IA360E - Tópicos em Controle I

Tema: caracterizações de estabilidade de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2007

Tópicos

1. Sistemas Contínuos
2. Sistemas Discretos

Sistemas lineares variantes no tempo

- Considere o sistema linear contínuo no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t), \tag{1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o estado. O vetor de parâmetros variantes no tempo $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$ pertence ao simplex unitário Δ_N para todo $t \geq 0$. A matriz dinâmica do sistema pertence ao politopo

$$\mathscr{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) A_i, \alpha \in \Delta_N \right\}$$

com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas.

Teorema 1 (Lyapunov)

A origem $x(t) = 0$ é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (1) para todo $\alpha \in \Delta_N$ se existir uma matriz simétrica $X(\alpha(t)) > 0$ dependente de parâmetros continuamente diferenciável verificando a desigualdade

$$A(\alpha(t))'X(\alpha(t)) + X(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \nabla_\alpha X(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} < 0$$

todo $\alpha \in \Delta_N$.

Comentários

Observações

- A prova do Teorema 1 baseia-se na existência da função de Lyapunov $v(x,\alpha) = x'X(\alpha(t))x$, que é quadrática nos estados e depende arbitrariamente de $\alpha(t)$. Para mais detalhes veja (Khalil, 1996).
- Caso não se tenha nenhuma informação do comportamento dos parâmetros em relação ao tempo, ou seja $d\alpha(t)/dt$ é arbitrário, o uso de funções de Lyapunov com dependência em $\alpha(t)$ torna-se inviável. Uma saída simples é considerar a matriz $X(\alpha(t))$ independente de parâmetros, i.e. $X(\alpha(t)) = X$, gerando os testes baseados na *estabilidade quadrática*.
- Outras estratégias: (i) considerar funções de Lyapunov polinomiais de grau arbitrário nos estados usando testes de positividade baseados em técnicas de soma de quadrados; (ii) considerar funções de Lyapunov quadráticas por partes (piecewise).

$d\alpha(t)/dt$ conhecido

Caso tenha-se alguma informação sobre a variação dos parâmetros no tempo, como por exemplo a taxa máxima de variação, o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é viabilizado.

Sistemas politópicos com taxas de variação limitadas

Hipótese

A derivada de $\alpha(t)$ em relação ao tempo, denotada por $\dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^N$, existe e pertence ao conjunto convexo

$$\mathscr{D} = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^N : \ \delta = \mathrm{co}\{h^1, \ldots, h^M\}, \ \sum_{i=1}^{N} h_i^j = 0, \ j = 1, \ldots, M \right\}$$

definido como a combinação convexa dos vetores h^j, $j = 1, \ldots, M$, dados a priori. Note que essa definição de $\mathscr{D}$ garante que

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_i(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha_i(t)\right) = 0$$

para todo $t \geq 0$ e que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$ pertence a $\mathscr{D}$.

- Os vetores h^j, $j = 1, \ldots, M$ podem ser construídos sistematicamente a partir dos limitantes de $\alpha_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$.

Algoritmo

- O algoritmo de montagem do conjunto $\mathscr{D}$ pode ser sintetizado na seguinte forma: Encontre todas soluções de

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \cdots + \dot{\alpha}_N = 0$$

tomando os extremos das restrições

$$\underline{b}_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \bar{b}_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

- Exemplo: $N = 2$, $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 2$, $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 3$. Tomando o extremo inferior de $\dot{\alpha}_1(t)$, tem-se

$$-1 + \dot{\alpha}_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_2(t) = 1$$

Como $\dot{\alpha}_2(t) = 1$ pertence ao domínio de $\dot{\alpha}_2(t)$, então o vetor $[-1 \;\; 1]'$ define uma coluna do conjunto $\mathscr{D}$. Na seqüência toma-se o extremo superior de $\dot{\alpha}_1(t)$, ou seja

$$2 + \dot{\alpha}_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_2(t) = -2.$$

