Controle Preditivo Robusto de Sistemas Híbridos Incertos Integrando Restrições, Lógica, e Dinâmica Baseada em Séries de Funções Ortonormais

Vicente Delgado Moreira

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Gradução da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – FEEC – da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Wagner Caradori do Amaral, Dr.
Orientador
Paulo Augusto Valente Ferreira, Dr.
Co-orientador

Campinas, São Paulo, Brasil ©Vicente Delgado Moreira, Fevereiro de 2006

Controle Preditivo Robusto de Sistemas Híbridos Incertos Integrando Restrições, Lógica, e Dinâmica Baseada em Séries de Funções Ortonormais

Vicente Delgado Moreira

Tese de Doutorado apresentada em Fevereiro de 2006

Wagner Caradori do Amaral, Dr.
Orientador
Paulo Augusto Valente Ferreira, Dr.
Co-orientador

Gustavo Henrique da Costa Oliveira, Dr. (PUC-PR)

Componente da Banca

Rubens Maciel Filho, Dr. (FEQ/UNICAMP)

Componente da Banca

João Bosco Ribeiro do Val, Dr. (FEEC/UNICAMP)

Componente da Banca

Basílio Ernesto de Almeida Milani, Dr. (FEEC/UNICAMP)

Componente da Banca

Campinas, São Paulo, Brasil, Fevereiro de 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Moreira, Vicente Delgado

M813c

Controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos integrando restrições, lógica, e dinâmica baseada em séries de funções ortonormais / Vicente Delgado Moreira. — Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientadores: Wagner Caradori do Amaral e Paulo Augusto Valente Ferreira.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

Controle preditivo. 2. Proposição (Lógica). 3.
 Estabilidade. 4. Controle robusto. 5. Sistemas híbridos. I.
 Amaral, Wagner Caradori do. II. Ferreira, Paulo Augusto
 Valente. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título

Título em Inglês: Robust model based predictive control of uncertain hybrid systems integrating constraints, logic, and dynamics based on orthonormal series function.

Palavras-chave em Inglês: Predictive control, Proposition (Logic), Stability, Robust control, Hybrid systems.

Área de concentração: Automação.

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica.

Banca examinadora: Gustavo Henrique da Costa Oliveira, Rubens Maciel Filho, João Bosco Ribeiro do Val e Basílio Ernesto de Almeida Milani.

Data da defesa: 21/02/2006.

Dedicatória

Ao meu filho João Vicente, fonte de toda força e inspiração, e à minha esposa Tâmara, grande companheira e incentivadora, dedico este trabalho.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade de trabalhar.

Ao meu filho, João Vicente, à minha esposa, Tâmara, aos meus pais, Zé Vicente e Solange, aos meus irmãos, Guilherme e Nelsinho, aos meus sogros, Seu Tiné e Dona Elizabete, e à toda a minha família, por todo o incentivo e por desculparem a minha ausência durante a realização deste trabalho.

Ao Professor Wagner Caradori do Amaral, pela orientação e por toda a ajuda, inclusive a extra-Tese.

Ao Professor Paulo Augusto Valente Ferreira, pela orientação e pelas excelentes dicas dadas ao longo de todo o trabalho.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro parcial.

A todos os que não constam nesta nota, mas que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

Resumo

O interesse pelo projeto de controladores preditivos para sistemas híbridos vem aumentando nos últimos anos. Os sistemas híbridos são descritos simultaneamente por relações lógicas, baseadas por exemplo nos operadores SE/ENTÃO/SENÃO, e por equações dinâmicas. Devido às exigências relacionadas ao desempenho de rastreio das referências em malha fechada, busca-se atualmente metodologias de modelagem que permitam integrar as representações dinâmicas e as proposições lógicas do processo híbrido em uma abordagem não-hierárquica. As abordagens encontradas na literatura para o controle preditivo de sistemas híbridos são preferencialmente aplicáveis a processos determinísticos cujas dinâmicas são representadas no espaço de estados. Em certos casos, um modelo de estados não é conhecido, incertezas paramétricas politópicas inviabilizam o projeto de controladores preditivos robustos, ou outras formas de modelagem são mais adequadas para a representação do processo. Neste trabalho, desenvolve-se uma nova metodologia para a modelagem e o controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos. Na abordagem proposta, as proposições lógicas são transformadas em desigualdades lineares mistas equivalentes, como sugerido na literatura. Um modelo baseado em séries de funções ortonormais é estimado para descrever o comportamento dinâmico do processo. Os modelos baseados em séries podem ser representados no espaço de estados, e a ordem do modelo pode ser reduzida escolhendo-se adequadamente as bases ortonormais. Como sugerido na literatura, a incerteza de um conjunto de respostas ao impulso é mapeada em intervalos de pertinência que definem os coeficientes da série ortonormal. Impõe-se condições adicionais sobre esta técnica para assegurar que todas as respostas ao impulso do processo estão representadas no modelo. Os limites da incerteza são estimados, ao contrário das abordagens encontradas na literatura, onde é necessário conhecer antecipadamente a amplitude máxima da perturbação. A equação de estados do modelo proposto não contém coeficientes incertos, implicando que o seu espaço politópico é reduzido substancialmente quando comparado às abordagens existentes na literatura, onde todas as matrizes da representação de estados podem estar contidas em politopos. Também propõese uma nova estratégia para assegurar a estabilidade robusta do processo em malha fechada com controle preditivo. A estratégia é baseada em conjuntos terminais, uma das formas menos conservadoras de assegurar o rastreio das referências do sistema. Resultados de simulação são apresentados para ilustrar o desempenho desta nova abordagem de controle preditivo robusto para sistemas híbridos incertos. Utiliza-se o algoritmo proposto para o controle de um sistema de refrigeração industrial.

Abstract

Model-based Predictive Control (MPC) has been attracting interest in both academic and industrial areas since the 1970's. The MPC methodology has been recently extended to a class of hybrid systems described by dynamics and logic rules. Logical propositions are performed by using, for example, IF/THEN/ELSE operators. Due to performance requirements, the nonhierarchical modeling approaches to hybrid systems have been preferable in MPC schemes. Some methodologies to the modeling and predictive controling of hybrid systems can be found in the literature. These schemes are specially applicable to deterministic hybrid systems whose dynamics are represented in state-space. In some cases, a state-space model is not available or politopic uncertainties can prohibit real time implementations. Over this, other models can be more adequate to parameter estimation. A new approach for modeling and controlling a class of hybrid systems described by interacting physical laws, logic rules, and operational requirements is proposed in this work. As recently suggested in the literature, the logic rules are integrated into the model as equivalent linear inequality constraints involving both continuous and binary variables. The distinguishing feature of the approach proposed is the use of orthonormal series for modeling the process dynamics. The model proposed can be easily estimated with only approximate knowledge of the system dynamics. The order of the model can be reduced by an adequate selection of the orthonormal basis. Uncertainties in the process dynamics are incorporated into the output equation only, reducing the model politopic space. A new strategy to assure robust stability is also presented. The reference tracking is guaranteed by using a terminal set constraint, which does not severally affect the tracking performance of the closed loop system. The approaches proposed in the literature to determine a terminal set constraint use the maximal amplitude of the perturbation, which is generally unknown. Is this work, the limits of the uncertainty are estimated. Simulation examples illustrate the main characteristics of the framework proposed.

Conteúdo

1	Intr	odução	, Trabalhos Anteriores, Objetivo, Organização e Contribuições	1
	1.1	Introdu	ıção Geral	1
	1.2	Proble	ma Geral de Controle Preditivo	6
		1.2.1	Restrições	7
		1.2.2	Dynamic Matrix Controller	8
		1.2.3	Model Algorithmic Controller	10
		1.2.4	Generalized Predictive Controller	10
		1.2.5	Controle Preditivo Baseado em Representação no Espaço de Estados	11
	1.3	Contro	le Preditivo de Sistemas Híbridos	18
		1.3.1	Sistemas Híbridos	18
		1.3.2	Controle Preditivo de Sistemas Híbridos - Estruturas Hierárquicas	18
		1.3.3	Controle Preditivo de Sistemas Híbridos - Estruturas Não-Hierárquicas	19
		1.3.4	Estabilidade do Sistema Híbrido em Malha Fechada	21
		1.3.5	Robustez do Sistema Híbrido em Malha Fechada	22
		1.3.6	Solução Explícita do Controlador Preditivo Híbrido	24
	1.4	Contro	le Preditivo Baseado em Séries de Funções Ortonormais	25
		1.4.1	Séries de Funções Ortonormais	25
		1.4.2	Controle Preditivo Robusto Baseado em Séries de Funções Ortonormais .	26
	1.5	Objetiv	vo do Trabalho	27
	1.6	Organi	zação e Contribuições do Trabalho	28
2	Séri	es de F	unções Ortonormais	31
	2.1	Introdu	ıção	31
	2.2	Modela	agem de Processos Monovariáveis	32
		2.2.1	Base Ortonormal de Laguerre	34
		2.2.2	Base Ortonormal de Kautz	35
		2.2.3	Base Ortonormal Generalizada	37

	2.3	Modela	agem de Processos Multivariáveis	40
		2.3.1	Exemplo: Estimação do Modelo Ortonormal de um Ambiente com Sis-	
			tema de Climatização	44
	2.4	Modela	agem de Processos Monovariáveis Incertos	45
		2.4.1	Modelagem da Resposta ao Impulso Central e do Máximo Desvio do	
			Conjunto de Respostas ao Impulso	46
		2.4.2	Sobrestimação do Conjunto de Respostas ao Impulso do Processo	49
		2.4.3	Subestimação do Conjunto de Respostas ao Impulso do Processo	51
		2.4.4	Exemplo: Estimação dos Modelos Ortonormais de um Sistema Dinâmico	
			com Um Modo Próprio Amortecido e Incerto	52
	2.5	Modela	agem de Processos Multivariáveis Incertos	57
		2.5.1	Exemplo: Estimação dos Modelos Ortonormais de um Ambiente com	
			Sistema de Climatização Sujeito a Infiltrações de Ar	62
	2.6	Resum	0	65
3	Mod	lelagen	n de Sistemas Híbridos	69
	3.1	Modela	agem de Sistemas Híbridos Determinísticos: Integração de Restrições, Ló-	
		gica, e	Dinâmica Baseada em Séries de Funções Ortonormais	69
		3.1.1	Exemplo: Modelagem de um Processo Afim por Partes em s Regiões $\ . \ .$	73
		3.1.2	Exemplo: Modelagem de um Processo cuja Entrada Pertence a um Con-	
			junto Finito	75
		3.1.3	Modelagem de Processos cujas Representações Ortonormais têm Dimen-	
			sões Distintas	75
	3.2	ldentifi	cação de Sistemas Híbridos	76
		3.2.1	Exemplo: Identificação de um Processo Híbrido com Modos Próprios	
			Sobreamortecidos	77
	3.3	Modela	agem de Sistemas Híbridos Incertos: Integração de Restrições, Lógica, e	
		Dinâm	ica Baseada em Séries de Funções Ortonormais com Incertezas Estruturadas	79
		3.3.1	Exemplo: Modelagem de um Processo Híbrido com Modos Próprios So-	
			breamortecidos e Incertos	82
	3.4	Resum	0	85
4	Con	trole P	reditivo de Sistemas Híbridos	87
	4.1	Contro	le Preditivo de Sistemas Híbridos Determinísticos	88
		4.1.1	Controle Preditivo com Critério de Desempenho Baseado na Norma Qua-	
			drática	90

		4.1.2	Softwares para Programação Inteira-Mista	91
		4.1.3	Controle Preditivo com Critério de Desempenho Baseado na Norma Infinit	a 93
		4.1.4	Exemplo: Controle Preditivo de um Processo Híbrido com Modos Próprios	
			Sobreamortecidos	94
		4.1.5	Solução Explícita do Controlador Preditivo	96
		4.1.6	Estabilidade do Sistema Híbrido em Malha Fechada com Controle Preditiv	o 98
	4.2	Contro	ole Preditivo Robusto de Sistemas Híbridos Incertos	101
		4.2.1	Controle Preditivo Robusto com Critério de Desempenho Baseado na	
			Norma Quadrática	103
		4.2.2	Controle Preditivo Robusto com Critério de Desempenho Baseado na	
			Norma Infinita	105
		4.2.3	Exemplo: Controle Preditivo Robusto de um Processo Híbrido com Modos	
			Próprios Sobreamortecidos e Incertos	107
		4.2.4	Exemplo: Controle Preditivo Robusto da Temperatura em um Ambiente	
			com Sistema de Climatização Sujeito a Infiltrações de Ar	110
	4.3	Estabi	lidade do Sistema Híbrido Incerto em Malha Fechada com Controle Predi-	
		tivo R	obusto	112
		4.3.1	Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis de Sistemas Híbridos com Incer-	
			tezas Estruturadas	114
		4.3.2	Exemplo: Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis de um Processo Hí-	
			brido com Modos Próprios Sobreamortecidos Incertos	117
	4.4	Resum	0	119
5	Con	sideraç	cões Finais e Trabalhos Futuros	121
۸	Mac	dolo Ta	ermodinâmico de um Ambiente com Sistema de Climatização	125
~	A.1		Determinístico	
			ncerto	
	Λ.Δ	Caso i		120
В	Pro	posiçõe	es Lógicas e Desigualdades Lineares Mistas	131
C	Mod	delager	n de um Ambiente com Sistema de Climatização	135
	C.1	Caso [Determinístico	135
	C.2	Caso I	ncerto	136
D	Esta	bilidad	le do Sistema em Malha Fechada com Controle Preditivo	139
	D 1	Restriç	ão de Saída Terminal	139

	D.2 Custo de Saída Terminal	. 140
	D.3 Conjuntos Máximos de Saídas Admissíveis	. 141
Е	Trabalhos Publicados	145
	Bibliografia	147

Lista de Símbolos

A, bmatrizes da representação do sistema no espaço de estados cvetor ou matriz de coeficientes da série ortonormal vetor ou matriz de coeficientes incertos da série ortonormal $c(\eta)$ \bar{c} valor médio dos coeficientes da série ortonormal dcmódulo da máxima variação dos coeficientes da série ortonormal em torno dos respectivos valores médios datraso de transporte do processo e(t)ruído branco $G(q^{-1})$ modelo dinâmico do processo $G(q^{-1},\eta)$ modelo dinâmico do processo incerto H, M, Smatrizes h(t)resposta ao impulso do processo h(t)resposta ao impulso central do processo dh(t)máximas variações, em módulo, das respostas ao impulso do processo em torno da resposta central l(t)vetor de estados da série ortonormal valores máximo e mínimo max, min número de coeficientes Npólo do desenvolvimento da base ortonormal poperador avanço ponderações sobre os esforços de controle, sobre os erros de rastreio Q_u , Q_y , Q_t das referências de saída e sobre os estados ou as saídas terminais referência r T_u , T_y horizontes de controle e de previsão u(t)vetor de entradas do processo vetor de entradas de controle k passos a frente do instante atual u(t+k)vetor que agrega os vetores de entrada ao longo do horizonte T_u $\mathbf{u}(t)$

v	norma utilizada no critério de custo
$y\left(t\right)$	vetor de saídas do processo
$y_m\left(t\right)$	vetor de saídas medidas no instante atual
$\hat{y}(t+k/t)$	vetor de saídas previstas \boldsymbol{k} passos a frente do instante atual
$z\left(t\right)$	vetor de variáveis auxiliares
$\delta\left(t\right)$	vetor de variáveis binárias
$\phi\left(t\right)$	seqüência ortonormal discreta no tempo
$\Phi\left(z\right)$	Transformada ${\cal Z}$ da seqüência ortonormal discreta no tempo
Ψ	vetor que agrega as variáveis do problema de otimização

Lista de Abreviaturas

ARX AutoRegressive eXogenous

CARIMA Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average

CMSA Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis

CP Controlador Preditivo

CPR Controlador Preditivo Robusto

CRHPC Constrained Receding Horizon Predictive Controller

DMC Dynamic Matrix Controller

ELC Extended Linear Complementary

FIR Finite Impulse Response

GPC Generalized Predictive Controller

HVAC Heating, Ventilating, and Air-Conditioning

IDCOM Identification Command

LC Linear Complementary

LMI Linear Matrix Inequality

LQR Linear Quadratic Regulator

MAC Model Algorithmic Controller

MILP Mixed Integer Linear Programming

MIMO Multiple-Input, Multiple-Output

MINLP Mixed Integer Non-Linear Programming

MIPC Mixed Integer Predictive Control

MIQP Mixed Integer Quadratic Programming

MLD Mixed Logical Dynamical

MLDSFO Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais

MMPS Max-Min-Plus-Scaling

MPC Model-based Predictive Control

mpMILP multi-parametric Mixed Integer Linear Programming

mpQP multi-parametric Quadratic Programming

OE Output Error

PID Proporcional-Integral-Derivativo
PFC Predictive Functional Controller

PWA PieceWise Affine

QP Quadratic Programming

SISO Single-Input, Single-Output

SFO Séries de Funções Ortonormais

Lista de Tabelas

B.1	Tabela da Verdade que define alguns conectivos booleanos.	132
B.2	Expressões lógicas e respectivas desigualdades equivalentes.	132
B.3	Equivalência entre uma expressão lógica e a respectiva desigualdade equivalente.	132
B.4	Expressões mistas e respectivas desigualdades lineares equivalentes	133

Lista de Figuras

2.1	Ensaio do ambiente com sistema de climatização e do modelo ortonormal estimado.	45
2.2	Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados	
	utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas.	53
2.3	Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados	
	utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas para $15s \leq t \leq 25s$.	54
2.4	Comparação entre os limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se as	
	abordagens (2.13) e (2.17)	55
2.5	Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados	
	utilizando-se o modelo ortonormal sobrestimado através da abordagem (2.17)	
	para $15s \leq t \leq 25s$	56
2.6	Respostas do processo a uma entrada arbitrária e limites calculados utilizando-se	
	o modelo ortonormal com incertezas estruturadas sobrestimado	57
2.7	Respostas do processo a uma entrada arbitrária e limites calculados utilizando-	
	se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas sobrestimado, para um dc	
	qualquer	58
2.8	Limites da resposta ao impulso do processo e limites calculados utilizando-se a	
	abordagem (2.19)	59
2.9	Respostas do processo e limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se	
	o modelo para entradas impulsivas (Figura 2.9a, b e c) e aleatórias (Figura 2.9d).	65
2.10	Comparação entre os limites das respostas do processo e os limites calculados	
	utilizando-se a abordagem (2.17)	66
2.11	Comparação entre os limites das respostas do processo e os limites calculados	
	utilizando-se a abordagem (2.19)	67
3.1	Logaritmo do erro médio quadrático de modelagem das dinâmicas $G_{1}\left(q^{-1} ight)$ e	
	$G_2\left(q^{-1} ight)$ em função dos pólos p_1 e p_2	78
3.2	Saída do processo e saída do modelo para uma entrada arbitrária.	79

4.1	CP-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios sobreamortecidos e critério
	de desempenho baseado nas normas quadrática e infinita
4.2	CPR-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos 108
4.3	Erros de rastreio da referência de saída com CPR-MLDSFO e com CP-MLDSFO. 108
4.4	CPR-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos, e
	critérios de desempenho baseados nas normas quadrática e infinita 109
4.5	CPR-MLDSFO do sistema HVAC incerto
4.6	Erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com
	CP-MLD - Caso 1
4.7	Erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com
	CP-MLD - Caso 2
4.8	CMSA do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos
4.9	Trajetórias no interior do CMSA do sistema híbrido com modos próprios amorte-
	cidos e incertos

Capítulo 1

Introdução, Trabalhos Anteriores, Objetivo, Organização e Contribuições

1.1 Introdução Geral

Nas últimas décadas, tem-se observado o crescente desenvolvimento industrial e a busca por qualidade e eficiência nos processos produtivos. Assim, é cada vez mais comum a utilização de controladores sofisticados nos meios de produção. Os controladores são projetados, em geral, para garantir que uma dada especificação seja alcançada, como por exemplo a manutenção da pureza de um produto dentro de limites desejados.

Em processos industriais nos quais as especificações de desempenho são pouco severas, pode-se utilizar controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo). O controlador PID tem desempenho satisfatório em muitas aplicações. No entanto, sua eficiência pode ser reduzida quando o processo for multivariável, de ordem elevada, sujeito a atraso de transporte, variante no tempo, ou quando houver restrições operacionais rígidas (Oliveira, 1997).

Com o avanço da indústria de microeletrônica, controladores complexos podem ser utilizados em aplicações que envolvam especificações mais rigorosas. É o caso, por exemplo, quando deseja-se a regulação de uma variável e existem restrições sobre as entradas e as saídas do processo. As restrições estão relacionadas a limites em atuadores (que podem operar entre os modos totalmente aberto e totalmente fechado), a requisitos de segurança (associados a elevação de temperaturas, velocidades ou pressões), ou a taxa de variação dos atuadores (que têm limites para a velocidade com que aumentam ou diminuem o valor da atuação).

Neste contexto, surgem no final da década de 1970 os controladores preditivos (MPC - Model-

based Predictive Controllers). As estratégias de MPC são baseadas no modelo do processo a ser controlado. O conceito de controle preditivo foi introduzido por Richalet, Rault, Testud e Papon com o IDCOM (Identification Command) (Richalet et al., 1978), e por Cutler e Ramaker com o DMC (Dynamic Matrix Controller) (Cutler e Ramaker, 1980). O IDCOM utiliza um modelo de resposta ao impulso para representar o comportamento dinâmico do processo. O DMC utiliza um modelo de resposta ao degrau e permite considerar restrições nas variáveis do processo na forma de desigualdades lineares. Os problemas de otimização restritos são resolvidos numericamente para a determinação da següência de controle.

Alguns anos mais tarde, Clarke, Mohtadi e Tuffs utilizaram um modelo CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) para desenvolver o GPC (Generalized Predictive Controller) (Clarke et al., 1987a; Clarke et al., 1987b). A literatura relata a aplicação prática dos controladores IDCOM, DMC e GPC, bem como apresenta análises teóricas de seus desempenhos. No início da década seguinte, Clarke e Scattolini desenvolveram o CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Controller) (Clarke e Scattolini, 1991). O CRHPC utiliza como modelo do processo qualquer representação do tipo entrada/saída. Além de ser capaz de lidar com exigências operacionais, o CRHPC foi o primeiro algoritmo de controle preditivo a assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada.

As estratégias de controle preditivo utilizam um modelo do processo para prever o seu comportamento futuro. A seqüência de entrada é calculada otimizando-se um critério de desempenho que pondera o esforço de controle necessário para atuar no sistema e o erro entre a saída prevista e a referência desejada. As restrições nas variáveis de entrada e de saída podem ser incorporadas à otimização do critério de custo. As restrições devem ser respeitadas pela previsão da saída e pela seqüência de controle. A otimização do critério de desempenho sujeito a restrições tem como solução uma seqüência de controle denominada ótima. Na estratégia MPC, apenas o primeiro elemento da seqüência ótima de controle é efetivamente aplicado ao processo. No instante de amostragem seguinte, novas medições são realizadas na planta e o procedimento previsão/otimização é repetido de acordo com a estratégia de horizonte deslizante (Camacho e Bordons, 1999).

Os algoritmos preditivos, e consequentemente os sistemas em malha fechada com MPC, são extremamente dependentes do modelo utilizado para representar o processo. Embora a maioria dos processos reais apresente comportamento não-linear, os modelos utilizados para o projeto de MPC são normalmente lineares. Isto é devido ao fato de o projeto e a análise de MPC linear estar em avançado estágio de desenvolvimento quando comparado ao MPC não-linear. A aproximação linear de processos não-lineares e a desconsideração de incertezas na representação do sistema introduzem erros de modelagem. Se o comportamento do processo não

for representado satisfatoriamente, poderá ocorrer instabilidade ou degradação no desempenho do sistema em malha fechada. O projeto de MPC deve considerar, portanto, as restrições, as incertezas e as não-linearidades do sistema para o cálculo da lei de controle.

Recentemente, também tem crescido o interesse pelo projeto de controladores preditivos para sistemas híbridos. Sistemas híbridos são descritos simultaneamente por equações dinâmicas e relações lógicas, característica observada em muitos dos processos reais. As relações lógicas, baseadas por exemplo nos operadores SE/ENTÃO/SENÃO, são utilizadas para descrever o intertravamento da planta. Metodologias com características hierárquicas para o projeto de controle de sistemas híbridos podem ser encontradas na literatura (Lygeros et al., 1999; Branicky et al., 1998). Nas abordagens hierárquicas, os controladores contínuos estão no nível mais baixo realizando a regulação e os esquemas supervisórios estão em um nível superior resolvendo os conflitos lógicos e gerando as referências para o nível mais baixo. O controle hierárquico de sistemas híbridos ocasiona queda no desempenho de rastreio das referências quando comparado ao desempenho obtido com o controle não-hierárquico (Slupphaug et al., 1997). Esta condição ocorre porque, na abordagem hierárquica, o comportamento lógico futuro do processo é desconsiderado ou é obtido empiricamente no instante atual. Busca-se atualmente metodologias que, ainda na etapa de modelagem, permitam que o controlador leve em conta simultaneamente as partes contínuas e lógicas futuras da planta no cálculo da seqüência de controle preditivo.

Um esquema não-hierárquico para a modelagem e o controle preditivo de sistemas híbridos foi proposto em (Bemporad e Morari, 1999). Este esquema, denominado MLD (Mixed Logical Dynamical), descreve de forma compacta os processos híbridos sujeitos a regras lógicas e a restrições operacionais cujas dinâmicas são representadas no espaço de estados. Um modelo compacto é obtido transformando-se as proposições lógicas em desigualdades lineares mistas equivalentes, que são incorporadas às exigências operacionais do processo. O esquema MLD permite calcular o valor das variáveis contínuas e inteiras do modelo ao longo do horizonte de previsão considerado. Apesar do ganho de eficiência no modelo de previsão, quando comparado às abordagens hierárquicas, a abordagem MLD demanda maior esforço computacional no que se refere à otimização do critério de custo, a qual envolve variáveis contínuas e inteiras. A estabilidade de um processo MLD em malha fechada pode ser garantida agregando-se uma restrição às exigências operacionais ou acrescentando-se um termo ao critério de desempenho do problema de controle preditivo (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b). Uma vez que o desempenho de rastreio das referências pode se deteriorar e a otimização pode se tornar infactível quando o conjunto de restrições é aumentado (Mayne et al., 2000), outras técnicas tem sido desenvolvidas para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada (Mukai et al., 2002).

O esquema MLD utiliza modelos matemáticos no espaço de estados para representar as

dinâmicas do processo. Contudo, como muitas vezes não é possível incluir todos os comportamentos dinâmicos da planta, ou o projetista descarta fenômenos relevantes, introduz-se erros de modelagem que podem levar o sistema em malha fechada à instabilidade. De acordo com (Silva et al., 2003), o esquema MLD foi desenvolvido para representar sistemas híbridos determinísticos (nesta tese, o termo determinístico é empregado conforme a literatura da área, isto é, referindo-se a sistemas completamente conhecidos). Isto implica que o projeto de um controlador robusto considerando-se incertezas paramétricas politópicas na abordagem MLD pode ser intratável computacionalmente. O controlador para sistemas híbridos MLD com perturbações aditivas nas equações de estado e de saída foi estudado em (Mukai et al., 2002). A metodologia apresentada para o projeto de controle preditivo robusto é dependente da amplitude máxima da perturbação, que normalmente é desconhecida.

Nesta tese propõe-se um novo esquema para a modelagem e o controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos. No esquema proposto, denominado MLDSFO (Misto entre Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais), as dinâmicas do processo são representadas utilizando-se séries de funções ortonormais. Como sugerido na literatura, as proposições envolvendo operadores lógicos e variáveis contínuas são transformadas em desigualdades lineares mistas equivalentes, que constituirão as restrições do problema de controle preditivo, juntamente com as exigências operacionais do processo. Os modelos ortonormais são estimados utilizando-se medições de resposta ao impulso, e podem ser representados no espaço de estados (Oliveira et al., 2000). Estas características reduzem a necessidade de um modelo matemático teórico para representar compactamente as dinâmicas do processo. Uma escolha adequada da base ortonormal permite reduzir a quantidade de coeficientes necessários à modelagem da dinâmica do sistema. Esta redução é interessante por trazer benefícios computacionais para a otimização do critério de desempenho do problema de MPC. Uma vez que as séries ortonormais lidam naturalmente com modelos não-estruturados, não é necessário o conhecimento da ordem e do atraso de transporte do processo. Isto simplifica o problema de estimação paramétrica.

Como sugerido na literatura (Oliveira et al., 2000), as incertezas de um conjunto de medições de resposta ao impulso são mapeadas em conjuntos de pertinência que definem os coeficientes da série ortonormal. Propõem-se condições adicionais sobre esta metodologia para assegurar que o modelo estimado representa todas as dinâmicas do processo, o que é necessário na formulação do problema de controle preditivo robusto. As incertezas da planta são mapeadas unicamente na equação de saída do modelo MLDSFO, reduzindo o espaço de incertezas politópicas quando comparado às abordagens nas quais todas as matrizes da representação de estados são incertas. Esta propriedade reduz o esforço computacional necessário para a otimização do critério de custo do problema de MPC, o que torna o método proposto neste trabalho atrativo ao controle robusto

de sistema híbridos incertos.

Sob determinadas condições, os sistemas híbridos MLDSFO são equivalentes a sistemas afins por partes (Heemels et al., 2001). Esta equivalência será utilizada no desenvolvimento de uma nova estratégia para assegurar a estabilidade robusta do sistema em malha fechada com controle preditivo. A metodologia proposta é baseada em conjuntos terminais, uma das formas menos conservadoras de assegurar o rastreio das referências do sistema em malha fechada (Mayne et al., 2000). Em (Mukai et al., 2002), o projeto do conjunto terminal utiliza a amplitude máxima da perturbação aditiva do modelo MLD, que normalmente é desconhecida. O método proposto neste trabalho utiliza os limites da incerteza estimados a partir de medições de resposta ao impulso.

As principais diferenças entre a metodologia proposta e as ferramentas para a modelagem e o controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos encontradas na literatura são resumidas a seguir.

