Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

С.В. Данилов

КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Конспект лекций

Омск
Издательство ОмГТУ
2008

УДК 531(075)
ББК 22.2я73
Д 18

Рецензенты:
Т.А. Аронова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики и химии ОмГУПС;
Н.М. Саяпина, канд. пед. наук, доцент кафедры общей физики ОГПУ.

Д 18 Данилов, С.В. **Классическая и релятивистская механика**: конспект лекций /С.В. Данилов. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 56 с.

Приведено краткое изложение раздела «Классическая и релятивистская механика», являющегося частью изучаемого в первом семестре курса физики.

Предназначено для студентов всех форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

УДК 531(075)
ББК 22.2я73

ВВЕДЕНИЕ

Механическое движение – это процесс изменения расположения тел или их частей относительно друг друга.

Механическое, как и всякое другое, движение происходит в пространстве и времени.

Пространство и время – сложнейшие физические и философские категории. В ходе развития физики и философии эти понятия претерпели весьма существенные изменения.

При изучении свойств пространства и времени важное значение приобретает измерение расстояний и промежутков времени. Расстояния определяются с помощью *эталона длины*, промежутки времени – с помощью *эталона времени.* Эталоном длины может служить любое материальное тело – линейка или масштаб. Эталоном времени может служить длительность какого-либо периодического процесса.

Ньютон, создавая свою механику, постулировал, что время и пространство *абсолютны.* Что это означает? Это означает, что если имеется двое одинаковых, однажды выверенных (синхронизированных) часов, то эти часы всегда будут показывать одно и то же время, с какой бы скоростью они ни двигались друг относительно друга и как бы далеко друг от друга ни находились. Аналогично, два одинаковых эталона длины будут всегда одинаковыми независимо от состояния их движения.

Механика, постулирующая абсолютный характер пространства и времени, называется *классической* или *ньютоновской.* Классическая механика приписывает абсолютному пространству и абсолютному времени вполне определенные свойства (именно эти свойства лежат в основе сформулированных механикой законов).

Абсолютное пространство *трехмерно* (имеет три измерения), *непрерывно* (его точки могут быть сколь угодно близки друг к другу), *эвклидово* (его геометрия описывается геометрией Эвклида), *однородно* (в нем нет привилегированных точек), *изотропно* (в нем нет привилегированных направлений).

Абсолютное время *одномерно* (имеет одно измерение), *непрерывно* (два его мгновения могут быть сколь угодно близки друг к другу), однородно (в нем нет привилегированных мгновений), *анизотропно* (течет только в одном направлении).

Абсолютное пространство и абсолютное время не взаимосвязаны. Их свойства не зависят также от материи и её движения.

В начале XX века классическая механика подверглась кардинальному пересмотру. В результате была создана одна из величайших теорий нашего времени – *теория относительности.*

Теория относительности установила, что пространство и время не являются самостоятельными объектами; они – формы существования материи; пространство и время имеют не абсолютный, а относительный характер; они неотделимы как друг от друга, так и от материи и её движения. Теория относительности (релятивистская механика) описывает движение макроскопических тел, когда их скорость соизмерима со скоростью света.

Кроме того, в XX веке была создана *квантовая механика,* описывающая движение микрообъектов.

В данном конспекте лекций мы познакомимся с основными понятиями и законами классической и релятивистской механики.

Механика состоит из трех разделов – кинематики, динамики и статики.

Кинематика изучает механическое движение с геометрической точки зрения, то есть вне связи с причинами, вызывающими тот или иной вид движения.

Динамика изучает механическое движение в зависимости от причин, вызывающих тот или иной вид движения.

Статика изучает условия равновесия тел.

Поскольку все точки пространства и все направления в нем равноправны, то нет смысла говорить о положении тел относительно пространства. Можно говорить лишь о положении тел друг относительно друга. Тело, по отношению к которому определяется положение других тел, называется *телом отсчета.*

Для аналитического описания движения с телом отсчета связывают ту или иную координатную систему. Мы будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат. Система координат вместе с телом отсчета и прибором для отсчета времени образуют *систему отсчета.*

Основными объектами, движение которых изучается в механике, являются *материальная точка* и *абсолютно твердое тело.*

Материальная точка – это тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – это тело, деформациями которого в данной задаче можно пренебречь.

Изучение закономерностей механического движения мы начнем с движения материальной точки.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Кинематические характеристики движения материальной точки

Описать движение материальной точки – значит знать её положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Для экспериментального решения этой задачи надо иметь эталон длины – линейку и прибор для измерения времени – часы.

Выберем тело отсчета и свяжем с ним прямоугольную систему координат. Положение материальной точки относительно этой системы можно задать *радиус-вектором* $\vec{r}$, проведенным к точке М из начала координат. Спроецировав $\vec{r}$ на оси координат, получим (рис. 1):

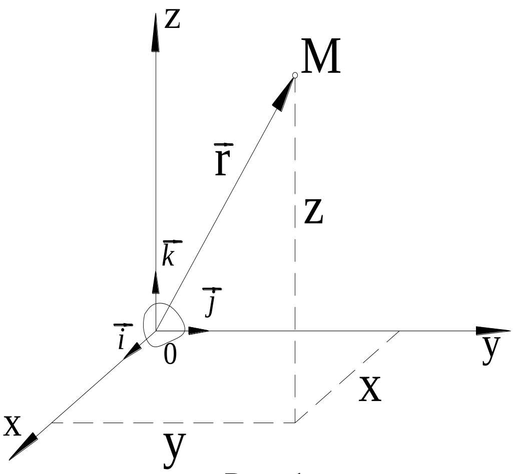


Рис. 1

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей *x*, *y*, *z*; x, y, z – проекции вектора $\vec{r}$ на эти оси, которые называются декартовыми координатами материальной точки.

Модуль радиус-вектора (расстояние ОМ) равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

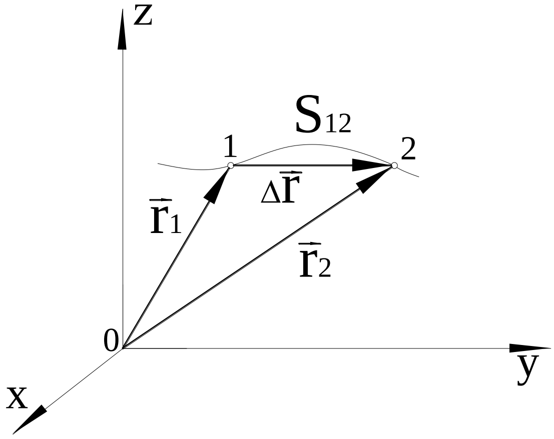


Рис. 2

В процессе движения материальной точки её радиус-вектор изменяется по величине и направлению.

Законом движения материальной точки называется уравнение, выражающее зависимость её радиус-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) .$$

Линия, которую описывает конец радиус-вектора материальной точки при ее движении, называется *траекторией.*

Пусть материальная точка, двигаясь по некоторой траектории, в момент времени t_1 находилась в положении $\vec{r}_1$, а в момент времени t_2 – в положении $\vec{r}_2$ (рис. 2).

Вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начальной точки в конечную, называется *перемещением материальной точки* за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Нетрудно видеть, что перемещение $\Delta\vec{r}$ есть приращение радиус-вектора точки за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Элементарное перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt обозначается $d\vec{r}$.

Расстояние S_{12}, пройденное точкой за время Δt, называется *путем.* Элементарный путь обозначается dS. Путь – величина арифметическая, положительная ($S_{12} > 0$, $dS > 0$ всегда).

Для конечных промежутков времени в общем случае $|\Delta\vec{r}| \neq \mathbf{S_{12}}$, однако для элементарных перемещений с точностью до бесконечно малых высших порядков можно записать $|d\vec{r}| = dS$.

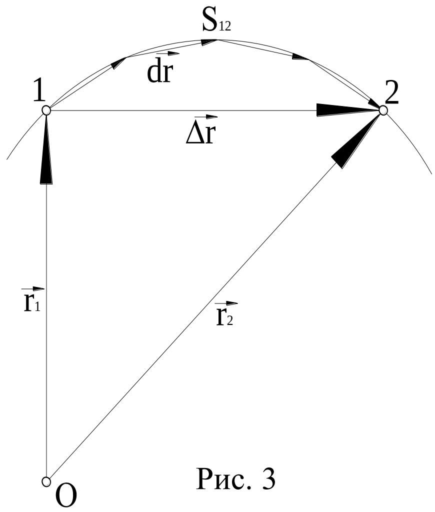


Рис. 3

Перемещение по траектории из точки 1 в точку 2 можно представить как сумму бесконечно большого числа элементарных перемещений $d\vec{r}$. Тогда результирующее перемещение получим, проинтегрировав элементарные перемещения (рис. 3).

$$\Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \quad .$$

Путь получится при интегрировании модулей элементарных перемещений :

$$S_{12} = \int_{S_{12}} dS = \int_{r_1}^{r_2} |d\vec{r}|.$$

Для характеристики быстроты изменения пространственного положения материальной точки вводят понятие скорости.

<u>Скорость</u> – физическая величина, характеризующая процесс изменения пространственного положения движущейся материальной точки и равная перемещению, совершенному точкой за единицу времени.

Различают среднюю и мгновенную скорости.

<u>Среднее значение модуля</u> скорости равно

$$\langle v \rangle = S_{12}/\Delta t\,,$$

где S_{12} – путь, пройденный за время Δt. Это скалярная величина.

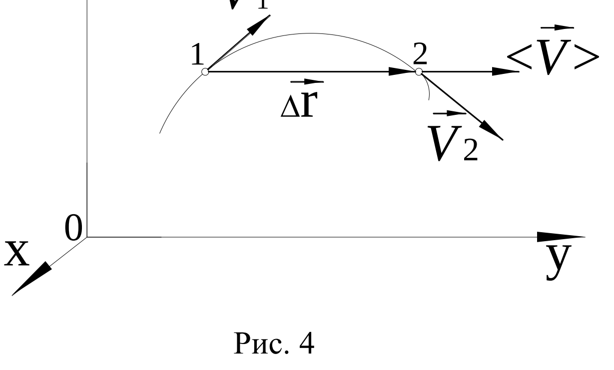


Рис. 4

Вектор средней скорости за промежуток времени Δt равен

$$\langle \vec{v} \rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Направление $<\vec{v}>$ совпадает с $\Delta\vec{r}$ (рис. 4).

Мгновенная скорость равна пределу вектора средней скорости при $\Delta t \to 0$, т.е. производной радиус-вектора $\vec{r}$ по времени.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор $\vec{v}$ направлен по $d\vec{r}$, т.е. по касательной к траектории.

Модуль мгновенной скорости равен

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Проекции скорости на координатные оси равны производным от координат x, y, z по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Зная v_x, v_y, v_z, можно найти v и $\vec{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

В процессе движения материальной точки модуль и направление её скорости в общем случае изменяются. Быстроту изменения скорости с течением времени характеризует ускорение.

Ускорение – векторная физическая величина, характеризующая процесс изменения скорости с течением времени и равная приращению скорости за единицу времени.

Различают среднее и мгновенное ускорение.

Среднее ускорение за промежуток времени Δt равно

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ – приращение скорости за время Δt.

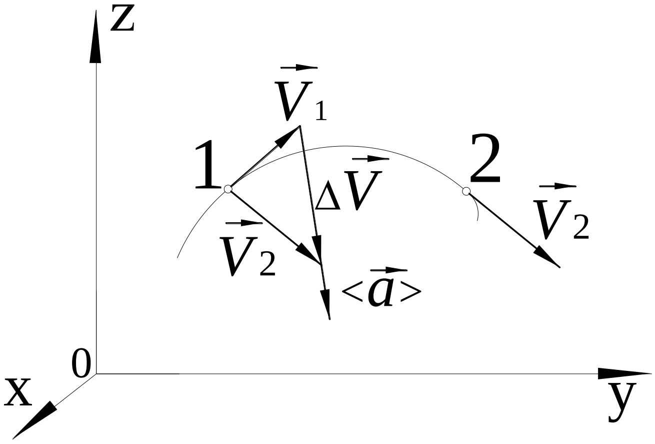


Рис.5

Направление $\langle\vec{a}\rangle$ совпадает с направлением $\Delta\vec{v}$ (рис. 5).

Мгновенное ускорение равно пределу среднего ускорения при $\Delta t \to 0$, т.е. производной $\vec{v}$ по t.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Направление $\vec{a}$ совпадает с направлением $d\vec{v}$.

Подставив сюда $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, получим

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

т.е. ускорение равно второй производной радиус-вектора по времени.

Проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Тогда модуль **a** и вектор $\vec{a}$ можно записать

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ и скорость $\vec{v}$ являются основными величинами, характеризующими механическое состояние материальной точки, поэтому они называются *параметрами механического состояния* материальной точки.

В рамках кинематики решаются две основные задачи: прямая и обратная. При решении прямой задачи по известному закону движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ находятся все остальные кинематические характеристики материальной точки: пройденный путь, перемещение, скорость и ускорение в любой момент времени. При решении обратной задачи по известной зависимости ускорения от времени $\vec{a} = \vec{a}(t)$, задав начальные условия (радиус-вектор $\vec{r}_0$ и скорость точки $\vec{v}_0$ в некоторый начальный момент времени t_0), находят положение точки в любой момент времени. Из определения ускорения следует, что

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt.$$

Проинтегрируем

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt.$$

Получим

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt.$$

Откуда $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt.$$

(*)

Из определения скорости следует, что элементарное перемещение равно
$$d\vec{r} = \vec{v}(t)\,dt.$$

Подставив сюда полученное равенство (*), проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt\right]dt.$$

Получим $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt\right]dt.$$

К вычислению этого интеграла и сводится обратная задача кинематики.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\bar{a} = 0$ (равномерное прямолинейное движение) и $t_0 = 0$.

Тогда $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{v}_0 dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

2. Пусть $\bar{a} = \text{const}$ (равнопеременное движение) и $t_0 = 0$.