Como $\dot{\alpha}_2(t) = -2$ não pertence ao domínio de $\dot{\alpha}_2(t)$, o vetor $[2 \;\; -2]'$ é descartado. Agora os extremos de $\dot{\alpha}_2(t)$ são considerados, ou seja

$$\dot{\alpha}_1(t) - 1 = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_1(t) = 1, \quad \text{Solução válida}$$

Gerando

$$[h^1 \;\; h^2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo: Exemplo $N = 3$

- Exemplo: $N = 3$, $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 1$, $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 1$, $-1 \leq \dot{\alpha}_3(t) \leq 1$. Primeiro passo:

$$-1 + \dot{\alpha}_2(t) + \dot{\alpha}_3(t) = 0$$

Para que reste apenas uma variável, os limitantes de $\dot{\alpha}_2(t)$ também são substituídos (começando pelo inferior)

$$-1 - 1 + \dot{\alpha}_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_3(t) = 2. \text{ Solução não válida.}$$

Com o limitante superior de $\dot{\alpha}_2(t)$, tem-se

$$-1 + 1 + \dot{\alpha}_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_3(t) = 0.$$

que é uma solução válida, gerando o primeiro vetor ($[-1 \;\; 1 \;\; 0]'$) do conjunto $\mathscr{D}$. Repetindo o procedimento, conseguem-se todas as soluções válidas gerando

$$[h^1 \;\; h^2 \;\; h^3 \;\; h^4 \;\; h^5 \;\; h^6] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo: Exemplo $N = 3$

- Considere o mesmo exemplo anterior, mas com $-2 \leq \dot{\alpha}_3(t) \leq 2$. Aplicando o algoritmo tem-se a solução

$$[h^1 \ h^2 \ h^3 \ h^4] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentários

- O número de vetores soluções pode variar em função dos valores dos limitantes.
- Um algoritmo genérico para a construção dos vetores h^j pode ser construído usando-se recursão.
- Em média, o número de colunas h^j é dado por 2^{N-1}.

Derivada a matrix de Lyapunov

- Para fins ilustrativos, considere a seguinte matriz de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros

$$P(\alpha(t)) = \alpha_1(t)P_1 + \alpha_2(t)P_2 + \cdots + \alpha_N(t)P_N$$

A derivada de $P(\alpha(t))$ em relação ao tempo resulta em

$$\nabla_\alpha P(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt} = \dot{P}(\alpha)(t) = \dot{\alpha}_1(t)P_1 + \dot{\alpha}_2(t)P_2 + \cdots + \dot{\alpha}_N(t)P_N = \sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_i(t)P_i$$

com $\dot{\alpha}_i(t) = d\alpha_i(t)/dt$. Usando a hipótese de que $\dot{\alpha}(t) \in \mathscr{D}$, tem-se

$$\dot{P}(\alpha)(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \beta_j h_i^j P_i, \qquad \beta \in \Delta_M$$

- $\dot{P}(\alpha)(t)$ depende linearmente de $\beta \in \Delta_M$ e não depende de $\alpha \in \Delta_N$.

- Adaptar as condições de estabilidade robusta vistas na aula 4 (caso invariante no tempo) é imediato, bastando incorporar o termo $\dot{P}(\alpha)(t)$.

Condições LMIs

Teorema 2

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{\ell=1}^{N} h_\ell^j P_\ell < 0, \quad i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,M$$

$$A_i'P_k + P_kA_i + A_k'P_i + P_iA_k + 2\sum_{\ell=1}^{N} h_\ell^j P_\ell < 0,$$
$$i = 1,\dots,N-1,\ k = i+1,\dots,N,\ j = 1,\dots,M$$

então a matrix de Lyapunov (associada à função de Lyapunov $v(x,\alpha) = x'P(\alpha(t))x$)

$$P(\alpha(t)) = \alpha_1(t)P_1 + \alpha_2(t)P_2 + \cdots + \alpha_N(t)P_N \tag{2}$$

garante que a origem $x(t) = 0$ é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (1) para todo $\alpha \in \Delta_N$ e para todo $\dot{\alpha} \in \mathscr{D}$.