- i) O modelo MLDSFO pode ser estimado utilizando-se as respostas ao impulso do processo. Os ensaios de resposta ao impulso são implementáveis em aplicações práticas. Esta característica reduz a necessidade de um modelo matemático teórico para descrever o comportamento dinâmico do sistema, como ocorre na abordagem MLD. As técnicas encontradas na literatura para a estimação de sistemas híbridos contemplam apenas os processos ARX (AutoRegressive eXogenous) por partes. Pelo esquema proposto, o modelo é facilmente estimável e pode ser representado no espaço de estados;
- ii) A incerteza da planta é mapeada unicamente na equação de saída do modelo MLDSFO. Desta forma, evita-se incertezas nas matrizes da equação de estados, como nos esquemas encontrados na literatura. Isto implica que, na abordagem proposta, o cálculo de previsões e a otimização do critério de custo do problema de controle preditivo robusto são realizados com menor esforço computacional;
- tradas na literatura assumem que a amplitude da perturbação é conhecida *a priori*, o que muitas vezes não ocorre. A atribuição de limites teóricos para a incerteza da planta pode implicar em deterioração do desempenho de rastreio das referências do sistema em malha fechada com controle preditivo robusto, visto que o conjunto de previsões da saída do processo pode ser sub ou sobrestimado. No método proposto, determina-se o menor espaço das incertezas tal que todos os comportamentos do sistema estejam representados no modelo;

- iv) O controle preditivo robusto de processos híbridos MLDSFO é uma estratégia de realimentação de saída, uma vez que os estados do modelo são calculados e não têm significado físico. Nos esquemas encontrados na literatura, assume-se que todos os estados do modelo podem ser medidos, o que não é factível em algumas aplicações práticas;
- v) A estabilidade do processo híbrido MLDSFO em malha fechada com controle preditivo robusto pode ser assegurada utilizando-se uma restrição de conjunto terminal. A inclusão da restrição de conjunto terminal no problema de controle preditivo não modifica demasiadamente o desempenho de rastreio das referências do sistema. As técnicas de projeto de conjuntos terminais encontradas na literatura contemplam apenas os processos cujos modelos apresentam perturbação aditiva nas equações de estado e de saída. Estas abordagens utilizam a amplitude máxima da perturbação, que muitas vezes é desconhecida. A técnica proposta neste trabalho para o cálculo de conjuntos terminais utiliza os limites estimados da incerteza da planta.

As diferenças mencionadas anteriormente tornam o método proposto atrativo para a modelagem e o controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos.

1.2 Problema Geral de Controle Preditivo

O termo MPC (*Model-based Predictive Control*) designa um conjunto de métodos de controle que utiliza um modelo para prever o comportamento futuro do processo. O projeto de MPC necessita de um modelo capaz de representar o comportamento real do processo de forma satisfatória na faixa de operação de interesse. As formas de modelagem mais comumente encontradas na literatura envolvem a representação do processo por meio de sua resposta ao impulso, resposta ao degrau, função de transferência ou no espaço de estados. A seqüência de controle é obtida pela otimização de um critério de custo que minimiza o erro de rastreio das referências, ao mesmo tempo que penaliza o esforço de controle necessário para atuar no sistema. Da seqüência de controle ótima, apenas o primeiro elemento é efetivamente aplicado ao processo. No instante de amostragem seguinte, o procedimento previsão-otimização é repetido utilizando-se as novas medições disponíveis das variáveis da planta (Camacho e Bordons, 1999). De forma geral, o objetivo do projeto de MPC pode ser escrito como

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J\left[\mathbf{u}(t), \mathbf{y}_{m}(t)\right] = \sum_{k=0}^{T_{u}-1} \|u(t+k) - u_{r}(t+k)\|_{Q_{u}}^{v} + \sum_{k=1}^{T_{y}} \left\|\dot{y}(t+k/t) - y_{r}(t+k)\right\|_{Q_{y}}^{v},$$

onde

 $\mathbf{u}\left(t\right)$ é um vetor que agrega as entradas de controle futuras, soluções da minimização; $\mathbf{y}_{m}\left(t\right)$ é um vetor que agrega as saídas passadas medidas no processo; $u\left(t+k\right)$ é o vetor das entradas de controle k passos a frente do instante atual; $\hat{y}\left(t+k/t\right)$ é o vetor das saídas previstas k passos a frente do instante atual;

 T_u e T_y são os horizontes de controle e de previsão;

 Q_u e Q_y são as ponderações do esforço de controle e do erro de rastreio das referências de saída;

r é um sub índice que denota referência;

v é um índice que define a norma utilizada no critério de custo.

As normas mais comumente utilizadas em controle preditivo são a valor absoluto (v=1), a quadrática (v=2) e a infinita $(v=\infty)$. Do vetor de controle obtido na otimização do critério,

$$\mathbf{u}^{*}\left(t
ight) = \left[egin{array}{c} u^{*}\left(t
ight) \ u^{*}\left(t+1
ight) \ dots \ u^{*}\left(t+T_{u}-1
ight) \end{array}
ight],$$

apenas o primeiro elemento, $u^*\left(t\right)$, é efetivamente aplicado ao sistema. No instante de amostragem seguinte, t+1, nova otimização é realizada utilizando-se a medição de saída disponível, $y_m\left(t+1\right)$.

Dentre as principais vantagens da utilização de algoritmos MPC, pode-se citar seu apelo intuitivo. Os critérios de custo envolvem ponderações do esforço de controle e dos erros de rastreio das referências de saída. O esforço de controle está relacionado à energia necessária para atuar no sistema, enquanto que os erros de rastreio relacionam-se aos objetivos de regulação. Em geral, deseja-se regular as saídas do sistema sem desperdício de energia. Além disso, os algoritmos MPC podem ser utilizados no controle de sistemas de fase mínima, com atraso de transporte ou com restrições sobre os sinais de entrada e de saída.

1.2.1 Restrições

O problema de otimização pode ser restrito devido à existência de regras operacionais que devam ser respeitadas no cálculo da lei de controle. Uma das características dos algoritmos MPC é a possibilidade de inclusão das restrições operacionais do processo. As restrições normalmente envolvem limites de amplitude nas saídas ou limites de amplitude e de taxa de variação nas

entradas de controle, isto é

$$y_{min} \le \hat{y}(t+k/t) \le y_{max}, \quad k = 1, 2, \dots, T_y,$$

 $u_{min} \le u(t+k) \le u_{max}, \quad k = 0, 1, \dots, T_u - 1,$
 $du_{min} \le \Delta u(t+k) \le du_{max}, \quad k = 0, 1, \dots, T_u - 1,$

onde Δ é definido como $\Delta u\left(t\right)=u\left(t\right)-u\left(t-1\right)$. De forma geral, as restrições anteriores podem ser agregadas em

$$M_{u}\mathbf{u}\left(t\right)+M_{y}\mathbf{y}\left(t\right)\leq M,$$

onde M_u , M_y e M são matrizes definidas adequadamente de acordo com as restrições e

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1/t) \\ \hat{y}(t+2/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+T_y/t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T_u-1) \end{bmatrix},$$

são vetores contendo a previsão da saída ao longo do horizonte T_y e o esforço de controle ao longo do horizonte T_u-1 .

Alguns algoritmos preditivos utilizam um modelo linear para representar o processo. Neste caso, a previsão da saída do sistema é uma função afim da entrada de controle futura. Se o critério de custo utiliza a norma quadrátrica (v=2) e restrições operacionais estão presentes, o problema de otimização pode ser escrito de forma compacta como (Camacho e Bordons, 1999)

$$\begin{split} & \min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\mathbf{u}^{T}\left(t\right)Q\mathbf{u}\left(t\right) + b\mathbf{u}\left(t\right) + f, \\ & \text{sujeito a} \quad R\mathbf{u}\left(t\right) \leq c. \end{split}$$

Os primeiros algoritmos de MPC utilizavam como critério de custo a norma quadrática ponderada entre os erros de rastreio das referências de saída e os incrementos no esforço de controle. Os principais algoritmos, brevemente descritos a seguir, diferem basicamente pelo esquema de modelagem utilizado para descrever o processo.

1.2.2 Dynamic Matrix Controller

O DMC – Dynamic Matrix Controller – foi proposto por (Cutler e Ramaker, 1980) e utiliza como modelo a resposta ao degrau do processo truncada em N coeficientes, dada por

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i),$$

onde g_i , $i=1,2,\ldots,N$ são os coeficientes da resposta ao degrau, y(t) é a saída e u(t) é a entrada do sistema. A previsão da saída, calculada utilizando-se o modelo, é dada por

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u (t+k-i) + n (t+k/t),$$

onde $n\left(t+k/t\right)$ é o erro de previsão k passos a frente do instante atual, devido a erros de truncamento do modelo e a perturbações na medição da saída. O erro de previsão é considerado constante ao longo do horizonte futuro, isto é

$$n(t+k/t) = n(t/t) = y_m(t) - y(t/t-1), k = 1, 2, ..., T_v$$

sendo $y_m(t)$ o valor medido da saída e y(t/t-1) o valor da saída calculado utilizando-se o modelo. Assim, a equação de previsão pode ser reescrita como

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u (t+k-i) + y_m (t) - y (t/t-1) =
= \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u (t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{N} g_i \Delta u (t+k-i) + y_m (t) - \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u (t-i).$$

Note que a previsão da saída do processo k passos a frente pode ser dividida em duas parcelas: uma devida unicamente a termos anteriores ao instante atual e outra devida a termos futuros. Assim,

$$\hat{y}(t+k/t) = f(t+k) + \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i),$$

onde $f\left(t+k\right)$ é a resposta livre do sistema, ou seja, a parcela da previsão que não depende do vetor futuro de controle, dada por

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i).$$

O vetor de previsões pode ser agregado em

$$\mathbf{y}\left(t\right) = G\Delta\mathbf{u}\left(t\right) + \mathbf{f}\left(t\right),$$

com

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1/t) \\ \hat{y}(t+2/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+T_y/t) \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+T_u-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ \vdots \\ f(t+T_y) \end{bmatrix},$$

sendo T_y e T_u os horizontes de previsão e de controle, respectivamente, e $G_{T_y \times T_u}$ a matriz dinâmica do sistema.

O critério de desempenho utilizado no DMC é dado por

$$J = \sum_{k=1}^{T_y} \left[\mathring{y} (t + k/t) - y_r (t+k) \right]^2 + \sum_{k=0}^{T_u - 1} \lambda \left[\Delta u (t+k) \right]^2,$$

onde λ é uma ponderação sobre o incremento da entrada de controle e o sub índice r denota referência. Se não houver restrições no problema de otimização, a solução analítica será

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \left(G^{T}G + \lambda I\right)^{-1} G^{T} \left[\mathbf{y}_{r}(t) - \mathbf{f}(t)\right],$$

onde I é a matriz identidade de ordem T_u e

$$\mathbf{y}_{r}\left(t
ight) = \left[egin{array}{c} y_{r}\left(t+1
ight) \ y_{r}\left(t+2
ight) \ dots \ y_{r}\left(t+T_{y}
ight) \end{array}
ight],$$

é o vetor de referências futuras. Quando há restrições, o problema deve ser resolvido utilizandose algoritmos de otimização numérica. O DMC pode ser facilmente estendido para o caso multivariável e para o tratamento de perturbações mensuráveis.

1.2.3 Model Algorithmic Controller

O MAC – *Model Algorithmic Controller* – foi proposto por (Richalet et al., 1978) e utiliza a resposta ao impulso truncada do sistema, sendo esta sua principal diferença com relação ao DMC. O modelo do processo é dado por

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i u(t-i),$$

onde h_i , $i=1,2,\ldots,N$ são os coeficientes da resposta ao impulso truncada da planta. O MAC é atrativo porque a identificação do modelo é uma tarefa relativamente simples. Este algoritmo é também conhecido como MPHC (Model Predictive Heuristic Controller) e deu origem ao software IDCOM (Identification Command).

1.2.4 Generalized Predictive Controller

O GPC – Generalized Predictive Controller – foi proposto por (Clarke et al., 1987a; Clarke et al., 1987b). Neste algoritmo, o processo é representado por um modelo CARIMA (Controlled

AutoRegressive Integrated Moving Average), dado por

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-d}u(t-1) + C(q^{-1})\frac{e(t)}{1-q^{-1}},$$

onde

 q^{-1} é o operador atraso;

A, B e C são polinômios em q^{-1} ;

d é o atraso de transporte do processo;

e(t) é um ruído branco.

As raízes dos polinômios $A\left(q^{-1}\right)$ e $B\left(q^{-1}\right)$ são os pólos e os zeros da função de transferência discreta do processo, respectivamente. O polinômio $C\left(q^{-1}\right)$ é utilizado para modelar as perturbações da planta. O critério de custo do GPC é dado por

$$J = \sum_{k=T_{vi}}^{T_{yf}} \varphi\left(k\right) \left[\mathring{y}\left(t+k/t\right) - y_r\left(t+k\right) \right]^2 + \sum_{k=0}^{T_u-1} \lambda\left(k\right) \left[\Delta u\left(t+k\right) \right]^2,$$

onde

 T_{ui} e T_{uf} são os horizontes inicial e final de previsão da saída;

 $arphi\left(k
ight)$ e $\lambda\left(k
ight)$ são seqüências de ponderações sobre os erros de rastreio das referências de saída e sobre os incrementos na entrada de controle.

A previsão da saída é calculada recursivamente resolvendo-se uma equação do tipo Diofantina. O GPC pode ser utilizado no controle preditivo de processos instáveis. O DMC e o MAC, que utilizam respectivamente modelos truncados de resposta ao degrau e de resposta ao impulso, supõem que o sistema em malha aberta é estável.

1.2.5 Controle Preditivo Baseado em Representação no Espaço de Estados

Outra forma de modelagem comumente encontrada na literatura de MPC representa a dinâmica do processo no espaço de estados (Morari e Lee, 1999). Quando o sistema é descrito pelo modelo linear, discreto e invariante no tempo

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),$$
 (1.1)

a seqüência ótima de controle é determinada resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J\left[\mathbf{u}(t), x_m(t)\right] = \sum_{k=0}^{T_u - 1} \|u(t+k) - u_r(t+k)\|_{Q_u}^v + \left[\sum_{k=1}^{T_x - 1} \left\|\hat{x}(t+k/t) - x_r(t+k)\right\|_{Q_x}^v + \left\|\hat{x}(t+T_x/t) - x_r(t+T_x)\right\|_{Q_t}^v, \quad (1.2)$$

onde

 T_u e T_x são os horizontes de controle e de previsão do estado;

r é um sub índice que denota referência;

 $\stackrel{\wedge}{x}(t+k/t)$ é a previsão dos estados do processo k passos a frente do instante atual;

 $x_{m}\left(t
ight)$ é o vetor de estados medidos no instante atual;

v é um índice que simboliza a norma utilizada no critério de desempenho;

 Q_u , Q_x e Q_t são as ponderações do esforço de controle, do erro de rastreio das referências de estado e dos estados terminais do processo.

Restrições podem ser impostas ao problema de otimização (1.2). As exigências operacionais do processo normalmente envolvem limites sobre a amplitude e a taxa de variação dos estados e das entradas ao longo dos seus respectivos horizontes, isto é,

$$x_{\min} \le \hat{x} (t + k/t) \le x_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, T_x,$$

$$dx_{\min} \le \Delta \hat{x} (t + k/t) \le dx_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, T_x,$$

$$u_{\min} \le u (t + k) \le u_{\max}, \quad k = 0, 1, \dots, T_u - 1,$$

$$du_{\min} \le \Delta u (t + k) \le du_{\max}, \quad k = 0, 1, \dots, T_u - 1,$$
(1.3)

sendo $\Delta=1-q^{-1}$. As restrições em (1.3) podem ser agregadas na forma compacta (Camacho e Bordons, 1999)

$$M_x \mathbf{x}(t) + M_u \mathbf{u}(t) \le M, \tag{1.4}$$

onde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1/t) \\ \hat{x}(t+2/t) \\ \vdots \\ \hat{x}(t+T_x/t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T_u-1) \end{bmatrix},$$

e M_x , M_u e M são matrizes definidas adequadamente.

O conjunto de soluções factíveis da metodologia MPC (1.1), (1.2), (1.4) cresce ao se relaxar restrições ou aumentando-se os horizontes de controle e de previsão. No primeiro caso, um

termo de ponderação é acrescentado ao critério de desempenho para penalizar a violação de restrições pouco severas. Porém, nem toda restrição pode ser violada, como por exemplo as que envolvam saturação de atuadores.

Quando os horizontes são infinitos e não existem restrições, a solução do problema de MPC (1.1), (1.2) é uma lei de controle por realimentação de estados dada por

$$u\left(t\right) =Kx\left(t\right) ,$$

onde

$$K = -(Q_u + b^T P b)^{-1} b^T P A,$$

$$P = (A + bK)^T P (A + bK) + K^T Q_u K + Q_x,$$

é a mesma solução do problema LQR (*Linear Quadratic Regulator*) (Bemporad, Morari, Dua e Pistikopoulos, 2002). Quando os horizontes de tempo são infinitos, existem infinitas restrições no problema de controle. Neste caso, o problema de otimização não poderá ser resolvido por algoritmos numéricos em tempo finito. Além disso, aproximar um horizonte infinito por um horizonte elevado não é geralmente uma boa alternativa, pois a complexidade do problema é proporcional aos horizontes utilizados. Aumentá-los pode reduzir a aplicação do controlador apenas a processos que tenham dinâmica lenta ou cujos modelos tenham ordens relativamente baixas, que permitam que otimizações numéricas sejam realizadas durante o intervalo entre duas amostragens consecutivas.

Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

A grande maioria das aplicações práticas envolve restrições operacionais (Mayne et al., 2000). A consideração de restrições, aliada à necessidade de se limitar o porte do problema de otimização, torna difícil assegurar que o sistema em malha fechada com controle preditivo seja estável. A estabilidade é, em geral, uma função dos parâmetros do controlador: dos horizontes T_u e T_x , e das ponderações Q_u , Q_x e Q_t (Bemporad, Morari, Dua e Pistikopoulos, 2002). Em aplicações práticas, seleciona-se os horizontes T_u e T_x , impõe-se condições sobre a ponderação Q_t para assegurar a estabilidade, e utiliza-se as ponderações Q_u e Q_x ($Q_u > 0$ e $Q_x \ge 0$) como parâmetros para modificar o desempenho do sistema em malha fechada.

No caso de um processo linear, discreto, restrito e representado no espaço de estados, o método de Lyapunov é normalmente utilizado para analisar a estabilidade do sistema em malha fechada (Mayne et al., 2000). Este é, certamente, um dos motivos para se utilizar a representação em espaço de estado em controle preditivo. A garantia de estabilidade é demonstrada empregando-se o critério de custo como uma função de Lyapunov (Keerthi e Gilbert, 1988). Se

o critério for decrescente para uma escolha adequada da ponderação de estado terminal Q_t , o problema (1.1, 1.2, 1.4) implicará em

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_r(t),$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_r(t).$$

Em (Mayne et al., 2000), citam-se outras alternativas para assegurar que o sistema em malha fechada com MPC seja estável. Diferentemente do custo de estado terminal, acrescentado ao critério de desempenho, restrições podem ser agregadas às exigências operacionais do processo para que o sistema em malha fechada com controle preditivo rastreie suas referências. A prova das condições de estabilidade também envolve o uso do critério de desempenho como uma função de Lyapunov. Uma restrição de contração, por exemplo, pode ser acrescentada ao problema de MPC para forçar o decrescimento do índice de desempenho à medida que o tempo cresce. A contração do critério de custo implica em estabilidade porque os vetores de estados e de entradas são forçados a se aproximarem progressivamente dos seus valores de referência a cada novo instante de amostragem.

Uma restrição de estado terminal também pode ser agregada às exigências operacionais do processo para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada (Mayne et al., 2000). Esta restrição força a previsão do estado a rastrear a sua referência ao final do horizonte T_x . Por ser uma igualdade, a restrição de estado terminal é severa para os algoritmos numéricos e pode tornar o problema de otimização infactível. A menos que o horizonte de previsão seja relativamente elevado, pode não existir uma seqüência de controle que leve o sistema de uma condição inicial qualquer até o seu valor de referência ao final do horizonte especificado. Horizontes longos, por outro lado, aumentam o esforço computacional *on-line* exigido pela resolução do problema de otimização. Sendo assim, a estabilidade estará assegurada apenas quando o problema de otimização for factível. Por outro lado, se o custo de estado terminal, ou as restrições de estado terminal ou de contração não estiverem presentes no problema, a factibilidade do problema de otimização poderá não implicar na estabilidade do sistema em malha fechada.

Pode-se também utilizar uma restrição de conjunto terminal para impor que a previsão do estado pertença a um conjunto pré-especificado ao final do respectivo horizonte. A estabilidade é assegurada assumindo-se que, no interior do conjunto terminal, existe um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema nas referências desejadas. A restrição de conjunto terminal é menos severa do que a de estado terminal. O conjunto terminal pode ser implementado por meio do conjunto máximo de saídas admissíveis (MOAS – *Maximal Output Admissible Set*), isto é, o conjunto de todas as condições iniciais cuja resposta autônoma converge para a origem sem violar as restrições (Gilbert e Tan, 1991). O ganho de realimentação de estados que estabiliza o

sistema no interior do conjunto terminal pode ser obtido resolvendo-se o problema LQR irrestrito. Este ganho é utilizado apenas para a demonstração da estabilidade.

Robustez do Sistema em Malha Fechada

A robustez de um sistema diz respeito à manutenção do seu desempenho e da sua estabilidade em malha fechada frente a variações na planta devido a incertezas próprias do sistema ou devido à utilização de modelos simplificados (Morari e Lee, 1999). Um modelo com coeficientes incertos implica que a seqüência de previsões do comportamento futuro do processo também é incerta. Em geral, assume-se que o intervalo em que os parâmetros incertos do modelo estão contidos é conhecido. Neste caso, a forma mais comumente utilizada para assegurar o desempenho robusto é determinar a seqüência de controle minimizando-se o critério de custo para o pior caso de rastreio das referências no espaço das incertezas. Esta metodologia foi proposta em (Campo e Morari, 1987) e resulta em um problema de otimização do tipo *min-max*.

Quando o problema de otimização é restrito, torna-se necessário assegurar que a manutenção das propriedades de estabilidade e desempenho não acarretem a violação das exigências operacionais do processo. Um controlador preditivo que satisfaz as restrições do problema de otimização mesmo para o pior caso de rastreio das referências é robusto com relação ao desempenho e com respeito às exigências operacionais do sistema. O problema da robustez do processo em malha fechada com MPC é tratado em vários trabalhos disponíveis na literatura.

Em (Kothare et al., 1996) apresenta-se uma metodologia de projeto de MPC robusto para duas representações do processo no espaço de estados. Na primeira, o sistema é descrito por

$$\begin{split} x\left(t+1\right) &= A\left(t\right)x\left(t\right) + b\left(t\right)u\left(t\right), \\ y\left(t\right) &= c^{T}x\left(t\right), \\ \left[\begin{array}{cc} A\left(t\right) & b\left(t\right) \end{array}\right] &\in \mho. \end{split}$$

A incerteza estrutural presente neste modelo é do tipo politópica. O espaço das incertezas é definido como

$$\mho = Co\left\{ \left[\begin{array}{cc} A_1 & b_1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} A_2 & b_2 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} A_L & b_L \end{array} \right] \right\}$$

onde Co denota "casca convexa" (convex hull). As matrizes incertas A(t) e b(t) são combinações convexas dos vértices do espaço das incertezas, isto é

$$\left[\begin{array}{cc} A\left(t\right) & b\left(t\right) \end{array}\right] = \sum_{i=1}^{L} \lambda_{i} \left[\begin{array}{cc} A_{i} & b_{i} \end{array}\right],$$

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \ge 0, \ i = 1, 2, \dots, L.$$

A segunda representação assume que a incerteza é aditiva na equação de estados, ou seja,

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t) + b_p p(t),$$

$$y(t) = c^T x(t).$$

Um ganho robusto de realimentação de estados é projetado para cada modelo descrito anteriormente. Utilizam-se o horizonte de previsão infinito e o critério de custo baseado na norma quadrática (v=2) envolvendo estados e esforço de controle. O ganho robusto de realimentação de estados de cada modelo é determinado resolvendo-se uma desigualdade matricial linear (LMI - Linear Matrix Inequality). A LMI é obtida impondo-se que o critério de desempenho deve ser decrescente para o pior caso de rastreio das referências em todo o espaço das incertezas. As restrições nos vetores de estados e de entradas são incorporadas ao projeto na forma de LMIs.

Em (Cuzzola et al., 2001), ao invés de apenas uma, várias LMIs são utilizadas. Cada vértice do politopo que define o espaço das incertezas agrega uma desigualdade ao projeto do ganho robusto de realimentação de estados. Este trabalho mostra que o projeto com várias LMIs é menos conservador, isto é, um projeto estável pode ser realizado para uma classe maior de sistemas se comparado ao proposto em (Kothare et al., 1996). No entanto, além de assumirem informação completa sobre o estado, as metodologias mencionadas anteriormente utilizam um horizonte de previsão infinito. Na prática, utilizando-se ponderações fixas no critério de custo, o horizonte de previsão infinito privilegia a economia de energia em detrimento do desempenho de rastreio das referências.

A incerteza do processo pode também ser tratada identificando-se *on-line* os parâmetros do modelo e implementando-se o algoritmo MPC com características adaptativas. Os parâmetros desconhecidos ou variantes no tempo são estimados, a cada novo instante de amostragem, para utilização no modelo que prevê o comportamento futuro do processo. Os algoritmos adaptativos estão baseados no Princípio da Equivalência Certa (*Certainty Equivalence Principle*) (Aström e Wittenmark, 1989). Uma revisão dos principais aspectos de Controle Adaptativo pode ser encontrada em (Dumont e Huzmezan, 2002).

Solução Explícita do Controlador Preditivo

Conforme discutido, os algoritmos de controle preditivo são baseados na estratégia de horizonte deslizante: o comportamento futuro dos estados e/ou das saídas do processo é calculado utilizando-se o modelo disponível; um critério de desempenho é otimizado e, da seqüência de controle obtida, apenas o primeiro elemento é aplicado ao sistema; no instante de amostragem seguinte, novo problema de otimização é resolvido utilizando-se as medições disponíveis. Em

função da quantidade de restrições do problema, da ordem do modelo e dos horizontes de controle e de previsão utilizados, a otimização do critério de desempenho pode envolver um esforço computacional elevado.

Em (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b; Bemporad, Borrelli e Morari, 2002; Bemporad, Morari, Dua e Pistikopoulos, 2002) propõe-se um algoritmo para determinar analiticamente (isto é, explicitar) a solução do problema de MPC. Assume-se que o sistema é descrito por um modelo linear, discreto, invariante no tempo e representado no espaço de estados. Supõese que existem restrições na amplitude e na taxa de variação das entradas, dos estados e das saídas. O critério de desempenho é baseado na norma quadrática ponderada dos estados e das entradas. Ao critério é adicionado um custo de estado terminal para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada. O problema de otimização resultante é um programa quadrático (QP - Quadratic Program) restrito na forma

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \frac{1}{2} \mathbf{u}^{T}(t) S_{1} \mathbf{u}(t) + x_{m}^{T}(t) S_{2} \mathbf{u}(t),$$
sujeito a $S_{3} \mathbf{u}(t) \leq S_{4} + S_{5} x_{m}(t),$

onde $x_m(t)$ é o vetor de estados medidos no instante atual, $\mathbf{u}(t)$ é um vetor que agrega os vetores de entradas de controle ao longo do horizonte T_u-1 e as matrizes S_i , $i=1,2,\ldots,5$ são determinadas pelo modelo no espaço de estados, pelas ponderações e pelos horizontes utilizados no critério de desempenho.

Uma transformação de variáveis permite reescrever o problema quadrático isolando-se o vetor de estados medido no instante atual no lado direito da desigualdade referente às restrições. Tratando-se o vetor de estados como um vetor de parâmetros (e não como medidas), é possível utilizar Programação Quadrática Multiparamétrica (mpQP - multi-parametric Quadratic Programming) para resolver o problema de otimização resultante. A solução do problema multiparamétrico é uma lei de controle do tipo

$$u(t) = F^{i}x_{m}(t) + g^{i}$$
 se $D^{i}x_{m}(t) \leq D_{0}^{i}, i = 1, 2, \dots, s,$

ou seja, um conjunto de ganhos de realimentação de estados afins por partes definidos de acordo com a região ocupada pela medição $x_m(t)$ no instante atual. As matrizes D^i e D^i_0 , $i=1,2,\ldots,s$ definem as partições do espaço de estados factíveis e consequentemente os ganhos F^i e g^i ativos no instante atual, t. Uma vez resolvido o problema de otimização mpQP, torna-se desnecessário resolver um QP a cada novo instante de tempo como exigido pela estratégia de horizonte deslizante. No entanto, o cálculo da entrada de controle no instante atual necessita de informação completa de estado, o que nem sempre é possível.

Em (Bemporad, Borrelli e Morari, 2001) apresenta-se uma metodologia para a determinação da solução analítica do controlador preditivo robusto para sistemas representados no espaço de

estados com perturbação aditiva nas equações de estado e de saída do modelo. O critério de desempenho é baseado na norma infinita ponderada dos estados e das entradas. Um custo de estado terminal é adicionado ao critério para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada. Um problema de otimização do tipo *min-max* é resolvido utilizando-se programação multiparamétrica. A lei de controle por realimentação de estados resultante, definida em regiões poliedrais, também necessita de informação completa de estado para ser implementada.

1.3 Controle Preditivo de Sistemas Híbridos

1.3.1 Sistemas Híbridos

O controle preditivo faz parte das metodologias baseadas em modelos. Os modelos são normalmente derivados da aplicação de leis físicas à descrição do processo. A maioria das técnicas atualmente encontradas na literatura assume que o sistema é descrito por equações diferenciais ou à diferenças, com variáveis contínuas. No entanto, uma parte dos sistemas reais de interesse inclui em sua descrição heurísticas, operações de intertravamento ou regras lógicas do tipo SE/ENTÃO/SENÃO. Estas regras são definidas em espaços finitos como {SIM,NÃO}, {VERDADEIRO,FALSO} ou {LIGADO,DESLIGADO}.

Os sistemas cujas ações de controle, especificações e exigências operacionais podem ser contínuas ou discretas são denominados híbridos (Labinaz et al., 1997). As dinâmicas do processo podem ser contínuas ou discretas, lineares ou não-lineares, determinísticas ou incertas. A lógica é utilizada para descrever o intertravamento da planta, como a ativação ou desativação de dinâmicas de acordo com a verificação de determinadas condições. O controle de sistemas híbridos pode ser definido como: estabilizar o sistema nas referências desejadas, respeitando as exigências operacionais e as especificações lógicas. O projeto de controle preditivo para sistemas híbridos segue duas linhas distintas. De acordo com a metodologia empregada na modelagem do processo, o projeto pode apresentar estrutura hierárquica ou não-hierárquica.

1.3.2 Controle Preditivo de Sistemas Híbridos - Estruturas Hierárquicas

Alguns esquemas de modelagem para sistemas híbridos consideram a planta totalmente contínua e desenvolvem um esquema supervisório para tratar a lógica presente na descrição do processo (Labinaz et al., 1997). Estes esquemas apresentam estrutura do tipo hierárquica. O projeto de controle para sistemas com modelo hierárquico também apresenta divisão estrutural. No nível mais baixo encontram-se os controladores contínuos que realizam a regulação das referências

para a planta. No nível mais elevado, consideram-se as restrições lógicas e determinam-se as referências para o nível mais baixo por meio de esquemas supervisórios. Diversas metodologias hierárquicas para a modelagem e o controle de sistemas híbridos podem ser encontradas na literatura.

