

# Introducción a la asignatura

## Redes neuronales: perceptrón simple

Diego Milone  
Inteligencia Computacional  
Departamento de Informática

FICH-UNL

# Organización

## Introducción a la inteligencia computacional

### Percepción simple

- Inspiración biológica

- Aprendizaje: enfoque intuitivo

- Aprendizaje: métodos de gradiente

### Redes neuronales

- Arquitecturas neuronales

- Procesos de aprendizaje

- Capacidad de generalización

# Organización

## Introducción a la inteligencia computacional

### Percepción simple

Inspiración biológica

Aprendizaje: enfoque intuitivo

Aprendizaje: métodos de gradiente

### Redes neuronales

Arquitecturas neuronales

Procesos de aprendizaje

Capacidad de generalización

# Inteligencia Natural vs Artificial

- A la hora de resolver problemas...  
¿Qué nos diferencia de una computadora?
  - ¿En qué situaciones el ser humano es marcadamente mejor?
  - ¿Qué tipo de problemas son mejor resueltos por la computadora?

# Inteligencia Natural vs Artificial

- A la hora de resolver problemas...
  - ¿Qué nos diferencia de una computadora?
    - ¿En qué situaciones el ser humano es marcadamente mejor?
    - ¿Qué tipo de problemas son mejor resueltos por la computadora?
- Algunas capacidades del ser humano:
  - Aprendizaje, Generalización,
  - Adaptabilidad, Experiencia,
  - Razonamiento, Creatividad,
  - ...?

# Inteligencia Natural vs Artificial

- A la hora de resolver problemas...  
¿Qué nos diferencia de una computadora?
  - ¿En qué situaciones el ser humano es marcadamente mejor?
  - ¿Qué tipo de problemas son mejor resueltos por la computadora?
- Algunas capacidades del ser humano:
  - Aprendizaje, Generalización,
  - Adaptabilidad, Experiencia,
  - Razonamiento, Creatividad,
  - ...?
- ¿Qué fin buscamos en Inteligencia Artificial?

# Inteligencia Artificial e Inteligencia “Computacional”

- Los orígenes de la inteligencia artificial

# Inteligencia Artificial e Inteligencia “Computacional”

- Los orígenes de la inteligencia artificial
- ¿Qué modelamos?
  - Modelos del contenido: → sistemas basados en conocimientos
  - Modelos del continente: → modelos bio-inspirados
  - ...?



# Inteligencia Artificial e Inteligencia “Computacional”

- Los orígenes de la inteligencia artificial
- ¿Qué modelamos?
  - Modelos del contenido: → sistemas basados en conocimientos
  - Modelos del continente: → modelos bio-inspirados
  - ...?
- ¿Cómo lo modelamos?
  - Modelos con énfasis en lo simbólico
  - Modelos con énfasis en lo numérico
  - ...?

# Inteligencia Artificial e Inteligencia “Computacional”

- Los orígenes de la inteligencia artificial
- ¿Qué modelamos?
  - Modelos del contenido: → sistemas basados en conocimientos
  - Modelos del continente: → modelos bio-inspirados
  - ...?
- ¿Cómo lo modelamos?
  - Modelos con énfasis en lo simbólico
  - Modelos con énfasis en lo numérico
  - ...?
- La inteligencia computacional
  - Redes neuronales (Neural Networks)
  - Lógica borrosa (Fuzzy Logic)
  - Inteligencia colectiva  
(Evolutionary Computation, Swarm Intelligence)

# Organización

Introducción a la inteligencia computacional

## Percepción simple

Inspiración biológica

Aprendizaje: enfoque intuitivo

Aprendizaje: métodos de gradiente

## Redes neuronales

Arquitecturas neuronales

Procesos de aprendizaje

Capacidad de generalización

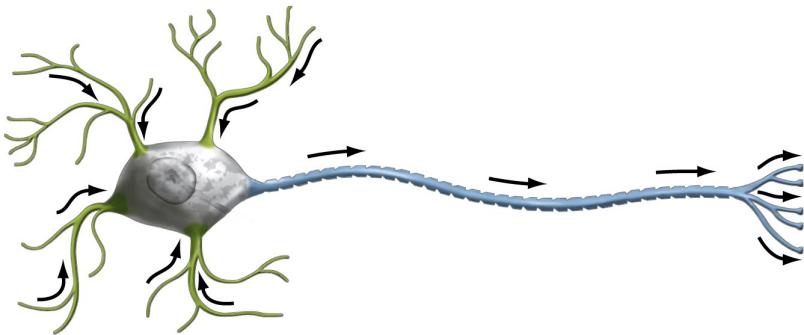
# La inspiración biológica en redes neuronales

