t-1} - \mu = (\epsilon_{t-1} + \alpha\epsilon_{t-2})$  ind:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[\underbrace{(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})}_{Y_t - \mu}\underbrace{(\epsilon_{t-1} + \alpha\epsilon_{t-2})}_{Y_{t-1} - \mu}]$$

Vi kan nu tage konstanten ( $\alpha$ ) udenfor parantesen:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \alpha E[(\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})]$$

Vi har to paranteser, og ved at gange dem sammen får vi  $\epsilon_{t-1}^2$

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \alpha E[\underbrace{(\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})}_{\epsilon_{t-1}^2}]$$

Vi får nu følgende:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \alpha E(\epsilon_{t-1}^2)$$

Vi antog tidligere at fejlledet havde en konstant varians  $\sigma^2$ , og derfor får vi følgende:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \alpha \underbrace{E(\epsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2}$$

Ved indsættelse fås:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \alpha\sigma^2$$

Vi har nu fundet autocovariance for  $Y_t$  og  $Y_{t-1}$ .

**Calculate the autocovariance between  $Y_t$  and  $Y_{t-2}$**

Vi starter med at lade  $Y_t$  være givet ved:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$$

Vi vælger nu at rykke  $\mu$  over på venstre side:

$$Y_t - \mu = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$$

Vi lader  $Y_{t-2}$  være givet ved

$$Y_{t-2} = \mu + \epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-3}$$

Vi vælger nu at rykke  $\mu$  over på venstre side:

$$Y_{t-2} - \mu = \epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-3}$$

Vi vil nu finde kovariansen mellem  $Y_t$  og  $Y_{t-2}$ :

Vi indsætter nu udtrykket  $Y_t - \mu = (\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})$

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[\underbrace{(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})}_{Y_t - \mu}(Y_{t-1} - \mu)]$$

Nu sætter vi udtrykket  $Y_{t-2} - \mu = (\epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-3})$  ind:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[\underbrace{(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})}_{Y_t - \mu}\underbrace{(\epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-3})}_{Y_{t-2} - \mu}]$$

Vi har nu to parenteser, hvor at når vi ganger dem sammen, så får vi 0:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[\underbrace{(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-3})}_0]$$

Dermed får vi at:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = 0$$

Der gælder helt generelt at:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$$

for alle  $k = 2, 3, 4, \dots, k$ .

### Inverting an MA(1) process into AR( $\infty$ )

Det første vi gør at opskrive en MA(1) process, bemærk vi skriver - og ikke + fordi Hamid har det med i sine slids på denne måde. Normalt ville man skrive + :

$$Y_t = \epsilon_t - \alpha\epsilon_{t-1}$$

Vi ved fra lag operators i appendix, at  $\epsilon_{t-1} = L(\epsilon_t)$  :

$$Y_t = \epsilon_t - \underbrace{\alpha\epsilon_{t-1}}_{\alpha L(\epsilon_t)}$$

Ved indsættelse fåes:

$$Y_t = \epsilon_t - \alpha L(\epsilon_t)$$

Da vi har  $\epsilon_t$  til at optræde i begge led på højresiden, så kan vi sætte udenfor parantes:

$$Y_t = \epsilon_t(1 - \alpha L)$$

Nu kan vi rykke  $(1 - \alpha L)$  over på venstresiden:

$$\frac{Y_t}{(1 - \alpha L)} = \epsilon_t$$

Vi bruger det geometriske theorem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = ar^0 + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^n$$

Det konvergerer mod

$$\frac{a}{1 - r}$$

hvis at  $|r| < 1$  er opfyldt. Hvis vi nu skal omskrive det til ovenstående, så skal vi antage at  $r = \alpha L$ :

$$\epsilon_t = (\alpha L)^0 Y_t + (\alpha L)^1 Y_t + (\alpha L)^2 Y_t + \dots + (\alpha L)^n Y_t$$

Hvis vi gør brug af lag operator 2 og 4 fra appendix, så får vi at:

$$\epsilon_t = Y_t + \alpha^1 Y_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} + \dots + \alpha^n Y_{t-n}$$