A metodologia proposta em (Lennartson et al., 1994) permite considerar entradas de controle contínuas e discretas. Esta consideração permite modelar uma grande quantidade de processos híbridos, mas aumenta a dificuldade do projeto de controladores contínuos que assegurem a estabilidade do processo. A complexidade do projeto cresce exponencialmente com a quantidade de operadores lógicos utilizados na modelagem do processo híbrido. Estes operadores determinam a quantidade de chaveamentos possíveis entre os controladores contínuos.

Em (Branicky et al., 1998) e (Lygeros et al., 1999) o projeto de controle hierárquico é definido como um processo de otimização em duas etapas. Na primeira, as decisões lógicas são tomadas para garantir os requisitos de segurança. Na segunda, o projeto de controle contínuo é realizado tendo-se em vista os requisitos de eficiência no rastreio das referências.

Em (Slupphaug et al., 1997) o efeito da separação entre o projeto dos controladores contínuos e o funcionamento do esquema supervisório é discutido. Mostra-se, por meio de exemplos, que um controlador híbrido hierárquico pode deteriorar o desempenho do sistema em malha fechada quando comparado ao desempenho obtido com o controlador não-hierárquico. Melhores resultados são obtidos quando o projeto do controlador leva em conta as relações lógicas presentes no sistema. Por este motivo, tem crescido o interesse por metodologias que, ainda na etapa de modelagem, forneçam ao esquema de controle preditivo uma forma de considerar simultaneamente os comportamentos contínuos e as descrições lógicas do processo.

1.3.3 Controle Preditivo de Sistemas Híbridos - Estruturas Não-Hierárquicas

Esquemas de modelagem que integram sem divisão estrutural as representações dinâmicas e os requisitos lógicos do sistema híbrido são ditos não-hierárquicos. O projeto de controle preditivo não-hierárquico calcula a seqüência de entrada considerando simultaneamente os comportamentos lógicos e contínuos da planta (Lennartson et al., 1994). Neste sentido, um esquema denominado MLD (*Mixed Logical Dynamical*) é proposto em (Bemporad e Morari, 1999). O esquema MLD assume que as dinâmicas do processo são lineares, discretas no tempo e representadas no espaço de estados.

Regras lógicas são definidas utilizando-se os conectivos booleanos E, OU, NÃO, IMPLICA, SE E SOMENTE SE e OU EXCLUSIVO. Estes conectivos permitem descrever o intertravamento

da planta, como por exemplo a ativação ou a desativação de alguma dinâmica de acordo com a satisfação de regras heurísticas. Os literais booleanos podem assumir valor FALSO ou VER-DADEIRO, e são associados a variáveis binárias que assumem valor no espaço discreto finito $\{0,1\}$. As proposições envolvendo operadores lógicos são transformadas em desigualdades lineares equivalentes (Cavalier et al., 1990; Williams e Brailsford, 1997; Tyler e Morari, 1999). Estas desigualdades envolvem variáveis inteiras e contínuas, e podem ser agregadas às exigências operacionais do processo para formar o conjunto de restrições do problema de controle preditivo. A satisfação das restrições implica na verificação das exigências operacionais e dos fatos lógicos do sistema ao longo do horizonte de tempo considerado.

O modelo MLD (Bemporad e Morari, 1999) é dado por

$$x(t+1) = A(t) x(t) + B_1(t) u(t) + B_2(t) \delta(t) + B_3(t) z(t),$$

$$y(t) = C(t) x(t) + D_1(t) u(t) + D_2(t) \delta(t) + D_3(t) z(t),$$

$$E_2(t) \delta(t) + E_3(t) z(t) \le E_1(t) u(t) + E_4(t) x(t) + E_5(t),$$

onde

- x(t) é o vetor de estados;
- u(t) é o vetor de entradas;
- $\delta(t)$ é o vetor de variáveis binárias;
- z(t) é o vetor de variáveis auxiliares;
- y(t) é o vetor de saídas.

As matrizes A(t), $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, C(t), $D_1(t)$, $D_2(t)$, $D_3(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$, $E_4(t)$ e $E_5(t)$ são definidas de acordo com as equações dinâmicas, as exigências operacionais e as proposições lógicas que descrevem o processo híbrido. O vetor de variáveis auxiliares é utilizado na modelagem de fatos mistos envolvendo lógica e dinâmica.

O problema de controle preditivo baseado no modelo MLD é do tipo MIPC (*Mixed Integer Predictive Control*). O critério de desempenho do problema MIPC é baseado na soma das normas quadráticas ponderadas dos erros de rastreio das referências de estado, de saída, do esforço de controle, das variáveis binárias e das variáveis auxiliares, isto é

$$J\left[\mathbf{u}\left(t\right), x_{m}\left(t\right)\right] = \sum_{k=0}^{T_{y}-1} \left\{ \left\|u\left(t+k\right) - u_{r}\right\|_{Q_{u}}^{2} + \left\|\delta\left(t+k/t\right) - \delta_{r}\right\|_{Q_{\delta}}^{2} + + \left\|z\left(t+k/t\right) - z_{r}\right\|_{Q_{z}}^{2} + \left\|x\left(t+k/t\right) - x_{r}\right\|_{Q_{x}}^{2} + \left\|y\left(t+k/t\right) - y_{r}\right\|_{Q_{y}}^{2} \right\}.$$

$$(1.5)$$

As ponderações dos erros de rastreio das variáveis binárias (Q_{δ}) e das variáveis auxiliares (Q_z) permitem considerar os chaveamentos que ocorrem ao longo da evolução futura do processo híbrido na minimização do critério de custo. Uma restrição de estado terminal pode ser agregada

à otimização do critério de custo (1.5) para assegurar a estabilidade do sistema MLD em malha fechada. O problema de otimização resultante é do tipo MIQP (*Mixed Integer Quadratic Programming*), para o qual já existem técnicas eficientes de solução (Fletcher e Leyffer, 1995).

O esquema MLD é capaz de modelar uma grande quantidade de sistemas híbridos (Bemporad e Morari, 1999). Em (Heemels et al., 2001) demonstra-se que se as trajetórias no espaço de estados, as variáveis binárias e as variáveis auxiliares são unicamente determinadas pelo vetor de estados e pela entrada de controle no instante atual, os esquemas MLD (*Mixed Logical Dynamical*), LC (*Linear Complementary*), ELC (*Extended Linear Complementary*), PWA (*PieceWise Affine*) e MMPS (*Max-Min-Plus-Scaling*) são equivalentes. Neste caso, um sistema híbrido modelado segundo qualquer um destes esquemas pode ser descrito em qualquer um dos outros formatos (Bemporad, 2002). Além disso, essa equivalência implica que as ferramentas e propriedades existentes, teóricas ou práticas, são comuns às classes de sistemas híbridos mencionadas (Bemporad e Morari, 2001; Bemporad, Heemels e de Schutter, 2002).

Apesar da sua abrangência, o esquema MLD apresenta algumas limitações. O controle preditivo baseado neste modelo assume a informação completa de estado, o que nem sempre é possível em aplicações práticas. Não encontrou-se na literatura o projeto de observadores de estados para sistemas MLD. Além disso, o esquema MLD é aplicável a processos híbridos cujas equações dinâmicas são representadas no espaço de estados. Muitas vezes não é possível representar o sistema segundo este formato ou outros esquemas são mais adequados para a estimação paramétrica do modelo do processo. Por fim, o esquema MLD foi desenvolvido para a modelagem e o controle preditivo de sistemas híbridos determinísticos (Silva et al., 2003). Incertezas paramétricas politópicas podem inviabilizar a aplicação do controlador preditivo robusto em tempo real, uma vez que os problemas de otimização resultantes podem ser intratáveis computacionalmente.

Desta forma, torna-se relevante o desenvolvimento de um esquema não-hierárquico para a modelagem e o controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos que: utilize apenas a informação da saída do sistema, sempre disponível; permita que os modelos dinâmicos não sejam representados apenas no espaço de estados e que estes sejam facilmente estimáveis; considere incertezas paramétricas da planta de forma simples e tratável computacionalmente.

1.3.4 Estabilidade do Sistema Híbrido em Malha Fechada

O esquema MLD descreve de forma compacta processos híbridos cujos estados, entradas e saídas assumem valores contínuos e/ou inteiros. A convergência das variáveis inteiras presentes no modelo MLD é equivalente à existência de um tempo finito a partir do qual estas componentes atingem seus valores de referência (Passino et al., 1994). Assumindo-se que as componentes

inteiras convergem, as propriedades locais de estabilidade podem ser verificadas apenas para a parte contínua da planta. No caso geral, para assegurar a estabilidade do esquema MLD em malha fechada com controle preditivo, pode-se agregar ao problema de otimização MIPC uma restrição de estado terminal, dada por $x\left(t+T_y/t\right)=x_r\left(t+T_y\right)$. Uma vez escolhido o estado $x_r\left(t+T_y\right)$, os valores de referência das saídas, das entradas, das variáveis binárias e das variáveis auxiliares devem ser unicamente determinados. Se esta condição é verificada, diz-se que o sistema é bem posto.

A estabilidade do esquema MLD em malha fachada com MIPC é analisada tomando-se o critério de desempenho (1.5) como uma função de Lyapunov (Keerthi e Gilbert, 1988). Se o problema de otimização for factível, a restrição de estado terminal estiver presente e $Q_u>0$, $Q_x>0$, $Q_\delta\geq0$, $Q_z\geq0$, então o sistema será estável em malha fechada e

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_r,$$

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_r,$$

$$\lim_{t \to \infty} \|\delta(t) - \delta_r\|_{Q_{\delta}}^2 = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \|z(t) - z_r\|_{Q_z}^2 = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - y_r\|_{Q_y}^2 = 0.$$

Se a restrição de estado terminal não estiver presente, a factibilidade do problema de otimização não implicará na estabilidade em malha fechada. Além de onerosa para os algoritmos de otimização numérica, a restrição de estado terminal pode tornar o problema de otimização infactível. A menos que o horizonte de previsão seja suficientemente longo, pode não existir uma seqüência de controle que leve o estado do sistema de uma condição inicial qualquer até o seu valor de referência ao final do horizonte T_y . No entanto, o esforço computacional necessário para a resolução *on-line* do problema MIPC aumenta exponencialmente com o horizonte de previsão. Estas características podem inviabilizar a aplicação do controlador em tempo real.

1.3.5 Robustez do Sistema Híbrido em Malha Fechada

A robustez de um sistema híbrido em malha fechada com MIPC diz respeito à manutenção das características de estabilidade e desempenho em relação às incertezas da planta. As abordagens encontradas na literatura utilizam a equivalência entre sistemas MLD e PWA para assegurar a estabilidade robusta do processo híbrido controlado.

Em (Mukai et al., 2002) analisa-se sistemas PWA com perturbação aditiva limitada em norma na equação de estados. Para cada modelo dinâmico da descrição do processo híbrido, um conjunto invariante positivamente restrito (constrained positively invariant set) é calculado. Os

conjuntos invariantes são aqueles nos quais a trajetória autônoma do sistema está confinada no próprio conjunto, é estável e não viola as restrições. O conjunto invariante do processo híbrido PWA, utilizado como restrição de conjunto terminal no problema de MPC para assegurar a estabilidade, é a intersecção dos conjuntos invariantes determinados para cada modelo dinâmico.

Agregar uma restrição de conjunto terminal ao problema de MPC é uma forma adequada de assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada (Mayne et al., 2000). A restrição de conjunto terminal é menos severa para os algoritmos numéricos do que a restrição de estado terminal. Além disso, esta restrição não modifica demasiadamente o desempenho de rastreio de referências, como no caso onde existe um custo de estado terminal. Uma deficiência da metodologia proposta em (Mukai et al., 2002) é a necessidade de se definir *a priori* um ganho de realimentação de estados para calcular o conjunto invariante de cada dinâmica. Uma escolha inadequada deste ganho pode tornar o conjunto terminal muito pequeno, acarretando problemas de factibilidade. Outra limitação desta metodologia é a necessidade de se conhecer antecipadamente a amplitude máxima da perturbação aditiva nas equações de estados do modelo. A amplitude da perturbação é normalmente desconhecida em aplicações práticas.

Em (Ferrari-Trecate et al., 2001) projeta-se um conjunto de ganhos que assegura a estabilidade robusta de um sistema PWA com perturbação aditiva nas equações de estados. Os ganhos são projetados exigindo-se que o critério de desempenho seja decrescente, com taxa de decrescimento definida utilizando-se um ganho dissipativo. A condição de decrescimento do critério é equivalente a um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs - *Linear Matrix Inequalities*). Cada dinâmica do sistema PWA acrescenta ao problema um conjunto de desigualdades. Se todas as LMIs têm solução, o conjunto de ganhos pode ser determinado. Outros projetos semelhantes podem ser encontrados na literatura (Johansson e Rantzer, 1998; Feng, 2002).

Em (Feng, 2002), considera-se sistemas PWA com incerteza politópica na representação de estados. Neste trabalho, o projeto dos ganhos de realimentação de estados conduz a um conjunto de LMIs cuja dimensão é proporcional à quantidade de partições do sistema PWA e ao número de vértices utilizados para descrever as matrizes incertas do modelo. Para a existência dos ganhos de realimentação de estados que assegurem a estabilidade, um conjunto possivelmente muito grande de desigualdades deverá ter solução.

A abordagem por LMIs assume horizontes de controle e de previsão infinitos para tornar possível a determinação explícita dos ganhos de realimentação de estados. Na prática, considerando-se ganhos fixos, horizontes infinitos estão associados à deterioração do desempenho de rastreio das referências do sistema em malha fechada. Desta forma, torna-se relevante desenvolver metodologias de projeto de controle preditivo robusto que: assegurem a estabilidade para horizontes finitos; permitam considerar a incerteza paramétrica nas dinâmicas do processo; não sejam

computacionalmente onerosas; sejam flexíveis em relação ao desempenho do sistema em malha fechada.

1.3.6 Solução Explícita do Controlador Preditivo Híbrido

Dentre os avanços mais recentes em termos de controle preditivo de sistemas MLD encontra-se a metodologia para a determinação da solução explícita do problema MIPC. Em (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b), o critério de desempenho do problema MIPC é baseado na norma infinita ponderada dos erros de rastreio das referências de entrada, de estado, de saída, das variáveis binárias e das variáveis auxiliares. Os problemas de otimização resultantes são do tipo MILP (*Mixed Integer Linear Programming*), tais como

$$\min_{\Psi} \quad S_1^T \Psi,$$
 (1.6) sujeito a $S_2 \Psi \leq S_3 + S_4 x_m \left(t\right),$

onde

 Ψ é um vetor que agrega as variáveis do problema de otimização;

 $x_m(t)$ é o estado do sistema medido no instante atual;

 S_i , i = 1, 2, 3, 4 são matrizes adequadamente definidas de acordo com as dinâmicas do sistema PWA e com as exigências operacionais do processo.

No problema de otimização (1.6), o vetor de estados medido no instante atual está presente apenas no lado direito da desigualdade relativa às restrições. Tratando-se este vetor como um conjunto de parâmetros, o problema de otimização será do tipo mpMILP (*multi-parametric* MILP). A solução do problema mpMILP para todos os vetores de estados de interesse é o controlador explícito procurado. A lei de controle assume a forma (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b)

$$u(t) = F^{i}x_{m}(t) + g^{i}$$
 se $D^{i}x_{m}(t) \le D_{0}^{i}$, $i = 1, 2, ..., s$.

Esta solução analítica permite reduzir o esforço computacional necessário à otimização restrita on-line do critério de custo a um simples cálculo matricial. No entanto, a implementação deste tipo de controlador necessita de informação completa de estado, o que nem sempre é possível em aplicações práticas.

1.4 Controle Preditivo Baseado em Séries de Funções Ortonormais

1.4.1 Séries de Funções Ortonormais

As séries de funções ortonormais (SFO) utilizam modelos não-estruturados para a representação de sistemas dinâmicos (Broome, 1965). Esta característica torna desnecessário o conhecimento da ordem e do atraso de transporte do processo para a estimação do seu modelo.

Um modelo baseado em SFO utiliza uma quantidade finita de filtros. As respostas dos filtros a uma dada entrada são ponderadas por uma seqüência de coeficientes reais para se determinar a saída do processo. As séries de funções ortonormais podem ser utilizadas, por exemplo, para modelar a resposta ao impulso de um processo linear, causal, estável, invariante e discreto no tempo. O modelo é dado por

$$h\left(t\right) = \sum_{i=1}^{N} c_{i} \phi_{i}\left(t\right),$$

onde

 $\begin{array}{ll} h\left(t\right),\;t=0,1,\ldots,t_{h} & \text{\'e a resposta ao impulso truncada do processo;} \\ t_{h} & \text{\'e um inteiro tal que, dado $\epsilon>0$, tem-se $|h\left(t\right)|<\epsilon$, $\forall t>t_{h}$;} \\ c_{i},\;i=1,2,\ldots,N & \text{\~s\~ao os coeficientes do modelo ortonormal;} \\ \phi_{i}\left(t\right),\;i=1,2,\ldots,N & \text{\~s\~ao seq\"u\^encias ortonormais discretas no tempo.} \end{array}$

O modelo ortonormal da resposta ao impulso é truncado em N componentes, desde que a aproximação seja adequada para sistemas com fading memory, para permitir cálculos em tempo finito. De fato, os coeficientes c_i , $i=1,2,\ldots,N$ podem tender para zero muito rapidamente se o conjunto $\phi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,N$ for escolhido de forma adequada. Isto implica que, em geral, $N\ll t_h$. A saída de um processo linear, causal, estável, invariante e discreto no tempo pode ser modelada por meio de séries escrevendo-se

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi_i(q^{-1}) u(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i l_i(t),$$

onde q^{-1} é o operador atraso, $\Phi_i\left(z^{-1}\right)$ é a Transformada Z da i-ésima função ortonormal $\phi_i\left(t\right)$, e $l_i\left(t\right)$ é a saída do i-ésimo filtro do modelo baseado em SFO.

Uma base ortonormal comumente utilizada é a de Laguerre, cujas funções são dadas por

$$\Phi_i(q^{-1}) = q^{-1}\sqrt{1-p^2} \frac{(q^{-1}-p)^{i-1}}{(1-pq^{-1})^i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

onde p é um parâmetro real definido no intervalo [0,1). A base de Laguerre é adequada para modelar sistemas dinâmicos sobreamortecidos. Quando o parâmetro p se aproxima do pólo dominante do processo, o sistema pode ser representado utilizando-se um pequeno número de funções (Lindskog, 1996; Oliveira, 1997).

Outra base comumente utilizada é a de Kautz (Lindskog, 1996; Oliveira, 1997). A base de Kautz é desenvolvida em termos de dois parâmetros, e é apropriada para a modelagem de processos dinâmicos subamortecidos. Quando os parâmetros correspondem às partes real e imaginária do par de pólos complexos conjugados que melhor descrevem as características de amortecimento da dinâmica, os coeficientes do desenvolvimento apresentam rápida convergência para zero. Sistemas com diversos modos amortecidos e/ou subamortecidos podem ser modelados utilizando-se uma base generalizada (Ninness e Gustafsson, 1994). A base generalizada pode ser expressa em termos de diversos parâmetros, reais e/ou complexos.

Em (den Hof et al., 1995) analisa-se as propriedades de um estimador paramétrico que identifica os coeficientes do desenvolvimento em séries utilizando-se uma base generalizada escolhida a partir de algum conhecimento a priori da ordem e do atraso de transporte do processo. Discute-se algumas vantagens de se modelar processos reais utilizando-se SFO e mostra-se por meio de exemplos que quando os parâmetros do desenvolvimento ortonormal se aproximam dos pólos dominantes do processo, a quantidade de parâmetros não-nulos do modelo diminui. Utilizando-se um estimador baseado na minimização do erro quadrático entre os dados disponíveis e a saída do modelo, os autores fornecem limitantes para o erro de estimação.

1.4.2 Controle Preditivo Robusto Baseado em Séries de Funções Ortonormais

O algoritmo de controle robusto é obtido minimizando-se, em relação aos incrementos futuros de controle, o máximo do critério de custo no conjunto dos valores possíveis para a previsão da saída. O problema de otimização resultante é do tipo *min-max*, com complexidade proporcional à quantidade de parâmetros utilizados para descrever a dinâmica do sistema. Na abordagem robusta, os coeficientes incertos do modelo são definidos por intervalos de pertinência. Quanto maior a quantidade de parâmetros incertos, maior a dificuldade de se determinar o conjunto de previsões da saída.

Os modelos baseados em SFO utilizam o conhecimento aproximado das características de amortecimento do processo para representar a dinâmica com uma quantidade reduzida de coeficientes. Isto implica em benefícios computacionais para a solução *on-line* do problema de controle preditivo robusto. A redução no esforço computacional pode ampliar a aplicação em

tempo real do controlador para processos com dinâmicas rápidas.

Em (Finn et al., 1993) um controlador preditivo, dito robusto, é projetado otimizando-se o desempenho nominal do processo. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida utilizando-se um horizonte mínimo de previsão, impondo-se condições sobre a ponderação do incremento no esforço de controle, e utilizando-se uma restrição de estado terminal. O modelo de previsão é baseado em SFO e não faz referência explícita à incerteza da planta.

Em (Oliveira et al., 2000) a incerteza é considerada explicitamente pelo controlador preditivo robusto em um problema de otimização do tipo *min-max*. Os intervalos de pertinência que definem os coeficientes da série ortonormal são determinados utilizando-se um conjunto de medições da resposta ao impulso do processo. O modelo é representado no espaço de estados, e a incerteza é mapeada unicamente na equação de saída. A reduzida quantidade de coeficientes incertos com relação ao modelo FIR implica em redução do esforço computacional para a otimização do critério de custo do problema de MPC robusto. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida utilizando-se um critério de desempenho baseado na norma infinita do erro de rastreio da referência, impondo-se um horizonte de previsão adequado e desconsiderando-se quaisquer restrições sobre a entrada e a saída do processo.

1.5 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a análise de um esquema de modelagem e controle preditivo robusto para processos híbridos incertos com restrições sobre os sinais de entrada e de saída. O esquema proposto, denominado MLDSFO (Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais), utiliza séries de funções ortonormais para representar as dinâmicas do sistema híbrido incerto. As proposições lógicas utilizadas para descrever o intertravamento da planta são transformadas em desigualdades lineares mistas equivalentes que, juntamente com as exigências operacionais do processo, constituem o conjunto de restrições do problema. O esquema MLDSFO utiliza simultaneamente variáveis inteiras e contínuas para integrar a dinâmica e a lógica do processo híbrido em um modelo não-hierárquico. As principais características do esquema proposto são relacionadas a seguir:

- i) o modelo MLDSFO permite reduzir a quantidade de coeficientes necessários à modelagem das dinâmicas do processo com relação ao modelo FIR, o que implica em benefícios computacionais para a otimização do critério de desempenho do problema de MPC robusto;
- ii) a incerteza da planta é mapeada unicamente em intervalos de pertinência dos coeficientes da equação de saída, sendo a equação de estados do modelo MLDSFO isenta de parâmetros

incertos:

- iii) os limites da incerteza nos coeficientes do modelo são estimados utilizando-se medições de resposta ao impulso e conhecimento aproximado dos ganhos, constantes de tempo e atrasos de transporte do processo;
- iv) o controle preditivo robusto baseado no modelo MLDSFO tem características de realimentação de saída, uma vez que esta é a única informação efetivamente realimentada da planta;
- v) a convexidade do critério de desempenho em relação aos parâmetros incertos do modelo é assegurada, o que implica que o problema de otimização pode ser resolvido numericamente em um tempo finito e de forma eficiente por meio de softwares disponíveis na literatura;
- vi) assumindo-se a factibilidade dos problemas de otimização, a estabilidade do sistema híbrido incerto em malha fechada pode ser garantida para horizontes finitos sem que isso modifique demasiadamente o desempenho de rastreio das referências.

As características mencionadas anteriormente sugerem que a metodologia proposta neste trabalho é atrativa para a modelagem e o controle preditivo robusto de processos híbridos incertos com restrições sobre entradas e saídas.

1.6 Organização e Contribuições do Trabalho

Este trabalho está organizado em capítulos, cujos conteúdos e principais contribuições são relacionados a seguir.

Capítulo 2: Séries de Funções Ortonormais – Apresenta as características da modelagem de processos dinâmicos, determinísticos ou incertos, utilizando-se séries de funções ortonormais (SFO). Apresenta e discute uma metodologia existente na literatura para a modelagem de sistemas dinâmicos incertos utilizando-se SFO. Propõe condições adicionais sobre esta metodologia para garantir que todos os comportamentos factíveis do processo estejam representados no modelo. Propõe uma técnica para determinar modelos ortonormais com incertezas estruturadas tais que quaisquer evoluções calculadas com o modelo sejam factíveis. As contribuições deste capítulo são as metodologias para a modelagem de sistemas dinâmicos incertos utilizando-se SFO e o desenvolvimento de uma metodologia para a modelagem de processos multivariáveis incertos utilizando-se SFO.

Capítulo 3: Modelagem de Sistemas Híbridos – Aborda o problema da integração entre os modelos dinâmicos e as proposições lógicas de um sistema híbrido. Apresenta um novo esquema, denominado MLDSFO (Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais), para a modelagem não-hierárquica de processos híbridos determinísticos ou incertos. Discute as características do modelo proposto, relaciona suas vantagens e desvantagens com relação aos esquemas existentes na literatura, e apresenta alguns exemplos de sistemas híbridos MLDSFO. Desenvolve uma metodologia para a identificação de sistemas híbridos MLDSFO. As contribuições deste capítulo são o modelo MLDSFO e a metodologia para a identificação de sistemas híbridos MLDSFO.

Capítulo 4: Controle Preditivo de Sistemas Híbridos – Aborda o problema de controle preditivo de sistemas híbridos. Apresenta o controlador preditivo (CP) para sistemas MLDSFO. Ilustra, através de exemplos, o CP-MLDSFO com critério de desempenho baseado nas normas quadrática e infinita ponderadas dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. Faz uma breve revisão dos métodos numéricos aplicáveis à resolução dos problemas de otimização que envolvem simultaneamente variáveis inteiras e contínuas. Aplica o CP-MLDSFO ao controle preditivo de um sistema de refrigeração industrial através de simulação numérica. Discute a adaptação de uma ferramenta existente na literatura para o cálculo da solução explícita do CP-MLDSFO. Faz uma revisão das metodologias encontradas na literatura para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO. Aborda o problema de controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos. Apresenta o controlador preditivo robusto (CPR) para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. Ilustra o CPR-MLDSFO com critério de desempenho baseado nas normas quadrática e infinita ponderadas dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. Aplica o CPR-MLDSFO ao controle preditivo de um sistema de refrigeração industrial incerto através de simulação numérica. Discute as características, vantagens e desvantagens do CPR-MLDSFO com relação às abordagens existentes na literatura. Apresenta uma nova metodologia, baseada em conjuntos terminais, para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CPR-MLDSFO. Discute as características do conjunto terminal para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. Ilustra por meio de exemplos de simulação o projeto de conjuntos terminais para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. As principais contribuições deste capítulo são o desenvolvimento do controlador preditivo para sistemas MLDSFO, a revisão das metodologias para assegurar a estabilidade do sistema híbrido MLDSFO em malha fechada, o desenvolvimento do controlador preditivo robusto para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas e o projeto

de conjuntos terminais que assegurem a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CPR-MLDSFO.

Capítulo 5: Apresenta as considerações finais do trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Séries de Funções Ortonormais

Este capítulo descreve a modelagem de processos dinâmicos, sejam eles determinísticos ou incertos, mono ou multivariáveis, utilizando-se séries de funções ortonormais (SFO). Uma técnica encontrada na literatura para estimar os intervalos de pertinência dos coeficientes da série ortonormal com incertezas estruturadas é discutida. Condições adicionais são propostas para assegurar que o modelo estimado represente todas as respostas ao impulso do processo, o que é exigido no projeto de um controlador robusto. Tendo-se em vista o desenvolvimento de uma metodologia para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada com controle preditivo robusto e restrição de conjunto terminal, que será discutida no Capítulo 4, propõe-se ainda condições para assegurar que todas as evoluções calculadas com o modelo são factíveis. Outra contribuição deste capítulo é o desenvolvimento de uma metodologia para a modelagem de processos multivariáveis incertos utilizando-se séries de funções ortonormais.

2.1 Introdução

Uma seqüência discreta no tempo x(t), $t=0,1,\ldots$ pode ser desenvolvida em termos de um conjunto de funções ortonormais $\phi_j(t)$, $j=1,2,\ldots$ se possuir energia finita, isto é, se (Broome, 1965)

$$\sum_{t=0}^{\infty} x^2(t) < \infty.$$

Considerando-se que

$$X(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^{R} (1 - \alpha_k z)}{\prod_{k=1}^{S} (1 - \beta_k z)},$$

é a Transformada Z da seqüência x(t), possuir energia finita significa que $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, S$. Esta exigência sobre os parâmetros β_k implica que todos os pólos de $X(z^{-1})$ devem

estar dentro do círculo unitário. O conjunto $\phi_j(t)$, $j=1,2,\ldots$ é denominado base e cada função da base é também uma seqüência discreta no tempo. O desenvolvimento de x(t) em termos da base é dado por (Broome, 1965)

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(t),$$

sendo

$$c_{j} = \sum_{t=0}^{\infty} x(t) \phi_{j}(t),$$

os coeficientes do desenvolvimento. A base de funções $\phi_j(t)$, $j=1,2,\ldots$ é ortonormal se o produto interno entre as seqüências tem a seguinte propriedade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \phi_j(t) \phi_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq m, \\ 1 & \text{se } j = m. \end{cases}$$

Seqüências ortonormais podem ser construídas utilizando-se esta definição de ortonormalidade.

2.2 Modelagem de Processos Monovariáveis

Um sistema linear, invariante no tempo e estável é completamente caracterizado pela sua seqüência de resposta ao impulso $h\left(t\right),\ t=0,1,\ldots$ Em geral, os modelos de resposta ao impulso podem ser obtidos em aplicações práticas. A seqüência $h\left(t\right)$ pode ser desenvolvida em termos de séries de funções ortonormais se possuir energia finita. Neste caso, a resposta ao impulso do processo pode ser escrita como

$$h(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(t), \qquad (2.1)$$

sendo

$$c_{j} = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \phi_{j}(t),$$

os coeficientes do desenvolvimento.

Na modelagem de processos reais (com fading memory), utiliza-se apenas uma quantidade finita de funções para descrever a resposta ao impulso do processo. O truncamento da série (2.1) fornece uma aproximação $\tilde{h}(t)$, $t=0,1,\ldots$ dada por

$$\tilde{h}\left(t\right) = \sum_{j=1}^{N} c_{j}\phi_{j}\left(t\right).$$

Esta aproximação será utilizada para fins práticos, pois permite que as previsões do problema de controle preditivo sejam calculadas em um tempo finito. O erro de truncamento é dado por

$$\xi = \sum_{t=0}^{t_h} \left| h\left(t\right) - \widetilde{h}\left(t\right) \right|,$$

onde t_h é um inteiro tal que, dado $\epsilon > 0$, tem-se $|h(t)| < \epsilon$, $\forall t > t_h$. Um limitante superior para ξ pode ser utilizado como critério para a determinação da quantidade N de funções da série ortonormal truncada que aproximará a resposta ao impulso do processo.

