

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial

# **Controle Preditivo para Processos com Incertezas Estruturadas baseado em Séries de Funções Ortonormais**

**Autor:** Gustavo Henrique da Costa Oliveira

**Orientador:** Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral

**Co-orientador:** Prof. Dr. Gérard Favier

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica  
e de Computação da Universidade Estadual de Cam-  
pinas - FEEC/UNICAMP, como parte dos requisitos  
exigidos para a obtenção do título de DOUTOR EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA.

Campinas, Setembro de 1997.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por <u>Gustavo Henrique da Costa Oliveira</u> e aprovada pela Comissão Julgada em <u>16/09/97</u>	
	
Orientador	

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
OL4C	
V.	Ex.
TAMBÔ BC/	32346
PRIM.	282197
C	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/11/97
N.º CPD	

CM-00103389-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4c

Oliveira, Gustavo Henrique da Costa

Controle preditivo para processos com incertezas estruturadas baseado em séries de funções ortonormais / Gustavo Henrique da Costa Oliveira.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientadores: Wagner Caradori do Amaral, Gérard Favier.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle automático. 2. Controle preditivo. 3. Modelagem. 4. Incerteza (Teoria da informação). I. Amaral, Wagner Caradori do. II. Favier, Gérard. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

---

*Aos meus pais e à minha querida  
Luciana, pelo incentivo, apoio e  
confiança.*

## **Agradecimentos**

Devo a realização deste trabalho à contribuição, direta ou indireta, de muitas pessoas, entre professores, funcionários, colegas e amigos. Em especial, gostaria de expressar meus agradecimentos :

Ao Prof. Dr. Wagner Caradori Amaral que, através de sua amizade e orientação ao longo de todos estes anos, possibilitou-me um grande aprendizado e crescimento, tanto sob o ponto de vista profissional como pessoal.

Ao Prof. Dr. Gérard Favier, pela orientação, apoio e acolhida em sua equipe no Laboratoire de Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis (I3S), França.

---

Ao Prof. Dr. Guy Dumont, que através de valiosas discussões no I3S, ajudou a enriquecer este trabalho de tese.

Aos amigos Ruben, Ricardo, Samuel, Ivan, Jussara, pelo companheirismo e incentivo que em muito contribuiram para a realização desta meta. Em especial ao Samuel, pela leitura atenta do texto desta tese, e cujas sugestões foram bastante proveitosa.

Aos amigos Jean François, Erol, Jean Louis, Bruno, Doulaye e João Batista, que proporcionaram uma gratificante troca de experiências durante minha permanência no laboratório I3S. Em especial ao Jean François, por sua cooperação em diversos trabalhos relacionados com esta tese.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

## Resumo

Este trabalho aborda o problema de controle de processos contendo incertezas estruturadas e restrições nos sinais de entrada e saída. A metodologia de controle utilizada é a dos controladores preditivos ou *Model Based Predictive Controllers* (MBPC). Esta técnica está, atualmente, bastante difundida, tanto no meio acadêmico como em aplicações práticas.

A principal característica dos MBPC é a utilização de um modelo para a determinação de um conjunto de previsões da saída e, a lei de controle é calculada em função destas previsões. Neste trabalho, para se obter um modelo não estruturado e projetar algoritmos de controle preditivo para processos incertos, propõe-se a utilização de séries de funções ortonormais, definidas a partir de um conhecimento aproximado da dinâmica dominante do processo. Neste contexto, são analisadas as abordagens de controle preditivo adaptativo e robusto. A lei de controle é calculada considerando que, no caso adaptativo, os parâmetros do modelo são obtidos utilizando-se um método de identificação e que, no caso robusto, os parâmetros do modelo pertencem a um intervalo de incerteza.

As características dos algoritmos MBPC adaptativo e robusto, utilizando séries de funções ortonormais, são comparadas com outras estratégias de controle preditivo utilizando modelos estruturados (por exemplo, o modelo CARIMA), e modelos não estruturados (por exemplo, o modelo de resposta ao impulso). Mostra-se também que, sob determinadas condições de ajuste dos parâmetros dos controladores, o sistema em malha fechada é estável.

O desempenho das abordagens propostas é ilustrado através de exemplos de simulação.

## Abstract

The control of processes containing structured uncertainties and input/output signal constraints is investigated. The methodology used is that of predictive controllers or Model Based Predictive Controllers (MBPC), a technique which at present is widely used, for both academic and practical applications.

The main characteristic of MBPC is the utilization of a model for the determination of a set of output predictions, with a control law calculated based on these predictions. In the present dissertation, a series of orthonormal functions, constructed using prior approximate knowledge of the dominant time constant of the process, is proposed for the obtention of a non-structured model, leading to predictive control algorithms for uncertain processes. The approaches of adaptive and robust control are analysed in this context. The control law is calculated: for adaptive predictive control, the parameters of the nominal model are obtained by using on-line identification, whereas for robust predictive control, parameters uncertainties are used to design the control law.

The characteristics of adaptive and robust MBPC algorithms based on orthonormal series function modelling were compared to strategies for predictive control based on other models, both structured (such as the CARIMA model) and non-structured (such as the model of impulse response). Under certain conditions of parameter adjustment of the controllers, the closed-loop system proved to be stable.

The performance of the proposed approaches is illustrated using simulation examples.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Trabalhos Anteriores . . . . .	4
1.2.1	Controle Preditivo . . . . .	4
1.2.1.1	Controlador de Matriz Dinâmica - DMC . . .	5
1.2.1.2	Controlador Preditivo Generalizado - GPC . .	7
1.2.1.3	Controlador Preditivo de Horizonte Deslizante com Restrições - CRHPC . . . . .	9
1.2.2	Controle Preditivo de Processos Incertos . . . . .	11
1.2.2.1	Controle Preditivo Adaptativo . . . . .	12
1.2.2.2	Dinâmicas não modeladas . . . . .	12
1.2.2.3	Controle Preditivo Robusto . . . . .	13
1.3	Proposta e Organização do Trabalho . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modelagem de Processos por Séries de Funções Ortonormais</b>	<b>19</b>
2.1	Introdução . . . . .	19
2.2	Modelagem de Processos por Séries de Funções Ortonormais .	21
2.2.1	Introdução . . . . .	21
2.2.2	Processos com ação integral . . . . .	28
2.2.3	Escolha do pólo $p$ da função ortogonal . . . . .	29
2.2.4	Escolha do número $n$ de funções da série . . . . .	30
2.2.5	Determinação da matriz $c$ via resposta ao impulso do processo . . . . .	31
2.2.5.1	Exemplo 2.1 : . . . . .	31
2.2.6	Estimação dos coeficientes da matriz $c$ . . . . .	33
2.2.6.1	Exemplo 2.2 : . . . . .	34
2.3	Modelagem de Processos com Incerteza Estruturada . . . . .	38
2.3.1	Representação da incerteza . . . . .	38
2.3.2	Processos com ação integral . . . . .	39
2.3.3	Cálculo da incerteza paramétrica do modelo SFO . . .	40
2.3.3.1	Exemplo 2.3 : . . . . .	41

2.3.4	Identificação da incerteza paramétrica do modelo SFO	42
2.4	A Previsão da Saída $j$ Passos a Frente . . . . .	45
2.4.1	Previsão da saída para o modelo SFO . . . . .	45
2.4.1.1	Processos com ação integral . . . . .	47
2.4.1.2	Representação matricial da previsão da saída	48
2.4.2	Previsão da saída para o modelo SFO com incertezas estruturadas . . . . .	50
2.4.2.1	Processos com ação integral . . . . .	51
2.4.2.2	Conjunto de previsões da saída . . . . .	52
2.4.2.3	Representação matricial da previsão da saída	53
2.5	Resumo . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Controlador Preditivo Adaptativo</b>	<b>56</b>
3.1	Introdução . . . . .	56
3.2	Definição da Lei de Controle . . . . .	59
3.2.1	Introdução . . . . .	59
3.2.2	Lei de controle para processos com restrições . . . . .	61
3.2.2.1	Restrições em $\Delta u(k)$ . . . . .	63
3.2.2.2	Restrições em $u(k)$ . . . . .	63
3.2.2.3	Restrições em $y(k)$ . . . . .	64
3.2.3	Eliminação de restrições redundantes da lei de controle	65
3.3	CP-SFO com Critério de Custo Quadrático . . . . .	70
3.3.1	Exemplos . . . . .	72
3.3.1.1	Exemplo 3.1 . . . . .	72
3.3.1.2	Exemplo 3.2 . . . . .	73
3.3.1.3	Exemplo 3.3 . . . . .	76
3.3.1.4	Exemplo 3.4 . . . . .	78
3.3.1.5	Exemplo 3.5 . . . . .	80
3.4	CP-SFO com Critério de Custo baseado na Norma Infinita . . . . .	83
3.4.1	Exemplos . . . . .	84
3.4.1.1	Exemplo 3.6 . . . . .	84
3.4.1.2	Exemplo 3.7 . . . . .	85
3.5	Estabilidade do Sistema em Malha Fechada . . . . .	88
3.5.1	Equações do sistema em malha fechada . . . . .	89
3.5.2	Análise da estabilidade do sistema em malha fechada para $N_u = 1$ . . . . .	91
3.5.2.1	Análise do caso de equivalência entre modelo e processo . . . . .	94
3.5.2.2	Análise do caso adaptativo . . . . .	95
3.6	Resumo . . . . .	100

<b>4 Controlador Preditivo Robusto</b>	<b>101</b>
4.1 Introdução . . . . .	101
4.2 Definição da Lei de Controle . . . . .	104
4.2.1 Introdução . . . . .	104
4.2.2 Lei de controle para processos com restrições . . . . .	105
4.3 CPR-SFO com Critério de Custo Quadrático . . . . .	107
4.3.1 Análise da Convexidade do Critério Quadrático . . . . .	109
4.3.2 Solução Subótima para CPR-SFO com Critério Quadrático . . . . .	111
4.3.3 Exemplos . . . . .	113
4.3.3.1 Exemplo 4.1 : . . . . .	113
4.3.3.2 Exemplo 4.2 : . . . . .	117
4.3.3.3 Exemplo 4.3 : . . . . .	118
4.4 CPR-SFO com Critério baseado na Norma Infinita . . . . .	121
4.4.1 Exemplos . . . . .	127
4.4.1.1 Exemplo 4.4 : . . . . .	127
4.5 Estabilidade do Sistema em Malha Fechada . . . . .	129
4.5.1 Estabilidade . . . . .	129
4.5.2 Exemplos . . . . .	132
4.5.2.1 Exemplo 4.5 : . . . . .	132
4.5.2.2 Exemplo 4.6 : . . . . .	134
4.6 Resumo . . . . .	137
<b>5 Conclusão</b>	<b>138</b>

## Lista dos Principais Símbolos

A notação de matrizes é feita utilizando letras itálicas maiúsculas e os vetores são denotados usando letras itálicas, em negrito, minusculas. Os elementos de um vetor, matriz ou polinômio são geralmente denotados através de índices *subscript*, e as palavras em língua inglesa são escritas utilizando letras itálicas.

### Abreviações

CARIMA	<i>Controlled Auto Regressive Integrated Moving Average</i>
CARMA	<i>Controlled Auto Regressive Moving Average</i>
CP	Controlador Preditivo
CPR	Controlador Preditivo Robusto
CRHPC	<i>Constrained Receding Horizon Predictive Controller</i>
DMC	<i>Dynamic Matrix Controller</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Controller</i>
LP	<i>Linear Programming</i>
MBPC	<i>Model Based Predictive Controller</i>
QP	<i>Quadratic Programming</i>
SFO	Séries de Funções Ortonormais
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>

### Sinais, Funções e Espaços

$y(k)$	sinal de saída do modelo do processo
$u(k)$	sinal de controle do processo
$w(k)$	sinal de referência do processo
$y_m(k)$	sinal de saída medido do processo
$\xi(k)$	sinal de ruído na medida
$\delta(k)$	sinal impulso unitário
$h(k)$	sinal de resposta ao impulso do processo
$\bar{h}(k)$	valor médio da resposta ao impulso incerta do processo
$\delta h(k)$	valor máximo de incerteza na resposta ao impulso
$\varepsilon_h(k)$	incerteza na resposta ao impulso do processo
$\tilde{h}(k)$	aproximação de ordem $n$ de $h(k)$
$\hat{y}(k + j/k)$	previsão da saída do processo em $k + j$ , calculada em $k$
$\hat{y}_l(k + j/k)$	previsão da saída livre do processo
$\hat{y}_f(k + j/k)$	previsão da saída forçada do processo
$\hat{y}(k + j/k, \varepsilon)$	previsão da saída do processo em função da incerteza paramétrica
$\Delta u(k + j/k)$	variação do sinal de controle em $k + j$ , calculada em $k$

$l_i(k)$	sinal de saída de $\Phi_i(q^{-1})$
$\phi_i(k)$	base de funções ortonormais, para $i = 1, \dots$
$\Phi_i(z)$	transformada $z$ da função $\phi_i(k)$
$\Phi_i(q^{-1})$	representação de $\Phi_i(z)$ no operador atraso $q^{-1}$
$G(q^{-1})$	função de transferência no operador $q^{-1}$
$L_2$	espaço de funções de Lebesgue
$\Omega$	espaço de vetores, cujos elementos estão dentro do intervalo $[-1, 1]$

## Parâmetros dos Controladores

$J$	critério de custo do controlador preditivo
$N_1$	horizonte inicial de previsão
$N_y$	horizonte final de previsão
$N_u$	horizonte de controle
$\lambda$	ponderação sobre o sinal de controle
$\mathcal{A}$ e $\mathbf{v}$	matrizes que definem as restrições nos sinais de entrada e de saída do processo
$\Delta u_{min}$ e $\Delta u_{max}$	restrições sobre a variação do sinal de controle
$u_{min}$ e $u_{max}$	restrições sobre a amplitude do sinal de controle
$y_{min}$ e $y_{max}$	restrições sobre a amplitude do sinal de saída

## Parâmetros dos Modelos

$H(q^{-1})$	modelo de resposta ao impulso do processo
$h_i$	coeficientes do modelo de resposta ao impulso, $i = 1, \dots$
$g_i$	coeficientes do modelo de resposta ao degrau, $i = 1, \dots$
$A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$	polinômios dos modelos CARMA e CARIMA
$T(q^{-1})$	polinômio que modela as perturbações nos modelos CARMA e CARIMA
$A$ e $\mathbf{b}$	matrizes do modelo em espaço de estados baseado em séries de funções ortonormais
$c_i$	coeficientes da série de funções ortonormais, para $i = 1, \dots$
$\bar{c}_i$	valor médio do coeficiente $c_i$ com incertezas
$\delta c_i$	valor máximo de incerteza no coeficiente $c_i$
$\varepsilon_i$	incerteza no coeficiente $c_i$
$p$	pólo ( ou par de pólos ) da função $\Phi_i(z)$
$n$	número de elementos da série de funções ortonormais
$\mathbf{l}(k)$	vetor contendo os sinais $l_i(k)$
$\mathbf{c}$	vetor contendo os coeficientes $c_i$
$\bar{\mathbf{c}}$	vetor contendo os coeficientes $\bar{c}_i$
$\delta \mathbf{c}$	vetor contendo os coeficientes $\delta c_i$
$\varepsilon$	vetor contendo as incertezas $\varepsilon_i$

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

O crescente desenvolvimento da indústria de microeletrônica e a necessidade de aprimoramento na qualidade dos processos industriais vem tornando mais frequente a utilização de sistemas digitais de controle pela indústria. Este fato traz como consequência o desenvolvimento e a possibilidade de implementação de algoritmos de controle mais complexos, avançados e adequados à tecnologia digital, como opção ao clássico PID de ganho fixo. O controlador PID apresenta um comportamento satisfatório na maioria dos sistemas, porém pode apresentar problemas quando, por exemplo, o processo é multivariável, de ordem elevada, com atraso dominante, variante no tempo ou quando as especificações de projeto são muito rígidas. Nestes casos, a utilização de algoritmos complexos de controle digital tem o objetivo de melhorar o desempenho do sistema para satisfazer aos requisitos de produção do processo industrial.

Neste contexto, no fim da década de 70, surgiram os *Model Based Predictive Controllers* - MBPC<sup>1</sup>, que fazem parte das estratégias de controle baseadas no modelo do processo, e a implementação deste tipo de algoritmo vem atender a uma expectativa de melhora na qualidade dos processos industriais.

O conceito de controle preditivo foi introduzido nos trabalhos de Richalet *et al.* com o *Identification Command* (IDCOM) [Richalet et al., 1978]

---

<sup>1</sup>Os algoritmos MBPC são também conhecidos como *Model Predictive Controllers* - MPC ou simplesmente Controladores Preditivos (*Predictive Controllers*)

e de Cutler e Ramaker com o *Dynamic Matrix Controller* (DMC) [Cutler e Ramaker, 1980]. Estes algoritmos estabeleceram a metodologia dos MBPC utilizando uma representação do processo feita através de modelos de resposta ao impulso. Após este período, algumas estratégias de controle preditivo baseadas em outras estratégias de modelagem do processo foram propostas na literatura, como por exemplo, [Keyser et al., 1988] [Kramer e Umbehauen, 1991] [Soeterboek, 1992] [Clarke, 1994], com destaque para o trabalho de Clarke *et al.* [Clarke et al., 1987] que, utilizando o modelo *Controlled Auto Regressive Integrated Moving Average* (CARIMA), introduz o *Generalized Predictive Controller* (GPC). Com o GPC, observou-se uma grande repercussão da metodologia MBPC na literatura e, atualmente, pode-se dizer que os métodos MBPC mais utilizados tanto na prática como em análise teórica são o GPC e o DMC.

Nos algoritmos preditivos, a lei de controle e, consequentemente, o desempenho do sistema em malha fechada estão diretamente ligados à formulação do modelo.

Normalmente, utiliza-se um modelo linear para a representação do processo a ser controlado. Contudo, esta suposição dificilmente é verificada na prática devido, por exemplo, à presença de não linearidades no processo, às dinâmicas que não estão descritas no modelo (as denominadas dinâmicas não modeladas), às simplificações feitas durante a obtenção do modelo que não são satisfeitas na prática, etc. . Como resultado do erro ou da incerteza na modelagem, o projeto de um algoritmo de controle baseado em um modelo aproximado pode não apresentar o desempenho especificado quando aplicado no controle do processo real. De fato, se a incerteza no modelo não for levada em consideração de maneira apropriada, o desempenho do sistema em malha fechada pode se degenerar, chegando até a se tornar instável.

Assim, é importante lembrar que o modelo do processo é sempre impreciso e é necessário que o algoritmo incorpore a existência de incertezas no projeto da lei de controle.

Outra característica importante no projeto de sistemas de controle são as restrições nos sinais de entrada e saída dos processos físicos.

Alguns exemplos destas restrições são as limitações físicas dos acionadores, como válvulas que operam entre os estados "totalmente fechada" e "totalmente aberta", limites de velocidade ou torque em um servo motor. Todas estas restrições se refletem em limites na amplitude e na variação do sinal de controle aplicado ao processo. Quando estas restrições não são consideradas na fase de projeto, pode ocorrer a saturação do sinal de controle enviado ao

processo físico. Esta saturação pode levar à deterioração do desempenho do sistema em malha fechada ou mesmo à instabilidade [Tsang e Clarke, 1988].

Além disso, existem as especificações de projeto relativas ao sinal de saída do processo. Alguns exemplos são especificações na qualidade do produto de um processo industrial, como limites para o total de impurezas na saída de uma coluna de destilação, ou exigências de segurança na operação de um processo, como reatores que devem operar dentro de limites máximos de pressão e temperatura. Todas estas restrições se refletem em limites no sinal de saída do processo.

A consideração das restrições nos sinais de saída pela lei de controle é também importante porque, muitas vezes, o ponto ótimo de operação de um processo industrial está justamente nos valores limites para estas variáveis, como é observado em [Lee e Weekman, 1976] : "... na indústria de petróleo, o ponto ótimo de operação está geralmente além da região de operação das variáveis, determinada pelas restrições nas variáveis do processo. Isto ocorre, provavelmente, devido às considerações de custo financeiro incorporadas no projeto. Assim, um sistema bem projetado deve operar nos limites da região de operação de suas variáveis (as restrições), senão ele estará sendo sub-projetado".

Nestes casos, é possível sintonizar o controlador de modo a evitar a violação das restrições, porém esta estratégia geralmente leva a uma lei de controle conservativa e sub-ótima [Oliveira et al., 1994]. Portanto, o projeto da lei de controle que considera as restrições do processo possibilita a obtenção de um desempenho ótimo para o sistema em malha fechada, permitindo a operação do processo em situações próximas de seus limites operacionais.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e análise de algoritmos de controle para processos incertos e com restrições nos sinais de entrada e saída. A metodologia utilizada é a dos controladores preditivos, e a principal característica dos métodos analisados é a modelagem do processo realizada através de uma série de funções ortonormais, isto é, um modelo onde a saída do processo é definida como sendo uma soma ponderada de uma base de funções ortonormais.

## 1.2 Trabalhos Anteriores

### 1.2.1 Controle Preditivo

Os controladores preditivos ou MBPC são definidos a partir do modelo do processo industrial que se deseja controlar e são caracterizados por quatro etapas principais, descritas a seguir :

*i)* Modelagem do processo. O modelo é utilizado para prever o comportamento do processo (previsão da saída) em um horizonte de tempo futuro, denominado horizonte de previsão, utilizando os dados disponíveis dos sinais de entrada e saída do processo.

*ii)* Definição de um critério de otimização. O desempenho do sistema em malha fechada durante o horizonte de previsão é especificado através de um critério de custo, definido a partir da saída prevista, do sinal de referência e do esforço de controle.

*iii)* Otimização do critério de custo. O critério de custo é otimizado em relação ao conjunto de futuros sinais de controle a serem aplicados no processo durante o horizonte de previsão.

*iv)* Aplicação do sinal de controle. Somente o primeiro sinal de controle resultante da otimização do critério de custo é aplicado no processo real e, no instante seguinte de amostragem, o procedimento é repetido.

O esquema genérico para controladores MBPC é ilustrado na figura 1.1 e, devido a sua estrutura aberta, este esquema deu origem a muitos algoritmos presentes na literatura [Clarke, 1994] [Soeterboek, 1992]. As principais diferenças entre as abordagens são devidas ao tipo de modelo utilizado no cálculo da previsão da saída, à definição do critério de custo a ser otimizado e à formulação do problema de otimização do critério.

A maioria dos algoritmos preditivos utiliza um modelo linear para a representação do processo, como o modelo CARIMA, em [Clarke e Mohtadi, 1989], o modelo de resposta ao impulso e de resposta ao degrau, em [Garcia et al., 1989], e o modelo em representação de estados, em [Li et al., 1989] [Lee et al., 1994] [Ordys e Clarke, 1993], etc. . Existem também algoritmos MBPC definidos a partir de modelos não-lineares para o processo, como modelos baseados em redes neurais ou em lógica nebulosa, em [Tan e de Keyser, 1994] [Skrjanc e Matko, 1994], ou modelos utilizando representações de não linearidades específicas do processo, em [Sommer, 1994]

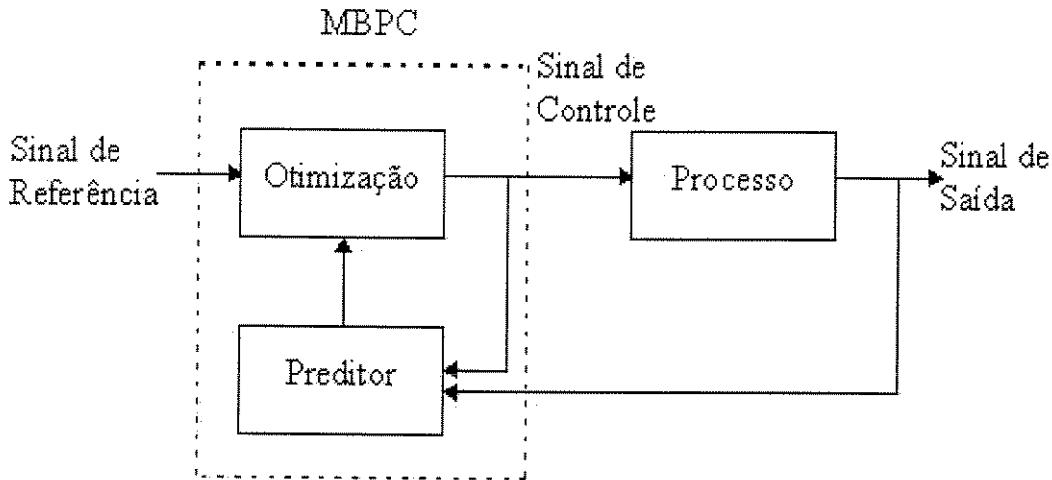


Figura 1.1: Diagrama de Blocos da Estratégia MBPC

[Zhu et al., 1991] [Wang e Henriksen, 1993].

A seguir, os principais algoritmos de controle preditivo são caracterizados em relação às quatro etapas da metodologia, citadas anteriormente.

### 1.2.1.1 Controlador de Matriz Dinâmica - DMC

O algoritmo MBPC denominado Controlador de Matriz Dinâmica (*Dynamic Matrix Controller* - DMC) [Cutler e Ramaker, 1980] [Garcia et al., 1989] é baseado na otimização de um critério de custo quadrático, como o mostrado a seguir :

$$J_{DMC} = \sum_{j=1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \quad (1.1)$$

onde :

$N_y$  é o horizonte de previsão da saída;

$N_u$  é o horizonte de controle;

$\lambda$  é uma ponderação no sinal de controle;

$\hat{y}(k + j/k)$  é a previsão da saída  $j$  passos a frente, calculada em  $k$ .

$w(k)$  é o sinal de referência;

$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ , sendo  $q^{-1}$  o operador atraso; e,

$\Delta u(k + j/k)$  é a variação<sup>2</sup> do sinal de controle no instante  $k + j$ , calculada em  $k$ ;

A modelagem é feita utilizando a resposta ao impulso do processo, truncada em  $n$  coeficientes, dada por :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n h_i q^{-i} u(k) \quad (1.2)$$

onde :

$y(k)$  é o sinal de saída;

$u(k)$  é o sinal de controle; e,

$h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; são os  $i$ -ésimos coeficientes da resposta ao impulso.

Do modelo (1.2), tem-se que o modelo de resposta ao degrau é dado por :

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n-1} g_i q^{-i} \Delta u(k) + g_n q^{-n} u(k) \quad (1.3)$$

onde  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são os  $i$ -ésimos coeficientes da resposta ao degrau do processo.

Este modelo é utilizado no DMC para o cálculo das previsões da saída  $\hat{y}(k + j/k)$  no horizonte de previsão especificado [Garcia et al., 1989].

Utilizando a previsão da saída, o sinal de controle é obtido minimizando o critério (1.1) em relação a  $\Delta u(k/k)$ ,  $\Delta u(k + 1/k)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta u(k + N_u - 1/k)$ , isto é :

---

<sup>2</sup>A fim de simplificar a notação das equações subsequentes,  $\Delta(q^{-1})$  será representado simplesmente por  $\Delta$ .

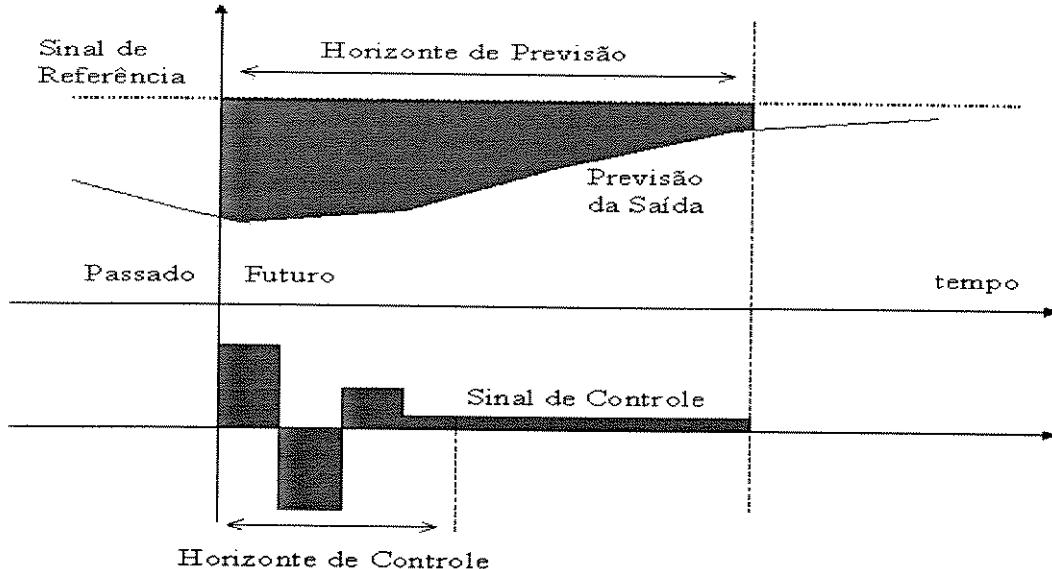


Figura 1.2: Controle Preditivo

$$u(k) = \min_{\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_u-1/k)} J_{DMC} \quad (1.4)$$

s.a    $\Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u$

onde  $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k/k)$ .

O algoritmo DMC descrito acima é ilustrado na figura 1.2, onde a área destacada representa os sinais considerados na minimização (1.4).

O algoritmo DMC tem sido utilizado com sucesso no controle de processos industriais, sobretudo na área de processos químicos, como é o caso dos trabalhos [Lopez et al., 1995] [Houk et al., 1991] [Cernik et al., 1991], entre outros.

### 1.2.1.2 Controlador Preditivo Generalizado - GPC

O algoritmo MBPC denominado Controlador Preditivo Generalizado (*Generalized Predictive Controller - GPC*) [Clarke et al., 1987] [Clarke e Mohtadi, 1989] é baseado na otimização do seguinte critério quadrático de custo :

$$J_{GPC} = \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \quad (1.5)$$

onde os parâmetros de projeto  $N_y$ ,  $N_u$  e  $\lambda$  são definidos como no DMC e  $N_1$  é o horizonte inicial de previsão.

A modelagem do processo é feita utilizando o modelo CARIMA, dado por :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + T(q^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta} \quad (1.6)$$

onde  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  e  $T(q^{-1})$  são polinômios no operador atraso  $q^{-1}$  dados por :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb},$$

$$T(q^{-1}) = 1 + t_1 q^{-1} + \dots + t_{nt} q^{-nt}$$

O polinômio  $B(q^{-1})$  estendido incorpora o atraso de transporte do processo e  $\xi(k)$  é um sinal de ruído.

Os polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  contêm os pólos e zeros da função de transferência discreta do processo e  $T(q^{-1})$  é um polinômio cujas raízes são parâmetros de projeto com influência na modelagem das perturbações do processo e na robustez do sistema em malha fechada [Mohtadi, 1988] [Oliveira et al., 1996a].

Este modelo é utilizado no GPC para o cálculo das previsões da saída  $\hat{y}(k+j/k)$  entre os instantes  $k+N_1$  e  $k+N_y$  [Clarke et al., 1987] [Oliveira, 1992].

Baseado nestas previsões, o sinal de controle é obtido a partir da minimização do critério (1.5) em relação a  $\Delta u(k/k)$ ,  $\Delta u(k+1/k)$ , ...,  $\Delta u(k+N_u-1/k)$  e dado por :

$$\begin{aligned} u(k) = & \min_{\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_u-1/k)} J_{GPC} \\ \text{s.a } & \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $u(k) = u(k - 1) + \Delta u(k/k)$ .

Assim como no DMC, a minimização do critério de custo do GPC é ilustrada pela figura 1.2, onde a área destacada representa os sinais considerados no critério (1.5).

O GPC é também bastante utilizado no controle de processos industriais, como mostram os trabalhos apresentados em [Clarke, 1994], entre outros.

Assim como o DMC e o GPC, existe uma série de algoritmos MBPC que podem ser caracterizados pela figura 1.2, conforme descrito em [Soeterboek, 1992]<sup>3</sup>. Entretanto, uma dificuldade encontrada neste tipo de algoritmo MBPC é o fato da maioria dos resultados sobre a estabilidade do sistema em malha fechada estarem ligados ao uso de horizontes e ponderações infinitos no critério de custo [Clarke e Mohtadi, 1989] [Oliveira, 1992]. A busca da solução deste problema levou ao desenvolvimento de novos algoritmos de controle preditivo, entre eles, o Controlador Preditivo de Horizonte Deslizante com Restrições, descrito a seguir.

### 1.2.1.3 Controlador Preditivo de Horizonte Deslizante com Restrições - CRHPC

O Controlador Preditivo de Horizonte Deslizante com Restrições (*Constrained Receding Horizon Predictive Controller - CRHPC*)<sup>4</sup> [Clarke e Scattolini, 1991] surgiu como uma alternativa a algoritmos como o DMC e GPC pois, através da inclusão de restrições nos valores terminais da previsão da saída, pode-se estabelecer a estabilidade do sistema em malha fechada através de condições onde não é necessário selecionar valores infinitos para os parâmetros de projeto.

O critério de custo do CRHPC é dado por :

<sup>3</sup>onde faz-se um estudo destes algoritmos, e propõe-se uma lei de controle unificada, denominada *Unified Predictive Controller - UPC*

<sup>4</sup>Atualmente, na literatura sobre controle de processos em língua portuguesa, as siglas DMC, GPC e CRHPC, obtidas a partir da abreviação do nome dos algoritmos em inglês, estão presentes em maior frequência que o correspondente em português, isto é, CMD, CPG e CPHDR. Portanto, por motivo de clareza, neste trabalho serão utilizadas as siglas em inglês, no lugar do correspondente em português.

$$\begin{aligned}
J_{CRHPC} = & \sum_{j=1}^{N_y} \mu(k+j) (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 \\
& + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(k+j-1) \Delta u^2(k+j-1/k)
\end{aligned} \quad (1.8)$$

onde os parâmetros de projeto  $N_y$  e  $N_u$  são definidos como no DMC ou no GPC, e

$\mu(k)$  é uma ponderação no erro da previsão da saída em relação à referência, no instante  $k$ .

$\lambda(k)$  é uma ponderação no sinal de controle, no instante  $k$ .

A descrição do processo é feita através de um modelo em representação tipo entrada/saída. Este modelo é utilizado para o cálculo das previsões da saída  $\hat{y}(k+j/k)$  no horizonte de previsão especificado [Clarke e Scattolini, 1991].

Baseado nestas previsões, o sinal de controle é obtido a partir da minimização do critério (1.8) em relação a  $\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_u-1/k)$ , conforme ilustrado na figura 1.3, e dado por :

$$\begin{aligned}
u(k) = & \min_{\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_u-1/k)} J_{CRHPC} \\
& \text{s.a.} \\
& \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j = N_u, \dots, N_y + m \\
& \hat{y}(k+N_y+j/k) = w(k+N_y+j) \quad \forall j = 1, \dots, m
\end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $m$  é horizonte de restrição para a previsão da saída.

O algoritmo CRHPC descrito acima é ilustrado na figura 1.3, onde a área destacada representa os sinais considerados na minimização (1.9). Em sua formulação original, apresentada em [Clarke e Scattolini, 1991], o horizonte de controle  $N_u$  é igual ao horizonte de previsão  $N_y$ . Posteriormente, em [Leva e Scattolini, 1993], um horizonte de controle  $N_u \leq N_y$  foi incluído no algoritmo.

Em [Demircioglu e Clarke, 1993] propõe-se a incorporação, no critério de custo de uma ponderação no valor final dos estados do processo, dando origem ao GPCW (*Generalized Predictive Control Weighting*). Este algoritmo pode

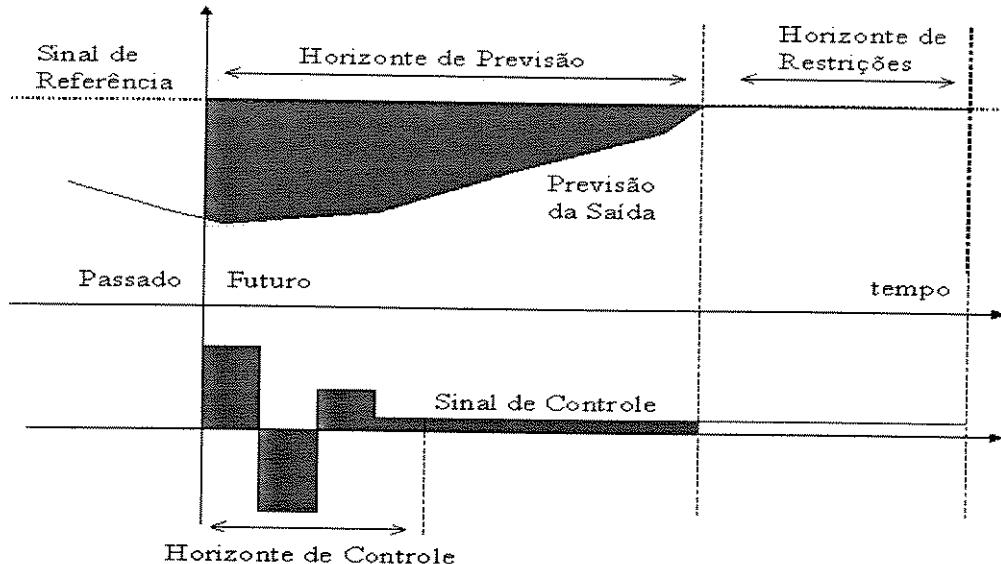


Figura 1.3: Controle Preditivo - CRHPC

ser definido como um controlador que engloba o GPC e o CRHPC, onde o primeiro é obtido com uma ponderação nula nos estados e o segundo com uma ponderação infinita nos estados [Demircioglu e Clarke, 1993].

### 1.2.2 Controle Preditivo de Processos Incertos

Conforme descrito anteriormente, nem sempre é possível obter um modelo que represente perfeitamente o processo físico.

No contexto de controladores preditivos, pode-se destacar quatro abordagens para tratar este tipo de problema, isto é, a incerteza no modelo do processo. São elas : *i)* A identificação *off-line* dos parâmetros do modelo; *ii)* A identificação *on-line* dos parâmetros do modelo e implementação do MBPC como um algoritmo de controle adaptativo; *iii)* O estudo do efeito das dinâmicas não modeladas no desempenho do sistema em malha fechada; e, *iv)* A identificação de limites para a incerteza nos parâmetros do modelo e implementação do MBPC como um algoritmo de controle robusto.

Os três últimos casos são discutidos a seguir.