Det opskrifer vi så det står på  $AR(\infty)$  form ved at tage alt andet end  $Y_t$  på højresiden og flytte over på venstre siden:

$$\epsilon_t = Y_t + \underbrace{\alpha^1 Y_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} + \dots + \alpha^n Y_{t-n}}_{\text{Flyttes over på den anden side}}$$

Vi får dermed  $Y_t$  til at stå alene, for at stille det på den pæneste visuelle måde så står  $Y_t$  til venstre:

$$\epsilon_t Y_t = \epsilon_t - \alpha^1 Y_{t-1} - \alpha^2 Y_{t-2} - \dots - \alpha^n Y_{t-n}$$

Nu har vi omskrevet en MA(1) process til en AR( $\infty$ ).

**The ACF of an MA(1) process**

$$\rho_k = \frac{\overbrace{Cov(Y_t, Y_{t-k})}^{\alpha\sigma^2}}{\underbrace{Var(Y_t)}_{((1+\alpha^2)\sigma^2)}}$$

Ved indsættelse fåes:

$$\rho_k = \frac{\alpha\sigma^2}{(1+\alpha^2)\sigma^2}$$

Vi har  $\sigma^2$  både i tælleren og i nævneren, og kan derfor fjerne dem:

$$\rho_k = \frac{\alpha\cancel{\sigma^2}}{(1+\alpha^2)\cancel{\sigma^2}}$$

Det giver os:

$$\rho_k = \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}$$

Hvis at  $k > 1$  så gælder at:

$$\rho_k = 0$$

Dette var udledningen af ACF for en MA(1) process.



### 5.9.4 Autoregressive Processes

Vi starter med at opskrive en AR(1) process:

$$Y_t = \mu + \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi antager at fejlledeet følger en white noise process:

$$\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

**Calculate the mean of  $Y_t$**

$$E(Y_t) = E(\mu + \theta Y_{t-1} + \epsilon_t)$$

Vi tager nu den forventede værdi til hvert led i parantesen. Den forventede værdi af en konstant ( $\mu$ ) er konstanten selv, så der skriver vi bare  $\mu$ :

$$E(Y_t) = \mu + E(\theta Y_{t-1}) + E(\epsilon_t)$$

Vi kan nu tage konstanten ud af parantesen ( $\theta$ ):

$$E(Y_t) = \mu + \theta E(Y_{t-1}) + E(\epsilon_t)$$

Vi lader  $Y_{t-1}$  være givet ved:

$$(Y_{t-1}) = \mu + \theta Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

Vi sætter nu udtrykket for  $Y_{t-1}$  ind:

$$(Y_t) = \mu + \theta E(\underbrace{\mu + \theta Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}}_{(Y_{t-1})}) + E(\epsilon_t)$$

Da vi har antaget at fejlledeet har en middelværdi på 0, så kan vi sætte denne til 0:

$$E(Y_t) = \mu + \theta E(\mu + \theta Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \underbrace{E(\epsilon_t)}_0$$

Dermed får vi:

$$E(Y_t) = \mu + \theta E(\mu + \theta Y_{t-2} + \epsilon_{t-1})$$

Vi ganger nu  $\theta E$  på alle led i parantesen:

$$E(Y_t) = \mu + \theta \mu + \theta^2 E(Y_{t-2}) + \theta E(\epsilon_{t-1})$$

Vi lader nu  $Y_{t-2}$  være givet ved:

$$Y_{t-2} = \mu + \theta Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}$$

Vi indsætter nu udtrykket for  $Y_{t-2}$ :

$$E(Y_t) = \mu + \theta\mu + \theta^2 E(\underbrace{\mu + \theta Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}}_{(Y_{t-2})}) + \theta E(\epsilon_{t-1})$$

Vi ved at  $\theta E(\epsilon_{t-1})$  giver 0, så det opskrifter vi nu:

$$E(Y_t) = \mu + \theta\mu + \theta^2 E(\underbrace{\mu + \theta Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}}_{(Y_{t-2})}) + \underbrace{\theta E(\epsilon_{t-1})}_0$$

Begge dele bliver sat ind og vi får:

$$E(Y_t) = \mu + \theta\mu + \theta^2 E(\mu + \theta Y_{t-3} + \epsilon_{t-2})$$

Da  $\mu$  indgår i alle led, så kan vi sætte det udenfor parentes:

$$E(Y_t) = \mu(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^\infty)$$

Hvis at  $|\theta| < 1$  gælder, så får vi at:

$$E(Y_t) = \frac{\mu}{1 - \theta}$$

Nu har vi udregnet middelværdien for  $Y_t$  for en Autoregressive process.

