МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

Ю.В.МАТИЯСЕВИЧ

ДЕСЯТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Москва
Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
ВО «Наука»
1 9 9 3

ПРЕДИСЛОВИЕ

На Втором Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт [1900] сделал свой знаменитый доклад «Математические проблемы», содержащий 23 проблемы или, точнее, 23 группы родственных проблем, которые 19-й век оставлял в наследие 20-му. Проблема под номером десять была посвящена диофантовым уравнениям.

10. ЗАДАЧА О РАЗРЕШИМОСТИ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ.

> Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. *Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах.*

Под «способом», который предлагает найти Д. Гильберт, в настоящее время подразумевают «алгоритм». В начале века, когда проблемы формулировались, ещё не было математически строго общего понятия алгоритма. Отсутствие такого понятия не могло само по себе служить препятствием к положительному решению 10-й проблемы Гильберта, поскольку про конкретные алгоритмы всегда было ясно, что они действительно дают требуемый общий способ решения соответствующих проблем.

В 30-е годы в работах К. Гёделя, А. Чёрча, А. М. Тьюринга и других логиков было выработано строгое общее понятие алгоритма, которое дало принципиальную возможность устанавливать алгоритмическую неразрешимость, т. е. доказывать невозможность алгоритма с требуемыми свойствами. Тогда же были найдены первые примеры алгоритмически неразрешимых проблем, сначала в самой математической логике, а затем и в других разделах математики.

Таким образом, теория алгоритмов создала необходимые предпосылки для попыток доказать неразрешимость 10-й проблемы Гильберта. Первые работы в этом направлении были опубликованы в начале 50-х годов, а в 1970 году исследования завершились «отрицательным решением» 10-й проблемы Гильберта.

В случае 10-й проблемы Гильберта, как и в случае других проблем, долго ожидавших своего решения, не меньшее, а пожалуй, большее значение имеет математический аппарат, развитый для решения проблемы и находящий затем другие приложения, порой неожиданные. Основной технический результат, полученный при доказательстве неразрешимости 10-й проблемы Гильберта — это теорема о совпадении класса *диофантовых множеств* и класса *перечислимых множеств*. В качестве одного из следствий этой теоремы, формулировка которого не содержит специальных терминов, приведем следующее: *можно явно указать полином от многих переменных с целыми коэффициентами такой, что множество всех его положительных значений, принимаемых при целочисленных значениях переменных, есть в точности множество всех простых чисел.*

Настоящая книга посвящена алгоритмической неразрешимости 10-й проблемы Гильберта и родственным вопросам; многочисленные частичные результаты, полученные в направлении положительного решения 10-й проблемы Гильберта, здесь почти не рассматриваются.

Отрицательное решение 10-й проблемы Гильберта излагали (с разной степенью детализации) многие авторы, в частности: Азра [1971], Белл и Маховер [1977]. Гермес [1972, 1978], Девис [1973a, 1974]. Захаров [1970, 1986], Капланский [1977], Манин [1973, 1977], Маргенштерн [1981]. Матиясевич [1972a], Мияйлович, Маркович и Дошен [1986], Руохонен [1972, 1980], Саломаа [1985], Сморинський [1987], Сусман [1971], Такахаши [1974], Фенстад [1971], Хавел [1973], Хиросе [1973].

Одной из отличительных особенностей настоящей книги является то. что она. помимо собственно отрицательного решения 10-й проблемы Гильберта, содержит ряд приложений разработанной для этого решения техники; приложения эти в настоящее время разбросаны, в основном, по журнальным публикациям. За два десятилетия, прошедшие со времени решения проблемы, были получены многообразные упрощения и модификации первоначального доказательства. Настоящая книга также содержит ряд новых, ранее не публиковавшихся доказательств.

Естественно, что для понимания отрицательного решения 10-й проблемы Гильберта требуются знания как по теории чисел, так и по математической логике. Стремясь сделать книгу доступной для более широкой аудитории, в особенности, для начинающих математиков, автор старался ограничиться минимальными требованиями к математической подготовке читателя. В частности, у него не предполагается специальных знаний по теории алгоритмов, все необходимые понятия вводятся в книге, которая, тем самым, может служить для первоначального знакомства с этим увлекательным предметом (конечно, эта книга не может служить для систематического изучения даже основ теории алгоритмов). Немногочисленные требуемые сведения по теории чисел, выходящие за рамки общематематической подготовки, приведены в *приложениях* в конце книги.