Condições LMIs: prova

- Com a matriz de Lyapunov dada em (2), tem-se

$$A(\alpha)'P(\alpha)+P(\alpha)A(\alpha)+\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right)^2\dot{P}(\alpha)=\sum_{j=1}^{M}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(A_i'P_i+P_iA_i+\right.\right.$$

$$\left.\sum_{\ell=1}^{N}h_\ell^jP_\ell\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N}\alpha_i\alpha_k\left(A_i'P_k+P_kA_i+A_k'P_i+P_iA_k+2\sum_{\ell=1}^{N}h_\ell^jP_\ell\right)\Bigg)$$

- Note que o lado direito é um polinômio multi-afim, i.e. polinomial homogêneo de grau dois em α e polinomial homogêneo de grau um em β. Para finalizar a prova, note que as restrições do Teorema 2 garantem que esse polinômio é definido negativo para todo $\alpha \in \Delta_N$ e $\beta \in \Delta_M$.

Exemplo

- Considere o sistema linear variante no tempo

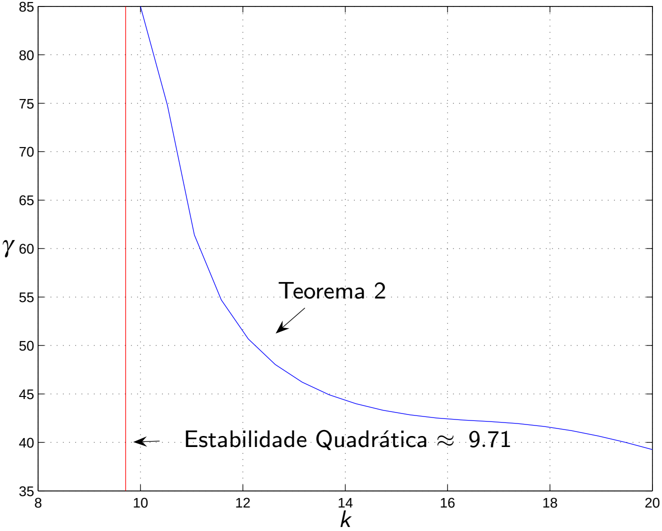
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3-p(t) & -2 \end{bmatrix} x(t), \qquad 0 \leq p(t) \leq k$$

- O objetivo é analisar a estabilidade robusta desse sistema computando a máxima taxa de variação γ do parâmetro $p(t)$, tal que a estabilidade é garantida para qualquer $|\dot{p}(t)| \leq \gamma$. A simulação é feita para a faixa $k \in [10 \;\; 20]$. Os resultados são mostrados na próxima figura.

- A matriz dinâmica desse sistema não se encontra na representação politópica. Como o sistema apresenta apenas um parâmetro incerto, a conversão para a representação politópica é imediata. A vértice A_1 é obtido tomando-se o limite inferior de $p(t)$ e o vértice A_2 tomando-se o limite superior. A conversão da taxa de variação segue $|\dot{\alpha}_1(t)| = |\dot{\alpha}_2(t)| = |\dot{p}(t)|/(\bar{p} - \underline{p}) \leq \gamma$

Exemplo

- Resultados:



Observações finais

Comentários

- Os resultados do Teorema 2 podem ser melhorados considerando-se a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ como um polinômio homogêneo de grau arbitrário nos parâmetros incertos. Relaxações de Pólya também podem ser usadas.
- Mesmo aumentando-se o grau da matriz de Lyapunov e usando as relaxações de Pólya, as condições não vão tender para a necessidade, uma vez que não foi provado que uma função de Lyapunov quadrática nos estados com $P(\alpha(t))$ polinomial em $\alpha(t)$ é necessária e suficiente para garantir estabilidade.
- Para trabalhar com matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário é necessário programar um algoritmo que faça a derivada de $P_g(\alpha(t))$ em relação a α e em relação ao tempo de maneira sistemática e genérica.
- As condições para projeto de controladores dependentes de α (gain-scheduling) são obtidas de maneira imediata, usando-se a transformação $Z(\alpha) = K(\alpha)W(\alpha)$.
- Requisitos de desempenho, como as normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$, podem ser incorporados nas condições.

Sistemas Discretos

- Considere o sistema linear discreto no tempo

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k), \tag{3}$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o estado. O vetor de parâmetros variantes no tempo $\alpha(k) \in \mathbb{R}^N$ pertence ao simplex unitário Δ_N para todo $k \geq 0$. A matriz dinâmica do sistema pertence ao politopo

$$\mathscr{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(k) A_i, \alpha \in \Delta_N \right\}$$

com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas.

Teorema 3 (Lyapunov)

A origem $x(k) = 0$ é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (3) para todo $\alpha \in \Delta_N$ se existir uma uma seqüência limitada de matrizes simétricas $P(\alpha(k)) > 0$ dependente de parâmetros verificando a desigualdade

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))' P(\alpha(k+1)) \\ \star & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

para todo $\alpha(k) \in \Delta_N$.

Comentários

- A prova do Teorema 3 segue da avaliação da primeira diferença da função de Lyapunov $v(x(k), \alpha(k)) = x(k)'P(\alpha(k))x(k)$ ao longo das soluções do sistema (3) e aplicando-se um complemento de Schur.

- Para transformar as LMIs dependentes de parâmetros do Teorema 3 em LMIs convencionais é necessário impor uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov $P(\alpha(k))$. Por exemplo $P(\alpha(k)) = P$ (estabilidade quadrática) ou dependendo linearmente em $\alpha(k)$, i.e. $P(\alpha(k)) = \alpha_1(k)P_1 + \cdots + \alpha_N(k)P_N$.

- O caso discreto apresenta características muito particulares para quando: (i) $\alpha(k)$ varia "arbitrariamente" entre dois instantes de tempo; (ii) $\alpha(k)$ possui uma taxa máxima de variação entre dois instantes de tempo.

- Note que a variação arbitrária entre dois instantes de tempo é limitada pelo tempo de amostragem do sistema.

Condições LMIs

- Considere o caso em que $\alpha(k)$ varia arbitrariamente entre dois instantes de tempo, i.e. $\alpha(k+1) = \beta(k)$, $\beta(k) \in \Delta_N$.

Teorema 4 ((Daafouz & Bernussou, 2001))

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$ tais que as seguintes LMIs são verificadas

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i' P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = j = 1,\ldots,N$$

então o sistema (3) é robustamente estável.

- Prova: Multiplique as desigualdades por $\alpha_i(k)\beta_j(k)$ e some para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))' P(\beta(k)) \\ \star & P(\beta(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))' P(\alpha(k+1)) \\ \star & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

cuja factibilidade fornece $P(\alpha(k)) > 0$, garantindo a estabilidade robusta do sistema para toda variação arbitrária de $\alpha(k) \in \Delta_N$.

Comentários

- Caso as condições do Teorema 4 não encontrem uma solução, então condições baseadas em estruturas polinomiais homogêneas de grau arbitrário g para a matriz de Lyapunov $P(\alpha(k))$ também não encontrarão uma solução. Essa característica deve-se ao fato de que $\alpha(k+1) = \beta(k)$ pois o produto $A(\alpha(k))'P(\beta(k))$ tem a propriedade de preservar os monômios resultantes de $g = 1$ qualquer que seja $g > 1$. Note que as LMIs geradas (restrições) são os coeficientes dos monômios.