Considerando-se que $\Phi_j(z^{-1})$ é a Transformada Z da seqüência $\phi_j(t)$, a resposta do sistema, y(t), a uma entrada qualquer, u(t), é dada por

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j \Phi_j(q^{-1}) u(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j l_j(t) \implies y(t) = c^T l(t), \qquad (2.2)$$

onde q^{-1} é o operador atraso, $l_{j}\left(t\right)=\Phi_{j}\left(q^{-1}\right)u\left(t\right)$ é a resposta da j-ésima função ortonormal e

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad l(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_N(t) \end{bmatrix}.$$

A representação de sistemas dinâmicos para fins de controle preditivo exige que o modelo descreva o comportamento do processo de forma satisfatória na faixa de operação de interesse. A qualidade do modelo ortonormal pode ser ajustada por meio da escolha da base e da quantidade de funções da série. O procedimento mais utilizado consiste em escolher a base ortonormal e estimar os coeficientes da série ajustando-se o número de funções até obter-se a aproximação desejada. Um exemplo clássico deste procedimento é a aproximação de $h\left(t\right)$ por Série de Fourier.

Neste trabalho, a base ortonormal $\phi_j(t)$, $j=1,2,\ldots,N$ será escolhida tendo-se em vista as constantes de tempo dominantes da dinâmica do processo. A Transformada Z de uma base de funções ortonormais que considera a dinâmica do sistema é dada por (Ninness e Gustafsson, 1995)

$$\Phi_{j}\left(z^{-1}\right) = z^{-1} \frac{\sqrt{1 - |p_{j}|^{2}}}{1 - p_{j}z^{-1}} \prod_{k=1}^{j-1} \left(\frac{z^{-1} - \bar{p}_{k}}{1 - p_{k}z^{-1}}\right), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$
(2.3)

onde \bar{p}_j é o complexo conjugado de p_j . Os parâmetros p_j , $j=1,2,\ldots,N$ podem ser escolhidos de forma a corresponder aos pólos dominantes do processo. Em geral, a escolha dos pólos p_j determina a taxa de convergência dos estimadores paramétricos de modelos ortonormais (Ninness e Gustafsson, 1994). Se os pólos satisfazem $|p_j| < 1, \ j=1,2,\ldots,N$ e infinitas funções compõem a base (2.3), esta é capaz de modelar qualquer resposta ao impulso h(t) de energia finita, gerada por um processo linear, estável e causal (Ninness e Gustafsson, 1995).

2.2.1 Base Ortonormal de Laguerre

A base de funções de Laguerre, dada por

$$\Phi_{L,j}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p^2}}{1-pz^{-1}} \left(\frac{z^{-1}-p}{1-pz^{-1}}\right)^{j-1}, \quad j=1,2,\ldots,N,$$

é obtida fazendo-se $p_j=p,\ j=1,2,\ldots,N$ na equação (2.3). Esta base ortonormal é adequada para a modelagem de processos dinâmicos com características sobreamortecidas. No seu desenvolvimento, observa-se que $\Phi_{L,j}(z^{-1})$ pode ser definida em termos de $\Phi_{L,j-1}(z^{-1})$ (Zervos e Dumont, 1988; Oliveira, 1997). Considerando-se, por exemplo, as três primeiras funções ortonormais de Laguerre,

$$\begin{split} &\Phi_{L,1}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p^2}}{1-pz^{-1}}, \\ &\Phi_{L,2}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p^2}}{1-pz^{-1}}\left(\frac{z^{-1}-p}{1-pz^{-1}}\right), \\ &\Phi_{L,3}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p^2}}{1-pz^{-1}}\left(\frac{z^{-1}-p}{1-pz^{-1}}\right)^2, \end{split}$$

verifica-se que

$$\Phi_{L,2}(z^{-1}) = \left(\frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}\right) \Phi_{L,1}(z^{-1}),$$

$$\Phi_{L,3}(z^{-1}) = \left(\frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}\right) \Phi_{L,2}(z^{-1}).$$

Observando-se a recorrência, manipulações algébricas simples podem ser realizadas para determinar a resposta das funções da base a uma dada entrada, $l_{j}\left(t\right)=\Phi_{L,j}\left(q^{-1}\right)u\left(t\right)$, j=1,2,3, obtendo-se

$$l_{1}(t) = pl_{1}(t-1) + \sqrt{1-p^{2}} u(t-1),$$

$$l_{2}(t) = (1-p^{2}) l_{1}(t-1) + pl_{2}(t-1) - p\sqrt{1-p^{2}} u(t-1),$$

$$l_{3}(t) = -p(1-p^{2}) l_{1}(t-1) + (1-p^{2}) l_{2}(t-1) + pl_{3}(t-1) + p^{2}\sqrt{1-p^{2}} u(t-1).$$
(2.4)

O modelo (2.2), (2.4) pode ser representado no espaço de estados como descrito a seguir:

$$l(t+1) = Al(t) + bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t),$$
(2.5)

sendo que, para N funções de Laguerre na base ortonormal,

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & 0 \\ (1-p^2) & p & \cdots & 0 \\ (-p)(1-p^2) & (1-p^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-p)^{N-2}(1-p^2) & (-p)^{N-3}(1-p^2) & \cdots & p \end{bmatrix}, b = \sqrt{1-p^2} \begin{bmatrix} 1 \\ (-p) \\ (-p)^2 \\ \vdots \\ (-p)^{N-1} \end{bmatrix}.$$

A matriz A e o vetor b são determinados pelo parâmetro p e pela quantidade N de funções ortonormais utilizadas para o desenvolvimento da base. O vetor c pode ser estimado utilizandose medidas da entrada e da saída do sistema. Quando o parâmetro p se aproxima do pólo dominante do processo, os coeficientes do vetor c tendem rapidamente para zero. Neste caso, a quantidade de funções ortonormais necessárias para descrever o sistema adequadamente diminui. A redução na quantidade de coeficientes do modelo é interessante para fins de controle preditivo, pois o esforço computacional envolvido com a otimização *on-line* do critério de desempenho é proporcional à ordem do modelo (2.5).

Se a resposta ao impulso do processo é conhecida a priori, o parâmetro p pode ser escolhido de forma ótima. Pode-se minimizar, por exemplo, o somatório dos erros quadráticos entre a resposta ao impulso real, $h\left(t\right)$, e a saída de um modelo ortonormal cujo desenvolvimento utiliza uma quantidade fixa N de funções na base, isto é, resolve-se

$$\min_{c,p} \sum_{t=0}^{t_h} \left[h(t) - \sum_{j=1}^{N} c_j l_j(t,p) \right]^2, \tag{2.6}$$

onde os coeficientes c_i são dados por

$$c_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} h(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$
(2.7)

e sendo $\partial(t)$ o impulso unitário.

2.2.2 Base Ortonormal de Kautz

Quando a base (2.3) é desenvolvida em termos de um par de pólos complexos conjugados $p_j=p_{re}\pm ip_{im},\ i=\sqrt{-1},\ j=1,2,\ldots,N$ obtém-se a chamada base de funções de Kautz. Esta base ortonormal é adequada para a modelagem de processos dinâmicos com características subamortecidas. As funções de Kautz são dadas por

$$\begin{split} &\Phi_{K,2j-1}\left(z^{-1}\right) = \frac{\sqrt{1-p_{im}^2}\left(1-p_{re}z^{-1}\right)z^{-1}}{1-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+p_{im}z^{-2}} \left[\frac{p_{im}-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+z^{-2}}{1-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+p_{im}z^{-2}}\right]^{j-1},\\ &\Phi_{K,2j}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-2}\sqrt{\left(1-p_{im}^2\right)\left(1-p_{re}^2\right)}}{1-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+p_{im}z^{-2}} \left[\frac{p_{im}-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+z^{-2}}{1-p_{re}\left(1+p_{im}\right)z^{-1}+p_{im}z^{-2}}\right]^{j-1}, \end{split}$$

e devem ser acrescentadas ao modelo aos pares. Os parâmetros $|p_{re}|<1$ e $|p_{im}|<1$ podem ser escolhidos de forma que as raízes da equação

$$p^2 - p_{re} (1 + p_{im}) p + p_{im} = 0$$

se aproximem do par de pólos complexos conjugados que melhor descreve a dinâmica a ser modelada (Ninness e Gustafsson, 1995).

Para a obtenção do modelo de estados do desenvolvimento em séries com base de Kautz, define-se as variáveis auxiliares

$$\begin{split} & \tilde{l}_{2j-1}\left(t\right) = \frac{q^{-1}}{1 - p_{re}\left(1 + p_{im}\right)q^{-1} + p_{im}q^{-2}}u\left(t\right), & \text{se } j = 1, \\ & \tilde{l}_{2j-1}\left(t\right) = \frac{p_{im} - p_{re}\left(1 + p_{im}\right)q^{-1} + q^{-2}}{1 - p_{re}\left(1 + p_{im}\right)q^{-1} + p_{im}q^{-2}}\tilde{l}_{2j-3}\left(t\right), & \text{se } j > 1, \\ & \tilde{l}_{2j}\left(t\right) = \tilde{l}_{2j-1}\left(t - 1\right). \end{split}$$

Considerando-se as N primeiras variáveis, manipulações algébricas permitem escrever

$$\begin{split} \widetilde{l}_{1}\left(t\right) &= p_{re}\left(1+p_{im}\right)\widetilde{l}_{1}\left(t-1\right) - p_{im}\widetilde{l}_{2}\left(t-1\right) + u\left(t-1\right),\\ \widetilde{l}_{2}\left(t\right) &= \widetilde{l}_{1}\left(t-1\right),\\ \widetilde{l}_{3}\left(t\right) &= -p_{re}\left(1+p_{im}\right)\widetilde{l}_{1}\left(t-1\right) + p_{im}\widetilde{l}_{1}\left(t\right) + \widetilde{l}_{2}\left(t-1\right) +\\ &+ p_{re}\left(1+p_{im}\right)\widetilde{l}_{3}\left(t-1\right) - p_{im}\widetilde{l}_{4}\left(t-1\right),\\ \widetilde{l}_{4}\left(t\right) &= \widetilde{l}_{3}\left(t-1\right),\\ \vdots\\ \widetilde{l}_{N-1}\left(t\right) &= -p_{re}\left(1+p_{im}\right)\widetilde{l}_{N-3}\left(t-1\right) + p_{im}\widetilde{l}_{N-3}\left(t\right) + \widetilde{l}_{N-2}\left(t-1\right) +\\ &+ p_{re}\left(1+p_{im}\right)\widetilde{l}_{N-1}\left(t-1\right) - p_{im}\widetilde{l}_{N}\left(t-1\right)\\ \widetilde{l}_{N}\left(t\right) &= \widetilde{l}_{N-1}\left(t-1\right). \end{split}$$

Este conjunto de equações à diferenças pode ser representado em um espaço de estados auxiliar dado por

$$E\widetilde{l}(t) = F\widetilde{l}(t-1) + Gu(t-1),$$

sendo que

$$E = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ E_a & I_{2\times 2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & \vdots \\ \vdots & & & I_{2\times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & E_a & I_{2\times 2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_b & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_a & F_b & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & \vdots \\ \vdots & & & F_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & F_a & F_b \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com

$$E_{a} = \begin{bmatrix} -p_{im} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{a} = \begin{bmatrix} -p_{re}(1+p_{im}) & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{b} = \begin{bmatrix} p_{re}(1+p_{im}) & -p_{im} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes do modelo de estados auxiliar são funções dos parâmetros p_{re} e p_{im} . Uma vez que a matriz E é sempre invertível, pode-se escrever

$$\tilde{l}(t) = E^{-1}F\tilde{l}(t-1) + E^{-1}Gu(t-1) \implies \tilde{l}(t+1) = E^{-1}F\tilde{l}(t) + E^{-1}Gu(t).$$

Para obter-se o modelo desejado, utiliza-se a transformação

$$l\left(t\right) = T\widetilde{l}\left(t\right),$$

sendo que

$$T = \begin{bmatrix} T_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_a & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & T_a \end{bmatrix},$$

com

$$T_a = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - p_{im}^2} & -p_{re}\sqrt{1 - p_{im}^2} \\ 0 & \sqrt{(1 - p_{re}^2)(1 - p_{im}^2)} \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se esta transformação à equação de estados auxiliar, obtém-se

$$l(t+1) = TE^{-1}FT^{-1}l(t) + TE^{-1}Gu(t),$$

ou simplesmente

$$l(t+1) = Al(t) + bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t).$$

Os parâmetros p_{re} e p_{im} podem ser escolhidos empiricamente, utilizando-se algum critério, ou a partir do conhecimento *a priori* da resposta ao impulso do processo. Os coeficientes do vetor c devem ser estimados.

2.2.3 Base Ortonormal Generalizada

As bases de Laguerre e de Kautz são desenvolvidas em função de apenas um pólo real e de dois pólos complexos conjugados, respectivamente. No entanto, pode ser difícil selecionar apenas uma dinâmica quando o sistema apresenta diversos modos próprios relevantes. Uma base ortonormal

que considere os vários modos do sistema permite reduzir a quantidade de funções necessárias à representação do processo, quando comparada à quantidade utilizada pelos modelos de Laguerre e de Kautz, dado um mesmo limitante para o erro de ajuste dos dados de entrada e saída (Ninness e Gustafsson, 1995).

Vários modos podem ser incorporados à base (2.3). Ainda assim é observada uma recorrência entre funções consecutivas. Considere, por exemplo, uma base com quatro funções, desenvolvida em termos de quatro pólos reais. A base é dada por

$$\begin{split} &\Phi_{G,1}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p_1^2}}{1-p_1z^{-1}},\\ &\Phi_{G,2}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p_2^2}}{1-p_2z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_1}{1-p_1z^{-1}},\\ &\Phi_{G,3}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p_3^2}}{1-p_3z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_1}{1-p_1z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_2}{1-p_2z^{-1}},\\ &\Phi_{G,4}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p_4^2}}{1-p_4z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_1}{1-p_1z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_2}{1-p_2z^{-1}}\frac{z^{-1}-p_3}{1-p_3z^{-1}}. \end{split}$$

É fácil verificar a recorrência entre estas funções. Manipulações algébricas simples permitem escrever as respostas dos filtros do desenvolvimento ortonormal a uma entrada $u\left(t\right)$ como

$$\begin{split} l_1\left(t\right) &= p_1 l_1\left(t-1\right) + \sqrt{1-p_1^2} \ u\left(t-1\right), \\ l_2\left(t\right) &= \sqrt{1-p_1^2} \sqrt{1-p_2^2} \ l_1\left(t-1\right) + p_2 l_2\left(t-1\right) - p_1 \sqrt{1-p_2^2} \ u\left(t-1\right), \\ l_3\left(t\right) &= -p_2 \sqrt{1-p_1^2} \sqrt{1-p_3^2} \ l_1\left(t-1\right) + \sqrt{1-p_2^2} \sqrt{1-p_3^2} \ l_2\left(t-1\right) + \\ &\quad + p_3 l_3\left(t-1\right) + p_1 p_2 \sqrt{1-p_3^2} \ u\left(t-1\right), \\ l_4\left(t\right) &= p_2 p_3 \sqrt{1-p_1^2} \sqrt{1-p_4^2} \ l_1\left(t-1\right) - p_3 \sqrt{1-p_2^2} \sqrt{1-p_4^2} \ l_2\left(t-1\right) + \\ &\quad + \sqrt{1-p_3^2} \sqrt{1-p_4^2} \ l_3\left(t-1\right) + p_4 l_4\left(t-1\right) - p_1 p_2 p_3 \sqrt{1-p_4^2} \ u\left(t-1\right). \end{split}$$

As matrizes do modelo no espaço de estados são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - p_2^2} & p_2 & 0 & 0 \\ -p_2 \sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - p_3^2} & \sqrt{1 - p_2^2} \sqrt{1 - p_3^2} & p_3 & 0 \\ p_2 p_3 \sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - p_4^2} & -p_3 \sqrt{1 - p_2^2} \sqrt{1 - p_4^2} & \sqrt{1 - p_3^2} \sqrt{1 - p_4^2} & p_4 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - p_1^2} \\ -p_1 \sqrt{1 - p_2^2} \\ p_1 p_2 \sqrt{1 - p_3^2} \\ -p_1 p_2 p_3 \sqrt{1 - p_4^2} \end{bmatrix},$$

e podem facilmente ser estendidas para uma dimensão qualquer.

O desenvolvimento em séries ortonormais com base generalizada permite incorporar parâmetros reais e complexos à mesma formulação. Se na modelagem de um processo é interessante introduzir um modo sobreamortecido e outro ecido, deve-se utilizar uma base generalizada do tipo

$$\begin{split} &\Phi_{G,1}\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1}\sqrt{1-p_{1}^{2}}}{1-p_{1}z^{-1}}, \\ &\Phi_{G,2}\left(z^{-1}\right) = \frac{\sqrt{1-p_{2im}^{2}}\left(1-p_{2re}z^{-1}\right)z^{-1}}{1-p_{2re}\left(1+p_{2im}\right)z^{-1}+p_{2im}z^{-2}}\frac{z^{-1}-p_{1}}{1-p_{1}z^{-1}}, \\ &\Phi_{G,3}\left(z^{-1}\right) = \frac{\sqrt{\left(1-p_{2im}^{2}\right)\left(1-p_{2re}^{2}\right)z^{-2}}}{1-p_{2re}\left(1+p_{2im}\right)z^{-1}+p_{2im}z^{-2}}\frac{z^{-1}-p_{1}}{1-p_{1}z^{-1}}. \end{split}$$

Para obter-se um modelo no espaço de estados a partir desta base, é necessário definir as variáveis auxiliares

$$\widetilde{l}_{1}(t) = l_{1}(t),
\widetilde{l}_{2}(t) = \frac{q^{-1} - p_{1}}{1 - p_{2re}(1 + p_{2im})q^{-1} + p_{2im}q^{-2}}\widetilde{l}_{1}(t),
\widetilde{l}_{3}(t) = \widetilde{l}_{2}(t - 1).$$

Estas variáveis correspondem às seguintes equações à diferenças:

$$\widetilde{l}_{1}(t) = p_{1}\widetilde{l}_{1}(t-1) + \sqrt{1-p_{1}^{2}} u(t-1),$$

$$\widetilde{l}_{2}(t) = (1-p_{1}^{2})\widetilde{l}_{1}(t-1) + p_{2re}(1+p_{2im})\widetilde{l}_{2}(t-1) - p_{2im}\widetilde{l}_{3}(t-1) - p_{1}\sqrt{1-p_{1}^{2}} u(t-1),$$

$$\widetilde{l}_{3}(t) = \widetilde{l}_{2}(t-1).$$

As equações de estado auxiliares podem ser agregadas escrevendo-se

$$\widetilde{l}(t) = F\widetilde{l}(t-1) + Gu(t-1) \Rightarrow \widetilde{l}(t+1) = F\widetilde{l}(t) + Gu(t),$$

sendo

$$F = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ (1-p_1^2) & p_{2re} (1+p_{2im}) & -p_{2im} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p_1^2} \\ -p_1\sqrt{1-p_1^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O modelo ortonormal cuja base generalizada é desenvolvida em termos de um pólo real e um par de pólos complexos conjugados pode ser representado no espaço de estados através da transformação

$$l\left(t\right) = T\widetilde{l}\left(t\right),$$

com

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1 - p_{2im}^2}}{\sqrt{1 - p_1^2}} & -p_{2re} \frac{\sqrt{1 - p_{2im}^2}}{\sqrt{1 - p_1^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{(1 - p_{2im}^2)(1 - p_{2re}^2)}}{\sqrt{1 - p_1^2}} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $p_1 \neq 1$, $p_{2re} \neq 1$ e $p_{2im} \neq 1$, a matriz T é sempre invertível. Sendo assim, pode-se escrever

$$l(t+1) = TFT^{-1}l(t) + TGu(t).$$

As matrizes da representação no espaço de estados dependem apenas dos parâmetros p_1 , p_{2re} e p_{2im} , que devem ser escolhidos de forma a corresponder o mais próximo possível às características de amortecimento do processo modelado.

2.3 Modelagem de Processos Multivariáveis

O procedimento de modelagem discutido na Seção 2.2 pode ser estendido para processos multivariáveis tais como

$$y_{1}(t) = G_{11}(q^{-1})u_{1}(t) + \dots + G_{1n}(q^{-1})u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = G_{m1}(q^{-1})u_{1}(t) + \dots + G_{mn}(q^{-1})u_{n}(t).$$
(2.8)

O sistema (2.8) é composto por n entradas e m saídas. Cada dinâmica $G_{ij}(q^{-1})$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ pode ser modelada utilizando-se séries de funções ortonormais se esta for linear, estável e causal (Ninness et al., 1995). Neste caso, o modelo do processo é dado por

$$y_{1}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{11k} \Phi_{11k} (q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{1nk} \Phi_{1nk} (q^{-1}) u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{m1k} \Phi_{m1k} (q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{mnk} \Phi_{mnk} (q^{-1}) u_{n}(t).$$

Cada base Φ_{ij} (q^{-1}) , $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ pode ser representada por um conjunto de pólos que descrevam as características de amortecimento entre a j-ésima entrada e a i-ésima saída. Utiliza-se a mesma quantidade N de funções em cada desenvolvimento ortonormal para

facilitar a compactação do modelo, que pode ser reescrito como

$$y_1(t) = c_{11}^T l_{11}(t) + \dots + c_{1n}^T l_{1n}(t),$$

 \vdots
 $y_m(t) = c_{m1}^T l_{m1}(t) + \dots + c_{mn}^T l_{mn}(t),$

sendo que

$$l_{ij}(t+1) = A_{ij}l_{ij}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{ij}u_{j}(t),$$

$$c_{ij}^{T} = \begin{bmatrix} c_{ij1} & \cdots & c_{ijN} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

O termo $1/\sqrt{mn}$ é introduzido na representação de estados para assegurar a normalidade da base (Ninness et al., 1995). Os pares (A_{ij},b_{ij}) são funções dos pólos escolhidos para representar cada dinâmica. O modelo anterior pode ser compactado em forma matricial escrevendo-se

$$\begin{bmatrix} l_{11}(t+1) \\ \vdots \\ l_{1n}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & A_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11}(t) \\ \vdots \\ l_{1n}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_{11} & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & b_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ \vdots \\ u_{n}(t) \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} l_{m1}(t+1) \\ \vdots \\ l_{mn}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m1} & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{m1}(t) \\ \vdots \\ l_{mn}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_{m1} & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ \vdots \\ u_{n}(t) \end{bmatrix},$$

$$y_{1}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}^{T} & \cdots & c_{1n}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11}(t) \\ \vdots \\ l_{1n}(t) \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = \begin{bmatrix} c_{m1}^{T} & \cdots & c_{mn}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{m1}(t) \\ \vdots \\ l_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

ou, simplificadamente,

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{1}u(t),$$

$$\vdots$$

$$l_{m}(t+1) = A_{m}l_{m}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{m}u(t),$$

$$y_{1}(t) = c_{1}^{T}l_{1}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = c_{m}^{T}l_{m}(t).$$

As equações de estado e de saída podem ser agregadas escrevendo-se

$$\begin{bmatrix} l_1(t+1) \\ \vdots \\ l_m(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ & & \\ \mathbf{0} & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_m(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T & \mathbf{0} \\ \vdots \\ 0 & c_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_m(t) \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t),$$

com

$$\dim [c^T] = m \times mnN,$$

$$\dim [l(t)] = mnN \times 1,$$

$$\dim [A] = mnN \times mnN,$$

$$\dim [b] = mnN \times n.$$

Quando a mesma base ortonormal é utilizada para modelar todos os canais de entrada, o modelo do processo assume a forma (Huzmezan et al., 2002)

$$y_{1}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{11k} \Phi_{1k} (q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{1nk} \Phi_{nk} (q^{-1}) u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{m1k} \Phi_{1k} (q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{mnk} \Phi_{nk} (q^{-1}) u_{n}(t).$$

As bases Φ_j (q^{-1}) , $j=1,2,\ldots,n$ podem ser representadas por um conjunto de pólos que descrevam as características de amortecimento entre a j-ésima entrada e todas as saídas. Utilizase N funções ortonormais em todos os desenvolvimentos. O modelo anterior pode ser reescrito como

$$y_{1}(t) = c_{11}^{T} l_{1}(t) + \dots + c_{1n}^{T} l_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t) = c_{m1}^{T} l_{1}(t) + \dots + c_{mn}^{T} l_{n}(t),$$

sendo que

$$l_{j}(t+1) = A_{j}l_{j}(t) + \frac{1}{\sqrt{n}}b_{j}u_{j}(t),$$

 $c_{ij}^{T} = \begin{bmatrix} c_{ij1} & \cdots & c_{ijN} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

Os pares (A_j, b_j) são funções dos pólos escolhidos para representar cada canal de entrada. O modelo pode ser reescrito em forma matricial como a seguir:

$$\begin{bmatrix} l_1(t+1) \\ l_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^T & \cdots & c_{1n}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}^T & \cdots & c_{mn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{n}}bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t),$$

com

$$\dim [c^T] = m \times nN,$$

$$\dim [l(t)] = nN \times 1,$$

$$\dim [A] = nN \times nN,$$

$$\dim [b] = nN \times n.$$

Um processo MIMO (*Multiple-Input*, *Multiple-Output*) pode ser modelado utilizando-se o mesmo desenvolvimento ortonormal para as entradas quando todos os canais apresentarem características de amortecimento semelhantes. Neste caso, o modelo ortonormal resultante apresenta ordem inferior à do modelo que utiliza diferentes bases ortonormais para representar cada

dinâmica. No entanto, a quantidade de parâmetros que necessitam ser estimados em ambos os casos é a mesma, pois no desenvolvimento independente dos canais de entrada e saída, a matriz c^T é composta por diversos elementos nulos.

2.3.1 Exemplo: Estimação do Modelo Ortonormal de um Ambiente com Sistema de Climatização

O modelo de um ambiente com sistema de climatização é descrito no Apêndice A. O processo é representado por uma equação diferencial obtida aplicando-se o conceito de balanço de energia no volume de controle ao processo termodinâmico que ocorre no ambiente climatizado. O desenvolvimento ortonormal do modelo do ambiente é dado por

$$\begin{bmatrix} l_{1}\left(t+1\right) \\ l_{2}\left(t+1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & A_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} b_{1} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \mathbf{0}_{N\times 1} & b_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}\left(t\right) \\ u_{2}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

$$y\left(t\right) = \begin{bmatrix} c_{1}^{T} & c_{2}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

ou simplesmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t),$$

onde $y\left(t\right)$ é a temperatura do ar ambiente, $u_{1}\left(t\right)$ é a temperatura do ar de insuflamento, uma variável manipulada, e $u_{2}\left(t\right)$ é a taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado, uma variável observada. Quando a resposta ao impulso do processo é utilizada para a estimação dos modelos ortonormais, cada canal de entrada e saída deve ser identificado separadamente. Em alguns casos práticos não é possível aplicar impulsos nas entradas do sistema para a estimação de modelos ortonormais. Nos exemplos ilustrativos deste trabalho assume-se que a aplicação de entradas impulsivas é viável. Para o sistema tratado, as respostas ao impulso referentes às entradas temperatura de insuflamento e calor sensível foram somadas a sinais de perturbação de médias nulas e variâncias $\sigma_{1}^{2}=3\times10^{-5}$ e $\sigma_{2}^{2}=4\times10^{-6}$, respectivamente. Cada base foi desenvolvida utilizando-se apenas uma função ortonormal. As matrizes e os vetores do modelo estimado são dados por

$$A = \begin{bmatrix} 0.79 & 0 \\ 0 & 0.80 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 4.3353 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 4.2426 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 4.8195 \times 10^{-1} \\ 1.8643 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.1, apresenta-se as variações em torno dos valores de operação dos sinais de entrada (Figura 2.1c) e de saída (Figura 2.1a) utilizados na estimação. Apresenta-se também as

respostas do ambiente climatizado descrito pelo simulador e do modelo estimado a uma entrada de validação arbitrária (Figura 2.1b), além do erro de modelagem (Figura 2.1d) e das entradas arbitrárias temperatura do ar de insuflamento (Figura 2.1e) e taxa de geração de calor sensível (Figura 2.1f). Note que o modelo representa adequadamente o comportamento do processo. O erro médio quadrático de modelagem para a entrada de validação escolhida (arbitrária) é de aproximadamente 2.5×10^{-4} , o que significa uma boa aproximação.

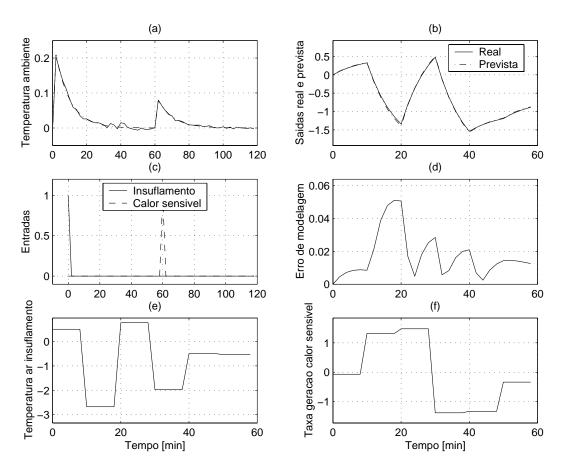


Figura 2.1: Ensaio do ambiente com sistema de climatização e do modelo ortonormal estimado.

2.4 Modelagem de Processos Monovariáveis Incertos

O desempenho de um sistema em malha fechada com controle preditivo depende da confiabilidade do modelo utilizado para o cálculo das previsões. Se o modelo disponível representa a dinâmica satisfatoriamente na faixa de operação de interesse, uma previsão correta da saída do sistema pode ser calculada no instante atual. Por outro lado, diversos processos reais apresentam comportamento incerto ou variante no tempo. Quando a incerteza é definida por intervalos de pertinência e não há dúvida com relação à ordem do modelo, a incerteza é do tipo estruturada.

Os intervalos de pertinência dos coeficientes do modelo ortonormal do sistema

$$y(t,\eta) = G(q^{-1},\eta) u(t), \qquad (2.9)$$

onde η é um vetor de coeficientes incertos, serão estimados utilizando-se um conjunto de respostas ao impulso, denotado por $\{h(t,\eta_h)\}$. O conjunto $\{h(t,\eta_h)\}$ pode ser obtido a partir da planta ou pode ser gerado a partir do modelo (2.9) para diversos valores das incertezas. Três metodologias para obter modelos ortonormais com incertezas estruturadas a partir de um conjunto de respostas ao impulso são discutidas a seguir.