Книга снабжена многочисленными *упражнениями* различной сложности — от совершенно элементарных до составляющих предмет небольшого исследования. Цель упражнений — ознакомить читателя с многообразными результатами, не приводя их доказательств. Вопрос о том, что следует отнести к основному содержанию книги, излагаемому с полным доказательством, а что — к упражнениям, естественно, решался субъективно. В упражнения попадали, в частности, результаты, которые требовали специальных знаний или имели громоздкие доказательства, результаты, далекие, по-видимому, от окончательных или представляющие ограниченный интерес. Упражнения снабжены указаниями к решению и/или отсылкой к литературному источнику.

Помимо упражнений в книгу включены немногочисленные открытые вопросы и нерешённые проблемы. Деление опять-таки субъективное. Открытый вопрос, возможно, не закрыт до сих пор лишь из-за того, что никто серьёзно над ним не задумывался, и ответ на открытый вопрос, быть может, окажется малополезным. С другой стороны, нерешённые проблемы, приведённые в книге, привлекали многих серьёзных исследователей, и, возможно, решение этих проблем потребует десятилетий.

Каждая глава завершается комментариями, в которых излагается история получения соответствующих результатов. Это представляется необходимым, поскольку логический порядок изложения материала, использованный в книге, часто не соответствует хронологическому порядку получения соответствующих результатов.

Список литературы содержит все основные публикации, нацеленные на получение отрицательного решения 10-й проблемы Гильберта, и большинство публикаций, использующих разработанную для этого технику. Автор будет признателен за указания на относящиеся к этой тематике работы, не вошедшие в этот список.

Нумерация формул в каждом параграфе своя. При ссылке на выделенную формулу из другого параграфа к номеру формулы добавляется номер параграфа, например, формула (5.3) — это формула (3) из пятого параграфа той же главы. Аналогично, формула (2.4.6) — это формула (6) из § 2.4, т. е. четвёртого параграфа главы 2.

Книгу не обязательно читать последовательно. Её можно условно разбить на две части. Первая часть, в которой даётся решение 10-й проблемы Гильберта, состоит из глав 1-5. Приведённая ниже диаграмма показывает зависимость друг от друга параграфов первой части: чтение каждого параграфа предполагает знакомство с теми параграфами, которые на диаграмме расположены не ниже и не правее него.

					§ 5.1	
					§ 5.2	
§ 1.1						
§ 1.2						
§ 1.3						
§ 1.4						
§ 1.5				§ 3.1	§ 5.3	§ 5.4
	§ 1.6	§ 2.1				
		§ 2.2				
		§ 2.3				
		§ 2.4				
		§ 2.5				
§ 3.1	§ 3.2	§ 3.3	§ 3.4			
			§ 3.5	§ 3.6	§ 5.5	
§ 4.1						
§ 4.2		§ 4.3	§ 4.4			
			§ 4.5			
			§ 4.6			§ 5.6
						§ 5.7

Аналогично, следующая диаграмма показывает зависимость параграфов второй части, посвященной приложениям, от параграфов первой части.

§ 2.1	§ 2.4	§ 3.4	§ 5.4	§ 5.5	§ 5.7	§ 7.1	§ 7.2
§ 7.3	§ 6.4	§ 6.2		§ 6.1	§ 9.1	§ 9.2	§ 9.3
§ 7.4		§ 6.3			§ 10.1	§ 10.2	

Между собой параграфы второй части связаны слабо. В § 6.1-6.3 приведены три разных способа для достижения одной и той же цели; достаточно знать любой из них для чтения § 6.4-6.6 и § 9.1. Аналогично, в § 4.5 и § 6.5 приведены две разные конструкции универсальных уравнений, и знакомства с любой из них достаточно для чтения § 6.6 и § 8.1. Чтение § 8.2 предполагает знакомство с § 7.2, которое в свою очередь предполагает знание § 6.2-6.3; в § 9.4 используются результаты § 9.2, а в § 10.1 — результаты § 6.6.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе будет введено основное понятие, изучаемое в данной книге, — понятие диофантова множества, и будут установлены его простейшие свойства.