Тогда $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t\left[\vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,dt\right]dt = \vec{r}_0 + \int_0^t\left[\vec{v}_0 + \vec{a}\,t\right]dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Чтобы перейти от векторной формы записи уравнений к скалярной, нужно все вектора спроецировать на координатные оси. Спроецируем, например, последнее уравнение на ось x:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Полученное уравнение позволяет найти координату x в момент времени t.

1.2. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения

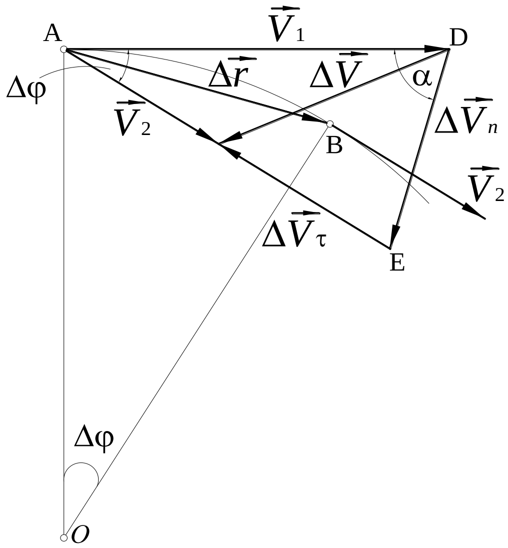


Рис. 6

Скорость при криволинейном движении может изменяться и по модулю и по направлению. Эти изменения можно оценивать раздельно. Пусть скорость в точках A и B равна $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 6).

Приращение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие следующим образом. Из точки A, в которой совмещены начала векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, вдоль линии вектора $\vec{v}_2$ отложим отрезок AE, равный модулю вектора $\vec{v}_1$. Тогда вектор $\Delta\vec{v}$ можно представить в виде суммы двух векторов $\Delta\,\bar{v}_\tau$ и $\Delta\,\bar{v}_n$:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n.$$

Вектор $\Delta\vec{v}_\tau$ характеризует изменение скорости за время Δt по модулю, $\Delta\vec{v}_n$ – по направлению.

Обозначим углы, которые образуют линии векторов $\Delta\vec{v}_\tau$ и $\Delta\vec{v}_n$ с линией вектора скорости в точке A (т.е. с направлением касательной к траектории), соответственно $\Delta\varphi$ и α.

Разделим обе части последнего равенства на Δt и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}.$$

При $\Delta t\to 0$; $\Delta\varphi\to 0$ и $\alpha\to\pi/2$, т.е. в пределе $\Delta\vec{v}_\tau$ займет положение касательной к траектории, а $\Delta\vec{v}_n$ – направление, перпендикулярное к касательной.

Величина $\vec{a}_\tau = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}$ называется *касательным* или *тангенциальным ускорением.*

Величина $\vec{a}_n = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt}$ называется *нормальным* или *центростремительным ускорением.*

Найдем модули $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

Поскольку $$\left|\Delta\vec{v}_\tau\right| = \left|\vec{v}_2\right| - \left|\vec{v}_1\right| = \Delta\left|\vec{v}\right|,$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|}{\Delta t} = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Проекция тангенциального ускорения на направление касательной к траектории точки равна производной от модуля скорости по времени, а модуль тангенциального ускорения равен $\left|a_\tau\right| = \left|\frac{dv}{dt}\right|$.

Будем полагать, что траектория движения точки плоская. Восстановим в точках А и В перпендикуляры к траектории и найдем их точку пересечения О. При $\Delta t\to 0$ отрезок траектории АВ будет представлять собой дугу окружности радиуса R = OA = OB (точка О в этом случае называется *центром кривизны*, а R – *радиусом кривизны* кривой АВ). Треугольники ОАВ и АДЕ подобны. Из подобия треугольников следует

$$\frac{\left|\Delta\vec{v}_n\right|}{v} = \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{R}.$$

Тогда $$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{v}_n\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ – вектор, характеризующий быстроту изменения скорости по модулю, направленный по касательной к траектории и численно равный $\left|\frac{dv}{dt}\right|$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – вектор, характеризующий быстроту изменения скорости по направлению, направленный по радиусу к центру кривизны траектории и численно равный $\frac{v^2}{R}$.

Величина $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ есть *полное ускорение* материальной точки.

Тангенциальное и нормальное ускорения – две взаимно перпендикулярных составляющих полного ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad \text{(рис. 7).}$$

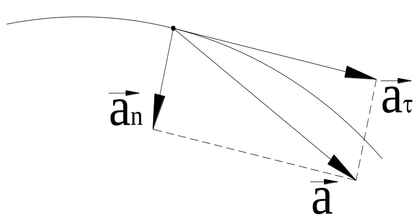


Рис.7

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(dv/dt\right)^2 + \left(v^2/R\right)^2}.$$

1.3. Поступательное и вращательное движение твердого тела

До сих пор мы рассматривали кинематику материальной точки. Обратимся теперь к кинематике абсолютно твердого тела.

Любое движение абсолютно твердого тела может быть сведено к сумме двух движений – поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой, называемой *осью вращения*.

1.4. Кинематические характеристики вращательного движения

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих окружностей к точкам тела за время dt поворачиваются на один и тот же угол $d\varphi$.

Угловое перемещение твердого тела $d\vec{\varphi}$ – вектор, численно равный углу поворота тела $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения так, что если смотреть с его конца, то вращение тела кажется происходящим против часовой стрелки.

Быстроту изменения углового перемещения с течением времени характеризует *угловая скорость.*

Угловая скорость твердого тела $\vec{\omega}$ – физическая величина, характеризующая быстроту изменения углового перемещения с течением времени и равная угловому перемещению, совершаемому телом за единицу времени.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

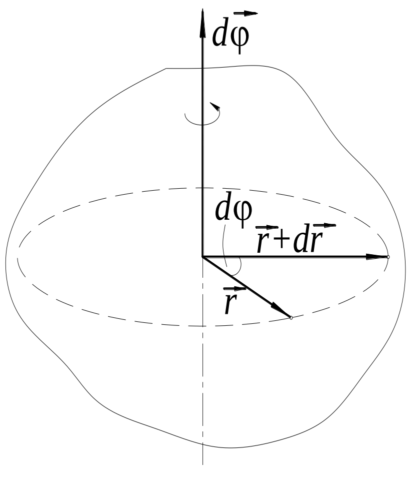
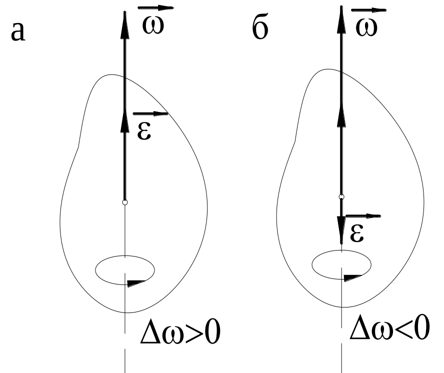


Рис.8



Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $d\vec{\varphi}$ (рис. 8).

Быстроту изменения угловой скорости с течением времени характеризует *угловое ускорение.*

Угловое ускорение твердого тела $\vec{\varepsilon}$ – физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела с течением времени и равная приращению угловой скорости за единицу времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\ .$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $d\vec{\omega}$, т.е. при ускоренном вращении $\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$, при замедленном $\vec{\varepsilon}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$ (рис. 9). Модули $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ равны соответственно

$$\left|d\vec{\varphi}\right| = d\varphi \ ,$$

Рис. 9

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \ , \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \ .$$

Обратим внимание на то, что направления для углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения не вытекают естественным образом из самой природы этих величин, как было с кинематическими характеристиками материальной точки. Эти направления *придуманы* для того, чтобы характеризовать направление вращения тела, поэтому такие вектора называют *псевдовекторами.*

1.5. Взаимосвязь угловых и линейных кинематических характеристик

Кроме угловых величин, движение каждой точки вращающегося твердого тела характеризуют линейные величины: линейное перемещение $d\vec{r}$, линейный путь dS, линейная скорость $\vec{v}$, тангенциальное $\vec{a}_{\tau}$, нормальное $\vec{a}_n$ и полное $\vec{a}$ линейные ускорения.

За время dt произвольная точка твердого тела A переместится на $d\vec{r}$, пройдя путь dS. При этом радиус-вектор точки повернется на $d\varphi$. Тогда $dS = d\varphi \cdot r$, а в векторном виде $d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right]$.

Действительно, направление $d\vec{r}$ перпендикулярно и к $\vec{r}$ и к $d\vec{\varphi}$, и если смотреть с конца $d\vec{r}$, то поворот от $d\vec{\varphi}$ к $\vec{r}$ происходит против часовой стрелки (рис. 10). Модуль же вектора $d\vec{r}$ равен $\left|d\vec{r}\right| = dS = d\varphi \cdot r$.

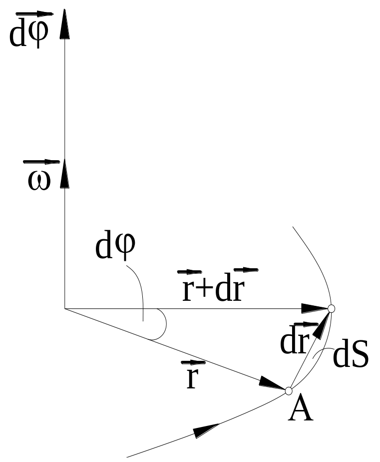


Рис. 10

Следовательно, написанное соотношение справедливо.

Разделив это соотношение на dt, в течение которого произошло перемещение точки A на $d\vec{r}$ и учитывая, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$, получим

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] .$$

Линейная скорость данной точки твердого тела равна векторному произведению угловой скорости тела $\vec{\omega}$ на радиус-вектор точки $\vec{r}$, проведенный из центра окружности, по которой движется точка.

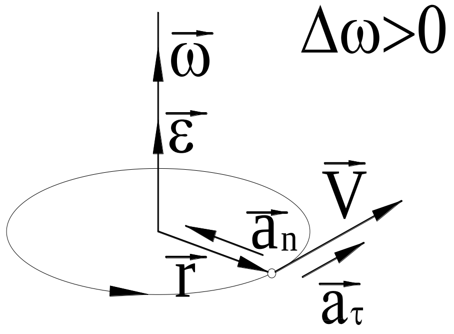


Рис. 11

Если смотреть с конца $\vec{v}$, то поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ происходит против часовой стрелки (рис. 11). Модуль мгновенной скорости равен

$$V = \omega \cdot r \cdot \sin 90° = \omega r.$$

Продифференцируем выражения для $\bar{v}$ по времени:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, r\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right].$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ – линейное ускорение, а $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, получим

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, r] + [\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Первый вектор в правой части направлен по касательной к траектории точки. Он характеризует изменение модуля линейной скорости. Следовательно, этот вектор – тангенциальное ускорение точки.

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}].$$

Его модуль равен

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r \cdot \sin 90° = \varepsilon \cdot r.$$

Второй вектор в правой части равенства направлен к центру окружности и характеризует изменение направления линейной скорости. Этот вектор – нормальное ускорение точки.

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \omega \cdot v \cdot \sin 90° = \omega \cdot v$$

или, учитывая, что $v = \omega \cdot r$,

$$a_n = \omega^2 \cdot r = v^2 / r.$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика дает описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так, а не иначе.

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами, которые обуславливают тот или иной характер движения. Этими причинами являются взаимодействия между телами.

В основе классической динамики лежат три закона, сформулированные Ньютоном в 1687 г.

Законы Ньютона (как и любой другой физический закон) возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Правильность их (для круга явлений, описываемых в рамках классической механики) подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают.

2.1. Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона можно сформулировать так:

Всякое свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Следует отметить, что тел, не подвергающихся в той или иной степени воздействию со стороны других тел, не существует. В наблюдаемых на практике случаях покоя или равномерного прямолинейного движения мы имеем дело с телами, воздействие на которые уравновешивают друг друга. Например, книга, лежащая на столе испытывает воздействие (притяжение) со стороны Земли, а также воздействие (давление) со стороны стола, причем оба эти воздействия компенсируют друг друга, в результате чего книга покоится.

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета.

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно, очевидно, будет двигаться с ускорением. Следовательно, первый закон Ньютона не может выполняться одновременно в обеих системах.

Система отсчета, относительно которой выполняется первый закон Ньютона называется инерциальной.

Сам закон иногда называют *законом инерции.*

Закон инерции – один из самых фундаментальных законов природы. Он справедлив для всех физических объектов: и для микрочастиц и для тел космического масштаба. Этот закон не поколебала ни одна из революций естествознания XX века – ни теория относительности, ни квантовая механика. Причина такой устойчивости закона инерции, по-видимому, в том, что он связан не со свойствами самих тел, а со свойствами пространства – с его однородностью и изотропностью. Действительно, если бы свободная материальная точка, движущаяся по инерции, в какой-то точке пространства изменила бы величину своей скорости, то это означало бы, что данная точка пространства чем-то отличается от других, т.е. пространство неоднородно. Аналогично, если бы данная материальная точка без воздействия извне изменила бы направление своего движения, то это означало бы, что данное направление чем-то отличается от других, то есть пространство анизотропно.

3.2. Второй закон Ньютона

Во втором законе Ньютона фигурируют новые физические величины: сила, масса и импульс.

Сила есть векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия одного тела на другое.

Сила характеризуется модулем, направлением действия, точкой приложения к телу.

Действие силы может быть статическим и динамическим. Статическое действие проявляется в создании деформаций, динамическое – в создании ускорений.

При рассмотрении системы тел принято силы, с которыми тела взаимодействуют между собой, называть внутренними, а силы, действующие на тела со стороны других тел, не входящих в систему, – внешними.

Опыт показывает, что под действием силы материальная точка приобретает ускорение тем больше, чем больше действующая на неё сила. Отношение же модуля силы к модулю обусловленного ею ускорения зависит только от того, к какой материальной точке приложена сила.