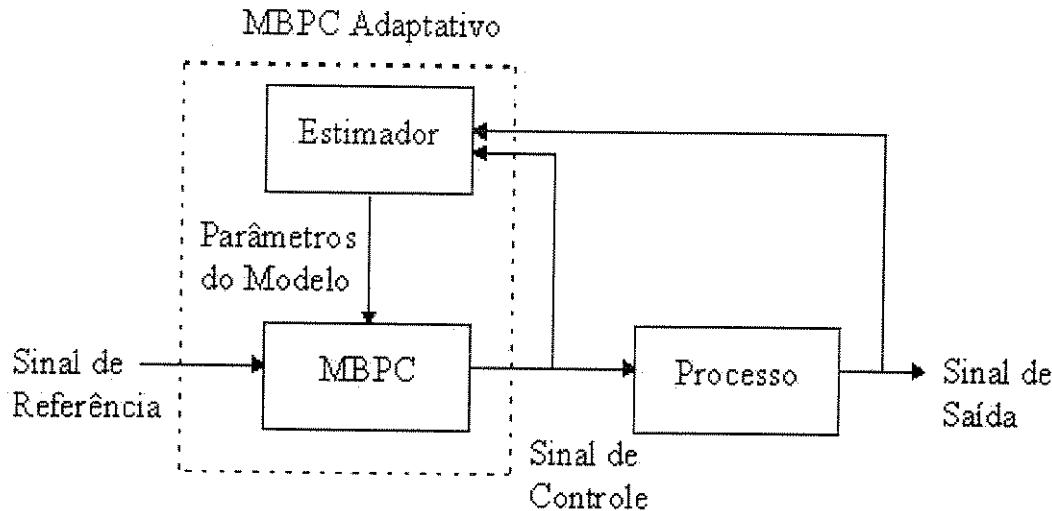


Figura 1.4: Controle Preditivo

### 1.2.2.1 Controle Preditivo Adaptativo

Quando os parâmetros do modelo não são conhecidos ou variam no tempo, estes podem ser estimados através de um método de identificação e utilizados na lei de controle, dando origem aos controladores adaptativos [Astrom e Wittenmark, 1989]. Este tipo de algoritmo calcula a lei de controle a partir dos parâmetros identificados *on-line*, conforme é ilustrado na figura 1.4, utilizando, a cada instante de amostragem, a hipótese de que o modelo identificado é único, verdadeiro e invariante no tempo, isto é, o Princípio da Equivalência Certa ou *Certainty Equivalence Principle* [Astrom e Wittenmark, 1989]. Esta estratégia de controle adaptativo pode ser facilmente incorporada nos algoritmos MBPC, como o GPC, CRHPC, etc. [Clarke et al., 1987] [McIntosh et al., 1990] [Dion et al., 1991] [Yoon e Clarke, 1994] [Elshafei et al., 1994] [Oliveira et al., 1996c] [Oliveira et al., 1997].

### 1.2.2.2 Dinâmicas não modeladas

Quando existem erros de modelagem devido à presença de dinâmicas não modeladas, a análise da estabilidade do sistema em malha fechada pode ser realizada através do estudo da influência dos parâmetros de projeto na mar-

gem de estabilidade do sistema em relação aos erros de modelagem. Neste contexto, em [Robinson e Clarke, 1991] e [Mohtadi, 1988] é definido um limite de estabilidade para o erro de modelagem no GPC. Este limite de estabilidade representa uma margem máxima para erro de modelagem, no domínio da frequência, para que o sistema seja estável em malha fechada. Em [Oliveira et al., 1996a], analisa-se a influência do polinômio  $T(q^{-1})$  (o polinômio que modela as perturbações no modelo CARIMA do GPC) no limite de estabilidade e propõe-se regras para a sua seleção.

### 1.2.2.3 Controle Preditivo Robusto

Muitos são os fatores que acarretam incertezas nos parâmetros do modelo. Na abordagem de modelagem de processos com incertezas estruturadas, os parâmetros do modelo são definidos por uma região de pertinência e não por um único valor. Assim, tem-se uma família de modelos para representar o processo real.

O algoritmo de controle preditivo que considera de maneira explícita, no cálculo da lei de controle, incertezas estruturadas no modelo do processo é denominado controlador preditivo robusto (CPR). Esta abordagem para o controle de processos incertos é baseada na minimização (em relação aos incrementos futuros de controle) do máximo do critério de custo (em relação ao conjunto de valores possíveis para saída prevista, calculado a partir da incerteza estruturada do modelo). Este algoritmo resulta na otimização *on line* de um problema *min-max*.

A denominação "controle preditivo robusto" para esta metodologia é usual no contexto de algoritmos MBPC e está baseada no fato desta considerar, de forma explícita, a incerteza do modelo na síntese do controlador. Esta é a principal diferença em relação a outras abordagens, como os MBPC adaptativo e com modelo invariante no tempo. Porém, em relação a algoritmos de controle robusto clássicos, onde a partir de um espaço de pertinência para o modelo, obtém-se *off-line* um único controlador linear capaz de satisfazer a certos critérios de desempenho e/ou estabilidade, na metodologia utilizada neste trabalho, a síntese do controlador robusto é realizada em todos os instantes de amostragem (e não *off-line*) de acordo com os sinais de controle, de saída e de referência do processo. Existe, portanto, uma "adaptação" do controlador aos diferentes estados do sistema, pois o modelo que determina o desempenho robusto (pior caso) em determinado instante de amostragem não será necessariamente o mesmo para todos os instantes seguintes.

Em [den Boom, 1995] e [Nicolao et al., 1996] são também desenvolvidos algoritmos MBPC denominados controle preditivo robusto, sem, no entanto, utilizar a estratégia da lei de controle *min-max* adotada neste trabalho. Em [den Boom, 1995], o problema de otimização é definido em relação ao operador Youla variante no tempo, e está sujeito a restrições para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Em [Nicolao et al., 1996], faz-se uma extensão para processos com resposta ao impulso incerta do controlador preditivo onde a estabilidade do sistema é garantida através de restrições nos valores finais do horizonte de previsão.

A proposta de controle preditivo robusto baseada na otimização *min-max* do critério de custo foi inicialmente apresentada em [Campo e Morari, 1987]. Neste algoritmo, o modelo especificado contém incertezas nos coeficientes da resposta ao impulso de processo, como o mostrado a seguir :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n h_i q^{-i} u(k) \quad (1.10)$$

onde  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são os coeficientes da resposta ao impulso do processo, e cada coeficiente  $h_i$  possui um intervalo de incerteza, isto é,  $h_{i,min} \leq h_i \leq h_{i,max}$ .

A partir deste modelo, calcula-se um conjunto de valores possíveis para a previsão da saída, em função da incerteza na resposta ao impulso do processo.

A lei de controle é calculada otimizando (no sentido *min-max*) um critério de custo que pondera o máximo erro entre a previsão da saída e o sinal de referência, conforme mostrado a seguir :

$$\begin{aligned} u(k) = & \min_{u(k/k), u(k+1/k), \dots, u(k+N_u-1/k)} \max_{h_i, i=1, \dots, n} \\ & \max_{j=1, \dots, N_y} |\hat{y}(k+j/k, h_i) - w(k+j)| \\ \text{s.a. } & \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde  $\hat{y}(k+j/k, h_i)$  é o valor da previsão da saída, calculada em  $k$  e em função da incerteza paramétrica na resposta ao impulso do processo.

Baseados na proposta de [Campo e Morari, 1987], em [Prett e Garcia, 1989] são desenvolvidos algoritmos CPR, como por exemplo,

os descritos em [Cuthrell et al., 1989] [Biegler, 1989], para aplicação no problema *benchmark* Shell [Prett e Garcia, 1988]<sup>5</sup>. Nestes trabalhos, a lei de controle é obtida pela otimização *min-max* de um critério de custo do tipo quadrático, como descrito pela equação (1.1), e o modelo do processo Shell com incertezas estruturadas é reescrito em representação de estados utilizando os coeficientes da resposta ao impulso do processo. A partir da análise deste modelo, tem-se que o critério de custo definido é convexo em relação à incerteza paramétrica, isto é, à incerteza nos ganhos do processo. Conforme descrito em [Prett e Garcia, 1988], esta característica é fundamental para que a resolução da lei de controle *min-max* seja factível.

Em [Allwright e Papavasiliou, 1992], descreve-se uma estratégia para a resolução do problema *mix-max* (1.11) cujo objetivo é reduzir a complexidade computacional da lei de controle através da diminuição do número de restrições.

Entretanto, não existem resultados sobre a estabilidade do sistema em malha fechada dos esquemas de controle descritos por [Campo e Morari, 1987] ou em [Prett e Garcia, 1989].

Visando o desenvolvimento de um controlador preditivo robusto com garantia de estabilidade, em [Zheng e Morari, 1993] é proposto um algoritmo baseado em um modelo derivado da resposta ao impulso do processo incerto, dado por :

$$y(k) = y(k-1) + \sum_{i=1}^n h_i q^{-i} \Delta u(k) \quad (1.12)$$

A lei de controle é obtida de maneira análoga ao problema (1.11), porém com a definição de um horizonte de previsão fixo e proporcional ao número de coeficientes do modelo e com a inclusão de um termo de ponderação do sinal de controle. Assim, a lei de controle é dada por :

---

<sup>5</sup>O processo *benchmark* Shell é uma coluna de destilação multivariável que possui incertezas nos valores dos ganhos das funções de transferência do modelo.

$$\begin{aligned}
u(k) = & \min_{\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_u-1/k)} \max_{h_i, i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n+N_u-1} \{ \\
& |\hat{y}(k+j/k, h_i) - w(k+j)| \} + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda |\Delta u(k+j-1/k)| \\
\text{s.a } & \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u
\end{aligned} \tag{1.13}$$

onde  $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k/k)$ .

Todos os controladores preditivos descritos anteriormente utilizam modelos cujos parâmetros são os coeficientes da resposta ao impulso do processo que, geralmente, são em número elevado. Esta característica aumenta a complexidade do cálculo da lei de controle e da identificação robusta dos parâmetros, isto é, da identificação do espaço de pertinência dos parâmetros do modelo.

Outra abordagem para a modelagem de processos incertos no contexto de algoritmos CPR é a utilização de modelos *Controlled Auto Regressive Moving Average* (CARMA), em [Gutierrez e Camacho, 1995]. Esta proposta se caracteriza pela utilização de um modelo com um número menor de parâmetros incertos em relação aos modelos de resposta ao impulso.

Assim, o modelo CARMA com incertezas estruturadas utilizado em [Gutierrez e Camacho, 1995] é dado por :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + \xi(k) \tag{1.14}$$

onde cada coeficiente  $a_i$  e  $b_i$  dos polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  está contido dentro de um espaço de incertezas, isto é,  $a_{i,min} \leq a_i \leq a_{i,max}$  e  $b_{i,min} \leq b_i \leq b_{i,max}$ .

A lei de controle é obtida através da otimização *min-max* de um critério quadrático, como o descrito pela equação (1.5). Entretanto, conforme discutido em [Gutierrez e Camacho, 1995], o problema de otimização dado pela lei de controle robusta irá apresentar infinitas restrições se existirem incertezas nos parâmetros do polinômio  $A(q^{-1})$ . A solução então adotada para se obter um número finito de restrições é uma discretização do espaço de incertezas formado pelos parâmetros do polinômio  $A(q^{-1})$ , porém, neste caso, não é possível garantir que o sinal de controle obtido será o valor ótimo em relação ao problema *min-max*.

### 1.3 Proposta e Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e análise de algoritmos de controle preditivo para processos incertos com restrições nos sinais de entrada e saída, utilizando as abordagens de controle preditivo adaptativo e de controle preditivo robusto. Os algoritmos investigados se caracterizam pela modelagem do processo realizada através de uma série de funções ortonormais, isto é, um modelo onde a saída do processo é calculada como sendo a soma ponderada de uma base de funções ortonormais. Este tipo de modelo é capaz de representar qualquer processo linear cuja resposta ao impulso possua energia finita.

O desenvolvimento do algoritmo MBPC Adaptativo apresentado neste trabalho utiliza uma modelagem não estruturada, onde não é necessário o conhecimento *a priori* da ordem e do atraso do processo. Esta característica representa uma vantagem em relação aos algoritmos com modelo estruturado, como o GPC ou CRHPC, na ausência de uma informação precisa sobre estas variáveis.

---

A principal proposta original deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo robusto baseado no modelo formado por uma série de funções ortonormais com incertezas estruturadas.

As características desta proposta de controle preditivo robusto, que pode ser também derivada para processos com ação integral, são [Oliveira et al., 1996c] [Oliveira et al., 1997b] :

*i)* O sinal de controle obtido é ótimo em relação ao problema de otimização *min-max*. Neste algoritmo, a convexidade da função de custo é assegurada em relação a todos os parâmetros incertos do modelo. A utilização de propriedades de problemas de otimização *min-max* de funções convexas permite reescrever a lei de controle do CPR como um problema de otimização de resolução factível e sujeito a um número finito de restrições.

*ii)* O modelo descrito por funções ortonormais com incertezas estruturadas é capaz de representar um processo estável com um número bem menor de parâmetros incertos que o modelo de resposta ao impulso. Assim, o problema de identificação robusta é simplificado e diminui-se o esforço computacional na solução do problema de otimização *min-max* da lei de controle.

*iii)* Não é necessário o conhecimento *a priori* da ordem e do atraso do processo.

iv) Existem condições suficientes para a estabilidade do sistema em malha fechada.

Este trabalho está dividido em 5 Capítulos que abordam os seguintes ítems :

### **Capítulo 2 : Modelagem de Processos por Séries de Funções Ortonormais**

Apresentação do modelo baseado em séries de funções ortonormais e suas propriedades. Derivação do modelo com incertezas estruturadas e do modelo para processos com ação integral. Desenvolvimento das equações de previsão da saída para estes casos e descrição de métodos de identificação paramétrica e robusta dos parâmetros do modelo.

### **Capítulo 3 : Controle Preditivo Adaptativo**

Desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo adaptativo utilizando os modelos apresentados no Capítulo 2. Definição do critério de custo através das normas Euclidiana e infinita.Descrição da lei de controle como um problema de minimização dos critérios definidos, cuja resolução dá-se através de métodos de otimização *Quadratic Programming* (QP) e *Linear Programming* (LP). Análise da estabilidade do sistema em malha fechada.

### **Capítulo 4 : Controle Preditivo Robusto**

Desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo robusto com modelo baseado em séries de funções ortonormais com incerteza estruturada. Utilização das normas Euclidiana e infinita para a descrição da lei de controle como um problema *min-max*. Resolução deste problema utilizando métodos de otimização *Sequential Quadratic Programming* (SQP), QP e LP. Análise da estabilidade do sistema em malha fechada.

### **Capítulo 5 : Conclusões**

Descrição dos principais resultados, das conclusões do trabalho e apresentação de propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Modelagem de Processos por Séries de Funções Ortonormais

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo, descreve-se a modelagem de processos físicos utilizando uma série de funções ortonormais, denominada neste trabalho de modelo SFO. Esta abordagem permite unificar a modelagem de processos através de funções de Laguerre, de funções de Kautz [Broome, 1965] [Wahlberg, 1994] [Wahlberg e Makila, 1996], e do modelo de resposta ao impulso.

Utilizando um modelo não estruturado, onde não é necessário definir a ordem e o atraso de transporte, a saída do processo é descrita como sendo a soma ponderada de todas as saídas das funções da base ortogonal, onde cada função que forma a base é definida através da especificação de um polo. Este polo é selecionado a partir de um conhecimento *a priori* aproximado da dinâmica dominante do processo, e o modelo obtido é descrito na forma de representação de estados para facilitar sua posterior utilização em uma lei de controle do tipo preditivo. A partir deste modelo, obtém-se as equações para a previsão da saída  $j$  passos a frente.

Nesta abordagem, o modelo obtido permite aproximar processos causais cuja resposta ao impulso pertence ao espaço Lebesgue  $L_2[0, \infty[$ , que é definido como sendo o espaço formado pelos sinais de soma quadrática finita entre 0 e infinito, isto é,  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|^2 < \infty$ , sendo  $h(k)$  a resposta ao impulso discreta do processo. Este espaço não inclui processos instáveis em malha aberta ou com

ação integral, entretanto, processos com ação integral podem ser modelados a partir da definição de um sinal auxiliar de saída dado por  $y^*(k)$ . Esta saída auxiliar é modelada por uma série de funções ortonormais e, em seguida, a saída do modelo é obtida integrando-se  $y^*(k)$ .

Quando os parâmetros do modelo não são perfeitamente conhecidos, estes podem ser estimados *on line* através de um método recursivo de identificação paramétrica [Ljung, 1987].

Outra abordagem para a modelagem de processos incertos é a representação explícita das incertezas no modelo. De fato, uma idéia comum em controle robusto é a incorporação da incerteza associada ao modelo no projeto da lei de controle.

Existem dois tipos de representação de incertezas no modelo : as não estruturadas e as estruturadas.

As incertezas não estruturadas estão normalmente associadas às dinâmicas não modeladas do processo, ou seja, incertezas na função de transferência como um todo.

---

As incertezas estruturadas são definidas por um espaço de pertinência para os parâmetros do modelo. Nestes casos, existe uma família de modelos entre a entrada e a saída do processo ao invés de um único modelo. A estimativa do espaço de pertinência para os parâmetros do modelo é feita através de algoritmos denominados de identificação robusta [Walter e Piet-Lahanier, 1990].

O modelo baseado em séries de funções ortonormais para processos incertos, descrito neste capítulo, é representado utilizando incertezas estruturadas. Este tipo de representação é mais apropriado para o desenvolvimento do algoritmo de controle preditivo robusto, uma vez que este é definido a partir de um critério de custo no domínio do tempo.

Na seção a seguir são descritos os principais resultados sobre modelagem de processos por séries de funções ortonormais, o modelo SFO, e é apresentado um desenvolvimento que permite a modelagem de processos com ação integral. Na seção 2.3, aborda-se o caso de modelos SFO com incertezas estruturadas para processos com ou sem ação integral e discute-se a identificação robusta dos parâmetros do modelo. Na seção 2.4, são desenvolvidas as equações de previsão da saída  $j$  passos a frente para os modelos SFO com ou sem incertezas estruturadas. Finalmente, na seção 2.5, apresenta-se um resumo dos principais tópicos discutidos neste Capítulo.

## 2.2 Modelagem de Processos por Séries de Funções Ortonormais

### 2.2.1 Introdução

Um processo linear estável pode ser caracterizado por sua resposta ao impulso  $h(k)$ . Supondo que este processo seja causal e que  $h(k)$  pertença ao espaço de Lebesgue  $L_2[0, \infty[$ , o sinal  $h(k)$  pode ser modelado por uma série de funções ortonormais, como mostrado a seguir :

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(k) \quad (2.1)$$

com

$$c_i = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \phi_i(k) \quad (2.2)$$

onde  $\phi_i(k)$ ,  $i = 1, \dots$ , é uma base de funções ortonormais e  $c_i$  são os parâmetros do desenvolvimento em séries de  $h(k)$ .

Várias bases de funções podem ser utilizadas no desenvolvimento em séries de  $h(k)$  e pode-se citar, como exemplo mais clássico, a aproximação do sinal  $h(k)$  através de Séries de Fourier, que é realizada através de funções *seno* e *coseno*. Neste trabalho, utiliza-se a classe de funções ortonormais obtidas a partir da dinâmica do processo.

A utilização desta abordagem na aproximação de sistemas dinâmicos vem sendo descrita na literatura há algumas décadas, por exemplo, nos trabalhos [Wiener, 1956] [Broome, 1965], e recentemente vem recebendo bastante atenção, como mostram os trabalhos [Ninness e Gustafsson, 1995] [Heuberger et al., 1995] [Wahlberg e Makila, 1996].

A transformada  $z$  de uma base de funções  $\phi_i(k)$  ortonormais baseada nos pólos do processo a ser modelado é dada por [Ninness e Gustafsson, 1995] :

$$\Phi_i(z^{-1}) = z^{-1} \frac{\sqrt{1 - |p_i|^2}}{1 - p_i z^{-1}} \prod_{k=1}^{i-1} \left( \frac{z^{-1} - \bar{p}_k}{1 - p_k z^{-1}} \right), \quad i = 1, \dots \quad (2.3)$$

onde  $p_i$ ,  $i = 1, \dots$ , representam os pólos do processo e  $\bar{p}_i$  é o polo conjugado de  $p_i$ .

Supondo a utilização de infinitas funções com pólos estritamente dentro do círculo unitário na base ortonormal (2.3), tem-se que esta é completa no  $L_2[0, \infty]$ , [Ninness e Gustafsson, 1994]. Isto significa que a série (2.1) é capaz de modelar qualquer resposta ao impulso de integral finita  $h(k)$  gerada por um processo linear, estável e causal.

Existem também bases ortonormais formadas de funções que utilizam somente um polo para o desenvolvimento em séries de  $h(k)$  e as mais conhecidas são as funções de Laguerre e as funções de Kautz [Wahlberg, 1994]. Estas funções são um caso particular de (2.3), conforme é discutido a seguir.

Quando  $p_i = p$ ,  $\forall i$ , com  $p \in \mathbb{R}$ , a equação (2.3) reduz-se a :

$$\Phi_{lagu,i}(z^{-1}) = \sqrt{1-p^2} \frac{z^{-1}(z^{-1}-p)^{i-1}}{(1-pz^{-1})^i}, \quad i = 1, \dots \quad (2.4)$$

A base de funções acima é denominada funções de Laguerre.

Pode-se observar que a base de funções ortonormais associada ao modelo de resposta ao impulso pode ser obtida pela seleção do polo da função de Laguerre na origem do círculo unitário ( $p = 0$ ) :

$$\Phi_{ri,i}(z^{-1}) = z^{-i}, \quad i = 1, \dots \quad (2.5)$$

Portanto, a base de funções que descreve o modelo de resposta ao impulso é um caso particular da base de funções de Laguerre.

A base de funções de Kautz é obtida desenvolvendo a equação (2.3) em torno de um par de pólos complexos conjugados  $p$  [Ninness e Gustafsson, 1994], e é dada por :

$$\Phi_{kautz,i}(z^{-1}) = \begin{cases} \frac{z^{-2}\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\gamma^2)}}{1-\alpha(\gamma+1)z^{-1}+\gamma z^{-2}} \left( \frac{\gamma - \alpha(\gamma+1)z^{-1} + z^{-2}}{1-\alpha(\gamma+1)z^{-1}+\gamma z^{-2}} \right)^{\frac{i-1}{2}} & \text{para valores de } i \text{ ímpar} \\ \frac{z^{-1}\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\alpha z^{-1})}}{1-\alpha(\gamma+1)z^{-1}+\gamma z^{-2}} \left( \frac{\gamma - \alpha(\gamma+1)z^{-1} + z^{-2}}{1-\alpha(\gamma+1)z^{-1}+\gamma z^{-2}} \right)^{\frac{i}{2}}, & \text{para valores de } i \text{ par} \end{cases},$$

$i = 1, \dots$

onde  $|\alpha| < 1$  e  $|\gamma| < 1$  são definidos de forma que  $p$  seja raiz da equação :  $z^2 - \alpha(\gamma+1)z + \gamma$ .

Na modelagem de processos, somente uma quantidade finita de funções  $\phi_i(k)$  é utilizada na aproximação de  $h(k)$ , isto é, a série (2.1) é truncada em  $n$  elementos como descrito a seguir :

$$\tilde{h}(k) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(k) \quad (2.7)$$

onde  $\tilde{h}(k)$  é a aproximação de ordem  $n$  de  $h(k)$ .

O erro de truncamento da série (2.7) é definido como sendo :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k) - \tilde{h}(k)| \quad (2.8)$$

Assim, através do uso da base (2.3) e da aproximação (2.7), a relação entre o sinal de entrada e de saída de um processo estável é dada por :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(q^{-1}) u(k) \quad (2.9)$$

ou

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i l_i(k) \quad (2.10)$$

onde  $q^{-1}$  é o operador atraso,  $u(k)$  é o sinal de controle,  $y(k)$  é o sinal de saída e  $l_i(k)$  é a saída da  $i$ -éssima função  $\Phi_i(q^{-1})$ .

Esta equação pode ser reescrita em uma forma vetorial, como é mostrado a seguir :

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) \quad (2.11)$$

com :

$$\mathbf{c} = [ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n ]^T \quad (2.12)$$

$$\mathbf{l}(k) = [ l_1(k) \ l_2(k) \ \dots \ l_n(k) ]^T \quad (2.13)$$

onde o vetor  $\mathbf{c}$  contém os coeficientes da série e o vetor  $\mathbf{l}(k)$  contém as saídas das  $n$  funções ortonormais.

Quando as funções ortonormais  $\Phi_i(q^{-1})$  são definidas pela mesma dinâmica, isto é, por um pólo real, na origem ou não, ou por um par de pólos complexos conjugados, tem-se que  $\Phi_i(q^{-1})$  pode ser descrita em função de  $\Phi_{i-1}(q^{-1})$ . Como consequência desta recursividade, tem-se que o modelo do processo (2.9) pode ser escrito em representação de estados, o que facilita a derivação de uma lei de controle.

A recursividade das funções  $\Phi_i(q^{-1})$  e a obtenção do modelo em representação de estados são discutidos a seguir.

Seja a equação de  $\Phi_1(q^{-1})$ , para a função (2.3) com um pólo real (funções de Laguerre), dada por :

$$\Phi_{lagu,1}(q^{-1}) = \sqrt{1 - p^2} \frac{q^{-1}}{(1 - pq^{-1})} \quad (2.14)$$

A equação de  $\Phi_{lagu,2}(q^{-1})$  é igual a :

$$\Phi_{lagu,2}(q^{-1}) = \sqrt{1-p^2} \frac{q^{-1}(q^{-1}-p)}{(1-pq^{-1})^2} = \frac{(q^{-1}-p)}{(1-pq^{-1})} \Phi_{lagu,1}(q^{-1}) \quad (2.15)$$

Repetindo, sucessivamente, os mesmos passos, obtém-se :

$$\Phi_{lagu,i}(q^{-1}) = \frac{(q^{-1}-p)}{(1-pq^{-1})} \Phi_{lagu,i-1}(q^{-1}) \quad (2.16)$$

Assim, os elementos do vetor de estados  $\mathbf{l}(k)$  são dados por :

$$\begin{aligned} l_1(k) &= \Phi_{lagu,1}(q^{-1})u(k) \\ &= p l_1(k-1) + \sqrt{1-p^2} u(k-1) \\ l_2(k) &= \Phi_{lagu,2}(q^{-1})u(k) \\ &= \frac{(q^{-1}-p)}{(1-pq^{-1})} l_1(k) \\ &= p l_2(k-1) + l_1(k-1) - p l_1(k) \\ &= p l_2(k-1) + (1-p^2) l_1(k-1) - p \sqrt{1-p^2} u(k-1) \\ l_3(k) &= \vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

O modelo SFO descrito é ilustrado na figura 2.1 e, destas equações, tem-se que :

$$\mathbf{l}(k+1) = A \mathbf{l}(k) + \mathbf{b} u(k) \quad (2.18)$$

onde :

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p^2 & p & 0 & \dots & 0 \\ (-p)(1-p^2) & 1-p^2 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ (-p)^{n-2}(1-p^2) & (-p)^{n-3}(1-p^2) & \dots & p \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

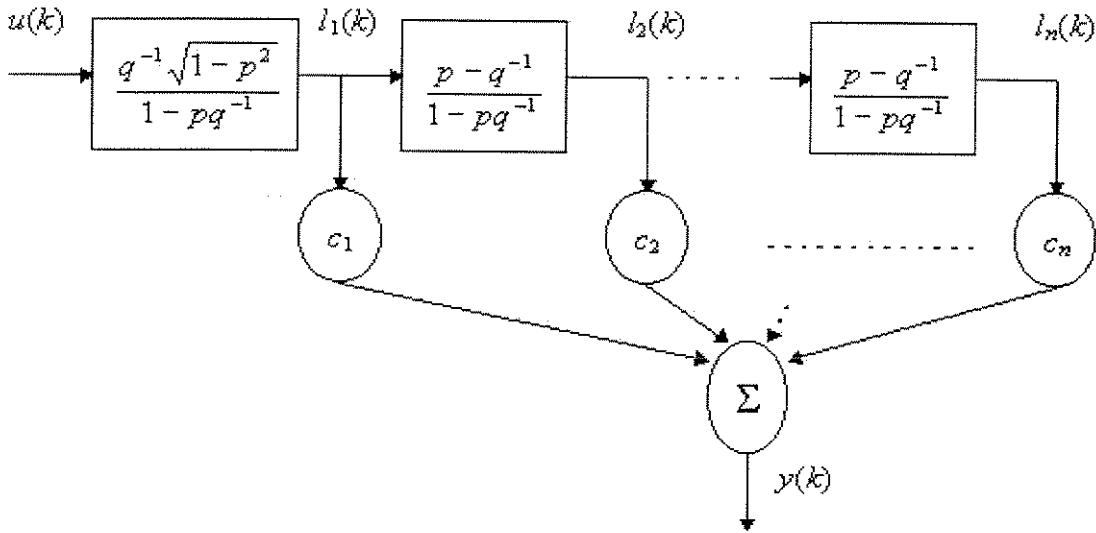


Figura 2.1: Representação gráfica do modelo SFO

$$\mathbf{b} = \sqrt{1-p^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -p \\ (-p)^2 \\ \vdots \\ (-p)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A obtenção da representação em estados do modelo baseado nas funções (2.3) com um par de pólos complexos e conjugados (funções de Kautz) é análoga à apresentada acima [Wahlberg, 1991a]. As matrizes  $A$  e  $\mathbf{b}$  do modelo são dadas por [Fu, 1994] :

$$A = T_N A_N T_N^{-1} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{b} = T_N B_N \quad (2.22)$$

onde :

$$T_N = \begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & T_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

com  $T_N$  contendo  $N$  blocos, formados por :

$$T_1 = \begin{bmatrix} -m_1 n_1 & n_1 \\ n_2 & -m_2 n_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

e

$$A_N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_n & A_{n-1} & \dots & A_1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{b}_N = [ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n ]^T \quad (2.26)$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r^2 & 2p_{real} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 - r^4 & 2p_{real}(r^2 - 1) \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}^{i-2} A_2 \quad i \geq 2 \quad (2.27)$$

$$\mathbf{b}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}^{i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - r^2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

e os seguintes parâmetros :

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{p_{real}^2 + p_{imag.}^2} \\
m_1 &= p_{real} \quad \text{e} \quad m_2 = p_{real} \left( \frac{1 - p_{real}^2 - p_{imag.}^2}{1 - p_{real}^2 + p_{imag.}^2} \right) \\
n_1^2 &= \frac{(1 + p_{real}^2 + p_{imag.}^2)^2 - 4p_{real}^2}{(1 + p_{real}^2 + p_{imag.}^2)^2(1 + m_1^2) - 4m_1 p_{real}} \\
n_2^2 &= \frac{(1 + p_{real}^2 + p_{imag.}^2)^2 - 4p_{real}^2}{(1 + p_{real}^2 + p_{imag.}^2)^2(1 + m_2^2) - 4m_2 p_{real}}
\end{aligned}$$

e  $p_{real}$  e  $p_{imag.}$  são, respectivamente, as partes real e imaginária do pólo  $p$ .

Deve-se observar que no caso do modelo baseado em funções orto normais com um par de pólos complexos conjugados, o número  $n$  de funções da série deve ser par.

Assim sendo, o modelo baseado em séries de funções orto normais com somente uma dinâmica (seja um pólo real ou um par de pólos complexos), denominado neste trabalho de modelo SFO, pode ser descrito pela seguinte representação de estados :

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}(k+1) &= A \mathbf{l}(k) + \mathbf{b} u(k) \\
y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

## 2.2.2 Processos com ação integral

O modelo descrito pela equação (2.29) permite aproximar processos cuja resposta ao impulso pertença ao espaço  $L_2$ , o que elimina processos instáveis e processos com ação integral, isto é, aqueles que contêm um pólo em 1. Entretanto, um modelo SFO para este último caso pode ser obtido definindo uma saída auxiliar  $y(k)^*$  de forma que a saída do processo seja igual à integral de  $y(k)^*$ , ou :

$$y(k) = y(k-1) + y(k)^* \tag{2.30}$$

Definindo um modelo baseado em séries de funções orto normais para a saída auxiliar  $y(k)^*$ , obtém-se :

$$y(k) = y(k-1) + \sum_{i=1}^n c_i l_i(k) \quad (2.31)$$

Assim sendo, o modelo SFO para processos com ação integral é dado por :

$$\begin{aligned} l(k+1) &= A l(k) + b u(k) \\ y(k) &= y(k-1) + c^T l(k) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde as matrizes  $A$  e  $b$  são calculadas através da equação (2.18).

Os parâmetros dos modelos SFO dados pelas equações (2.29) e (2.32) são : o pólo  $p$ , o número  $n$  de funções da série e a matriz  $c$ . A seleção de  $p$  e  $n$  e o cálculo da matriz  $c$ , via resposta ao impulso do processo ou via identificação paramétrica, são discutidos a seguir.

### 2.2.3 Escolha do pólo $p$ da função ortonormal

A seleção do pólo  $p$  é, normalmente, mas não necessariamente, feita a partir de um conhecimento *a priori* aproximado da constante de tempo dominante do processo ( ou da resposta em frequência ), e pode ser um único pólo real ou um par de pólos complexos conjugados, de acordo com as características do processo. De fato, valores de  $p$  em torno da dinâmica dominante são suficientes para a modelagem do processo, contudo, apesar de não ser crucial<sup>1</sup>, esta escolha é importante para assegurar que os coeficientes de ordem mais alta da série ( isto é, da matriz  $c$  ) tendam rapidamente para zero. Uma vez que os coeficientes nulos de ordem mais alta podem ser desprezados, uma seleção do pólo  $p$  próxima da constante de tempo do processo se traduz em um modelo com um número menor de funções, e consequentemente, menos parâmetros (menor  $n$ ).

Esta característica se torna mais clara quando se descreve o modelo de resposta ao impulso como um modelo baseado em uma série de funções orto-normais, cujo pólo está na origem<sup>2</sup>. Neste caso, para processos com constante de tempo lenta ou mal-amortecidos, o número de funções da série, que é igual ao número de elementos da resposta ao impulso, aumenta consideravelmente.

<sup>1</sup>uma vez que a base de funções (2.3) é completa no espaço Lebesgue  $L_2[0, \infty[$ .

<sup>2</sup>isto é,  $\Phi_{ri,i}(z^{-1}) = z^{-i}$ ,  $i = 1, \dots$

Assim, uma escolha adequada do pólo  $p$  das funções permite reduzir o número de parâmetros do modelo.

Portanto, quando um conhecimento *a priori* da constante de tempo dominante do processo é utilizado no modelo SFO, este é capaz de modelar um processo estável com menos parâmetros  $c_i$  que o modelo por resposta ao impulso correspondente.

Alguns trabalhos descrevem métodos para a seleção ótima do pólo  $p$  de modelos baseados em funções ortonormais, por exemplo, [Masnadi-Shirazi e Ahmed, 1991] [Fu e Dumont, 1993]. Este tipo de algoritmo supõe um conhecimento *a priori* da resposta ao impulso do processo<sup>3</sup>. Desta forma, o valor do pólo  $p$  pode ser obtido minimizando um critério baseado no erro de truncamento da série ortonormal em função de  $p$  [Masnadi-Shirazi e Ahmed, 1991], isto é :

$$\min_p \sum_{k=1}^{\infty} \left( h(k) - \sum_{i=1}^n c_i(p) l_i(k, p) \right)^2 \quad (2.33)$$

---

ou também pode ser obtido minimizando um critério que penaliza a quantidade de funções em relação a  $p$  [Fu e Dumont, 1993], isto é :

$$\min_p \sum_{i=1}^{\infty} i c_i(p) \quad (2.34)$$

o que tende a fazer com que a série de funções tenha uma convergência mais rápida.

#### 2.2.4 Escolha do número $n$ de funções da série

Na aproximação ideal da resposta ao impulso do processo, infinitas funções devem ser utilizadas no modelo SFO. Entretanto, existe sempre um número inteiro  $n^*$  finito e um real  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| h(k) - \sum_{i=1}^{n^*} c_i l_i(k) \right| < \epsilon \quad (2.35)$$

---

<sup>3</sup>Para processos com ação integral, o sinal utilizado é a resposta ao impulso filtrada por  $\Delta$ .

Para valores de  $n > n^*$ , os coeficientes  $c_n$  tendem a zero e podem ser truncados, portanto, a resposta ao impulso do processo é aproximada como uma soma de  $n$  funções.

O número mínimo necessário de funções para a série depende da escolha do pólo  $p$ , da presença de atraso de transporte e da complexidade do processo. Estes fatores, isto é, quando  $p$  está distante da dinâmica dominante ou no caso de processos de ordem e atraso de transporte elevados, tendem a aumentar o número de funções necessárias para a modelagem do processos.

Na literatura observa-se que, na maioria dos casos, a escolha de 5 a 10 funções para a série ortonormal permite uma boa aproximação da resposta ao impulso do processo [Zervos e Dumont, 1988]. Através de resultados de simulação, tem-se verificado que para processos de baixa ordem, sem atraso de transporte e quando a escolha do pólo  $p$  é feita segundo as diretrizes descritas anteriormente, obtém-se bons resultados na modelagem de processos com a utilização de valores de  $n$  menores do que 5.

### 2.2.5 Determinação da matriz $c$ via resposta ao impulso do processo

A partir de um conhecimento *a priori* da resposta ao impulso do processo e utilizando a equação (2.2), os coeficientes da matriz  $c$  podem ser calculados através da seguinte equação :

$$c_i = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \Phi_i(q^{-1}) \delta(k), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

onde  $\delta(k)$  é o impulso unitário.

#### 2.2.5.1 Exemplo 2.1 :

Neste exemplo ilustra-se o cálculo da matriz  $c$  para 2 valores do pólo  $p$ , na modelagem de um processo cuja resposta ao impulso do processo é conhecida.

Seja um processo descrito por :

$$G(q^{-1}) = \frac{1.25q^{-1} + 0.65q^{-2}}{1 - 0.6q^{-1}} \quad (2.37)$$

A resposta ao impulso deste processo torna-se desprezível após aproximadamente 15 a 20 elementos e seus valores são definidos por  $h(k)$  para  $k = 0, \dots$ .

O equivalente deste modelo, utilizando uma série de 10 funções ortonormais<sup>4</sup> e com valores para o pólo  $p$  iguais a 0.35 e 0.6, é obtido a seguir. O valor de  $p = 0.35$  é obtido através minimização do erro de truncamento do modelo dado pela equação (2.33). O valor de  $p = 0.6$  foi escolhido por ser este o pólo de malha aberta do processo.

As matrizes  $\mathbf{c}$  do modelo SFO, calculadas considerando estes dois valores para  $p$  e a resposta ao impulso  $h(k)$ , são dadas por :

Para  $p = 0.35$

$$\mathbf{c} = [ 1.752 \ 1.231 \ 0.153 \ 0.131 \ 0.013 \ 0.014 \ 0.001 \ 0.002 \ 0 \ 0 ]^T$$

Para  $p = 0.6$

$$\mathbf{c} = [ 2.05 \ 0.52 \ -0.312 \ 0.187 \ -0.112 \ 0.067 \ -0.04 \ 0.024 \ -0.015 \ 0.009 ]^T$$

Na figura 2.2, tem-se a resposta ao impulso do processo real em comparação com a aproximação desta pelos modelos SFO, utilizando os dois valores para a seleção de  $p$ . Pode-se observar que as curvas se sobrepõem e portanto a aproximação da resposta ao impulso é bastante satisfatória em todos os dois modelos.

