

# Modèle CEV

T. HAYAT - W. MARGHERITI

Juin 2016

# Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Le modèle</b>                        | <b>2</b> |
| 1.1      | La dynamique . . . . .                  | 2        |
| 1.2      | Probabilité risque neutre . . . . .     | 2        |
| 1.3      | Pricing . . . . .                       | 4        |
| 1.4      | Smile de volatilité implicite . . . . . | 5        |
| <b>2</b> | <b>L'implémentation</b>                 | <b>6</b> |
| 2.1      | Pricing . . . . .                       | 6        |
| 2.1.1    | Le code . . . . .                       | 6        |
| 2.1.2    | Illustration . . . . .                  | 6        |
| 2.2      | Volatilité implicite . . . . .          | 7        |
| 2.2.1    | Illustrations . . . . .                 | 8        |

# Chapitre 1

## Le modèle

### 1.1 La dynamique

On suppose que l'actif risqué est régi par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t, \quad (1.1)$$

où  $(W_t)$  est un mouvement brownien standard défini sur  $[0, +\infty[$ .

La fonction  $x \mapsto \sigma\sqrt{x}$  n'étant pas lipschitzienne, le théorème 3.5.3 d'Itô ne peut s'appliquer. Mais le théorème 6.2.3 assure que, grâce au caractère hölderien de cette fonction, il existe néanmoins un unique processus continu adapté  $(S_t)$  vérifiant (1.1) et  $S_0 = x$ , et ce pour tout  $x \geq 0$ .

Le processus  $(S_t)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , et on considèrera dans la suite  $S_0 = x$ . Contrairement au modèle de Black-Scholes, celui-ci peut valoir 0. En effet, soit  $\tau_0$  le temps d'arrêt défini par :

$$\tau_0 = \inf\{t \geq 0 | S_t = 0\}.$$

Alors, la proposition 6.2.4 affirme que :

1. Si  $\mu > 0$ , alors  $\mathbb{P}(\tau_0 < +\infty) \in ]0, 1[$  ;
2. Si  $\mu \leq 0$ , alors  $\mathbb{P}(\tau_0 < +\infty) = 1$ .

En outre,  $S_t$  est  $\mathbb{P}$ -p.s. nul à partir de  $\tau_0$ . En effet, à partir de  $\tau_0$ , le processus nul est une solution à (1.1) nulle en  $\tau_0$ , qui est la seule en vertu du théorème 6.2.3. Donc par unicité,  $S_t$  est bien égal à ce processus à partir de  $\tau_0$ .

### 1.2 Probabilité risque neutre

On pose  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  le prix actualisé de l'actif. On a alors :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t + 0 \\ &= -r\tilde{S}_t dt + \tilde{S}_t(\mu dt) + \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\tilde{S}_t} dW_t \\ &= \tilde{S}_t(\mu - r) dt + \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\tilde{S}_t} dW_t \end{aligned}$$

On cherche à ce que  $\tilde{S}_t$  soit une martingale. En vertu de la proposition 3.4.9, on cherche donc à annuler le terme en  $dt$ . Pour ce faire, on choisit  $d\tilde{W}_t = dW_t + \theta_t dt$ . On obtient alors :

$$\tilde{S}_t = \sqrt{\tilde{S}_t} \left( (\mu - r) \sqrt{\tilde{S}_t} - \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \theta_t \right) dt + \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\tilde{S}_t} d\tilde{W}_t$$

On choisit donc  $\theta_t = \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) e^{\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t}$ . D'où :

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) e^{\frac{rs}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_s} ds,$$

Notons alors  $\mathbb{P}^*$  la probabilité de densité  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$  par rapport à  $\mathbb{P}$ . Alors, en vertu du théorème de Girsanov, si cette densité est une martingale, alors  $\widetilde{W}_t$  définit bien un mouvement brownien standard.

En vertu de la remarque 4.2.1, il suffit de vérifier que :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( \left( \frac{\mu-r}{\sigma} \right) e^{\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} \right)^2 dt \right) \right] < +\infty$$

On obtient donc :

$$\widetilde{S}_t = \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} d\widetilde{W}_t.$$

Pour que cette quantité soit une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ , il suffit de vérifier que la quantité  $\int_0^T \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} dt$  est bien de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ .

Soit alors  $\tau_n = \inf\{t \geq 0 | \widetilde{S}_t \geq n\}$ . Puisque  $\widetilde{S}_{T \wedge \tau_n} \leq n$   $\mathbb{P}^*$ -p.s., alors  $\widetilde{S}_{T \wedge \tau_n}$  est de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{T \wedge \tau_n}^2] &= \mathbb{E}^* \left[ \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} d\widetilde{W}_t \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \int_0^{T \wedge \tau_n} \left( \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} \right)^2 dt \right] \\ &\leq C \mathbb{E}^* \left[ \int_0^{T \wedge \tau_n} \widetilde{S}_t dt \right] \\ &\leq C \mathbb{E}^* \left[ \int_0^{T \wedge \tau_n} (1 + \widetilde{S}_t^2) dt \right] \\ &\leq CT + C \mathbb{E}^* \left[ \int_0^{T \wedge \tau_n} \widetilde{S}_t^2 dt \right] \\ &\leq CT + C \mathbb{E}^* \left[ \int_0^T \widetilde{S}_{t \wedge \tau_n}^2 dt \right] \\ &\leq CT + C \int_0^T \mathbb{E}^* \left[ \widetilde{S}_{t \wedge \tau_n}^2 \right] dt \end{aligned}$$

Donc, en notant  $U_t = \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{t \wedge \tau_n}^2]$ , on obtient  $U_T \leq CT + C \int_0^T U_t dt$ , donc par le lemme de Grönwall :  $U_t \leq CT e^{CT}$ . Cela assure donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^* \left[ \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} d\widetilde{W}_t \right)^2 \right] = \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{T \wedge \tau_n}^2] \leq CT e^{CT} < +\infty. \quad (1.2)$$

Par croissance et positivité de la suite  $n \mapsto \mathbb{E}^* \left[ \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} d\widetilde{W}_t \right)^2 \right]$ , (1.2) peut être passée à la limite grâce au théorème de convergence monotone, d'où :

$$\mathbb{E}^* \left[ \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_t} d\widetilde{W}_t \right)^2 \right] \leq CT e^{CT} < +\infty,$$

ce qui assure que  $\widetilde{S}_t$  est bien une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

Finalement, la probabilité risque-neutre est bien donnée par la densité :

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left( - \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) e^{\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) e^{\frac{rt}{2}} \sqrt{\widetilde{S}_s} \right)^2 ds \right).$$

### 1.3 Pricing

Disposant de l'expression de la probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ , on peut alors valoriser la quantité  $C(t, K, T)$ , à savoir le prix à l'instant  $t$  d'un Call d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  :

$$C(t, K, T) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right].$$

On s'intéresse ici au prix en 0, ce qui revient à conditionner par  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , dont toute variable aléatoire est indépendante, donc :

$$\begin{aligned} C(0, K, T) &= \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} e^{-rT} (S_T - K)_+ \right] \end{aligned}$$

Pour déterminer la densité de la loi de  $S_t$ , on applique la proposition 6.2.5 pour obtenir sa transformée de Laplace :

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{E}^* \left[ e^{-\lambda S_t} \right] = \exp \left( - \frac{\lambda L \zeta}{2\lambda L + 1} \right),$$

où  $L = -\frac{\sigma^2}{4\mu(1-e^{\mu t})}$  et  $\zeta = -\frac{4x\mu}{\sigma^2(e^{-\mu t}-1)}$ . La transformée de Laplace de  $S_t/L$  est donc donnée par  $\exp \left( -\frac{\lambda \zeta}{2\lambda + 1} \right)$ . On reconnaît la transformée de Laplace de la loi du  $\chi^2$  décentrée à 0 degré de liberté, de décentrage  $\zeta$ . La loi de  $S_t/L$  sous  $\mathbb{P}$  a donc pour densité :

$$f_\zeta : y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\zeta/2} \sqrt{\zeta} e^{-y/2} I_{-1}(\sqrt{y\zeta}),$$

où  $I_{-1}$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre -1, définie par :

$$I_{-1} : y \mapsto \frac{2}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(y/2)^{2n}}{n! \Gamma(n)}.$$