Следовательно, для каждой материальной точки величина **F/a** может служить мерой определенного динамического свойства, а именно, свойства приобретать под действием данной силы вполне определенное ускорение, свойства изменять модуль и направление скорости постепенно. Свойство материальных точек изменять под действием сил модуль и направление скорости движения постепенно называют *инерцией*, а меру этого свойства – массой.

Таким образом, *масса – мера инертности материальных точек.*

Импульс материальной точки – векторная физическая величина, равная произведению массы точки на ее скорость $\vec{p} = m\vec{v}$.

Второй закон Ньютона устанавливает зависимость между изменением импульса материальной точки и действующей на неё силой. Его математическая формулировка:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}.$$

Скорость изменения импульса материальной точки в любой момент времени равна силе, действующей на точку.

Последнее равенство представляет собой наиболее общую форму записи второго закона Ньютона, применимую, в том числе, и для описания движения тел переменной массы.

Умножим последнее равенство на dt:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt.$$

Величина $\vec{F}dt$ называется *импульсом силы.*

Импульс силы – векторная физическая величина, характеризующая действие силы во времени и равная произведению силы на время её действия.

Тогда второй закон Ньютона можно сформулировать и так: ***приращение импульса материальной точки за время dt равно по модулю и совпадает по направлению с импульсом действующей на точку силы за этот же промежуток времени.***

Так как в классической механике $m = const$, её можно вынести за знак производной. Тогда второй закон Ньютона для тел постоянной массы можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

или $$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Ускорение, приобретаемое материальной точкой относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально действующей на точку силе, обратно пропорционально массе точки и совпадает по направлению с направлением силы.

Опыт показывает, что для сил выполняется *принцип независимости действия:* если на тело одновременно действует несколько сил, то действие каждой силы происходит независимо от других; деформации и ускорения, обусловленные каждой силой, таковы, как если бы других сил не было. Следовательно, под $\vec{F}$ в общем случае следует понимать результирующую всех сил, действующих на точку:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

2.3. Третий закон Ньютона

Опыт показывает, что механическое воздействие одного объекта на другой, как правило, не остается односторонним.

Рис. 12

Если материальная точка 1 действует на точку 2 с силой $\vec{F}_{21}$, то точка 2 действует на точку 1 с силой $\vec{F}_{12}$, равной $\vec{F}_{21}$ по модулю и противоположной ей по направлению (рис. 12).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

В этом и состоит третий закон Ньютона: ***силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю, противоположны по направлению и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.***

Данное соотношение можно установить на опыте, измерив ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, приобретаемые взаимодействующими материальными точками с массами m_1 и m_2. Опыт показывает, что под действием сил $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{12}$ точки приобретают ускорения, обратно пропорциональные массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

Отсюда $m_1 a_1 = m_2 a_2$ и $F_{12} = F_{21}$.

Направления же $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны, следовательно

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

К этому соотношению можно прийти также, сопоставляя деформации двух неподвижных калиброванных пружин, с которыми скреплены взаимодействующие материальные точки. В этом случае силы, измеренные по деформации пружин, также оказываются одинаковыми по величине.

Третий закон Ньютона справедлив для любых материальных точек, как покоящихся, так и движущихся, однако он выполняется только в рамках классической механики. Так, для тел, движущихся друг относительно друга со скоростями, соизмеримыми со скоростью света, он не выполняется.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

3.1. Момент инерции.

Момент инерции – это скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тела при вращательном движении.

Моментом инерции материальной точки относительно заданной оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния её от оси вращения:

$$J = m \cdot r^2 .$$

Любое тело состоит из множества точек. *Моментом инерции тела* относительно заданной оси вращения называется сумма моментов инерций всех его точек относительно этой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 ,$$

где Δm_i – масса, заключенная в элементарном объеме ΔV_i;

r_i – расстояние элементарной массы от оси вращения.

Но $\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i$, где ρ_i – плотность тела в данной точке.

Следовательно,

$$J = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i \ .$$

Эти соотношения являются приближенными, причем тем более точными, чем меньше элементарные объемы ΔV_i и соответствующие им массы Δm_i.

Следовательно, точное вычисление момента инерции тела сводится к интегрированию:

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int \rho \cdot r^2 \cdot dV \ .$$

Момент инерции тела, имеющего правильную геометрическую форму, может быть довольно просто рассчитан аналитически. В качестве примера найдем момент инерции однородного цилиндра относительно оси, совпадающей с осью его симметрии.

Разобьем цилиндр на цилиндрические слои, толщиной dr. Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии r от оси цилиндра (рис. 13). Объем такого слоя равен

$$dV = h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \ ,$$

где h – высота цилиндра.

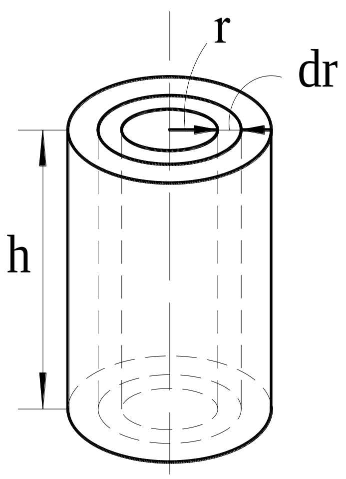


Рис. 13

Поскольку цилиндр однороден, то $\rho = const$ и её можно вынести за знак интеграла.

Итак ,

$$J = \int \rho \cdot r^2 dV = \int_0^R \rho \cdot r^2 h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \ ,$$

где R – радиус цилиндра.

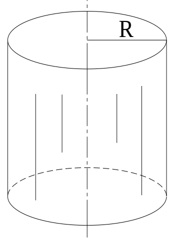
Вынесем за знак интеграла постоянный множитель

$$J = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} \ .$$

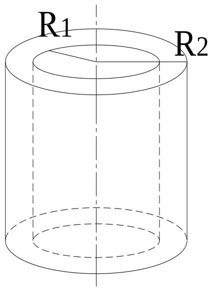
Наконец, учтем, что масса цилиндра $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 h$, и получим

$$J = \frac{mR^2}{2}$$ – для цилиндра.

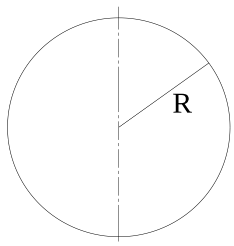
Аналогично рассчитываются моменты инерции любых тел правильной формы. Приведем некоторые из них (рис. 14).



1. Тонкостенный цилиндр (обруч): $J = mR^2$.



2. Толстостенный цилиндр: $J = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 + R_2^2\right)$.



3. Шар: $J = \frac{2}{5} m R^2$.

4. Тонкий стержень: $J = \frac{1}{12} m l^2$.

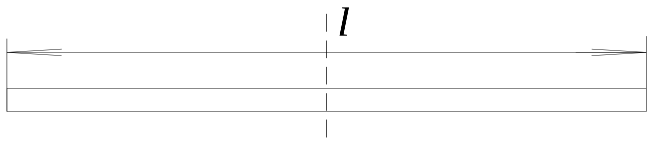


Рис. 14

Моменты инерции тел относительно произвольных осей рассчитываются по теореме Штейнера:

Момент инерции J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями.

$$J = J_0 + md^2.$$

Таким образом, момент инерции тела зависит от его формы, размеров, плотности, расположения оси вращения. Момент инерции не зависит от характера движения тела.

3.2. Момент силы.

Вращательное действие силы – сообщение телу углового ускорения – зависит не только от модуля и направления силы, но и от того, к какой точке тела она приложена. Величиной, которая учитывает все эти факторы, является *момент силы.*

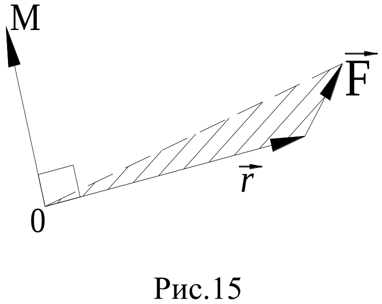


Рис.15

Различают несколько отличающихся друг от друга понятий момента силы:

а) *Момент силы относительно некоторой точки О.*

Моментом силы относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$ (рис. 15).

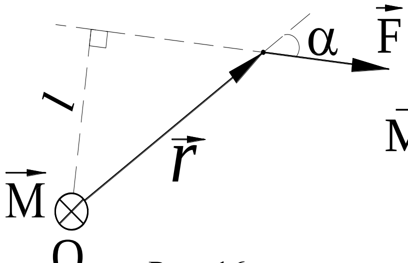


Рис. 16

$\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right].$

Рисунок 16 показывает взаимное расположение векторов, если смотреть вдоль вектора момента силы $\vec{M}$. Здесь и на последующих рисунках значком ⊗ обозначено направление вектора «от нас». Видно, что модуль момента силы равен $M=rF\sin\alpha=Fl$, где l – длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы, называется *плечом силы.*

б) *Момент силы относительно некоторой оси Z.*

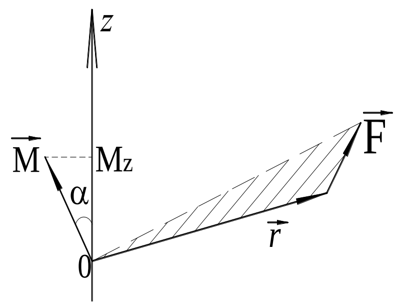


Рис. 17

Моментом силы относительно некоторой оси Z называется проекция момента силы относительно любой точки, взятой на данной оси, на эту ось Z:

$$M_z=\left[\vec{r},\vec{F}\right]_z .$$

Таким образом, момент силы относительно оси – величина скалярная, он не имеет направления, но может быть положительным или отрицательным в зависимости от величины угла α (рис. 17).

В случае, когда ось вращения закреплена, силу $\vec{F}$ имеет смысл представить в виде суммы трех векторов: $F_\parallel$, направленного вдоль оси вращения, $F_\perp$, перпендикулярного оси вращения и F_τ, направленного по касательной к окружности, вдоль которой движется точка приложения силы (рис. 18). Тогда и момент силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки О равен сумме моментов этих трех составляющих сил, из которых не равен нулю только момент составляющей $\vec{F}_\tau$. Тогда $\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}_\tau\right]=\vec{M}_\tau$.

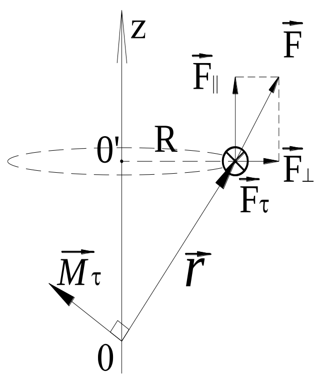


Рис. 18

При этом момент силы относительно оси Z будет равен $M_z=\left(\vec{M}_\tau\right)_z=M_\tau\cos\alpha=rF_\tau\cos\alpha=RF_\tau$.

Здесь F_τ – проекция составляющей $\vec{F}_\tau$ на направление перемещения точки приложения силы.

в) *Момент пары сил.*

Парой сил называются две силы, равные по модулю, противоположные по направлению, но не направленные вдоль одной прямой. $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (см. рис. 19).

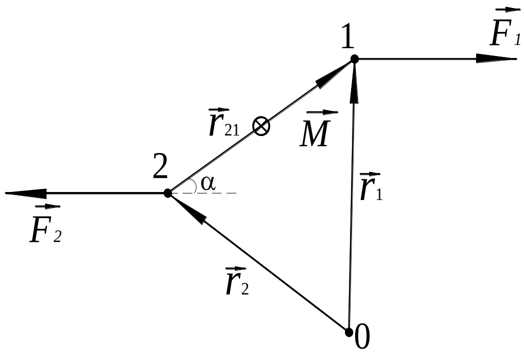


Рис. 19

Момент такой пары сил относительно некоторой точки О равен сумме моментов сил, образующих пару.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right]$$

Сделаем преобразования:

$$\vec{M} = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}_1\right].$$

Таким образом, момент пары сил не зависит от положения точки О. Его направление показано на рис. 19 (от нас).

При взаимодействии тел, согласно 3 закону Ньютона, силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Тогда $\vec{r}_{12}$ параллелен $\vec{F}_1$ и их векторное произведение равно нулю. Отсюда следует очень важный вывод о том, что *сумма моментов всех внутренних сил для любой системы частиц равна нулю.*

$$\sum \vec{M}_{\text{внутр.}} = 0.$$

3.3. Момент импульса

Одной из важнейших физических величин является момент импульса. При этом, как и в случае момента силы, различают момент импульса относительно точки и относительно оси. Дадим вначале определение момента импульса материальной точки.

а) *Момент импульса материальной точки относительно точки О.*

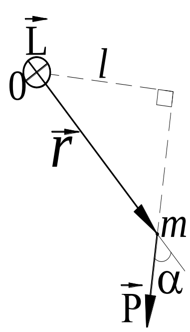
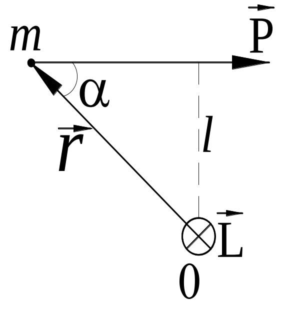


Рис. 20

Моментом импульса материальной точки относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора, проведенного из точки О к данной материальной точке, на вектор импульса этой материальной точки (рис. 20).

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{P}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right]$$

Наибольший интерес вызывают при этом два часто встречающихся на практике случая движения материальной точки:



ет-

Рис. 21

1) движение материальной точки по прямолинейной траектории (рис. 21);

На приведенном рисунке вектор момента импульса направлен от нас, а его модуль равен

$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = m \cdot v \cdot l$. Расстояние l, то есть длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию вектора импульса материальной точки, ся *прицельным параметром.*

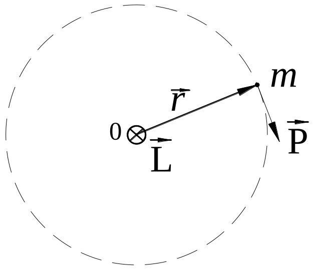


Рис. 22

2) движение материальной точки по окружности (рис. 22).