- La corteza cerebral ...  $10^{11}$  ...
- Redes de neuronas
  - No linealidad, Paralelismo
  - Aprendizaje, Generalización
  - Adaptabilidad, Robustez

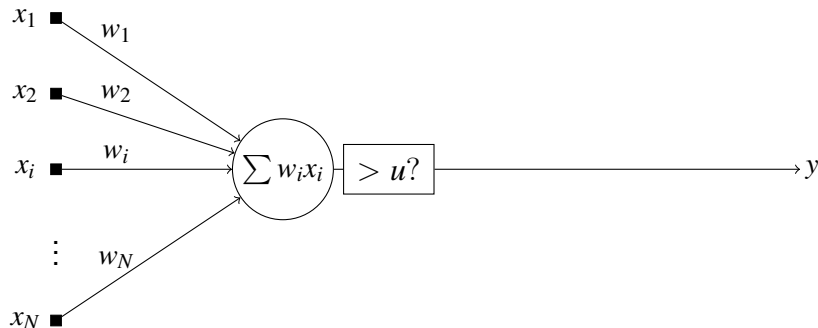
# La inspiración biológica en redes neuronales

- La corteza cerebral ...  $10^{11}$  ...
- Redes de neuronas
  - No linealidad, Paralelismo
  - Aprendizaje, Generalización
  - Adaptabilidad, Robustez
- La neurona biológica: soma, dendritas, axón...
- Fisiología de la neurona:
  - sinapsis, neurotransmisores
  - despolarización, comportamiento todo/nada
  - propagación del impulso
  - refuerzo de las sinapsis... aprendizaje
- Modelo simplificado de neurona

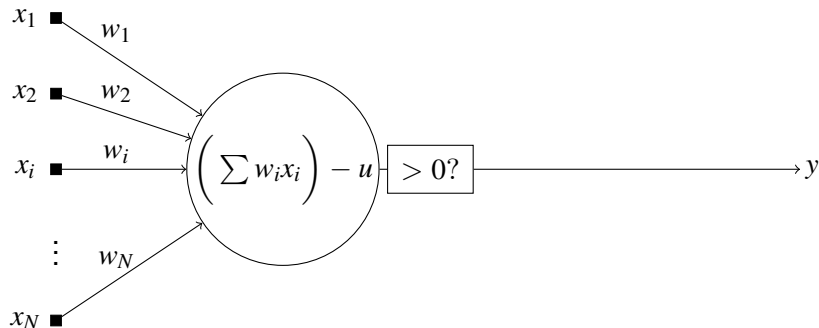
## Neurona biológica



# Modelo de neurona

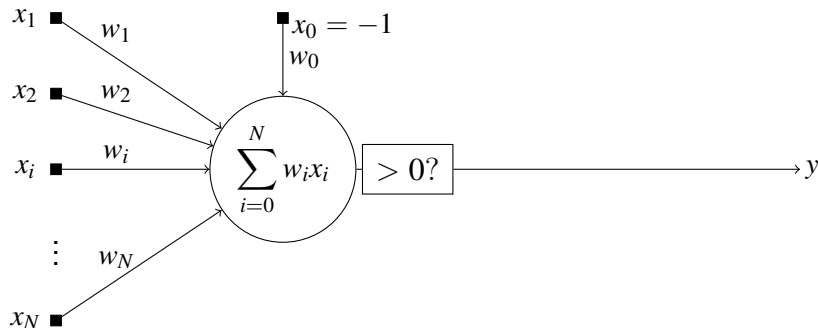


# Modelo de neurona





# Modelo de neurona



# Perceptrón simple

# Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple
  - Producto interno y umbral:  $y = \phi(v - u)$

## Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple

- Producto interno y umbral:  $y = \phi(v - u) = \phi \left( \sum_{i=1}^N w_i x_i - u \right)$

## Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple

- Producto interno y umbral:  $y = \phi(v - u) = \phi \left( \sum_{i=1}^N w_i x_i - u \right)$
- Entrada extendida:  $x_0 = -1, w_0 = u$

# Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple

- Producto interno y umbral:  $y = \phi(v - u) = \phi\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i - u\right)$
- Entrada extendida:  $x_0 = -1, w_0 = u$

$$y = \phi\left(\sum_{i=0}^N w_i x_i\right) = \phi(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle)$$