### Calculate the variance of $Y_t$

Vi lader først  $Y_t$  være givet ved:

$$Y_t = \mu + \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvis vi flytter  $\mu$  over på venstreside får vi:

$$Y_t - \mu = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi lader nu  $y_t$  være givet ved  $Y_t - \mu$ :

$$\underbrace{Y_t - \mu}_{y_t} = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Ved indsættelse fåes:

$$y_t = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Det som vi vil i denne udledning er at finde variansen til  $Y_t$  med vi gør det på  $y_t$ , husk at der er forskel:

$$Var(y_t) = E[(y_t - E(y_t))^2]$$

Vi får nu at:

$$Var(y_t) = E[(\theta y_{t-1} + \epsilon_t)^2]$$

Vi tager nu den forventede værdi til hvert led i parantesen, og vi ganger også  $(^2)$  ind i parantesen:

$$Var(y_t) = \theta^2 E(y_{t-1}^2) + E(\epsilon_t)^2$$

Vi ved at variansen til fejlleddet er konstant, og givet ved  $\sigma^2$ :

$$Var(y_t) = \theta^2 E(y_{t-1}^2) + \underbrace{E(\epsilon_t)^2}_{\sigma^2}$$

Ved indsættelse fåes at:

$$Var(y_t) = \theta^2 E(y_{t-1}^2) + \sigma^2$$

Nu lader vi  $y_{t-1}^2$  være givet ved  $(\theta y_{t-2} + \epsilon_{t-1})^2$ . Ved at sætte dette ind får vi at:

$$Var(y_t) = \theta^2 E \underbrace{(y_{t-1}^2)}_{(\theta y_{t-2} + \epsilon_{t-1})^2} + \sigma^2$$

Ved indsættelse fåes:

$$Var(y_t) = \theta^2 E(\theta y_{t-2} + \epsilon_{t-1})^2 + \sigma^2$$

Dette kan vi blive ved med at gøre, for nu har  $y_{t-2}$ , som der også kan findes et udtryk for og sættes ind. Det gør vi dog ikke, men tager derimod variansen  $\sigma^2$  udenfor parantes for at finde et generelt udtryk:

$$Var(y_t) = \sigma^2(1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^\infty)$$

Hvis  $|\theta| < 1$  gælder, så vi at:

$$Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}$$

Vi har nu fundet variansen for  $Y_t$  for en autoregressive process.

### Calculate the variance of $Y_t$ - simpel metode

Vi lader variansen af  $Y_t$  være givet ved:

$$Var(Y_t) = Var(\mu\theta Y_{t-1} + \epsilon_t)$$

Vi tager nu variansen til hvert led i parantesen:

$$Var(Y_t) = Var(\mu) + \theta^2 var(Y_{t-1}) + Var(\epsilon_t)$$

Vi antager at variansen til  $\mu$  at være 0, og at variansen til fejlleddet til at være konstant  $\sigma^2$ :

$$Var(Y_t) = \underbrace{Var(\mu)}_0 + \theta^2 var(Y_{t-1}) + \underbrace{Var(\epsilon_t)}_{\sigma^2}$$

Når vi sætter ind får vi at:

$$\text{Var}(Y_t) = 0 + \theta^2 \text{var}(Y_{t-1}) + \sigma^2$$

Nu vælger vi at flytte  $\theta^2 \text{var}(Y_{t-1})$  over på venstre side:

$$\text{Var}(Y_t) - \theta^2 \text{var}(Y_{t-1}) = \sigma^2$$

Hvis vi har at  $|\theta| < 1$  så har vi en stationær autoregressive provess, og det gør vi kan sætte  $\text{Var}(Y_t)$  udenfor parentes. Bemærk at vi tidligere havde  $\text{var}(Y_{t-1})$ , men med vores antagelse om  $|\theta| < 1$ , så får vi  $\text{Var}(Y_t)$ :

$$\text{Var}(Y_t)(1 - \theta^2) = \sigma^2$$

Vi kan nu få  $Y_t$  til at stå alene på venstre side ved at flytte  $(1 - \theta^2)$  over på højre side:

$$\text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{(1 - \theta^2)}$$

**Calculate the autocovariance between  $Y_t$  and  $(Y_{t-1})$ :**

Vi starter med at opskrive ligningen som:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)]$$