В данном случае угол между радиус-вектором $\vec{r}$ материальной точки и импульсом этой точки $\vec{P}$ равен 90°, поэтому модуль момента импульса равен

$L = m \cdot v \cdot r$, где r – радиус окружности, по которой происходит движение.

б) *Момент импульса материальной точки относительно некоторой оси Z.*

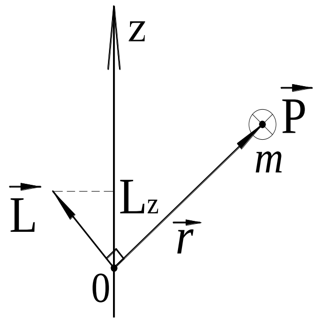


Рис. 23

Моментом импульса материальной точки относительно произвольной оси Z называется проекция вектора момента импульса этой материальной точки относительно любой точки О, выбранной на оси Z, на данную ось (рис. 23):

$$L_z = \left[\vec{r}, \vec{P}\right]_z$$

Теперь перейдем к рассмотрению понятия момента импульса твердого тела.

в) *Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения.*

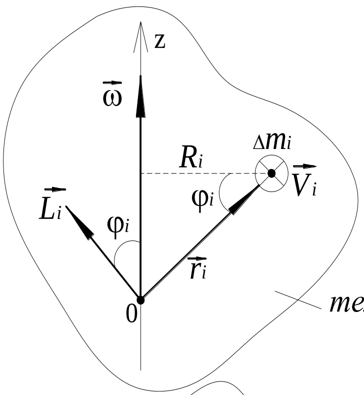
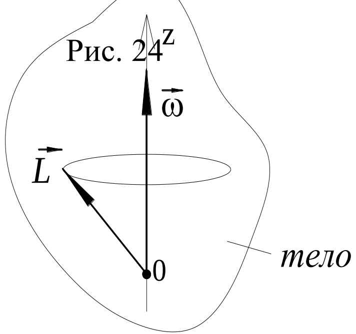


Рис. 24



Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых состоит тело.

Выберем на оси Z произвольную точку О. Разобьем тело на материальные точки. На рисунке 24 показана одна из таких точек, имеющая массу Δm_i, движущаяся от нас со скоростью $\vec{v}_i$. Момент импульса этой материальной точки относительно точки О равен

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{P}_i\right] = \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i\right].$$

Тогда момент импульса всего тела относительно точки O будет равен $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i \right].$

Заметим, что в общем случае для несимметричного тела вектор момента импульса тела относительно точки O не направлен вдоль оси вращения тела и при вращении описывает вокруг оси Z коническую поверхность (рис. 25).

Рис. 25

Найдем теперь момент импульса тела относительно оси вращения Z. Вначале запишем выражение для момента импульса отдельной материальной точки относительно оси Z.

$$L_{zi} = L_i \cos\varphi_i = \Delta m_i \cdot v_i \cdot r_i \cdot \cos\varphi_i = \Delta m_i \cdot v_i \cdot R_i .$$

Учтем взаимосвязь модулей угловой и линейной скоростей материальной точки:

$v_i = \omega R_i$. Тогда $L_{zi} = \omega \Delta m_i R_i^2$.

Момент импульса тела относительно оси равен сумме моментов импульсов всех точек этого тела относительно этой оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi} = \omega \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 .$$

Таким образом, момент импульса тела относительно оси не зависит от выбора положения точки O.

Видно, что сумма в последнем равенстве представляет собой момент инерции тела относительно оси Z (см. п. 3.1). Тогда выражение для момента импульса тела относительно оси принимает окончательный вид:

$$L_z = J\omega .$$

3.4. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Выясним, от чего зависит изменение момента импульса материальной точки. Для этого возьмем производную от вектора момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}, m\vec{v}\right] = \left[\vec{r}, m\frac{d\vec{v}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{a}\right] + \left[\vec{v}, m\vec{v}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}.$$

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту сил, действующих на эту точку. Подобное утверждение справедливо и для момента импульса материальной точки относительно некоторой оси Z:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad \text{и} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z .$$

Полученные равенства можно назвать законом изменения момента импульса материальной точки.

Теперь запишем последнее равенство для каждой точки вращающегося тела, а затем просуммируем по всем точкам тела:

$$\frac{dL_{zi}}{dt} = M_{zi}\,, \qquad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} L_{zi} = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}\,, \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{zi\,\text{внутр.}} + \sum_{i=1}^{n} M_{zi\,\text{внеш.}}\,.$$

В последнем равенстве L_z – момент импульса тела относительно оси Z,

$\sum_{i=1}^{n} M_{zi\,\text{внутр.}}$ – сумма моментов внутренних сил, действующих между точками тела. Эта сумма, согласно выводу, сделанному в п. 3.2, равна нулю,

$\sum_{i=1}^{n} M_{zi\,\text{внеш.}}$ – сумма моментов внешних сил, действующих на точки тела, которую можно обозначить просто $M_{z\,\text{внеш.}}$.

Тогда для всего тела в целом имеем равенство $\dfrac{dL_z}{dt} = M_{z\,\text{внеш.}}$

В п. 3.3 мы получили выражение для момента импульса тела относительно оси Z.

$L_z = J\omega$. Тогда, учитывая, что момент инерции абсолютно твердого тела – постоянная величина, получим:

$\dfrac{d}{dt}(J\omega) = M_{z\,\text{внеш.}}$, $J\dfrac{d\omega}{dt} = M_{z\,\text{внеш.}}$ и, наконец, обозначим $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon_z$, то есть если направление оси Z выбрано вдоль угловой скорости тела, то ε_z – проекция вектора углового ускорения на ось Z. Тогда окончательно получаем:

$$J\varepsilon_z = M_{z\,\text{внеш.}}\,.$$

Последнее равенство и представляет собой основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Его можно записать и для модулей входящих в него величин: $\varepsilon = \dfrac{M_{\text{внеш.}}}{J}$.

В этом виде основной закон динамики вращательного движения имеет формулировку: ***Модуль углового ускорения тела прямо пропорционален модулю суммарного момента внешних сил, приложенных к телу и обратно пропорционален моменту инерции тела.***

4. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

4.1. Механическая работа

Опыт показывает, что различные формы движения материи способны к взаимным превращениям. Так, в тепловой машине хаотическое молекулярное движение превращается (частично) в упорядоченное механическое, при движении с трением механическое движение превращается в хаотическое молекулярное.

Установлено, что все взаимные превращения различных форм движения материи происходят в строго определенных количественных соотношениях. Движение бесследно не исчезает. «Исчезновение» одной формы движения всегда сопровождается «возникновением» эквивалентного количества движения другой формы.

Работа – это физическая величина, характеризующая процесс превращения одной формы движения в другую.

Обратим внимание на терминологию. Говорят, что работа «совершается», «затрачивается», «производится». Работа совершается телами; в механике, однако, принято говорить, что работа совершается силой, поскольку наличие силы, наличие взаимодействия тел является необходимым признаком работы.

По определению, *элементарная работа* δA *, совершаемая силой* $\vec{F}$*, равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки приложения силы* $d\vec{r}$*:*

$$\delta A = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right).$$

Работа при конечном перемещении равна интегралу

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right),$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы начального и конечного положения точки приложения силы.

От интегрирования по радиус-вектору можно перейти к интегрированию по времени. Выразим элементарное перемещение через мгновенную скорость $\vec{v}$:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt.$$

Тогда
$$\delta A = (\vec{F} \cdot \vec{v})\,dt.$$

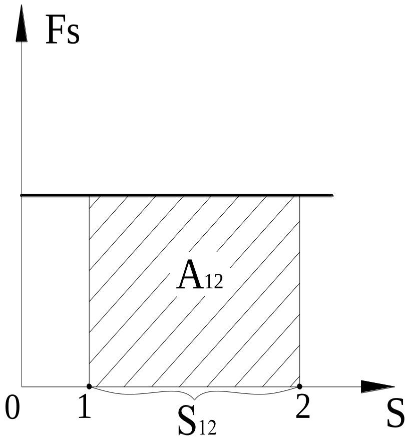
Интегрируя по времени, получим работу силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v})\,dt.$$

Поскольку $(\vec{F} d\vec{r}) = F \cdot |d\vec{r}| \cos\alpha$ и, как известно, $|d\vec{r}| = dS$, то

$$\delta A = F\,dS\cos\alpha,$$

где α – угол между направлением силы и направлением движения в каждой точке.



Обозначим $F\cos\alpha = F_S$ – проекция силы на направление движения. Тогда

$$A_{12} = \int_{S_{12}} F_S\,dS.$$

В ряде случаев приведенные интегралы вычисляются просто. Так, если в процессе перемещения сила не изменяется и движение является прямолинейным, то

$$A_{12} = F_S \int_{S_{12}} dS = F_S\, S_{12}\,.$$

Рис. 26 Работа может быть вычислена графически. Построим график зависимости F_S от S. Если $F_S = \text{const}$ (рис. 26), то графиком F_S будет прямая, параллельная оси S, а работа силы на пути S_{12} численно равна площади прямоугольника, покрытого штриховкой $(A_{12} = F_s\, S_{12})$.

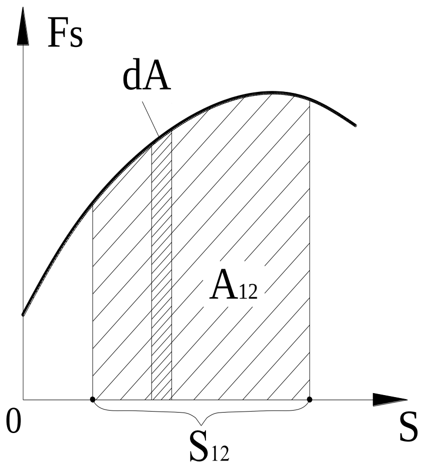


Рис. 27

Если $F_S \neq \text{const}$, то графиком F_S будет некоторая кривая (рис. 27).

Работа силы на пути S_{12} в этом случае равна площади заштрихованной криволинейной трапеции $\left(A_{12} = \int_{S_{12}} F_S\, dS\right)$

(элементарная работа δA равна площади узкой полоски).

Быстроту совершения работы характеризует *мощность*. Мощность равна работе, совершаемой за единицу времени. Различают среднюю и мгновенную мощность.

Средняя за промежуток времени Δt мощность равна

$$\langle N \rangle = \frac{A_{12}}{\Delta t},$$

где A_{12} – работа, совершаемая за время Δt.

Мгновенная мощность равна

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Подставив сюда $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ и учитывая, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, получим

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{v})\,.$$

Мгновенная мощность равна скалярному произведению силы на скорость.

4.2. Консервативные и неконсервативные силы.

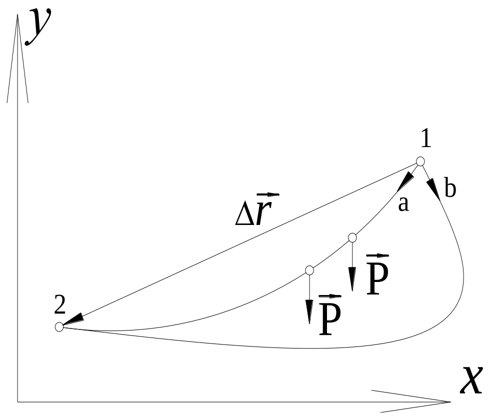


Рис. 28

Силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из некоторого начального положения в конечное, называются консервативными.

Найдем работу, совершаемую силой тяжести $\vec{P}$ при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 по двум разным путям S_{1b2} и S_{1a2} (рис. 28).

Искомые работы равны соответственно

$$A_{1a2} = \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} (\vec{P} \cdot d\vec{r}) \quad \text{и}$$

$$A_{1b2} = \int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} (\vec{P} \cdot d\vec{r}) \ .$$

Полагая, что масштабы перемещения значительно меньше радиуса Земли, можем считать, что $\vec{P}$ одинакова во всех точках рассматриваемой области пространства. Вынесем $\vec{P}$ за знаки интегралов.

$$A_{1a2} = (\vec{P} \cdot \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} d\vec{r}) \ , \qquad A_{1b2} = (\vec{P} \cdot \int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} d\vec{r}) \ ,$$

$$A_{1a2} = (\vec{P} \cdot \Delta\vec{r}), \qquad A_{1b2} = (\vec{P} \cdot \Delta\vec{r}) .$$

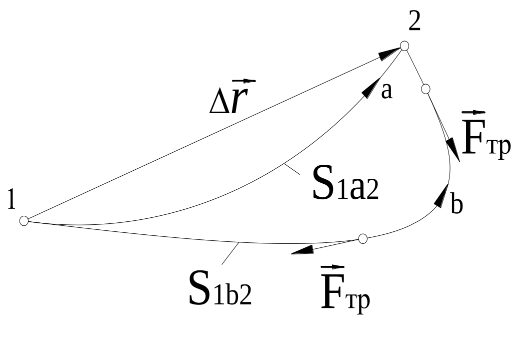
Так как, двигаясь из положения 1 в положение 2 по траектории **а** и **в**, точка совершает одно и то же перемещение $\Delta\vec{r}$, следовательно, $A_{1a2} = A_{1b2}$.

Таким образом, сила тяжести – консервативная сила. Консервативной является также сила упругости.

Сила называется неконсервативной ,если совершаемая ею работа зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из начального положения в конечное.