Neste exemplo, a seleção de  $p$  através do algoritmo de minimização do erro de truncamento ( $p = 0.35$ ) permitiu a obtenção de um modelo onde a série de funções tende mais rapidamente a zero que a escolha de  $p$  dada por 0.6. De fato, resultados semelhantes aos da figura 2.2 podem ser obtidos com um modelo SFO com  $n \approx 5$  para  $p = 0.35$  e  $n \approx 8$  para  $p = 0.6$ .

---

<sup>4</sup>A utilização de 10 ( $n = 10$ ) funções ortonormais será adotada em todos os exemplos deste capítulo, mesmo quando valores de  $n$  menores forem suficientes para a modelagem do processo. Este efeito pode ser constatado quando os últimos coeficientes da matriz  $\mathbf{c}$  assumem valores próximos de zero

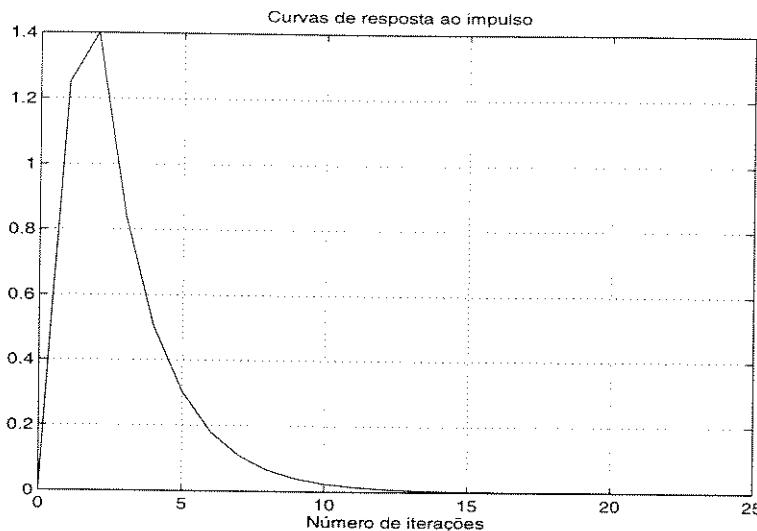


Figura 2.2: Curvas de resposta ao impulso e modelos SFO, Legenda : linha contínua, processo real; linha tracejada,  $p = 0.35$  e linha traço-ponto,  $p = 0.6$

## 2.2.6 Estimação dos coeficientes da matriz $c$

Seja o seguinte processo :

$$y_m(k) = G(q^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (2.38)$$

onde  $y_m(k)$  é o sinal de saída medido do processo no instante  $k$  e  $\xi(k)$  é o ruído de medida.

Pela equação (2.11), tem-se que um modelo para este processo é dado por :

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) \quad (2.39)$$

ou

$$y(k) = \theta^T \varphi(k) \quad (2.40)$$

onde :

$$\varphi(k) = [ l_1(k) \dots l_n(k) ]^T$$

com  $l_i(k)$  sendo calculado em função de  $u(k)$ , e

$$\theta = [ c_1 \dots c_n ]^T$$

A identificação paramétrica do modelo (2.39) vem sendo descrita por diversos autores na literatura, por exemplo, [Zervos e Dumont, 1988] [Makila, 1990] [Wahlberg, 1991b] [Gunnarsson e Wahlberg, 1991] [Dumont et al., 1993] [Olivier, 1994] [den Hof et al., 1995]. Estes trabalhos destacam alguns aspectos positivos da utilização de séries ortonormais para identificação, em relação a algumas abordagens de modelagem presentes na literatura. Alguns destes aspectos são relatados a seguir.

Em relação a modelos CARIMA, tem-se que, devido à representação em séries ortonormais (modelo não estruturado), não é necessário o conhecimento sobre a ordem e o atraso do processo na identificação dos parâmetros do modelo (2.40). Variando-se o número de parâmetros  $n$  do modelo, os coeficientes de mais baixa ordem da série permanecem praticamente constantes [Zervos e Dumont, 1988]. Esta característica facilita um ajuste *on line* no número de parâmetros do modelo durante a identificação. Em modelos tipo CARIMA, um ajuste na ordem acarreta uma modificação em todos os parâmetros do modelo, o que leva a transitórios significativos na identificação destes parâmetros.

Em relação a modelos de resposta ao impulso, a utilização de modelos SFO reduz o erro médio quadrado MSE (*Mean Square Error*) de estimativa [Gunnarsson e Wahlberg, 1991]. Além disso, a diminuição do número de parâmetros a identificar melhora a qualidade do estimador obtido ( menor variância do estimador ).

### 2.2.6.1 Exemplo 2.2 :

Neste exemplo ilustra-se a identificação dos parâmetros da matriz  $c$  utilizando um algoritmo do tipo Mínimos Quadrados Recursivo e 3 valores para a seleção do pólo  $p$  do modelo SFO.

Seja um processo dado por :

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.2q^{-2}}{1 - 1.1q^{-1} + 0.4625q^{-2}} \quad (2.41)$$

onde os pólos de malha aberta são iguais a :  $0.55 \pm j0.4$

O modelo SFO do processo é definido por uma série de 10 funções. São selecionados três valores para o pólo  $p$  na identificação do processo  $G(q^{-1})$ , a saber :  $p = 0.3$ ,  $p = 0.55 \pm j0.4$  e  $p = 0.7 \pm j0.2$ . O par de pólos  $p = 0.55 \pm j0.4$  é escolhido igual à dinâmica do processo em malha aberta. As outras seleções são efetuadas para ilustrar o comportamento do algoritmo RLS para valores de  $p$  bem diferentes do pólo dominante do processo.

As matrizes  $A$  e  $b$  do modelo, para cada valor de  $p$ , são obtidas através da equação (2.18), e a matriz  $c$  é identificada aplicando ao processo um sinal de entrada aleatório com média nula e variância 1. Para cada valor do pólo  $p$  obtém-se uma matriz  $c$  diferente, que é dada por :

Para  $p = 0.3$  :

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 1.4209 \\ 1.3122 \\ 0.1486 \\ -0.3432 \\ -0.2015 \\ 0.0163 \\ 0.0703 \\ 0.0267 \\ -0.0099 \\ -0.0128 \end{bmatrix}$$

Para  $p = 0.55 \pm j0.4$  :

$$\hat{c} = [ 1.5562 \ 1.2272 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T$$

Para  $p = 0.7 \pm j0.2$  :

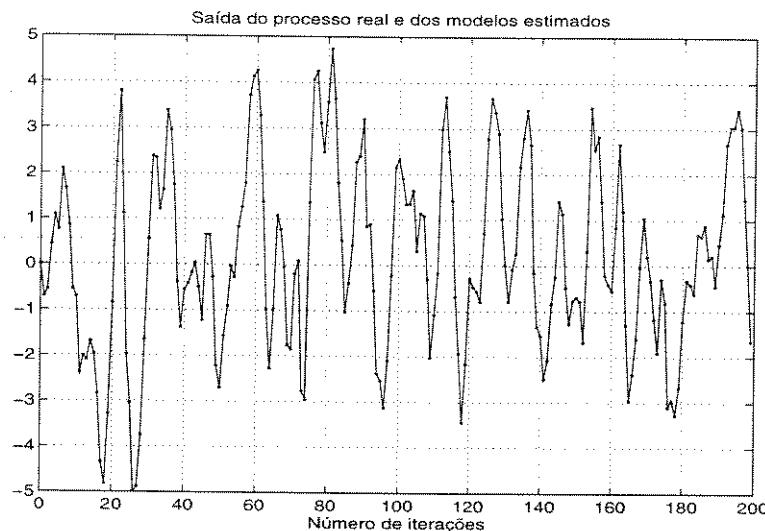


Figura 2.3: Saída do processo real e dos modelos identificados, Legenda : linha contínua, processo real; linha tracejada,  $p = 0.3$ ; linha traço-ponto,  $p = 0.55 \pm j0.4$  e pontilhada,  $p = 0.7 \pm j0.2$

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 1.8539 \\ 0.1805 \\ -0.4355 \\ 0.4411 \\ -0.2625 \\ 0.02 \\ 0.0273 \\ -0.0508 \\ 0.0339 \\ -0.0072 \end{bmatrix}$$

Na figura 2.3, são apresentadas a saída do processo real juntamente com as saídas dos 3 modelos SFO identificados, para uma entrada aleatória distinta da que gerou os parâmetros identificados. Na figura 2.4, são apresentados os graficos de resposta em frequência para o processo real e todos os modelos identificados. Pode-se observar que as curvas praticamente se sobrepõem em todos os casos, ilustrando que a identificação do processo é satisfatória independente da escolha do polo  $p$ .

O erro absoluto médio entre a saída do processo real e a saída dos modelos em função do modelo SFO identificado é dado por : 0.0036, para  $p = 0.3$ ;

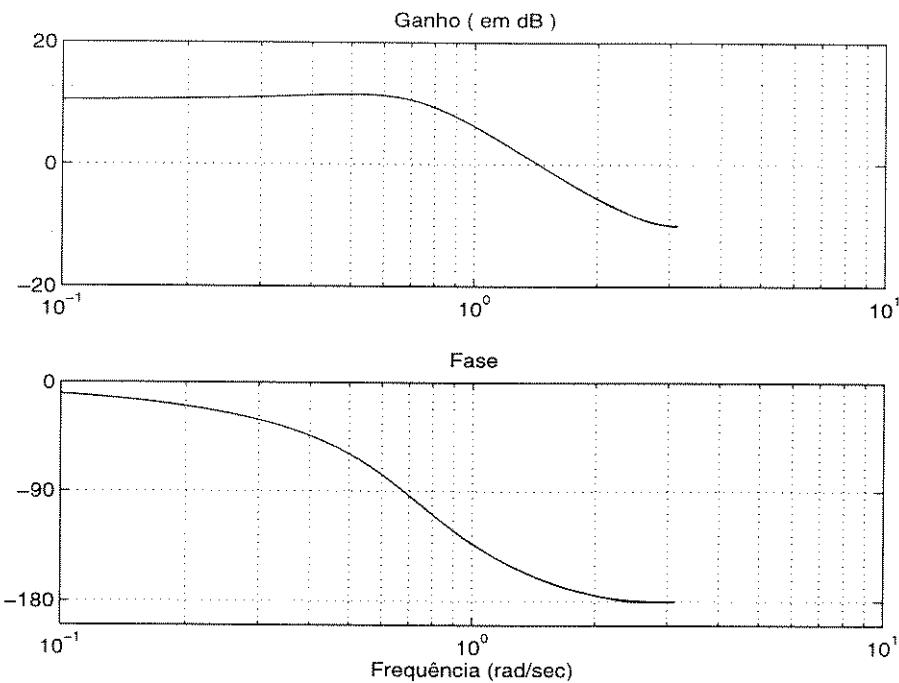


Figura 2.4: Curvas de resposta em frequência do processo real e dos modelos identificados, Legenda : linha contínua, processo real; linha tracejada,  $p = 0.3$ ; linha traço-ponto,  $p = 0.55 \pm j0.4$  e pontilhada,  $p = 0.7 \pm j0.2$

$2.6071 \times 10^{-16}$ , para  $p = 0.55 \pm j0.4$  e  $0.0055$ , para  $p = 0.7 \pm j0.2$ . Pode-se observar que este erro é bem pequeno em relação à ordem de grandeza do sinal de saída para todos os valores de  $p$  selecionados. Entretanto, tem-se que, para o modelo cujo pólo é  $p = 0.55 \pm j0.4$ , os elementos de ordem mais elevada da série tendem mais rapidamente para zero que nos outros modelos. Para este valor de  $p$ , alguns coeficientes de ordem mais elevada (maior que 2) da série podem ser eliminados sem prejuízo na precisão da identificação de  $\mathbf{c}$ . Nos outros casos, há um erro de truncamento no modelo devido ao fato da série não ter收敛ido totalmente para zero após 10 coeficientes. Este erro, apesar de pequeno, ocasiona um erro na modelagem do processo. Portanto, para um dado valor de  $p$ , a seleção de  $n$  representa um compromisso entre a precisão e o número de coeficientes do modelo.

## 2.3 Modelagem de Processos com Incerteza Estruturada

### 2.3.1 Representação da incerteza

O modelo do processo descrito a seguir contém incertezas do tipo estruturada, isto é, incertezas a respeito dos valores dos parâmetros do modelo. Assim sendo, o modelo SFO com incertezas estruturadas é obtido através da definição de limites de incerteza (ou de um intervalo de pertinência) para os coeficientes da série de funções ortonormais. Estes limites são dados por  $c_{i,min} \leq c_i(\varepsilon_i) \leq c_{i,max}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  onde  $\varepsilon_i$  representa a incerteza em cada coeficiente. Desta forma, o modelo (2.10) contendo incertezas estruturadas é dado por :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i(\varepsilon_i) l_i(k) \quad (2.42)$$

Este modelo, reescrito em uma forma vetorial, é igual a :

$$y(k) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathbf{l}(k) \quad (2.43)$$

onde a matriz  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  é dada por :

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \bar{\mathbf{c}} + \delta\mathbf{c}(\varepsilon) \quad (2.44)$$

com :

$$\mathbf{c} = [ c_1(\varepsilon_1) \ c_2(\varepsilon_2) \ \dots \ c_n(\varepsilon_n) ]^T \quad (2.45)$$

$$\bar{\mathbf{c}} = [ \bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \dots \ \bar{c}_n ]^T \quad (2.46)$$

$$\delta\mathbf{c}(\varepsilon) = [ \varepsilon_1 \delta c_1 \ \varepsilon_2 \delta c_2 \ \dots \ \varepsilon_n \delta c_n ]^T \quad (2.47)$$

$$\varepsilon = [ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_n ]^T \quad (2.48)$$

O vetor  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \in \Omega$ ) contém a incerteza em cada parâmetro do modelo e  $\Omega$  é definido como sendo um conjunto de vetores cujos elementos estão dentro do limite  $[-1, 1]$ .  $\bar{c}_i$  e  $\delta c_i$  representam o valor médio e o limite do espaço de incerteza de cada parâmetro  $c_i(\varepsilon_i)$ , respectivamente.

Utilizando a propriedade de recursividade da base (2.3) quando  $p_i = p \forall i$ , o modelo baseado em séries de funções ortonormais com incertezas estruturadas é descrito na seguinte forma :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(k+1) &= A \mathbf{l}(k) + \mathbf{b} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathbf{l}(k) \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde as matrizes  $A$  e  $\mathbf{b}$  são calculadas através da equação (2.18).

### 2.3.2 Processos com ação integral

Supondo que todos os modelos contidos dentro do espaço de incertezas do processo possuem ação integral e utilizando um raciocínio análogo ao desenvolvido na seção 2.2.2, o modelo SFO para este caso é dado por :

$$y(k) = y(k-1) + \sum_{i=1}^n c_i(\varepsilon) l_i(k) \quad (2.50)$$

Este modelo, em representação de estados, é dado por :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(k+1) &= A \mathbf{l}(k) + \mathbf{b} u(k) \\ y(k) &= y(k-1) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathbf{l}(k) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Os parâmetros do modelo SFO (2.49) e (2.51) são : o pólo  $p$ , o número  $n$  de funções da série e a matriz  $\mathbf{c}$ . A seleção de  $p$  e  $n$  é feita analogamente ao caso de modelos SFO sem parâmetros incertos. A obtenção da matriz  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  utilizando uma família de respostas ao impulso do processo incerto ou através de algoritmos de identificação robusta, é discutida a seguir.

### 2.3.3 Cálculo da incerteza paramétrica do modelo SFO

A partir do conjunto de respostas ao impulso do processo formado pela incerteza nos parâmetros, os limites de incerteza nos coeficientes da matriz  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  são calculados como mostrado a seguir.

Seja  $\{h(k)\}$  o conjunto de respostas ao impulso do processo incerto definido por :

$$\{h(k)\} \triangleq \{ \bar{h}(k) + \varepsilon_h(k)\delta h(k) : |\varepsilon_h(k)| \leq 1 \} \quad (2.52)$$

onde :  $\bar{h}(k)$  é o valor médio de cada coeficiente da resposta ao impulso,  $\delta h(k)$  é a máxima variação em torno do valor médio  $\bar{h}(k)$  e  $\varepsilon_h(k)$  representa a incerteza em cada coeficiente  $h(k)$ , com  $\varepsilon_h(k) \in [-1, 1]$ .

A partir da equação (2.36), o conjunto de coeficientes da série ortonormal com incertezas, definido como sendo  $\{c_i\}$ , é dado por :

$$\{c_i\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{h(k)\} \Phi_i(q^{-1}) \delta(k), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.53)$$

Desenvolvendo  $\{h(k)\}$  tem-se que :

$$\{c_i\} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \{\varepsilon_h(k)\delta h(k)\} \right] \Phi_i(q^{-1}) \delta(k), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

Como  $\varepsilon_h(k)$  está contido dentro do intervalo  $[-1, 1]$ , resulta em :

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta h(k) \Phi_i(q^{-1}) \delta(k) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \{\varepsilon_h(k)\delta h(k)\} \Phi_i(q^{-1}) \delta(k) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta h(k) \Phi_i(q^{-1}) \delta(k), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.55)$$

Como cada coeficiente  $c_i$  de  $\{c_i\}$  é dado por :

$$c_i(\varepsilon_i) = \bar{c}_i + \varepsilon_i \delta c_i \quad \text{com} \quad |\varepsilon_i| \leq 1 \quad (2.56)$$

tem-se que :

$$\bar{c}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}(k) \Phi_i(q^{-1}) \delta(k) \quad (2.57)$$

$$\delta c_i = \sum_{k=0}^{\infty} \delta h(k) \Phi_i(q^{-1}) \delta(k) \quad (2.58)$$

Assim, os coeficientes do modelo SFO com incerteza estruturada podem ser calculados a partir da família de respostas ao impulso do processo.

No caso de processos com ação integral, os parâmetros do vetor  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  são obtidos filtrando a família de respostas ao impulso do processo por  $\Delta$ .

### 2.3.3.1 Exemplo 2.3 :

Neste exemplo ilustra-se o cálculo da matriz  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  do modelo SFO, para 2 valores do pólo  $p$  e supondo um conhecimento *a priori* das incertezas sobre a resposta ao impulso do processo.

Seja o processo descrito pela equação (2.37), descrita no exemplo 2.1, cuja resposta ao impulso é dada por  $h(k)$ ,  $k = 0, \dots, 20$ . Seja a resposta ao impulso deste processo contendo incertezas dadas por  $h(k, \varepsilon_h) = \bar{h}(k) + \varepsilon_h(k) \delta h(k)$  com  $\bar{h}(k) = h(k)$  e  $\delta h(k) = 0.05|h(k)|$ .

O modelo utilizando uma série de 10 funções ortonormais com valores para  $p$  de 0.35 e 0.6 é calculado a seguir. Os valores para  $p$  são obtidos como mostrado no exemplo 2.1, utilizando a resposta ao impulso média  $\bar{h}(k) = h(k)$ .

As matrizes  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  do modelo SFO calculadas em função da resposta ao impulso incerta  $h(k, \varepsilon_h)$  do processo. São dadas por :

Para  $p = 0.35$

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1.752 + \varepsilon_1 0.088 \\ 1.231 + \varepsilon_2 0.062 \\ 0.153 + \varepsilon_3 0.008 \\ 0.131 + \varepsilon_4 0.007 \\ 0.013 + \varepsilon_5 0.001 \\ 0.014 + \varepsilon_6 0.001 \\ 0.001 + \varepsilon_7 0 \\ 0.002 + \varepsilon_8 0 \\ 0 + \varepsilon_9 0 \\ 0 + \varepsilon_{10} 0 \end{bmatrix}$$

Para  $p = 0.6$

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2.05 + \varepsilon_1 0.103 \\ 0.52 + \varepsilon_2 0.026 \\ -0.312 + \varepsilon_3 0.016 \\ 0.187 + \varepsilon_4 0.009 \\ -0.112 + \varepsilon_5 0.006 \\ 0.067 + \varepsilon_6 0.003 \\ -0.04 + \varepsilon_7 0.002 \\ 0.024 + \varepsilon_8 0.001 \\ -0.015 + \varepsilon_9 0.001 \\ 0.009 + \varepsilon_{10} 0 \end{bmatrix}$$

Através dos valores identificados para  $\mathbf{c}(\varepsilon)$ , pode-se observar que através da seleção adequada de um valor para  $p$  obtém-se um modelo cuja série de funções tende mais rapidamente a zero, permitindo a utilização de um menor número de parâmetros. Este resultado é semelhante ao obtido no exemplo 2.1.

### 2.3.4 Identificação da incerteza paramétrica do modelo SFO

A seguir, mostra-se que métodos de identificação robusta baseados na abordagem *Unknown-But-Bounded-Error* (UBBE), existentes na literatura, podem ser utilizados na estimativa da incerteza paramétrica do modelo SFO.

A formulação do problema de identificação robusta UBBE é mostrada a seguir.

Seja o modelo SFO do processo (2.10), reescrito a seguir :

$$y(k) = \theta^T \varphi(k) \quad (2.59)$$

O erro da saída deste modelo em relação à saída real do processo em dado instante de tempo  $k$  e para um conjunto de parâmetros estimados  $\theta$ , é definido por :

$$\mathcal{E}(k, \theta) = y_m(k) - y(k) \quad (2.60)$$

onde  $y_m(k)$  é a saída medida do processo real e  $y(k)$  é a saída do modelo para um dado vetor de parâmetros  $\theta$ .

Suponha que  $\mathcal{E}(k, \theta)$  satisfaça a :

$$\mathcal{E}(k, \theta) \in [\mathcal{E}(k)_{min}, \mathcal{E}(k)_{max}] \quad (2.61)$$

onde  $\mathcal{E}(k)_{min}$  e  $\mathcal{E}(k)_{max}$  são limites conhecidos para o erro de modelagem.

Dado um conjunto inicial  $S^*$ , definido de forma a conter todos os possíveis valores para os parâmetros  $\theta$ , o problema de identificação robusta consiste em encontrar um sub-conjunto de  $S^*$ , dado por  $S$ , contendo valores para  $\theta$  que sejam consistentes com as equações (2.59), (2.60) e (2.61). O resultado deste problema é a identificação de um conjunto  $S$  de valores admissíveis para os parâmetros  $\theta$  do modelo (2.59). Em geral, este conjunto  $S$  é aproximado por formas geométricas, como elipsóides e ortotopos [Walter e Piet-Lahanier, 1990] [Favier e Arruda, 1996].

Assim, os valores mínimos e máximos para a incerteza nos coeficientes do vetor  $c$  do modelo SFO podem ser identificados utilizando-se métodos de identificação robusta, como mostrado a seguir.

Seja  $m$  o conjunto de medidas disponíveis do processo, isto é, tem-se que  $y_m(k)$ ,  $k = 1, \dots, m$  e  $u(k)$ ,  $k = 1, \dots, m$  são conhecidos. Utilizando os modelos (2.29) ou (2.32), tem-se que a partir de  $u(k)$ , obtém-se  $I(k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Portanto, utilizando o conjunto de medidas disponíveis e supondo uma representação exata do politopo formado pelo conjunto  $S$  ou uma aproximação deste politopo através de ortotopos, tem-se que  $S$  é dado por :

$$S = \{ \mathbf{c}(\varepsilon) : y_m(k) - \mathcal{E}(k) \leq \mathbf{c}^T(\varepsilon)\mathbf{l}(k) \leq y_m(k) + \mathcal{E}(k), k = 1, \dots, m \} \quad (2.62)$$

onde  $\mathbf{c}(\varepsilon) \forall \varepsilon$  representa todos os vetores  $\mathbf{c}$  tal que  $\mathbf{c} \in S$ .

Baseado nesta definição do conjunto  $S$ , tem-se que a obtenção dos limites de incerteza dos parâmetros de  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  pode ser feita utilizando diversos algoritmos de identificação robusta descritos na literatura, como por exemplo, [Milanese e Belforte, 1982] [Norton, 1990] [Messaoud e Favier, 1994] [da Silva, 1995].

A partir de  $S$ , e consequentemente de  $\mathbf{c}(\varepsilon)$ , obtém-se o modelo SFO com incertezas estruturadas dado por :

$$y(k) = \mathbf{c}^T(\varepsilon)\mathbf{l}(k) \quad (2.63)$$

---

As características da identificação paramétrica da matriz  $\mathbf{c}$  citadas na seção 2.2.6 podem ser aplicadas ao caso da identificação robusta discutida acima. Uma vez que o modelo SFO é não estruturado, não é necessário definir *a priori* a ordem e o atraso do processo, o que representa uma vantagem em relação a modelos tipo CARIMA. Além disto, em relação à utilização de modelos de resposta ao impulso, a diminuição do número de parâmetros a identificar reduz a complexidade do algoritmo de identificação robusta.

## 2.4 A Previsão da Saída $j$ Passos a Frente

Nesta seção, são obtidas as equações da previsão da saída do processo  $j$  passos a frente utilizando os modelos SFO descritos nas seções anteriores.

Inicialmente, é abordado o caso da previsão da saída para o modelo SFO (2.29) e para o modelo SFO para processos com ação integral (2.32). Em seguida, descreve-se a previsão da saída  $j$  passos a frente para os modelos SFO com incerteza estruturada dados pelas equações (2.49) e (2.51).

### 2.4.1 Previsão da saída para o modelo SFO

Seja o modelo SFO dado pela equação (2.29) que pode ser reescrito da seguinte forma :

$$\begin{aligned}\Delta l(k+1) &= A \Delta l(k) + \mathbf{b} \Delta u(k) \\ y(k) &= y(k-1) + \mathbf{c}^T \Delta l(k)\end{aligned}\quad (2.64)$$

A previsão da saída  $j$  passos a frente é dada por :

$$\hat{y}(k+j/k) = \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T \Delta l(k+j) \quad (2.65)$$

Pela substituição de  $\Delta l(k+j)$  obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T \{ A \Delta l(k+j-1) + \\ &\quad \mathbf{b} \Delta u(k+j-1/k) \}\end{aligned}\quad (2.66)$$

onde  $\Delta u(k+j-1/k)$  é a variação do sinal de controle em  $k+j-1$ , calculada com a informação disponível em  $k$ .

Finalmente, através de sucessivas substituições de  $\Delta l(.)$  e supondo que  $\Delta u(k+j/k) = 0$ ,  $\forall j \geq N_u$ , obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T A^j \Delta l(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} A^{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.67)$$

onde  $A^i = 0$  para  $i < 0$  e  $\mathbf{l}(k) = 0$  para  $k \leq 0$ .

Substituindo  $\hat{y}(k+j-1/k)$ , obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-2/k) + \mathbf{c}^T (A^{j-1} + A^j) \Delta \mathbf{l}(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} (A^{j-1-m} + A^{j-m}) \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.68)$$

Repetindo sucessivamente o mesmo procedimento, obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) &= y(k) + \mathbf{c}^T (K_j - I) \Delta \mathbf{l}(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.69)$$

onde  $K_j = \sum_{i=0}^j A^i$ , com  $K_j = 0$  para  $j < 0$  e  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Na equação de previsão da saída do processo (2.69), pode-se distinguir dois termos : um termo que é função da informação passada do processo, denominado previsão da saída livre, e outro termo que é função da informação futura a respeito do processo, denominado previsão da saída forçada<sup>5</sup>. Portanto, a previsão da saída pode ser descrita como a seguir :

$$\hat{y}(k+j/k) = \hat{y}_f(k+j/k) + \hat{y}_l(k+j/k) \quad (2.70)$$

onde :

$$\hat{y}_l(k+j/k) = y(k) + \mathbf{c}^T (K_j - I) \Delta \mathbf{l}(k) \quad (2.71)$$

e

$$\hat{y}_f(k+j/k) = \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k) \quad (2.72)$$

---

<sup>5</sup>Esta decomposição da saída em dois termos é uma característica da lei de controle de algoritmos MBPC

$\hat{y}_l$  é a previsão da saída livre e  $\hat{y}_f$  é a previsão da saída forçada.

#### 2.4.1.1 Processos com ação integral

Para processos com ação integral, o sinal da saída  $j$  passos a frente é obtido utilizando o modelo (2.32). Assim, tem-se que  $\hat{y}(k+j/k)$  é dada por :

$$\hat{y}(k+j/k) = \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k+j) \quad (2.73)$$

Pela substituição de  $\mathbf{l}(k+j)$  obtém-se :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T \{ A \mathbf{l}(k+j-1) + \\ &\quad \mathbf{b} u(k+j-1/k) \} \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde  $u(k+j-1/k)$  é o sinal de controle em  $k+j-1$ , calculado com a informação disponível em  $k$ .

Esta equação também pode ser escrita como a seguir :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T \{ A \mathbf{l}(k+j-1) + \\ &\quad \mathbf{b} \left( u(k-1) + \sum_{m=1}^j \Delta u(k+m-1) \right) \} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Através de substituições sucessivas de  $\mathbf{l}(k+j)$  e supondo que  $\Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u$ , obtém-se :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j/k) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T A^j \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T K_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) + \\ &\quad \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Substituindo  $\hat{y}(k+j-1/k)$ , obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) = & \hat{y}(k+j-2/k) + \mathbf{c}^T A^{j-1} \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T K_{j-2} \mathbf{b} u(k-1) + \\ & \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-1-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k) + \mathbf{c}^T A^j \mathbf{l}(k) + \\ & \mathbf{c}^T K_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) + \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.77)$$

Repetindo sucessivamente o mesmo procedimento, obtém-se :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k) = & y(k) + \mathbf{c}^T (K_j - I) \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T \mathcal{K}_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) + \\ & \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} \mathcal{K}_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.78)$$

onde  $\mathcal{K}_j = \sum_{i=0}^j K_i$ , com  $\mathcal{K}_j = 0$  para  $j < 0$  e  $I$  é a matriz identidade.

Analogamente ao realizado para a previsão da saída (2.69), pode-se decompôr a saída prevista (2.78) em dois termos, dados por :

$$\hat{y}(k+j/k) = \hat{y}_f(k+j/k) + \hat{y}_l(k+j/k) \quad (2.79)$$

onde :

$$\begin{aligned}\hat{y}_l(k+j/k) = & y(k) + \mathbf{c}^T (K_j - I) \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T \mathcal{K}_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) \\ & \quad (2.80)\end{aligned}$$

e

$$\hat{y}_f(k+j/k) = \mathbf{c}^T \sum_{m=1}^{N_u} \mathcal{K}_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k) \quad (2.81)$$

#### 2.4.1.2 Representação matricial da previsão da saída

As previsões da saída, calculadas através das equações (2.70) e (2.79) e para valores de  $j$  entre  $N_1$  e  $N_y$ , podem ser escritas na forma matricial mostrada a seguir.

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l \quad (2.82)$$

onde :

$$\hat{\mathbf{y}} = [ \hat{y}(k + N_1/k) \ \hat{y}(k + N_1 + 1/k) \ \dots \ \hat{y}(k + N_y/k) ]^T \quad (2.83)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1+1} & \dots & g_{N_1-N_u+1} \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \dots & g_{N_1-N_u+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_y} & g_{N_y-1} & \dots & g_{N_y-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\Delta\mathbf{u} = [ \Delta u(k/k) \ \Delta u(k+1/k) \ \dots \ \Delta u(k+N_u-1/k) ]^T \quad (2.85)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_l = [ \hat{y}_l(k + N_1/k) \ \hat{y}_l(k + N_1 + 1/k) \ \dots \ \hat{y}_l(k + N_y/k) ]^T \quad (2.86)$$

com :

$$g_i = \mathbf{c}^T K_{i-1} \mathbf{b} \quad (2.87)$$

para o modelo SFO, e

$$g_i = \mathbf{c}^T \mathcal{K}_{i-1} \mathbf{b} \quad (2.88)$$

para o modelo SFO com ação integral.

Os coeficientes  $g_i$  da equação (2.87) correspondem aos coeficientes da resposta ao degrau do modelo SFO.

### 2.4.2 Previsão da saída para o modelo SFO com incertezas estruturadas

A equação de previsão da saída  $j$  passos a frente para o modelo SFO com incerteza estruturada é obtida analogamente ao desenvolvido na seção anterior.

Seja o modelo SFO com incertezas estruturadas dado pela equação (2.49). Este modelo pode ser reescrito na seguinte forma :

$$\begin{aligned}\Delta l(k+1) &= A \Delta l(k) + \mathbf{b} \Delta u(k) \\ y(k) &= y(k-1) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \Delta l(k)\end{aligned}\quad (2.89)$$

Por analogia com o modelo (2.64), a previsão da saída  $j$  passos a frente é dada pelas equações (2.67), com o vetor  $\mathbf{c}$  substituído por  $\mathbf{c}(\varepsilon)$ , isto é :

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) &= \hat{y}(k+j-1/k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) A^j \Delta l(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} A^{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.90)$$

ou

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) &= y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) (K_j - I) \Delta l(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k)\end{aligned}\quad (2.91)$$

Na equação de previsão (2.91), pode-se distinguir os termos da previsão da saída livre e da previsão da saída forçada, que são dados por :

$$\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) = \hat{y}_f(k+j/k, \varepsilon) + \hat{y}_l(k+j/k, \varepsilon) \quad (2.92)$$

onde :

$$\hat{y}_l(k+j/k, \varepsilon) = y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) (K_j - I) \Delta l(k) \quad (2.93)$$

e

$$\hat{y}_f(k + j/k, \varepsilon) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \quad (2.94)$$

#### 2.4.2.1 Processos com ação integral

Para processos com ação integral, a previsão da saída  $j$  passos a frente é obtida utilizando o modelo (2.51), e é dada pela equação (2.76) através da substituição do vetor  $\mathbf{c}$  por  $\mathbf{c}(\varepsilon)$ , isto é :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + j/k, \varepsilon) &= \hat{y}(k + j - 1/k, \varepsilon) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) A^j \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) K_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) + \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \} \end{aligned} \quad (2.95)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + j/k, \varepsilon) &= y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I) \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathcal{K}_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} \mathcal{K}_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \end{aligned} \quad (2.96)$$

A decomposição da previsão da saída (2.96) em dois termos é dada por :

$$\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) = \hat{y}_f(k + j/k, \varepsilon) + \hat{y}_l(k + j/k, \varepsilon) \quad (2.97)$$

onde :

$$\hat{y}_l(k + j/k, \varepsilon) = y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I) \mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathcal{K}_{j-1} \mathbf{b} u(k-1) \quad (2.98)$$

e

$$\hat{y}_f(k + j/k, \varepsilon) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} \mathcal{K}_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \quad (2.99)$$

### 2.4.2.2 Conjunto de previsões da saída

O conjunto de todas as previsões da saída  $\hat{y}(k+j/k, \varepsilon)$ , calculadas a partir da incerteza estruturada do modelo SFO, é definido a seguir :

$$\hat{\mathcal{Y}}(k+j/k, \Omega) \triangleq \{ \hat{y}(k+j/k, \varepsilon) : \varepsilon \in \Omega \} \quad (2.100)$$

Supondo que o processo é invariante no tempo e está contido na incerteza estruturada do modelo mostra-se, a seguir, que o conjunto de previsões da saída um passo a frente contém o valor medido da saída em  $k+1$ .

Seja a saída real do processo dada por :

$$y_m(k) = \mathbf{c}_r^T \mathbf{l}(k) \quad (2.101)$$

onde  $\mathbf{c}_r$  são os parâmetros do processo.

Seja o modelo do processo com incertezas estruturadas dado por :

$$y(k, \varepsilon) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathbf{l}(k) \quad (2.102)$$

com  $\mathbf{c}_r \in \{ \mathbf{c}(\varepsilon) : \forall \varepsilon \in \Omega \}$ .

O conjunto de previsões da saída um passo a frente é dado por :

$$\hat{\mathcal{Y}}(k+1/k, \Omega) \triangleq \{ \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathbf{l}(k+1) : \varepsilon \in \Omega \} \quad (2.103)$$

Sabendo que :

$$y_m(k+1) = \mathbf{c}_r^T \mathbf{l}(k+1) \quad (2.104)$$

e que  $\mathbf{l}(k+1)$  é calculado em função da informação disponível até o instante  $k$ , e dado que  $\mathbf{c}_r$  assume um valor do conjunto  $\{ \mathbf{c}(\varepsilon) : \forall \varepsilon \in \Omega \}$ , tem-se :

$$y_m(k+1) \in \hat{\mathcal{Y}}(k+1/k, \Omega) \quad (2.105)$$

### 2.4.2.3 Representação matricial da previsão da saída

O conjunto de previsões da saída, calculado através das equações (2.92) e (2.97) e para valores de  $j$  entre  $N_1$  até  $N_y$ , pode ser escrito na forma matricial mostrada a seguir.

$$\hat{\mathbf{y}}(\varepsilon) = G(\varepsilon)\Delta\mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) \quad (2.106)$$

onde :

$$\hat{\mathbf{y}}(\varepsilon) = [\hat{y}(k + N_1/k, \varepsilon) \quad \hat{y}(k + N_1 + 1/k, \varepsilon) \quad \dots \quad \hat{y}(k + N_y/k, \varepsilon)]^T \quad (2.107)$$

$$G(\varepsilon) = \left[ \begin{array}{cccc} g_{N_1}(\varepsilon) & g_{N_1-1}(\varepsilon) & \dots & g_{N_1-N_u+1}(\varepsilon) \\ g_{N_1+1}(\varepsilon) & g_{N_1}(\varepsilon) & \dots & g_{N_1-N_u+2}(\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_y}(\varepsilon) & g_{N_y-1}(\varepsilon) & \dots & g_{N_y-N_u}(\varepsilon) \end{array} \right] \quad (2.108)$$

$$\Delta\mathbf{u} = [\Delta u(k/k) \quad \Delta u(k + 1/k) \quad \dots \quad \Delta u(k + N_u - 1/k)]^T \quad (2.109)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) = [\hat{y}_l(k + N_1/k, \varepsilon) \quad \hat{y}_l(k + N_1 + 1/k, \varepsilon) \quad \dots \quad \hat{y}_l(k + N_y/k, \varepsilon)]^T \quad (2.110)$$

com :

$$g_i(\varepsilon) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) K_{i-1} \mathbf{b} \quad (2.111)$$

para o modelo SFO, e

$$g_i(\varepsilon) = \mathbf{c}^T(\varepsilon) \mathcal{K}_{i-1} \mathbf{b} \quad (2.112)$$

para o modelo SFO com ação integral.

Destas equações, pode-se verificar que a previsão da saída do modelo SFO para processos incertos é afim em relação à incerteza paramétrica. Esta característica será utilizada no desenvolvimento dos algoritmos de controle preditivo robusto descrito no Capítulo 4 deste trabalho.

## 2.5 Resumo

Neste Capítulo, apresentou-se a modelagem de processos baseada em séries de funções ortonormais, denominada modelo SFO. A base de funções utilizada no modelo é definida a partir do conhecimento aproximado da dinâmica dominante do processo e contém, na forma de casos particulares, as bases de funções de Laguerre, de Kautz e do modelo de resposta ao impulso. Foram deduzidos modelos SFO para processos com ou sem ação integral e com ou sem incerteza estruturada. Em seguida, foram obtidas as equações de previsão da saída do processo  $j$  passos a frente. Verificou-se que a equação previsão da saída é afim em relação à incerteza paramétrica do modelo SFO.