§ 1.1. Разрешимость диофантовых уравнений как массовая проблема

Напомним, что диофантовыми уравнениями называют уравнения вида

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0, \tag{1}$$

где D — полином с целыми коэффициентами. Наряду с (1)) диофантово уравнение может быть записано в более общем виде

$$D_L(x_1, \dots, x_m) = D_R(x_1, \dots, x_m), \tag{2}$$

где D_L и D_R также являются полиномами с целыми коэффициентами. Говоря о «произвольном диофантовом уравнении», мы будем иметь в виду уравнение типа (1), поскольку уравнение типа (2) легко приводится к виду (1) перенесением всех членов в левую часть. С другой стороны, выписывая конкретные уравнения, мы часто будем использовать запись вида (2), если она легче для восприятия. Другое преимущество более общей записи вида (2), которым мы будем пользоваться, состоит в том, что, записывая уравнение в виде (2), мы можем потребовать, чтобы D_L и D_R были полиномами с неотрицательными коэффициентами.

Поскольку диофантовы уравнения, как правило, имеют много неизвестных, следует различать *степень уравнения* (1) *относительно данной неизвестной* x_i и *(полную) степень уравнения* (1), под которой мы будем подразумевать максимальную суммарную (по всем неизвестным) степень одночленов, составляющих полином D.

Существенной характеристикой диофантовых уравнений является не только их вид (1), но и множество допустимых значений неизвестных. Гильберт в 10-й проблеме говорит о решениях в *целых рациональных числах*. В этой книге мы будем говорить просто о *целых числах*, поскольку *целые алгебраические числа* в ней почти не будут рассматриваться. (Вопросы о разрешимости диофантовых уравнений в других типах неизвестных рассматриваются в § 1.3, 7.3, 7.4.)

Десятая проблема Гильберта является примером *массовой проблемы*. Массовая проблема — это проблема, состоящая из счётного множества *индивидуальных проблем*, на каждую из которых надо дать конкретный ответ «ДА» или «НЕТ». Эти индивидуальные проблемы мы будем называть *подпроблемами* соответствующей массовой проблемы. Каждая индивидуальная проблема специфицируется конечным объёмом информации (в случае 10-й проблемы Гильберта такой информацией является полином D из (1)). Суть массовой проблемы состоит в том, что требуется найти единый метод, пригодный для получения ответа на любую из её индивидуальных подпроблем. Со времени Диофанта специалисты по теории чисел нашли решения огромного количества диофантовых уравнений и установили отсутствие решений у массы других уравнений, однако при этом для разных классов уравнений или даже отдельных уравнений приходилось изобретать свой особый метод. Д. Гильберт в 10-й проблеме предлагал найти *универсальный метод* для распознавания разрешимости диофантовых уравнений.

Решение массовой проблемы может быть либо прямым — посредством указания процедуры нахождения ответа для каждой индивидуальной подпроблемы, либо косвенным — путем сведения данной массовой проблемы к другой массовой проблеме, решение которой уже известно. Мы не будем давать формального определения сведения, поскольку общая теория сводимости нам не потребуется, а в конкретных случаях сведения одной массовой проблемы к другой из контекста будет ясно, что имеется в виду.

Установление неразрешимости данной массовой проблемы тоже может быть либо прямым, либо косвенным. При косвенном доказательстве мы также сводим одну проблему к другой, но это сведение производится в другую сторону — чтобы установить неразрешимость некоторой массовой проблемы, надо к ней свести другую массовую проблему, неразрешимость которой уже установлена. На протяжении нескольких первых глав книги мы будем сводить к 10-й проблеме Гильберта все более и более сложные проблемы. Эта цепочка сведений должна в конце концов оборваться на проблеме, для которой мы даём прямое доказательство неразрешимости. Чтобы дать такое доказательство, мы должны суметь каким-то образом обозреть все мыслимые способы решения проблемы. Принципиальная возможность сделать это появилась после выработки математически строгого общего понятия алгоритма. Соответствующие определения будут даны в главе 5, где и будет установлена алгоритмическая неразрешимость 10-й проблемы Гильберта.