Найдем, например, работу силы трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, действующей на тело при перемещении его из точки 1 в точку 2 по горизонтальной поверхности по двум разным путям S_{1a2} и S_{1b2} (рис. 29). Искомые значения работ равны соответственно:

$$A_{1a2} = \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} (\vec{F}_{тр} \cdot d\vec{r}) \ , \qquad A_{1b2} = \int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} (\vec{F}_{тр} \cdot d\vec{r}) .$$



Направление силы трения в процессе перемещения тела изменяется, поэтому выносить $\vec{F}_{тр}$ за знак интеграла нельзя. Но так как $\vec{F}_{тр}$ в любой точке траектории направлена противоположно $d\vec{r}$, то проекция $\vec{F}_{тр}$ на $d\vec{r}$ одна и та же во всех точках траектории и её можно вынести за знак интеграла.

Рис. 29

$$A_{1a2} = \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} F_{тр}\,|d\vec{r}|\cos\pi = -F_{тр}\int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2}|d\vec{r}| = -F_{тр}\int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} dS = -F_{тр}\,S_{1a2}\ ,$$

$$A_{1b2} = \int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} F_{тр}\,|d\vec{r}|\cos\pi = -F_{тр}\int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2}|d\vec{r}| = -F_{тр}\int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} dS = -F_{тр}\,S_{1b2}\,.$$

Так как $S_{1A2} \neq S_{1B2}$ то и $A_{1A2} \neq A_{1B2}$.

Таким образом, сила трения скольжения – неконсервативная сила.

Неконсервативными силами являются все силы сухого и вязкого трения, силы давления газа, силы, развиваемые какими-либо машинами, двигателями и уравновешивающие перечисленные силы.

4.3. Энергия.

Неуничтожимость движения материи и способность различных форм движения к взаимным превращениям привели к мысли о том, что должна существовать единая мера различных форм движения, характеризующая любое движение с точки зрения возможностей превращения его в другие формы. Такой мерой, как выяснилось, является энергия.

Энергия – единая мера различных форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов, являющаяся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией состояния объекта.

Функция состояния – это такая физическая характеристика материального объекта, изменение которой при переходе объекта из одного состояния в другое не зависит от пути перехода и целиком определяется параметрами начального и конечного состояний.

Материальные объекты могут участвовать в разных взаимодействиях (гравитационном, электромагнитном и т.д.), а также в различных формах движения (они могут перемещаться в пространстве, в них могут происходить различные молекулярные, электромагнитные, ядерные и тому подобные процессы). Обычно изменения, обусловленные участием объекта в различных типах взаимодействий и формах движения, рассматривают отдельно. В связи с этим энергию определяют как сумму нескольких слагаемых, каждое из которых зависит только от одного – двух параметров.

Механическое состояние объекта характеризуется двумя параметрами – радиус-векторами материальных точек, из которых он состоит, и их скоростями (импульсами). Поэтому полная механическая энергия объекта является функцией координат и скоростей материальных точек.. Ту часть полной энергии, которая определяется скоростями точек объекта, принято называть *кинетической энергией*, а ту часть, которая зависит от их координат, – *потенциальной энергией*.

Итак, $$E = E_K + E_n$$

4.4. Работа и кинетическая энергия при поступательном движении.

Покажем, что механическая работа однозначно связана с вполне определенной функцией механического состояния материального объекта, над которым эта работа совершается. Пусть на материальную точку с массой m действует произвольная сила $\vec{F}$. Найдем работу этой силы за время, в течение которого модуль скорости точки изменяется от v_1 до v_2. Элементарная работа силы $\vec{F}$ равна

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

Преобразуем это выражение:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = m(\vec{a} \cdot d\vec{r}) = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}\right) = m(\vec{v} \cdot d\vec{v}).$$

Найдем скалярное произведение вектора скорости $\vec{v}$ на его приращение $d\vec{v}$.

$(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = v|d\vec{v}|\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $d\vec{v}$. Но тогда $|d\vec{v}|\cos\alpha = d|\vec{v}| = dv$ и получаем $(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = v\,dv$, то есть скалярное произведение вектора на его приращение равно произведению модуля этого вектора на приращение модуля этого вектора. Этим свойством векторов мы будем пользоваться и в дальнейшем. Таким образом, $\delta A = m \cdot v \cdot dv$.

Полная работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при изменении скорости точки от v_1 до v_2, равна интегралу:

$$A = \int \delta A = \int_{v_1}^{v_2} m\,v\,dv,$$

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Таким образом, работа A не зависит от пути перехода точки из начального состояния со скоростью v_1 в конечное состояние со скоростью v_2, то есть не зависит от способов, посредством которых было достигнуто данное изменение скорости: от того, каковы были промежуточные состояния, быстро или медленно изменялась скорость, постоянная или переменная сила действовала на точку, по прямолинейной или криволинейной траектории она перемещалась. Если модуль скорости точки изменился от v_1 до v_2, то совершаемая над точкой работа равна $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$, следовательно, эта разность есть приращение некоторой функции механического состояния точки $E_к$, зависящей от скорости.

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=E_K(v_2)-E_K(v_1)$$

или кратко $$A=\Delta E_K\,.$$

Если на точку одновременно действует несколько сил, то под **A** следует понимать сумму работ всех действующих на точку сил.

Итак: *функция механического состояния, которая зависит от массы материальной точки и квадрата её скорости и приращение которой равно работе всех действующих на точку сил, называется кинетической энергией точки*

$$E_K=\frac{mv^2}{2}\,.$$

4.5. Работа и кинетическая энергия при вращательном движении

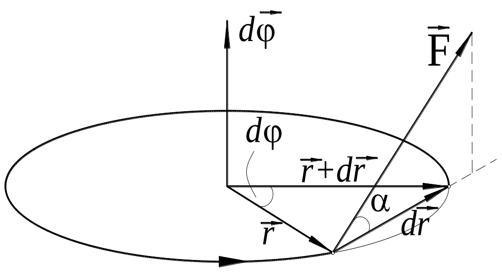


Рис. 30

Найдем работу, совершаемую внешней силой при повороте твердого тела на некоторый угол вокруг неподвижной оси.

Элементарная работа силы $\vec{F}$, действующей на тело, равна

$$\delta A=(\vec{F}\cdot d\vec{r})=F|d\vec{r}|\cos\alpha=F_\tau|d\vec{r}|,$$

где α – угол между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$;

F_τ – проекция $\vec{F}$ на $d\vec{r}$ (рис. 30).

Но, как известно

$$|d\vec{r}|=dS=r\cdot d\varphi\ ,$$

Тогда $$\delta A=F_\tau\cdot r\cdot d\varphi.$$

$F_\tau\cdot r=M_z$ – момент силы $\vec{F}$ относительно оси Z, совпадающей с направлением углового перемещения $d\vec{\varphi}$

Если угол α – острый:

$$\cos\alpha>0 \quad F_\tau>0, \text{ то и } M_z>0,$$

Если угол α – тупой:

$$\cos\alpha<0 \quad F_\tau<0 \qquad M_z<0.$$

Тогда $$\delta A=M_z\cdot d\varphi.$$

Элементарная работа силы, действующей на твердое тело при вращении его вокруг неподвижной оси равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарное угловое перемещение тела.

Проинтегрировав, получим работу силы при повороте тела на конечный угол

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi.$$

Как известно из п. 4.4, работа некоторой силы должна быть равна приращению кинетической энергии тела. Используя этот принцип, получим выражение для кинетической энергии вращательного движения твердого тела:

$$\delta A = M_z \cdot d\varphi \;.$$

Но из п. 3.4 следует, что $M_z = J\,\varepsilon_z$, где $\varepsilon_z = \dfrac{d\omega}{dt}$.

Тогда

$$\delta A = J\left(\frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi\right) = J\,\omega\, d\omega \;.$$

Интегрируя, получим работу при повороте тела на конечный угол.

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\,\omega\, d\omega = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} \;.$$

Поскольку, как мы показали ранее, работа всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии этого тела $A = \Delta E_K$, то очевидно, что выражение $\dfrac{J\omega^2}{2}$ представляет собой кинетическую энергию вращательного движения твердого тела

$$E_{K(вр)} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Последнюю формулу можно получить и иначе. Кинетическая энергия, которой обладает тело, складывается из кинетических энергий отдельных его точек. Разобьем вращающееся тело на элементы массой dm , отстоящие на расстоянии **r** от оси вращения.

Тогда кинетическая энергия каждого элемента равна

$$dE_{K(вр)} = \frac{dm\, v^2}{2}.$$

Так как $v = \omega\, r$, то $dE_{K(вр)} = \dfrac{dm\,\omega^2 r^2}{2}$.

Кинетическая энергия всего тела найдется интегрированием:

$$E_{K(вр)} = \int dE_{K(вр)} = \int \frac{\omega^2}{2} dm\; r^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2\, dm \,.$$

Так как $J = \int r^2\, dm$ – момент инерции тела, то для кинетической энергии вращательного движения получаем выражение

$$E_{К(вр)} = \frac{J\omega^2}{2} \; .$$

При качении тела его движение может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного движения центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс и сохраняющей неизменную ориентацию в пространстве, тогда кинетическая энергия такого движения равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_К = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \; .$$

Отметим, наконец, свойства кинетической энергии.

1. Кинетическая энергия – однозначная, конечная, непрерывная, дифференцируемая функция механического состояния объекта.
2. Кинетическая энергия не может быть отрицательной.
3. Кинетическая энергия – величина аддитивная: кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел.
4. Изменение кинетической энергии обусловлено работой всех действующих на тело сил – и консервативных и неконсервативных. Если эта работа положительна, кинетическая энергия тела возрастает, если отрицательна – уменьшается.
5. Тело, обладающее кинетической энергией, способно передать её другим телам, т.е. совершить работу. В этом смысле говорят об энергии, как о способности тела совершать работу.

4.6. Работа и потенциальная энергия

Рассмотрим теперь, как можно найти работу силы в том случае, если эта сила является консервативной. Вновь обратимся к работе силы тяжести.

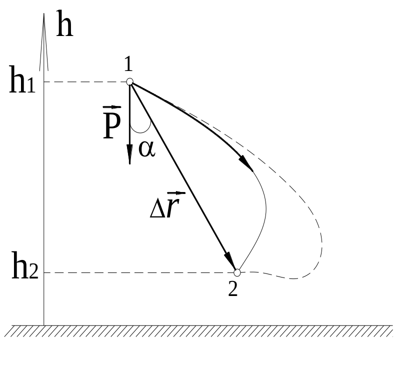


Рис. 31

Пусть материальная точка с массой m переместилась по произвольной траектории из точки 1 в точку 2, отстоящих от поверхности Земли соответственно на расстояниях h_1 и h_2 (рис. 31). Совершенная при этом работа, как показывалось ранее, равна

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{P} \cdot d\vec{r}) = \left(\vec{P} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \right) = (\vec{P} \cdot \Delta\vec{r}) \; ,$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки.

Сделаем дальнейшие преобразования.

$$A = (\vec{P} \cdot \Delta\vec{r}) = P \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha = P \cdot \left|\Delta\vec{r}\right|_p ,$$

где $\left|\Delta\vec{r}\right|_p$ – проекция перемещения на направление $\vec{P}$.

Проекцию $\left|\Delta\vec{r}\right|_p$ можно выразить через приращения высоты $\Delta h = h_2 - h_1$. Так как $\left|\Delta\vec{r}\right|_p > 0$, а $\Delta h < 0$, то

$$\left|\Delta\vec{r}\right|_p = -\Delta h = -(h_2 - h_1) = h_1 - h_2 .$$

Тогда для работы получим выражение

$$A = P(h_1 - h_2) = Ph_1 - Ph_2 = mqh_1 - mqh_2 .$$

Мы видим, что работа силы тяжести зависит только от модуля $\vec{P}$ и от начального и конечного положений перемещающейся материальной точки (от h_1 до h_2), но не зависит от формы траектории, по которой происходит движение.

Следовательно, разность $mqh_1 - mqh_2$ есть изменение (убыль) некоторой функции состояния E_n, зависящей от положения материальной точки относительно Земли.

$$mqh_1 - mqh_2 = E_{n1} - E_{n2} .$$

Тогда выражение для работы можно представить в виде

$$A = E_{n1} - E_{n2}$$

или кратко

$$A = -\Delta E_n ,$$

где $E_n = mqh$ – взаимная потенциальная энергия материальной точки и Земли.

Рассмотрим теперь работу, совершаемую ещё одной консервативной силой – силой упругости.

Работа упругой силы при растяжении или сжатии пружины равна

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r}) ,$$

где $\vec{F}_{упр} = -k\,\vec{r}$ по закону Гука, где k – жесткость пружины, $\vec{r}$ – деформация.

Возьмем интеграл $A = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (k\,\vec{r} \cdot d\vec{r}) = -k\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) = -k\int_{r_1}^{r_2} r \cdot dr = \frac{k\,r_1^2}{2} - \frac{k\,r_2^2}{2}$.

Мы получили, что работа упругой силы не зависит от того, как произошло изменение длины пружины: быстро или медленно, равномерно или с остановками. Эта работа определяется только начальной и конечной деформацией пружины.

Следовательно, разность $\frac{k\,r_1^2}{2} - \frac{k\,r_2^2}{2}$ есть изменение (убыль) некоторой функции состояния пружины E_n, зависящей от взаимного расположения частей пружины

$$\frac{k\,r_1^2}{2} - \frac{k\,r_2^2}{2} = E_{n1} - E_{n2} .$$

Тогда работа $A = E_{п1} - E_{п2}$ или кратко $A = -\Delta E_п$,

где $E_п = \dfrac{k\,r^2}{2}$ – потенциальная энергия упруго деформированного тела (r – деформация, k – жесткость) .

Таким образом, какой бы ни была по своей природе консервативная сила, её работа всегда равна убыли потенциальной энергии тех тел, между которыми действует эта сила.

Итак, *функция механического состояния взаимодействующих тел или их частей, зависящая от их координат, убыль которой равна работе консервативных сил, называется взаимной потенциальной энергией этих тел или их частей.*

Отметим свойства потенциальной энергии.

1. Потенциальная энергия – однозначная, конечная, непрерывная, дифференцируемая функция состояния механического объекта.