---

# Capítulo 3

## Controlador Preditivo Adaptativo

### 3.1 Introdução

Os controladores preditivos ou *Model Based Predictive Controllers* - MBPC pertencem à classe de algoritmos que utilizam o modelo do processo para obter a lei de controle. Nos MBPC, o modelo é utilizado para o cálculo da previsão da saída do processo e, baseado nestes valores de previsão, um critério de custo é minimizado em relação às ações futuras do sinal de controle. Este procedimento dá origem a uma sequência ótima de sinais de controle a ser aplicada no processo. Assim, a escolha adequada do modelo é importante para o bom desempenho do sistema em malha fechada.

Sob o ponto de vista da utilização de um modelo linear para o processo, os controladores preditivos podem ser classificados em duas categorias : *i*) os métodos que utilizam modelos estruturados, por exemplo, os MBPC com modelos CARIMA, e; *ii*) os métodos baseados em uma representação não estruturada do processo, por exemplo, os MBPC com modelos de resposta ao impulso ou com modelos baseados em séries de funções ortonormais, este último, descrito no capítulo 2 deste trabalho.

Entre os MBPC com modelos estruturados, o algoritmo que obteve o maior destaque na literatura foi o *Generalized Predictive Controller* - GPC [Clarke et al., 1987] [Clarke e Mohtadi, 1989], tendo sido utilizado no controle de processos térmicos [Lu e Hogg, 1994] e de robôs [Lambert, 1987], para citar somente alguns exemplos. Já entre os algoritmos MBPC com mo-

delos não estruturados, pode-se citar o *Dynamic Matrix Controller* - DMC [Garcia et al., 1989], que é baseado no modelo de resposta ao impulso, tendo bastante destaque na área de processos químicos [Prett e Garcia, 1988] [Cutler e Finlayson, 1988] [Ricker, 1985], e o MBPC com modelo por séries ortonormais [Zervos e Dumont, 1988] [Finn et al., 1993] [Dumont et al., 1993] [Elshafei et al., 1994] [Oliveira et al., 1997], que também foi utilizado em controle de processos industriais, como por exemplo, em fabricação de papel [Dumont et al., 1990]. Todos os modelos citados podem ser descritos em representação de estados, conforme é mostrado em [Ordys e Clarke, 1993] [Li et al., 1989] [Lee et al., 1994] [Elshafei et al., 1994].

Quando os parâmetros do modelo não são conhecidos ou variam no tempo, estes podem ser estimados *on-line* através de um método de identificação recursivo e utilizados na lei de controle, dando origem aos controladores adaptativos [Astrom e Wittenmark, 1989]. Esta estratégia de controle adaptativo, onde o Princípio da Equivalência Certa é utilizado na obtenção da lei de controle, pode ser facilmente aplicada aos MBPC citados acima.

Controladores preditivos baseados em modelos estruturados apresentam o desempenho desejado se a estrutura do modelo for selecionada corretamente, isto é, se a ordem e/ou atraso de transporte do processo forem conhecidos. Quando estes parâmetros não possuem os valores corretos, pode ocorrer uma degradação no desempenho do sistema em malha fechada, que pode até tornar-se instável. Este tipo de MBPC é sensível à incertezas na estrutura do modelo.

No caso de algoritmos MBPC com modelos não estruturados, não é necessário o conhecimento da ordem e do atraso do processo na descrição do modelo. Esta característica representa uma vantagem em relação aos algoritmos com modelo estruturado, na ausência de uma informação precisa sobre estas variáveis ou quando o processo possui atrasos variantes no tempo, o que demonstra aplicabilidade desta estratégia em processos industriais.

Neste capítulo será descrita uma estratégia de controle MBPC Adaptativo que utiliza modelos não estruturados baseados em séries de funções ortonormais. Este tipo de modelagem se caracteriza pela definição do modelo através da soma ponderada dos valores de saída de uma série de funções ortonormais, cujo pólo é selecionado através de um conhecimento aproximado a respeito da dinâmica dominante do processo. Neste caso, o modelo obtido é, em relação ao modelo de resposta ao impulso, mais compacto, isto é, com menos parâmetros, levando a uma melhora na qualidade do estimador obtido

e reduzindo o erro médio quadrado MSE (*Mean Square Error*) de estimação [Gunnarsson e Wahlberg, 1991].

Outro aspecto importante a ser considerado em sistemas de controle é o caso de processos com restrições. Estas restrições são descritas na forma de limites para os sinais de controle e de saída do processo. Em geral, este tipo de problema é resolvido simplesmente através da saturação do sinal ou de uma sintonia criteriosa do controlador para se evitar as regiões indesejáveis. Nos MBPC, entretanto, este problema pode ser resolvido através da introdução da informação a respeito das restrições do processo na minimização do critério de custo. Esta estratégia é descrita em alguns trabalhos na literatura, como por exemplo em [Camacho, 1993] [Oliveira et al., 1994] para o GPC e em [Ricker, 1985] para o DMC, o qual, nestes casos, é usualmente denominado QDMC ou *Quadratic DMC*.

Nas seções a seguir, descreve-se um algoritmo de controle preditivo baseado em séries de funções ortonormais - CP-SFO. A formulação do problema MBPC, através da definição do critério de custo e da lei de controle, é apresentada na seção 3.2, considerando-se a presença de restrições nos sinais de controle e de saída do processo. A obtenção da lei de controle é descrita nas seções 3.3 e 3.4 para dois tipos diferentes de formulação do critério de custo. Na seção 3.5 discute-se, após o cálculo das equações do sistema em malha fechada, a estabilidade do algoritmo CP-SFO.

---

## 3.2 Definição da Lei de Controle

### 3.2.1 Introdução

A lei de controle dos MBPC é obtida otimizando um critério de custo, que geralmente é definido em função dos erros da previsão da saída do processo em relação a um sinal de referência especificado e da variação do sinal de controle a ser aplicado ao processo, durante um horizonte de tempo futuro denominado *horizonte de previsão*. Porém, o critério de custo não é necessariamente definido desta forma, como por exemplo, no caso do critério com múltiplo modelo de referência [Irwing et al., 1986] [Codron, 1993], isto é, quando se acrescenta um sinal de referência para o sinal de controle, ou no caso do critério com ponderação no estado final do modelo [Demircioglu e Clarke, 1993]. O critério de custo pode também ser utilizado na resolução de problemas específicos de controle de processos, por exemplo, o problema benchmark Shell [Prett e Garcia, 1988], onde é possível satisfazer aos requisitos de projeto incluindo, no critério de custo quadrático, um termo a mais de ponderação no sinal de controle [Lopez et al., 1995].

Em todos estes casos, o critério é definido utilizando normas *espaciais* e *temporais* para os sinais envolvidos. A norma *espacial* relaciona os sinais em um mesmo passo de previsão, isto é, descreve a relação entre os sinais  $\hat{y}(k+j/k)$ ,  $w(k+j)$  e  $\Delta u(k+j/k)$  em um dado passo  $j$  de previsão. A norma *temporal* relaciona os sinais considerando todo o horizonte de previsão, isto é, faz o cálculo para  $j$  variando durante o horizonte de previsão do resultado da aplicação da norma *espacial*.

Os principais tipos de normas<sup>1</sup> utilizadas em controle preditivo são :

- i) Norma 1 :  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$ ;
- ii) Norma 2 ( ou Euclidiana ) :  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ ;
- iii) Norma infinita :  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$ .

O critério de custo a ser otimizado pode ser descrito de diversas maneiras através do uso das normas citadas acima [Campo e Morari, 1986]. Entretanto, aquele encontrado com mais frequência na literatura é o quadrático, isto é, com norma temporal 1 e norma espacial 2. Esta definição é utilizada,

---

<sup>1</sup>Partindo da definição de que a norma  $p$  de um vetor  $\mathbf{x} = [ x_1 \dots x_m ]$  é dada por  $\|\mathbf{x}\|_p = [\sum_{i=1}^m |x_i|^p]^{1/p}$

por exemplo, nos algoritmos GPC, CRHPC, DMC, UPC (*Unified Predictive Controller* [Soeterboek, 1992]), entre outros.

A sequência ótima de sinais de controle a ser aplicada no processo é obtida minimizando o critério de custo em relação às variações futuras do sinal de controle. Assim sendo, a lei de controle geral para os algoritmos MBPC é dada por<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{argmin}_{j=N_1, \dots, N_y} \{ f(\hat{y}(k+j/k) - w(k+j), \Delta u(k+j-1/k), \\ &\quad \text{s.a.} \\ &\quad \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall \quad j \geq N_u \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde :

$f(\bullet)$  indica o critério de custo do controlador, definido de acordo com a escolha das normas espacial e temporal;

$N_1$  é o horizonte inicial de previsão da saída;

$N_y$  é o horizonte final de previsão da saída;

$N_u$  é o horizonte de controle;

$\hat{y}(k+j/k)$  é a previsão da saída  $j$  passos a frente, calculada utilizando as equações (2.78) e (2.69), que consideram processos com ou sem ação integral, respectivamente.

$w(k)$  é o sinal de referência;

$\Delta u(k+j/k)$  é a variação do sinal de controle no instante  $k+j$ , calculada em  $k$ ;

O horizonte de controle  $N_u$  restringe os graus de liberdade na determinação dos valores de  $\Delta u(k+j/k)$  durante o horizonte de previsão, pois

<sup>2</sup>A abordagem de controle preditivo adotada neste trabalho é a "incremental". Existe também a abordagem "posicional", onde o critério de custo é minimizado em relação ao sinais futuros de controle [Lambert, 1987], e não em relação às variações destes. Porém, a abordagem incremental é a mais utilizada por apresentar um melhor desempenho em malha fechada em relação a erros de regime para entradas em degrau.

$\Delta u(k+j/k) = 0$  para  $j \geq N_u$ , e por isso representa um parâmetro de projeto do controlador.

A solução do problema de otimização (3.1) resulta em um vetor  $\Delta \mathbf{u}$  composto de  $N_u$  futuras variações no sinal de controle dado por :

$$\Delta \mathbf{u} = [ \Delta u(k/k) \quad \Delta u(k+1/k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1/k) ]^T \quad (3.2)$$

Somente o primeiro elemento de  $\Delta \mathbf{u}$  é aplicado no processo, isto é,  $u(k) = \Delta u(k/k) + u(k-1)$ , e no próximo instante de amostragem todo o procedimento é repetido, conforme a estratégia do controle de horizonte deslizante (*receding horizon control*).

A definição do critério de custo do algoritmo CP-SFO utilizando a norma Euclidiana (critério quadrático) e a norma infinita é discutida nas seções 3.3 e 3.4. A seguir, descreve-se a incorporação no algoritmo CP-SFO das restrições nos sinais de controle e de saída do processo.

### 3.2.2 Lei de controle para processos com restrições

Geralmente, o processo real apresenta restrições na amplitude e na variação dos sinais de controle e de saída devido às limitações físicas dos acionadores, especificações na qualidade de um produto, exigências de segurança, etc. .

Este problema pode ser resolvido através da saturação do sinal de controle aplicado ao processo ou através da escolha adequada dos parâmetros de projeto para se evitar as situações indesejáveis. Entretanto, nesta abordagem, a otimalidade do sinal de controle obtido não é garantida, e também não existe a garantia de que as restrições do processo serão satisfeitas. Isto pode levar a degradação do desempenho do sistema em malha fechada [Tsang e Clarke, 1988] [Chen et al., 1993] e, portanto, outra estratégia de controle deve ser utilizada.

O algoritmo CP-SFO incorpora as restrições nos sinais do processo, reescrevendo-as como restrições do problema de otimização (3.1), conforme mostrado a seguir.

As restrições nos sinais do processo são dadas por :

$$\begin{aligned} u_{min} &\leq u(k + j - 1/k) \leq u_{max} & \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} &\leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{max} & \forall j = 1, \dots, N_u \\ y_{min} &\leq \hat{y}(k + j/k) \leq y_{max} & \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (3.3)$$

Neste caso, a lei de controle CP-SFO para processos com restrições é descrita por :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = \operatorname{argmin}_{j=N_1, \dots, N_y} \{ & f(\hat{y}(k + j/k) - w(k + j), \Delta u(k + j - 1/k)), \\ & \text{s.a.} \\ & \Delta u(k + j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u \\ & u_{min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & y_{min} \leq \hat{y}(k + j/k) \leq y_{max} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde o vetor solução  $\Delta \mathbf{u}$  é calculado de forma a satisfazer as restrições operacionais do processo representadas pelas inequações (3.3).

A incorporação das restrições nos sinais do processo como inequações lineares na minimização do critério de custo garante a otimalidade da lei de controle, em comparação com a simples saturação dos sinais sujeitos a restrições.

É bem sabido que a relação entre os parâmetros de projeto dos MBPC e o respectivo desempenho em malha fechada não é direta e, por isto, ela é fundamentada, na maioria dos casos, em regras heurísticas [Samaan, 1989] [Nazzetta, 1991] [Acundeger, 1993]. Por outro lado, as restrições nos sinais de controle e de saída também podem ser utilizadas na especificação do desempenho desejado para o sistema em malha fechada. Através da definição de restrições nos sinais do processo, é possível especificar índices de desempenho para o sistema em malha fechada, como por exemplo, o esforço máximo de controle ou a sobre-elevação máxima do sinal da saída [Oliveira et al., 1994].

A seguir, mostra-se que o conjunto de restrições (3.3) nos sinais de controle e de saída do processo pode ser escrito linearmente em relação ao vetor  $\Delta \mathbf{u}$ , isto é :

$$\mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \quad (3.5)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\Delta u} \\ \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_y \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\Delta u} \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

As matrizes  $\mathcal{A}_{\Delta u}$ ,  $\mathcal{A}_u$ ,  $\mathcal{A}_y$ , e os vetores  $\mathbf{v}_{\Delta u}$ ,  $\mathbf{v}_u$ ,  $\mathbf{v}_y$  são definidos nas seções seguintes.

### 3.2.2.1 Restrições em $\Delta u(k)$

As restrições na variação do sinal de controle são dadas por :

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \quad (3.7)$$

Estas equações podem ser reescritas como a seguir :

$$\mathcal{A}_{\Delta u} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v}_{\Delta u} \quad (3.8)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k/k) \\ \Delta u(k + 1/k) \\ \Delta u(k + 2/k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1/k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\Delta u_{min} \\ \Delta u_{max} \\ -\Delta u_{min} \\ \Delta u_{max} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.2.2.2 Restrições em $u(k)$

As restrições na amplitude do sinal de controle são dadas por :

$$u_{min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \quad (3.10)$$

Estas equações podem ser reescritas como a seguir :

$$\mathcal{A}_u \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v}_u \quad (3.11)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k/k) \\ \Delta u(k+1/k) \\ \Delta u(k+2/k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1/k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -u_{min} + u(k-1) \\ u_{max} - u(k-1) \\ -u_{min} + u(k-1) \\ u_{max} - u(k-1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.2.2.3 Restrições em $y(k)$

As restrições na amplitude do sinal de saída são dadas por :

$$y_{min} \leq \hat{y}(k+j/k) \leq y_{max} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \quad (3.13)$$

Conforme descrito no Capítulo 2, o conjunto de previsões da saída em todo o horizonte de previsão é dado pela equação (2.82), reescrita a seguir :

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l$$

onde  $G$  é dado pela equação (2.84).

Assim sendo, tem-se que as restrições na saída do processo podem ser descritas como a seguir :

$$\mathbf{y}_{min} \leq G\Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l \leq \mathbf{y}_{max} \quad (3.14)$$

onde :

$$\mathbf{y}_{min} = [ y_{min} \ y_{min} \ \dots \ y_{min} ]^T \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}_{max} = [ y_{max} \ y_{max} \ \dots \ y_{max} ]^T \quad (3.16)$$

o que é equivalente a :

$$\mathcal{A}_y \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v}_y \quad (3.17)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max} - \hat{\mathbf{y}}_l \\ -\mathbf{y}_{min} + \hat{\mathbf{y}}_l \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.2.3 Eliminação de restrições redundantes da lei de controle

Uma consequência da inclusão de restrições lineares na minimização do critério de custo é o aumento no tempo de execução computacional do cálculo da lei de controle. Assim, algumas estratégias são utilizadas para reduzir o esforço computacional do algoritmo :

*i) Eliminação de restrições redundantes da inequação (3.5).* Esta inequação forma um subespaço que contém todas as soluções factíveis para o vetor  $\Delta \mathbf{u}$ . Na maioria dos casos, este subespaço pode ser representado por um subconjunto das restrições (3.5) e, portanto, as restantes podem ser eliminadas [Oliveira et al., 1994].

*ii) Desenvolvimento de métodos de otimização considerando as características da obtenção da lei de controle MBPC.* Por exemplo, em [Oliveira et al., 1994] compara-se, no contexto do GPC monovariável, os algoritmos de otimização do Gradiente Projetado de Rosen e o Método Dual para Problemas Quadráticos, com resultados melhores para o primeiro, e apresenta-se também um método simples para a obtenção da lei de controle quando  $N_u$  é igual a 1. Em [Ling, 1993], aborda-se o caso de processos multivariáveis com 2 variáveis de entrada e 2 de saída, e descreve-se um método mais eficiente para a obtenção da lei de controle com restrições, quando comparado com a utilização de algoritmos convencionais de otimização. Em [Soeterboek, 1992], analisa-se a utilização do algoritmo do Gradiente Projetado de Rosen na lei de controle UPC.

iii) Utilização de uma janela para o horizonte de previsão [Prett e Garcia, 1989]. Esta estratégia consiste em utilizar, para efeito das restrições no sinal de saída do processo, somente uma quantidade  $r$  de passos iniciais de previsão ao invés de todo o horizonte de previsão. Em outras palavras, utiliza-se somente os valores da previsão da saída entre  $k + N_1$  e  $k + r$ , com  $r < N_y$  na inequação (3.3). Esta estratégia pressupõe que, se a previsão da saída não ultrapassar os limites nos  $r$  primeiros passos, esta irá satisfazer as restrições nos passos seguintes de previsão.

Todas estas estratégias podem ser facilmente aplicadas ao algoritmo CPSFO.

A seguir, propõe-se um método subótimo para a eliminação das restrições redundantes da lei de controle que tem como objetivo diminuir o tempo total de cálculo da lei de controle [Oliveira et al., 1994].

O número de restrições sobre as variáveis de entrada e saída do processo do problema de otimização da lei de controle é calculado em função dos parâmetros de projeto do controlador. Estas restrições formam um subespaço do  $\mathbb{R}^{N_u}$  contendo as soluções factíveis para  $\Delta\mathbf{u}$ . Entretanto, muitas destas restrições podem ser redundantes, isto é, podem ser eliminadas sem que haja alterações no subespaço de soluções. Assim, a eficiência dos algoritmos de otimização pode ser aumentada através da eliminação das restrições redundantes.

A determinação do conjunto mínimo de restrições que define a região factível do espaço solução de  $\Delta\mathbf{u}$  é, muitas vezes, possível [Boot, 1964]. Porém, em geral os algoritmos desenvolvidos para este fim requerem para sua execução maior esforço computacional que a redução obtida pela diminuição do conjunto de restrições, inviabilizando a utilização destes métodos em um contexto *on-line*, isto é, em cada período de amostragem.

Assumindo que existam pelo menos restrições nos valores da variação do sinal de controle, o seguinte procedimento, baseado em duas etapas, pode ser aplicado.

i) Inicialmente, escolhe-se as restrições que formam o menor politopo retangular possível dentre o conjunto de restrições perpendiculares aos eixos do espaço solução. Em outras palavras, para cada conjunto de restrições que afeta somente uma variável  $\Delta u(k+j)$ , realiza-se o seguinte procedimento :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \leq v_i \quad \forall i \in \mathcal{I}_j \quad (3.19)$$

↓

$$\cdots \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \Delta \mathbf{u} \leq \left[ \begin{array}{c} v_{j,1} \\ v_{j,2} \end{array} \right] \quad (3.20)$$

onde :

$$v_{j,1} = \max(v_i / |a_{i,j}|) \quad \forall i \in \mathcal{I}_j, \text{ para } a_{i,j} < 0;$$

$v_{j,2} = \min(v_i / |a_{i,j}|) \quad \forall i \in \mathcal{I}_j, \text{ para } a_{i,j} > 0;$  e  $\mathcal{I}_r$  é um conjunto contendo restrições que afetam somente a variável  $\Delta u(k+r-1/k)$ .

Com este procedimento, obtém-se um hiperparalelogramo  $\mathcal{P}$  no espaço solução do problema formado pelas inequações (3.20) para todo  $j$ .

ii) Em seguida, define-se o conjunto de restrições restantes como a seguir :

$$a_{i,:} \Delta \mathbf{u} \leq v_i, \quad \forall i \notin \mathcal{I}_j \text{ e } \forall j \quad (3.21)$$

onde  $a_{i,:}$  é  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathcal{A}$ .

Cada uma destas restrições divide o  $\mathbb{R}^{N_u}$  em dois semiespaços, um com soluções factíveis e outro com soluções infactíveis em relação a esta restrição. Se o hipercubo definido anteriormente estiver totalmente contido no semiespaço de soluções factíveis desta restrição, então esta é redundante e pode ser eliminada. Esta verificação pode ser feita analisando cada restrição de (3.21) e os vértices de  $\mathcal{P}$ , isto é, se todos os vértices de  $\mathcal{P}$  satisfizerem a uma determinada restrição  $i$  do conjunto (3.21), então esta restrição é redundante e pode ser eliminada.

O conjunto de restrições assim obtido pode não ser o menor conjunto possível para representar a região factível inicial, mas representa um bom compromisso quando se considera o esforço total de computação, isto é, o esforço da estratégia de eliminação de restrições redundantes mais o esforço do método de otimização.

Veja o exemplo a seguir.

Seja o caso discutido em [Oliveira et al., 1994], onde o processo é dado por :

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.9q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad (3.22)$$

e as restrições para o sinal de controle são  $|\Delta u(k)| \leq 0.03$  e  $|u(k)| \leq 0.2$  e para o sinal de saída são  $0 \leq y(k) \leq 1$ .

Os parâmetros de projeto do algoritmo de controle preditivo utilizado são  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 3$  e  $N_u = 2$ . Em determinado instante de tempo (em 2.9 segundos), o valor de  $u(k-1)$  é igual a 0.0153 e a previsão da saída livre para  $k+1$  até  $k+3$  é dada por  $\{ 0.4399, 0.2135, 0.0414 \}$ . O sinal de referência é um degrau unitário. A partir destes dados, obtém-se a seguinte matriz de restrições :

$$\begin{array}{c|ccccc} \hline & -1 & 0 & & 0.03 & \\ \hline \mathcal{A}_{\Delta u} & 1 & 0 & & 0.03 & \mathbf{v}_{\Delta u} \\ & 0 & -1 & & 0.03 & \\ & 0 & 1 & & 0.03 & \\ & -1 & 0 & & 0.2153 & \\ \hline \mathcal{A}_u & 1 & 0 & & 0.1847 & \mathbf{v}_u \\ & -1 & -1 & \left[ \begin{array}{c} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{array} \right] \leq & 0.2153 & \\ & 1 & 1 & & 0.1847 & \\ & 1 & 0 & & 0.5601 & \\ \hline & 3.4 & 1 & & 0.7865 & \\ \mathcal{A}_y & 6.3 & 3.4 & & 0.9586 & \mathbf{v}_y \\ & -1 & 0 & & 0.4399 & \\ & -3.4 & -1 & & 0.2135 & \\ & -6.3 & -3.4 & & 0.0414 & \\ \hline \end{array} \quad (3.23)$$

Aplicando-se o passo (i) da metodologia proposta, o menor hiperparalelogramo  $\mathcal{P}$ , formado pelas restrições que afetam somente  $\Delta u(k)$  e  $\Delta u(k+1)$ , isto é, as restrições  $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12 \}$  da inequação (3.23), é dado por :

$$\left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{array} \right] \leq \left[ \begin{array}{c} 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \end{array} \right] \quad (3.24)$$

No passo (ii), as restrições restantes, isto é, as restrições  $\{ 7, 8, 10, 11, 13, 14 \}$  da inequação (3.23), são comparadas com os vértices do conjunto  $\mathcal{P}$ , que podem ser obtidos a partir da inequação (3.24). Destas restrições, somente a restrição 14 não engloba completamente o conjunto  $\mathcal{P}$  e portanto obtém-se :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -6.3 & -3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.0414 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Assim, utilizando somente 5 das 14 restrições originais, as restrições dadas pela inequação (3.25) possuem o mesmo espaço solução para  $\Delta u(k)$  e  $\Delta u(k+1)$  que a inequação (3.23).

### 3.3 CP-SFO com Critério de Custo Quadrático

Nesta seção, descreve-se a obtenção da lei de controle do CP-SFO, definida na seção (3.2), quando o critério de custo é do tipo quadrático.

O critério de custo quadrático utiliza o quadrado da norma 2 como norma espacial e a norma 1 como norma temporal. Este tipo de critério é encontrado na maioria dos algoritmos de controle preditivo devido a possibilidade de se obter uma solução analítica para a lei de controle quando não existem restrições nas variáveis do processo. Assim, o critério de custo quadrático é dado por :

$$J_q(\Delta \mathbf{u}) = \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  ( $\lambda \geq 0$ ) é um fator de ponderação para os futuros incrementos no sinal de controle.

A lei de controle CP-SFO com critério quadrático para processos com restrições é obtida resolvendo-se o seguinte problema :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \\ \text{s.a.} \quad & u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & y_{min} \leq \hat{y}(k+j/k) \leq y_{max} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (3.27)$$

A definição da lei de controle CP-SFO em forma vetorial é discutida a seguir.

A equação (3.26) pode ser reescrita como sendo :

$$J_q(\Delta \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}^T Q \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u} + d \quad (3.28)$$

onde :

$$Q = G^T G + \lambda I, \quad I \text{ é a matriz identidade} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{f} = 2G^T (\hat{\mathbf{y}}_l - \mathbf{w}) \quad (3.30)$$

$$d = (\hat{\mathbf{y}}_l - \mathbf{w})^T (\hat{\mathbf{y}}_l - \mathbf{w}) \quad (3.31)$$

e

$$\mathbf{w} = [ w(k+N_1) \ w(k+N_1+1) \ \dots w(k+N_y) ]^T \quad (3.32)$$

A minimização do critério de custo em relação a  $\Delta\mathbf{u}$ , sujeito às restrições do processo, é :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\mathbf{u}} \quad & \Delta\mathbf{u}^T Q \Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}^T \Delta\mathbf{u} \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{A} \Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Este é um problema de programação quadrática (QP - *Quadratic Programming*) [Bazaraa e Shetty, 1979] [Boot, 1964], onde um ótimo local para o problema (3.33) é também o ótimo global. Portanto, a otimização da lei de controle CP-SFO com critério quadrático não admite mínimos locais.

Da resolução <sup>3</sup> do problema (3.33) em relação a  $\Delta\mathbf{u}$ , obtém-se o valor ótimo de  $\Delta u(k/k)$ , e o sinal de controle aplicado no processo é dado por :

$$u(k) = \Delta u(k/k) + u(k-1) \quad (3.34)$$

Quando não existem restrições nos sinais de entrada e saída do processo, o problema de otimização (3.33) admite uma solução analítica, que é dada por :

$$\Delta\mathbf{u} = -(1/2)Q^{-1}\mathbf{f} \quad (3.35)$$

---

<sup>3</sup>Neste trabalho, o pacote computacional utilizado para resolução dos problemas de otimização foi o *Optimisation Toolbox* do Matlab.

### 3.3.1 Exemplos

#### 3.3.1.1 Exemplo 3.1

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CP-SFO Adaptativo. Seja o processo dado pela equação (2.41), descrito no Exemplo 2.2 do Capítulo 2 e reescrito a seguir :

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.2q^{-2}}{1 - 1.1q^{-1} + 0.4625q^{-2}} \quad (3.36)$$

onde os pólos de malha aberta são iguais a :  $0.55 \pm j0.4$ .

A matriz  $A$  e o vetor  $b$  do modelo SFO são definidos através da seleção dos mesmos valores para o pólo  $p$  analisados no Exemplo 2.2, a saber :  $p = 0.3$ ,  $p = 0.55 \pm j0.4$  e  $p = 0.7 \pm j0.2$ . O número de funções utilizadas no modelo é 10 ( $n = 10$ ), para assegurar que os últimos coeficientes da série convergem para zero<sup>4</sup>.

O vetor  $\hat{c}$  é identificado *on-line* utilizando um algoritmo tipo Mínimos Quadrados Recursivo, cujos valores iniciais<sup>5</sup> da matriz de covariância e do fator de esquecimento são dados por  $100I$  ( onde  $I$  é a matriz identidade ) e 0.97, respectivamente. Os parâmetros iniciais de  $\hat{c}$  são<sup>6</sup> :

$$\hat{c} = [ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ]^T$$

A lei de controle é definida por um critério de custo quadrático com  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 10$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ .

Na figura 3.1, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para identificação e controle utilizando diferentes valores de  $p$ . Observa-se que somente durante o transitório de identificação existe diferença de desempenho. Em todos os casos, porém, o algoritmo CP-SFO Adaptativo é capaz de

<sup>4</sup>A utilização de 10 ( $n = 10$ ) funções ortonormais será adotada em todos os exemplos deste capítulo, mesmo quando valores de  $n$  menores forem suficientes para a modelagem do processo. Este efeito pode ser constatado quando os últimos coeficientes da matriz  $c$  assumem valores próximos de zero.

<sup>5</sup>Estes parâmetros de inicialização do estimador de mínimos quadrados recursivo serão utilizados em todos os exemplos deste Capítulo.

<sup>6</sup>Neste Capítulo, sempre que o algoritmo CP-SFO for Adaptativo, o vetor  $\hat{c}$  será inicializado como mostrado neste exemplo.

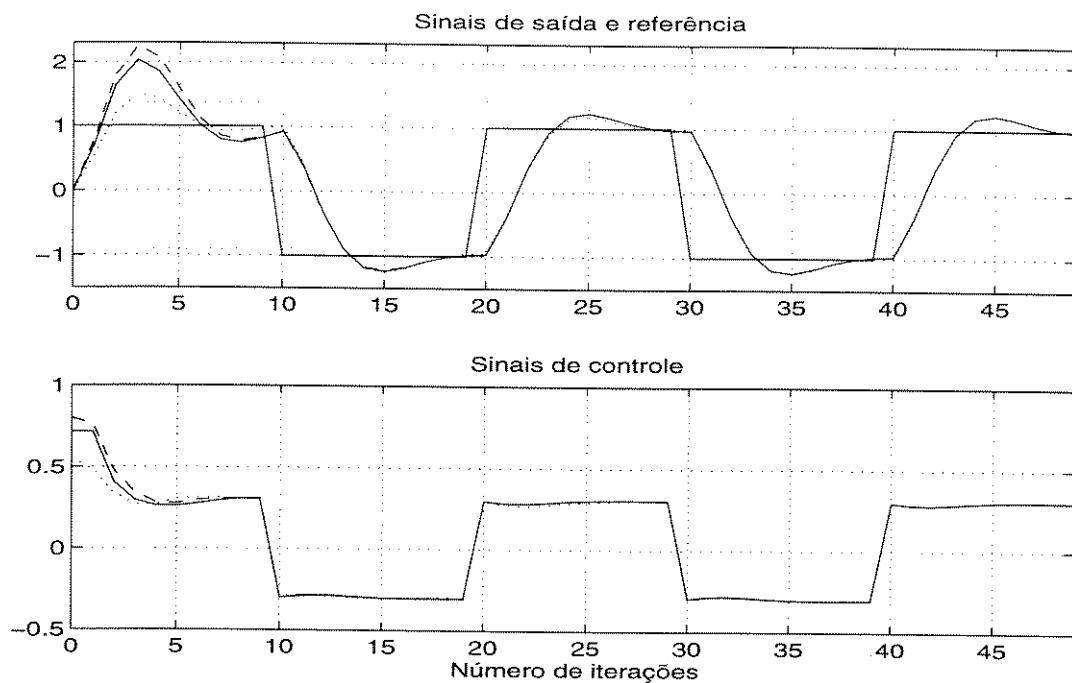


Figura 3.1: Desempenho do sistema em malha fechada para vários valores de  $p$ , Legenda : linha contínua,  $p = 0.3$ ; linha tracejada,  $p = 0.5 \pm j0.4$  e linha pontilhada  $p = 0.7 \pm j0.2$ .

identificar e controlar este processo incerto, independentemente da escolha feita inicialmente para o pólo  $p$ .

### 3.3.1.2 Exemplo 3.2

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CP-SFO Adaptativo com critério quadrático no controle de um processo incerto, cujos valores da ordem e do atraso de transporte variam no tempo. Os resultados são comparados com um algoritmo de controle preditivo que utiliza um modelo estruturado para o processo, o GPC com modelo CARIMA.

Seja o processo definido pela seguinte função de transferência :

$$y(s) = G(s)e^{-\tau s} u(s) \quad (3.37)$$

com

$$G(s) = \frac{1}{10s+1} + \kappa \left\{ \frac{1}{10s+1} \frac{-2s+1}{2s+1} - \frac{1}{10s+1} \right\} \quad (3.38)$$

A dinâmica do processo<sup>7</sup> varia no tempo como mostrado a seguir : para  $k < 60$ ,  $\tau = 0$  e  $\kappa = 0$ ; para  $60 \leq k < 120$ ,  $\tau = 2$  e  $\kappa = 0$ ; e para  $k \geq 120$ ,  $\tau = 2$  e  $\kappa = 1$ . O período de amostragem é de 1 segundo.

Os valores ótimos para o pólo  $p$  das funções ortonormais nestas três configurações, segundo o critério de minimização do erro de truncamento dado pela equação (2.33), são, respectivamente : 0.891, 0.588 e 0.592. Pelo critério de minimização do número de funções da série, equação (2.34), os valores ótimos para  $p$  são, respectivamente : 0.9, 0.78 e 0.79.

O modelo baseado em séries de funções ortonormais é definido com 10 funções ( $n = 10$ ) e o pólo  $p$  é selecionado como sendo 0.6, por este valor ser próximo dos valores ótimos para  $p$ . Utilizando estes dois parâmetros, obtém-se as matrizes  $A$  e  $b$  do modelo SFO, mostradas a seguir :

As cinco primeiras colunas da matriz  $A$  são :

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.64 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.384 & 0.64 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.2304 & -0.384 & 0.64 & 0.6 & 0 \\ -0.1382 & 0.2304 & -0.384 & 0.64 & 0.6 \\ 0.0829 & -0.1382 & 0.2304 & -0.384 & 0.64 \\ -0.0498 & 0.0829 & -0.1382 & 0.2304 & -0.384 \\ 0.0299 & -0.0498 & 0.0829 & -0.1382 & 0.2304 \\ -0.0179 & 0.0299 & -0.0498 & 0.0829 & -0.1382 \\ 0.0107 & -0.0179 & 0.0299 & -0.0498 & 0.0829 \end{bmatrix}$$

e as cinco últimas colunas são dadas por :

<sup>7</sup>Este processo  $G(s)$ , sem atraso variante no tempo, é apresentado em [Campo e Morari, 1987]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.64 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.384 & 0.64 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.2304 & -0.384 & 0.64 & 0.6 & 0 \\ -0.1382 & 0.2304 & -0.384 & 0.64 & 0.6 \end{bmatrix}$$

O vetor  $\mathbf{b}$  é igual a :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.48 \\ 0.288 \\ -0.1728 \\ 0.1037 \\ -0.0622 \\ 0.0373 \\ -0.0224 \\ 0.0134 \\ -0.0081 \end{bmatrix}$$

No caso do modelo CARIMA, as ordens dos polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são selecionadas com  $nb = 3$  e  $na = 2$ , para permitir a identificação das dinâmicas de todos os processos. Os coeficientes dos polinômios são inicializados com  $a_i = 0$  para  $i > 0$ ;  $b_i = 1$  para  $i = 0$ ;  $b_i = 0$  para  $i > 0$ ; e o polinômio  $T(q^{-1})$  é selecionado igual a 1.

Os modelos SFO e CARIMA são identificados utilizando um algoritmo de mínimos quadrados recursivo, e a cada mudança de processo, isto é, em  $k = 60$  e  $k = 120$ , a matriz de covariância é reinicializada com  $5I$ .

Os parâmetros dos algoritmos de controle CP-SFO e GPC são :  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 10$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ .

A figura 3.2 apresenta os sinais de entrada e saída para os algoritmos adaptivos GPC e CP-SFO no controle do processo (3.37). Pode-se observar que durante a fase de identificação, o algoritmo CP-SFO apresenta um

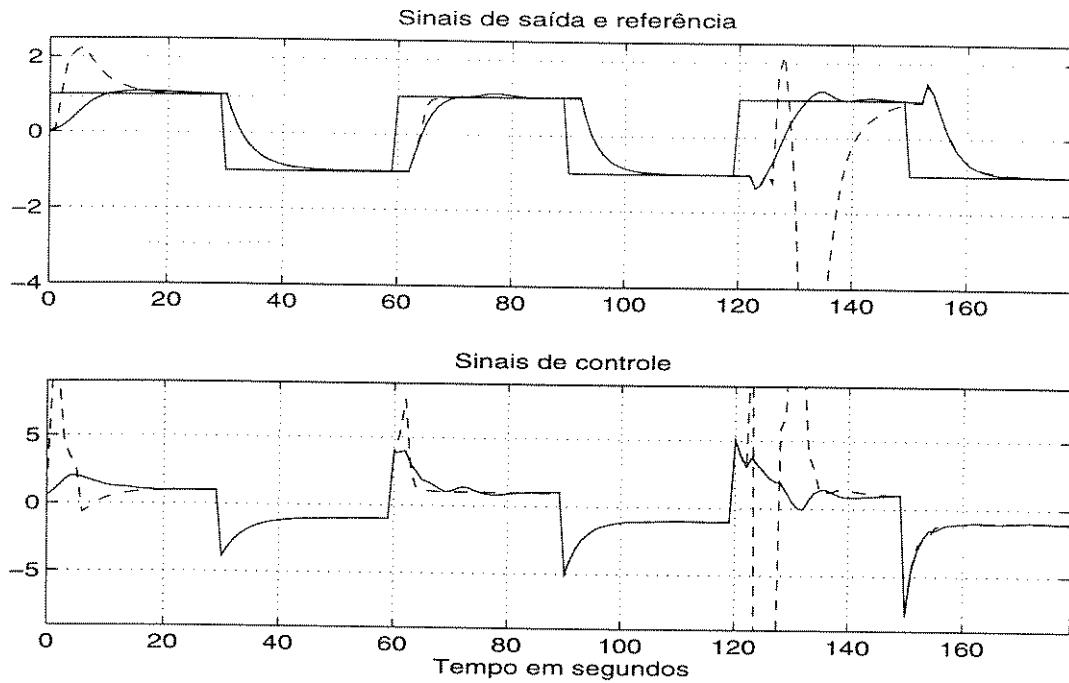


Figura 3.2: Desempenho do sistema em malha fechada para processo variante no tempo, Legenda : tracejada, GPC; contínua, CP-SFO

desempenho melhor que o GPC. Após o modelo ter sido identificado corretamente, o desempenho do sistema em malha fechada com os dois algoritmos é semelhante.