En se servant de l'égalité  $(S_T - K)_+ = L \left( \frac{S_T}{L} - \frac{K}{L} \right)_+ = L \left( \frac{S_T}{L} \mathbb{1}_{\{\frac{S_T}{L} \geq K\}} - \frac{K}{L} \mathbb{1}_{\{\frac{S_T}{L} \geq K\}} \right)$ , on obtient :

$$C(0, K, T) = e^{-(r-\mu)T} x Q \left( \left( \frac{4\mu}{\sigma^2} \right)^2 KL, 4, \zeta \right) - e^{-rT} K (1 - Q(\zeta, 2, \left( \frac{4\mu}{\sigma^2} \right)^2 KL)),$$

où  $Q(z, v, k) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-k/2} \frac{(k/2)^n}{\Gamma(n+1)} G(n + \frac{\nu}{2}, \frac{z}{2})$ , et où  $G$  est le complémentaire de la fonction de répartition

de la loi Gamma :  $G(\nu, y) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_y^{+\infty} u^{\nu-1} e^{-u} du$ .

Ainsi, le prix du Call peut se réécrire :

$$C(0, K, T) = x \sum_{n=1}^{+\infty} g(n, z') G(n+1, w') - e^{rT} K \sum_{n=1}^{+\infty} g(n+1, z') G(n, w'),$$

où  $z' = \frac{2rx}{\sigma^2(1-e^{-rT})}$ ,  $w' = \frac{2rK}{\sigma^2(e^{rT}-1)}$ , et  $g(x, y) = \frac{1}{\Gamma(x)} y^{x-1} e^{-y}$ .

## 1.4 Smile de volatilité implicite

Soit un Call d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$ . Dans le modèle de Black-Scholes, son prix est donné par :

$$f_{T,K} : \sigma \mapsto S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

où  $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K e^{-rT}}) + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}}{\frac{\sigma \sqrt{T}}{2}}$ ,  $d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K e^{-rT}}) - \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}}{\frac{\sigma \sqrt{T}}{2}}$ , et  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La fonction  $f_{T,K}$  est une fonction continue et dérivable de la variable  $\sigma$ , dont la dérivée vaut, après calcul :

$$f'_{T,K}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-rT} e^{-d_2^2/2} \sqrt{T} > 0.$$

La fonction  $f_{T,K}$  est donc strictement croissante.

D'autre part, on vérifie aisément que  $f_{T,K} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} S_0$ , et que  $f_{T,K} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} (S_0 - K e^{-rT})_+$ . La fonction  $f_{T,K}$  est donc continue et strictement croissante de  $]0, +\infty[$  dans  $](S_0 - K e^{-rT})_+, S_0[$ .

Soit donc une échéance  $T$  et un prix d'exercice  $K$  fixés. D'après la section *Pricing*, nous disposons d'une formule pour calculer le prix d'un Call sous le modèle *CEV*, appelé  $\gamma(T, K)$ . Si l'on choisit cette quantité comme référence du prix d'un Call, alors le modèle de Black-Scholes prévoirait :  $f_{T,K}(\sigma) = \gamma(T, K)$ . Cette fonction étant inversible, si  $\gamma(T, K)$  est bien dans  $](S_0 - K e^{-rT})_+, S_0[$ , on en déduit  $\sigma = (f_{T,K})^{-1}(\gamma(T, K))$ . On en déduit donc la formule de la volatilité implicite :

$$\sigma_{imp}(T, K) = (f_{T,K})^{-1}(\gamma(T, K)).$$

A priori,  $\gamma(T, K)$  est bien dans  $](S_0 - K e^{-rT})_+, S_0[$ . En effet, nous avons exhibé dans la partie *Probabilité risque-neutre* l'existence d'une probabilité martingale, ce qui assure que le marché est viable, et donc qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage. Or cet intervalle est justement délimité par deux bornes d'arbitrages.