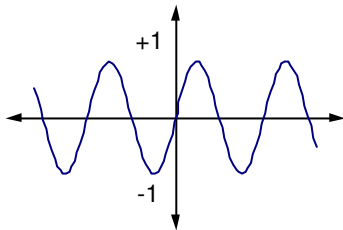
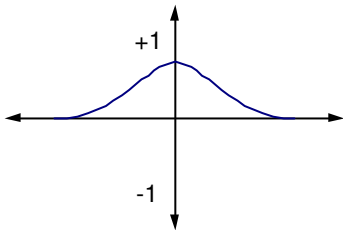




# Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple

- Producto interno y umbral:  $y = \phi(v - u) = \phi\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i - u\right)$
- Entrada extendida:  $x_0 = -1, w_0 = u$ 
$$y = \phi\left(\sum_{i=0}^N w_i x_i\right) = \phi(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle)$$
- Funciones de activación  $\phi(z)$



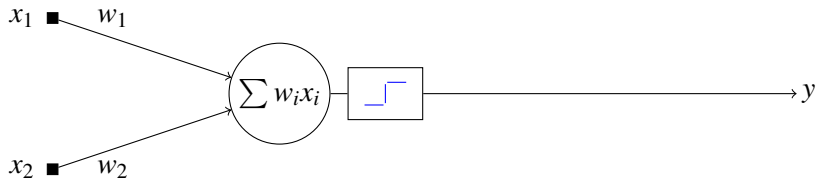
# Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple
  - Producto interno y umbral
  - Entrada extendida
  - Funciones de activación

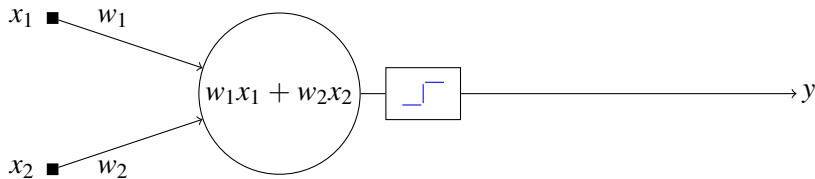
# Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple
  - Producto interno y umbral
  - Entrada extendida
  - Funciones de activación
- Ejemplo: un PS de 2 entradas
  - Espacio (plano) de soluciones
  - Recta (hiperplano) de decisión

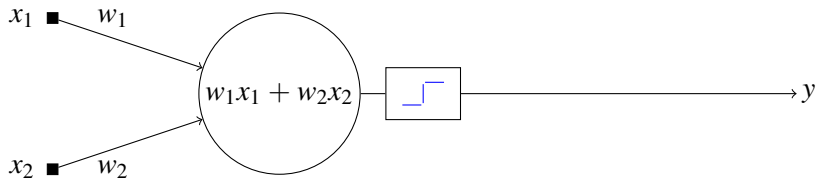
## Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas



# Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas

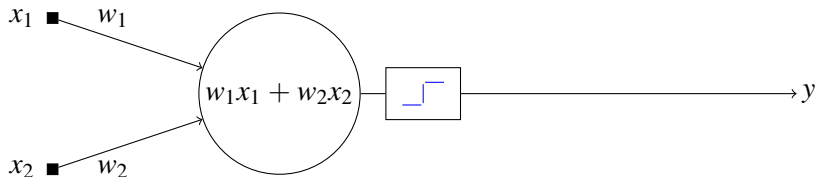


# Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas



$$y = \text{sgn}(w_1x_1 + w_2x_2)$$

# Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas



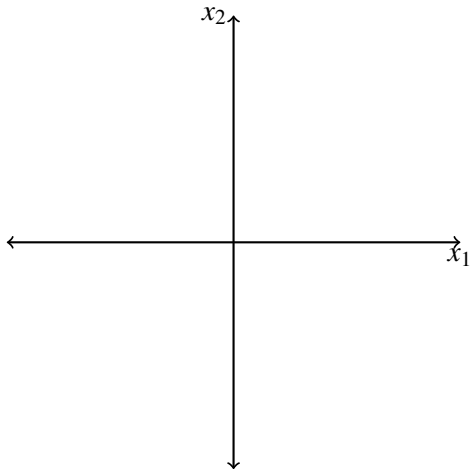
$$y = \text{sgn}(w_1x_1 + w_2x_2)$$

$$w_1x_1 + w_2x_2 > 0?$$



## Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas

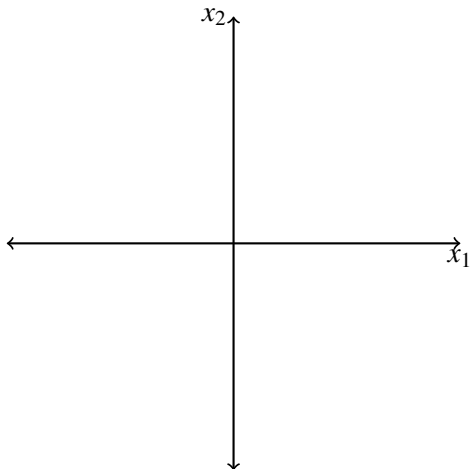
$$w_1x_1 + w_2x_2 = 0$$





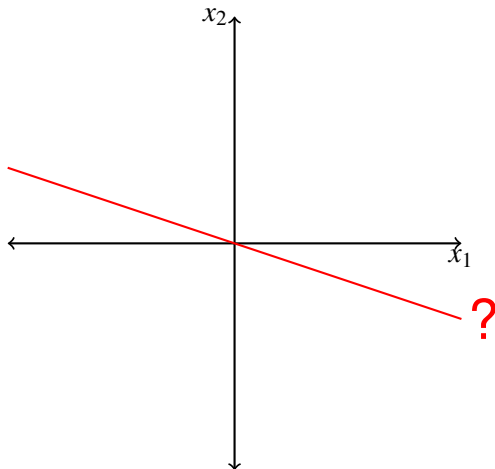
# Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas

*Caso del OR*



# Perceptrón simple: ejemplo con 2 entradas

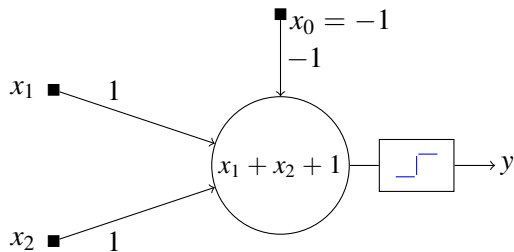
*Caso del OR*







# Perceptrón simple: probamos el OR?



## Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple
  - Producto interno y umbral
  - Entrada extendida
  - Funciones de activación
- Ejemplo: un PS de 2 entradas
  - Espacio (plano) de soluciones
  - Recta (hiperplano) de decisión
  - Mapeo de la función OR
  - Importancia del bias
  - Cálculo directo de los pesos para el problema OR



## Perceptrón simple

- Modelo matemático del perceptrón simple
  - Producto interno y umbral
  - Entrada extendida
  - Funciones de activación
- Ejemplo: un PS de 2 entradas
  - Espacio (plano) de soluciones
  - Recta (hiperplano) de decisión
  - Mapeo de la función OR
  - Importancia del bias
  - Cálculo directo de los pesos para el problema OR
- ¿No era que iba a aprender solo a partir de los datos?

# Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso:

## Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso:
  - **SI** la salida de la red es correcta  
*no se hacen cambios*: principio de mínima perturbación

# Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso:
  - **SI** la salida de la red es correcta  
*no se hacen cambios*: principio de mínima perturbación
  - **SI** la salida de la red es incorrecta  
*penalización*: se actualizan los  $w_i$  en el sentido opuesto al cual con el que contribuyeron a la salida incorrecta

# Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso se calcula:  $y(n) = \phi(\langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle)$ 
  - **SI**  $y(n) = y_d(n) \Rightarrow$  *no se hacen cambios*
  - **SI**  $y(n) \neq y_d(n)$  (supongamos  $\mathbf{x}_i(n) > 0$ )

# Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso se calcula:  $y(n) = \phi(\langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle)$ 
  - **SI**  $y(n) = y_d(n) \Rightarrow$  *no se hacen cambios*
  - **SI**  $y(n) \neq y_d(n)$  (supongamos  $\mathbf{x}_i(n) > 0$ )
    - **SI**  $y(n) = +1$  mientras  $y_d(n) = -1$   
 $\Rightarrow \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta \mathbf{x}(n)$

# Perceptrón simple: aprendizaje

Entrenamiento por corrección de error:

1. Inicialización al azar
2. Se muestran muchos ejemplos con las salidas esperadas y en cada caso se calcula:  $y(n) = \phi(\langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle)$ 
  - **SI**  $y(n) = y_d(n) \Rightarrow$  *no se hacen cambios*
  - **SI**  $y(n) \neq y_d(n)$  (supongamos  $\mathbf{x}_i(n) > 0$ )
    - **SI**  $y(n) = +1$  mientras  $y_d(n) = -1$   
 $\Rightarrow \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta \mathbf{x}(n)$
    - **SI**  $y(n) = -1$  mientras  $y_d(n) = +1$   
 $\Rightarrow \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta \mathbf{x}(n)$

# Perceptrón simple: aprendizaje

Algoritmo del perceptrón simple:

1. Inicialización al azar:  $\mathbf{w}(1) \in [-0.5 \ 0.5]$
2. Para cada ejemplo de entrenamiento  $\mathbf{x}(n)|y_d(n)$ :

- Se obtiene la salida:

$$y(n) = \phi(\langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle)$$

- Se adaptan los pesos:

$$\mathbf{w}(n+1) = ?$$

3. Volver a 2 hasta satisfacer algún criterio de finalización.



# Perceptrón simple: aprendizaje

Algoritmo del perceptrón simple:

1. Inicialización al azar:  $\mathbf{w}(1) \in [-0.5 \ 0.5]$
2. Para cada ejemplo de entrenamiento  $\mathbf{x}(n)|y_d(n)$ :

- Se obtiene la salida:

$$y(n) = \phi(\langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle)$$

- Se adaptan los pesos:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\eta}{2}[y_d(n) - y(n)]\mathbf{x}(n)$$

3. Volver a 2 hasta satisfacer algún criterio de finalización.

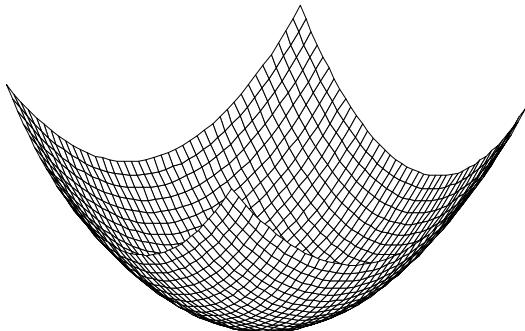
# Entrenamiento por métodos de gradiente

- Concepto:

*Mover los pesos en la dirección en que se reduce el error, dirección que es opuesta a su gradiente con respecto a los pesos*

## Entrenamiento por métodos de gradiente

- Concepto:  
*Mover los pesos en la dirección en que se reduce el error, dirección que es opuesta a su gradiente con respecto a los pesos*
- Interpretación gráfica



# Entrenamiento por métodos de gradiente

- Concepto:  
*Mover los pesos en la dirección en que se reduce el error, dirección que es opuesta a su gradiente con respecto a los pesos*
- Interpretación gráfica
- Ecuación básica:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} \xi(\mathbf{w}(n))$$

# Entrenamiento por métodos de gradiente

- Concepto:  
*Mover los pesos en la dirección en que se reduce el error, dirección que es opuesta a su gradiente con respecto a los pesos*
- Interpretación gráfica
- Ecuación básica:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} \xi(\mathbf{w}(n))$$

- Aplicación:
  - Caso sencillo: perceptrón simple (least mean squares)
  - Caso general: perceptrón multicapa (back-propagation)

# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2$$

# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 = [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle]^2$$

# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 = [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle]^2$$

$$\nabla_w e^2(n) = 2 [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle] (-\mathbf{x}(n))$$



# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 = [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle]^2$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2 [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle] (-\mathbf{x}(n))$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2e(n)(-\mathbf{x}(n))$$

# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 = [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle]^2$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2 [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle] (-\mathbf{x}(n))$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2e(n)(-\mathbf{x}(n))$$

reemplazando en:  $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} \xi(\mathbf{w}(n))$

# Perceptrón simple: método de gradiente (caso lineal)

Criterio del error instantáneo:

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 = [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle]^2$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2 [d(n) - \langle \mathbf{w}(n), \mathbf{x}(n) \rangle] (-\mathbf{x}(n))$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} e^2(n) = 2e(n)(-\mathbf{x}(n))$$

reemplazando en:  $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} \xi(\mathbf{w}(n))$

$$\boxed{\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n)}$$

# Perceptrón simple: método de gradiente

Supongamos que:

$$\begin{array}{lll} w_0 = +1 & x_0 = -1 & d = -1 \\ w_1 = +1 & x_1 = +1 & \\ w_2 = +1 & x_2 = +1 & \end{array}$$