No caso do GPC, a estabilidade do sistema em malha fechada está condicionada ao conhecimento da ordem e do atraso do processo, isto é, se estes parâmetros do processo (3.37) forem subestimados, o sistema torna-se instável. Para o algoritmo CP-SFO, é necessário somente um conhecimento aproximado da dinâmica dominante do processo.

Portanto, a modelagem por séries ortonormais requer menos informação sobre o processo que o modelo CARIMA, e resulta em um algoritmo de controle preditivo com melhor desempenho em malha fechada.

### 3.3.1.3 Exemplo 3.3

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CP-SFO Adaptativo com critério quadrático no controle de um processo com ação integral. Conforme descrito no Capítulo 2, o modelo SFO é capaz, a princípio, de modelar so-

mente processos estáveis e cuja resposta ao impulso possua energia finita. Entretanto, no caso de processos com ação integral, pode-se utilizar a nova formulação para a equação do preditor da saída. O desempenho do algoritmo CP-SFO em processos com ação integral é ilustrado a seguir.

Seja função de transferência de um processo cujo parâmetro  $J$  pode variar  $\pm 50\%$  em torno de seu valor nominal dado por 2 :

$$G(s) = \frac{20}{Js^3 + (10J + 1)s^2 + 20s} \quad (3.39)$$

O período de amostragem é igual a 0.1 segundos.

O modelo por séries ortonormais utilizando 10 funções ( $n = 10$ ) é definido com o pólo  $p$  dado por  $p = 0.75$ , para representar as dinâmicas do modelo nominal<sup>8</sup>. Assim sendo, a matriz  $A$  e o vetor  $b$  são calculados utilizando estes dois parâmetros.

O vetor  $c$  é identificado *on-line* através de um estimador de mínimos quadrados recursivo, sintonizado conforme descrito nos exemplos anteriores. A cada mudança no parâmetro  $J$ , que ocorre nos instantes 8 e 16 segundos, a matriz de covariância é reinicializada com  $5I$ .

Os parâmetros do CP-SFO são definidos por :  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 8$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ .

Na figura 3.3, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $J$ , isto é,  $J = 2$ , até 8 segundos,  $J = 1$ , entre 8 e 16 segundos e  $J = 4$ , após 16.

Pode-se observar que a utilização das equações de previsão desenvolvidas para processos com ação integral permitem ao algoritmo CP-SFO Adaptativo identificar e controlar o processo (3.39). O desempenho do sistema em malha fechada não apresenta variações significativas quando  $J$  varia em torno do valor nominal.

---

<sup>8</sup>Note que o valor ótimo obtido a partir da resposta ao impulso do modelo nominal e através da minimização do critério (2.33) é igual a  $p = 0.651$  para  $J = 1$ ,  $p = 0.752$  para  $J = 2$  e  $p = 0.831$  para  $J = 4$ .

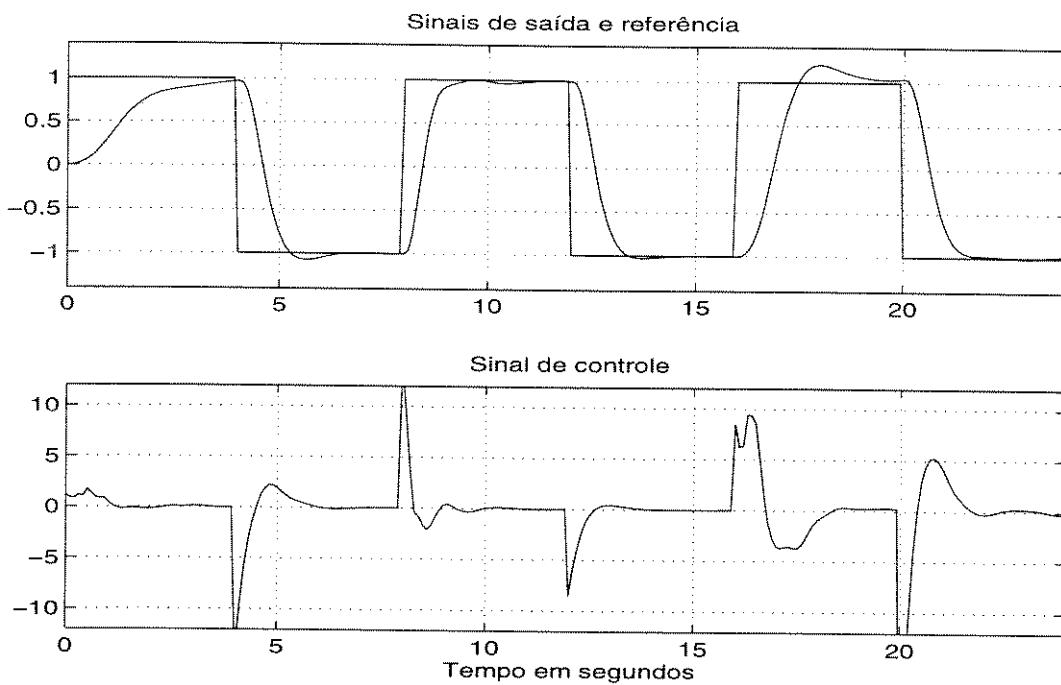


Figura 3.3: CP-SFO no controle de um processo com ação integral

### 3.3.1.4 Exemplo 3.4

A seguir é apresentado um exemplo da aplicação do CP-SFO com critério quadrático em processos com restrições no sinal de controle.

Seja o seguinte processo :

$$G(s) = \frac{5}{(4s+1)(5s+1)} \quad (3.40)$$

O período de amostragem é de 0.5 segundos.

O modelo SFO é especificado com 10 funções e pólo igual a  $p = 0.9$ , sabendo que os valores ótimos calculados pelos critérios do erro de truncamento e do número de funções são 0.9192 e 0.9378, respectivamente. A matriz  $c$  é calculada a partir da resposta ao impulso do processo e dada por :

$$c = [0.6065 \ 0.5675 \ -0.0328 \ 0.0033 \ -0.0003 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

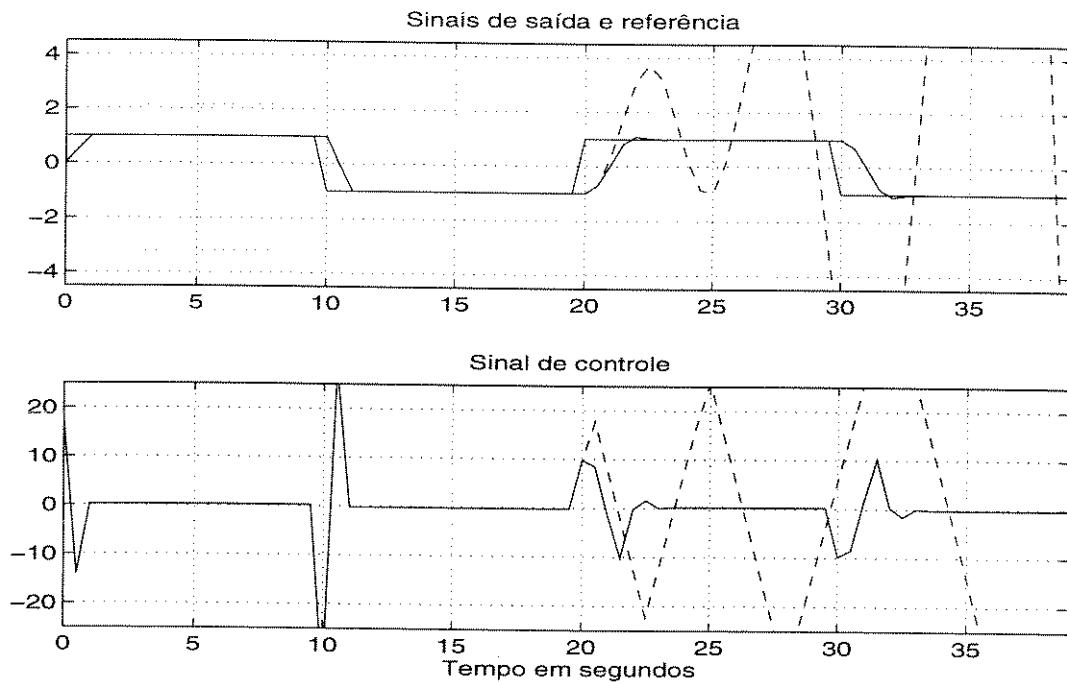


Figura 3.4: Desempenho do sistema em malha fechada para processo com restrições na variação do sinal de controle, Legenda : contínua, CP-SFO com restrições; e tracejada, CP-SFO sem restrições

Os parâmetros do controlador são dados por  $N_1 = 2$ ,  $N_y = 4$  e  $N_u = 3$ . As restrições do processo são incorporadas ao CP-SFO na forma de restrições lineares, conforme mostrado anteriormente neste capítulo, e a lei de controle é descrita como um problema de programação quadrática.

Inicialmente, na figura 3.4, o desempenho do sistema em malha fechada do CP-SFO levando em conta as restrições ou, simplesmente, CP-SFO com restrições, é comparado com o algoritmo sem levar em conta as restrições, considerando que a variação do sinal de controle está limitada em  $|\Delta u(k)| \leq 10$  após 20 segundos. Pode-se observar que o desempenho do CP-SFO com restrições mantém o sinal de controle dentro dos valores factíveis, respeitando as restrições do processo. O algoritmo CP-SFO sem levar em conta as restrições, ou CP-SFO sem restrições, torna-se instável após 20 segundos, quando ocorre a saturação do sinal de controle.

Na figura 3.5, o desempenho do sistema em malha fechada do CP-SFO com restrições é comparado com o algoritmo sem restrições, considerando que a amplitude do sinal de controle está limitada em  $-3 \leq u(k) \leq 10$ .

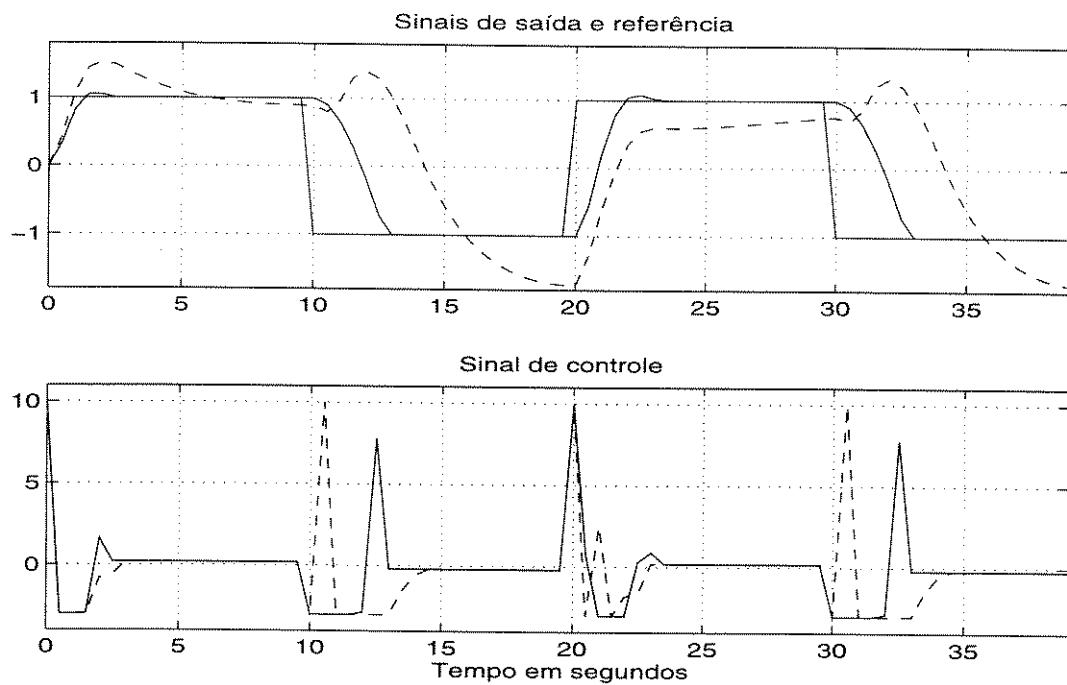


Figura 3.5: Desempenho do sistema em malha fechada para processo com restrições no sinal de controle, Legenda : contínua, CP-SFO com restrições; e tracejada, CP-SFO sem restrições

Pode-se observar que o CP-SFO com restrições mantém o sinal de controle dentro de valores factíveis, e o erro do sinal de saída, em relação à referência, também apresenta valores bem menores do que a simples saturação do sinal de controle feita no CP-SFO sem restrições.

### 3.3.1.5 Exemplo 3.5

A seguir é apresentado um exemplo da aplicação do CP-SFO com critério de custo quadrático em processos com restrições no sinal de saída.

Seja o processo dado por :

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.9q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad (3.41)$$

O modelo SFO é especificado com 10 funções e pólo igual a  $0.75 \pm j0.37$ . Este valor para  $p$  é calculado utilizando o critério de minimização do erro de

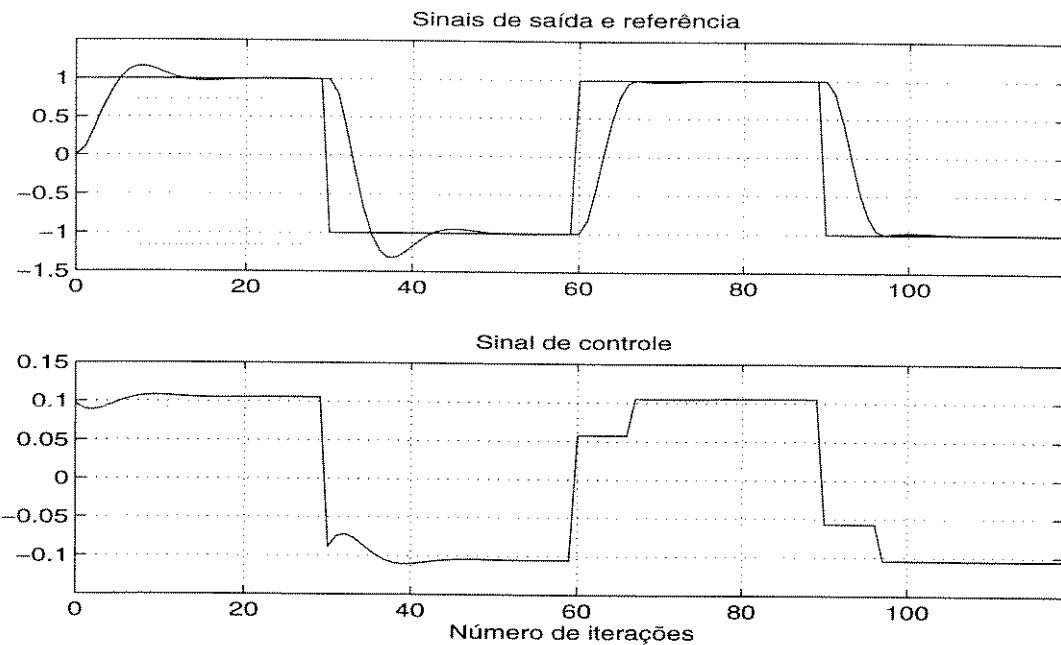


Figura 3.6: Desempenho do sistema em malha fechada para processo com restrições no sinal de saída

truncamento da série. A matriz  $c$  é calculada a partir da resposta ao impulso do processo e dada por :

$$c = [ 2.7956 \quad 4.7194 \quad -0.0158 \quad -0.0066 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]^T$$

Os parâmetros do controlador são :  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 8$  e  $N_u = 1$ . As restrições do processo são incorporadas ao CP-SFO na forma de restrições lineares e a lei de controle é obtida resolvendo-se um algoritmo de programação quadrática.

O desempenho do sistema em malha fechada é mostrado na figura 3.6, onde, somente após o instante  $k = 60$ , são incorporadas ao algoritmo CP-SFO as restrições de  $-1 \leq y(k) \leq 1$  no sinal de saída. Pode-se observar que, após  $k = 60$ , a sobrelevação no sinal de saída é totalmente eliminada pelo algoritmo de controle com restrições nos sinais.

O mesmo efeito pode ser obtido através da seleção de outros valores para a sintonia do controlador como, por exemplo, quando se aumenta  $N_u$  de 1 para 8, conforme é mostrado na figura 3.7. Nesta figura, pode-se observar que o sinal de saída permanece dentro da região factível. Entretanto, existe

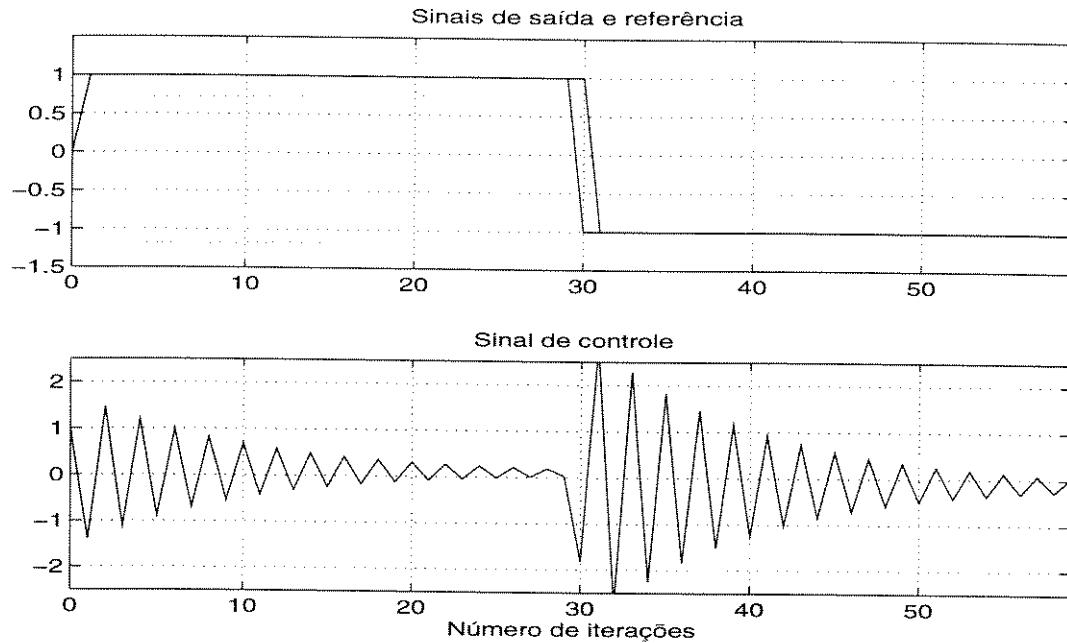


Figura 3.7: Desempenho do sistema em malha fechada com CP-SFO sem restrições nos sinais e  $N_u=8$

um aumento significativo no esforço de controle em relação ao CP-SFO com restrições.

Assim, o CP-SFO com restrições nos sinais é capaz de evitar a região infactível para o sinal de saída sem que para tanto seja necessário aumentar o esforço de controle ou aumentar o tempo de subida do sinal de saída.

### 3.4 CP-SFO com Critério de Custo baseado na Norma Infinita

Esta abordagem de CP-SFO utiliza, no critério de custo, as normas espacial e temporal definidas pelo uso da norma infinita.

Nesta seção, descreve-se a obtenção da lei de controle do CP-SFO quando o critério de custo é baseado na norma infinita, cuja principal característica é considerar, durante o horizonte de previsão, somente o maior erro entre a previsão da saída e a referência especificada. Assim sendo, o critério baseado na norma infinita é dado por :

$$J_{\infty}(\Delta \mathbf{u}) = \max_j |\hat{y}(k + j/k) - w(k + j)|, \quad j = N_1, \dots, N_y \quad (3.42)$$

A lei de controle CP-SFO é obtida a partir da resolução do seguinte problema :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & \max_j |\hat{y}(k + j/k) - w(k + j)|, \quad j = N_1, \dots, N_y \\ \text{s.a.} \quad & u_{\min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & y_{\min} \leq \hat{y}(k + j/k) \leq y_{\max} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (3.43)$$

Supondo que  $\mu^*(\Delta \mathbf{u})$  seja a solução de  $\max_j |\hat{y}(k + j/k) - w(k + j)|$ , tem-se que qualquer escalar  $\mu$  que satisfaça a

$$\mu \geq |\hat{y}(k + j/k) - w(k + j)| \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \quad (3.44)$$

é um limite superior para  $\mu^*(\Delta \mathbf{u})$ .

Portanto, a lei de controle (3.43) pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & -\mu \leq \hat{y}(k + j/k) - w(k + j) \leq \mu \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \\ & u_{\min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & y_{\min} \leq \hat{y}(k + j/k) \leq y_{\max} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (3.45)$$

o que é equivalente a :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} \quad \mu \\
 \text{s.a.} \\
 & H \Delta \mathbf{u} - \mu \leq -\hat{\mathbf{y}}_l + \mathbf{w} \\
 & -H \Delta \mathbf{u} - \mu \leq \hat{\mathbf{y}}_l - \mathbf{w} \\
 & \mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde :  $\boldsymbol{\mu} = [\mu \ \dots \ \mu]^T$  e  $\boldsymbol{\mu} \in I\!\!R^{(N_y - N_1 + 1)}$

Este é um problema de programação linear (PL - *Linear Programming*) [Luenberger, 1984], no qual todo mínimo local é também mínimo global. Portanto, a otimização da lei de controle CP-SFO com critério baseado na norma infinita não admite mínimos locais.

Da resolução do problema (3.46) em relação a  $\Delta \mathbf{u}$ , obtém-se o valor ótimo de  $\Delta u(k/k)$ , e o sinal de controle aplicado no processo é dado por :

$$u(k) = \Delta u(k/k) + u(k-1) \tag{3.47}$$

### 3.4.1 Exemplos

#### 3.4.1.1 Exemplo 3.6

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CP-SFO Adaptativo com critério baseado na norma infinita no controle de processos com ação integral.

Seja a função de transferência (3.39), descrita no Exemplo 3.3 e reescrita a seguir, onde o parâmetro  $J$  pode variar  $\pm 50\%$  em torno de seu valor nominal dado por 2 :

$$G(s) = \frac{20}{Js^3 + (10J + 1)s^2 + 20s}$$

O modelo baseado em séries de funções ortonormais, os parâmetros do controlador e os parâmetros do algoritmo de identificação são iguais aos descritos no Exemplo 3.3.

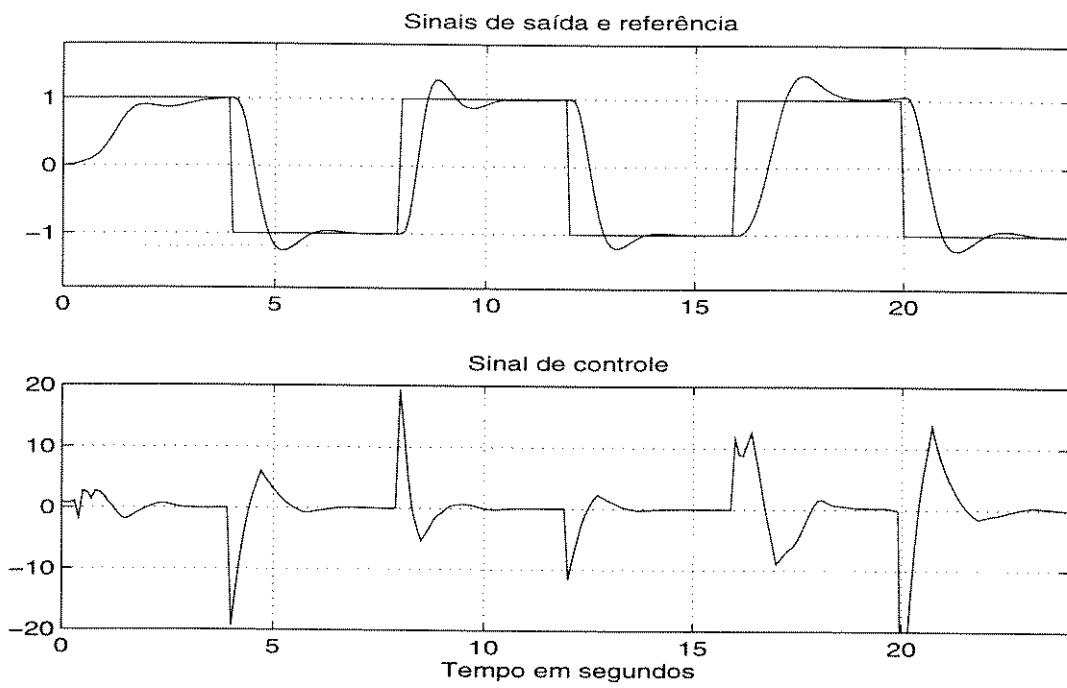


Figura 3.8: CP-SFO com critério baseado na norma infinita no controle de um processo com ação integral

Na figura 3.8, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $J$ , isto é,  $J = 2$ , para até 8 segundos,  $J = 1$ , entre 8 e 16 segundos, e  $J = 4$ , após 16 segundos.

Pode-se observar que a utilização das novas equações do preditor da saída permitem ao algoritmo CP-SFO Adaptativo identificar e controlar um processo com ação integral. O desempenho do sistema em malha fechada não apresenta variações significativas quando  $J$  varia em torno do valor nominal.

### 3.4.1.2 Exemplo 3.7

A seguir é apresentado um exemplo da aplicação do CP-SFO com critério baseado na norma infinita em processos com restrições no sinal de saída.

Seja o processo dado pela equação (3.41), descrita no Exemplo 3.5 e reescrita a seguir :

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.9q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}}$$

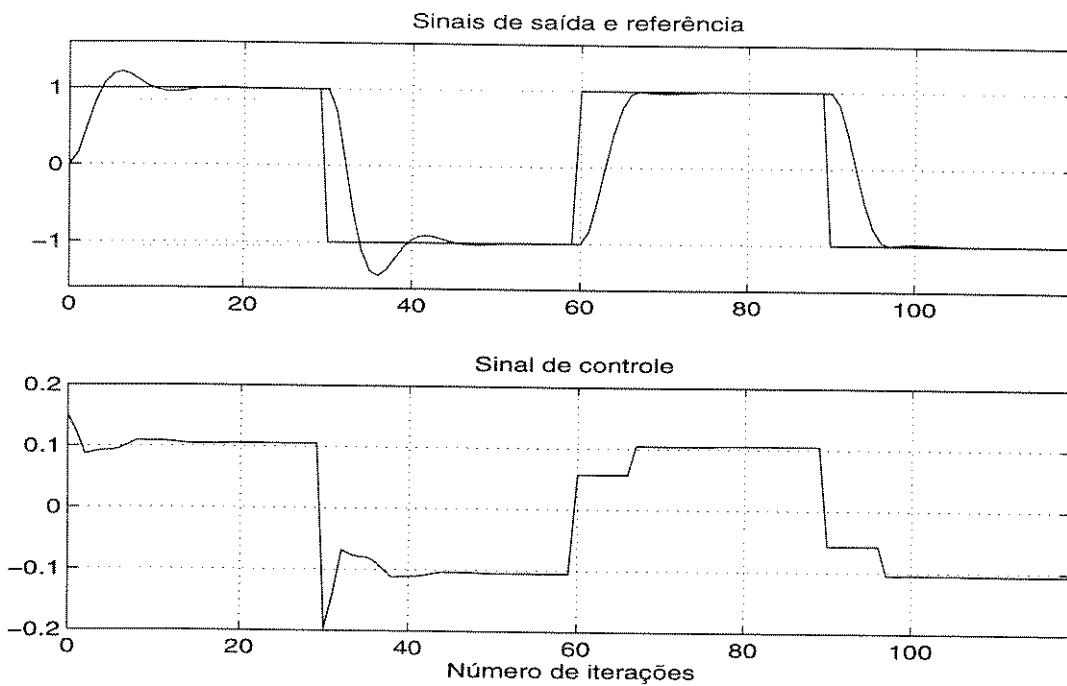


Figura 3.9: Desempenho do sistema em malha fechada para processo com restrições no sinal de saída

O modelo SFO e os parâmetros do controlador são os mesmos utilizados no Exemplo 3.5. As restrições do processo são incorporadas à lei de controle na forma de restrições lineares e o sinal  $\Delta u(k/k)$  ótimo é obtido através da resolução de um algoritmo de programação linear.

O desempenho do sistema em malha fechada é mostrado na figura 3.9, onde, somente após o instante  $k = 60$ , são incorporadas ao algoritmo CP-SFO as restrições de  $-1 \leq y(k) \leq 1$  no sinal de saída. Pode-se observar que, até  $k = 60$ , existe uma sobreelevação no sinal de saída, e somente após  $k = 60$ , este permanece dentro das especificações.

O mesmo efeito pode ser obtido através da seleção de outros valores para a sintonia do controlador como, por exemplo, aumentando  $N_u$  de 1 para 8, como é mostrado na figura 3.10. Nesta figura, pode-se observar que o sinal de saída permanece dentro da região factível, entretanto, existe um aumento significativo no esforço de controle.

Assim, o CP-SFO com restrições é capaz de evitar a região infactível para o sinal de saída sem que para tanto seja necessário aumentar o esforço de controle ou aumentar o tempo de subida do sinal de saída.

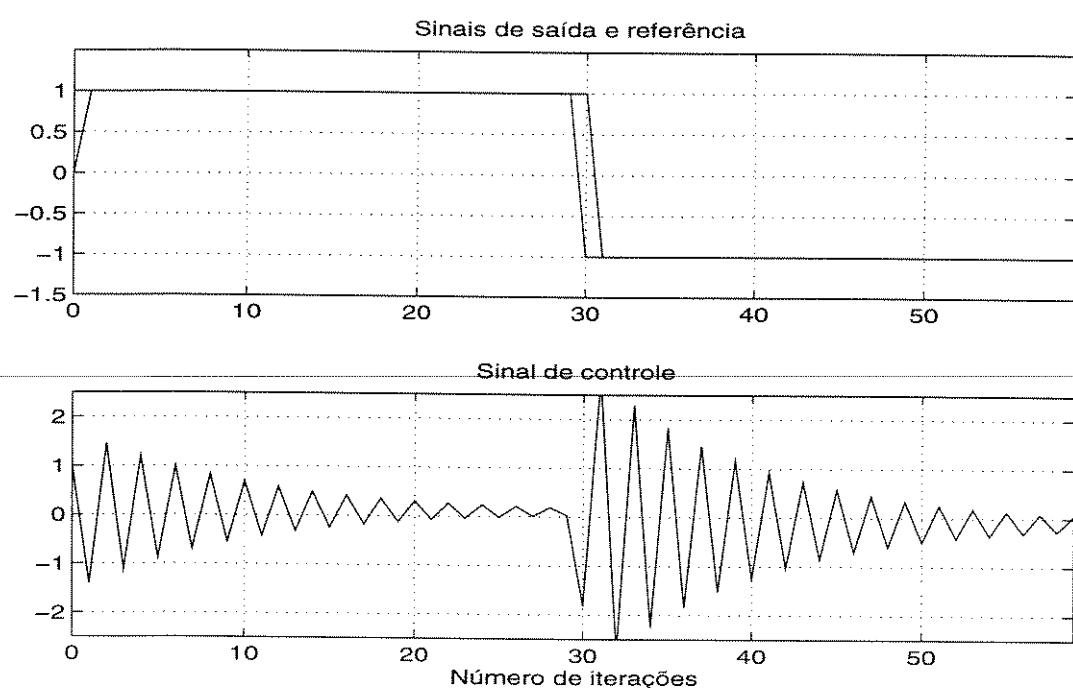


Figura 3.10: Desempenho do sistema em malha fechada com CP-SFO com  $N_u=8$

### 3.5 Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

Os primeiros trabalhos sobre a estabilidade do sistema em malha fechada utilizando algoritmos MBPC foram no sentido de relacionar os parâmetros de projeto ( $N_1, N_y, N_u, \lambda$ ) com a localização dos pólos do sistema em malha fechada. Porém, esta relação é possível somente em alguns poucos casos particulares, sendo de difícil obtenção para o caso geral de seleção dos parâmetros de projeto do controlador.

Quando não existem erros de modelagem, é possível garantir a estabilidade para alguns subconjuntos dentre as possibilidades de seleção dos parâmetros de projeto. Por exemplo, para o algoritmo GPC, que compartilha muitas características com a maioria dos algoritmos MBPC propostos na literatura [Soeterboek, 1992], pode-se demonstrar que [Clarke e Mohtadi, 1989] [Oliveira, 1992] :

*i)* Quando  $N_1 = d$ , onde  $d$  é o atraso de transporte do processo,  $N_u = N_y - N_1 + 1$  e  $\lambda = 0$ , todos os pólos do sistema em malha fechada são iguais aos zeros do modelo em malha aberta, e o sistema é estável se o sistema for de fase mínima.

*ii)* Quando  $N_y$  tende a infinito,  $N_1 = 1$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ , os pólos do sistema em malha fechada são iguais aos pólos do processo, portanto, o sistema é estável em malha fechada se o processo o for em malha aberta.

*iii)* Quando  $\lambda$  tende a infinito, os pólos do sistema em malha fechada são iguais aos pólos do modelo mais um pólo no círculo unitário. Portanto, tem-se o mesmo resultado citado acima.

*iv)* Quando  $N_1 \geq nb+1$ ,  $NU \geq na+1$ , onde  $na$  e  $nb$  são, respectivamente, as ordens dos polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  do modelo CARIMA e  $\lambda = 0$ , os pólos do sistema em malha fechada estão na origem do círculo unitário e, portanto, o sistema é estável.

É importante destacar que estes resultados são válidos somente quando o modelo é exatamente igual ao processo real.

Algoritmos MBPC com garantia de estabilidade e horizonte de previsão infinito são também desenvolvidos em [Bitmead et al., 1990] [Morari, 1994] [Scokaert e Rawlings, 1996].

Todas estas condições de estabilidade do sistema em malha fechada neces-

sitam de valores limites para os parâmetros de projeto, como zero ou infinito, ou determinam uma alocação de pólos na origem (tipo *dead beat*).

Com esta motivação, nas seções a seguir, a estabilidade do algoritmo CP-SFO para processos sem restrições e critério de custo quadrático é investigada, a partir do desenvolvimento das equações do sistema em malha fechada. A análise é feita inicialmente para algoritmos CP-SFO onde existe equivalência entre o modelo e o processo e, em seguida, analisa-se o caso do algoritmo CP-SFO adaptativo.

### 3.5.1 Equações do sistema em malha fechada

A seguir são desenvolvidas as equações do sistema em malha fechada para o algoritmo CP-SFO, quando o critério de custo é quadrático e não existem restrições no processo. Neste caso, existe uma solução analítica para o problema de otimização da lei de controle, conforme discutido na seção (3.3). Assim sendo, tem-se que o vetor  $\Delta\mathbf{u}$ , que contém os futuros sinais de controle, é dado pela equação (3.35), reescrita a seguir :

$$\Delta\mathbf{u} = -(1/2)Q^{-1}\mathbf{f}$$

ou

$$\Delta\mathbf{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{y}}_l) \quad (3.48)$$

e o sinal de controle  $\Delta u(k/k)$  é dado por :

$$\Delta u(k/k) = \mathbf{m}^T (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{y}}_l) \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{m}^T$  é a primeira linha da matriz  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ ; e  $m_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente da matriz  $\mathbf{m}$ .

A seguir, é analisado o caso de processos sem ação integral.

Através do desenvolvimento apresentado no Capítulo 2, sabe-se que o vetor de previsões da saída livre  $\hat{\mathbf{y}}_l$  é dado pela equação (2.86) e, uma vez que  $\hat{y}_l(k+j/k)$  é dada pela equação (2.71), tem-se :

$$\hat{\mathbf{y}}_l = \mathbf{y} + [\mathbf{c}^T(K_j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} \Delta \mathbf{l}(k) \quad (3.50)$$

onde :

$$\mathbf{y}_m = [y_m(k) \ \dots \ y_m(k)]^T \quad (3.51)$$

$$[\mathbf{c}^T(K_j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T(K_{N_1} - I) \\ \mathbf{c}^T(K_{N_1+1} - I) \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T(K_{N_y} - I) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Utilizando a definição acima, obtém-se :

$$\Delta u(k/k) = \mathbf{m}^T \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T(K_j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} \Delta \mathbf{l}(k) \right) \quad (3.53)$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta u(k/k) = \mathbf{m}^T & \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T(K_j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} \right. \\ & \times (\mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(k-1)) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sabendo que  $K_j = \sum_{i=0}^j A^i$ , esta equação pode ser reescrita como a seguir :

$$\begin{aligned} \Delta u(k/k) = \mathbf{m}^T & \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T(A^j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) - \right. \\ & \left. [\mathbf{c}^T K_{j-1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) + [\mathbf{c}^T K_{j-1} A]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Através das equações do modelo do processo, obtém-se :

$$\begin{aligned} \Delta u(k/k) = \mathbf{m}^T & \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T(A^j - I)]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) - \right. \\ & \left. \mathbf{g} u(k-1) \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde

$$\mathbf{g} = [ g_{N_1} \dots g_{N_y} ]^T = [ \mathbf{c}^T K_{j-1} ]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \quad (3.57)$$

de acordo com a definição (2.87).

Assim,  $u(k)$  é dado por :

$$\begin{aligned} u(k) = & \left( 1 - \mathbf{m}^T [ \mathbf{c}^T A^j ]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} - \mathbf{m}^T \mathbf{g} \right) u(k-1) - \\ & \mathbf{m}^T [ \mathbf{c}^T A^{j+1} ]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) + s ( \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) - y_m(k) ) \\ & + \mathbf{m}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$s = \sum_{i=1}^{N_y-N_1+1} m_i \quad (3.59)$$

Portanto, utilizando o modelo do processo, tem-se que as equações do sistema em malha fechada são dadas por :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}(k) = A \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{b} u(k-1) \\ u(k) = \mathbf{m}^T [ \mathbf{c}^T A^{j+1} ]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) + \\ \quad \left( 1 - \mathbf{m}^T [ \mathbf{c}^T A^j ]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} - \mathbf{m}^T \mathbf{g} \right) u(k-1) - \\ \quad s ( \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) - y_m(k) ) + \mathbf{m}^T \mathbf{w} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

### 3.5.2 Análise da estabilidade do sistema em malha fechada para $N_u = 1$

Nesta seção, analisa-se a estabilidade do sistema em malha fechada quando o horizonte de controle é igual a 1, utilizando o desenvolvimento apresentado na seção anterior.

Demonstra-se que, através da seleção de valores suficientemente elevados para horizonte de previsão  $N_y$  ou para a ponderação  $\lambda$ , garante-se a estabilidade do sistema do sistema em malha fechada para os algoritmos CP-SFO adaptativo e não adaptativo.