En effet, la première,  $\gamma(T, K) < S_0$ , est évidente, puisque détenir un Call donne moins de droit que de détenir le sous-jacent, et doit donc être moins cher. Si l'on avait  $\gamma(T, K) \geq S_0$ , il suffirait alors d'acheter un actif et de vendre un Call. Si  $K e^{-rT} < S_0$ , l'acheteur du Call l'exerce, et l'on gagne  $K e^{-rT}$  contre l'actif que l'on donne, ce qui revient à une richesse  $(\gamma(T, K) - S_0 + K) e^{-rT} > 0$ . Sinon, l'acheteur du Call ne l'exerce pas, et l'on se retrouve avec une richesse  $(\gamma(T, K) - S_0) e^{-rT} + S_T > 0$ .

La seconde borne  $(S_0 - K e^{-rT})_+ < \gamma(T, K)$  est aussi nécessaire. Si l'on a  $S_0 - K e^{-rT} \geq \gamma(T, K)$ , on vend un actif à découvert, on achète un Call, que l'on exerce ensuite pour racheter l'actif, ce qui donne un profit  $(S_0 - \gamma(T, K)) e^{rT} - K > 0$ . D'autre part, il est clair que  $0 < \gamma(T, K)$ . Donc  $\max(0, S_0 - K e^{-rT}) = (S_0 - K e^{-rT})_+ < \gamma(T, K)$ .

Ainsi, par AOA, il est certain que  $\gamma(T, K) \in ](S_0 - K e^{-rT})_+, S_0[$

## Chapitre 2

# L'implémentation

### 2.1 Pricing

#### 2.1.1 Le code

Nous avons approximé les séries entières en prenant les 100000 premières valeurs.

```
Call <- function(s, K, t, r, sig){
  z = 2*r*exp(r*t)*s/(sig^2*(exp(r*t)-1))
  w = 2*r*K/(sig^2*(exp(r*t)-1))
  temp1 = 0
  temp2 = 0
  for (n in 1:100000){
    temp1 = temp1 + dgamma(z,shape=n,scale=1)*pgamma(w,shape =n+1,scale =1,lower.tail=FALSE)
    temp2 = temp2 +dgamma(z,shape=n+1,scale=1)*pgamma(w,shape =n,scale =1,lower.tail=FALSE)
  }
  temp1 = temp1*s
  temp2 = temp2*exp(-r*t)*K

  return (temp1 -temp2)
}
```

#### 2.1.2 Illustration

Nous avons calculé ici le prix du call  $C(0,K,T)$  avec  $T = 1\text{jour}$ ,  $r = 0.001$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $S_0 = 100$  et  $K \in [50, 200]$ .