2.4.1 Modelagem da Resposta ao Impulso Central e do Máximo Desvio do Conjunto de Respostas ao Impulso

Em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) apresenta-se um procedimento para calcular uma estimativa da máxima incerteza do modelo ortonormal a partir do conjunto de respostas ao impulso do processo. Inicialmente, escreve-se $\{h(t, \eta_h)\}$ como

$$\{h(t,\eta_h)\} = \{\bar{h}(t) + \eta_h dh(t) : -1 \le \eta_h \le 1\}, \quad t = 0, 1, \dots, t_h,$$
 (2.10)

onde

 $\overline{h}(t)$ é a resposta ao impulso central (computada) do conjunto $\{h(t,\eta_h)\}$;

 $dh\left(t
ight)$ é o módulo do máximo desvio das respostas contidas em $\left\{h\left(t,\eta_{h}
ight)\right\}$ em torno de $h\left(t
ight)$;

$$t_{h} \qquad \text{ \'e um inteiro tal que, dado $\epsilon > 0$, tem-se } \left| \frac{-}{h}\left(t\right) \right| < \epsilon \text{ e } \left| dh\left(t\right) \right| < \epsilon, \ \forall t > t_{h}.$$

Em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000), os coeficientes do desenvolvimento ortonormal do processo com incertezas estruturadas são calculados por meio de

$$c_{j}(\eta_{j}) = \sum_{t=0}^{t_{h}} \{h(t, \eta_{h})\} \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$
(2.11)

sendo $\partial\left(t\right)$ o impulso unitário. A base ortonormal $\Phi\left(q^{-1}\right)$, formada pelas funções $\Phi_{j}\left(q^{-1}\right)$, $j=1,2,\ldots,N$ pode ser obtida a partir dos pólos que descrevem as características de amortecimento da resposta ao impulso central do conjunto $\{h\left(t,\eta_{h}\right)\}$. Utilizando-se (2.10), a equação (2.11) pode ser reescrita como

$$c_{j}(\eta_{j}) = \sum_{t=0}^{t_{h}} \bar{h}(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t) + \sum_{t=0}^{t_{h}} \eta_{h} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Os coeficientes do desenvolvimento ortonormal do processo incerto são representados por meio de intervalos de pertinência. A parcela determinística destes intervalos é definida em termos da resposta ao impulso central, $\bar{h}\left(t\right)$. A parcela incerta é função de $dh\left(t\right)$, o módulo do máximo desvio das respostas ao impulso em torno da resposta central. Sendo assim, os coeficientes podem ser escritos como

$$c_j(\eta_j) = \bar{c}_j + \eta_j dc_j, \quad -1 \le \eta_j \le 1, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

onde

 \bar{c}_i são os valores centrais dos coeficientes;

 dc_j são os módulos das máximas variações dos coeficientes em torno dos respectivos valores centrais.

Embora não seja possível determinar analiticamente a máxima incerteza dos coeficientes do desenvolvimento ortonormal do processo incerto, em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) uma estimativa é calculada assumindo-se que

$$-\sum_{t=0}^{t_{h}} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t) \leq \sum_{t=0}^{t_{h}} \eta_{h} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t) \leq \sum_{t=0}^{t_{h}} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t),$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.12)$$

o que implica

$$\bar{c}_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} \bar{h}(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), \quad j = 1, 2, \dots, N,
dc_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$
(2.13)

A matriz A e o vetor b da representação da expansão no espaço de estados são funções dos pólos utilizados para desenvolver a base ortonormal. Estes pólos podem ser fixos, considerandose que as magnitudes das incertezas são pequenas em processos reais. Escolhendo-se os pólos de acordo com as características de amortecimento da resposta ao impulso central do sistema, a incerteza da planta é mapeada apenas no vetor c (η) . O modelo do processo é então dado por

$$l(t+1) = Al(t) + bu(t),$$

 $u(t+1, n) = c^{T}(n) l(t+1).$

Considerando-se que

$$l(t) = Al(t-1) + bu(t-1),$$

$$y(t, \eta) = c^{T}(\eta) l(t),$$

então

$$l(t+1) - l(t) = A[l(t) - l(t-1)] + b[u(t) - u(t-1)],$$

$$y(t+1, \eta) - y(t, \eta) = c^{T}(\eta)[l(t+1) - l(t)],$$

e o modelo do processo pode ser escrito na forma incremental

$$\Delta l (t+1) = A\Delta l (t) + b\Delta u (t),$$

$$y (t+1, \eta) = y (t) + c^{T} (\eta) \Delta l (t+1),$$
(2.14)

sendo $\Delta=1-q^{-1}$ e

$$c_{j,\min} \le c_j (\eta_j) \le c_{j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$
 $c_{j,\min} = \bar{c}_j - dc_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$
 $c_{j,\max} = \bar{c}_j + dc_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$
(2.15)

Apesar de o procedimento proposto em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) permitir que a incerteza de um conjunto de respostas ao impulso seja mapeada em intervalos de pertinência dos coeficientes da série ortonormal, a inequação (2.12) é sempre verdadeira apenas quando

$$\Phi_j(q^{-1}) \partial(t) \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad t = 0, 1, \dots, t_h,$$
 (2.16)

pois $dh(t) \ge 0$, $\forall t$. Deve-se observar que a condição (2.16) é verificada apenas em alguns casos especiais. Considerando-se, por exemplo, o primeiro estado da série de Laguerre, tem-se que

$$l_{L,1}(t) = \Phi_{L,1}(q^{-1}) \partial(t) \Rightarrow l_{L,1}(t) = pl_{L,1}(t-1) + \sqrt{1-p^2} \partial(t-1).$$

Assumindo-se que $l_{L,1}(0) = 0$, então

$$l_{L,1}(t) = p^{t-1}\sqrt{1-p^2}, \quad t > 0.$$

Sendo assim, o primeiro estado da série de Laguerre é tal que $\Phi_{L,1}\left(q^{-1}\right)\partial\left(t\right)\geq0$, $\forall t=0,1,\ldots$, se $0\leq p<1$ e $l_{L,1}\left(0\right)=0$, e portanto atende à condição (2.16). Por outro lado, o estado associado à segunda função de Laguerre, dado por

$$l_{L,2}(t) = \Phi_{L,2}(q^{-1}) \partial(t),$$

é tal que

$$l_{L,2}(t) = (1 - p^2)l_{L,1}(t - 1) + pl_{L,2}(t - 1) - p\sqrt{1 - p^2}\partial(t - 1).$$

Assumindo-se que $l_{L,1}\left(0\right)=l_{L,2}\left(0\right)=0$, então

$$l_{L,2}(1) = -p\sqrt{1-p^2}.$$

Note que o segundo estado de Laguerre é tal que $\Phi_{L,2}\left(q^{-1}\right)\partial\left(t\right)<0$, para t=1, se $0\leq p<1$ e $l_{L,1}\left(0\right)=l_{L,2}\left(0\right)=0$, o que viola a condição (2.16) e, em princípio, não permite assegurar (2.12). Isto implica que não é possível impor esta condição sobre os estados da série ortonormal para assegurar que o modelo com incertezas estruturadas represente todas as respostas ao impulso do processo incerto. Esta é uma condição necessária do problema de controle preditivo robusto, visto que a seqüência de entrada é calculada considerando-se o pior desempenho possível de rastreio das referências do processo, que é determinado utilizando-se o modelo.

Alguns exemplos de simulação ilustram que a representação do conjunto de respostas ao impulso do processo pode ser bastante satisfatória quando a convergência da série ortonormal é observada. Apesar disto, na Seção 2.4.2 propõe-se condições adicionais sobre o procedimento de modelagem encontrado em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) para assegurar que o modelo ortonormal com incertezas estruturadas seguramente represente todos os comportamentos possíveis do processo.

Por outro lado, a implementação numérica da incerteza por meio do hiper retângulo (2.15) não permite assegurar que, dado c_j (η_j) \in [$c_{j,\min}, c_{j,\max}$], $j=1,2,\ldots,N$, então $h(t)=c^T(\eta)\,l(t)\in\{h(t,\eta_h)\}$, $\forall t$, sendo $l(t+1)=Al(t)+b\partial(t)$. Em palavras, dada uma combinação qualquer de coeficientes contidos no hiper retângulo que define as incertezas, não é possível garantir que a resposta ao impulso correspondente estará contida no conjunto $\{h(t,\eta_h)\}$. Na Seção 2.4.3 propõe-se condições adicionais sobre o procedimento de modelagem apresentado em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) que permitem assegurar que as respostas calculadas com o modelo são factíveis.

2.4.2 Sobrestimação do Conjunto de Respostas ao Impulso do Processo

Para assegurar que o modelo ortonormal com incertezas estruturadas seguramente represente todos os comportamentos possíveis do processo, propõe-se resolver o seguinte problema de

otimização:

$$\min_{\eta} \ 2^{N} \prod_{j=1}^{N} dc_{j} \eta_{j}, \tag{2.17}$$
sujeito a $\{h(t, \eta_{h})\} \subseteq \{\tilde{h}(t, \tilde{\eta}_{h})\},$

$$\tilde{h}_{k}(t, \tilde{\eta}_{h}) = \sum_{j=1}^{N} (\bar{c}_{j} + \tilde{\eta}_{h,j}^{k} dc_{j}) l_{j}(t), |\tilde{\eta}_{h,j}^{k}| \leq \eta_{j}, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$k = 1, 2, \dots, \forall t = 0, 1, \dots, t_{h},$$

$$\bar{c}_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} \bar{h}(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), j = 1, 2, \dots, N,$$

$$dc_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} dh(t) \Phi_{j}(q^{-1}) \partial(t), j = 1, 2, \dots, N,$$

$$l(t+1) = Al(t) + b\partial(t).$$

No problema de otimização (2.17), o modelo ortonormal é inicialmente determinado conforme proposto em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000). As parcelas incertas dos coeficientes do modelo ortonormal com incertezas estruturadas, dc_j , $j=1,2,\ldots,N$ são então escalonadas pelos escalares η_j , $j=1,2,\ldots,N$ minimizando-se o volume do hiper retângulo que delimita as incertezas, calculado por meio do produtório, até que todas as respostas ao impulso do conjunto $\{h\left(t,\eta_h\right)\}$ estejam representadas no conjunto de respostas ao impulso do modelo $\{\tilde{h}\left(t,\tilde{\eta}_h\right)\}$. Este novo procedimento de modelagem é adequado para controle preditivo robusto, onde a seqüência de entradas é determinada tendo-se em vista o pior desempenho de rastreio das referências no espaço das incertezas, que seguramente está representado no modelo.

As variáveis do problema de otimização (2.17) são os escalares η_j , $j=1,2,\ldots,N$. Para o critério minimizado, estas variáveis correspondem ao escalonamento de menor volume do hiper retângulo das incertezas determinado em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) tal que qualquer resposta ao impulso do conjunto $\{h(t,\eta_h)\}$ esteja representada no modelo. Com esta metodologia, o modelo ortonormal do processo é dado por

$$\Delta l (t+1) = A\Delta l (t) + b\Delta u (t),$$

$$y (t+1, \eta) = y (t) + c^{T} (\eta) \Delta l (t+1),$$

$$c_{j,\min} \leq c_{j} (\eta_{j}) \leq c_{j,\max}, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$c_{j,\min} = \bar{c}_{j} - \eta_{j}^{*} dc_{j}, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$c_{j,\max} = \bar{c}_{j} + \eta_{j}^{*} dc_{j}, \quad j = 1, 2, ..., N,$$
(2.18)

onde η_j^* , $j=1,2,\ldots,N$ são as soluções do problema de otimização (2.17).

O problema de otimização (2.17) utiliza os lados do hiper retângulo determinados em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) como valores iniciais dos limites de incerteza do modelo proposto. Estes lados são escalonados pelas restrições do problema de otimização (2.17), obtendo-se um modelo ortonormal que seguramente contém todas as respostas ao impulso do processo. Esta especificação é obtida numericamente a partir das restrições impostas. Sendo assim, qualquer solução inicial para dc_j , $j=1,2,\ldots,N$, seria suficiente para obter-se um modelo conforme especificado, visto que as restrições do problema de otimização (2.17) garantem o escalonamento necessário nos lados do hiper retângulo. No entanto, os exemplos de simulação numérica mostram que os limites da incerteza determinados em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) são uma excelente aproximação do conjunto de respostas ao impulso do processo, e necessitam apenas de um pequeno escalonamento para atender à especificação. Isto é interessante para a otimização numérica, tendo-se em vista que o critério de custo do problema de otimização (2.17) é não-linear, podendo apresentar mínimos locais. Este comentário está ilustrado na Seção 2.4.4.

2.4.3 Subestimação do Conjunto de Respostas ao Impulso do Processo

A metodologia proposta em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) não permite assegurar que, dado um conjunto de coeficientes contido no hiper retângulo das incertezas, a resposta ao impulso correspondente estará contida no conjunto $\{h(t, \eta_h)\}$. Para assegurar que as respostas ao impulso calculadas com o modelo sejam factíveis, propõe-se determinar os coeficientes da série ortonormal resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\max_{\eta} \ 2^{N} \prod_{j=1}^{N} dc_{j} \eta_{j}, \tag{2.19}$$
sujeito a $\left\{ \widetilde{h} \left(t, \widetilde{\eta}_{h} \right) \right\} \subseteq \left\{ h \left(t, \eta_{h} \right) \right\},$

$$\widetilde{h}_{k} \left(t, \widetilde{\eta}_{h} \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\overline{c}_{j} + \widetilde{\eta}_{h,j}^{k} dc_{j} \right) l_{j} \left(t \right), \quad \left| \widetilde{\eta}_{h,j}^{k} \right| \leq \eta_{j}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad \forall t = 0, 1, \dots, t_{h},$$

$$\overline{c}_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} \overline{h} \left(t \right) \Phi_{j} \left(q^{-1} \right) \partial \left(t \right), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$dc_{j} = \sum_{t=0}^{t_{h}} dh \left(t \right) \Phi_{j} \left(q^{-1} \right) \partial \left(t \right), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$l \left(t + 1 \right) = Al \left(t \right) + b\partial \left(t \right).$$

No problema de otimização (2.19), o modelo ortonormal é inicialmente determinado conforme proposto em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000). As parcelas incertas dos coeficientes do modelo ortonormal com incertezas estruturadas, $dc_j,\ j=1,2,\ldots,N$ são então escalonadas pelos escalares $\eta_j,\ j=1,2,\ldots,N$ maximizando-se o volume do hiper retângulo que delimita as incertezas, calculado por meio do produtório, até um limite onde todas as respostas ao impulso do modelo, agregadas no conjunto $\left\{ \tilde{h} \left(t, \overset{\sim}{\eta}_h \right) \right\}$, ainda estão contidas no conjunto de respostas ao impulso do processo $\{h\left(t, \eta_h \right)\}$.

As variáveis do problema de otimização (2.19) são os escalares η_j , $j=1,2,\ldots,N$. Para o critério maximizado, estas variáveis representam o escalonamento de maior volume nos lados do hiper retângulo das incertezas determinado em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) tal que qualquer resposta ao impulso do modelo esteja contida no conjunto $\{h(t,\eta_h)\}$. Com esta metodologia, o modelo ortonormal do processo é dado por (2.18). Da mesma forma que no problema de otimização (2.17), quaisquer valores iniciais positivos para dc_j , $j=1,2,\ldots,N$, poderiam ser utilizados no problema de otimização (2.19), pois a solução numérica forneceria o escalonamento necessário nos lados do hiper retângulo de forma a atender à especificação.

2.4.4 Exemplo: Estimação dos Modelos Ortonormais de um Sistema Dinâmico com Um Modo Próprio Amortecido e Incerto

Seja o sistema dinâmico

$$y(t,\eta) = G(q^{-1},\eta) u(t) = q^{-1} \frac{1.50 + 1.00q^{-1}}{1 - \eta 0.75q^{-1}} u(t),$$
(2.20)

onde $\eta \in [0.75, 1.00]$ é um parâmetro incerto. Um conjunto de respostas ao impulso $\{h\left(t,\eta_h\right)\}$ pode ser calculado simulando-se o processo (2.20) para diversos valores factíveis de η . As respostas ao impulso do conjunto obtido são sobreamortecidas. Sendo assim, um conjunto de modelos de Laguerre com N=8 funções ortonormais pode ser calculado para representar o conjunto $\{h\left(t,\eta_h\right)\}$.

Se a resposta ao impulso central e o critério (2.6) são utilizados para determinar o pólo ótimo da base de Laguerre, obtém-se p=0.43. Utilizando-se as equações (2.13), os valores centrais e a máxima incerteza dos coeficientes do desenvolvimento ortonormal deste processo incerto são

dados por

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 2.4302 \times 10^{0} \\ 1.8070 \times 10^{0} \\ 1.5845 \times 10^{-1} \\ 2.6136 \times 10^{-1} \\ 1.0455 \times 10^{-2} \\ 4.3334 \times 10^{-2} \\ 6.0455 \times 10^{-4} \\ 7.6539 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad dc = \begin{bmatrix} 1.4168 \times 10^{-1} \\ 4.9400 \times 10^{-1} \\ 4.6129 \times 10^{-1} \\ 2.3219 \times 10^{-1} \\ 1.3630 \times 10^{-1} \\ 6.3113 \times 10^{-2} \\ 3.3679 \times 10^{-2} \\ 1.5303 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.2 pode-se observar o conjunto de respostas ao impulso do processo calculado fazendo-se $\eta=0.75+j\times0.01,\,j=0,1,\ldots,26.$ Mostra-se também na mesma figura os limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas. É possível notar que os limites calculados a partir do modelo sobrestimam as respostas do processo para $t\leq15s.$ Por outro lado, mostra-se na Figura 2.3 que o limite superior calculado utilizando-se o modelo não contém todas as respostas do processo para $t\geq15s.$

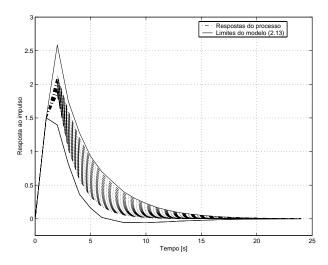


Figura 2.2: Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas.

Utilizando-se o mesmo conjunto $\{h\left(t,\eta_{h}\right)\}$ e $N\,=\,8$ funções de Laguerre, a solução do

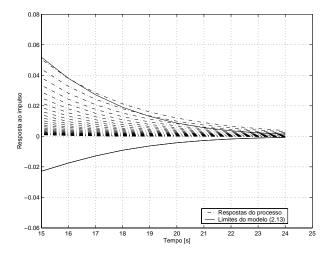


Figura 2.3: Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas para $15s \le t \le 25s$.

problema de otimização (2.17) é dada por

$$\eta^* = \begin{bmatrix} 1.0429 \times 10^0 \\ 1.1529 \times 10^0 \\ 1.1671 \times 10^0 \\ 1.3102 \times 10^0 \\ 1.6227 \times 10^0 \\ 3.2737 \times 10^{-2} \\ 3.1005 \times 10^0 \\ 4.4029 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.4 mostra-se os limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se as abordagens (2.13) e (2.17). Note que a sobrestimação proposta neste trabalho não aumenta demasiadamente o conjunto de respostas do modelo relativamente à abordagem proposta em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000). Pode-se notar na Figura 2.5 que o conjunto de respostas ao impulso calculado utilizando-se a abordagem proposta neste trabalho contém todo o conjunto $\{h\left(t,\eta_{h}\right)\}$, e desta forma representa-o mais adequadamente.

Na Figura 2.6 mostra-se algumas respostas possíveis do processo incerto a uma entrada arbitrária e os limites estimados com o modelo ortonormal sobrestimado. Da mesma forma que na Figura 2.2, é possível observar que os limites calculados utilizando-se o modelo se afastam das respostas do processo em determinados instantes. Isto ocorre porque as respostas do modelo foram calculadas para diversos valores possíveis dos coeficientes $c\left(\eta\right) \in [c_{\min}, c_{\max}]$. Algumas das evoluções calculadas não são factíveis na prática.

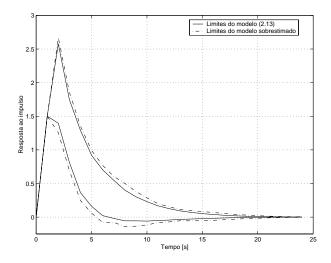


Figura 2.4: Comparação entre os limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se as abordagens (2.13) e (2.17).

Na Figura 2.7 mostra-se as respostas ao impulso do processo e os limites de um modelo ortonormal sobrestimado obtido resolvendo-se o problema de otimização (2.17) utilizando-se como solução inicial o vetor

$$dc = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-1} \\ 5 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nota-se que o modelo ortonormal obtido atende à especificação, pois todas as respostas ao impulso do processo estão contidas nos limites calculados. A solução do problema de otimização (2.17) para este caso é dada por

$$\eta^* = \begin{bmatrix} 5.0000 \times 10^{-2} \\ 2.3170 \times 10^0 \\ 5.0000 \times 10^{-2} \\ 1.1790 \times 10^0 \\ 5.0000 \times 10^{-2} \\ 3.6109 \times 10^{-1} \\ 5.0000 \times 10^{-2} \\ 1.8900 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

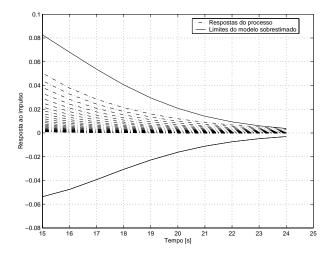


Figura 2.5: Respostas ao impulso do processo e limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se o modelo ortonormal sobrestimado através da abordagem (2.17) para $15s \le t \le 25s$.

Tendo-se em vista que o problema de otimização (2.17) é não-linear, soluções iniciais diferentes podem conduzir a soluções ótimas diferentes. Desta forma, pode ser difícil obter-se numericamente o mínimo global deste problema de otimização. Observando-se as Figuras 2.4 e 2.7, nota-se que o modelo obtido escalonando-se os lados do hiper retângulo sugeridos em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) não sobrestima demasiadamente o conjunto de respostas ao impulso do processo. Observando-se ainda o vetor η^* solução do problema de otimização correspondente, nota-se que apenas um pequeno escalonamento é necessário para atender à especificação. Sendo assim, como o modelo sugerido em (Oliveira, 1997; Oliveira et al., 2000) está muito próximo de atender à especificação, os lados do hiper retângulo sugeridos serão utilizados no presente trabalho como soluções iniciais para o problema de especificar um modelo ortonormal que contenha todas as respostas ao impulso do processo.

Utilizando-se o mesmo conjunto $\{h\left(t,\eta_{h}\right)\}$ e N=8 funções de Laguerre, a solução do problema de otimização (2.19) é dada por

$$\eta^* = \begin{bmatrix} 7.7136 \times 10^{-1} \\ 3.5058 \times 10^{-2} \\ 8.2077 \times 10^{-2} \\ 5.5449 \times 10^{-1} \\ 5.0729 \times 10^{-1} \\ 3.4865 \times 10^{-1} \\ 1.9047 \times 10^{-1} \\ 4.1792 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

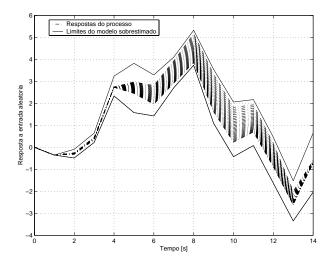


Figura 2.6: Respostas do processo a uma entrada arbitrária e limites calculados utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas sobrestimado.

Na Figura 2.8 mostra-se os limites da resposta ao impulso do processo e os limites calculados utilizando-se a abordagem (2.19). Note que o modelo subestimado proposto neste trabalho garante que as respostas ao impulso calculadas estão contidas no conjunto $\{h(t, \eta_h)\}$.

2.5 Modelagem de Processos Multivariáveis Incertos

O procedimento discutido na Seção 2.4 pode ser estendido para a modelagem de processos multivariáveis incertos na forma

$$y_{1}(t, \eta_{1}) = G_{11}(q^{-1}, \eta_{11}) u_{1}(t) + \dots + G_{1n}(q^{-1}, \eta_{1n}) u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t, \eta_{m}) = G_{m1}(q^{-1}, \eta_{m1}) u_{1}(t) + \dots + G_{mn}(q^{-1}, \eta_{mn}) u_{n}(t).$$

Assume-se que estão disponíveis os conjuntos de respostas ao impulso

$$\{h_{ij}(t,\eta_{h,ij})\} = \left\{ \bar{h}_{ij}(t) + \eta_{h,ij}dh_{ij}(t) : -1 \le \eta_{h,ij} \le 1 \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, t_h,$$
$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Cada conjunto $\{h_{ij}(t,\eta_{h,ij})\}$, medido entre a j-ésima entrada e a i-ésima saída, é utilizado para determinar um desenvolvimento ortonormal com incertezas estruturadas para a dinâmica correspondente $G_{ij}(q^{-1},\eta_{ij})$. Os conjuntos de respostas ao impulso dos modelos podem ser sobre ou subestimados, caso o objetivo do procedimento de modelagem seja projetar um controlador robusto ou assegurar que todas as respostas calculadas com o modelo são factíveis,

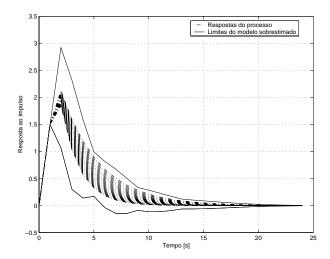


Figura 2.7: Respostas do processo a uma entrada arbitrária e limites calculados utilizando-se o modelo ortonormal com incertezas estruturadas sobrestimado, para um dc qualquer.

respectivamente. Se todas as dinâmicas são lineares, estáveis e causais, o modelo do processo pode ser escrito como

$$y_{1}(t, \eta_{1}) = \sum_{k=1}^{N} c_{11k}(\eta_{11k}) \Phi_{11k}(q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{1nk}(\eta_{1nk}) \Phi_{1nk}(q^{-1}) u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t, \eta_{m}) = \sum_{k=1}^{N} c_{m1k}(\eta_{m1k}) \Phi_{m1k}(q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{mnk}(\eta_{mnk}) \Phi_{mnk}(q^{-1}) u_{n}(t),$$

com

$$c_{ijk}(\eta_{ijk}) = \bar{c}_{ijk} + \eta_{ijk} dc_{ijk}, \quad -1 \le \eta_{ijk} \le 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Cada base Φ_{ij} (q^{-1}) , $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ pode ser desenvolvida em termos de um conjunto de pólos que descreva as características de amortecimento entre a j-ésima entrada e a i-ésima saída. Utiliza-se a mesma quantidade N de funções em cada desenvolvimento ortonormal para facilitar a compactação do modelo, que pode ser reescrito como

$$y_{1}(t, \eta_{1}) = c_{11}^{T}(\eta_{11}) l_{11}(t) + \dots + c_{1n}^{T}(\eta_{1n}) l_{1n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t, \eta_{m}) = c_{m1}^{T}(\eta_{m1}) l_{m1}(t) + \dots + c_{mn}^{T}(\eta_{mn}) l_{mn}(t),$$

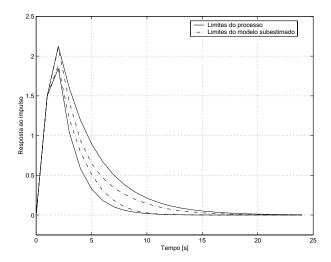


Figura 2.8: Limites da resposta ao impulso do processo e limites calculados utilizando-se a abordagem (2.19).

sendo

$$l_{ij}(t+1) = A_{ij}l_{ij}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{ij}u_{j}(t),$$

$$c_{ij}^{T}(\eta_{ij}) = \begin{bmatrix} c_{ij1}(\eta_{ij1}) & \cdots & c_{ijN}(\eta_{ijN}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

O termo $1/\sqrt{mn}$ assegura a normalidade da base (Ninness et al., 1995). Os pares (A_{ij},b_{ij}) , $i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$ são funções dos pólos utilizados para o desenvolvimento ortonormal de cada dinâmica.

O modelo pode ser compactado em forma matricial escrevendo-se

$$\begin{bmatrix} l_{11}(t+1) \\ \vdots \\ l_{1n}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11}(t) \\ \vdots \\ l_{1n}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ \vdots \\ u_{n}(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} l_{m1}(t+1) \\ \vdots \\ l_{mn}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{m1}(t) \\ \vdots \\ l_{mn}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_{m1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ \vdots \\ u_{n}(t) \end{bmatrix},$$

$$y_{1}\left(t,\eta_{1}\right) = \begin{bmatrix} c_{11}^{T}\left(\eta_{11}\right) & \cdots & c_{1n}^{T}\left(\eta_{1n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11}\left(t\right) \\ \vdots \\ l_{1n}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$y_{m}\left(t,\eta_{m}\right)=\left[\begin{array}{ccc}c_{m1}^{T}\left(\eta_{m1}\right)&\cdots&c_{mn}^{T}\left(\eta_{mn}\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}l_{m1}\left(t\right)\\\vdots\\l_{mn}\left(t\right)\end{array}\right],$$

ou, simplificadamente,

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{1}u(t),$$

$$\vdots$$

$$l_{m}(t+1) = A_{m}l_{m}(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}b_{m}u(t),$$

$$y_{1}(t,\eta_{1}) = c_{1}^{T}(\eta_{1})l_{1}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t,\eta_{m}) = c_{m}^{T}(\eta_{m})l_{m}(t),$$

com

$$c_{i}(\eta_{i}) = \overline{c}_{i} + \eta_{i}dc_{i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\overline{c}_{i} = \begin{bmatrix} \overline{c}_{i1} \\ \vdots \\ \overline{c}_{in} \end{bmatrix}, \quad dc_{i} = \begin{bmatrix} dc_{i1} \\ \vdots \\ dc_{in} \end{bmatrix}.$$

As equações de estado e de saída anteriores podem ser agregadas matricialmente escrevendose

$$\begin{bmatrix} l_1(t+1) \\ l_m(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_m(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_m \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t,\eta_1) \\ \vdots \\ y_m(t,\eta_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T(\eta_1) & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & c_m^T(\eta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_m(t) \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{mn}}bu(t),$$

$$y(t,\eta) = c^{T}(\eta)l(t),$$

sendo que

$$\bar{\boldsymbol{c}}^T = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}}_1^T & & \mathbf{0} \\ & & \\ \mathbf{0} & & \bar{\boldsymbol{c}}_m^T \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{c}_1^T & & \mathbf{0} \\ & & \\ \mathbf{0} & & d\boldsymbol{c}_m^T \end{bmatrix},$$

com

$$\dim [c^{T}(\eta)] = m \times mnN,$$

$$\dim [l(t)] = mnN \times 1,$$

$$\dim [A] = mnN \times mnN,$$

$$\dim [b] = mnN \times n.$$

Se a mesma base ortonormal for utilizada para representar todos os canais de entrada, o modelo do processo pode ser escrito como

$$y_{1}(t, \eta_{1}) = \sum_{k=1}^{N} c_{11k}(\eta_{11k}) \Phi_{1k}(q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{1nk}(\eta_{1nk}) \Phi_{nk}(q^{-1}) u_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t, \eta_{m}) = \sum_{k=1}^{N} c_{m1k}(\eta_{m1k}) \Phi_{1k}(q^{-1}) u_{1}(t) + \dots + \sum_{k=1}^{N} c_{mnk}(\eta_{mnk}) \Phi_{nk}(q^{-1}) u_{n}(t).$$

Cada base $\Phi_j(q^{-1})$, $j=1,2,\ldots,n$ pode ser expandida em termos de um conjunto de pólos que descrevam as características de amortecimento entre a j-ésima entrada e todas as saídas. Utiliza-se a mesma quantidade N de funções ortonormais em cada base para facilitar a compactação do modelo, cujas equações de saída podem ser reescritas como

$$y_{1}(t, \eta_{1}) = c_{11}^{T}(\eta_{11}) l_{1}(t) + \dots + c_{1n}^{T}(\eta_{1n}) l_{n}(t),$$

$$\vdots$$

$$y_{m}(t, \eta_{m}) = c_{m1}^{T}(\eta_{m1}) l_{1}(t) + \dots + c_{mn}^{T}(\eta_{mn}) l_{n}(t),$$

sendo que

$$l_{j}(t+1) = A_{j}l_{j}(t) + \frac{1}{\sqrt{n}}b_{j}u_{j}(t),$$

$$c_{ijk}(\eta_{ijk}) = \bar{c}_{ijk} + \eta_{ijk}dc_{ijk}, \quad -1 \le \eta_{ijk} \le 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Os pares (A_j,b_j) , $j=1,2,\ldots,n$ são funções dos pólos utilizados para representar cada canal de entrada. O modelo pode ser compactado em forma matricial escrevendo-se

$$\begin{bmatrix} l_1(t+1) \\ \vdots \\ l_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t,\eta_1) \\ \vdots \\ y_m(t,\eta_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^T(\eta_{11}) & \cdots & c_{1n}^T(\eta_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}^T(\eta_{m1}) & \cdots & c_{mn}^T(\eta_{mn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{n}}bu(t),$$

$$y(t,\eta) = c^{T}(\eta)l(t),$$

sendo que

$$\vec{c}^T = \begin{bmatrix} \vec{c}_{11}^T & \cdots & \vec{c}_{1n}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{c}_{m1}^T & \cdots & \vec{c}_{mn}^T \end{bmatrix}, \quad dc^T = \begin{bmatrix} dc_{11}^T & \cdots & dc_{1n}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dc_{m1}^T & \cdots & dc_{mn}^T \end{bmatrix},$$

com

$$\dim \left[c^{T}\left(\eta\right)\right] = m \times nN,$$

$$\dim \left[l\left(t\right)\right] = nN \times 1,$$

$$\dim \left[A\right] = nN \times nN,$$

$$\dim \left[b\right] = nN \times n.$$

A ordem do modelo multivariável com representação comum dos canais de entrada é inferior à ordem do modelo multivariável com representação independente dos canais de entrada e saída. Apesar disso, a mesma quantidade de coeficientes é estimada. A representação comum deve ser utilizada apenas quando os ganhos, constantes de tempo e atrasos de transporte dos canais de entrada forem semelhantes.