Hvis at  $|\theta| < 1$  gælder, så kan det omskrives til:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}$$

Generelt kan det skrives på formen, hvis følgende gælder  $|\theta| < 1$ , dermed får vi at:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta^{|s-t|} \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}$$

Hvor s og t er antallet af lags.

**Converting an AR(1) process into MA( $\infty$ )**

Vi starter med at have en AR(1) process:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Vi kan også skrive  $Y_{t-1}$  som  $L(Y_t)$ :

$$Y_t = \alpha \underbrace{Y_{t-1}}_{L(Y_t)} + \epsilon_t$$

Ved indsættelse fåes:

$$Y_t = \alpha L(Y_t) + \epsilon_t$$

Nu kan vi flytte  $\alpha L(Y_t)$  over på venstre side:

$$Y_t - \alpha L(Y_t) = \epsilon_t$$

Vi har nu to  $Y_t$  udtryk på venstre side, og kan derfor sætte det udenfor parentes:

$$Y_t(1 - \alpha) = \epsilon_t$$

Vi kan nu flytte  $(1 - \alpha)$  over på højre side:

$$Y_t = \frac{\epsilon_t}{(1 - \alpha)}$$

For en AR(1) process er det afgørende at  $|\alpha| < 1$  for at det er en stationær process.

Vi brugte det geometriske serie theorem for at finde frem til dette. Det ser sådan her ud:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = ar^0 + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^n$$

Det konvergere mod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{\alpha}{1 - r}$$

Så længe at  $|r| < 1$ .

### The ACF of an AR(1) process

Vi starter med at antage weak stationarity, og definere ordnen for autocovariancen som værende:

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(Y_t, Y_{t-k})$$

Hvis at vi har med en stokastisk process at gøre, så kan det generaliseres til:

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{Var(Y_t)}$$

Vi kender både udtrykket for  $Cov(Y_t, Y_{t-k})$ , og for  $Var(Y_t)$ :

$$\rho_k = \frac{\overbrace{Cov(Y_t, Y_{t-k})}^{\theta^k(\sigma^2/1-\theta^2)}}{\underbrace{Var(Y_t)}_{(\sigma^2/1-\theta^2)}}$$

Nu sætter vi ind i ligningen:

$$\rho_k = \frac{\theta^k((\sigma^2/1 - \theta^2))}{\sigma^2/1 - \theta^2}$$

Da vi har  $(\sigma^2/1 - \theta^2)$  både i tælleren og nævneren, så de går ud med hinanden:

$$\rho_k = \frac{\theta^k(\cancel{\sigma^2}/\cancel{1-\theta^2})}{\cancel{\sigma^2}/\cancel{1-\theta^2}}$$

Dermed får vi:

$$\rho_k = \theta^k$$

## 6 Tau-værdier (Kritiske værdier)

### STATISTICAL TABLES (ONLINE)

**Table A: Empirical Cumulative Distribution of  $\tau$**

Significance level	0.01	0.025	0.05	0.10
<b>Sample Size <math>T</math></b>	The $\tau$ statistic: No Constant or Time Trend ( $a_0 = a_2 = 0$ )			
25	-2.65	-2.26	-1.95	-1.60
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61
250	-2.58	-2.24	-1.95	-1.62
300	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62
$\infty$	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62
	The $\tau_\mu$ statistic: Constant but No Time Trend ( $a_2 = 0$ )			
25	-3.75	-3.33	-2.99	-2.62
50	-3.59	-3.22	-2.93	-2.60
100	-3.50	-3.17	-2.89	-2.59
250	-3.45	-3.14	-2.88	-2.58
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57
$\infty$	-3.42	-3.12	-2.86	-2.57
	The $\tau_\tau$ statistic: Constant + Time Trend			
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
100	-4.05	-3.73	-3.45	-3.15
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
500	-3.97	-3.67	-3.42	-3.13
$\infty$	-3.96	-3.67	-3.41	-3.12

Source: The table is reproduced from Fuller (1996).