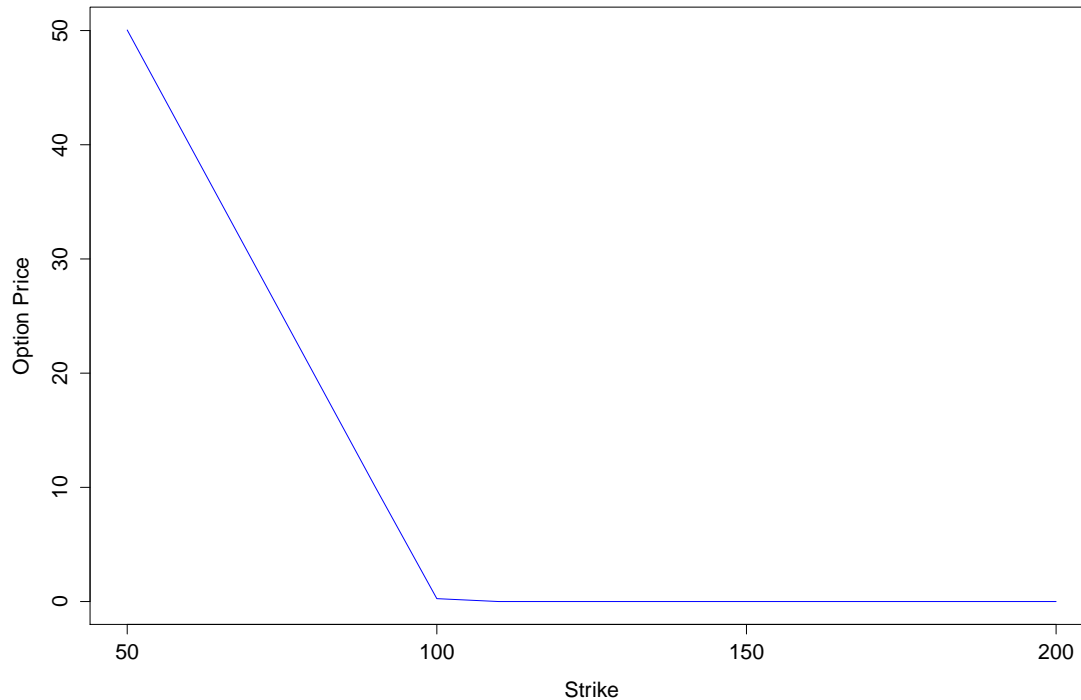


FIGURE 2.1 – Call Price

## 2.2 Volatilité implicite

Notre code R pour obtenir une valeur approchée de la volatilité implicite à  $10^{-4}$

```
# Black-Scholes Function
BS <-function(S, K, t, r, sig){
  d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*T) / (sig*sqrt(T))
  d2 <- d1 - sig*sqrt(T)
  value <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
  return(value)
}

Implied_Volatility <- function(Market_Price, S, K, t, r){
  sig <- 0.2
  sig.up <- 2
  sig.down <- 0.0001
  count <- 0
  err <- BS(S, K, t, r, sig) - Market_Price
  while(abs(err) > 0.00001 && count<10000){
    if(err < 0){
      sig.down <- sig
      sig <- (sig.up + sig)/2}
    else{
      sig.up <- sig
    }
  }
}
```



```

    sig <- (sig.down + sig)/2}
    err <- BS(S, K, T, r, sig) - Market_Price
    count <- count + 1
  }
  ## return NA if counter hit 10000
  if(count==10000){
    return(NA)}
  else{
    return(sig)}
}

```

### 2.2.1 Illustrations

Nous avons déterminé ici la volatilité implicite d'un call de strike  $K \in [50, 200]$  et de sous-jacent  $S$  avec  $S_0 = 100$  pour différentes échéances et différents  $\sigma$ .