§ 1.2. Системы диофантовых уравнений

В 10-й проблеме Гильберт спрашивал про способ для установления существования или отсутствия решений лишь у отдельных диофантовых уравнений, хотя сам Диофант рассматривал и системы уравнений. Легко, однако, понять, что положительное решение 10-й проблемы Гильберта давало бы нам также способ узнавать наличие или отсутствие решений и у произвольных систем диофантовых уравнений. Действительно, система из k диофантовых уравнений

$$\begin{gathered} D_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_k(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

имеет решение в целых $x_1, \dots, x_m$ тогда и только тогда, когда имеет решение диофантово уравнение

$$D_1^2(x_1, \dots, x_m) + \dots + D_k^2(x_1, \dots, x_m) = 0; \tag{2}$$

более того, множества решений у (1) и (2) совпадают. Таким образом, для систем диофантовых уравнений количество уравнений не является такой существенной характеристикой, как в случае систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений.

В дальнейшем мы будем пользоваться и обратной возможностью — преобразованием диофантова уравнения

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0; \tag{3}$$

в некоторую систему диофантовых уравнений

$$\begin{gathered} D_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

имеющую, быть может, дополнительные неизвестные $y_1, \dots, y_l$. Переход от (3) и (4) не обязательно является обратным преобразованием к переходу от (1) к (2) — если систему

(4) свернуть описанным выше способом в одно диофантово уравнение, то этим уравнением окажется, вообще говоря, отнюдь не исходное уравнение (3). Единственная связь между (3) и (4), которая будет нас интересовать, такова: уравнение (3) должно иметь решение в том и только том случае, когда имеется решение у системы (4). При этом не требуется ни чтобы каждое решение уравнения (3) было продолжимо (посредством выбора значений $y_1, \dots, y_l$) до какого-то решения системы (4), ни чтобы каждое решение системы (4) содержало решение уравнения (3).

Цель перехода от уравнения (3) к эквивалентной по разрешимости системе (4) может состоять в том, чтобы получить систему, в которой каждое отдельное уравнение было бы очень простым. Например, легко понять, что любое диофантово уравнение можно преобразовать в эквивалентную в описанном выше смысле систему, состоящую из уравнений двух типов

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{5}$$

и

$$\alpha = \beta\gamma \tag{6}$$

где α, β и γ - конкретные натуральные числа или какие-то из неизвестных $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_l$. Проиллюстрируем такое преобразование на примере уравнения

$$4x^3y - 2x^2z^3 - 3y^2x + 5z = 0. \tag{7}$$

Сначала мы избавимся от вычитаний и получим уравнение

$$4x^3y + 5z = 2x^2z^3 + 3y^2x. \tag{8}$$

Затем введём 14 новых переменных и получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
p_1 = 4x, \quad p_2 = p_1x, \quad p_3 = p_2x, \quad p_4 = p_3y;\\
q_1 = 5z;\\
r_1 = 2x, \quad r_2 = r_1x, \quad r_3 = r_2z, \quad r_4 = r_3z, \quad r_5 = r_4z;\\
s_1 = 3y, \quad s_2 = s_1y;\\
t_1 = p_4 + q, \quad u_1 = r_5 + s_2, \quad t_1 = lu_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

В качестве примера применения этой несложной техники преобразования уравнений посмотрим, что получится, если сначала некоторое диофантово уравнение преобразовать в эквивалентную по разрешимости систему (1), состоящую из уравнений типа (5) и (6), а затем свернуть эту систему в одно уравнение (2). Ясно, что исходное уравнение будет иметь или не иметь решение одновременно с новым уравнением (2); смысл такого двойного преобразования состоит в том, что новое уравнение (2) будет иметь степень 4 независимо от степени исходного уравнения. Таким образом, *для положительного решения 10-й проблемы Гильберта было бы достаточно найти способ узнавать наличие или отсутствие решений у уравнений 4-й степени.*