## 2 STATISTICAL TABLES (ONLINE)

**Table B: Empirical Distribution of  $\Phi$**

Significance level	0.10	0.05	0.025	0.01
Sample size $T$	$\Phi_1$			
25	4.12	5.18	6.30	7.88
50	3.94	4.86	5.80	7.06
100	3.86	4.71	5.57	6.70
250	3.81	4.63	5.45	6.52
500	3.79	4.61	5.41	6.47
$\infty$	3.78	4.59	5.38	6.43
	$\Phi_2$			
25	4.67	5.68	6.75	8.21
50	4.31	5.13	5.94	7.02
100	4.16	4.88	5.59	6.50
250	4.07	4.75	5.40	6.22
500	4.05	4.71	5.35	6.15
$\infty$	4.03	4.68	5.31	6.09
	$\Phi_3$			
25	5.91	7.24	8.65	10.61
50	5.61	6.73	7.81	9.31
100	5.47	6.49	7.44	8.73
250	5.39	6.34	7.25	8.43
500	5.36	6.30	7.20	8.34
$\infty$	5.34	6.25	7.16	8.27

**Table C: Critical Values for the Engle–Granger Cointegration Test**

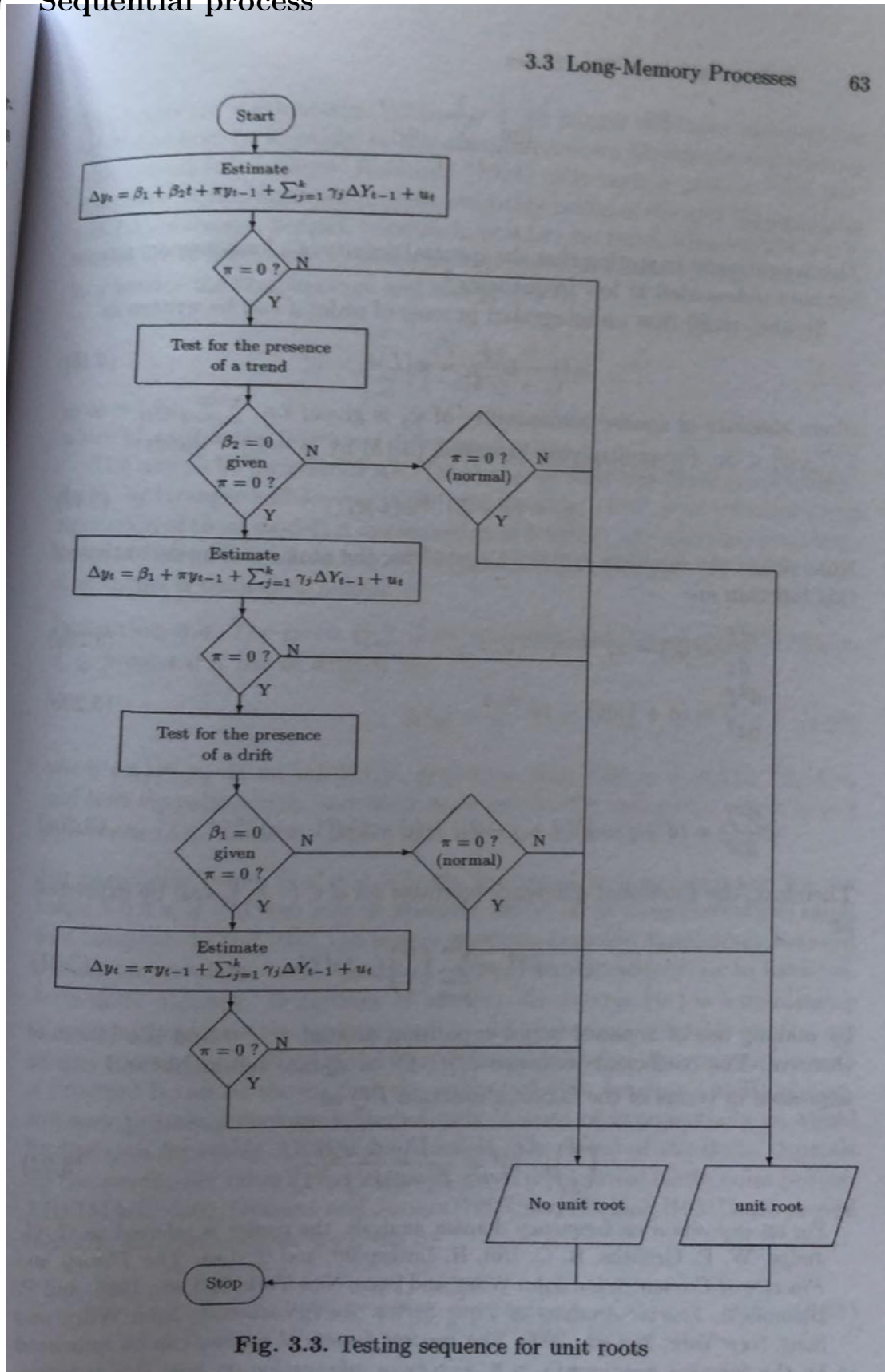
$T$	1%	5%	10%	1%	5%	10%
	<i>Two Variables</i>			<i>Three Variables</i>		
50	−4.123	−3.461	−3.130	−4.592	−3.915	−3.578
100	−4.008	−3.398	−3.087	−4.441	−3.828	−3.514
200	−3.954	−3.368	−3.067	−4.368	−3.785	−3.483
500	−3.921	−3.350	−3.054	−4.326	−3.760	−3.464
	<i>Four Variables</i>			<i>Five Variables</i>		
50	−5.017	−4.324	−3.979	−5.416	−4.700	−4.348
100	−4.827	−4.210	−3.895	−5.184	−4.557	−4.240
200	−4.737	−4.154	−3.853	−5.070	−4.487	−4.186
500	−4.684	−4.122	−3.828	−5.003	−4.446	−4.154