2. Потенциальная энергия может быть только *взаимной*: она в одинаковой степени характеризует оба взаимодействующих тела или все взаимодействующие тела (если их несколько).

3. Числовое значение потенциальной энергии определяется с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора нулевого уровня (начала отсчета) потенциальной энергии. Нулевой уровень, вообще говоря, можно выбирать где угодно, это определяется удобством расчетов. Дело в том, что практическое значение имеет не сама энергия, а её изменение, и эта разность не зависит от выбора нулевого уровня.

4. Потенциальная энергия может иметь как положительное, так и отрицательное значение (это как раз связано с произвольностью выбора нулевого уровня).

5. Не всякое состояние и не всякое взаимодействие можно описывать при помощи потенциальной энергии. Состояние взаимодействующих тел можно охарактеризовать потенциальной энергией только в том случае, если между телами действуют консервативные силы.

4.7. Связь потенциальной энергии с консервативной силой

Между потенциальной энергией материальной точки и консервативной силой, действующей на точку и обусловливающей наличие этой энергии, существует связь. Установим эту связь.

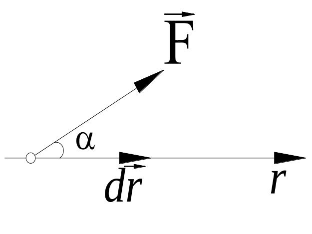


Рис. 32

Если в каждой точке пространства на материальную точку действует консервативная сила, то говорят, что точка находится в *потенциальном поле сил.*

Пусть материальная точка, находясь в потенциальном поле, переместилась на $d\vec{r}$ в произвольном направлении **r** (рис. 32). Консервативная сила $\vec{F}$, действующая на точку, совершит при этом работу:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F_r\, dr ,$$

где F_r – проекция силы на направление $d\vec{r}$.

Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии $\delta A = -dE_n$.

Приравнивая правые части, получим

$$F_r = -\frac{dE_n}{dr}.$$

Таким образом, проекция консервативной силы на произвольное направление **r** равна по абсолютной величине и противоположна по знаку производной от потенциальной энергии по этому направлению. Полученное соотношение справедливо для любого направления в пространстве, в частности, для осей X, У, Z декартовой системы координат:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}.$$

Зная проекции силы, можно найти сам вектор силы:

$$\vec{F} = \vec{F}_x \cdot \vec{i} + \vec{F}_y \cdot \vec{j} + \vec{F}_z \cdot \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей X, Y, Z,

или
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \cdot \vec{k}\right).$$

Вектор, стоящий в правой части этого выражения, называется *градиентом функции E_n* и обозначается **qrad E_n**. Градиент потенциальной энергии – вектор, указывающий направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии и численно равный приращению энергии, приходящейся на единицу длины этого направления.

Таким образом:

$$\vec{F} = -\text{qrad } E_n.$$

Консервативная сила, действующая на материальную точку, равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии этой точки.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Неуничтожимость материи и движения, фундаментальные свойства пространства и времени находят свое отражение в *законах сохранения* энергии, импульса, момента импульса. В теоретической физике показывается, что закон сохранения энергии является следствием однородности времени, закон сохранения импульса отражает однородность пространства, а закон сохранения момента импульса – его изотропность.

Важно понять условия, при которых выполняется тот или иной закон сохранения. Как говорилось ранее, тела рассматриваемой механической системы могут взаимодействовать как между собой, так и с внешними телами, т.е. с телами, не входящими в систему. Силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой, называются *внутренними*. Силы, которые действуют на тела системы со стороны внешних тел, называются *внешними.*

Механическая система называется замкнутой или изолированной, если на нее не действуют внешние силы (система не обменивается с внешними телами энергией).

Понятие замкнутой системы является абстракцией: реальным приближением к такому объекту может служить система, взаимодействием которой с внешними телами можно пренебречь, а также система, в которой внешние силы практически компенсируются.

Система называется *незамкнутой,* если на неё действуют нескомпенсированные внешние силы.

Как в замкнутой, так и в незамкнутой системах сумма всех внутренних сил равна нулю, поскольку силы взаимодействия каждой пары тел равны по модулю и противоположны по направлению.

Механическая система называется консервативной, если на тела системы действуют только консервативные силы. Если же среди сил, действующих на тела системы, присутствуют неконсервативные силы, то и система является неконсервативной.

5.1. Закон сохранения механической энергии

Пусть точки механической системы взаимодействуют как между собой, так и с внешними телами, а силы взаимодействия могут быть как консервативными, так и неконсервативными. Тогда приращение кинетической энергии системы равно работе всех действующих на систему сил.

Тогда

$$dE_k = \delta A_{\text{конс.вн.}} + \delta A_{\text{неконс.вн.}} + \delta A_{\text{конс.внеш.}} + \delta A_{\text{неконс.внеш.}},$$

где $\delta A_{\text{конс.вн.}}$ и $\delta A_{\text{неконс.вн.}}$ – соответственно, работа внутренних консервативных и неконсервативных сил;

$\delta A_{\text{конс.внеш.}}$ и $\delta A_{\text{неконс.внеш.}}$ – работа внешних консервативных и неконсервативных сил.

Работа внутренних консервативных сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия точек системы друг с другом $E_{п1}$:

$$\delta A_{\text{конс.вн}} = -dE_{п1}.$$

Работа внешних консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы во внешних потенциальных полях $E_{п2}$:

$$\delta A_{\text{конс.внеш.}} = -dE_{п2}.$$

Подставим это в уравнение для dE_K и перенесем в левую часть.

$$dE_K + dE_{п1} + dE_{п2} = \delta A_{неконс.вн.} + \delta A_{неконс.внеш.}$$

или
$$d(E_K + E_{п1} + E_{п2}) = \delta A_{неконс.вн.} + \delta A_{неконс.внеш.}$$

Потенциальная энергия механической системы $E_п$ складывается из потенциальной энергии взаимодействия точек системы друг с другом и потенциальной энергии во внешних потенциальных полях:

$$E_п = E_{п1} + E_{п2}.$$

Сумма $E = E_K + E_п$ есть полная механическая энергия системы, а $dE = d(E_K + E_п)$ – её приращение.

Таким образом, $$dE = \delta A_{неконс.вн.} + \delta A_{неконс.внеш.},$$
или, если проинтегрировать:

$$E_2 - E_1 = A_{неконс.вн.} + A_{неконс.внеш.}$$

Итак, мы получили, что приращение механической энергии системы материальных точек равно алгебраической сумме работ всех внутренних и внешних неконсервативных сил, действующих на точки системы.

Если в системе внутренние и внешние неконсервативные силы отсутствуют ($\vec{F}_{неконс.вн.} = 0$; $\vec{F}_{неконс.внеш.} = 0$), то $A_{неконс.вн.} = 0$; $A_{неконс.внеш.} = 0$, значит

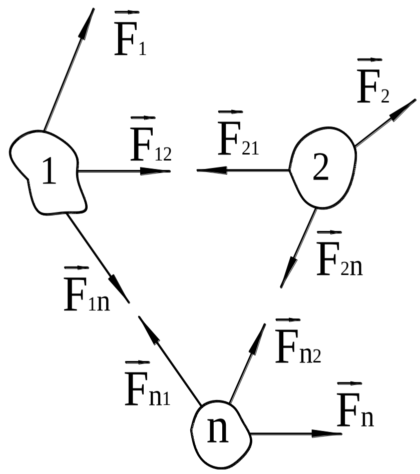
$$E_2 = E_1, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{E = const}.$$

Полная механическая энергия системы сохраняется, если силы, действующие на тела системы, являются консервативными – закон сохранения механической энергии.

Как видно из формулировки закона, важнейшим условием сохранения механической энергии системы является ее консервативность.

5.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из **n** тел, которые могут взаимодействовать как между собой, так и с внешними, не входящими в систему



тела ла- ми, $\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_n$

а силы взаимодействия могут быть как консервативными, так и неконсервативными (рис. 33).

Силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой, то есть внутренние силы, обозначим $\vec{f}_{ij}$. Внешние силы, действующие на каждое из тел, обозначим $\vec{F}_i$. Запишем для каждого из тел второй закон Ньютона в его наиболее общей форме.

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2n} + \vec{F}_2$$

- -

$$\frac{d\vec{P}_n}{dt} = \vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \ldots + \vec{f}_{n-1,n} + \vec{F}_n$$

Рис. 33

Просуммируем левые и правые части равенств. Учтем, что по третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил получается равной нулю, поскольку они попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \ .$$

Сумма импульсов всех тел называется *импульсом системы*:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = \vec{P} .$$

В правой части, как нетрудно видеть, стоит равнодействующая всех внешних сил, действующих на систему:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F}_{внеш.} .$$

Тогда можно переписать $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{внеш.}$, то есть производная от полного импульса системы равна равнодействующей всех приложенных к телам системы внешних сил.

Если система замкнута, то $\vec{F}_{внеш.} = 0$.

Тогда $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$, т.е. $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{const.}$

Таким образом: ***импульс замкнутой системы тел сохраняется*** – закон сохранения импульса.

Естественно, что при этом остается постоянной и сумма проекций импульсов тел системы на любую координатную ось.

На практике достаточно часто приходится иметь дело со взаимодействием тел в условиях, когда действием внешних сил пренебречь нельзя (система не замкнута). В таких случаях достаточно часто можно найти такое направление (координатную ось X), на которое внешние силы имеют нулевые проекции. Тогда будет оставаться постоянной не векторная сумма импульсов всех тел системы, а *сумма проекций импульсов* на данную координатную ось.

$$\mathbf{P_x = const}.$$

5.3. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему из **n** частиц (материальных точек), взаимодействующих как между собой, так и с внешними телами. Выберем точку О, относительно которой будем отсчитывать моменты импульсов частиц и моменты сил, приложенных к ним.

Изменение момента импульса каждой из частиц системы обусловлено действием моментов внутренних и внешних сил. Согласно закону изменения момента импульса (см. п. 3.4) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_1}{dt} &= \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \ldots + \vec{M}_{1n} + \vec{M}_1 \\
\frac{d\vec{L}_2}{dt} &= \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \ldots + \vec{M}_{2n} + \vec{M}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\frac{d\vec{L}_n}{dt} &= \vec{M}_{n1} + \vec{M}_{n2} + \ldots + \vec{M}_{n-1,n} + \vec{M}_n
\end{aligned}$$

где $\vec{M}_{ij}$ – моменты внутренних сил, действующих между i-ой и j-ой частицами ;

$\vec{M}_i$ – моменты внешних сил, действующих на i-ую частицу.

Сложим левые и правые части равенств. При этом учтем, что сумма моментов внутренних сил равна нулю (см. п. 3.2):

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n\right) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n .$$

Сумма моментов импульсов всех частиц системы называется *моментом импульса системы:*

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \vec{L}.$$

Правая часть равенства представляет собой результирующий момент всех внешних сил, действующих на систему:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \vec{M}_{внеш}.$$

Таким образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш.}.$$

Производная от момента импульса системы по времени относительно произвольной точки равна результирующему моменту внешних сил относительно этой же точки.

Видно, что если $\vec{M}_{внеш.} = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ и $\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{const}$.

Очевидно, что суммарный момент внешних сил относительно произвольной точки O может быть равен нулю только для замкнутой системы, когда внешние силы отсутствуют. Тогда закон сохранения момента импульса можно сформулировать так: ***Полный момент импульса замкнутой системы остается постоянным.***

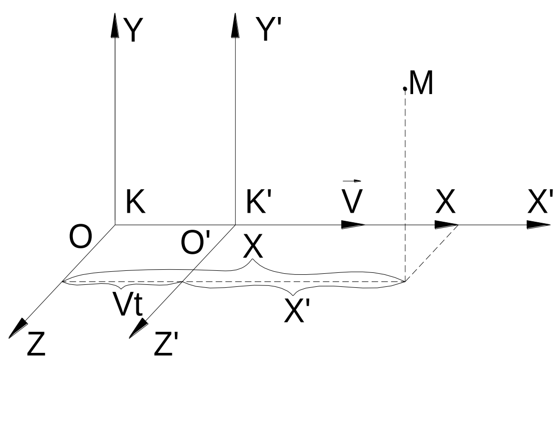
На практике часто приходится рассматривать вращение взаимодействующих тел относительно некоторой неподвижной оси Z. В этом случае может сохраняться суммарный момент импульса системы относительно данной оси L_z. Необходимым условием этого является равенство нулю суммарного момента внешних сил относительно этой же оси вращения $M_{z\ внеш.} = 0$. Последнее может выполняться и для незамкнутой системы, если внешние силы параллельны оси вращения или пересекают эту ось.

6. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Теория относительности родилась при попытках ответить на вопрос: *Нельзя ли придать понятию скорости абсолютное значение?* Иначе говоря: *Существует ли в природе какая-либо абсолютно неподвижная система отсчета?*

Рассмотрим вначале, как решался этот вопрос в рамках классической механики.

6.1. Механический принцип относительности Галилея



Рассмотрим, как можно осуществить переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть есть две инерциальные системы отсчета K и K′. Систему K будем условно считать неподвижной, тему K′ – движущейся; движение системы

K' происходит со скоростью $\vec{V}$ = const вдоль оси X без поворота осей Y' и Z'; в начальный момент времени начала координат обеих систем и направления соответствующих осей совпадают. Обе системы снабжены синхронизированными часами (рис. 34).

Классическая механика постулирует, что время абсолютно. Следовательно, часы, связанные с системами К и K', всегда будут показывать одно и то же время $t = t'$

Рис. 34

Свяжем между собой координаты одной и той же материальной точки в системах К и K'. Пусть в системе К в некоторый момент времени t ее координаты x, y, z и в системе K' в момент $t' = t$ координаты точки соответственно x', y', z'. Если движение системы K' происходит вдоль направления оси X, то отличаться будут только абсциссы точки М.

