МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Ю.И. МАТИЯСЕВИЧ

ДЕСЯТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Москва
Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
ВО «Наука»
1 9 9 3

ПРЕДИСЛОВИЕ

На Втором Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт [1900] сделал свой знаменитый доклад «Математематические проблемы», содержащий 23 проблемы или, точнее, 23 группы родственных проблем, которые 19-й век оставлял в наследие 20-му. Проблема под номером десять была посвящена диофантовым уравнениям.

10. ЗАДАЧА О РАЗРЕШИМОСТИ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ.

> Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах.

Под «способом», который предлагает найти Д. Гильберт, в настоящее время подразумевают «алгоритм». В начале века, когда проблемы формулировались, ещё не было математически строго общего понятия алгоритма. Отсутствие такого понятия не могло само по себе служить препятствием к положительному решению 10-й проблемы Гильберта, поскольку про конкретные алгоритмы всегда было ясно, что они действительно дают требуемый общий способ решения соответствующих проблем.

В 30-е годы в работах К. Гёделя, А. Чёрча, А. М. Тьюринга и других логиков было выработано строгое общее понятие алгоритма, которое дало принципиальную возможность устанавливать алгоритмическую неразрешимость, т. е. доказывать невозможность алгоритма с требуемыми свойствами. Тогда же были найдены первые примеры алгоритмически неразрешимых проблем, сначала в самой математической логике, а затем и в других разделах математики.

Таким образом, теория алгоритмов создала необходимые предпосылки для попыток доказать неразрешимость 10-й проблемы Гильберта. Первые работы в этом направлении были опубликованы в начале 50-х годов, а в 1970 году исследования завершились «отрицательным решением» 10-й проблемы Гильберта.

В случае 10-й проблемы Гильберта, как и в случае других проблем, долго ожидавших своего решения, не меньшее, а пожалуй, большее значение имеет математический аппарат, развитый для решения проблемы и находящий затем другие приложения, порой неожиданные. Основной технический результат, полученный при доказательстве неразрешимости 10-й проблемы Гильберта — это теорема о совпадении класса диофантовых множеств и класса перечислимых множеств. В качестве одного из следствий этой теоремы, формулировка которого не содержит специальных терминов, приведем следующее: можно явно указать полином от многих переменных с целыми коэффициентами такой, что множество всех его положительных значений, принимаемых при целочисленных значениях переменных, есть в точности множество всех простых чисел.

Настоящая книга посвящена алгоритмической неразрешимости 10-й проблемы Гильберта и родственным вопросам; многочисленные частичные результаты, полученные в направлении положительного решения 10-й проблемы Гильберта, здесь почти не рассматриваются.

Отрицательное решение 10-й проблемы Гильберта излагали (с разной степенью детализации) многие авторы, в частности: Азра [1971], Белл и Маховер [1977]. Гермес [1972. 1978], Девис [1973a, 1974]. Захаров [1970, 1986], Капланский [1977], Манин [1973, 1977], Маргенштерн [1981]. Матиясевич [1972a], Мияйлович. Маркович и Дошен [1986], Руохонен [1972, 1980], Саломаа [1985], Сморинький [1987], Сусман [1971]. Такахаши [1974], Фенстад [1971], Хавел [1973], Хиросе [1973].

Оглавление

Описание

Название: Десятая проблема Гильберта
Автор: Юрий Владимирович Матиясевич
Издательство: М.: Физмалит. 1993. - 224 с. - ISBN 5-02-014326-X
Аннотация: Дается полное доказательство алгоритмической неразрешимости 10-й проблемы Гильберта, касающейся диофантовых уравнений, вместе с необходимыми сведениями из теории алгоритмов и теории чисел, а также приложения развитой для этого техники к другим массовым проблемам теории чисел, алгебры, анализа, теоритического программирования.

Для математиков, в том числе аспирантов и студентов старших курсов.

Библиогр. 247 назв.

Р е ц е н з е н т
Доктор физико-математических наук С.И. Адян