# Perceptrón simple: método de gradiente

$$w_0 = +1 \quad x_0 = -1 \quad d = -1$$

Supongamos que:  $w_1 = +1 \quad x_1 = +1$

$$w_2 = +1 \quad x_2 = +1$$

$$y = \text{sgn}(-1 + 1 + 1) \rightarrow 1$$

# Perceptrón simple: método de gradiente

$$w_0 = +1 \quad x_0 = -1 \quad d = -1$$

Supongamos que:  $w_1 = +1 \quad x_1 = +1$

$$w_2 = +1 \quad x_2 = +1$$

$$y = \text{sgn}(-1 + 1 + 1) \rightarrow 1$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n)$$

# Perceptrón simple: método de gradiente

$$w_0 = +1 \quad x_0 = -1 \quad d = -1$$

Supongamos que:  $w_1 = +1 \quad x_1 = +1$

$$w_2 = +1 \quad x_2 = +1$$

$$y = \text{sgn}(-1 + 1 + 1) \rightarrow 1$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + 2\mu(-1-1) \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

# Perceptrón simple: método de gradiente

$$w_0 = +1 \quad x_0 = -1 \quad d = -1$$

Supongamos que:  $w_1 = +1 \quad x_1 = +1$

$$w_2 = +1 \quad x_2 = +1$$

$$y = \text{sgn}(-1 + 1 + 1) \rightarrow 1$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + 2\mu(-1-1) \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

suponiendo que  $\mu = \frac{1}{2}$



## Perceptrón simple: método de gradiente

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## Perceptrón simple: método de gradiente

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Qué sucede si volvemos a poner:  $\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$  ?

## Perceptrón simple: método de gradiente

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Qué sucede si volvemos a poner:  $\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$  ?

$$y = \text{sgn}(-3 - 1 - 1) \rightarrow -1$$

## Perceptrón simple: método de gradiente

$$\mathbf{w}(n+1) = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Qué sucede si volvemos a poner:  $\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$  ?

$$y = \text{sgn}(-3 - 1 - 1) \rightarrow -1$$

ahora  $e(n+1) = -1 - (-1) = 0$

# Organización

Introducción a la inteligencia computacional

Percepción simple

Inspiración biológica

Aprendizaje: enfoque intuitivo

Aprendizaje: métodos de gradiente

Redes neuronales

Arquitecturas neuronales

Procesos de aprendizaje

Capacidad de generalización

# Arquitecturas neuronales

- Redes hacia adelante (feed-forward networks)
- Redes recurrentes (feedback networks)
- Otros modelos híbridos

## Arquitecturas neuronales

- Redes hacia adelante (feed-forward networks)
  - Perceptrones simples y de una capa
  - Perceptrón multicapa
  - Redes con funciones de base radial
- Redes recurrentes (feedback networks)
- Otros modelos híbridos

## Arquitecturas neuronales

- Redes hacia adelante (feed-forward networks)
  - Perceptrones simples y de una capa
  - Perceptrón multicapa
  - Redes con funciones de base radial
- Redes recurrentes (feedback networks)
  - Redes competitivas de una capa (SOM-1D)
  - Redes bidimensionales de Kohonen
  - Redes de Hopfield
  - Modelos de resonancia adaptativa
- Otros modelos híbridos



## Arquitecturas neuronales

- Redes hacia adelante (feed-forward networks)
  - Perceptrones simples y de una capa
  - Perceptrón multicapa
  - Redes con funciones de base radial
- Redes recurrentes (feedback networks)
  - Redes competitivas de una capa (SOM-1D)
  - Redes bidimensionales de Kohonen
  - Redes de Hopfield
  - Modelos de resonancia adaptativa
- Otros modelos híbridos
  - Parcialmente recurrentes
  - Parcialmente conectados
  - Redes modulares, ...

# Procesos de aprendizaje

- Tipos de aprendizaje
- Reglas de aprendizaje

# Procesos de aprendizaje

- Tipos de aprendizaje
  - Supervisado
  - No supervisado
  - Híbridos
- Reglas de aprendizaje

# Procesos de aprendizaje

- Tipos de aprendizaje
  - Supervisado
  - No supervisado
  - Híbridos
- Reglas de aprendizaje
  - Corrección de error
  - Competitivo
  - Hebbiano
  - Boltzman

## Otros conceptos importantes

- Espacio de soluciones
- Superficie de error
- Mínimos locales vs. mínimos globales
- Capacidad de generalización
- Métodos de validación cruzada