Seja o algoritmo CP-SFO descrito na seção anterior, onde o sinal de controle é dado pela equação (3.56). Supondo que o horizonte de controle  $N_u$  é igual a 1, tem-se que :

$$G = \mathbf{g} \quad (3.61)$$

e

$$\mathbf{m}^T = (\mathbf{g}^T \mathbf{g} + \lambda)^{-1} \mathbf{g}^T \quad (3.62)$$

Assim, a partir da equação (3.56), tem-se que :

$$(\mathbf{g}^T \mathbf{g} + \lambda) \Delta u(k/k) = \mathbf{g}^T \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^j - \mathbf{I})]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) - \mathbf{g} u(k-1) \right) \quad (3.63)$$

e o sinal  $u(k)$  é dado por :

$$u(k) = \alpha \left( \mathbf{g}^T \left( \mathbf{w} - \mathbf{y}_m - [\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^j - \mathbf{I})]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) \right) + \lambda u(k-1) \right) \quad (3.64)$$

onde

$$\alpha = (\mathbf{g}^T \mathbf{g} + \lambda)^{-1} \quad (3.65)$$

Esta equação é equivalente a :

$$u(k) = \alpha \left( -\mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T \mathbf{A}^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k) + \lambda u(k-1) \right) + \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \alpha \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i (\mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) - y_m(k)) \quad (3.66)$$

O sistema em malha fechada é dado por :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}(k) = A \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{b} u(k-1) \\ u(k) = -\alpha \mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^{j+1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) - \\ \quad \alpha \left( \lambda - \mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \right) u(k-1) + \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \\ \quad \alpha \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i (\mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) - y_m(k)) \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Para se obter as condições de estabilidade em malha fechada, utiliza-se o teorema a seguir.

**Teorema 3.1** [Elshafei et al., 1994] :

Seja o seguinte processo, estável em malha aberta, dado por :

$$\mathbf{z}(k+1) = \Phi \mathbf{z}(k) \quad (3.68)$$

onde

$$\exists P > 0 \quad \forall Q > 0 \quad (3.69)$$

tal que

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q \quad (3.70)$$

Então, o processo dado por :

$$\mathbf{z}(k+1) = (\Phi + \delta) \mathbf{z}(k) \quad (3.71)$$

é estável se

$$0 \leq \|\delta\| < -\|\Phi\| + \sqrt{\|\Phi\|^2 + \frac{\lambda_{min}(Q)}{\|P\|}} \quad (3.72)$$

O caso do CP-SFO com  $N_u > 1$  ainda está em aberto, pois o Teorema (3.1) é aplicável somente no caso particular do sistema em malha fechada da equação (3.60) representado pela equação (3.67), isto é, quando  $N_u = 1$ .

### 3.5.2.1 Análise do caso de equivalência entre modelo e processo

A seguir é analisada a estabilidade do sistema em malha fechada quando o modelo SFO é igual ao processo, isto é, não existe erro de truncamento. A partir do modelo (2.29), tem-se que a saída real do processo é dada por :

$$y_m(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{l}(k) + \xi(k) \quad (3.73)$$

Assim, o sistema em malha fechada (3.67) é dado por :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}(k) = A \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{b} u(k-1) \\ u(k) = -\alpha \mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^{j+1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) - \\ \quad \alpha \left( \lambda - \mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \right) u(k-1) + \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \\ \quad \alpha \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \xi(k) \end{array} \right. \quad (3.74)$$

Estas equações podem ser reescritas como a seguir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}(k) \\ u(k/k) \end{bmatrix} = [\Phi + \alpha \Gamma] \begin{bmatrix} \mathbf{l}(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \left( \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \xi(k) \right) \quad (3.75)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^{j+1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \left( \lambda - \mathbf{g}^T [\mathbf{c}^T A^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \right) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

**Teorema 3.2** [Elshafei et al., 1994] :

*Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada descrito pela equação (3.75) é a seleção de valores para o horizonte de previsão  $N_y$  ou para a ponderação  $\lambda$  suficientemente grandes de forma a obter um valor para  $\alpha$  pequeno<sup>9</sup>, isto é, de forma a satisfazer o Teorema (3.1).*

**Prova:** A prova deste teorema é baseada na aplicação do Teorema (3.1).

Sabendo que o modelo SFO do processo é estável em malha aberta, tem-se que a matriz  $\Phi$ , dada pela equação (3.76), possui os autovalores dentro do círculo unitário, satisfazendo à condição do Teorema (3.1), dada pelas equações (3.68) a (3.70).

Os elementos da matriz  $\alpha \Gamma$  podem ser feitos suficientemente pequenos, isto é, de forma a satisfazer a equação (3.72), através da definição de valores pequenos para o escalar  $\alpha$ . A relação entre  $\alpha$  e os parâmetros de projeto  $N_y$  e  $\lambda$  é dada pela equação (3.65), reescrita a seguir.

$$\alpha = (\mathbf{g}^T \mathbf{g} + \lambda)^{-1}$$

Sabendo que  $\mathbf{g} = [g_{N_1} \dots g_{N_y}]$  e que  $g_i$  representam os coeficientes da resposta ao degrau do modelo em malha aberta, tem-se que  $\alpha$  é inversamente proporcional a  $N_y$  e a  $\lambda$ .

Portanto, aumentando-se  $N_y$  ou  $\lambda$ , pode-se diminuir  $\alpha$  de forma que o produto  $\alpha \Gamma$  satisfaça a equação (3.72), garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada.

### 3.5.2.2 Análise do caso adaptativo

A seguir é analisada a estabilidade do sistema em malha fechada com CP-SFO Adaptativo. Seja o modelo (2.29) do processo dado por :

<sup>9</sup>A relação entre  $N_y$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$  é dada pela equação (3.65).

$$y(k) = \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{l}(k) \quad (3.78)$$

onde,  $\hat{\mathbf{c}}$  contém os coeficientes estimados da série e supõe-se que  $n$  é escolhido tal que os valores de ordem superior da série tendam para 0.

Neste caso, os parâmetros estimados a partir de um estimador de mínimos quadrados recursivo possuem as seguintes propriedades [Goodwin e Sin, 1984] :

1.  $\{\hat{\mathbf{c}}(k)\}$  é limitado;
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{c}}(k) - \hat{\mathbf{c}}(k-1)| = 0$
3. Existe uma sequência não negativa de sinais  $\{\zeta(k)\}$  e  $\{\psi(k)\}$  que converge para zero tal que :

$$|y(k) - y_m(k)| \leq \zeta(k) \|\mathbf{l}(k)\| + \psi(k) \quad (3.79)$$

A equação do sistema em malha fechada (3.67) para o caso adaptativo é dada por :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}(k) = A \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{b} u(k-1) \\ u(k/k) = -\alpha \mathbf{g}^T [\hat{\mathbf{c}}^T A^{j+1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{l}(k-1) - \\ \quad \alpha \left( \lambda - \mathbf{g}^T [\hat{\mathbf{c}}^T A^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \right) u(k-1) + \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \\ \quad \alpha \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i (y(k) - y_m(k)) \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Estas equações podem ser reescritas como apresentado a seguir :

$$\mathbf{z}(k+1) = [\Phi + \alpha \Gamma] \mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (3.81)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}^T [\hat{\mathbf{c}}^T A^{j+1}]_{j=N_1, \dots, N_y} \left( \lambda - \mathbf{g}^T [\hat{\mathbf{c}}^T A^j]_{j=N_1, \dots, N_y} \mathbf{b} \right) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

e

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{l}(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \left( \mathbf{g}^T \mathbf{w} + \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i (y(k) - y_m(k)) \right) \quad (3.85)$$

Neste caso, tem-se que  $\mathbf{v}(k)$  é dependente do sinal de saída e, portanto, para a análise da estabilidade do sistema no caso adaptativo, utiliza-se o seguinte teorema :

**Teorema 3.3** [Payne, 1987] :

Seja o seguinte processo dado por :

$$\mathbf{z}(k+1) = F \mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (3.86)$$

onde  $\mathbf{z}(k)$  e  $\mathbf{v}(k)$  são vetores de dimensão finita.

Supõe-se que o vetor  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$  sejam limitados e, ainda, que o processo

$$\mathbf{z}(k+1) = F \mathbf{z}(k) \quad (3.87)$$

seja exponencialmente estável. Além disso, supõe-se que exista uma sequência de números não negativos  $\{\gamma(k)\}$  e  $\{\delta(k)\}$  e um inteiro  $N \geq 0$  tal que :

$$\|\mathbf{v}(k)\| \leq \gamma(k) \sum_{i=0}^N \|\mathbf{z}(k-i)\| + \delta(k) \quad (3.88)$$

Sob estas condições, se  $\{\gamma(k)\}$  converge para zero e  $\{\delta(k)\}$  é limitado, então  $\{\mathbf{z}(k)\}$  e  $\{\mathbf{v}(k)\}$  são limitados. Se  $\{\delta(k)\}$  também converge para zero, então  $\{\mathbf{z}(k)\}$  e  $\{\mathbf{v}(k)\}$  convergem para zero.

A estabilidade do sistema em malha fechada para o caso adaptativo é descrita através do seguinte teorema.

**Teorema 3.4** [Elshafei et al., 1994] :

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada descrito pela equação (3.81) é a seleção de valores para o horizonte de previsão  $N_y$  ou para a ponderação  $\lambda$  suficientemente grandes de forma a obter um valor para  $\alpha$  pequeno para a satisfazer o Teorema (3.1).

**Prova:** Utilizando o Teorema (3.1) e um desenvolvimento análogo ao Teorema (3.2), tem-se que o escalar  $\alpha$  pode ser feito tão pequeno quanto se queira através da seleção de  $N_y$  e/ou  $\lambda$  suficientemente grandes, portanto, o sistema dado por :

$$\mathbf{z}(k+1) = [\Phi + \alpha \Gamma] \mathbf{z}(k) \quad (3.89)$$

é estável, satisfazendo à condição do Teorema (3.3) dada pela equação (3.87).

$\|\mathbf{v}(k)\|$  é dado por :

$$\|\mathbf{v}(k)\| = \alpha \left( \|\mathbf{g}^T \mathbf{w}\| + \left| \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \right| |\hat{y}(k) - y(k)| \right) \quad (3.90)$$

Pela propriedade do estimador dos mínimos quadrados dada pela equação (3.79), tem-se que :

$$|y(k) - y_m(k)| \leq \zeta(k) \|\mathbf{l}(k)\| + \psi(k)$$

ou

$$\|\mathbf{v}(k)\| \leq \alpha \left( \|\mathbf{g}^T \mathbf{w}\| + \left| \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \right| (\zeta(k) \|\mathbf{l}(k)\| + \psi(k)) \right) \quad (3.91)$$

onde  $\zeta(k)$  e  $\psi(k)$  são sequências de sinais não negativos que convergem para zero.

Esta equação pode ser reescrita como a seguir :

$$\|\mathbf{v}(k)\| \leq \gamma(k) \|\mathbf{l}(k)\| + \delta(k) \quad (3.92)$$

onde :

$$\gamma(k) = \alpha \left| \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \right| \zeta(k) \quad (3.93)$$

$$\delta(k) = \alpha \left( \|\mathbf{g}^T \mathbf{w}\| + \left| \sum_{i=N_1}^{N_y} g_i \right| \psi(k) \right) \quad (3.94)$$

Como  $\zeta(k)$  e  $\psi(k)$  são limitados, tem-se que  $\gamma(k)$  e  $\delta(k)$  também são sinais não negativos limitados, e a sequência  $\gamma(k)$  converge para zero. Portanto, utilizando o Teorema 3.3, tem-se que  $\{\mathbf{z}(k)\}$  e  $\{\mathbf{v}(k)\}$  são limitados e o sistema em malha fechada dado por (3.67) é estável.

## 3.6 Resumo

Neste capítulo descreve-se o algoritmo MBPC adaptativo baseado no modelo SFO. O critério de custo é descrito através das normas Euclidianas ou infinita, e as restrições nos sinais de entrada e saída do processo são incorporadas à lei de controle como inequações lineares ao problema de minimização do critério de custo. Com o objetivo de diminuir o tempo computacional do algoritmo, desenvolveu-se um método subótimo para diminuição do número de restrições da lei de controle baseado na eliminação de restrições redundantes.

Comparado com outras estratégias de controle preditivo adaptativo, o algoritmo descrito apresenta algumas vantagens, entre elas : *i)* Em relação ao modelo de resposta ao impulso, existem menos parâmetros para identificar, o que melhora a qualidade da identificação. *ii)* Não existe a necessidade da especificação da ordem e do atraso do modelo, o que representa uma vantagem em relação a controladores preditivos baseados em modelos estruturados quando o conhecimento exato desses parâmetros não estiver disponível.

Finalmente, o algoritmo de controle descrito, com critério quadrático e horizonte de controle igual a 1, é estável em malha fechada através da escolha adequada do horizonte de previsão ou da ponderação no esforço de controle.

---

# Capítulo 4

## Controlador Preditivo Robusto

### 4.1 Introdução

Os controladores preditivos (MBPC - *Model Based Predictive Controllers*) são obtidos minimizando um critério de custo que é função da saída prevista, do sinal de referência e do esforço de controle. Nesta minimização, é também considerada a existência de restrições nos sinais de entrada e saída do processo. As previsões da saída são calculadas utilizando-se um modelo do processo e, portanto, o desempenho do sistema em malha fechada depende da escolha apropriada do modelo de previsão. Na maioria dos casos, utiliza-se um único modelo linear para descrever o comportamento do processo. Entretanto, esta suposição é somente uma aproximação, acarretando incertezas nos valores dos parâmetros do modelo. Assim, é importante considerar na fase de projeto, o efeito das incertezas do modelo na otimização da lei de controle e na estabilidade do sistema em malha fechada.

O algoritmo de controle preditivo que considera de maneira explícita, no cálculo da lei de controle, incertezas estruturadas no modelo do processo é denominado controlador preditivo robusto (CPR). Esta abordagem para o controle de processos incertos é baseada na minimização (em relação aos incrementos futuros de controle) do máximo do critério de custo (em relação ao conjunto de valores possíveis para a saída prevista, que é calculado a partir da incerteza estruturada do modelo), resultando na otimização *on line* de um problema *min-max*.

Esta proposta de controle preditivo robusto foi inicialmente apresentada em [Campo e Morari, 1987]. Neste algoritmo, o modelo é formado

pelos coeficientes da resposta ao impulso do processo incerto e, a partir deste modelo, calcula-se o conjunto de valores possíveis para a previsão da saída. O critério de custo é definido utilizando-se uma norma do tipo infinita. Baseado no algoritmo proposto em [Campo e Morari, 1987], em [Allwright e Papavasiliou, 1992], descreve-se uma estratégia para a resolução do problema *mix-max* cujo objetivo é reduzir a complexidade computacional da lei de controle através da diminuição do número de restrições. Em [Zheng e Morari, 1993], analisa-se a estabilidade de um algoritmo CPR definido por um modelo derivado da resposta ao impulso do processo incerto e por um critério de custo cujo horizonte de previsão é fixo e proporcional ao número de coeficientes do modelo.

Outros algoritmos CPR foram desenvolvidos utilizando modelos de resposta ao impulso e ao degrau com coeficientes incertos, como por exemplo, os descritos em [Cuthrell et al., 1989] [Biegler, 1989], para o controle do processo benchmark Shell, cujo modelo apresenta incertezas nos valores dos ganhos das funções de transferência. A lei de controle é obtida pela otimização *min-max* de um critério de custo do tipo quadrático. Nestes trabalhos, o modelo do processo Shell com incertezas estruturadas é reescrito na forma de representação de estados, utilizando os coeficientes da resposta ao impulso do processo. Neste caso, tem-se que o critério de custo é convexo em relação à incerteza paramétrica, isto é, à incerteza nos ganhos do processo. Conforme descrito em [Prett e Garcia, 1988], esta característica é fundamental para que a resolução da lei de controle *min-max* seja factível.

Todos estes algoritmos são baseados em modelos de resposta ao impulso, que geralmente possuem um número elevado de parâmetros, o que aumenta a complexidade do cálculo da lei de controle e da identificação do espaço de pertinência dos parâmetros do modelo.

Outra abordagem para a modelagem de processos incertos no contexto de algoritmos CPR é descrita em [Gutierrez e Camacho, 1995]. Esta proposta se caracteriza pela utilização do modelo CARIMA, que possui um número menor de parâmetros incertos que os modelos de resposta ao impulso. Entretanto, este tipo de modelagem necessita do conhecimento *a priori* da ordem e do atraso do processo, e a resolução do problema de otimização não é factível quando existem incertezas nos parâmetros da parte auto regressiva do modelo pois, neste caso, o número de restrições do problema *min-max* de otimização é infinito. Para assegurar um número finito de restrições, em [Gutierrez e Camacho, 1995] faz-se uma discretização do espaço de incertezas formado pelos parâmetros da parte auto regressiva do modelo. Entretanto, não é possível garantir que o sinal de controle obtido será o valor ótimo em

relação ao problema *min-max*.

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo de controle preditivo robusto para processos incertos baseado na modelagem por séries de funções ortonormais (CPR-SFO).

A modelagem por séries de funções ortonormais ( modelo SFO ) resulta em uma representação não estruturada compacta para o processo, pode ser também derivada para processos com ação integral e, quando utilizada no contexto de algoritmos CPR, o sistema apresenta as seguintes características [Oliveira et al., 1996b] :

*i)* O sinal de controle obtido é ótimo em relação ao problema de otimização *min-max*. Neste algoritmo, a convexidade da função de custo é assegurada em relação a todos os parâmetros incertos do modelo. A utilização de propriedades de problemas de otimização *min-max* de funções convexas permite reescrever a lei de controle do CPR como um problema de otimização de resolução factível e sujeito a um número finito de restrições.

*ii)* O modelo descrito por funções ortonormais com incertezas estruturadas é capaz de representar um processo estável com um número bem menor de parâmetros incertos que o modelo de resposta ao impulso. Assim, o problema de identificação robusta é simplificado e diminui-se o esforço computacional na solução do problema de otimização *min-max* da lei de controle.

*iii)* Não é necessário o conhecimento *a priori* da ordem e do atraso do processo.

*iv)* Existem condições suficientes para a estabilidade do sistema em malha fechada.

O algoritmo de controle preditivo apresentado a seguir, além de considerar explicitamente as incertezas estruturadas do processo, também incorpora o conhecimento a respeito das restrições do processo.

Nas seções seguintes, descreve-se um algoritmo de controle preditivo robusto baseado em séries de funções ortonormais - CPR-SFO. A formulação do problema *min-max* é apresentada na seção 4.2, onde também consideram-se as restrições nos sinais do processo. Os algoritmos de controle CPR-SFO, resultantes da definição das normas euclidiana e infinita para o critério de custo, são mostrados nas seções 4.3 e 4.4 e, na seção 4.5, analisa-se a estabilidade do sistema em malha fechada.

## 4.2 Definição da Lei de Controle

### 4.2.1 Introdução

O objetivo dos controladores preditivos é gerar uma evolução ótima no tempo do sinal de saída do processo otimizando um critério de desempenho. Este critério é descrito em função do erro de previsão da saída do processo em relação a um sinal de referência especificado e de um termo que considera o esforço de controle. A especificação do critério é realizada utilizando-se normas espaciais e temporais, conforme discutido no Capítulo 3 deste trabalho.

Após a definição do critério de custo, este é minimizado em relação às variações futuras do sinal de controle, para se obter a sequência ótima de sinais de controle a serem aplicados no processo. Porém, quando o modelo do processo contém incertezas estruturadas com limites conhecidos, outra abordagem deve ser utilizada na otimização do critério de custo. Neste caso, a lei de controle é derivada a partir da minimização do máximo do critério considerando todos os modelos contidos na família de modelos descrita pela incerteza paramétrica. Como resultado, tem-se um problema de otimização tipo *min-max* e a sequência ótima de futuros sinais de controle é a melhor para o pior caso entre todos os modelos descritos pelo espaço de incerteza.

Assim sendo, a lei de controle para os algoritmos MBPC Robusto é dada por :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = \operatorname{argmin} \{ & \max_{\varepsilon \in \Omega} f(\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j), \Delta u(k+j-1/k), \\ & j = N_1, \dots, N_y ) \} \\ \text{s.a} \quad & \Delta u(k+j/k) = 0 \quad \forall \quad j \geq N_u \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde :

$f(\bullet)$  indica a medida de desempenho do sistema que é dada pela escolha das normas espacial e temporal;

$N_1$  é o horizonte inicial de previsão;

$N_y$  é o horizonte final de previsão;

$N_u$  é o horizonte de controle;

$\hat{y}(k+j/k, \varepsilon)$  é a previsão da saída  $j$  passos a frente em função da incerteza paramétrica  $\varepsilon$ , para  $\varepsilon \in \Omega$ . A previsão da saída é calculada utilizando as equações (2.96) e (2.91), que consideram os casos de processos com ou sem ação integral, respectivamente.

$w(k)$  é o sinal de referência;

$\Delta u(k+j/k)$  é a variação do sinal de controle no instante  $k+j$ , calculada em  $k$ ;

A solução do problema de otimização (4.1) consiste de um vetor composto de  $N_u$  futuras variações no sinal de controle dado por :

$$\Delta \mathbf{u} = [ \Delta u(k/k) \quad \Delta u(k+1/k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1/k) ]^T \quad (4.2)$$

Somente o primeiro elemento de  $\Delta \mathbf{u}$  é aplicado ao processo, isto é,  $u(k) = \Delta u(k/k) + u(k-1)$  e no próximo instante de amostragem todo o procedimento é repetido, conforme a estratégia do controle de horizonte deslizante (*receding horizon control*).

Os critérios de custo mais utilizados em controle preditivo são o critério baseado na norma euclidiana (critério quadrático) e o critério baseado na norma infinita. Estes dois casos, no contexto do controlador preditivo robusto baseado em séries de funções ortonormais (CPR-SFO), são discutidos nas seções 4.3 e 4.4. A seguir, descreve-se a incorporação no algoritmo CPR-SFO das restrições nos sinais de controle e de saída do processo.

#### 4.2.2 Lei de controle para processos com restrições

Frequentemente, são encontrados na prática processos com restrições nos sinais de entrada e saída do processo, devido por exemplo a limitações físicas dos acionadores, especificações na qualidade do produto ou exigências de segurança. Estas restrições se refletem em limites na amplitude e na variação do sinal de controle e na amplitude do sinal de saída do processo. O CPR-SFO, assim como os algoritmos MBPC de maneira geral, pode incorporar este tipo de restrição na lei de controle e, a seguir é discutido o caso de restrições na amplitude e na variação do sinal de controle.

As restrições nos sinais do processo são consideradas como restrições lineares no problema de otimização (4.1), ou seja, estas são dadas por :

$$\begin{aligned} u_{min} &\leq u(k + j - 1/k) \leq u_{max} & \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} &\leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{max} & \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.3)$$

Neste caso, a lei de controle CPR-SFO é dada por :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = \arg\min \{ & \max_{\varepsilon \in \Omega} f(\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j), \Delta u(k + j - 1/k), \\ & j = N_1, \dots, N_y) \} \\ \text{s.a.} \\ & \Delta u(k + j/k) = 0 \quad \forall j \geq N_u \\ & u_{min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde o vetor solução  $\Delta \mathbf{u}$  é calculado de forma a satisfazer as restrições operacionais do processo representadas pelas inequações (4.3).

O conjunto de restrições no sinal de controle do processo pode ser escrito linearmente em relação ao vetor  $\Delta \mathbf{u}$ , isto é :

$$\mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \quad (4.5)$$

onde :

$$\mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\Delta u} \\ \mathcal{A}_u \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\Delta u} \\ \mathbf{v}_u \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

As matrizes  $\mathcal{A}_{\Delta u}$  e  $\mathcal{A}_u$  e os vetores  $\mathbf{v}_{\Delta u}$  e  $\mathbf{v}_u$  são calculados conforme discutido na seção 3.2.2 do Capítulo 3.

### 4.3 CPR-SFO com Critério de Custo Quadrático

O critério de custo quadrático para algoritmos CPR-SFO é definido por :

$$J_q(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) = \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \quad (4.7)$$

onde  $\lambda$  é um fator de ponderação para os futuros incrementos no sinal de controle.

A lei de controle CPR-SFO com critério quadrático é obtida otimizando o seguinte problema *min-max* :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} & \left\{ \max_{\varepsilon \in \Omega} \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \right\} \right\} \\ \text{s.a.} & \begin{aligned} u_{min} & \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} & \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Assumindo que  $\mu^*(\Delta \mathbf{u})$  é a solução do problema  $\max_{\varepsilon \in \Omega} \{ J_q(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) \}$ , qualquer escalar  $\mu$  que satisfaça a

$$\mu \geq J_q(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \Omega \quad (4.9)$$

será um limite superior de  $\mu^*(\Delta \mathbf{u})$ . Portanto, este problema de otimização é equivalente a :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} & \mu \\ \text{s.a.} & \begin{aligned} u_{min} & \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} & \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) & \leq \mu \quad (4.10) \\ \forall \varepsilon \in \Omega & \end{aligned} \end{aligned}$$

A formulação vetorial deste problema é descrita a seguir. O critério de custo quadrático (4.7), reescrito numa forma vetorial, é dado por :

$$J_q(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) = \Delta \mathbf{u}^T Q(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}^T(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + d(\varepsilon) \quad (4.11)$$

onde :

$$Q(\varepsilon) = G^T(\varepsilon)G(\varepsilon) + \lambda I, \quad \text{sendo } I \text{ a matriz identidade} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{f}(\varepsilon) = 2G^T(\varepsilon)(\hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) - \mathbf{w}) \quad (4.13)$$

$$d(\varepsilon) = (\hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) - \mathbf{w})^T (\hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) - \mathbf{w}) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{w} = [ w(k+N_1) \ w(k+N_1+1) \ \dots \ w(k+N_y) ]^T \quad (4.15)$$

Nestas equações,  $G(\varepsilon)$  e  $\hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon)$  são calculados conforme mostrado na seção 2.4.2.3.

Portanto, o problema de otimização (4.10) é igual a :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} && \mu \\ & \text{s.a.} && \\ & && \mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \\ & && \Delta \mathbf{u}^T Q(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}^T(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + d(\varepsilon) \leq \mu \quad \forall \varepsilon \in \Omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

Neste caso, a função objetivo é linear e as restrições são lineares ou convexas. Portanto, um ótimo local do problema (4.16) é também ótimo global [Bazaraa e Shetty, 1979], isto é, a lei de controle não admite ótimos locais. Uma solução ótima global para este problema, e consequentemente o

valor ótimo para  $\Delta u(k)$ , pode ser obtida através de um algoritmo de programação quadrática sequêncial (*Sequential Quadratic Programming*) - SQP [Gill et al., 1981].

O número de restrições do problema (4.16) é função da quantidade de modelos contidos no espaço formado pelos parâmetros incertos e, uma vez que esta grandeza é infinita, a resolução computacional do problema (4.16) somente é possível se o critério de custo for convexo em relação às incertezas paramétricas  $\varepsilon$ . Este problema é discutido a seguir.

### 4.3.1 Análise da Convexidade do Critério Quadrático

No problema de otimização dado pela equação (4.16), o número de restrições é função do número de modelos formados pelos parâmetros incertos, isto é, todos os modelos tal que  $\varepsilon \in \Omega$ . Uma vez que  $\Omega$  descreve infinitos modelos, o número de restrições também é infinito.

Para tornar possível a resolução deste problema, pode-se utilizar o seguinte teorema [Luenberger, 1984] :

**Teorema 4.1** *Seja  $f$  uma função convexa sobre um conjunto convexo, fechado e limitado  $\Omega$ . Se  $f$  tem um máximo em  $\Omega$ , este é atingido em um ponto extremo de  $\Omega$ .*

**Comentário :** Quando o conjunto  $\Omega$  é um politopo, o máximo de  $f$  é atingido em um vértice deste politopo.

Assim, tem-se que todas as soluções candidatas ao problema *min-max* estão nos vértices da região de incerteza (o espaço formado por  $\Omega$ ) se o critério de custo for convexo em relação aos parâmetros incertos ( $\varepsilon$ ). Sabendo que o número de vértices de  $\Omega$  é finito, a resolução numérica do problema *min-max* de otimização torna-se possível.

A seguir, a convexidade do critério de custo quadrático (4.7) é investigada. A parcela desta equação que é dependente dos parâmetros incertos  $\varepsilon$  é dada por :

$$J_{q,1}(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) = \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j))^2 \quad (4.17)$$

A partir desta parcela, pode-se definir :

$$J_{q,2}(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) = (\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j))^2 \quad (4.18)$$

Sabe-se que a previsão da saída do processo é dada pela equação (2.91), reescrita a seguir :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + j/k) &= y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I)\Delta \mathbf{l}(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \end{aligned}$$

e, para processos com ação integral, a previsão da saída é dada pela equação (2.96), reescrita a seguir :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + j/k) &= y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I)\mathbf{l}(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)\mathcal{K}_{j-1}\mathbf{b}u(k-1) \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} \mathcal{K}_{j-m}\mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \end{aligned}$$

com  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  igual a :

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \bar{\mathbf{c}} + \delta\mathbf{c}(\varepsilon)$$

O vetor  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  e a previsão da saída  $\hat{y}(k + j/k, \varepsilon)$  são afins em relação a  $\varepsilon$ . Portanto, pode-se utilizar o seguinte lema :

**Lema 4.1** *Uma função composta  $f(g(\varepsilon))$ , onde  $f$  é convexa em relação a  $g(\varepsilon)$  e  $g(\varepsilon)$  é afim em relação a  $\varepsilon$ , é também convexa em relação a  $\varepsilon$ .*

Uma vez que  $J_{q,2}(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon)$  é convexa em relação a  $\hat{y}(k + j/k, \varepsilon)$  e  $\hat{y}(k + j/k, \varepsilon)$  é afim em relação a  $\varepsilon$ , tem-se que  $J_{q,2}(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon)$  e, consequentemente,  $J_q(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon)$  são funções convexas em relação a  $\varepsilon$ .

Portanto, a solução do problema de otimização (4.16) está em algum vértice de  $\Omega$ , e as restrições que corresponderem a valores de  $\varepsilon$  diferentes dos vértices de  $\Omega$  podem ser eliminadas. Uma vez que os vértices de  $\Omega$  formam um conjunto finito cujo número de elementos é função do número de parâmetros do modelo SFO, isto é, o número de vértices de  $\Omega$  é dado por  $2^n$ , onde  $n$  é

a dimensão do vetor  $\mathbf{c}(\varepsilon)$ , tem-se que o número de restrições do problema é finito.

No caso de sistemas modelados pelas abordagens CARIMA ou representação de estados, a previsão da saída não é afim em relação à incertezas nos parâmetros da parte auto regressiva do modelo. Portanto, não é possível garantir a convexidade do critério de custo nestes casos. Este fato constitui uma limitação para a implementação de controladores preditivos robustos baseados em modelos CARIMA.

O número de restrições do problema (4.16) é diretamente proporcional ao número de vértices do domínio de incertezas  $\Omega$ , que por sua vez é dado por  $2^n$ , onde  $n$  é o número de funções ortonormais utilizadas na modelagem do processo. Portanto, quanto menor for o número de parâmetros do modelo, menor será o esforço computacional da lei de controle, devido a utilização de um número menor de restrições no problema de otimização. Conforme discutido no Capítulo 2, a abordagem por séries de funções ortonormais (SFO) modela o processo utilizando uma quantidade significativamente menor de parâmetros que os modelos por resposta ao impulso. Como consequência, tem-se que a utilização de modelos SFO reduz o esforço computacional no cálculo da lei de controle CPR, em relação aos modelos de resposta ao impulso.

### 4.3.2 Solução Subótima para CPR-SFO com Critério Quadrático

O problema de otimização (4.16) é resolvido através de um método SQP, porém, a resolução *on-line* de um algoritmo SQP pode não ser trivial. Nestes casos, uma solução subótima pode ser obtida utilizando algoritmos de programação quadrática (QP) [Biegler, 1989] se o máximo do critério de custo for aproximado pela soma dos erros máximos da previsão da saída em relação à referência, conforme é mostrado no desenvolvimento a seguir.

Assim, substituindo a seguinte parcela da função objetivo do problema de otimização (4.8)

$$\max_{\varepsilon} \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 \quad (4.19)$$

por

$$\sum_{j=N_1}^{N_y} \max_{\varepsilon} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 \quad (4.20)$$

pode-se obter uma nova função objetivo, que representa um limite superior em relação à função objetivo original, uma vez que a relação abaixo é sempre verdadeira :

$$\begin{aligned} \sum_{j=N_1}^{N_y} \max_{\varepsilon} \{ (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 \} &\geq \\ \max_{\varepsilon} \{ \sum_{j=N_1}^{N_y} (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 \} & \end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto, a solução obtida é subótima em relação àquela dada pelo problema (4.8).

Neste caso, a lei de controle é obtida pela seguinte otimização :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u} \{ \sum_{j=N_1}^{N_y} \max_{\varepsilon \in \Omega} \{ (\hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j))^2 \} + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \} \\ \text{s.a.} \\ u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.22)$$

Através de um raciocínio análogo ao desenvolvido anteriormente, o problema de otimização (4.22) pode ser reescrito como a seguir :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u, \mu} \quad & \sum_{j=N_1}^{N_y} \mu_j^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(k+j-1/k) \\ \text{s.a.} \\ u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad & \forall j = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad & \forall j = 1, \dots, N_u \\ -\mu_j \leq \hat{y}(k+j/k, \varepsilon) - w(k+j) \leq \mu_j \quad & \forall \varepsilon \in \Omega, \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde :

$$\underline{\mu} = [\mu_{N_1}, \dots, \mu_{N_y}]^T \quad (4.24)$$

Reescrevendo em uma forma vetorial, chega-se a :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}, \underline{\mu}} \quad \underline{\mu}^T \underline{\mu} + \lambda \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \\ & \text{s.a} \\ & \quad \mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{g} \\ & \quad -\underline{\mu} \leq G(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) - \mathbf{w} \leq \underline{\mu} \quad \forall \varepsilon \in \Omega \end{aligned} \quad (4.25)$$

Através deste procedimento, a lei de controle é descrita na forma de um problema de programação quadrática. A resolução de um problema de programação quadrática (QP) é mais simples que a resolução de um problema de otimização com restrições não lineares (através de algoritmos SQP). Portanto, a obtenção do sinal de controle torna-se mais simples que a estratégia apresentada inicialmente. Por outro lado, o sinal de controle obtido representa uma solução subótima em relação ao problema *min-max* original.

### 4.3.3 Exemplos

#### 4.3.3.1 Exemplo 4.1 :

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CPR-SFO com critério quadrático no controle de um processo cujos parâmetros variam dentro de limites conhecidos.

O processo é definido pela seguinte função de transferência [Campo e Morari, 1987], com  $0 \leq \kappa \leq 1$  :

$$G(s) = \frac{1}{10s+1} + \kappa \left\{ \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{-2s+1}{2s+1} - \frac{1}{10s+1} \right\} \quad (4.26)$$

A função de transferência nominal deste processo é definida como sendo :

$$G_n(s) = \frac{1}{10s + 1} \quad (4.27)$$

e o período de amostragem é igual a 1 segundo.

O modelo por séries ortonormais é obtido pela escolha para o pólo  $p$  igual a 0.9, a fim de representar aproximadamente a dinâmica do modelo nominal<sup>1</sup>. Assim sendo, tem-se que uma série de 8 funções é suficiente para a modelagem do processo, isto é,  $n$  é igual a 8. A matriz  $A$  e o vetor  $b$  são calculados utilizando estes dois parâmetros.

As quatro primeiras colunas da matriz  $A$  são :

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.19 & 0.9 & 0 & 0 \\ -0.171 & 0.19 & 0 & 0 \\ 0.1539 & -0.171 & 0.19 & 0.9 \\ -0.1385 & 0.1539 & -0.171 & 0.19 \\ 0.1247 & -0.1385 & 0.1539 & -0.171 \\ -0.1122 & 0.1247 & -0.1385 & 0.1539 \\ 0.101 & -0.1122 & 0.1247 & -0.1385 \end{bmatrix}$$

e as quatro últimas são :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.19 & 0.9 & 0 & 0 \\ -0.171 & 0.19 & 0.9 & 0 \\ 0.1539 & -0.171 & 0.19 & 0.9 \end{bmatrix}$$

O vetor  $b$  é igual a :

---

<sup>1</sup>Note que o valor ótimo obtido a partir da resposta ao impulso do modelo nominal e através da minimização do critério (2.33) é igual a  $p = 0.925$ , conforme discutido na seção 2.2.3

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.4359 \\ -0.3923 \\ 0.3531 \\ -0.3178 \\ 0.2860 \\ -0.2574 \\ 0.2316 \\ -0.2085 \end{bmatrix}$$

O vetor  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  com parâmetros incertos é obtido através do conjunto de respostas ao impulso do processo (4.26), isto é, para  $\kappa$  entre 0 e 1, e segundo a metodologia apresentada na seção 2.3.3. É dado por :

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0.1849 + \varepsilon_1 0.0709 \\ 0.0683 + \varepsilon_2 0.0230 \\ -0.0392 + \varepsilon_3 0.0267 \\ 0.0255 + \varepsilon_4 0.0250 \\ -0.0165 + \varepsilon_5 0.0216 \\ 0.0106 + \varepsilon_6 0.0175 \\ -0.0069 + \varepsilon_7 0.0135 \\ 0.0044 + \varepsilon_8 0.0099 \end{bmatrix}^T$$

Os parâmetros do CPR-SFO são dados por :  $N_1 = 4$ ,  $N_y = 10$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ ; e a lei de controle é calculada através de um algoritmo de otimização SQP.

Na figura 4.1, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $\kappa$ .

Através destes resultados, pode-se observar que o CPR-SFO é capaz de controlar um processo com parâmetros incertos e que o desempenho do sistema em malha fechada é satisfatório para valores de  $\kappa$  que variam em todo o espaço de incertezas.