Запишем получающуюся связь координат точки М.

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Полученные соотношения называют *преобразованиями Галилея.*

Из преобразований Галилея вытекает закон сложения скоростей в классической механике.

Возьмем производные от координат, (учтем, что $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$):

$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x' = v_x - V \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

Выясним, как меняется ускорение точки при переходе от одной инерциальной системы к другой. Возьмем производные по времени от проекций скорости. Поскольку V = const, то $\frac{dV}{dt} = 0$.

Следовательно:

$$\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z' \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases},$$

то есть $\vec{a} = \vec{a}'$.

Ускорение тела одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Классическая механика постулирует, что масса тела во всех системах отсчета одна и та же $m = m'$, следовательно $m\vec{a} = m'\vec{a}'$

$$\text{или } \vec{F} = \vec{F}'.$$

Следовательно, второй закон Ньютона в движущейся системе K′ имеет точно такой же вид, как и в неподвижной системе K.

Таким образом, равномерное прямолинейное движение системы отсчета не влияет на ход механических процессов и его невозможно обнаружить механическими опытами. Изучая различные механические явления, например свободное падение тел, колебания маятников и т. п., в каюте равномерно идущего корабля, мы не сможем определить, движется корабль или нет. Все механические процессы будут протекать в этом случае так, как если бы этот корабль покоился.

Из сказанного следует механический принцип относительности Галилея:

Никакими механическими опытами, проведенными внутри инерциальной системы отсчета, невозможно установить покоится ли эта система или движется прямолинейно и равномерно.

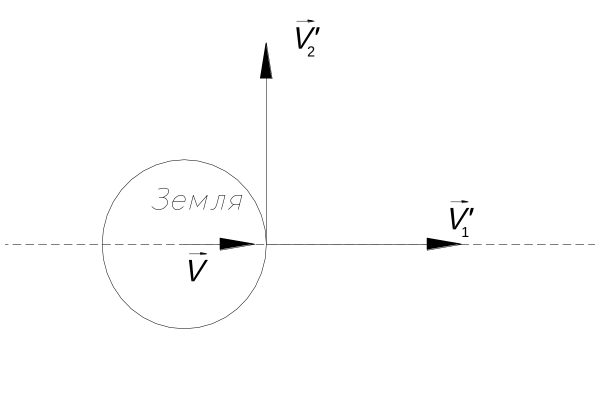
Из принципа относительности Галилея следует, что в рамках механики понятие скорости не может иметь абсолютного смысла. Бессмысленно ставить вопрос «какова же (на самом деле) скорость точки М: v или v'». Обе координатные системы совершенно равноправны, ни одна из них не может быть выделена как преимущественная, в которой понятию скорости можно придать абсолютный смысл.

Физический смысл имеет лишь понятие относительной скорости, скорости одних систем отсчета или тел относительно других систем отсчета или тел.

6.2. Экспериментальные основы специальной теории относительности

Итак, классическая механика отвергает возможность обнаружения абсолютного движения механическими опытами. Однако нет ли возможности придать понятию скорости абсолютный смысл, выйдя за рамки механики? В конце XIX века были предприняты попытки обнаружить абсолютное движение тел немеханическими опытами. Поводом к тому послужила проблема мирового эфира. Как известно, волновая теория света, выдвинутая Гюйгенсом в XVII веке, основывалась на представлении о существовании материального светового носителя – эфира, заполняющего все пространство и пронизывающего все тела. Создание Максвеллом в XIX веке электромагнитной теории света привело к представлению об электромагнитном эфире – всепроницающей среде, поперечные колебания которой и есть свет.

Но если существует такой всепроницающий неподвижный эфир, то система отсчета, связанная с ним, будет особой, привилегированной, абсолютной; движение тел относительно эфира – абсолютное движение.



Впервые опыт по обнаружению абсолютного движения провели Майкельсон и Морли в 1887 году. Они пытались определить абсолютную скорость Земли при ее движении по орбите вокруг Солнца. Идея их опыта заключалась в следующем. Два луча света посылались в двух взаимно перпендикулярных направлениях: один в направлении орбитального движения Земли, другой – перпендикулярно к этому направлению (рис. 35). Определим скорости света $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ (относительно Земли) вдоль этих направлений. Так как в направлении орбитального движения Земли источник света относительно эфира движется, а в направлении, перпендикулярном к орбите, был неподвижен, то казалось бы, что $v_1' = c - V$, $v_2' = c$, то есть $v_1' < v_2'$ (так как эфир движется навстречу Земле).

Рис. 35

Опыт показал, что скорости v_1' и v_2' одинаковы и, следовательно, никакого движения Земли относительно эфира не существует. Несостоятельными оказались и попытки объяснить результаты опыта частичным или полным увлечением эфира движущимися телами.

Объяснить полученные опытные факты, в том числе и результаты опыта Майкельсона, удалось в 1905 году Эйнштейну. Однако для этого ему пришлось кардинальным образом изменить существовавшие до того времени представления о пространстве и времени.

6.3. Постулаты Эйнштейна

Эйнштейн пришел к выводу, что мирового эфира, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, не существует. В соответствии с этим Эйнштейн распространил механический принцип относительности Галилея на все без исключения физические явления. Таким образом, первый постулат Эйнштейна:

Никакими физическими опытами, проводимыми внутри инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится ли эта система или движется прямолинейно и равномерно.

Второй постулат Эйнштейна гласит:

Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образует основу специальной теории относительности, которая представляет собой по существу физическую теорию пространства и времени.

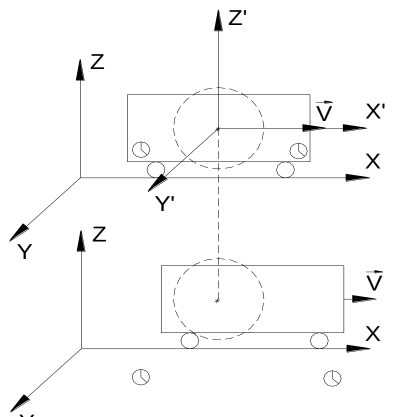


Рис. 36

6.4. Преобразования Лоренца

Для перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой в классической физике использовались преобразования Галилея. Однако совершенно ясно, что они несовместимы со вторым постулатом Эйнштейна. По второму постулату скорость света во всех инерциальных системах одна и та же, а из преобразований Галилея следует классический закон сложения скоростей, несовместимый с этим утверждением. В классических преобразованиях $t = t'$, т. е. события одновременные в одной системе отсчета, будут одновременными и в любой другой инерциальной системе. Рассмотрим, так ли это, если принять второй постулат Эйнштейна.

Пусть роль системы К′ играет вагон равномерно идущего поезда, роль системы К – полотно железной дороги (рис. 36). Вдоль вагона и вдоль полотна железной дороги расставлены синхронизированные часы. В центре вагона происходит световая вспышка. Одновременно ли свет достигнет задней и передней стенок вагона? С точки зрения наблюдателя, сидящего в вагоне, свет распространяется со скоростью c относительно вагона и достигнет равноудаленных стенок одновременно. С точки зрения наблюдателя, стоящего у железнодорожного полотна, свет распространяется со скоростью c относительно него. Так как стенки вагона движутся, то задняя стенка приближается к месту вспышки, а передняя – удаляется от нее. Следовательно, свет дойдет до задней стенки раньше, чем до передней. Таким образом, события, одновременные в системе К′ (вагоне), оказываются неодновременными в системе К. Отсюда вытекает, что время в различных системах отсчета течет по-разному.

Таким образом, необходимы новые преобразования координат и времени, позволяющие переходить от одной системы отсчета к другой.

Преобразования, в основе которых лежат постулаты Эйнштейна, называются преобразованиями Лоренца.

Из полного равноправия всех инерциальных систем отсчета следует, что преобразования Лоренца должны быть линейными относительно x, y, z, t и x', y', z', t'. Любая другая зависимость между «штрихованными» и «нештрихованными» величинами означала бы неравноправие систем отсчета. Линейный характер преобразования Галилея и Лоренца означает, что они должны отличаться только коэффициентами пропорциональности. В преобразованиях Галилея этот коэффициент равен единице:

$$x' = x - Vt$$

$$x = x' + Vt'$$

В преобразованиях Лоренца же он равен γ:

$$x' = \gamma(x - Vt)$$

$$x = \gamma(x' + Vt')$$

Мы вновь рассмотрим простейший случай, когда система К условно считается неподвижной, а система К′ движется относительно нее в направлении оси X с постоянной скоростью $\vec{V}$. Коэффициент γ должен отражать принцип постоянства скорости света.

Пусть в момент времени $t = t' = 0$ в начале координат (общем в этот момент времени) происходит вспышка света и световой сигнал начинает распространяться во все стороны, в том числе и вдоль осей X и X′ (рис. 37).

Пусть x и x' - расстояния, на которое сместится фронт волны вдоль «иксовых» осей в системах К и К′. Тогда $x' = ct'$ и $x = ct$.

Тогда $ct' = \gamma(ct - Vt)$, $ct = \gamma(ct' + Vt')$.

Сделаем преобразования:

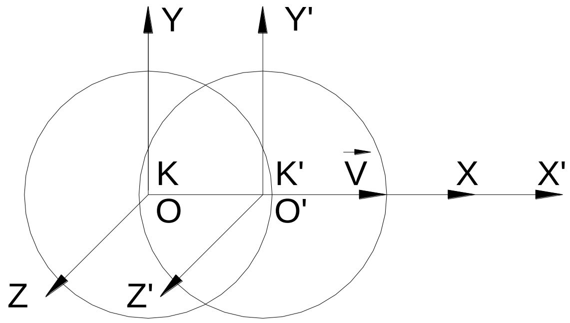


Рис. 37

$$\begin{cases} ct' = \gamma(c - V)t \\ ct = \gamma(c + V)t' \end{cases},$$

$$c^2 t' t = \gamma^2 (c^2 - V^2) t t',$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Получим переход К → К′ $$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

переход К′ → К $$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для рассматриваемого случая координаты:

$$y = y',$$

$$z = z'.$$

Получим теперь законы преобразования времени:

$$x' = \gamma(x - Vt),$$
$$x = \gamma(x' + Vt').$$

Поставим x' во второе равенство:

$$x = \gamma\left[\gamma\left(x - Vt\right) + Vt'\right].$$

Выразим отсюда t':

$$t' = \gamma\left[t - \frac{x}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \qquad \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 1 - \frac{c^2 - V^2}{c^2} = \frac{V^2}{c^2};$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Аналогично $$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Выпишем полученные преобразования:

$K \to K'$ $$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$K' \to K$ $$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

При V<<c преобразования Лоренца переходят, как того требует принцип соответствия, в преобразования Галилея.

Из преобразований Лоренца следует, что понятие времени неотделимо от понятия пространства. Пространство и время существуют в неразрывном единстве.

6.5. Следствия из преобразований Лоренца

а) *Относительность промежутков времени между событиями.*

Пусть имеются две инерциальные системы отсчета К и К$'$. Система К условно неподвижна, а система К$'$ движется относительно нее вдоль оси X с постоянной скоростью V. В этих системах отсчета происходят два события. Пространственные и временные координаты первого события в системе К – x_1, y_1, z_1, t_1, второго – x_2, y_2, z_2, t_2. В системе К$'$ координаты этих событий x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 и x'_2, y'_2, z'_2, t'_2. Пусть оба события происходят в одной и той же точке системы К$'$ (как говорят – «события покоятся относительно системы К$'$»).

Тогда $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$, $z'_1 = z'_2$.

Сравним промежутки времени между событиями в двух системах отсчета $\Delta t = t_2 - t_1$ и $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Используем преобразования Лоренца К$'$ → К, найденные в предыдущем параграфе.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{(учли, что } x'_2 = x'_1\text{)}.$$

Промежуток времени между событиями $\Delta t'$, измеренный в системе отсчета, относительно которой события покоятся, называется *собственным временем* и обозначается Δt_0. Тогда можно записать

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Из полученного соотношения видно, что собственное время меньше промежутка времени, измеренного в любой другой системе отсчета.

Данное соотношение имеет экспериментальное подтверждение. Если измерять время жизни нестабильной элементарной частицы в случаях, когда она покоится и когда движется со скоростью близкой к скорости света, то связь между полученными величинами полностью подтверждает выведенную формулу.

б) *Относительность размеров движущихся тел.*

Рассмотрим стержень, расположенный параллельно осям X и X$'$. (рис. 38). Пусть этот стержень покоится в системе К$'$ и, следовательно, движется в К. Найдём длину стержня в К и К$'$. Измерить длину неподвижного стержня в К$'$ просто: нужно приложить вдоль стержня единичный масштаб столько раз, сколько это необходимо, или, что то же самое, определить координаты концов стержня и найти их разность:

$$l' = x_2' - x_1'$$

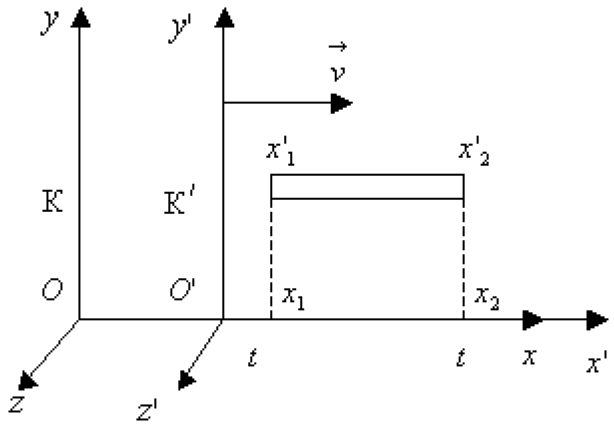


Рис. 38

Чтобы определить длину стержня в К (длину движущегося стержня), нужно: 1) в один и тот же момент времени t, отсчитанный по двум синхронизированным в К часам, определить, в каких точках системы находятся концы стержня, т. е. найти координаты x_1 и x_2 концов стержня; 2) измерить покоящимся относительно К масштабом расстояние между этими точками. Это расстояние равно разности координат x_2 и x_1:

$$l = x_2 - x_1 .$$

Из преобразований Лоренца:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{т.к. } t_2 = t_1 = t \quad \text{или} \quad l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} .$$

Длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он покоится, называется *собственной длиной.*

Тогда обозначив $l' = l_0$, запишем $\quad l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$.