2.5.1 Exemplo: Estimação dos Modelos Ortonormais de um Ambiente com Sistema de Climatização Sujeito a Infiltrações de Ar

Um ambiente com sistema de climatização sujeito a infiltrações de ar é descrito no Apêndice A. O modelo ortonormal com incertezas estruturadas utilizado para representar o ambiente com sistema de climatização é dado por

$$\begin{bmatrix} l_{1}\left(t+1\right) \\ l_{2}\left(t+1\right) \\ l_{3}\left(t+1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & A_{2} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & A_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \\ l_{3}\left(t\right) \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} b_{1} & \mathbf{0}_{N\times 1} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \mathbf{0}_{N\times 1} & b_{2} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \mathbf{0}_{N\times 1} & \mathbf{0}_{N\times 1} & b_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}\left(t\right) \\ u_{2}\left(t\right) \\ u_{3}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

$$y\left(t,\eta\right) = \begin{bmatrix} c_{1}^{T}\left(\eta_{1}\right) & c_{2}^{T}\left(\eta_{2}\right) & c_{3}^{T}\left(\eta_{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \\ l_{3}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

ou simplesmente

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}bu(t),$$

$$y(t,\eta) = c^{T}(\eta)l(t),$$

sendo $y\left(t,\eta\right)$ a temperatura do ar ambiente, $u_1\left(t\right)$ a temperatura do ar de insuflamento, uma entrada manipulada, $u_2\left(t\right)$ a taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado, uma entrada observada, e $u_3\left(t\right)$ a temperatura do ar externo, uma entrada medida. Embora a temperatura do ar externo possa ser medida, não é possível quantificar o fluxo de ar que entra e que sai do ambiente climatizado através de vazamentos e infiltrações. Esta característica torna a temperatura do ar ambiente incerta ao longo do horizonte futuro do problema de controle preditivo.

Os modelos ortonormais dos canais de entrada e saída serão estimados utilizando-se conjuntos de respostas ao impulso. A aplicação de impulsos na entrada temperatura do ar externo não é factível. Apesar disso, assume-se que isto é possível para ilustrar o método proposto neste trabalho. Devido às características de amortecimento da resposta ao impulso central de cada conjunto, as bases de Laguerre serão utilizadas para o desenvolvimento das dinâmicas do processo HVAC incerto. Cada base será composta por três funções ortonormais. Utilizando-se a resposta ao impulso central de cada conjunto e o critério (2.6), determina-se os pólos $p_1=0.54$, $p_2=0.54$ e $p_3=0.53$ para o desenvolvimento das respectivas bases de Laguerre. Os valores centrais e as máximas variações dos coeficientes dos modelos ortonormais com incertezas estruturadas,

determinados a partir das equações (2.13), são dados por

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 8.2247 \times 10^{-1} \\ -2.0334 \times 10^{-4} \\ 1.9552 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, dc_1 = \begin{bmatrix} 3.7387 \times 10^{-2} \\ 7.1205 \times 10^{-2} \\ 3.8917 \times 10^{-3} \end{bmatrix},
\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 3.2735 \times 10^{-1} \\ -8.0930 \times 10^{-5} \\ 7.7819 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, dc_2 = \begin{bmatrix} 1.4880 \times 10^{-2} \\ 2.8340 \times 10^{-2} \\ 1.5490 \times 10^{-3} \end{bmatrix},
\bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 1.2564 \times 10^{-1} \\ -1.7526 \times 10^{-3} \\ 2.2569 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, dc_3 = \begin{bmatrix} 1.1706 \times 10^{-1} \\ -2.5811 \times 10^{-3} \\ 1.4590 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

A Figura 2.9 apresenta as respostas do processo e os limites calculados utilizando-se o modelo estimado para entradas impulsivas na temperatura do ar de insuflamento (Figura 2.9a), na taxa de geração de calor sensível (Figura 2.9b), na temperatura do ar externo (Figura 2.9c) e para entradas arbitrárias (Figura 2.9d), respectivamente.

Utilizando-se os mesmos conjuntos $\{h_i(t,\eta_{h,i})\}$, i=1,2,3 e N=3 funções de Laguerre, as soluções do problema de otimização (2.17) são dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 6.2375 \times 10^{-1} \\ 1.9683 \times 10^0 \\ 8.1558 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 6.2382 \times 10^{-1} \\ 1.9682 \times 10^0 \\ 8.1563 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \eta_3^* = \begin{bmatrix} 1.0040 \times 10^0 \\ 1.0040 \times 10^0 \\ 1.0040 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.10 mostra-se os limites das respostas do processo e os limites calculados utilizando-se a abordagem (2.17). Nota-se que as sobrestimações dos conjuntos de respostas do processo não são excessivas. Isto implica que a metodologia proposta neste trabalho é adequada para controle robusto.

Utilizando-se os mesmos conjuntos $\{h_i(t,\eta_{h,i})\}$, i=1,2,3 e N=3 funções de Laguerre, as soluções do problema de otimização (2.19) são dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 1.1734 \times 10^0 \\ 3.6335 \times 10^{-1} \\ 8.7851 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 1.1734 \times 10^0 \\ 3.6336 \times 10^{-1} \\ 8.7850 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \eta_3^* = \begin{bmatrix} 4.4591 \times 10^{-1} \\ 1.3265 \times 10^0 \\ 1.1819 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.11 mostra-se os limites das respostas do processo e os limites calculados utilizando-se a abordagem (2.19). Note que o modelo subestimado proposto neste trabalho garante que as respostas ao impulso calculadas estão contidas nos conjuntos $\{h_i\left(t,\eta_{h,i}\right)\}$, i=1,2,3.

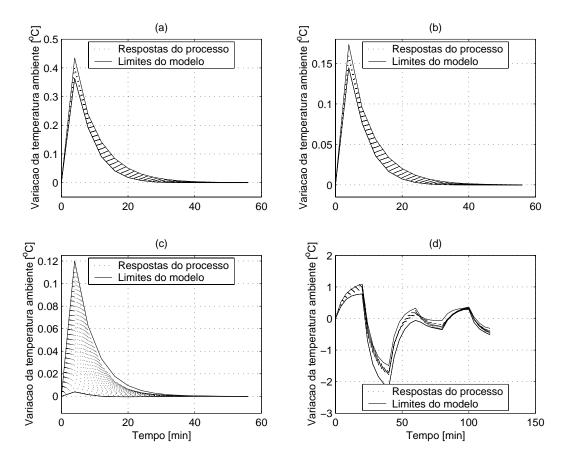


Figura 2.9: Respostas do processo e limites da resposta ao impulso calculados utilizando-se o modelo para entradas impulsivas (Figura 2.9a, b e c) e aleatórias (Figura 2.9d).

2.6 Resumo

Neste capítulo, abordou-se a modelagem de sistemas dinâmicos utilizando-se séries de funções ortonormais. Sistemas mono e multivariáveis, determinísticos e incertos foram considerados. Diversos exemplos de simulação ilustraram a habilidade das representações ortonormais na modelagem de sistemas dinâmicos com pouco conhecimento *a priori* das suas características de amortecimento. As contribuições deste capítulo são uma nova técnica de modelagem visando assegurar que o modelo ortonormal represente todos os comportamentos possíveis do processo, uma técnica de modelagem com vistas a assegurar que todos os comportamentos calculados com o modelo são factíveis e o procedimento de modelagem para processos multivariáveis incertos utilizando-se séries de funções ortonormais.

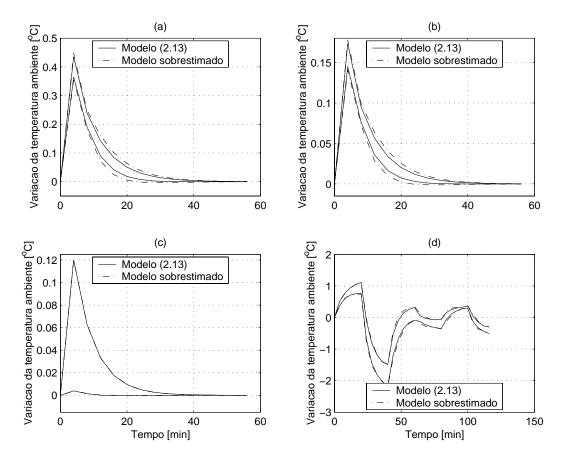


Figura 2.10: Comparação entre os limites das respostas do processo e os limites calculados utilizando-se a abordagem (2.17).

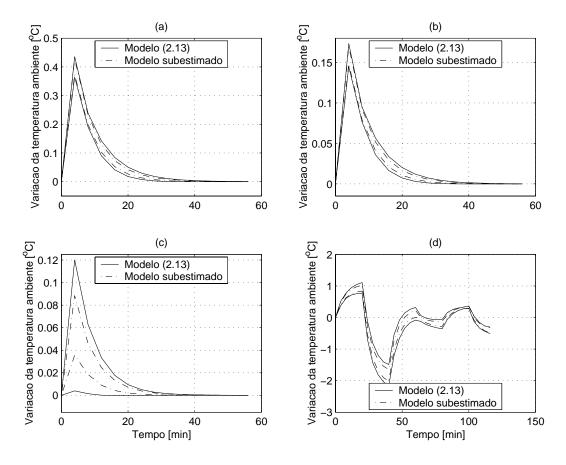


Figura 2.11: Comparação entre os limites das respostas do processo e os limites calculados utilizando-se a abordagem (2.19).

Capítulo 3

Modelagem de Sistemas Híbridos

Neste capítulo, apresenta-se um novo esquema de modelagem para sistemas híbridos denominado MLDSFO (Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais). Apresenta-se também uma metodologia para estimar os coeficientes de um modelo MLDSFO. No modelo proposto, as dinâmicas do sistema são representadas utilizando-se séries de funções ortonormais (SFO). As proposições lógicas que descrevem o intertravamento da planta são integradas às especificações operacionais do processo por meio de desigualdades lineares equivalentes, como descrito no Apêndice B. Estas desigualdades são integradas às restrições do processo híbrido para obter-se um modelo não-hierárquico. A satisfação das restrições mantém o sistema sob condições de entrada e saída pré-determinadas e verifica as condições lógicas da planta.

3.1 Modelagem de Sistemas Híbridos Determinísticos: Integração de Restrições, Lógica, e Dinâmica Baseada em Séries de Funções Ortonormais

O esquema MLDSFO (Moreira et al., 2004) é proposto para descrever de forma não-hierárquica sistemas híbridos cujo intertravamento pode ser modelado por meio de desigualdades lineares, como exposto em maiores detalhes no Apêndice B, e cujas dinâmicas podem ser representadas utilizando-se séries de funções ortonormais, conforme descrito no Capítulo 2. Como motivação, considere, por exemplo, o processo monovariável e determinístico

$$y(t+1) = G_1(q^{-1})u(t)$$
 se $y(t) \ge 0$,
 $y(t+1) = G_2(q^{-1})u(t)$ se $y(t) < 0$. (3.1)

A saída do sistema (3.1) é determinada pela dinâmica $G_1\left(q^{-1}
ight)$, se no instante atual a

condição $y(t) \ge 0$ for satisfeita, sendo determinada pela dinâmica $G_2(q^{-1})$, caso contrário. As equações dinâmicas e os testes lógicos baseados no operador SE permitem classificar o sistema (3.1) como híbrido.

Dinâmicas $G_1(q^{-1})$ e $G_2(q^{-1})$ lineares, estáveis e causais podem ser representadas utilizandose séries de funções ortonormais. O sistema (3.1) pode então ser reescrito como

$$l(t+1) = A_1 l(t) + b_1 u(t),$$

$$y(t+1) = c_1^T l(t+1) \quad \text{se} \quad y(t) \ge 0,$$
(3.2)

$$l(t+1) = A_2 l(t) + b_2 u(t),$$

$$y(t+1) = c_2^T l(t+1) \quad \text{se} \quad y(t) < 0.$$
(3.3)

O teste lógico baseado no operador SE pode ser agregado ao modelo dinâmico do processo definindo-se a variável binária

$$[y(t) \ge 0] \leftrightarrow [\delta(t) = 1]. \tag{3.4}$$

A proposição (3.4) utiliza o conectivo booleano SE E SOMENTE SE para estabelecer que a variável $\delta\left(t\right)$ deve assumir valor 1 (um) sempre que $y\left(t\right)\geq0$, e que deve assumir valor 0 (zero) em caso contrário. Esta proposição é equivalente às designaldades lineares

$$y(t) \ge y_{\min} [1 - \delta(t)],$$

$$y(t) \le -\epsilon + (y_{\max} + \epsilon) \delta(t),$$
(3.5)

onde ϵ é uma pequena tolerância, e y_{\min} e y_{\max} são limitantes inferior e superior para a variável contínua y(t) definidos de acordo com as características do processo. Note que:

$$1)\ \ \text{se}\ \ \delta\left(t\right)=0\ \ \text{então}\ \ y_{\min}\leq y\left(t\right)\leq -\epsilon;$$

$$2)\ \ \text{se}\ \ \delta \left(t\right) =1\ \ \text{então}\ \ 0\leq y\left(t\right) \leq y_{\max }.$$

Sendo assim, a proposição (3.4) é equivalente às designaldades em (3.5), que podem ser consideradas restrições no problema de controle. O algoritmo de otimização calculará *on-line* o valor de $\delta(t)$ correspondente ao valor da saída medido no instante atual. Utilizando-se a variável lógica, o sistema (3.2)-(3.3) pode ser reescrito como

$$\begin{split} l\left(t+1\right) &= A_1 l\left(t\right) + b_1 u\left(t\right), \\ y\left(t+1\right) &= c_1^T l\left(t+1\right) \quad \text{se} \quad \delta\left(t\right) = 1, \end{split}$$

$$\begin{split} l\left(t+1\right) &= A_2 l\left(t\right) + b_2 u\left(t\right), \\ y\left(t+1\right) &= c_2^T l\left(t+1\right) \quad \text{se} \quad \delta\left(t\right) = 0, \end{split}$$

ou de forma compacta

$$l(t+1) = [A_1 l(t) + b_1 u(t)] \delta(t) + [A_2 l(t) + b_2 u(t)] [1 - \delta(t)],$$

$$y(t+1) = c_1^T l(t+1) \delta(t) + c_2^T l(t+1) [1 - \delta(t)].$$
(3.6)

O teste lógico baseado no operador SE foi integrado ao modelo ortonormal do processo híbrido por meio da variável binária $\delta(t)$. As equações de estado e de saída em (3.6) são um misto de lógica e dinâmica, e podem ser reescritas como

$$l(t+1) = A_2 l(t) + b_2 u(t) + [(A_1 - A_2) l(t) + (b_1 - b_2) u(t)] \delta(t),$$

$$y(t+1) = c_2^T l(t+1) + (c_1^T - c_2^T) l(t+1) \delta(t).$$
(3.7)

Os produtos de variáveis binárias e contínuas podem ser eliminados das equações em (3.7) definindo-se o vetor de variáveis auxiliares

$$z\left(t\right) = \left[\begin{array}{c} z_{1}\left(t\right) \\ z_{2}\left(t\right) \end{array}\right],$$

sendo

$$z_{1}(t) = l(t+1)\delta(t),$$

$$z_{2}(t) = [(A_{1} - A_{2})l(t) + (b_{1} - b_{2})u(t)]\delta(t).$$
(3.8)

Note que:

1) se
$$\delta(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \mathbf{0}_{N \times 1}, \\ z_2(t) = \mathbf{0}_{N \times 1}; \end{cases}$$
2) se $\delta(t) = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = l(t+1), \\ z_2(t) = (A_1 - A_2)l(t) + (b_1 - b_2)u(t). \end{cases}$

Utilizando-se as variáveis auxiliares em (3.8), as equações de estado e de saída em (3.7) podem ser reescritas como

$$l(t+1) = A_2 l(t) + b_2 u(t) + z_2(t),$$

$$y(t+1) = c_2^T l(t+1) + (c_1^T - c_2^T) z_1(t).$$
(3.9)

Os produtos de variáveis contínuas e inteiras em (3.8) são representados numericamente a

partir das desigualdades

$$z_{1}(t) \leq z_{1,\max}\delta(t),$$

$$z_{1}(t) \geq z_{1,\min}\delta(t),$$

$$z_{1}(t) \leq l(t+1) - z_{1,\min}[1-\delta(t)],$$

$$z_{1}(t) \geq l(t+1) - z_{1,\max}[1-\delta(t)],$$
(3.10)

$$z_{2}(t) \leq z_{2,\max}\delta(t),$$

$$z_{2}(t) \geq z_{2,\min}\delta(t),$$

$$z_{2}(t) \leq (A_{1} - A_{2}) l(t) + (b_{1} - b_{2}) u(t) - z_{2,\min} [1 - \delta(t)],$$

$$z_{2}(t) \geq (A_{1} - A_{2}) l(t) + (b_{1} - b_{2}) u(t) - z_{2,\max} [1 - \delta(t)].$$
(3.11)

As desigualdades (3.10) e (3.11) são incorporadas como restrições no problema de controle preditivo. Os limitantes das variáveis auxiliares ($z_{1,\min}$, $z_{2,\min}$, $z_{1,\max}$ e $z_{2,\max}$) podem ser calculados por meio de

$$\begin{split} z_{1,\min} &= \min \left[l \left(t \right) \right], \\ z_{1,\max} &= \max \left[l \left(t \right) \right], \\ z_{2,\min} &= \min \left[\left(A_1 - A_2 \right) l \left(t \right) + \left(b_1 - b_2 \right) u \left(t \right) \right], \\ z_{2,\max} &= \max \left[\left(A_1 - A_2 \right) l \left(t \right) + \left(b_1 - b_2 \right) u \left(t \right) \right], \end{split}$$

ou podem ser escolhidos de forma que as variáveis auxiliares $z_1(t)$ e $z_2(t)$ seguramente estejam contidas nos intervalos $[z_{1,\min}; z_{1,\max}]$ e $[z_{2,\min}; z_{2,\max}]$, respectivamente.

As equações de estado e de saída (3.9), e as desigualdades (3.5), (3.10) e (3.11), são um caso particular do esquema de modelagem denominado MLDSFO (Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais), dado por

$$\begin{split} &l\left(t+1\right) = H_{l}l\left(t\right) + H_{u}u\left(t\right) + H_{\delta}\delta\left(t\right) + H_{z}z\left(t\right), \\ &y\left(t+1\right) = c_{l}^{T}l\left(t+1\right) + c_{u}^{T}u\left(t\right) + c_{\delta}^{T}\delta\left(t\right) + c_{z}^{T}z\left(t\right), \\ &\text{sujeito a} \quad M_{l}l\left(t\right) + M_{u}u\left(t\right) + M_{\delta}\delta\left(t\right) + M_{z}z\left(t\right) + M_{y}y\left(t\right) \leq M. \end{split} \tag{3.12}$$

No modelo (3.12)-(3.13), $l\left(t\right)$ é o vetor de estados dos desenvolvimentos ortonormais, $u\left(t\right)$ é o vetor de entradas, $\delta\left(t\right)$ é um vetor de variáveis binárias, $z\left(t\right)$ é um vetor de variáveis auxiliares e $y\left(t\right)$ é o vetor de saídas do sistema. As matrizes $H_{l},\ H_{u},\ H_{\delta},\ H_{z},\ c_{l},\ c_{u},\ c_{\delta},\ c_{z},\ M_{l},\ M_{u},\ M_{\delta},\ M_{z},\ M_{y}$ e M devem ser adequadamente definidas em função dos desenvolvimentos em séries ortonormais do processo híbrido modelado, das variáveis binárias e auxiliares definidas,

das restrições equivalentes às proposições lógicas e das exigências operacionais do processo. As equações de estado e de saída em (3.12) são funções afins do vetor de entradas, do vetor de estados e dos vetores de variáveis binárias e auxiliares. Por este motivo, o cálculo das previsões do comportamento futuro do processo MLDSFO envolve apenas álgebra matricial. De forma análoga, pode-se também obter uma versão incremental do modelo anterior, dada por

$$\Delta l (t+1) = H_l \Delta l (t) + H_u \Delta u (t) + H_\delta \delta (t) + H_z \Delta z (t) ,$$

$$y (t+1) = y (t) + c_l^T \Delta l (t+1) + c_u^T \Delta u (t) + c_\delta^T \delta (t) + c_z^T \Delta z (t) ,$$
(3.14)
sujeito a $M_l \Delta l (t) + M_u \Delta u (t) + M_\delta \delta (t) + M_z \Delta z (t) + M_u y (t) \leq M,$
(3.15)

sendo $\Delta=1-q^{-1}$ e q^{-1} o operador atraso. Normalmente a abordagem incremental permite reduzir o erro de regime permanente no rastreio das referências (Lambert, 1987).

Uma vez que a recursividade entre as funções da base permite representar o desenvolvimento ortonormal no espaço de estados, o modelo MLDSFO (3.12)-(3.13) pode ser considerado um caso particular do esquema MLD (Bemporad e Morari, 1999). No entanto, os coeficientes dos desenvolvimentos ortonormais do modelo MLDSFO podem ser estimados utilizando-se conhecimento aproximado dos pólos dominantes e do atraso de transporte do processo. Muitas vezes um modelo teórico representado no espaço de estados não está disponível ou outras estruturas são mais adequadas para estimação e controle. Além disso, o comportamento dinâmico do processo pode não ser adequadamente descrito caso fenômenos físicos relevantes sejam desconsiderados no modelo teórico. Estes erros podem ser parcialmente compensados em esquemas de modelagem baseados em estimação.

3.1.1 Exemplo: Modelagem de um Processo Afim por Partes em sRegiões

Um processo afim por partes genérico é descrito como

$$\begin{split} y\left(t+1\right) &= G_1\left(q^{-1}\right)u\left(t\right) &\quad \text{se} \quad y\left(t\right) \in \Gamma_1, \\ y\left(t+1\right) &= G_2\left(q^{-1}\right)u\left(t\right) &\quad \text{se} \quad y\left(t\right) \in \Gamma_2, \\ &\vdots \\ y\left(t+1\right) &= G_s\left(q^{-1}\right)u\left(t\right) &\quad \text{se} \quad y\left(t\right) \in \Gamma_s. \end{split}$$

onde Γ_i , $i=1,2,\ldots,s$ são regiões poliedrais disjuntas, isto é, $\Gamma_j\cap\Gamma_m=\emptyset$, se $j\neq m$. Cada região poliedral pode ser descrita por um conjunto de desigualdades lineares na forma

$$D^{i}y(t) \leq D_{0}^{i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

sendo as matrizes D^i e os vetores D^i_0 , $i=1,2,\ldots,s$ adequadamente definidos de acordo com as partições do espaço de saídas factíveis.

Para integrar as regras lógicas ao modelo do processo, pode-se associar uma variável binária $\delta_i(t)$ a cada região poliedral factível Γ_i , isto é

$$[y(t) \in \Gamma_i] \leftrightarrow [\delta_i(t) = 1], \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

As proposições lógicas anteriores são equivalentes às restrições

$$D^{i}y(t) - D_{0}^{i} - Y[1 - \delta_{i}(t)] \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

sendo Y um vetor de componentes positivos adequadamente definidos. Apenas uma partição é ocupada pela saída do processo em cada instante de tempo. Isto implica que, se $\delta_j\left(t\right)=1$, então $\delta_m\left(t\right)=0$, $\forall m\neq j$.

Se as dinâmicas $G_i(q^{-1})$, $i=1,2,\ldots,s$ são lineares, estáveis e causais, o modelo do processo pode ser descrito compactamente como

$$l(t+1) = \sum_{i=1}^{s} [A_{i}l(t) + b_{i}u(t)] \delta_{i}(t),$$
$$y(t+1) = \sum_{i=1}^{s} c_{i}^{T}l(t+1) \delta_{i}(t).$$

A regra lógica que define as partições do espaço de saídas factíveis foi agregada às equações de estado e de saída do modelo. Para eliminar os produtos de variáveis contínuas e binárias, define-se as variáveis auxiliares

$$z_{i}(t) = [A_{i}l(t) + b_{i}u(t)] \delta_{i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$z_{i}(t) = c_{i-s}^{T}l(t+1) \delta_{i-s}(t), \quad i = s+1, s+2, \dots, 2s,$$

que incorporam ao modelo restrições semelhantes às desigualdades (3.10) e (3.11). Utilizando-se estas variáveis auxiliares, as equações de estado e de saída anteriores podem ser reescritas como

$$l(t+1) = \sum_{i=1}^{s} z_i(t),$$
$$y(t+1) = \sum_{i=s+1}^{2s} z_i(t).$$

Estas equações, juntamente com as desigualdades que implementam as variáveis auxiliares, enquadram-se no formato MLDSFO.

3.1.2 Exemplo: Modelagem de um Processo cuja Entrada Pertence a um Conjunto Finito

O modelo ortonormal de um sistema linear, estável e causal é dado por

$$l(t+1) = Al(t) + bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t).$$

Admitindo-se que $u(t) \in \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, a entrada do sistema pode ser representada adequadamente construindo-se uma base de escalares d_i , $i=1,2,\ldots,r$ tal que qualquer valor factível u_j , $j=1,2,\ldots,m$ possa ser escrito como uma combinação linear dos componentes desta base. Sendo assim

$$u(t) = d_1 \delta_1(t) + d_2 \delta_2(t) + \dots + d_r \delta_r(t),$$

onde $\delta_i(t) \in \{0,1\}$, $i=1,2,\ldots,r$. Escrevendo-se a entrada do sistema, a base de escalares e o vetor de variáveis binárias como

$$u(t) = D\delta(t),$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_r \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & \delta_2(t) & \cdots & \delta_r(t) \end{bmatrix}^T,$$

o modelo do processo será dado por

$$\begin{split} l\left(t+1\right) &= Al\left(t\right) + bu\left(t\right),\\ y\left(t\right) &= c^T l\left(t\right),\\ \text{sujeito a} \quad u\left(t\right) &\geq D\delta\left(t\right),\\ u\left(t\right) &\leq D\delta\left(t\right). \end{split}$$

Este modelo também se enquadra no formato MLDSFO.

3.1.3 Modelagem de Processos cujas Representações Ortonormais têm Dimensões Distintas

Os modelos baseados em séries de funções ortonormais podem ser utilizados para representar sistemas dinâmicos com precisão arbitrária, função do número de coeficientes do vetor c. Em geral, um modelo ortonormal representa um processo dinâmico satisfatoriamente quando os coeficientes do vetor c estimado convergem para zero. Se os pólos do desenvolvimento ortonormal

são adequadamente escolhidos, reduz-se o número de coeficientes necessários para representar o processo.

Assumindo-se um mesmo limitante para o erro de modelagem e escolhendo-se os pólos do desenvolvimento pelo critério (2.6), normalmente duas dinâmicas podem ser descritas utilizando-se quantidades diferentes de funções ortonormais. Em geral, o modelo de processos lentos (constantes de tempo maiores) utiliza um maior número de funções do que o modelo de processos rápidos (constantes de tempo menores). O modelo MLDSFO é simplificado quando os desenvolvimentos ortonormais das dinâmicas do processo utilizam a mesma quantidade de funções. Caso os desenvolvimentos ortonormais das dinâmicas do processo contenham quantidades diferentes de funções, por exemplo, $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_r$, e todas as séries de coeficientes convirjam, pode-se completar com zeros os vetores cujas dimensões são menores do que N_r . Neste caso, deve-se acrescentar funções ortonormais às bases $\Phi_i (q^{-1})$, $i=1,2,\ldots,N_r-1$ de forma que as dimensões dos pares (A_i,b_i) sejam coerentes com as dimensões dos vetores c_i , $i=1,2,\ldots,N_r-1$ correspondentes.

3.2 Identificação de Sistemas Híbridos

A metodologia MPC é baseada no modelo do processo. Obter um modelo a partir de dados de entrada e saída medidos na planta consiste na identificação do processo. A equação de estado do modelo MLDSFO (3.12) pode ser determinada *a priori* escolhendo-se os pólos do desenvolvimento ortonormal das dinâmicas do processo e os coeficientes da equação de saída podem ser estimados.