Uma comparação do CPR-SFO com o algoritmo de controle preditivo GPC é apresentada na figura 4.2. O modelo selecionado para o GPC é do tipo CARIMA e corresponde ao modelo nominal do processo (4.27). É dado por :

$$(1 - 0.9048q^{-1}) y(k) = 0.0952 u(k-1) \quad (4.28)$$

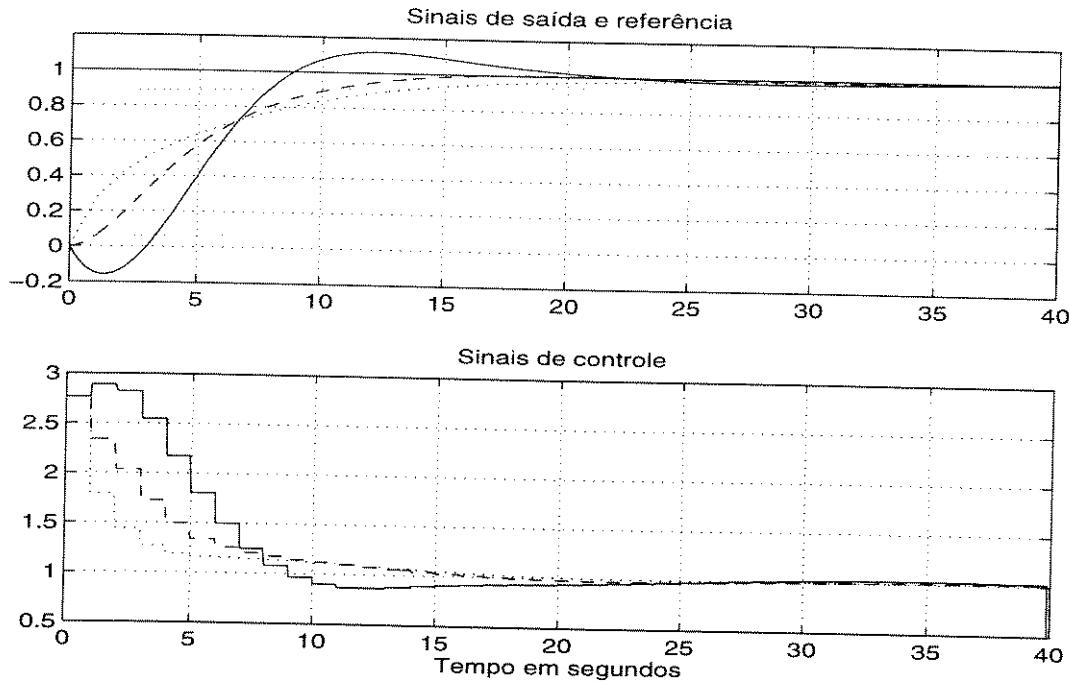


Figura 4.1: CPR-SFO com critério de custo quadrático, Leg. : linha pontilhada,  $\kappa=0$ ; linha traço-ponto,  $\kappa=0.5$ ; e linha contínua,  $\kappa=1$

Nesta comparação, os valores de  $\kappa$  variam no tempo como a seguir :  $\kappa = 0$ , até 75 segundos;  $\kappa = 0.5$ , entre 76 e 155 segundos; e  $\kappa = 1$ , após 156 segundos. Os parâmetros de sintonia do GPC são iguais aos selecionados anteriormente para o CPR-SFO, sendo que o algoritmo GPC é implementado com um polinômio  $T$  [Oliveira et al., 1996a] [Mohtadi, 1988] igual a  $1 - 0.8q^{-1}$  para melhorar a robustez do sistema em malha fechada, uma vez que este é instável em relação à incerteza paramétrica do processo, isto é, quando  $\kappa$  tende a 1.

Através da figura 4.2, pode-se observar que o CPR-SFO apresenta variações de desempenho em malha fechada bem menos importantes que o GPC, que apresenta oscilações indesejáveis na variável de saída quando  $\kappa$  tende para 1, significando uma melhor robustez do sistema com CPR-SFO à variações na dinâmica do processo.

Além de apresentar um desempenho superior ao GPC com modelo fixo, o algoritmo CPR-SFO não apresenta transitórios significativos após a mudança nos parâmetros do processo. Esta característica é comum em métodos de controle adaptativos devido à fase de adaptação de parâmetros.

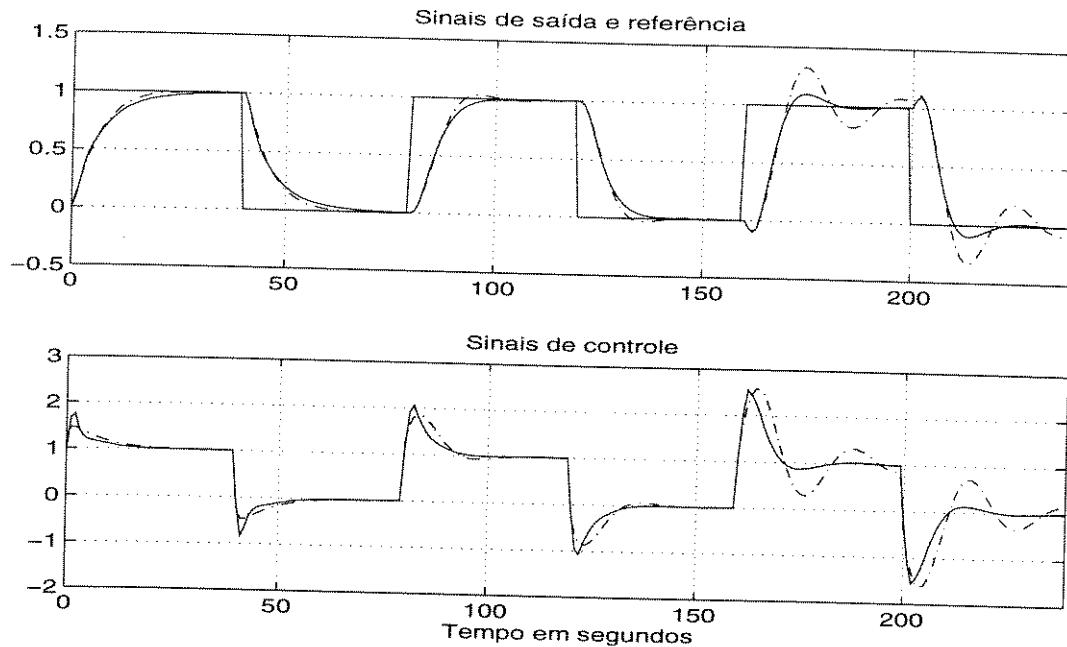


Figura 4.2: CPR-SFO ( linha contínua ) e GPC ( linha traço-ponto ) no controle de um processo variante no tempo

Neste exemplo, o modelo baseado em séries de funções ortonormais permite representar o processo (4.26) com apenas 8 parâmetros incertos. O modelo de resposta ao impulso para este processo necessita de pelo menos 50 coeficientes. É importante lembrar que o número de restrições do problema de otimização SQP é proporcional a  $2^n$ . Para o modelo SFO tem-se  $2^n = 2^8 = 256$  e para o modelo de resposta ao impulso tem-se  $2^n = 2^{50} = 1.126 \times 10^{15}$ , logo, a utilização do modelo SFO representa uma redução significativa do esforço computacional do algoritmo de controle.

#### 4.3.3.2 Exemplo 4.2 :

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CPR-SFO com critério quadrático no controle de um processo com restrições nos sinais de controle e cujos parâmetros variam dentro de limites conhecidos.

O processo é definido pela função de transferência (4.26) e as restrições na variável de controle são dadas por :  $|u(k)| \leq 2$  e  $|\Delta u(k)| \leq 1$ .

O modelo do processo e os parâmetros de projeto são iguais aos descritos no Exemplo 4.1, e a informação a respeito das restrições é incorporada na lei

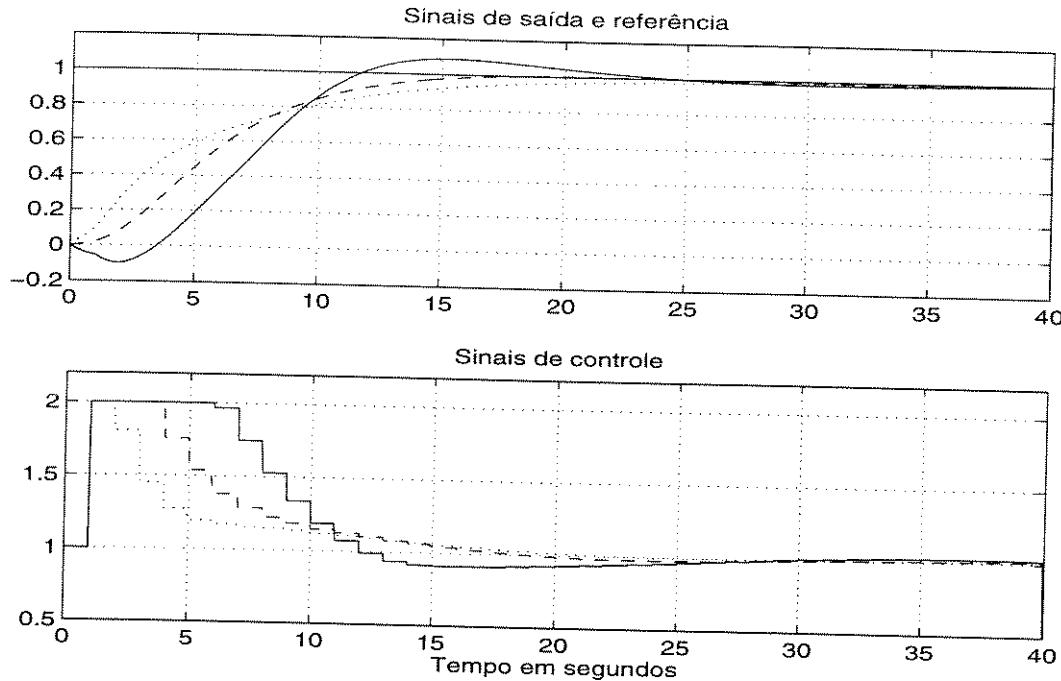


Figura 4.3: CPR-SFO com critério de custo quadrático e restrições no processo, Leg. : linha pontilhada,  $\kappa=0$ ; linha traço-ponto,  $\kappa=0.5$ ; e linha contínua,  $\kappa=1$

de controle conforme mostrado na seção 4.2.2.

Na figura 4.3, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $\kappa$ , quando o processo apresenta restrições na variável de controle. Através destes resultados, pode-se observar que o CPR-SFO é capaz de controlar um processo com restrições nos sinais de entrada e com parâmetros incertos. O desempenho do sistema em malha fechada não apresenta variações significativas quando a dinâmica do processo varia dentro do espaço de incertezas. Em relação ao sistema sem restrições, ilustrado na figura 4.1, neste exemplo o sinal de controle foi mantido dentro das especificações pelo CPR-SFO.

#### 4.3.3.3 Exemplo 4.3 :

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CPR-SFO com critério quadrático no controle de um processo com ação integral e cujos parâmetros variam dentro de limites conhecidos.

Seja a seguinte função de transferência do servo-motor descrito no exemplo 3.3 pela equação (3.39), cuja inércia da carga  $J$  pode variar  $\pm 50\%$  em torno de seu valor nominal dado por 0.02 :

$$G(s) = \frac{1.25}{s(0.05s + 1)(\frac{J}{0.02}s + 1)} \quad (4.29)$$

O período de amostragem é igual a 0.1 segundos.

O modelo por séries ortonormais é construído utilizando a função de transferência nominal do processo, com pólo  $p$  selecionado igual a  $p = 0.23$  e o número de funções da série igual a 6 ( $n = 6$ ). A matriz  $A$  e o vetor  $b$  são calculados utilizando estes dois parâmetros.

A matriz  $A$  é igual a :

$$\begin{bmatrix} 0.23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9471 & 0.23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2178 & 0.9471 & 0.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0501 & -0.2178 & 0.9471 & 0.23 & 0 & 0 \\ -0.0115 & 0.0501 & -0.2178 & 0.9471 & 0.23 & 0 \\ 0.0027 & -0.0115 & 0.0501 & -0.2178 & 0.9471 & 0.23 \end{bmatrix}$$

O vetor  $b$  é igual a :

$$\mathbf{b} = [ 0.9732 \ -0.2238 \ 0.0515 \ -0.0118 \ 0.0027 \ -0.0006 ]^T$$

O vetor  $c(\varepsilon)$  com parâmetros incertos é calculado a partir da variação da resposta ao impulso do processo (3.39) quando  $J$  varia em torno de seu valor nominal e utilizando a metodologia apresentada na seção 2.3.3. É dado por :

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0.8412 + \varepsilon_1 0.2743 \\ 0.1105 + \varepsilon_2 0.0158 \\ 0.0262 + \varepsilon_3 0.0678 \\ 0.0082 + \varepsilon_4 0.0097 \\ 0.0019 + \varepsilon_5 0.0066 \\ 0.0007 + \varepsilon_6 0.0014 \end{bmatrix}^T$$

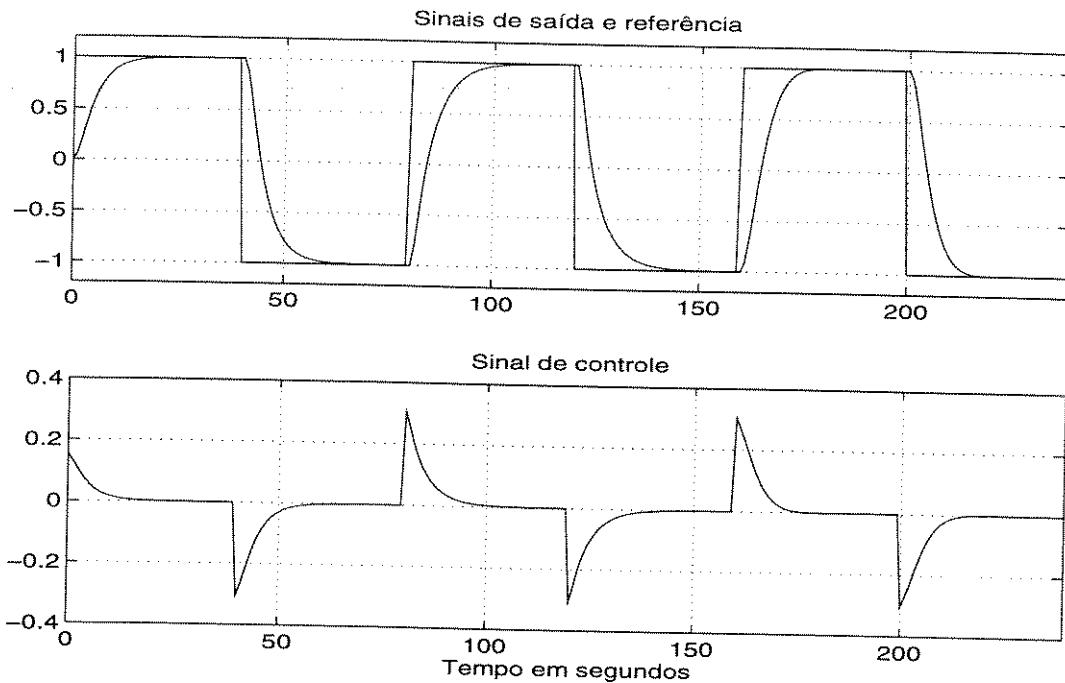


Figura 4.4: CPR-SFO no controle de um processo com ação integral

Os parâmetros do CPR-SFO são dados por :  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 10$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ ; e a lei de controle é calculada através de um algoritmo de otimização SQP.

Na figura 4.4, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $J$ , isto é,  $J = 0.02$ , no primeiro período da referência,  $J = 0.01$ , no segundo período da referência e  $J = 0.03$ , no terceiro período da referência. Pode-se observar que o desempenho do sistema em malha fechada não apresenta variações significativas para valores de inércia que variam em torno do valor nominal.

## 4.4 CPR-SFO com Critério baseado na Norma Infinita

Neste caso, o critério de custo é dado por :

$$J_{\infty}(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon) = \max_j |\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j)| \quad j = N_1, \dots, N_y \quad (4.30)$$

A lei de controle CPR-SFO com norma infinita é obtida resolvendo o seguinte problema :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}} \left\{ \max_{\varepsilon \in \Omega} \left\{ \max_j |\hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j)| \quad j = N_1, \dots, N_y \right\} \right\} \\ & \text{s.a.} \\ & u_{\min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.31)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento apresentado na seção anterior, o problema de otimização *min-max* do CPR-SFO pode ser reescrito como a seguir :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} \quad \mu \\ & \text{s.a.} \\ & u_{\min} \leq u(k + j - 1/k) \leq u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k + j - 1/k) \leq \Delta u_{\max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & -\mu \leq \hat{y}(k + j/k, \varepsilon) - w(k + j) \leq \mu \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \text{ e} \\ & \quad \forall \varepsilon \in \Omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

que é equivalente a :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} \quad \mu \\ & \text{s.a.} \\ & \mathcal{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \\ & -\boldsymbol{\mu} \leq G(\varepsilon) \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{y}}_l(\varepsilon) - \mathbf{w} \leq \boldsymbol{\mu} \quad \forall \varepsilon \in \Omega \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $\boldsymbol{\mu} = [\mu \ \dots \ \mu]^T$ .

Este é um problema de programação linear, onde um ótimo local para (4.33) também é o ótimo global.

A lei de controle CPR-SFO dada pelo problema (4.33) possui infinitas restrições, contudo um desenvolvimento análogo ao apresentado na seção 4.3.1 pode ser realizado para o CPR-SFO com critério baseado na norma infinita. Neste caso, tem-se que a lei de controle é descrita por um problema de otimização com um número de restrições proporcional ao número de vértices do domínio de incertezas do modelo, isto é, o número de restrições é proporcional a  $2^n$ .

Além disso, é possível obter, neste caso, uma solução analítica para  $\max_{\varepsilon \in \Omega} J_\infty(\Delta \mathbf{u}, \varepsilon)$ , conforme é mostrado a seguir. A utilização desta propriedade na resolução do problema *min-max* da lei de controle CPR permite eliminar a relação exponencial entre o número de restrições do problema de otimização e o número de parâmetros incertos do modelo. Portanto, esta abordagem representa uma solução mais eficiente para o cálculo da lei de controle CPR com critério baseado na norma infinita sob o ponto de vista de redução do esforço computacional.

Seja o seguinte subproblema da lei de controle CPR com critério baseado na norma infinita :

$$\max_{\varepsilon \in \Omega} \quad \max_{j=N_1, \dots, N_y} | w(k+j) - \hat{y}(k+j/k, \varepsilon) | \quad (4.34)$$

**Proposição 4.1** O problema de otimização (4.34) pode ser reescrito como a seguir :

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon \in \Omega} \quad & \max_{j=N_1, \dots, N_y} | w(k+j) - \hat{y}(k+j/k, \varepsilon) | = \\ & \max_{j=N_1, \dots, N_y} \{ | w(k+j) - \{ \bar{G}_j \Delta \mathbf{u} + \bar{\gamma}_l(k+j/k) \} | + \\ & \quad \sum_{i=1}^n | \delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u} | \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde :

$$\bar{\gamma}_l(k+j/k) = y(k) + \bar{c}^T (K_j - I) \Delta l(k) \quad (4.36)$$

$$\Psi_j = [ K_{j-1} \mathbf{b} \dots K_{j-N_u} \mathbf{b} ] \quad e \Psi_j \in I\!\!R^{n \times N_u} \quad (4.37)$$

$$\bar{G}_j = \bar{\mathbf{c}}^T \Psi_j \quad e \bar{G}_j \in I\!\!R^{1 \times N_u} \quad (4.38)$$

$$\gamma_j = (K_j - I)\Delta \mathbf{l}(k) \quad e \gamma_j \in I\!\!R^{n \times 1} \quad (4.39)$$

e  $\gamma_{j,i}$  é o  $i$ -éssimo coeficiente de  $\gamma_j$  e  $\Psi_{j,(i,:)}$  é a  $i$ -éssima linha de  $\Psi_j$ .

A prova da proposição 4.1 é apresentada a seguir.

Pela substituição da equação do preditor da saída (2.91)<sup>2</sup> no problema (4.34), obtém-se :

$$\max_{j=N_1, \dots, N_y} \max_{\varepsilon \in \Omega} | w(k+j) - \{ y(k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I)\Delta \mathbf{l}(k) + \\ \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} K_{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k+m-1/k) \} | \quad (4.40)$$

Da definição de  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  (equação (2.44)), e utilizando as definições (4.36), (4.37) e (4.38), tem-se que :

$$\max_{j=N_1, \dots, N_y} \max_{\varepsilon \in \Omega} | w(k+j) - \{ \bar{y}_l(k+j/k) + \delta \mathbf{c}^T(\varepsilon)(K_j - I)\Delta \mathbf{l}(k) + \\ \bar{G}_j \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{c}^T(\varepsilon) \Psi_j \Delta \mathbf{u} \} | \quad (4.41)$$

Utilizando a definição (4.39), a equação acima pode ser reescrita como segue :

$$\max_{j=N_1, \dots, N_y} \max_{\varepsilon \in \Omega} | w(k+j) - \{ \bar{y}_l(k+j/k) + \bar{G}_j \Delta \mathbf{u} \} + \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{ -\delta c_i \gamma_{j,i} - \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u} \} | \quad (4.42)$$

<sup>2</sup>Um resultado análogo pode ser obtido para o caso de processos com integradores

Sabe-se que, se  $|\varepsilon_i| \leq 1 \forall i$  com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , tem-se :

$$\max_{\varepsilon \in \Omega} |a + c^T \varepsilon| = |a| + \sum_{i=1}^n |c_i| \quad (4.43)$$

Aplicando a igualdade (4.43) na equação (4.42), chega-se à proposição 4.1, reescrita a seguir :

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1, \dots, N_y} & |w(k+j) - \hat{y}(k+j/k, \varepsilon)| = \\ & \max_{j=N_1, \dots, N_y} \{ |w(k+j) - \{\bar{y}_l(k+j/k) + \bar{G}_j \Delta \mathbf{u}\}| + \\ & \sum_{i=1}^n |\delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u}| \} \end{aligned}$$

Portanto, através da proposição 4.1, a lei de controle CPR-SFO com critério de custo baseado na norma infinita pode ser reescrita como a seguir :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \max_{j=N_1, \dots, N_y} & \{ |w(k+j) - \{\bar{y}_l(k+j/k) + \bar{G}_j \Delta \mathbf{u}\}| + \\ & \sum_{i=1}^n |\delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u}| \} \\ \text{s.a.} \quad & u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.44)$$

Reescrevendo-se o problema de maximização acima como um problema de minimização do supremo da função objetivo, obtém-se :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}, \mu} & \mu \\ \text{s.a.} \quad & u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\ & |w(k+j) - \{\bar{y}_l(k+j/k) + \bar{G}_j \Delta \mathbf{u}\}| + \\ & \sum_{i=1}^n |\delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u}| \leq \mu \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta\mathbf{u}, \mu} \quad \mu \\
 & s.a. \\
 & u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\
 & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\
 & a_j + \sum_{i=1}^n b_{i,j} \leq \mu \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \\
 & a_j = |w(k+j) - \{\bar{y}_l(k+j/k) + \bar{G}_j \Delta \mathbf{u}\}| \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \\
 & b_{i,j} = |\delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u}| \quad \forall j = N_1, \dots, N_y, \forall i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

As restrições de igualdade para  $a_j$  e  $b_{i,j}$  podem ser substituídas por restrições de desigualdade sem que esta modificação altere a solução ótima do problema. Isto deve-se a que restrições de desigualdade para  $a_j$  e  $b_{i,j}$  estão sempre ativas<sup>3</sup> na solução ótima, devido à restrição de desigualdade sobre  $\mu$ .

Assim sendo, pela transformação das restrições de igualdade em restrições de desigualdade, obtém-se :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta\mathbf{u}, \mu, \mathcal{A}, \mathcal{B}} \quad \mu \\
 & s.a. \\
 & u_{min} \leq u(k+j-1/k) \leq u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\
 & \Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j-1/k) \leq \Delta u_{max} \quad \forall j = 1, \dots, N_u \\
 & a_j + \sum_{i=1}^n b_{i,j} \leq \mu \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \\
 & -a_j \leq w(k+j) - \bar{y}_l(k+j/k) - \bar{G}_j \Delta \mathbf{u} \leq a_j \quad \forall j = N_1, \dots, N_y \\
 & -b_{i,j} \leq \delta c_i \gamma_{j,i} + \delta c_i \Psi_{j,(i,:)} \Delta \mathbf{u} \leq b_{i,j} \quad \forall j = N_1, \dots, N_y, \forall i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

onde  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são, respectivamente, um vetor e uma matriz contendo os elementos  $a_j$  e  $b_{i,j}$ .

<sup>3</sup>Uma restrição de desigualdade  $j$  de  $G\mathbf{x} \leq \mathbf{h}$  é considerada ativa em um ponto  $\mathbf{x}^*$ , quando  $g_{j,:}\mathbf{x}^* = h_j$ , onde  $g_{j,:}$  é a  $j$ -ésima linha da matriz  $G$  e  $h_j$  é o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{h}$ .

O problema descrito pela equação (4.47) é de programação linear (PL), e sua solução ótima é igual àquela obtida pelo problema (4.32). Porém, neste PL, o número de restrições é igual a  $4N_u + (3 + 2n)(N_y - N_1 + 1)$  e o número de variáveis é igual a  $N_u + 1 + (1 + n)(N_y - N_1 + 1)$  (as variáveis são  $(\Delta\mathbf{u}, \mu, a_i, b_{i,j})$ ). Por outro lado, no problema (4.32), o número de restrições é igual a  $4N_u + 2^{n+1}(N_y - N_1 + 1)$  e o número de variáveis é igual a  $N_u + 1$  (as variáveis são  $(\Delta\mathbf{u}, \mu)$ ). No problema (4.47), o número de restrições e de variáveis é linear em relação ao número de parâmetros incertos do modelo e, portanto, esta abordagem é mais eficiente para resolução da lei de controle, sob o ponto de vista de esforço computacional. Esta característica é mostrada a seguir.

O método Simplex para resolução de PL encontra a solução ótima, em geral, entre  $r$  e  $1.5r$  iterações [Luenberger, 1984], onde  $r$  é o número de restrições do problema.

Através destes dados, tem-se que a utilização da metodologia proposta diminui o esforço computacional do algoritmo de otimização e reduz a sensibilidade deste esforço em relação ao número de parâmetros incertos do modelo.

Utiliza-se o exemplo a seguir para ilustrar este desenvolvimento. Seja um CPR-SFO, com  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 10$  e  $N_u = 1$  e, para efeito de comparação, dois modelos SFO cuja quantidade de parâmetros incertos é dada por  $n = 4$  e por  $n = 8$ . Através da resolução da lei de controle pelo problema (4.32) quando  $n = 4$ , um algoritmo Simplex encontra a solução ótima com um número aproximado de 324 a 486 iterações. Quando  $n = 8$ , a solução ótima é obtida após 5124 a 7686 iterações. Através da resolução do problema (4.47) quando  $n = 4$ , o número aproximado de iterações do algoritmo Simplex para obtenção da solução ótima é de 114 a 171 iterações e, quando  $n = 8$ , de 194 a 291 iterações.

Portanto, esta metodologia de resolução do problema *min-max*, além de reduzir o número total de iterações do algoritmo de otimização (reduzindo, como consequência, o esforço computacional), reduz a sensibilidade do número de iterações em relação ao número de parâmetros do modelo.

### 4.4.1 Exemplos

#### 4.4.1.1 Exemplo 4.4 :

A seguir, ilustra-se o desempenho do algoritmo CPR-SFO com critério de custo baseado na norma infinita no controle de um processo com restrições nos sinais de controle e com parâmetros que variam dentro de limites conhecidos.

O processo é definido pela função de transferência (4.26).

O modelo do processo e os parâmetros de projeto são iguais aos descritos no Exemplo 4.1.

Em geral, no caso do algoritmo CPR-SFO com critério baseado na norma infinita é necessária a utilização de um horizonte inicial de previsão  $N_1$  maior que 1. Neste exemplo,  $N_1$  é igual a 4. Isto é devido à existência de modelos de fase não mínima entre os modelos pertencentes ao espaço de incerteza. Quando isto ocorre, as tendências opostas entre modelos dentro do espaço de incerteza fazem com que a solução ótima do problema LP tenda a zero, isto é, o valor ótimo para  $u(k)$  é zero. Para evitar este fenômeno, o horizonte inicial de previsão deve ser selecionado de forma que o horizonte de previsão não contenha a resposta inversa dos modelos de fase não mínima.

As restrições na variável de controle são as mesmas do Exemplo 4.2, isto é, são dadas por :  $|u(k)| \leq 2$  e  $|\Delta u(k)| \leq 1$ .

Na figura 4.5, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $\kappa$  e para o processo sem restrições. Na figura 4.6, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada para o caso do processo com restrições nos sinais de controle.

Através das figuras 4.5 e 4.6, pode-se observar que o CPR-SFO é capaz de controlar um processo com parâmetros incertos e com restrições nos sinais de controle. O desempenho do sistema em malha fechada é satisfatório para valores de  $\kappa$  que variam em todo o espaço de incertezas.

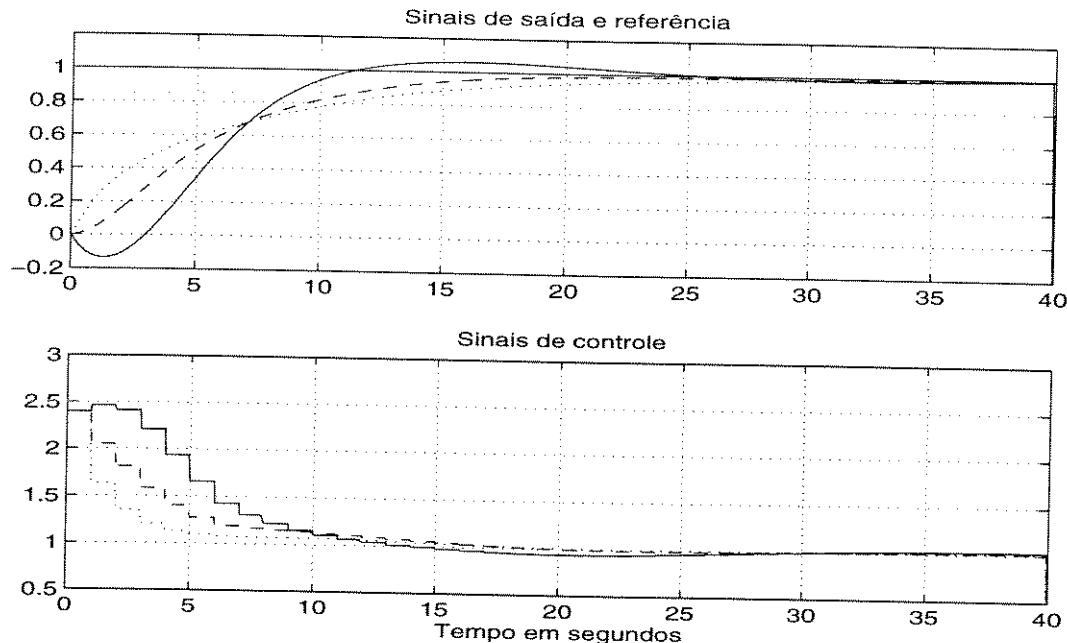


Figura 4.5: CPR-SFO com critério de custo baseado na norma infinita. Leg. : linha pontilhada,  $\kappa=0$ ; linha traço-ponto,  $\kappa=0.5$ ; e linha contínua,  $\kappa=1$

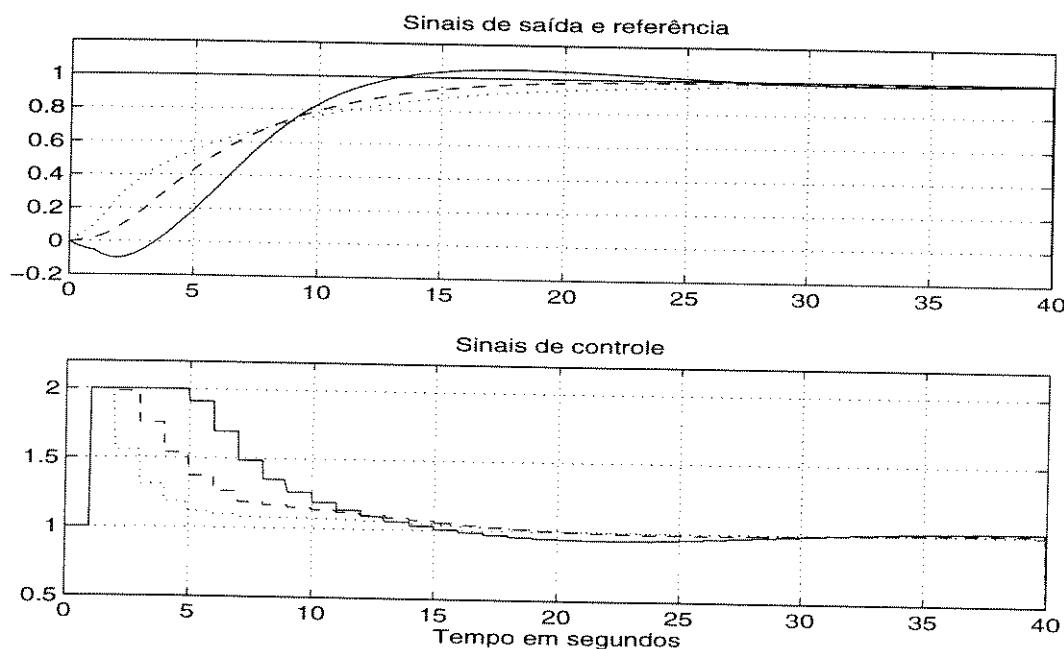


Figura 4.6: CPR-SFO com critério de custo baseado na norma infinita e restrições no processo. Leg. : linha pontilhada,  $\kappa=0$ ; linha traço-ponto,  $\kappa=0.5$ ; e linha contínua,  $\kappa=1$

## 4.5 Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

No contexto de controladores preditivos, a maioria dos resultados sobre estabilidade são desenvolvidos a partir da suposição de que o modelo do processo é exatamente igual ao processo real. Porém, esta é uma suposição difícil de ser encontrada na prática e, portanto, torna-se também necessário o estudo da estabilidade do sistema em malha fechada na presença de incertezas no modelo.

No caso de controladores preditivos robustos, em [Zheng e Morari, 1993] analisa-se a estabilidade de um algoritmo CPR com critério de custo baseado na norma infinita com um modelo dado por :

$$y(k) = y(k-1) + \sum_{i=1}^{n_z} h_i \Delta u(k-i) \quad (4.48)$$

onde  $h_i$  são os coeficientes da resposta ao impulso do processo e cada coeficiente  $h_i$  possui um intervalo de incerteza.

Neste caso, o sistema em malha fechada é estável através da definição de um horizonte de previsão com valor fixo e proporcional ao número  $n_z$  de coeficientes da resposta ao impulso do processo. A metodologia para a análise da estabilidade deste controlador é adotada nesta seção.

A seguir, discute-se a estabilidade do algoritmo CPR com modelo baseado em séries de funções ortonormais (CP-SFO), em particular, no caso do critério de custo baseado na norma infinita.

### 4.5.1 Estabilidade

Seja a lei de controle CPR-SFO, para o caso sem restrições e com critério baseado na norma infinita, dada pelo seguinte problema *min-max* :

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{argmin} \left\{ \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1, \dots, N_y} |w - \hat{y}(k+j/k, \varepsilon)| \right\} \quad (4.49)$$

onde  $w$  é o sinal de referência, que supõe-se constante no tempo.

Desta forma,  $J_k$  é definido como sendo o valor ótimo para o critério de custo que é calculado como mostrado a seguir :

$$J_k \triangleq \min_{\Delta \mathbf{u}} \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1, \dots, N_y} |w - \hat{y}(k + j/k, \varepsilon)| \quad (4.50)$$

Conforme discutido na seção 2.4.2.2, tem-se que o conjunto de todas as previsões da saída  $\hat{y}(k + j/k, \varepsilon)$ ,  $\forall \varepsilon \in \Omega$ , é definido pela equação (2.100), reescrita a seguir :

$$\hat{\mathcal{Y}}(k + j/k, \Omega) \triangleq \{ \hat{y}(k + j/k, \varepsilon) : \varepsilon \in \Omega \}$$

e a saída do processo medida em  $k + 1$  está incluída no conjunto de previsões em  $k + 1$ , calculada em  $k$ , isto é :

$$y(k + 1) \in \hat{\mathcal{Y}}(k + 1/k, \Omega)$$

**Proposição 4.2** *Seja a lei de controle CPR-SFO dada pela equação (4.49). Através da seleção do horizonte de previsão tal que,  $N_y \geq n_i + N_u - 1$ , onde  $n_i$  é a ordem do modelo de resposta ao impulso necessária para descrever todas as respostas ao impulso associadas com o modelo SFO (equação (2.49)) para todo  $\varepsilon \in \Omega$ , tem-se que o valor do critério de custo é tal que  $J_{k+1} \leq J_k$ . Isto significa que o critério de custo é limitado no tempo e, como consequência, o sistema em malha fechada é estável.*

A prova da proposição 4.2 é apresentada a seguir.

Seja um valor para o critério de custo em  $k + 1$ ,  $J_{k+1}^*$ , calculado através do seguinte vetor de sinais de controle :

$$\Delta \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \Delta u^*(k + 1/k + 1) \\ \vdots \\ \Delta u^*(k + N_u - 1/k + 1) \\ \Delta u^*(k + N_u/k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u(k + 1/k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1/k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

então,  $J_{k+1}^*$  é igual a :

$$J_{k+1}^* = \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1, \dots, N_y} |w - \hat{y}^*(k + 1 + j/k + 1, \varepsilon)| \quad (4.52)$$

onde  $\hat{y}^*(k + 1 + j/k + 1, \varepsilon)$  é a previsão da saída em  $k + 1 + j$ , calculada em  $k + 1$ , com  $\Delta u(k) = \Delta u(k/k)$  e  $\Delta \mathbf{u}^*$ . Sabendo que  $\Delta \mathbf{u}^*$  não contém necessariamente os valores ótimos para o sinal de controle em  $k + 1$ , tem-se que :

$$J_{k+1} \leq J_{k+1}^* \quad (4.53)$$

A equação de previsão da saída (2.90) do modelo SFO com incertezas estruturadas é reescrita abaixo :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + j/k, \varepsilon) &= \hat{y}(k + j - 1/k) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) A^j \Delta \mathbf{l}(k) + \\ &\quad \mathbf{c}^T(\varepsilon) \sum_{m=1}^{N_u} A^{j-m} \mathbf{b} \Delta u(k + m - 1/k) \end{aligned}$$

A partir da definição de  $n_i$ , tem-se que  $A^i$ , para  $i \geq n_i - 1$ , tende a zero<sup>4</sup>. Assim sendo, a previsão da saída (2.90) é constante para todo  $j \geq n_i + N_u - 1$ . Portanto, utilizando a equação (4.50), tem-se que  $J_{k+1}^*$  é dado por :

$$\begin{aligned} J_{k+1}^* &= \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1, \dots, N_y-1} |w - \hat{y}^*(k + 1 + j/k + 1, \varepsilon)| \\ &\quad \forall N_y \geq n_i + N_u - 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

ou

$$\begin{aligned} J_{k+1}^* &= \max_{\varepsilon \in \Omega} \max_{j=N_1+1, \dots, N_y} |w - \hat{y}^*(k + j/k + 1, \varepsilon)| \\ &\quad \forall N_y \geq n_i + N_u - 1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

O conjunto de previsões da saída  $\hat{y}^*(k + 2/k + 1, \varepsilon)$  é dado por :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}^*(k + 2/k + 1, \Omega) &= \{ y(k + 1) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \{ A \Delta \mathbf{l}(k + 1) + \\ &\quad \mathbf{b} \Delta \mathbf{u}^*(k + 1/k + 1) \} : \varepsilon \in \Omega \} \end{aligned} \quad (4.56)$$

<sup>4</sup>A resposta ao impulso do modelo SFO é dada por :  $y(k, \varepsilon) = \mathbf{c}(\varepsilon) A^{k-1} \mathbf{b}$ ,  $\forall \varepsilon \in \Omega$

Substituindo  $\Delta l(k+1)$  e  $\Delta u^*(k+1/k+1)$  obtém-se :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}^*(k+2/k+1, \Omega) = & \{ y(k+1) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \{ A^2 \Delta l(k) + \\ & A\mathbf{b}\Delta u(k/k) + \mathbf{b}\Delta u(k+1/k) \} : \varepsilon \in \Omega \} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Da mesma forma, a equação de  $\hat{\mathcal{Y}}(k+2/k, \Omega)$  é igual a :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}(k+2/k, \Omega) = & \{ \hat{y}(k+1/k, \varepsilon) + \mathbf{c}^T(\varepsilon) \{ A^2 \Delta l(k) + \\ & A\mathbf{b}\Delta u(k/k) + \mathbf{b}\Delta u(k+1/k) \} : \varepsilon \in \Omega \} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Uma vez que  $y(k+1) \in \hat{\mathcal{Y}}(k+1/k, \Omega)$ , tem-se que  $\hat{\mathcal{Y}}^*(k+2/k+1, \Omega) \subseteq \hat{\mathcal{Y}}(k+2/k, \Omega)$ .