§ 1.3. Решения в натуральных числах

В 10-й проблеме Гильберт спрашивал про решения диофантовых уравнений в целых числах. Иногда разрешимость уравнения в целых числах очевидна; например, ясно, что уравнение

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3 \tag{1}$$

имеет бесконечно много решений вида $x = z$, $y = -1$. В то же время тот факт, что уравнение (1) не имеет решений с неотрицательными x, y и z, весьма нетривиален. Таким образом, для конкретного диофантова уравнения *проблема распознавания наличия целочисленных решений и проблема распознавания наличия неотрицательных целочисленных решений* — это, вообще говоря, две разные массовые проблемы.

С другой стороны, пусть

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{2}$$

— произвольное диофантово уравнение, и мы интересуемся наличием у него неотрицательных решений. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} D(x_1, \ldots, x_m) &= 0, \\ x_1 &= y_{1.1}^2 + y_{1.2}^2 + y_{1.3}^2 + y_{1.4}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= y_{m.1}^2 + y_{m.2}^2 + y_{m.3}^2 + y_{m.4}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Понятно, что любое решение этой системы в произвольных целых числах содержит решение уравнения (2) в неотрицательных целых числах. Верно и обратное — для любого решения уравнения (1) в неотрицательных целых числах $x_1, \ldots, x_m$ найдутся целочисленные значения $y_{1.1}, \ldots, y_{m.4}$, дающие решение системы (3), поскольку каждое неотрицательное целое число представимо в виде суммы квадратов четырёх целых чисел (см. Приложение 1). Как мы знаем из § 1.2, система (3) может быть свёрнута в одно уравнение

$$E(x_1, \ldots, x_m, y_{1.1}, \ldots, y_{m.4}) = 0, \tag{4}$$

разрешимое в целых числах тогда и только тогда, когда исходное уравнение (2) разрешимо в неотрицательных целых числах.

Таким образом, мы показали, что *массовая проблема распознавания наличия решений в неотрицательных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания наличия решений в целых числах.* Тем самым мы установили, что для доказательства неразрешимости 10-й проблемы Гильберта в её оригинальной постановке достаточно доказать неразрешимость её аналога, касающегося наличия или отсутствия решений в неотрицательных целых числах. По техническим причинам несколько удобнее работать с неотрицательными числами, и в дальнейшем везде, где явно не будет оговорено противное, строчные курсивные латинские буквы будут обозначать неотрицательные целые числа. По традиции, идущей от математической логики, мы будем называть такие числа *натуральными*, считая тем самым 0 натуральным числом.

Наши дальнейшие усилия будут направлены на доказательство неразрешимости аналога 10-й проблемы Гильберта для натуральных решений. Мы достигнем этой цели в главе 5, но a priori могло бы оказаться, что этот аналог разрешим, хотя проблема в исходной постановке неразрешима. Проверим, что это не так, т. е. что, ограничивая область изменения неизвестных натуральными числами, мы, в принципе, ничего не теряем.

Пусть

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{5}$$

— произвольное диофантово уравнение, и мы интересуемся его решениями в целых числах $x_1, \ldots, x_m$. Рассмотрим уравнение

$$D(x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m) = 0. \tag{6}$$

Ясно, что любое решение уравнения (6) (в натуральных числах $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, по нашему соглашению) порождает решение

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 - y_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= x_m - y_m \end{aligned} \tag{7}$$

уравнения (5) в целых числах $x_1, \ldots, x_m$. С другой стороны, для любого решения $x_1, \ldots, x_m$ уравнения (5) найдутся натуральные числа $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, удовлетворяющие (7) и тем самым образующие решение уравнения (6).

Таким образом, мы осуществили обратное сведение — показали, что *проблема распознавания наличия целочисленных решений сводится к проблеме распознавания наличия натуральных решений*. В результате оказывается, что две эти проблемы эквивалентны как *массовые проблемы*, хотя, как обсуждалось в начале этого параграфа, для конкретного уравнения ответ может зависеть от области допустимых значений неизвестных.