Um sistema MLDSFO é completamente bem posto quando as trajetórias no espaço de saídas factíveis, as variáveis binárias e as variáveis auxiliares do modelo são unicamente determinadas pela saída e pelo esforço de controle no instante atual (Bemporad e Morari, 1999). Se esta condição é verificada, o processo híbrido MLDSFO é equivalente a um sistema afim por partes (Heemels et al., 2001) tal como

$$\begin{split} &l\left(t+1\right) = A_{j}l\left(t\right) + b_{j}u\left(t\right),\\ &y\left(t+1\right) = c_{j}^{T}l\left(t+1\right) \quad \text{se} \quad D^{j}y\left(t\right) \leq D_{0}^{j}, \quad j=1,2,\ldots,s. \end{split}$$

Caso as dinâmicas possam ser identificadas separadamente, deve-se utilizar os procedimentos de modelagem descritos na Seção 2.2. Caso contrário, os coeficientes de um sistema MLDSFO afim por partes cuja partição do espaço de saídas factíveis é conhecida *a priori* podem ser estimados. Assume-se que os pares (A_j,b_j) , $j=1,2,\ldots,s$ são determinados previamente utilizando-se o conhecimento aproximado das características dinâmicas do sistema. Os dados de

entrada e saída medidos na planta, u(t) e y(t), $t=0,1,\ldots,t_{est}$ são então utilizados para a estimação dos vetores de coeficientes c_j , $j=1,2,\ldots,s$.

O procedimento de estimação consiste em, inicialmente, definir variáveis binárias para descrever a partição do espaço de saídas factíveis, isto é

$$\left[D^{j}y\left(t\right) \leq D_{0}^{j}\right] \leftrightarrow \left[\delta_{j}\left(t\right) = 1\right].$$

A seguir, calcula-se os vetores de estados dos desenvolvimento ortonormais de acordo com

$$l(t+1) = [A_j l(t) + b_j u(t)] \delta_j(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_{est}.$$

Por fim, os coeficientes dos desenvolvimentos ortonormais são estimados minimizando-se o erro quadrático médio entre a saída real e a saída do modelo, isto é

$$\min_{c_{1},c_{2},\dots,c_{s}} \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^{t_{est}} \left[\sum_{j=1}^{s} \left\| y(t) - c_{j}^{T} l(t) \right\|^{2} \delta_{j}(t-1) \right],$$
sujeito a $\left[\delta_{j}(t) = 1 \right] \leftrightarrow \left[D^{j} y(t) \leq D_{0}^{j} \right].$ (3.16)

A partição do espaço de saídas factíveis, os vetores de estados, as variáveis binárias e os dados de entrada e saída são conhecidos *a priori*. Sendo assim, a solução analítica do problema de minimização (3.16) é dada por

$$c_{j} = \left[\sum_{t=1}^{t_{est}} l(t) l^{T}(t) \delta_{j}(t-1) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{t_{est}} l(t) y(t) \delta_{j}(t-1) \right], \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

O estimador paramétrico caracterizado pelo problema de otimização (3.16) torna o esquema MLDSFO atrativo para aplicações onde não é possível obter modelos lineares representados no espaço de estados para descrever as dinâmicas do sistema híbrido. Um estimador foi proposto em (Bemporad, Roll e Ljung, 2001) para a identificação de sistemas PWARX (*PieceWise Auto Regressive eXogenous*), isto é, ARX por partes, não sendo aplicável à identificação de sistemas híbridos MLD ou MLDSFO.

3.2.1 Exemplo: Identificação de um Processo Híbrido com Modos Próprios Sobreamortecidos

Considere o sistema híbrido

$$y(t+1) = G_1(q^{-1})u(t) = \frac{1.25 + 0.65q^{-1}}{1 - 0.65q^{-1}}u(t) \quad \text{se} \quad y(t) \ge 0,$$
$$y(t+1) = G_2(q^{-1})u(t) = \frac{1.35 + 0.75q^{-1}}{1 - 0.75q^{-1}}u(t) \quad \text{se} \quad y(t) < 0.$$

Devido às características de amortecimento das dinâmicas $G_1\left(q^{-1}\right)$ e $G_2\left(q^{-1}\right)$, os coeficientes dos respectivos desenvolvimentos ortonormais serão estimados utilizando-se bases de Laguerre. Cada base conterá seis funções ortonormais, que serão desenvolvidas utilizando-se os pólos p_1 e p_2 determinados pelo critério (2.6). O procedimento de estimação consiste em determinar as matrizes do modelo (2.5) para diversos valores de p_1 e p_2 no intervalo [0.01,0.99], estimar os vetores c_1 e c_2 resolvendo-se o problema de otimização (3.16), e escolher os parâmetros que aproximam as respostas das dinâmicas a uma entrada arbitrária com erro mínimo. Isto implica que o critério (2.6) será adotado por um algoritmo de busca bidimensional para determinar pólos p_1 e p_2 ótimos. A Figura 3.1 mostra o logaritmo do erro médio quadrático de modelagem das dinâmicas para diversos valores de p_1 e p_2 .

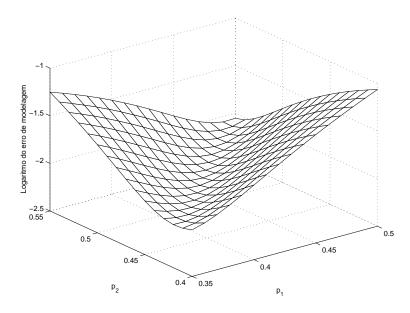


Figura 3.1: Logaritmo do erro médio quadrático de modelagem das dinâmicas $G_1\left(q^{-1}\right)$ e $G_2\left(q^{-1}\right)$ em função dos pólos p_1 e p_2 .

Os pólos que representam as dinâmicas $G_1\left(q^{-1}\right)$ e $G_2\left(q^{-1}\right)$ com erro mínimo são $p_1=0.43$ e $p_2=0.49$, respectivamente. Utilizando-se estes pólos, os coeficientes estimados de cada desenvolvimento ortonormal são dados por

$$c_{1} = \begin{bmatrix} 1.9155 \times 10^{0} \\ 1.2520 \times 10^{0} \\ 1.0847 \times 10^{-1} \\ 1.8708 \times 10^{-1} \\ 1.2846 \times 10^{-2} \\ 2.6734 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, c_{2} = \begin{bmatrix} 2.3655 \times 10^{0} \\ 1.7536 \times 10^{0} \\ 3.1212 \times 10^{-1} \\ 2.8185 \times 10^{-1} \\ 1.8308 \times 10^{-2} \\ 5.5509 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes dos vetores c_1 e c_2 convergem para zero. O modelo MLDSFO estimado e o processo foram excitados por uma entrada. Na Figura 3.2 é possível observar que o modelo aproxima o comportamento do processo adequadamente. O erro de modelagem aumenta ligeiramente apenas quando ocorre a transição entre regiões, ou seja, quando a saída cruza a origem.

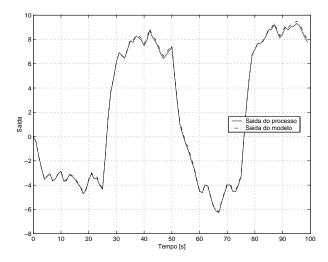


Figura 3.2: Saída do processo e saída do modelo para uma entrada arbitrária.

3.3 Modelagem de Sistemas Híbridos Incertos: Integração de Restrições, Lógica, e Dinâmica Baseada em Séries de Funções Ortonormais com Incertezas Estruturadas

Um modelo MLDSFO com incertezas estruturadas pode ser derivado para representar sistemas híbridos como

$$y(t+1, \eta_1) = G_1(q^{-1}, \eta_1) u(t)$$
 se $y(t) \ge 0$,
 $y(t+1, \eta_2) = G_2(q^{-1}, \eta_2) u(t)$ se $y(t) < 0$,

onde η_1 e η_2 são vetores de coeficientes incertos. Se as dinâmicas $G_1\left(q^{-1},\eta_1\right)$ e $G_2\left(q^{-1},\eta_2\right)$ são lineares, estáveis e causais, o modelo do processo pode ser descrito como

$$\Delta l (t+1) = A_1 \Delta l (t) + b_1 \Delta u (t),$$

$$y (t+1, \eta_1) = y (t) + c_1^T (\eta_1) \Delta l (t+1) \quad \text{se} \quad y (t) \ge 0,$$
(3.17)

$$\Delta l (t+1) = A_2 \Delta l (t) + b_2 \Delta u (t),$$

$$y (t+1, \eta_2) = y (t) + c_2^T (\eta_2) \Delta l (t+1) \quad \text{se} \quad y (t) < 0.$$
(3.18)

Nas equações de estado em (3.17) e (3.18), os pares (A_1,b_1) e (A_2,b_2) são determinados pelos pólos do desenvolvimento ortonormal das dinâmicas $G_1\left(q^{-1},\eta_1\right)$ e $G_2\left(q^{-1},\eta_2\right)$, respectivamente.

Os vetores $c_{1}\left(\eta_{1}\right)$ e $c_{2}\left(\eta_{2}\right)$ contêm incertezas estruturadas, isto é

$$c_{1,j,\min} \le c_{1,j} (\eta_{1,j}) \le c_{1,j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

 $c_{2,j,\min} \le c_{2,j} (\eta_{2,j}) \le c_{2,j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$

Os intervalos de pertinência dos vetores $c_1(\eta_1)$ e $c_2(\eta_2)$ podem ser estimados utilizando-se os conjuntos de respostas ao impulso medidos na planta.

O modelo MLDSFO com incertezas estruturadas deste processo híbrido pode ser obtido procedendo-se analogamente ao caso determinístico. Inicialmente, define-se a variável lógica e as variáveis auxiliares

$$[y(t) \ge 0] \leftrightarrow [\delta(t) = 1],$$

$$\Delta z_{1}(t) = \Delta l(t+1)\delta(t),$$

$$\Delta z_{2}(t) = [(A_{1} - A_{2})\Delta l(t) + (b_{1} - b_{2})\Delta u(t)]\delta(t),$$
(3.19)

que acrescentam ao modelo as restrições

$$y(t) \ge y_{\min} [1 - \delta(t)],$$

$$y(t) \le -\epsilon + (y_{\max} + \epsilon) \delta(t),$$
(3.20)

$$\Delta z_{1}(t) \leq \Delta z_{1,\max}\delta(t),$$

$$\Delta z_{1}(t) \geq \Delta z_{1,\min}\delta(t),$$

$$\Delta z_{1}(t) \leq \Delta l(t+1) - \Delta z_{1,\min}[1-\delta(t)],$$

$$\Delta z_{1}(t) \geq \Delta l(t+1) - \Delta z_{1,\max}[1-\delta(t)],$$
(3.21)

$$\Delta z_{2}(t) \leq \Delta z_{2,\max} \delta(t),$$

$$\Delta z_{2}(t) \geq \Delta z_{2,\min} \delta(t),$$

$$\Delta z_{2}(t) \leq (A_{1} - A_{2}) \Delta l(t) + (b_{1} - b_{2}) \Delta u(t) - \Delta z_{2,\min} [1 - \delta(t)],$$

$$\Delta z_{2}(t) \geq (A_{1} - A_{2}) \Delta l(t) + (b_{1} - b_{2}) \Delta u(t) - \Delta z_{2,\max} [1 - \delta(t)].$$
(3.22)

Os limites mínimos e máximos da saída e do incremento nas variáveis auxiliares devem ser adequadamente definidos. Utilizando-se a variável lógica e as variáveis auxiliares em (3.19), as equações de estado e de saída em (3.17)-(3.18) podem ser reescritas como

$$\Delta l (t+1) = A_2 \Delta l (t) + b_2 \Delta u (t) + \Delta z_2 (t) ,$$

$$y (t+1, \eta) = y (t) + c_2^T (\eta_2) \Delta l (t+1) + \left[c_1^T (\eta_1) - c_2^T (\eta_2) \right] \Delta z_1 (t) ,$$
(3.23)

onde o vetor η agrega os coeficientes incertos dos vetores η_1 e η_2 . Note que a equação de estado (3.23) não contém coeficientes incertos. Isto implica que o esforço computacional envolvido com a solução do problema de controle preditivo robusto é reduzido quando comparado ao esforço verificado com o esquema MLD (Bemporad e Morari, 1999), cujas matrizes da equação de estado podem ser politópicas. O conjunto de previsões do comportamento futuro do processo é mais facilmente calculado quando a quantidade de matrizes politópicas do modelo é reduzida. As restrições do modelo MLDSFO em (3.22) são mais facilmente verificadas do que na abordagem MLD, onde as matrizes A_1 , A_2 , b_1 e b_2 podem estar contidas em politopos. De fato, o esquema MLD foi desenvolvido para a modelagem de sistemas híbridos determinísticos (Silva et al., 2003).

As equações de estado e de saída em (3.23), juntamente com as restrições (3.20), (3.21) e (3.22), são um caso particular do esquema de modelagem MLDSFO com incertezas estruturadas,

dado por

$$\Delta l (t+1) = H_l \Delta l (t) + H_u \Delta u (t) + H_\delta \delta (t) + H_z \Delta z (t) ,$$

$$y (t+1, \eta) = y (t) + c_l^T (\eta_l) \Delta l (t+1) + c_u^T (\eta_u) \Delta u (t) + c_\delta^T (\eta_\delta) \delta (t) + c_z^T (\eta_z) \Delta z (t) ,$$
sujeito a $M_l \Delta l (t) + M_u \Delta u (t) + M_\delta \delta (t) + M_z \Delta z (t) + M_u y (t) \leq M.$
(3.24)

No modelo (3.24)-(3.25), Δl (t) é o incremento no vetor de estados, Δu (t) é o incremento no vetor de entradas, δ (t) é um vetor de variáveis binárias, Δz (t) é o incremento no vetor de variáveis auxiliares e y (t) é o vetor de saídas do sistema. As matrizes H_l , H_u , H_δ , H_z , c_l (η_l), c_u (η_u), c_δ (η_δ), c_z (η_z), M_l , M_u , M_δ , M_z , M_y e M devem ser adequadamente definidas em função dos desenvolvimentos em séries ortonormais do processo híbrido, das variáveis binárias e auxiliares definidas, das restrições equivalentes às proposições lógicas e das exigências operacionais do processo. A matriz η agrega os coeficientes incertos das matrizes η_l , η_u , η_δ e η_z . Devido à linearidade do modelo, as equações de previsão de estado e de saída podem ser facilmente obtidas.

3.3.1 Exemplo: Modelagem de um Processo Híbrido com Modos Próprios Sobreamortecidos e Incertos

Considere o processo híbrido

$$\begin{split} y\left(t+1,\eta_{1}\right) &= G_{1}\left(q^{-1},\eta_{1}\right)u\left(t\right) = \frac{1.25+0.65q^{-1}}{1-\eta_{1}0.65q^{-1}}u\left(t\right) & \text{ se } \quad y\left(t\right) \geq 0, \\ y\left(t+1,\eta_{2}\right) &= G_{2}\left(q^{-1},\eta_{2}\right)u\left(t\right) = \frac{1.35+0.75q^{-1}}{1-\eta_{2}0.75q^{-1}}u\left(t\right) & \text{ se } \quad y\left(t\right) < 0. \end{split}$$

Os pólos de malha aberta das dinâmicas $G_1\left(q^{-1},\eta_1\right)$ e $G_2\left(q^{-1},\eta_2\right)$ são desconhecidos, pois $\eta_1,\eta_2\in[0.5,1.0]$ são parâmetros incertos. Uma vez que os modelos nominais e os limites das incertezas são conhecidos, os conjuntos de respostas ao impulso $\{h_1\left(t,\eta_{h,1}\right)\}$ e $\{h_2\left(t,\eta_{h,2}\right)\}$ podem ser gerados para representar as dinâmicas $G_1\left(q^{-1},\eta_1\right)$ e $G_2\left(q^{-1},\eta_2\right)$, respectivamente. Utilizando-se bases de Laguerre, N=8 funções ortonormais e as respostas ao impulso centrais dos conjuntos $\{h_1\left(t,\eta_{h,1}\right)\}$ e $\{h_2\left(t,\eta_{h,2}\right)\}$, os pólos que representam as dinâmicas com erro mínimo de acordo com o critério (2.6) são $p_1=0.33$ e $p_2=0.41$. O valor médio e a máxima incerteza nos coeficientes dos desenvolvimentos ortonormais calculados por meio de (2.13) são

dados por

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1.6498 \times 10^0 \\ 9.7727 \times 10^{-1} \\ 1.4249 \times 10^{-3} \\ 9.0720 \times 10^{-2} \\ -1.3619 \times 10^{-3} \\ 9.9541 \times 10^{-3} \\ -1.2511 \times 10^{-6} \\ 1.1632 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad dc_1 = \begin{bmatrix} 1.1013 \times 10^{-1} \\ 4.3579 \times 10^{-1} \\ 3.4453 \times 10^{-1} \\ 1.2602 \times 10^{-1} \\ 6.4643 \times 10^{-2} \\ 2.4080 \times 10^{-2} \\ 1.1138 \times 10^{-2} \\ 4.2540 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 1.9718 \times 10^0 \\ 1.1694 \times 10^0 \\ -2.5555 \times 10^{-3} \\ 1.6397 \times 10^{-1} \\ -5.6958 \times 10^{-3} \\ 2.7026 \times 10^{-2} \\ -7.8828 \times 10^{-4} \\ 4.7250 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad dc_2 = \begin{bmatrix} 2.1129 \times 10^{-1} \\ 7.2421 \times 10^{-1} \\ 5.9534 \times 10^{-1} \\ 1.5978 \times 10^{-1} \\ 1.5978 \times 10^{-1} \\ 7.1843 \times 10^{-2} \\ 3.9799 \times 10^{-2} \\ 1.8285 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Os vetores $c_l(\eta_l)$, $c_u(\eta_u)$, $c_\delta(\eta_\delta)$ e $c_z(\eta_z)$ do modelo MLDSFO (3.24), (3.25) devem ser definidos adequadamente de acordo com o processo híbrido considerado. Comparando-se as equações de saída em (3.23) e (3.24), conclui-se que

$$c_{l}\left(\eta_{l}\right)=c_{2}\left(\eta_{2}\right),$$

$$c_{z}\left(\eta_{z}\right)=\left[\begin{array}{c}c_{1}\left(\eta_{1}\right)-c_{2}\left(\eta_{2}\right)\\\mathbf{0}_{N imes1}\end{array}\right],$$

o que implica

$$\bar{c}_l + \eta_l dc_l = \bar{c}_2 + \eta_2 dc_2,
\bar{c}_z + \eta_z dc_z = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 - \bar{c}_2 \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 dc_1 - \eta_2 dc_2 \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, os valores médios e os máximos desvios dos coeficientes do modelo MLDSFO

do processo híbrido considerado são

$$\begin{split} & \bar{c}_l = \bar{c}_2, \\ & dc_l = dc_2, \\ & \bar{c}_z = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 - \bar{c}_2 \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix}, \\ & dc_z = \begin{bmatrix} dc_1 + dc_2 \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix}. \end{split}$$

O intervalo de pertinência da diferença entre vetores incertos é determinado subtraindo-se os valores médios e somando-se as máximas variações, pois a incerteza é simétrica.

Caso o modelo MLDSFO seja estimado para o projeto de um controlador robusto, os lados do hiper retângulo que define as incertezas devem ser escalonados até que todas as respostas ao impulso do processo estejam representadas no modelo. As soluções do problema de otimização (2.17) para cada conjunto $\{h_1(t, \eta_{h,1})\}$ e $\{h_2(t, \eta_{h,2})\}$ são dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 1.0348 \times 10^0 \\ 1.1293 \times 10^0 \\ 1.4196 \times 10^0 \\ 1.7209 \times 10^0 \\ 2.4514 \times 10^{-2} \\ 1.9373 \times 10^0 \\ 2.4514 \times 10^0 \\ 3.1063 \times 10^0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 1.1602 \times 10^0 \\ 1.3532 \times 10^0 \\ 1.6997 \times 10^0 \\ 1.9391 \times 10^0 \\ 1.0215 \times 10^{-2} \\ 2.5097 \times 10^0 \\ 4.6112 \times 10^0 \\ 5.0000 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se o modelo MLDSFO for estimado para assegurar que todas as respostas ao impulso calculadas são factíveis, os lados do hiper retângulo que define as incertezas devem ser escalonados de forma que todas as respostas ao impulso do modelo estejam contidas nos conjuntos $\{h_1(t,\eta_{h,1})\}$ e $\{h_2(t,\eta_{h,2})\}$. Neste caso, as soluções do problema de otimização (2.19) são dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 1.0841 \times 10^0 \\ 2.4494 \times 10^{-1} \\ 3.8318 \times 10^{-1} \\ 5.0975 \times 10^{-1} \\ 1.4335 \times 10^{-1} \\ 2.0719 \times 10^{-1} \\ 1.3222 \times 10^{-1} \\ 2.2349 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 7.8023 \times 10^{-1} \\ 1.7102 \times 10^{-1} \\ 2.1373 \times 10^{-1} \\ 4.0899 \times 10^{-1} \\ 1.6219 \times 10^{-1} \\ 1.5299 \times 10^{-1} \\ 1.1587 \times 10^{-1} \\ 2.0784 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

3.4 Resumo

Neste capítulo, abordou-se o problema de integrar as representações dinâmicas e as descrições lógicas de um sistema híbrido, seja este determinístico ou incerto, sujeito a restrições sobre as entradas e as saídas. A principal contribuição deste capítulo é o esquema compacto e nãohierárquico MLDSFO, que integra restrições, lógica e dinâmica baseada em séries de funções ortonormais. Variáveis binárias e auxiliares são utilizadas para modelar o intertravamento da planta. As proposições envolvendo operadores lógicos são transformadas em desigualdades lineares mistas equivalentes, que podem ser agregadas às exigências operacionais do processo. Um modelo MLDSFO pode ser estimado sem o conhecimento dos ganhos, das constantes de tempo e dos atrasos de transporte das dinâmicas do processo. As incertezas de um conjunto de medições da resposta ao impulso do processo são mapeadas unicamente na equação de saída do modelo proposto, sendo a equação de estados isenta de coeficientes incertos. Comparando-se o esquema MLDSFO às abordagens existentes na literatura, conclui-se que este é vantajoso nas seguintes situações: quando não é possível derivar um modelo matemático no espaço de estados para representar as dinâmicas do processo híbrido, pois o modelo proposto pode ser estimado com pouco conhecimento das características de amortecimento das dinâmicas do sistema; quando o modelo teórico não descreve satisfatoriamente o comportamento dinâmico do processo, pois os erros de modelagem podem ser parcialmente compensados durante o procedimento de estimação paramétrica; quando a amplitude máxima da perturbação do modelo teórico é desconhecida, pois os limites da incerteza no modelo proposto são estimados; quando as incertezas paramétricas politópicas do modelo teórico no espaço de estados inviabilizam a aplicação do controlador preditivo robusto em tempo real, pois a equação de estados do modelo proposto não contém coeficientes incertos. O esquema MLDSFO é desvantajoso quando um modelo teórico representado no espaço de estados descreve adequadamente as dinâmicas do processo, pois a ordem do modelo proposto é proporcional à quantidade de funções ortonormais necessárias à modelagem das dinâmicas do sistema. No entanto, no capítulo seguinte descreve-se uma ferramenta existente na literatura que pode ser utilizada para o cálculo da solução explícita do controlador preditivo (CP) baseado no modelo MLDSFO. Uma vez que a solução explícita do CP-MLDSFO é calculada off-line uma única vez, a ordem do modelo estimado poderá ser aumentada tendo-se em vista a qualidade da representação da dinâmica do processo.

Capítulo 4

Controle Preditivo de Sistemas Híbridos

Neste capítulo apresenta-se o controlador preditivo (CP) para sistemas híbridos MLDSFO e o controlador preditivo robusto (CPR) para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. Ilustra-se, por meio de exemplos de simulação, os controladores com critérios de desempenho baseados na ponderação dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle pelas normas quadrática e infinita. Apresenta-se uma breve revisão dos métodos numéricos aplicáveis à resolução de problemas de otimização com variáveis mistas, uma ferramenta existente na literatura para o cálculo da solução explícita do CP-MLDSFO e uma revisão das metodologias encontradas na literatura para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO. Discute-se as características, vantagens e desvantagens do CPR-MLDSFO com relação às abordagens existentes na literatura. Utiliza-se o CPR-MLDSFO no controle de um sistema de refrigeração industrial. Propõe-se uma nova metodologia, baseada em conjuntos terminais, para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CPR-MLDSFO. Ilustra-se com exemplos a obtenção destes conjuntos terminais para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. As contribuições deste capítulo são o controlador preditivo para sistemas MLDSFO, a revisão das metodologias para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO, o controlador preditivo robusto para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas e a metodologia para a obtenção de conjuntos terminais que assegurem a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CPR-MLDSFO.

4.1 Controle Preditivo de Sistemas Híbridos Determinísticos

As metodologias de MPC são baseadas na estratégia de horizonte deslizante, isto é, caracterizadas pelas seguintes etapas: um modelo é utilizado para prever o comportamento futuro do processo; um critério de custo baseado na norma ponderada dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle é minimizado para se determinar a seqüência de controle preditivo de acordo com o desempenho desejado; do vetor de entradas calculado, apenas o primeiro elemento é efetivamente aplicado na entrada do sistema; no instante de amostragem seguinte, a minimização é repetida utilizando-se novas informações medidas na planta.

O esquema MLDSFO, apresentado no Capítulo 3, descreve sistemas híbridos de forma compacta e não-hierárquica, isto é, sem divisão estrutural entre a dinâmica e a lógica do processo. Se o modelo descreve o comportamento do sistema com pequeno erro na faixa de operação de interesse, o rastreio das referências em malha fechada se aproxima do desempenho desejado, refletido na minimização do critério de custo do problema de controle preditivo (CP). Com um modelo não-hierárquico é possível calcular os comportamentos contínuo e lógico futuros do processo. Isto implica que o desempenho de rastreio das referências com modelo não-hierárquico é melhor do que com esquemas hierárquicos, nos quais a lógica futura é desconsiderada ou é obtida empiricamente (Slupphaug et al., 1997).

O critério de desempenho do CP-MLDSFO é dado por

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_m(t), \mathbf{y}_r(t)\right] = \sum_{k=0}^{T_u - 1} \|\Delta u(t+k)\|_{Q_u}^v + \sum_{k=1}^{T_y} \|\dot{y}(t+k/t) - y_r(t+k)\|_{Q_y}^v,$$
(4.1)

sendo que

 $\Delta l\left(t/t\right)$ é o incremento no vetor de estados no instante atual;

 $y_{m}\left(t\right)$ é o vetor de saídas medidas no instante atual;

 $\Delta u\left(t+k\right)$ é o incremento no vetor de controle k passos a frente do instante atual;

 $\stackrel{\wedge}{y}(t+k/t)$ é o vetor de saídas previstas k passos a frente do instante atual;

 $\Delta\mathbf{u}\left(t
ight)$ é um vetor que agrega os incrementos futuros na entrada de controle;

 $\mathbf{y}_{r}\left(t
ight)$ é um vetor que agrega as referências futuras de saída;

 T_u e T_y são os horizontes de controle e de previsão;

 Q_u e Q_y são ponderações sobre os incrementos no esforço de controle e sobre os erros de rastreio das referências de saída;

- r é um sub índice que denota referência;
- v é a norma utilizada no critério de custo.

Assumindo-se que $x=\begin{bmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\end{bmatrix}^T$ é um vetor de componentes escalares, α é um escalar e Q é uma matriz $m\times m$, as normas mais comumente utilizadas em controle preditivo são definidas como segue:

- valor absoluto (v=1): $||x||_{\alpha}^{1} = \alpha \sum_{i=1}^{m} |x_{i}|$,
- quadrática (v=2): $||x||_Q^2 = x^T Q x$,
- infinita $(v = \infty)$: $||x||_{\alpha}^{\infty} = \alpha \max |x_i|, i = 1, 2, \dots, m$.

O critério (4.1) é minimizado a cada novo instante de tempo de acordo com a estratégia de horizonte deslizante. O comportamento futuro do processo é calculado utilizando-se o modelo MLDSFO (3.14)-(3.15). Os incrementos futuros no vetor de estados, calculados no instante atual, são dados por

$$\Delta l (t + k/t) = H_l^k \Delta l (t/t) + \sum_{j=0}^{k-1} H_l^{k-j-1} \left[H_u \Delta u (t+j) + H_\delta \delta (t+j/t) + H_z \Delta z (t+j/t) \right].$$
(4.2)

O incremento no vetor de estados k passos à frente do instante atual é função das variáveis binárias, dos incrementos nos vetores de entradas e dos incrementos nas variáveis auxiliares entre o instante atual e o instante k-1 passos à frente. A previsão da saída do processo é função dos incrementos futuros no vetor de estados, e é dada por

$$\hat{y}(t+k/t) = y_m(t) + c_l^T H_l H_{l,k-1} \Delta l(t/t) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\left(c_l^T H_{l,j} H_u + c_u^T \right) \Delta u(t+k-j-1) + \left(c_l^T H_{l,j} H_\delta + c_\delta^T \right) \delta(t+k-j-1/t) + \left(c_l^T H_{l,j} H_z + c_z^T \right) \Delta z(t+k-j-1/t) \right],$$
(4.3)

onde

$$H_{l,k} = \sum_{j=0}^{k} H_l^j.$$

As variáveis do problema de MPC são os vetores de incrementos nas entradas de controle ao longo do horizonte T_u-1 , e as variáveis binárias e os incrementos nas variáveis auxiliares ao longo do horizonte de previsão T_y . A minimização do critério de desempenho (4.1) deve levar em conta as restrições do modelo (3.15) ao longo de todo o horizonte de saída, assumindo-se $T_y>T_u$. Assim, as exigências operacionais são respeitadas e os valores das variáveis binárias e das variáveis auxiliares presentes no modelo são corretamente determinados.