Repetindo o mesmo procedimento para os outros passos de previsão, chega-se a :

$$\hat{\mathcal{Y}}^*(k+j/k+1, \Omega) \subseteq \hat{\mathcal{Y}}(k+j/k, \Omega) \quad (4.59)$$

Isto é o mesmo que :

$$\begin{aligned} \{ \max_{j=N_1+1, \dots, N_y} | w - \hat{y}^*(k+j/k+1, \varepsilon) | : \varepsilon \in \Omega \} \subseteq \\ \{ \max_{j=N_1, \dots, N_y} | w - \hat{y}(k+j/k, \varepsilon) | : \varepsilon \in \Omega \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Portanto, pelas definições (4.50) e (4.52), obtém-se  $J_{k+1}^* \leq J_k$  e, consequentemente, utilizando a equação (4.53), tem-se que  $J_{k+1} \leq J_k$ .

## 4.5.2 Exemplos

### 4.5.2.1 Exemplo 4.5 :

Neste exemplo ilustra-se a condição suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada, utilizando o algoritmo CPR-SFO com critério baseado na norma infinita.

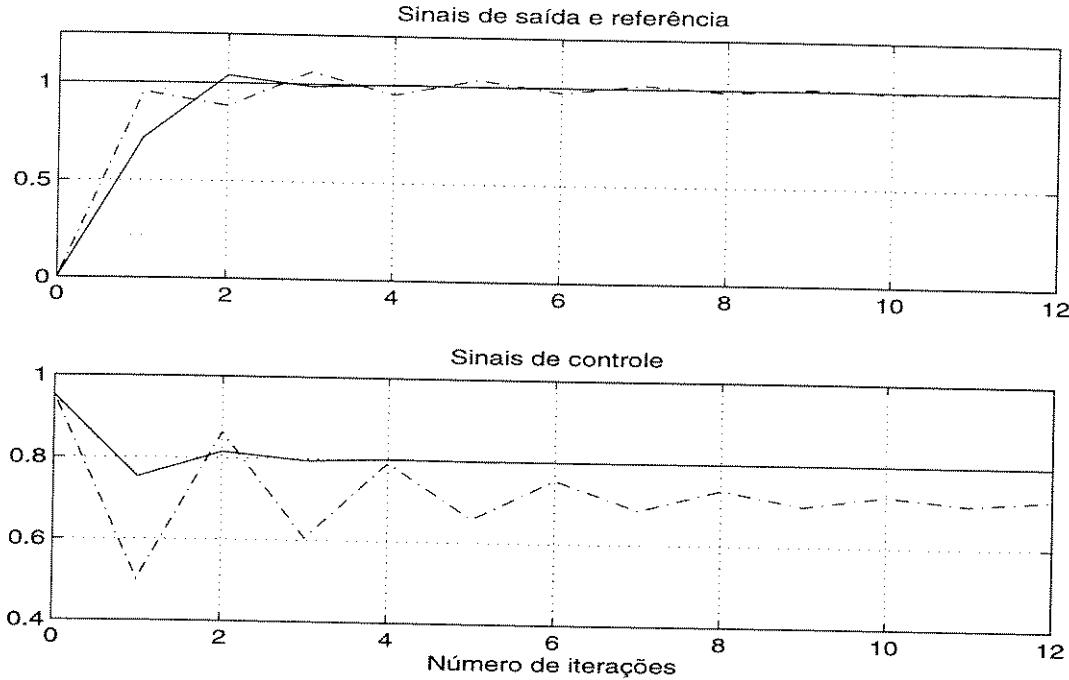


Figura 4.7: Desempenho do sistema em malha fechada. Leg. : linha contínua,  $H_1$ ; e linha traço-ponto,  $H_2$

Seja um processo dado por :

$$H(q^{-1}) = h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2}; \text{ onde } 0.5 \leq h_1 \leq 1 \text{ e } 0.4 \leq h_2 \leq 0.6 \quad (4.61)$$

O modelo SFO deste processo com incertezas estruturadas é calculado a seguir. O pólo das funções ortonormais é selecionado na origem, uma vez que este é o valor ótimo segundo o critério (2.33). Através desta seleção de  $p$ , tem-se que um modelo com  $n = 2$  é suficiente para a aproximação do processo. Assim, o modelo SFO é dado por :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor  $c(\varepsilon)$  é calculado segundo a metodologia apresentada na seção 2.3.3 e é dada por :

$$\mathbf{c}(\varepsilon) = [ 0.75 + \varepsilon_1 0.25 \quad 0.5 + \varepsilon_2 0.1 ]^T$$

Para satisfazer à condição suficiente de estabilidade do sistema em malha fechada, o horizonte final de previsão  $N_y$  deve ser no mínimo igual a  $n_i + N_u - 1$ , ou  $N_y \geq N_u + 1$ , pois  $n_i$  é igual a 2.

Assim sendo, os parâmetros de regulagem do CPR-SFO são selecionados como sendo  $N_1 = 1$ ,  $N_y = 2$  e  $N_u = 1$ .

A figura 4.7 mostra o desempenho do sistema em malha fechada, quando o processo real é igual a  $H_1(q^{-1}) = 0.75q^{-1} + 0.5q^{-2}$  e quando este é igual a  $H_2(q^{-1}) = q^{-1} + 0.4q^{-2}$ .

Observa-se que o sistema é estável em malha fechada para os dois processos apresentados. É importante destacar que o sistema em malha fechada com o CPR proposto em [Campo e Morari, 1987], que utiliza o modelo clássico de resposta ao impulso, é instável para o processo  $H_2(q^{-1})$ , conforme mostrado em [Zheng e Morari, 1993].

#### 4.5.2.2 Exemplo 4.6 :

Neste exemplo ilustra-se a condição para a estabilidade do sistema em malha fechada utilizando o algoritmo CPR-SFO com critério baseado na norma infinita e o processo apresentado no exemplo 2.3 do Capítulo 2.

Seja o processo dado pela equação (2.37), reescrito a seguir :

$$G(q^{-1}) = \frac{1.25q^{-1} + 0.65q^{-2}}{1 - 0.6q^{-1}}$$

Dois modelos baseados em séries de funções ortonormais com incertezas estruturadas, calculados em função da escolha do pólo  $p$  e a partir da resposta ao impulso com incertezas, são apresentados no Exemplo 2.3. A seguir é utilizado o modelo SFO com pólo igual a 0.35. O número de funções da série é truncado em  $n = 4$ , pois os valores coeficientes de ordem superior da série são próximos de zero. Assim sendo, o vetor  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  do modelo SFO com incertezas estruturadas é dado por :

$$c(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1.752 + \varepsilon_1 0.088 \\ 1.231 + \varepsilon_2 0.062 \\ 0.153 + \varepsilon_3 0.008 \\ 0.131 + \varepsilon_4 0.007 \end{bmatrix}$$

Para satisfazer a condição suficiente de estabilidade do sistema em malha fechada, o horizonte final de previsão  $N_y$  deve ser de no mínimo  $n_i + N_u - 1$ , ou  $N_y \geq N_u + 19$ , pois  $n_i$  é igual a 20.

Na figura 4.8, tem-se o desempenho do sistema em malha fechada quando o horizonte inicial de previsão é  $N_1 = 2$ , o horizonte de controle é  $N_u = 1$ , e para dois valores do horizonte final de previsão, a saber,  $N_y = 3$  e  $N_y = 20$ . Note que somente um entre os valores selecionados para  $N_y$  satisfaz a condição suficiente de estabilidade do sistema.

Observa-se que o sistema é estável em malha fechada para as duas seleções do horizonte de previsão. Isto comprova que o desenvolvimento apresentado na seção 4.5.1 descreve uma condição suficiente, mas não necessária, para a estabilidade do sistema em malha fechada. Como ocorre normalmente em controladores MBPC, o comportamento do sistema torna-se mais rápido com a diminuição do horizonte de previsão.

Neste exemplo, a modelagem do processo com incertezas através de funções ortonormais utiliza 4 parâmetros incertos e um modelo de resposta ao impulso necessita de 20 parâmetros incertos para a modelagem do mesmo processo. Portanto, devido à utilização do modelo SFO, obtém-se uma diminuição do esforço computacional da lei de controle pois há uma redução de 1/5 no número de parâmetros incertos do modelo.

Em relação ao número de iterações, utilizando a metodologia para resolução do problema *min-max* apresentada na seção 4.4, um algoritmo de programação linear encontra a solução ótima em aproximadamente

$$1.5r = 1.5(4N_u + (3 + 2n)(N_y - N_1 + 1)) \text{ iterações}$$

Uma vez que o processo não possui restrições na variável de controle<sup>5</sup> e substituindo os parâmetros do CPR-SFO utilizados no exemplo, chega-se a :

<sup>5</sup>A parcela  $4N_u$  desta equação pode ser eliminada quando não existem restrições na variável de controle do processo

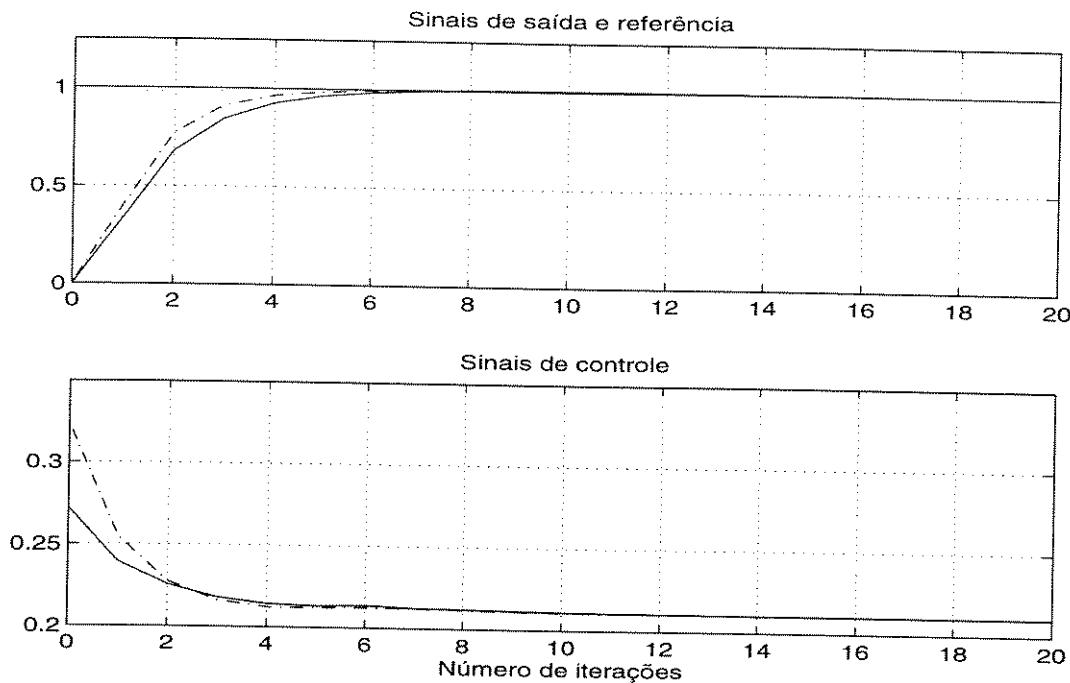


Figura 4.8: Desempenho do sistema em malha fechada. Leg. : linha contínua,  $N_y = 20$ ; linha traço-ponto,  $N_y = 3$

$$1.5 \times 11 \times N_y \text{ iterações}$$

Pela metodologia clássica de resolução, isto é, aquela que não utiliza a solução analítica do  $\max_\varepsilon$  (veja a proposição 4.1), um algoritmo LP encontra a solução ótima em aproximadamente :

$$1.5r = 1.5(4N_u + 2^{n+1}(N_y - N_1 + 1)) \text{ iterações}$$

que é equivalente a :

$$1.5 \times 2^5 \times N_y \text{ iterações}$$

Portanto, através da utilização da proposição 4.1, obtém-se uma redução da quantidade de restrições necessárias para a resolução do algoritmo LP e, consequentemente, reduz-se o tempo de cálculo da lei de controle CPR.

## 4.6 Resumo

Neste Capítulo foi apresentado um algoritmo de controle preditivo robusto (CPR) para processos com incertezas estruturadas. Este algoritmo considera explicitamente a incerteza do modelo no cálculo da lei de controle e as restrições nos sinais de entrada do processo. Sua principal característica é a modelagem do processo por séries de funções ortonormais, o modelo SFO. A lei de controle CPR-SFO é derivada otimizando-se um problema do tipo *min-max*, cujo critério de custo descreve o desempenho do sistema através da utilização da norma Euclidiana e da norma infinita. Mostrou-se que a utilização do modelo SFO no contexto de controle preditivo robusto apresenta vantagens quando comparado com outras abordagens para a modelagem de processos incertos. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida através da seleção adequada do horizonte final de previsão.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, discutiu-se o problema de controle de processos com restrições nos sinais de entrada e saída e cujo modelo contém incertezas estruturadas. A metodologia de controle utilizada é denominada MBPC, ou controle preditivo, e foram desenvolvidos algoritmos baseados em duas abordagens de controle de processos incertos, a saber : controle adaptativo e controle robusto.

A principal característica dos métodos desenvolvidos neste trabalho é a modelagem por séries de funções ortonormais, isto é, o modelo SFO. Neste modelo, que é completo na representação de respostas ao impulso dentro do espaço de funções de Lebesgue, a saída do processo é descrita como sendo uma soma ponderada de funções ortonormais, onde a base de funções utilizada é calculada a partir de um conhecimento aproximado da dinâmica dominante do processo. Os modelos Laguerre, Kautz e de resposta ao impulso podem ser descritos como casos particulares do modelo SFO.

Este tipo de modelagem não estruturada apresenta as seguintes vantagens : *i)* em relação a modelos estruturados como o modelo CARIMA utilizado no GPC ou no CRHPC, não existe a necessidade de especificar a ordem e o atraso do processo; e *ii)* em relação a modelos não estruturados como o modelo de resposta ao impulso utilizado no DMC, o modelo SFO representa o processo utilizando um menor número de parâmetros, isto é, de coeficientes na série de funções ortonormais.

O modelo SFO é capaz de aproximar somente sinais de resposta ao impulso pertencentes ao espaço Lebesgue, o que exclui processos instáveis ou com ação integral. Entretanto, esta última categoria de processos pode

também ser modelada através da definição de um sinal de saída auxiliar, que é dado pela derivada da saída do processo.

Para a utilização do modelo SFO em controladores MBPC adaptativos e/ou robustos, foram desenvolvidas equações de previsão da saída  $j$  passos a frente, supondo processos com ou sem ação integral e com ou sem incerteza estruturada. Mostrou-se que as previsões da saída são lineares em relação à incerteza paramétrica do modelo. Também foram discutidos aspectos de identificação paramétrica e robusta dos coeficientes do modelo.

Em seguida, obteve-se o controlador MBPC adaptativo (CP-SFO), com critério de custo descrito através das normas Euclídea e infinita. As restrições nos sinais de entrada e saída do processo foram consideradas na lei de controle na forma de inequações lineares do problema de minimização do critério de custo. Com o objetivo de diminuir o esforço computacional do algoritmo, foi desenvolvido um método sub-ótimo para a eliminação de restrições redundantes do problema de minimização.

Comparado com outras estratégias de controle preditivo adaptativo, mostrou-se que, devido à utilização do modelo SFO, não existe a necessidade de especificar *a priori* a ordem e o atraso do modelo, o que representa uma vantagem em relação a controladores preditivos baseados em modelos estruturados quando o conhecimento exato desses parâmetros não estiver disponível. Além disso, tem-se que o sistema em malha fechada é estável através da seleção adequada do horizonte de previsão, ou da ponderação no esforço de controle, do algoritmo CP-SFO com critério quadrático e horizonte de controle igual a 1.

Deduziu-se, a seguir, uma nova abordagem para algoritmos de controle preditivo robusto baseada no modelo SFO (CPR-SFO). Esta abordagem consiste em minimizar o máximo do critério de custo para toda a família de modelos descritos pelo conjunto de incertezas paramétricas, ou seja, resolve-se um problema *min-max*. O controlador robusto apresentado também considera restrições nos sinais de entrada do processo.

Em comparação com outras estratégias de controle preditivo robusto existentes na literatura, mostrou-se que esta nova abordagem permite representar a incerteza paramétrica do modelo com um menor número de parâmetros, quando comparada com os algoritmos CPR baseados em modelo de resposta ao impulso. Esta característica simplifica o problema de identificação robusta e reduz o esforço computacional do algoritmo de otimização devido à diminuição do número de restrições. No controlador desenvolvido, o problema *min-max* apresenta uma solução global e, além disso, como a equação

de previsão da saída é linear em relação à incerteza paramétrica, a resolução computacional da lei de controle é factível para qualquer tipo de incerteza paramétrica considerada, isto é, a incerteza nos parâmetros não está limitada a um sub-conjunto dos parâmetros do modelo, como é o caso de abordagens de CPR baseadas em modelo CARIMA. Demonstrou-se que o sistema em malha fechada é estável através da escolha adequada do horizonte de previsão do algoritmo CPR-SFO com critério de custo baseado na norma infinita.

Como trabalhos futuros de aplicação de modelos SFO em algoritmos de controle preditivo, pode-se sugerir os seguintes tópicos de pesquisa :

1. Em algoritmos CPR, a incerteza do processo é definida através de limites mínimos e máximos nos coeficientes do modelo, constituindo desta forma, uma família de modelos para representar o processo. Esta abordagem para representação de incertezas pode incorporar mais modelos do que realmente existem na realidade. Como a lei de controle CPR considera o pior caso dentre todos os modelos contidos no espaço de incertezas, esta característica pode acarretar um desempenho em malha fechada conservativo em relação à real incerteza a respeito do processo. O desenvolvimento de métodos alternativos, seja para a definição dos limites de incerteza ou para a definição da incerteza no processo, poderia minimizar este problema. Neste contexto, pode-se citar a síntese de MBPC robustos descrita em [Kothare et al., 1996], onde o problema de otimização *min-max* é reescrito como sendo um problema convexo envolvendo Desigualdades Matriciais Lineares, ou *Linear Matrix Inequalities* - LMI. Este método permite, por exemplo, a representação de incertezas no domínio da frequência.
2. A utilização de séries de funções ortonormais revelou-se uma ferramenta poderosa na modelagem de processos lineares, que pode ser estendida para o caso de processos não lineares. Neste caso, o sinal de saída do modelo deve ser calculado através de uma relação não-linear a partir do vetor de saída das funções ortonormais. Como exemplo desta técnica pode-se citar a abordagem utilizando séries de Volterra [Dumont et al., 1993b]. O modelo assim obtido poderia ser utilizado na definição de algoritmos de controle preditivo para processos não-lineares.
3. Aperfeiçoamento dos resultados de estabilidade do sistema em malha fechada dos algoritmos de controle preditivo adaptativo ou robusto baseados no modelo SFO, por exemplo, de forma que a estabilidade seja garantida independentemente na norma utilizada no critério de custo.

- 
4. Finalmente, extensão dos conceitos apresentados nesta tese para processos multivariáveis com parâmetros incertos.

# Bibliografia

- [Acundeger, 1993] Acundeger, E. (1993). *Commande Predictive Supervisée*. PhD thesis, I3S/UNSA - France.
- [Allwright e Papavasiliou, 1992] Allwright, J. C. e Papavasiliou, G. C. (1992). On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses. *Systems & Control Letters*, 18:159–164.
- [Astrom e Wittenmark, 1989] Astrom, K. J. e Wittenmark, B. (1989). *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [Bazaraa e Shetty, 1979] Bazaraa, M. S. e Shetty, C. M. (1979). *Nonlinear Programming*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Biegler, 1989] Biegler, L. T. (1989). On solving the fundamental control problem in the presence of uncertainty : A mathematical programming approach. Em Prett, D. M., Garcia, C. E. e Ramaker, B. L., editors, *The Second Shell Process Control Workshop*, páginas 149–180. Butterworths.
- [Bitmead et al., 1990] Bitmead, R. R., Gevers, M. e Wertz, V. (1990). *Adaptive Optimal Control : The Thinking Man's GPC*. Prentice Hall.
- [Boot, 1964] Boot, J. C. G. (1964). *Quadratic Programming, Algorithms - Anomalies - Applications*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam.
- [Broome, 1965] Broome, P. W. (1965). Discrete orthonormal sequences. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 12(2):151–168.
- [Camacho, 1993] Camacho, E. (1993). Constrained generalized predictive control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(2):327–332.
- [Campo e Morari, 1986] Campo, P. J. e Morari, M. (1986). Infinity norm formulation of model predictive control problems. Em *Proceedings of American Control Conference*, páginas 339–343.

- [Campo e Morari, 1987] Campo, P. J. e Morari, M. (1987). Robust model predictive control. Em *Proc. of American Control Conference*, páginas 1021–1026, Minneapolis/USA.
- [Cernik et al., 1991] Cernik, C. R., Snowden, D. L., Yocom, F. H. e Hendon, S. R. (1991). Multivariable DMC control applied on a crude acetone column. Em *Proc. of ISA International Conference*, páginas 809–818, Anaheim/California - USA.
- [Chen et al., 1993] Chen, G. P., Malik, O. P. e Hope, G. S. (1993). Control limits consideration in discrete control system design. *IEE Proceedings-D*, 140(6):413–422.
- [Clarke, 1994] Clarke, D. W., editor (1994). *Advances in Model Based Predictive Control*. Oxford University Press.
- [Clarke e Mohtadi, 1989] Clarke, D. W. e Mohtadi, C. (1989). Proprieties of generalized predictive control. *Automatica*, 25(6):859–875.
- [Clarke et al., 1987] Clarke, D. W., Mohtadi, C. e Tuffs, P. (1987). Generalized predictive control - part 1 : The basic algorithm and part 2 : Extensions and interpretations. *Automatica*, 23(2):149–160.
- [Clarke e Scattolini, 1991] Clarke, D. W. e Scattolini, R. (1991). Constrained receding horizon predictive control. *IEE Proc. D*, 138(4):347–354.
- [Codron, 1993] Codron, P. (1993). Multivariable generalized predictive control with multiple reference model : A flexible arm application. Em *Proc. of the 12th IFAC World Congress*, volume 8, páginas 253–256.
- [Cuthrell et al., 1989] Cuthrell, J. E., Rivera, D. E., Schmidt, W. J. e Viegas, J. A. (1989). Solution to the shell standard control problem. Em Prett, D. M., Garcia, C. E. e Ramaker, B. L., editors, *The Second Shell Process Control Workshop*, páginas 149–180. Butterworths.
- [Cutler e Finlayson, 1988] Cutler, C. R. e Finlayson, S. G. (1988). Multivariable control of C3C4 splitter column. Em *Proc. of National Meeting of AIChE*, New Orleans/Louisiana - USA.
- [Cutler e Ramaker, 1980] Cutler, C. R. e Ramaker, B. C. (1980). Dynamic matrix control - A computer control algorithm. Em *Proc. of American Control Conference*, San Francisco/USA.

- [da Silva, 1995] da Silva, I. N. (1995). Estimação paramétrica robusta através de redes neurais artificiais. Tese de Mestrado, DCA/FEE/UNICAMP - Brasil.
- [Demircioglu e Clarke, 1993] Demircioglu, H. e Clarke, D. W. (1993). Generalized predictive control with end-point state weighting. *IEE Proceedings-D*, 140(4):275–282.
- [den Boom, 1995] den Boom, R. A. J. V. T. J. J. V. (1995). Constrained robust predictive control. Em *Proc. of the 3rd European Control Conference*, páginas 1738–1743, Roma/Italy.
- [den Hof et al., 1995] den Hof, P. M. J. V., Heuberger, P. S. C. e Bokor, J. (1995). System identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, 31(12):1821–1834.
- [Dion et al., 1991] Dion, J. M., Dugard, L., Franco, A., Tri, N. M. e Rey, D. (1991). Mimo adaptive constrained predictive control case study : An environmental test chamber. *Automatica*, 27(4):611–626.
- [Dumont et al., 1990] Dumont, G. A., Zervos, C. e Pageau, G. L. (1990). Laguerre-based adaptive control of pH in an industrial bleach plant extraction stage. *Automatica*, 26(4):781–787.
- [Dumont et al., 1993] Dumont, G. A., Elnaggar, A. e Elshafei, A. (1993). Adaptive predictive control of systems with time-varying time delay. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 7:91–101.
- [Dumont et al., 1993b] Dumont, G. A., e Fu, Y. (1993). Non-linear Adaptive Control via Laguerre Expansion of Volterra Kernels. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 7:367–382.
- [Elshafei et al., 1994] Elshafei, A., Dumont, G. A. e Elnaggar, A. (1994). Adaptive GPC based on Laguerre-filters modelling. *Automatica*, 30(12):1913–1920.
- [Favier e Arruda, 1996] Favier, G. e Arruda, L. V. R. (1996). Review and comparison of ellipsoidal bounding algorithms. Em Milanese, M., editor, *Bounding Approaches to System Identification*, páginas 43–68. Plenum Press, New York.
- [Finn et al., 1993] Finn, C., Wahlberg, B. e Ydstie, B. E. (1993). Constrained predictive control using orthogonal expansions. *AICHE Journal*, 39(11):1810–1826.

- [Fu, 1994] Fu, Y. (1994). *Laguerre Matlab ToolBox*. Department of Electrical Engineering, University of British Columbia, Vancouver/BC/Canada.
- [Fu e Dumont, 1993] Fu, Y. e Dumont, G. A. (1993). An optimum time scale for discrete Laguerre network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(6):934–938.
- [Garcia et al., 1989] Garcia, C. E., Prett, D. M. e Morari, M. (1989). Model predictive control : Theory and practice - a survey. *Automatica*, 25(3):335–348.
- [Gill et al., 1981] Gill, P. E., Murray, W. e Wright, M. H. (1981). *Practical Optimization*. Academic Press, London.
- [Goodwin e Sin, 1984] Goodwin, G. C. e Sin, K. S. (1984). *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, Inc. - Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Gunnarsson e Wahlberg, 1991] Gunnarsson, S. e Wahlberg, B. (1991). Some asymptotic results in recursive identification using Laguerre models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 5:313–333.
- [Gutierrez e Camacho, 1995] Gutierrez, A. J. e Camacho, E. F. (1995). Robust adaptive control for processes with bounded uncertainties. Em *Proc. of 3rd. European Control Conference*, volume 2, páginas 1295–1300, Roma/Italy.
- [Heuberger et al., 1995] Heuberger, P. S. C., den Hof, P. M. J. V. e Bosgra, O. H. (1995). A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40:451–465.
- [Houk et al., 1991] Houk, B. G., Snowden, D. L. e Stevenson, T. E. (1991). Improved control of ethylene recovery train using dinamic matrix control. Em *Proc. of ISA International Conference*, páginas 761–774, Anaheim/California - USA.
- [Irwing et al., 1986] Irwing, E., Falinower, C. M. e Fonte, C. (1986). Adaptive generalized predicitive control with multiple reference model. Em *2nd IFAC Workshop on Adaptive Control and Signal Processing*, páginas 384–386. IFAC.
- [Keyser et al., 1988] Keyser, R. M., de Velde, P. A. V. e Dumortier, F. (1988). A comparative study of self adaptive long-range control methods. *Automatica*, 24(2):149–163.

- [Kothare et al., 1996] Kothare, M. V., Balakrishnan, V. e Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379.
- [Kramer e Umbehauen, 1991] Kramer, K. e Umbehauen, H. (1991). Predictive adaptive control - comparison of main algorithms. Em *Proc. of ECC*, páginas 327–332, Grenoble/France.
- [Lambert, 1987] Lambert, M. (1987). *Adaptive Control of Flexible Systems*. PhD thesis, University of Oxford - England.
- [Lee et al., 1994] Lee, J. H., Morari, M. e Garcia, C. E. (1994). State-space interpretation of model predictive control. *Automatica*, 30(4):707–717.
- [Lee e Weekman, 1976] Lee, W. e Weekman, V. W. (1976). Advanced control practice in the chemical process industry : A view from industry. *AICHE Journal*, 22(1):27–38.
- [Leva e Scattolini, 1993] Leva, A. e Scattolini, R. (1993). Predictive control with terminal constraints. Em *Proc. of European Control Conference*, páginas 932–936.
- [Li et al., 1989] Li, S., Lim, K. Y. e Fisher, D. G. (1989). A state-space formulation for model predictive control. *AICHE Journal*, 35:241–249.
- [Ling, 1993] Ling, K. V. (1993). An efficient constrained predictive control algorithm for 2-input systems. Em *Proc. of 12th IFAC world congress*, volume 1, páginas 345–348, Australia.
- [Ljung, 1987] Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the user*. Prenctice Hall Inc.
- [Lopez et al., 1995] Lopez, J. F., Oliveira, G. H. C., Favier, G., Acundeger, E., Amaral, W. C. e Latre, L. G. (1995). Multivariable constrained predictive control applied to the shell benchmark problem : A comparison. Em *Proc. of the 3rd European Control Conference*, páginas 3259–3264, Roma/Italy.
- [Lu e Hogg, 1994] Lu, S. e Hogg, B. W. (1994). Model based predictive control of a thermal power plant. Em Clarke, D. W., editor, *Advances in Model Based Predictive Control*, páginas 516–522. Oxford University Press.
- [Luenberger, 1984] Luenberger, D. G. (1984). *Introduction to Linear and NonLinear Programming*. Addison-Wesley, Publishing Company, 2 edition.

- [Makila, 1990] Makila, P. M. (1990). Approximation of stable systems by Laguerre filters. *Automatica*, 26(2):333–345.
- [Masnadi-Shirazi e Ahmed, 1991] Masnadi-Shirazi, M. A. e Ahmed, N. (1991). Optimum Laguerre networks for a class of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(9):2104–2108.
- [McIntosh et al., 1990] McIntosh, A. R., Fisher, D. G. e Shah, S. L. (1990). Performance tuning of adaptive generalized predictive control. Em *Proc. of IFAC World Congress*, páginas 174–179, USSR.
- [Messaoud e Favier, 1994] Messaoud, H. e Favier, G. (1994). Recursive determination of parameter uncertainty intervals for linear models with unknown but bounded errors. Em *Proc. of 10th IFAC Symp. on SYSID*, páginas 365–370, Copenhagen/Denmark.
- [Milanese e Belforte, 1982] Milanese, M. e Belforte, G. (1982). Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors : Linear families of models and estimators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30(8):730–738.
- [Mohtadi, 1988] Mohtadi, C. (1988). *On the Role of Prefiltering in Parameter Estimation and Control*, volume 137 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, páginas 121–144. Springer-Verlag, adaptive control strategies for industrial use edition.
- [Morari, 1994] Morari, M. (1994). Model predictive control : A multivariable control technique of choice in the 1990's ? Em Clarke, D. W., editor, *Advances in Model Based Predictive Control*, páginas 22–37. Oxford University Press.
- [Nazzetta, 1991] Nazzetta, R. M. (1991). Um sistema baseado em conhecimento para configuração e supervisão de algoritmos de controle adaptativos. Tese de Mestrado, DCA/FEE/UNICAMP - Brasil.
- [Nicolao et al., 1996] Nicolao, G., Magni, L. e Scattolini, R. (1996). Robust predictive control of systems with uncertain impulse response. *Automatica*, 32(10):1475–1479.
- [Ninness e Gustafsson, 1994] Ninness, B. e Gustafsson, F. (1994). A unifying construction of orthonormal bases for system identification. Technical Report no. EE9433, DECE, University of Newcastle, Australia.

- [Ninness e Gustafsson, 1995] Ninness, B. e Gustafsson, F. (1995). Orthonormal bases for system identification. Em *Proc. of 3rd European Control Conference*, volume 1, páginas 13–18, Rome/Italy.
- [Norton, 1990] Norton, J. P. (1990). Fast and robust algorithm to compute exact polytope parameter bounds. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32:481–493.
- [Oliveira, 1992] Oliveira, G. H. C. (1992). Controlador preditivo generalizado : Alocação de pólos, robustez e aplicação em sistemas flexíveis. Tese de Mestrado, DCA/FEE/UNICAMP - Brasil.
- [Oliveira et al., 1994] Oliveira, G. H. C., Nazzetta, R. M., Amaral, W. C. e Latre, L. G. (1994). Análise de restrições em sistemas com controle preditivo. Em *Anais 10º Congresso Brasileiro de Automatica*, volume 1, páginas 578–583, Rio de Janeiro/Brasil.
- [Oliveira et al., 1996a] Oliveira, G. H. C., Amaral, W. C. e Latre, L. G. (1996a). A robustness approach for prefiltering the GPC. *Computer & Electrical Engineering*, 22(5):315–324.
- 
- [Oliveira et al., 1996b] Oliveira, G. H. C., Favier, G., Dumont, G. e Amaral, W. C. (1996b). Robust predictive controller based on Laguerre filters modeling. Em *Proc. of 13th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, volume G, páginas 375–380, San Francisco/USA.
- [Oliveira et al., 1996c] Oliveira, G. H. C., Lopez, J. F., Favier, G. e Amaral, W. C. (1996c). Review of predictive control methods using laguerre functions. Em *Proc. of IEEE/IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications - CESA, Symposium on Control Optimization and Supervision*, volume 1, páginas 304–309, Lille/France.
- [Oliveira et al., 1997] Oliveira, G. H. C., Amaral, W. C. e Favier, G. (1997). Constrained adaptive MBPC using orthonormal series functions. Em *Proc. of 4th International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje/Polonia. A ser publicado.
- [Oliveira et al., 1997b] Oliveira, G. H. C., Amaral, W. C., Favier, G., and Dumont, G. (1997b). Constrained robust MBPC for uncertain processes modeled by orthonormal series functions. *Automatica*. Submetido.
- [Olivier, 1994] Olivier, P. D. (1994). Online system identification using Laguerre series. *IEE Proceedings-D*, 141(4):249–254.

- [Ordys e Clarke, 1993] Ordys, A. W. e Clarke, D. W. (1993). A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Science*, 24(9):1727–1744.
- [Payne, 1987] Payne, A. (1987). Stability result with application to adaptive control. *International Journal of Control*, páginas 249–261.
- [Prett e Garcia, 1988] Prett, D. M. e Garcia, C. E. (1988). *Fundamental Process Control*. Butterworths Inc.
- [Prett e Garcia, 1989] Prett, D. M. e Garcia, C. E. (1989). *The Second Shell Process Control Workshop - Solutions to the Shell Standard Control Problem*. Butterworths Inc.
- [Richalet et al., 1978] Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. e Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control : Applications to industrial process. *Automatica*, 14(5):413–428.
- [Ricker, 1985] Ricker, N. L. (1985). Use of quadratic programming for constrained internal model control. *Ind. Eng. Chemical Process Des. Dev.*, 24:925–936.
- [Robinson e Clarke, 1991] Robinson, B. D. e Clarke (1991). Robustness effects of a prefilter in generalised predictive control. *IEE Proc. - D*, 138(1):2–8.
- [Samaan, 1989] Samaan, M. (1989). *Synthèse et Supervision des Lois de Commande Adaptative*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - France.
- [Scokaert e Rawlings, 1996] Scokaert, P. O. M. e Rawlings, J. B. (1996). Infinite horizon linear quadratic control with constraints. Em *Proc. of 13th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, volume M, páginas 109–114, San Francisco/USA.
- [Skrjanc e Matko, 1994] Skrjanc, I. e Matko, D. (1994). Fuzzy predictive controller with adaptive gain. Em Clarke, D. W., editor, *Advances in Model Based Predictive Control*, páginas 370–385. Oxford University Press.
- [Soeterboek, 1992] Soeterboek, R. (1992). *Predictive Control : A Unified Approach*. Prentice Hall International.
- [Sommer, 1994] Sommer, S. (1994). MBPC methods based on non-linear and bilinear parametric systems descriptions. Em Clarke, D. W., editor, *Advances in Model Based Predictive Control*, páginas 192–204. Oxford University Press.

- [Tan e de Keyser, 1994] Tan, Y. e de Keyser, R. (1994). Neural network based adaptive predictive control. Em Clarke, D. W., editor, *Advances in Model Based Predictive Control*, páginas 358–369. Oxford University Press.
- [Tsang e Clarke, 1988] Tsang, T. T. C. e Clarke, D. W. (1988). Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proc. - D*, 132(3):100–110.
- [Wahlberg, 1991a] Wahlberg, B. (1991a). Identification of resonant systems using Kautz filters. Em *Proc. of the 30th Conference on Decision and Control*, páginas 2005–2010.
- [Wahlberg, 1991b] Wahlberg, B. (1991b). System identification using Laguerre models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(5):551–562.
- [Wahlberg, 1994] Wahlberg, B. (1994). Laguerre and Kautz models. Em *Proc. of the IFAC Symp. on SYSID*, volume 3, páginas 1–12, Copenhagen/Denmark.
- [Wahlberg e Makila, 1996] Wahlberg, B. e Makila, P. M. (1996). Approximation of stable linear dynamical systems using Laguerre and Kautz functions. *Automatica*, 32(5):693–708.
- [Walter e Piet-Lahanier, 1990] Walter, E. e Piet-Lahanier (1990). Estimation of parameter bounds from bounded-error data : a survey. *Mathematics and Computers in simulation*, 32:449–468.
- [Wang e Henriksen, 1993] Wang, W. e Henriksen, R. (1993). Generalized predictive control of nonlinear systems of the hammerstein form. Em *Proc. of European Control Conference*, páginas 926–931.
- [Wiener, 1956] Wiener, N. (1956). *The Theory of Prediction*. Modern Mathematics for Engineers. McGraw-Hill, New York.
- [Yoon e Clarke, 1994] Yoon, T. e Clarke, D. W. (1994). Adaptive Predictive Control of the Benchmark Plant. *Automatica*, 30(4):621–628.
- [Zervos e Dumont, 1988] Zervos, C. C. e Dumont, G. A. (1988). Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation. *International Journal of Control*, 48(6):2333–2359.
- [Zheng e Morari, 1993] Zheng, Z. Q. e Morari, M. (1993). Robust stability of constrained model predictive control. Em *Proc. of American Control Conference*, páginas 379–383, San Francisco/USA.

- [Zhu et al., 1991] Zhu, Q. M., Warwick, K. e Douce, J. L. (1991). Adaptive general predictive controller for nonlinear systems. *IEE Proceedings-D*, 138(1):33–40.