Отсюда следует, что собственная длина является максимальной, она больше длины, измеренной в любой другой системе отсчета.

При движении тел изменяются только продольные размеры; размеры перпендикулярные к направлению движения, остаются неизменными.

Лоренцево сокращение – эффект чисто кинематический: никакими внутренними напряжениями в телах это сокращение не сопровождается. Лоренцево сокращение нельзя ни увидеть, ни сфотографировать. Увидеть – это значит получить световые сигналы, идущие от разных точек тела. Вследствие того, что разные точки тела удалены от наблюдателя не одинаково, а скорость света конечна, на сетчатку глаза попадают одновременно световые импульсы, испущенные не одновременно. Это приводит к такому искажению изображения, которое полностью компенсирует Лоренцево сокращение.

в) *Релятивистский закон сложения скоростей*

В теории относительности классический закон сложения скоростей Галилея заменяется релятивистским законом Эйнштейна.

Пусть некоторое тело движется вдоль оси x, обозначим скорости этого тела относительно K′ и K через $\vec{v}'$ и $\vec{v}$, проекции $\vec{v}'$ и $\vec{v}$ на оси X′ и X через v_x' и v_x (проекции на другие оси равны нулю). Свяжем v_x' и v_x.

По определению $v_x' = \dfrac{dx'}{dt'}$, $\qquad v_x = \dfrac{dx}{dt}$.

Из преобразований Лоренца следует:

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad dt' = \frac{dt - \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} .$$

Тогда $\quad v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx}$. Поделим на dt числитель и знаменатель дроби:

$$v_x' = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} .$$

Но $\dfrac{dx}{dt} = v_x$, следовательно: $\quad v_x' = \dfrac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$.

Для обратного перехода от системы K′ в систему K можно легко получить проекцию скорости точки на ось X:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{Vv_x'}{c^2}} .$$

Удовлетворяют ли полученные формулы второму постулату Эйнштейна?

Рассмотрим пример. Свет распространяется в K′: $v_x' = c$. Найдем скорость света относительно K: v_x – ?

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c .$$

Таким образом, свет в любой системе отсчета распределяется со скоростью c.

7.6. Интервал

Итак, мы убедились, что привычно неизменные величины, такие, как размеры тел или длительность событий, оказываются относительными. Очевидно, это является отражением факта неразрывного единства пространства и времени, поэтому необходимо для описания окружающего нас мира ввести некое новое четырехмерное пространство, элементами которого будут являться не материальные точки (тела), а события.

Какое-либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами x, y, z), и временем t, когда оно произошло, Таким образом, событию можно сопоставить 4 числа x, y, z, t. Введем воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято называть *мировой точкой.*

Всякому телу (даже неподвижному) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая *мировой линией*.

Пусть одно событие имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1, и другое – x_2, y_2, z_2, t_2. Величину

$$\Delta S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

называют *интервалом между этими событиями.*

Поскольку $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, то, обозначив также $t_2 - t_1 = \Delta t$, выражение для интервала можно записать в виде

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}\ .$$

Можно убедиться, что величина интервала между двумя событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же. Говорят, что интервал является инвариантным по отношению к переходу от одной инерциальной системы к другой. Рассмотрим виды интервалов.

1) Пусть первое событие заключается в том, что из точки с координатами x_1, y_1, z_1 отправлен в момент времени t_1 световой сигнал, а вторым событием является прием этого сигнала в точке x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Свет распространяется со скоростью c, следовательно: $l = c\Delta t$. Отсюда следует, что интервал между событиями в этом случае равен нулю.

2) Если расстояние l между точками, в которых произошли два события, превышает $c\Delta t$ ($l > c\Delta t$), то рассматриваемые события никак не могут оказать влияние друг на друга, т. е. не могут быть причинно связанными друг с другом. Интервал ΔS в этом случае является мнимым. Такие интервалы называются *пространственноподобными*, а события, разделенные такими интервалами – *абсолютно удаленными*. Ни в одной системе отсчета эти события не могут быть пространственно совмещены. Но всегда можно найти такую систему отсчета, в которой они происходят одновременно ($\Delta t = 0$).

3) Вещественные интервалы называются *времениподобными*. Для них выполняется условие $l < c\Delta t$. Следовательно, события, разделенные времениподобными ин-

тервалами, могут быть причинно связаны друг с другом. Для таких событий не существует системы отсчета, в которой они происходили бы одновременно, зато имеется система отсчета, в которой они происходят в одной и той же точке (l = 0).

Возьмём мировую точку O некоторого события за начало отсчета времени и координат. Проведём в четырехмерном пространстве через эту точку взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z, t. Изобразим на рисунке 39 плоскость X, t, для которой y = z = 0.

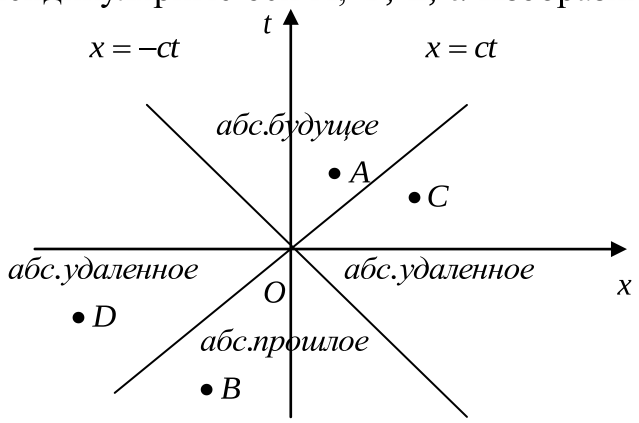


Рис. 39

Движение частицы со скоростью c, происходящее вдоль оси X, изобразится на рисунке прямыми x = ±ct. Реальная скорость частицы не может превышать c. В четырехмерном пространстве область, в которой лежат мировые линии всех частиц, проходящих при движении через точку O, представляет собой конус, осью которого является ось t. Образующие конуса представляют собой мировые линии световых сигналов, поэтому его называют *световым конусом*.

Для любой точки A, лежащей в области, названной на рисунке абсолютным будущим, $(\Delta S)^2 > 0$. Следовательно, интервал ΔS_{OA} – времениподобный и $\Delta t = t_{OA} > 0$. Как мы знаем, ни в одной системе отсчета не может стать $\Delta t = 0$, значит, не может быть и $\Delta t < 0$. Следовательно, во всех системах событие A будет происходить после события O.

Для любой точки B, лежащей в области абсолютного прошлого $(\Delta S)^2 > 0$, но $\Delta t = t_{OB} < 0$. Это значит, что во всех системах отсчета событие B предшествует событию O.

Для любого события C и D, мировая точка которого лежит в абсолютно удаленных областях, $(\Delta S)^2 < 0$. Следовательно, интервалы ΔS_{OC} и ΔS_{OD} – мнимые – пространственноподобные. В любой системе отсчета события O и C или O и D происходят в разных точках пространства. Понятие одновременности для них является относительным. В одних системах отсчета событие C (или D) происходят позже, в других – раньше события O. Наконец, имеется одна система отсчета, в которой событие C (и одна, в которой событие D) происходит одновременно событием O.

6.7. Релятивистская масса и импульс

Первый закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Лоренца. Действительно, если тело движется без ускорения в K' ($v' = \text{const}$), то его скорость, как это следует из закона сложения скоростей, останется неизменной и в К.

Второй закон Ньютона оказывается не инвариантен относительно преобразований Лоренца, если полагать массу неизменной.

Эйнштейн показал, что масса является функцией не только внутренних свойств тел, но и скорости их движения.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ,$$

где m_0 – масса тела, измеренная в системе, в которой тело покоится (*масса покоя*)

m – масса движущегося тела (*релятивистская масса*) ;

v – Скорость тела относительно системы, в которой $m = m_0$.

Как видно, при $v \to c$ $m \to \infty$, т.е. инерция тела беспредельно возрастает. Чтобы сообщить такому телу отличное от нуля ускорение, к нему надо приложить бесконечно большую силу. Между тем, любое реальное воздействие конечно. Следовательно, ни одному телу, обладающему массой покоя $m_0 \neq 0$, не может быть сообщена скорость, равная *c*. Со скоростью *c* могут двигаться лишь частицы, не имеющие массы покоя ($m_0 = 0$). Такие частицы (фотоны, нейтрино) во всех инерциальных системах отсчета движутся со скоростью *c*.

Теперь второй закон Ньютона в форме $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ будет инвариантен относительно преобразований Лоренца, если под $\vec{P}$ подразумевать $\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивистский импульс. Изобразим на рисунке 40 зависимость импульса P от скорости v. Отметим, что при v<<*c* выражение для импульса переходит в классическое $\vec{P} = m_0 \vec{v}$.

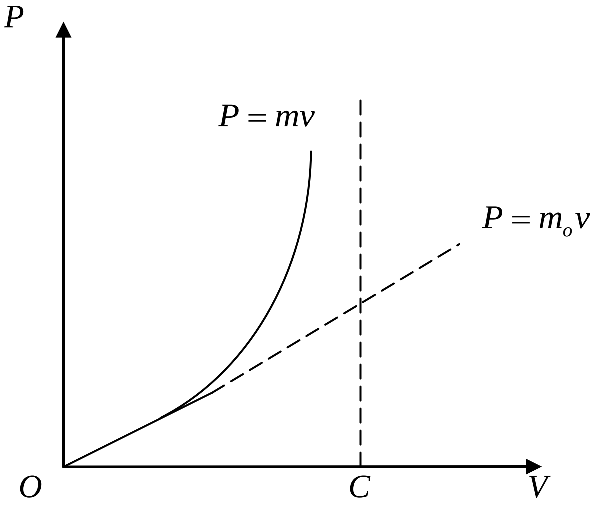


Рис. 40

6.8. Взаимосвязь массы и энергии

Одним из важнейших открытий теории относительности явилась установленная Эйнштейном взаимосвязь между массой и энергией. Выведем эту взаимосвязь.

Рассмотрим некоторое тело, которое первоначально покоилось, а затем под действием внешних сил приобрело релятивистскую (близкую к c) скорость v. При этом его кинетическая энергия увеличилась от нуля до значения E_K, а масса возросла от m_0 до m.

Согласно общим принципам механики, приращение кинетической энергии тела равно суммарной работе всех сил, действующих на тело. В дифференциальной форме данное утверждение можно записать:

$$dE_K = \delta A = \left(\vec{F}\, d\vec{r}\right).$$

Подставим сюда выражение для силы из второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}.$$

Получим

$$dE_K = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}\right) + \left(\vec{v}\frac{dm}{dt}d\vec{r}\right) = m\left(d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \left(\vec{v}\,dm\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = m\left(\vec{v}\,d\vec{v}\right) + v^2 dm = mv\,dv + v^2 dm.$$

Найдем dm, учитывая, что $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$:

$$dm = \frac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)m_0\left(-\dfrac{2v}{c^2}\right)dv}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\,v\,dv}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)c^2} = \frac{m\,v\,dv}{c^2 - v^2}.$$

Отсюда $$m\,v\,dv = \left(c^2 - v^2\right)dm.$$

Подставим полученное выражение вместо первого слагаемого в формулу для dE_K.

$$dE_K = \left(c^2 - v^2\right)dm + v^2 dm = c^2 dm.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int_0^{E_k} dE_K = \int_{m_0}^{m} c^2 dm$$ и получим

$$E_K = mc^2 - m_0c^2.$$

Величину $E = mc^2$ Эйнштейн назвал *полной (релятивистской) энергией*, а величину $E_0 = m_0c^2$ – *энергией покоя*.

$E = mc^2$ – закон взаимосвязи массы и энергии: ***полная энергия материального объекта равна произведению его релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме.***

Заметим, что в полную энергию и энергию покоя не входит потенциальная энергия, которой обладает тело во внешнем потенциальном поле.

Из сказанного следует, что всякое изменение массы тела на Δm сопровождается изменением его энергии на величину $\Delta E = \Delta mc^2$ и наоборот, всякое изменение энергии тела на ΔE сопровождается изменением его массы на $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$.

Нельзя, однако, представлять, что масса превращается в энергию и наоборот. Просто любой материальный объект обладает и массой и энергией, которые пропорциональны друг другу. Не может быть массы без энергии, как не может быть материи без движения. Масса и энергия характеризуют разные свойства материи, поэтому ни о каком их взаимном превращении не может быть и речи.

Итак, мы рассмотрели некоторые вопросы специальной теории относительности. В заключение отметим, что её главное значение состоит в том, что она разрушила представления классической физики об абсолютном характере пространства и времени, установила их относительный характер, открыла неразрывную связь между ними. Пространство и время образуют единую форму существования материи.

Оценивая значение теории относительности, не следует, однако, впадать в *философский релятивизм* (всё в мире относительно). Теория относительности отнюдь не отрицает существование абсолютных величин и понятий. Она устанавливает лишь то, что ряд понятий и величин, считавшихся в классической физике абсолютными, в действительности являются относительными.

И ещё. Не следует думать, что с появлением теории относительности классическая физика полностью утратила своё значение. Релятивистские эффекты для обычных макроскопических тел и обычных скоростей движения столь незначительны, что оказываются далеко за пределами практической точности, поэтому в большинстве отраслей техники классическая физика применима столь же хорошо, как и прежде.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Т.1. Механика. Молекулярная физика.– М.: Наука, 1987.– 496 с.

2. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2003. – 542 с.: ил.

3. Детлаф Ф.Ф., Яворский Б.М. Курс физики: учеб. пособ. для втузов. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

Содержание

Стр.