The critical values are for cointegrating relations (with a constant in the cointegrating vector) estimated using the Engle–Granger methodology.

Source: Critical values are interpolated using the response surface in MacKinnon (1991).



## 7 Sequential process



## 8 Litteraturliste

- BIS. (2017). Range of practices in implementing the countercyclical capital buffer policy. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d407.htm>.
- Borio, C. (2012). The Financial cycle and macroeconomics: What have we learnt?. BIS Working Papers n<sup>o</sup> 395.
- Byrialsen, M. R., Raza, H., & Stamhus, J. (Accepted/In press). Exploring the macroeconomic effects of unemployment benefits. *Review of Political Economy*.
- Byrialsen, M. R., & Raza, H. (Accepted/In press). Household debt and macroeconomic stability: An empirical stock-flow consistent model for the Danish economy. *Metroeconomica*. <https://doi.org/10.1111/meca.12358>
- Eriksen, J., & Etzerodt, S. F. (2019). Time-series cross-section analyser i komparativ politisk økonomi. *Metode & Forskningsdesign*, 3, 24-55. <https://journals.aau.dk/index.php/mf/article/view/3400>
- Enders, W. (2015). *Applied econometric time series*. New York: Wiley.
- Klitgaard, A. G., & Ehmsen, J. S. (2020). Den finansielle cyklus og de realøkonomiske effekter.
- Kotzé. (2019). Kevin Kotzé. Kevinkotze. Retrieved January 2, 2022, from <https://www.economodel.com/time-series-analysis-2019>
- Hanson, M. S. (2004). The “price puzzle” reconsidered. *Journal of Monetary Economics*, 51(7), 1385–1413. <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2003.12.006>
- Ravn, M. O., & Uhlig, H. (2002). On adjusting the hodrick-prescott filter for the frequency of observations. *Review of Economics and Statistics*, 84(2), 371–376. <https://doi.org/10.1162/003465302317411604>
- Qanas, J., & Raza, H. (Accepted/In press). Does securitisation make monetary policy less effective? *Review of Political Economy*.
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1–48. <https://doi.org/10.2307/1912017>
- Zivot, E. and Andrews, Donald W.K. (1992), Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis, *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), 251–270.