§ 1.4. Диофантовы множества

Наряду с системами диофантовых уравнений в теории чисел рассматриваются также *семейства диофантовых уравнений*. Под семейством диофантовых уравнений мы понимаем равенство вида

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{1}$$

где D - полином с целыми коэффициентами относительно всех переменных $a_1, \ldots, a_n$, $x_1, \ldots, x_m$, которые разбиты на две части: *параметры* $a_1, \ldots, a_n$ и *неизвестные* $x_1, \ldots, x_m$. При фиксировании значений параметров получаются конкретные диофантовы уравнения, составляющие семейство. Семейство диофантовых уравнений не является бесконечной системой уравнений, поскольку не предполагается, что неизвестные должны удовлетворять всем уравнениям сразу, как это имеет место в случае систем уравнений. Семейства уравнений называют также *параметрическими уравнениями*. У параметрических диофантовых уравнений мы будем различать *степень уравнения относительно всех неизвестных и степень относительно всех переменных*.

При разном выборе значений параметров получаются, вообще говоря, как уравнения, имеющие решения, так и уравнения, решений не имеющие. Параметрическое диофантово уравнение (1) определяет некоторое множество $\mathfrak{M}$, состоящее из всех таких наборов значений параметров $a_1, \ldots, a_n$, для которых существуют значения неизвестных $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие (1):

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_m [D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0]. \tag{2}$$

Число n при этом называется размерностью множества $\mathfrak{M}$, а эквивалентность (2) — его *диофантовым представлением*; допуская некоторую вольность речи, можно называть диофантовым представлением не только (2), но и (1). Множества, имеющие диофантовы представления, называют, аналогично уравнениям, *диофантовыми множествами*. Понятно, что каждое диофантово множество имеет бесконечно много диофантовых представлений.

Диофантовы множества будут основными объектами изучения в этой книге. При этом если в теории чисел исходным объектом обычно является некоторое семейство диофантовых уравнений и требуется описать в каких-то других терминах соответствующее диофантово множество, то у нас обычно будет обратная постановка задачи: *дано некоторое множество, состоящее из* n*-ок натуральчых чисел; требуется узнать, является ли это множество диофантовым, и если является, то найти для него какое-либо диофантово представление.* Иногда диофантовость множества тривиальна, например, очевидна диофантовость множества всех чётных чисел. В других случаях установление диофантовости оказывается технически трудным и вовсе не очевидным, примером здесь может служить множество всех простых чисел, диофантовость которого будет установлена в § 3.4.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Теорема о четырёх квадратах

УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Адлеман и Мандерс (Adleman L., Manders K.)

[1976] Diophantine complexity // 17th Annual Symp. on Found, of Computer Sci. (Houston, Texas, 1976). - Long Beach, Calif.: IEEE Comput. Soc - P. 81-88.

Адлер (Adler A.)

[1969a] Some recursively unsolvable problems in analysis // Proc. Amer. Math. Soc. - V. 22. N 2. - P. 523-526.

[1969б] Extentions of nonstandard models of number theory // Z. math. Logik Grundl. Math. - Bd 15, N 4. - S. 289-290.

[1969в] Existential formulas in arithmetic // Dissert. Abstrs. - V. 29, N 8. - P. 2962-2963.

[1971] A reduction of homogeneous diophantine problem // J. London Math. Soc. - V. 3. N 3. - P. 446-448.

Азра (Azra J. P.)

[1971] Relations diophantiennes et la solution negative du 10^e probleme de Hilbert // Lect. Notes Math. - V. 244. - P. 11-28.

Оглавление

Описание

Название: Десятая проблема Гильберта
Автор: Матиясевич Ю.В.
Издательство: М: Физматлит. 1993. - 224 с. - ISBN 5-02-014326-X
Рецензент: доктор физико-математических наук С.И. Адян
Аннотация: Дается полное доказательство алгоритмической неразрешимости 10-й проблемы Гильберта, касающейся диофантовых уравнений, вместе с необходимыми сведениями из теории алгоритмов и теории чисел, а также приложения развитой для этого техники к другим массовым проблемам теории чисел, алгебры, анализа, теоретического программирования.

Для математиков, в том числе аспирантов и студентов старших курсов.

Библиогр. 247 назв.