- Uma maneira de obter testes menos conservadores para o caso de variações arbitrárias de $\alpha(k)$ é considerar matrizes de Lyapunov que dependem de maneira "multi-afim" nos instantes de tempos sucessivos de $\alpha(k)$. Por exemplo, considere a seguinte matriz de Lyapunov

$$P(\alpha(k), \alpha(k+1)) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i(k)\alpha_j(k+1)P_{ij}$$

Nesse caso, a matriz de Lyapunov candidata depende do instante atual k e do próximo instante $k+1$. Note que agora o número de variáveis P_{ij} é N^2.

Condições LMIs

Teorema 5 ((J.-W. Lee, 2006))

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i=j=1,\dots,N$ *tais que as seguintes LMIs são verificadas*

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_i' P_{jk} \\ \star & P_{jk} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i=j=k=1,\dots,N$$

então o sistema (3) é robustamente estável.

- As condições do Teorema 5 são menos conservadoras do que as condições do Teorema 4, inclusive contendo-as como um caso particular a partir da escolha $P_{ij}=P_i$, $P_{jk}=P_j$.
- Exemplo: Considere $N=2$ e

$$x(k+1) = (\alpha_1(k)A_1 + \alpha_2(k)A_2)x(k), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

O objetivo é determinar o maior valor de μ tal que o sistema é robustamente estável. O Teorema 4 encontra $\mu_{max} = 0.4776$ e o Teorema 5 encontra $\mu_{max} = 0.5131$.

Comentários

- A estratégia de considerar a matriz de Lyapunov dependendo de mais de um instante de tempo pode ser generalizada para $M \in \mathbb{N}$ instantes de tempos a frente. Isto é,

$$P(\alpha(k),\dots,\alpha(k+M)) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_M=1}^{N} \alpha_{i_1}(k)\cdots\alpha_{i_M}(k+M)P_{i_1\cdots i_M} \tag{4}$$

- Se o sistema for robustamente estável, sempre existirá uma matriz de Lyapunov dada por (4) garantindo a estabilidade para um M finito. Esse resultado caracteriza um condição de estabilidade semi-decidível. Para mais detalhes veja

J.-W. Lee and G. E. Dullerud, "Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems," *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 205–218, February 2006.

- O número de variáveis e o número de linhas de LMIs cresce exponencialmente com M.

Comentários Finais

Comentários

- Sistemas lineares com parâmetros incertos variantes no tempo e taxas de variação limitadas podem ser estudos usando-se funções de Lyapunov dependente de parâmetros, fornecendo condições de análise e síntese menos conservadoras do que a estabilidade quadrática.
- Comparada ao caso invariante no tempo, a obtenção das condições está associada, basicamente, ao tratamento da derivada da matriz de Lyapunov em relação aos parâmetros incertos e em relação ao tempo.
- Usando limitantes para a taxa de variação de cada parâmetro incerto, é possível construir um conjunto convexo que descreve o espaço no qual as derivadas dos parâmetros podem assumir valores. A partir desse conjunto, a obtenção de condições LMIs é imediata.
- No caso discreto, a variação "arbitrária" dos parâmetros pode ser tratada por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, gerando, inclusive, resultados baseados em relaxações convergentes.

Comentários Finais

Comentários

- Taxas de variação limitadas também podem ser consideradas no caso discreto, usando a mesma abordagem do caso contínuo. Nesse caso $\underline{b}_i \leq \Delta\alpha_i \leq \bar{b}_i$, $i = 1, \ldots, N$ com $\underline{b}_i \in [-1\ 0]$ e $\bar{b}_i \in [0\ 1]$.
- O conjunto $\mathscr{D}$ (espaço das derivadas) também pode ser gerado com as colunas h^j, $j = 1, \ldots, M$ dependendo de α, fornecendo resultados menos conservadores.
- As variáveis de folga também podem ser usadas, fornecendo vantagens em termos de análise e síntese.