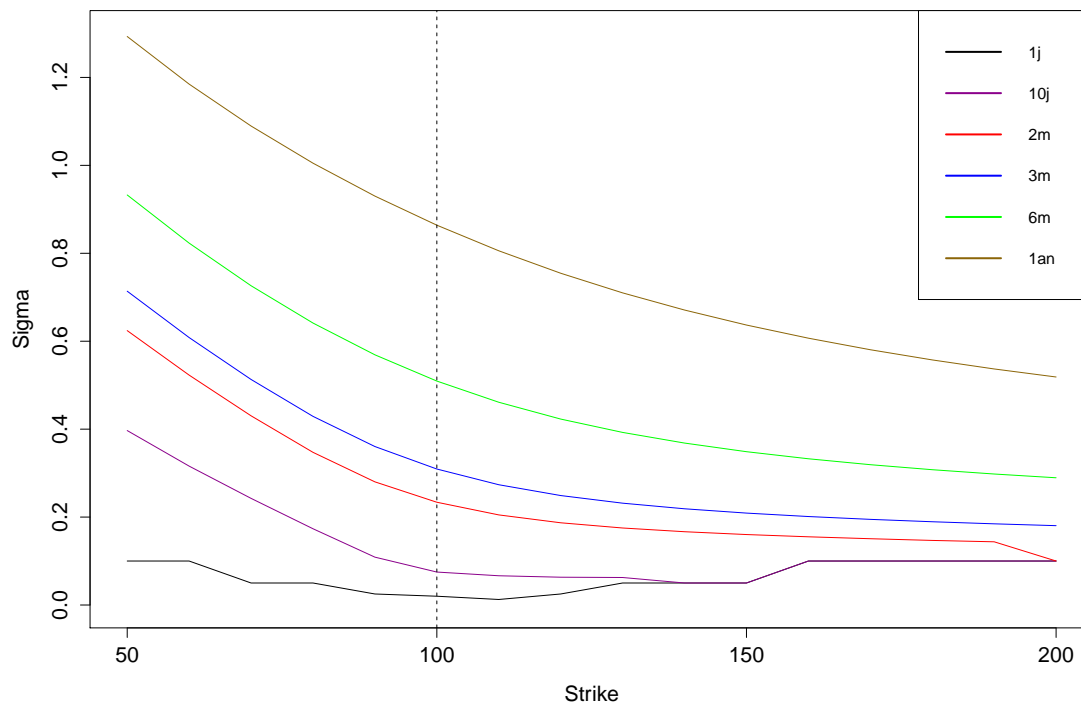


FIGURE 2.2 – Volatilité implicite pour  $\sigma = 0.2$

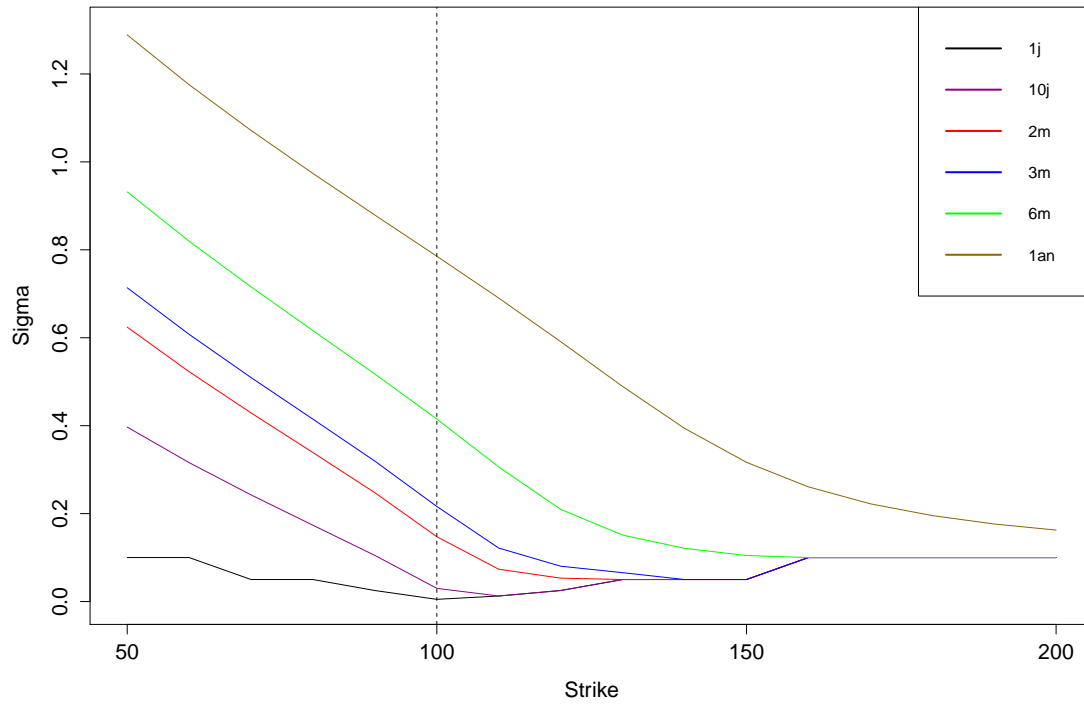


FIGURE 2.3 – Volatilité implicite pour  $\sigma = 0.05$

On remarque que plus l'échéance est lointaine plus le smile devient un skew

# Bibliographie

- [1] E.DERMAN. *Modeling the Volatility Smile*. Lecture, 2006.
- [2] F.DELBAEN et H.SHIRAKAWA. *A Note of Option Pricing for Constant Elasticity of Variance Model*. Asia-Pacific Financial Markets, 2002.
- [3] P.S. HAGAN. *Managing Smile Risk*. WILMOTT magazine, 2002.
- [4] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. 3rd. Ellipses, 2012.
- [5] P. TANKOV. *Surface de volatilité*. Université Paris-Diderot (Paris VII), 2015.
- [6] V.LINETSKY et R.MENDOZA. *The Constant Elasticity of Variance Model*. Encyclopedia of Quantitative Finance, 2009.