4.1.1 Controle Preditivo com Critério de Desempenho Baseado na Norma Quadrática

Um critério de desempenho comumente encontrado em aplicações de controle preditivo é baseado na norma quadrática ponderada dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. O critério é dado por

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_{m}(t), \mathbf{y}_{r}(t)\right] = \sum_{k=0}^{T_{u}-1} \left\|\Delta u(t+k)\right\|_{Q_{u}}^{2} + \sum_{k=1}^{T_{y}} \left\|\dot{y}(t+k/t) - y_{r}(t+k)\right\|_{Q_{y}}^{2}.$$
(4.4)

As previsões do comportamento futuro do processo são obtidas utilizando-se as equações de estado e de saída do modelo MLDSFO (3.14). As previsões são substituídas no critério (4.4) para explicitar as variáveis da otimização. Utilizando-se os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, por exemplo, e eliminando-se os termos constantes que envolvem exclusivamente valores da referência de saída, o índice de desempenho (4.4) é dado por

$$\begin{split} J\left[\Delta u\left(t\right), \Delta l\left(t/t\right), y_{m}\left(t\right), \mathbf{y}_{r}\left(t\right)\right] &= \Delta u^{T}\left(t\right) Q_{u} \Delta u\left(t\right) + \\ &+ \stackrel{\wedge}{y}^{T}\left(t+1/t\right) Q_{y} \stackrel{\wedge}{y}\left(t+1/t\right) - 2y_{r}^{T}\left(t+1\right) Q_{y} \stackrel{\wedge}{y}\left(t+1/t\right) + \\ &+ \stackrel{\wedge}{y}^{T}\left(t+2/t\right) Q_{y} \stackrel{\wedge}{y}\left(t+2/t\right) - 2y_{r}^{T}\left(t+2\right) Q_{y} \stackrel{\wedge}{y}\left(t+2/t\right). \end{split}$$

As previsões da saída do processo nos instantes t+1 e t+2 (1 e 2 passos a frente, respectivamente, calculadas no instante atual) são dadas por

$$\dot{y}(t+1/t) = y_m(t) + c_l^T H_l \Delta l(t/t) + \left(c_l^T H_u + c_u^T\right) \Delta u(t) + \\
+ \left(c_l^T H_\delta + c_\delta^T\right) \delta(t/t) + \left(c_l^T H_z + c_z^T\right) \Delta z(t/t) , \\
\dot{y}(t+2/t) = y_m(t) + c_l^T \left(H_l + H_l^2\right) \Delta l(t/t) + \left[c_l^T \left(I_{N \times N} + H_l\right) H_u + c_u^T\right] \Delta u(t) + \\
+ \left[c_l^T \left(I_{N \times N} + H_l\right) H_\delta + c_\delta^T\right] \delta(t/t) + \left(c_l^T H_\delta + c_\delta^T\right) \delta(t+1/t) + \\
+ \left[c_l^T \left(I_{N \times N} + H_l\right) H_z + c_z^T\right] \Delta z(t/t) + \left(c_l^T H_z + c_z^T\right) \Delta z(t+1/t) .$$

Note que $\Delta u\left(t+1\right)=\mathbf{0}$ na previsão da saída no instante t+2, pois $T_{u}=1$.

As desigualdades (3.15) do modelo MLDSFO devem ser verificadas nos instantes t e t+1, ou seja, o conjunto de restrições do problema de otimização é dado por

$$M_l \Delta l (t/t) + M_u \Delta u (t) + M_\delta \delta (t/t) + M_z \Delta z (t/t) + M_y y_m (t) \leq M,$$

 $M_l \Delta l (t+1/t) + M_\delta \delta (t+1/t) + M_z \Delta z (t+1/t) + M_y \hat{y} (t+1/t) \leq M.$

Substituindo-se as equações de previsão da saída no critério de desempenho e nas restrições,

o CP-MLDSFO pode ser reescrito de forma compacta como

$$\min_{\Psi} \quad \Psi^{T} S_{1} \Psi + 2 \left[S_{2} + \Delta l^{T} \left(t/t \right) S_{3} + y_{m}^{T} \left(t \right) S_{4} + \mathbf{y}_{r}^{T} \left(t \right) S_{5} \right] \Psi,
\text{sujeito a} \quad F_{1} \Psi \leq F_{2} + F_{3} \Delta l \left(t/t \right) + F_{4} y_{m} \left(t \right) + F_{5} \mathbf{y}_{r} \left(t \right), \tag{4.5}$$

sendo $\mathbf{y}_{r}\left(t\right)$ o vetor de referências futuras e Ψ o vetor de variáveis do problema de otimização, dados por

$$\mathbf{y}_{r}\left(t
ight) = \left[egin{array}{c} y_{r}\left(t+1
ight) \\ y_{r}\left(t+2
ight) \end{array}
ight], \quad \Psi = \left[egin{array}{c} \Delta u\left(t
ight) \\ \delta\left(t/t
ight) \\ \delta\left(t+1/t
ight) \\ \Delta z\left(t/t
ight) \\ \Delta z\left(t+1/t
ight) \end{array}
ight].$$

As matrizes S_i e F_i , i=1,2,3,4,5 devem ser adequadamente definidas de acordo com as matrizes do modelo MLDSFO do processo. De forma geral, se o critério de desempenho é dado por (4.4), o problema de otimização pode ser reescrito na forma (4.5), agregando-se as variáveis no vetor

$$\Psi = \left[\begin{array}{c} \Omega \\ \Theta \\ \Xi \end{array} \right],$$

sendo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Delta u \left(t \right) \\ \Delta u \left(t + 1 \right) \\ \vdots \\ \Delta u \left(t + T_u - 1 \right) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \delta \left(t / t \right) \\ \delta \left(t + 1 / t \right) \\ \vdots \\ \delta \left(t + T_y - 1 / t \right) \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \Delta z \left(t / t \right) \\ \Delta z \left(t + 1 / t \right) \\ \vdots \\ \Delta z \left(t + T_y - 1 / t \right) \end{bmatrix}.$$

O problema de otimização (4.5) é quadrático, com restrições lineares, e envolve variáveis contínuas e inteiras (booleanas). Este problema de otimização é do tipo MIQP (*Mixed Integer Quadratic Programming*) (Bemporad e Morari, 1999), para o qual existe eficiente técnica de solução (Fletcher e Leyffer, 1995).

4.1.2 Softwares para Programação Inteira-Mista

Em (Fletcher e Leyffer, 1995) utiliza-se algoritmos do tipo *Branch and Bound* para a resolução de problemas de otimização do tipo MIQP. Estes algoritmos resolvem problemas quadráticos de acordo com uma árvore de busca. Os nós da árvore estão associados às diversas combinações de variáveis binárias candidatas a solução ótima. Problemas quadráticos relaxados, cujas soluções

são infactíveis para o problema MIQP, são resolvidos nos nós principais, os quais incorporam restrições que visam eliminar parcelas da região factível do problema. A complexidade do problema aumenta proporcionalmente à ordem do modelo e varia exponencialmente com a quantidade de variáveis binárias existentes no modelo do processo. Um horizonte de saída muito longo ou um excesso de variáveis lógicas no modelo podem tornar o problema de otimização intratável computacionalmente, inviabilizando a aplicação do controlador em tempo real. A ordem do modelo pode ser reduzida escolhendo-se adequadamente os pólos do desenvolvimento das bases ortonormais. Sendo assim, a menor quantidade possível de variáveis binárias deve ser utilizada na modelagem do processo híbrido para não inviabilizar a aplicação do controlador preditivo em tempo real.

O algoritmo proposto em (Fletcher e Leyffer, 1995) calcula *on-line* um limitante para o valor do critério de custo. Este limitante permite eliminar do processo de otimização os ramos da árvore de busca cujos critérios ótimos relaxados são maiores do que o limitante previamente calculado. A eliminação de soluções candidatas reduz o esforço computacional da otimização. Um valor inicial para o limitante do critério de custo é dado pela solução do QP relaxado. Este valor é parametricamente aumentado utilizando-se o método do conjunto ativo dual (dASM - *dual Active Set Method*), para o qual a solução relaxada é factível. Mais detalhes podem ser encontrados no referido trabalho.

As técnicas GBD (Generalized Bender's Decomposition) e OA (Outer Approximation) também podem ser utilizadas para a resolução de problemas de otimização do tipo MIQP. No entanto, em (Fletcher e Leyffer, 1995) mostra-se por meio de exemplos que os métodos do tipo Branch and Bound são mais eficientes. Quando o limitante inferior do critério de custo é utilizado para reduzir a quantidade de QPs resolvidos, o tempo de resolução de problemas MIQP reduz-se em até uma ordem de grandeza. Esta redução é importante para aplicações em tempo real, e por este motivo a técnica proposta em (Fletcher e Leyffer, 1995) será utilizada para a solução dos problemas de otimização formulados neste trabalho.

A classe de problemas tratada neste trabalho implica naturalmente na utilização de variáveis binárias. Por este motivo, e apesar da eficiência da técnica proposta em (Fletcher e Leyffer, 1995), serão utilizados horizontes de controle e de previsão curtos nos exemplos ilustrativos. Isto permitirá que os problemas de otimização correspondentes sejam resolvidos em um tempo razoável, isto é, um tempo da ordem de alguns minutos.

4.1.3 Controle Preditivo com Critério de Desempenho Baseado na Norma Infinita

A sequência de controle preditivo para sistemas MLDSFO pode ser calculada minimizando-se um critério de desempenho baseado na norma infinita ponderada dos incrementos no esforço de controle e erros de rastreio das referências de saída. O critério é dado por

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_m(t), \mathbf{y}_r(t)\right] = \left[\|\Delta u(t+j)\|_{Q_u}^{\infty}, \|\hat{y}(t+k/t) - y_r(t+k)\|_{Q_y}^{\infty}\right],$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \ \forall k = 1, 2, \dots, T_y.$$
(4.6)

Utilizando-se a definição de norma infinita, a minimização do critério de custo (4.6) pode ser escrita como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(t)} \left\{ \max_{j,k,i,s} \left[Q_u \left| \Delta u_i \left(t + j \right) \right|, Q_y \left| \dot{y}_s^{\wedge} \left(t + k/t \right) - y_{s,r} \left(t + k \right) \right| \right] \right\}, \qquad (4.7)$$

$$j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \quad k = 1, 2, \dots, T_y, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

sendo n a dimensão do vetor de entradas e m a dimensão do vetor de saídas. De acordo com (4.7), a seqüência de controle é calculada minimizando-se o maior valor possível dentre os valores absolutos ponderados dos incrementos no esforço de controle e dos erros de rastreio das referências de saída. Considerando-se que

$$\max_{j,k,i,s} \left[Q_u \left| \Delta u_i \left(t + j \right) \right|, Q_y \left| \dot{y}_s \left(t + k/t \right) - y_{s,r} \left(t + k \right) \right| \right] = \gamma^*,
j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \quad k = 1, 2, \dots, T_y, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

e sendo $\gamma \geq \gamma^*$ um limitante superior para o problema de maximização, o problema de otimização (4.7) é equivalente a

$$\begin{split} & \underset{\Delta \mathbf{u}(t), \gamma}{\min} \quad \gamma, \\ & \text{sujeito a} \quad -\gamma \leq Q_u \Delta u_i \left(t+j\right) \leq \gamma, \ j=0,1,\ldots,T_u-1, \ i=1,2,\ldots,n, \\ & \quad -\gamma \leq Q_y \left[\mathring{y_s} \left(t+k/t\right) - y_{s,r} \left(t+k\right) \right] \leq \gamma, \ k=1,2,\ldots,T_y, \ s=1,2,\ldots,m. \end{split}$$

Considerando-se um processo SISO (Single-Input, Single-Output) e utilizando-se os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, por exemplo, o CP-MLDSFO com critério de custo baseado na norma infinita ponderada dos incrementos no esforço de controle e erros de rastreio das referências de

saída é dado por

$$\begin{split} & \underset{\Delta u(t), \gamma}{\min} \quad \gamma, \\ & \text{sujeito a} \quad -\gamma \leq Q_u \Delta u\left(t\right) \leq \gamma, \\ & -\gamma \leq Q_y \left[\hat{y}\left(t+1/t\right) - y_r\left(t+1\right) \right] \leq \gamma, \\ & -\gamma \leq Q_y \left[\hat{y}\left(t+2/t\right) - y_r\left(t+2\right) \right] \leq \gamma, \\ & M_l \Delta l\left(t/t\right) + M_u \Delta u\left(t\right) + M_\delta \delta\left(t/t\right) + M_z \Delta z\left(t/t\right) + M_y y_m\left(t\right) \leq M, \\ & M_l \Delta l\left(t+1/t\right) + M_\delta \delta\left(t+1/t\right) + M_z \Delta z\left(t+1/t\right) + M_y \hat{y}\left(t+1/t\right) \leq M. \end{split}$$

O critério de custo e as restrições deste CP-MLDSFO são lineares. O problema de otimização pode ser reescrito de forma compacta como

$$\min_{\Psi} S_2 \Psi,$$
 sujeito a $F_1 \Psi \leq F_2 + F_3 \Delta l \left(t/t \right) + F_4 y_m \left(t \right) + F_5 \mathbf{y}_r \left(t \right),$ (4.8)

sendo $\mathbf{y}_r(t)$ o vetor que agrega as referências futuras; o vetor Ψ agrega as variáveis da otimização: esforço de controle ao longo do horizonte T_u-1 , as variáveis binárias e as variáveis auxiliares ao longo do horizonte T_y , e a variável escalar γ . As matrizes F_i , i=1,2,3,4,5 devem ser adequadamente definidas de acordo com as restrições do problema. A formulação (4.8) é do tipo MILP (*Mixed Integer Linear Programming*).

4.1.4 Exemplo: Controle Preditivo de um Processo Híbrido com Modos Próprios Sobreamortecidos

Considere o projeto de um controlador preditivo para o sistema híbrido

$$\begin{split} y\left(t+1\right) &= G_1\left(q^{-1}\right)u\left(t\right) = \frac{1.25 + 0.65q^{-1}}{1 - 0.65q^{-1}}u\left(t\right) &\quad \text{se} \quad y\left(t\right) \geq 0, \\ y\left(t+1\right) &= G_2\left(q^{-1}\right)u\left(t\right) = \frac{1.35 + 0.75q^{-1}}{1 - 0.75q^{-1}}u\left(t\right) &\quad \text{se} \quad y\left(t\right) < 0, \end{split}$$

cujo modelo MLDSFO foi descrito na Seção 3.1 e cujos coeficientes ortonormais foram estimados na Seção 3.2.1 utilizando-se bases de Laguerre com N=6 funções. Neste exemplo, o CP-MLDSFO será baseado nas normas quadrática e infinita ponderadas dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. Em ambos os casos, utiliza-se no critério de desempenho os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, e as ponderações $Q_u=10^{-2}$ e $Q_y=1$. As exigências operacionais do processo são representadas pelas desigualdades

$$-0.75 \le u(t) \le 0.75$$
,

que impõem limites sobre o valor da entrada de controle. Estas desigualdades são agregadas às restrições da otimização escrevendo-se $u\left(t\right)=\Delta u\left(t\right)+u\left(t-1\right)$. O desempenho de rastreio das referências do sistema em malha fechada com CP-MLDSFO pode ser visto na Figura 4.1.

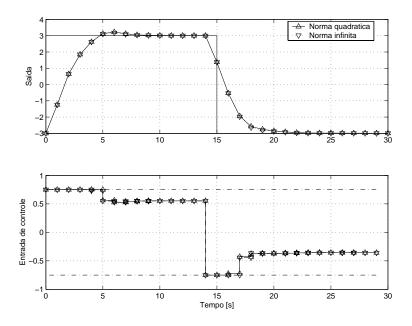


Figura 4.1: CP-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios sobreamortecidos e critério de desempenho baseado nas normas quadrática e infinita.

O processo parte de $y\left(0\right)=-3$ e deve seguir uma referência $y_r\left(t\right)=3$ enquanto t<15s. Em t=15s a referência é alterada para $y_r\left(t\right)=-3$, e assim permanece até o final da simulação. O processo em malha fechada é submetido a uma referência variável para que a sua saída cruze a origem duas vezes. Note pela Figura 4.1 que o desempenho de rastreio com CP-MLDSFO e critério de custo baseado na norma quadrática é semelhante ao desempenho obtido com norma infinita. Isto ocorre devido à presença de saturação na entrada de controle, que torna a evolução temporal de $u\left(t\right)$ semelhante em ambos os casos. Note também que a referência variável é rastreada em ambos os casos e que o controlador atua no sistema antecipadamente devido ao conhecimento a priori da mudança do ponto de equilíbrio em t=15s. Uma vez que a ponderação Q_y é duas ordens de grandeza maior do que a ponderação Q_u , a entrada de controle tende a crescer nos instantes iniciais, quando o erro de rastreio é elevado. A saturação do esforço de controle impede que este cresça demasiadamente.

O CP-MLDSFO com critério de custo baseado na norma quadrática possui 27 variáveis e 154 restrições lineares. O CP-MLDSFO com critério de desempenho baseado na norma infinita possui 28 variáveis e 162 restrições lineares. A resolução dos problemas de otimização envolve esforços computacionais semelhantes.

4.1.5 Solução Explícita do Controlador Preditivo

O CP-MLDSFO é baseado na estratégia de horizonte deslizante. Os parâmetros do CP-MLDSFO são o incremento no vetor de estados no instante atual, o vetor de saídas medidas no instante atual e as referências futuras ao longo do horizonte de previsão. Estes parâmetros podem ser agregados no vetor

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \Delta l (t/t) \\ y_m(t) \\ y_r(t+1) \\ \vdots \\ y_r(t+T_y) \end{bmatrix},$$

que deve ser atualizado a cada novo instante de amostragem. A complexidade numérica do problema de otimização é diretamente proporcional à ordem dos modelos ortonormais utilizados para descrever as dinâmicas do processo, e é exponencialmente proporcional à dimensão do vetor de variáveis binárias $\delta\left(t\right)$. Um problema de otimização de porte elevado pode limitar a aplicação do controlador em tempo real. Sendo assim, é conveniente determinar off-line a solução explícita do CP-MLDSFO.

Em (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b; Bemporad, Borrelli e Morari, 2002) determina-se analiticamente a solução do problema de otimização MILP. Esta ferramenta pode ser utilizada para determinar a solução explícita do CP-MLDSFO. Utilizando-se programação multiparamétrica (mp-MILP - multi-parametric MILP), o problema de otimização (4.8) é resolvido para todos os vetores $\xi(t)$ em um intervalo de interesse. Uma vez que a solução analítica do controlador preditivo é determinada off-line, o CP-MLDSFO pode ser utilizado para controlar processos de dimensões elevadas, ou cujos períodos de amostragem são reduzidos. O Teorema 1 apresenta a solução explícita do controlador.

Teorema 1 (Bemporad et al., 2000a; Bemporad et al., 2000b; Bemporad, Borrelli e Morari, 2002) Assumindo-se que a dinâmica do sistema é representada por um modelo afim por partes como

$$\begin{split} &l\left(t+1\right) = A_{i}l\left(t\right) + b_{i}u\left(t\right) + f_{i}, \\ &\text{se} \quad \begin{bmatrix} l\left(t\right) \\ u\left(t\right) \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_{i} \overset{\Delta}{=} \left\{ \begin{bmatrix} l\left(t\right) \\ u\left(t\right) \end{bmatrix} : \quad H_{i}l\left(t\right) + J_{i}u\left(t\right) \leq K_{i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \end{split}$$

a solução do problema de controle ótimo

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J\left[\mathbf{u}(t), l(t/t)\right] = \sum_{k=0}^{T_u - 1} \|u(t+k) - u_r(t+k)\|_{Q_u}^v + \sum_{k=1}^{T_y} \|l(t+k/t) - l_r(t+k)\|_{Q_y}^v,$$
(4.9)

com v=1 ou $v=\infty$ é uma lei de controle por realimentação de estados afim por partes em poliedros dada por

$$\begin{split} u\left[l\left(t/t\right)\right] &= F^{i}l\left(t/t\right) + G^{i},\\ \text{se } l\left(t/t\right) &\in \mathcal{P}^{i} \stackrel{\Delta}{=} \left\{l\left(t/t\right): \quad M^{i}l\left(t/t\right) \leq N^{i}\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, s^{*}, \end{split}$$

sendo \mathcal{P}^i , $i=1,2,\ldots,s^*$ poliedros disjuntos que determinam a partição do conjunto de estados factíveis.

O Teorema 1 estabelece a solução analítica do controlador preditivo para sistemas afins por partes (PWA - *PieceWise Affine*). No entanto, sob determinadas condições, sistemas híbridos MLDSFO são equivalentes a sistemas PWA tais como

$$\Delta l (t+1) = A_i \Delta l (t) + b_i \Delta u (t),$$

$$y (t+1) = y (t) + c_i^T \Delta l (t+1),$$
se $y (t) \in \mathcal{X}_i \stackrel{\Delta}{=} \{ y (t) : D^i y (t) \leq D_0^i \}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$ (4.10)

Para estabelecer a equivalência, as definições seguintes são necessárias.

Definição 1 (Bemporad e Morari, 1999) O sistema afim por partes (4.10) é bem posto se $\Delta l\left(t+1\right)$ e $y\left(t+1\right)$ são unicamente determinados por $\Delta l\left(t\right)$, $\Delta u\left(t\right)$ e $y\left(t\right)$.

Definição 2 (Bemporad e Morari, 1999) O sistema MLDSFO (3.14), (3.15) é completamente bem posto se Δl (t+1), y (t+1), δ (t) e z (t) são unicamente determinados por Δl (t), Δu (t) e y (t).

De acordo com (Heemels et al., 2001), os sistemas PWA bem postos podem ser representados no formato MLD (Bemporad e Morari, 1999) se os conjuntos de estados, de entradas e de saídas factíveis forem limitados. Além disso, os sistemas MLD podem ser descritos no formato PWA se forem completamente bem postos. Sendo assim, os processos MLDSFO completamente bem postos também podem ser descritos no formato PWA, pois analiticamente este esquema pode ser considerado um caso particular do modelo MLD. A equivalência entre os modelos permite que as ferramentas de análise e de projeto desenvolvidas para os sistemas PWA sejam adaptadas para os processos MLDSFO.

Para o cálculo da lei de controle, deve-se inicialmente utilizar uma transformação de variáveis para escrever o vetor de parâmetros $\xi(t)$ apenas no lado direito da desigualdade das restrições do problema de otimização que implementa o controlador, obtendo-se

$$\min_{\Psi} \ S_2 \Psi,$$
 sujeito a $F_1 \Psi \leq F_2 + F_3 \xi \left(t/t \right).$ (4.11)

O problema de otimização (4.11) é do tipo mp-MILP, e sua solução para todos os ξ (t) de interesse é a solução explícita do controlador. Em (Dua e Pistikopoulos, 2000) apresenta-se um algoritmo para a solução de problemas de otimização desta natureza. Inicialmente resolve-se um problema de otimização MILP para se determinar o valor das variáveis inteiras do problema mp-MILP. Em seguida, resolve-se um problema mp-LP utilizando-se como parâmetros fixos de entrada os valores das variáveis inteiras obtidos na solução do problema MILP. A solução do problema mp-LP é então considerada um limitante superior para o problema mp-MILP. Este limitante agregará novas restrições ao problema MILP, que será novamente resolvido para fornecer novos parâmetros inteiros fixos para o problema mp-LP, e assim sucessivamente até que o limitante não possa mais ser reduzido.

A solução explícita do controlador preditivo é uma função afim do vetor de parâmetros do problema de otimização mp-MILP. Desta forma, se o processo híbrido for completamente bem posto, a lei de controle por realimentação de estados equivalente ao CP-MLDSFO será dada por

$$\Delta u\left[\xi\left(t/t\right)\right] = F^{i}\xi\left(t/t\right) + G^{i},$$
se $\xi\left(t/t\right) \in \mathcal{P}^{i} \stackrel{\Delta}{=} \left\{\xi\left(t/t\right): M^{i}\xi\left(t/t\right) \leq N^{i}\right\}, i = 1, 2, \dots, s^{*}.$

O vetor de parâmetros do CP-MLDSFO agrega as referências futuras, as saídas medidas e o incremento no vetor de estados no instante atual. O vetor $y_m\left(t\right)$ é a única informação efetivamente realimentada da planta. Isto implica que o CP-MLDSFO é uma estratégia de realimentação de saída.

4.1.6 Estabilidade do Sistema Híbrido em Malha Fechada com Controle Preditivo

Um processo em malha fechada com MPC é estável se a seqüência de controle preditivo assegura o rastreio das referências assintoticamente ou em tempo finito. Apesar do recente avanço na pesquisa sobre o MPC, existem poucos resultados na literatura demonstrando sob que condições o sistema em malha fechada é estável (Morari e Lee, 1999).

A convergência assintótica das variáveis lógicas e auxiliares do modelo é equivalente à existência de um tempo finito, t_r , tal que $\delta\left(t\right)=\delta_r$, $z\left(t\right)=z_r$, $\forall t\geq t_r$ (Passino et al., 1994). Isto implica que, existindo t_r e um conjunto de entradas de controle que conduza o sistema para uma proximidade do ponto de referência , as propriedades de estabilidade local podem ser verificadas apenas para a descrição contínua da planta.

A estabilidade pode ser assegurada agregando-se uma restrição às exigências operacionais do processo ou adicionando-se um termo ao índice de desempenho do problema de controle preditivo

(Mayne et al., 2000). Nestas abordagens, o critério de custo é empregado como uma função de Lyapunov. Se for possível demonstrar que o critério é decrescente à medida que o tempo evolui, assegura-se que a saída do sistema converge para as referências e que o incremento no esforço de controle tende para zero quando $t \to \infty$.

Agregar restrições ou adicionar termos ao critério de custo permite assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada. No entanto, pode ser necessário aumentar os horizontes de controle e de previsão para garantir a factibilidade do problema de otimização em t=0. De fato, a estabilidade estará assegurada apenas se o problema de otimização for factível. O aumento dos horizontes implica em aumento no esforço computacional envolvido na otimização do critério de desempenho. Além disso, agregar restrições ou adicionar custos pode tornar o desempenho de rastreio das referências insatisfatório, uma vez que o sistema em malha fechada torna-se menos sensível a modificações nas ponderações Q_u e Q_y (Mayne et al., 2000). Por este motivo, as abordagens descritas na literatura geralmente não são implementadas, sendo utilizadas apenas para demonstrações teóricas de estabilidade (Bemporad, Morari, Dua e Pistikopoulos, 2002).

A estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com controle preditivo pode ser assegurada agregando-se ao CP-MLDSFO uma restrição de estado terminal (Keerthi e Gilbert, 1988; Bemporad e Morari, 2001), dada por

$$l\left(t+T_{y}/t\right)=l_{r}\left(t+T_{y}\right).$$

Esta restrição impõe que o vetor de estados do sistema deve rastrear seu valor de referência ao final do horizonte de previsão T_y . Uma vez que os estados dos modelos ortonormais não têm sentido físico, pode não ser possível definir $l_r \left(t+T_y\right)$. Sendo assim, a restrição de estado terminal deve ser substituída por uma restrição de saída terminal, dada por

$$\hat{y}(t+T_u/t) = y_r(t+T_u).$$

A estabilidade do sistema em malha fechada com restrição de saída terminal é demonstrada no Apêndice D. Acrescentar uma restrição de igualdade ao problema de otimização é a principal desvantagem desta metodologia. Restrições de igualdade estão sempre ativas no processo de otimização, e oneram o esforço computacional. Em geral, o problema de otimização será factível em t=0 apenas para horizontes de controle e de previsão elevados. Por outro lado, a quantidade de variáveis binárias do problema de MPC é diretamente proporcional ao horizonte de previsão. Em algoritmos numéricos do tipo Branch and Bound, o esforço computacional envolvido na resolução do problema de otimização cresce exponencialmente com o número de variáveis binárias existentes no modelo. Sendo assim, um horizonte de previsão elevado pode inviabilizar a aplicação do controlador preditivo em tempo real.

A abordagem por custo de estado terminal consiste em adicionar ao critério de desempenho do problema de otimização o termo

$$||l(t+T_y/t)-l_r(t+T_y)||_{Q_t}^v$$
.

A ponderação Q_t deve assegurar que o índice de desempenho do problema de MPC é decrescente à medida que o tempo evolui (Bemporad et al., 2000b). No CP-MLDSFO, o custo de estado terminal deve ser substituído pelo custo de saída terminal, dado por

$$\left\| \stackrel{\wedge}{y} (t + T_y/t) - y_r (t + T_y) \right\|_{Q_t}^v.$$

A estabilidade do sistema em malha fechada com custo de saída terminal é demonstrada no Apêndice D. O custo de saída terminal é menos severo para a otimização do que a restrição de saída terminal, mas pode modificar demasiadamente o desempenho de rastreio das referências em malha fechada ao ser adicionado ao critério do CP-MLDSFO.

A estabilidade do sistema em malha fechada com MPC também pode ser demonstrada agregando-se às exigências operacionais do processo uma restrição de conjunto terminal. O conjunto terminal pode ser implementado por meio do Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis (CMSA) (Gilbert e Tan, 1991). O CMSA é a região do espaço de estados factíveis onde a trajetória autônoma do processo seguramente converge para a origem sem violar restrições. A restrição de conjunto terminal, implementada através do CMSA, impõe que o estado do processo ao final do horizonte de previsão seja tal que

$$H_{CMSA}l\left(t+T_{y}/t\right) \leq h_{CMSA}.$$

A matriz H_{CMSA} e o vetor h_{CMSA} descrevem a região de atração do processo. A estabilidade é demonstrada assumindo-se que no interior do conjunto terminal um controlador do tipo realimentação de estados estabiliza o sistema nas referências desejadas (Bemporad, Morari, Dua e Pistikopoulos, 2002). O ganho de realimentação de estados é utilizado apenas para a demonstração teórica de estabilidade, e deve ser projetado de forma a estabilizar o sistema nas referências desejadas partindo-se de qualquer ponto contido no interior do CMSA. O procedimento para calcular os CMSAs é descrito no Apêndice D.

Em (Mayne et al., 2000) menciona-se que a melhor estratégia para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada é combinar o custo de estado terminal com a restrição de conjunto terminal. Estas abordagens são as menos onerosas do ponto de vista computacional.

4.2 Controle Preditivo Robusto de Sistemas Híbridos Incertos

Um processo incerto ou variante no tempo é representado por um conjunto de modelos. As abordagens adaptativa e robusta são as mais comumente utilizadas para o controle preditivo de processos incertos ou variantes no tempo. O controlador preditivo adaptativo estima os parâmetros do modelo *on-line*. As previsões da saída do processo são calculadas utilizando-se o modelo estimado no instante atual. O controlador preditivo robusto (CPR) considera os limites da incerteza nos parâmetros do modelo. A seqüência de controle é obtida minimizando-se o valor máximo do critério de desempenho em relação aos valores possíveis para as previsões da saída (Campo e Morari, 1987).

Quando os coeficientes incertos são definidos por intervalos de pertinência e não há dúvida com relação à ordem do modelo, a incerteza é do tipo estruturada. No esquema MLDSFO com incertezas estruturadas, as dinâmicas do processo híbrido são modeladas por meio de séries de funções ortonormais. Uma estimativa para a máxima incerteza nos coeficientes dos desenvolvimentos ortonormais é calculada utilizando-se as respostas ao impulso das dinâmicas do processo.

Com o procedimento de modelagem proposto neste trabalho, assegura-se que todas as respostas ao impulso do processo estão representadas no modelo. Conhecendo-se os intervalos de pertinência dos coeficientes, o controle preditivo de sistemas MLDSFO incertos pode ser formulado como uma abordagem robusta. A seqüência de incrementos no esforço de controle, dada por

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+T_u-1) \end{bmatrix},$$

pode ser obtida minimizando-se o critério de desempenho

$$J\left[\Delta\mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_{m}(t), \mathbf{y}_{r}(t), \eta\right] = \sum_{k=0}^{T_{u}-1} \|\Delta u(t+k)\|_{Q_{u}}^{v} + \sum_{k=1}^{T_{y}} \|\dot{y}(t+k/t, \eta) - y_{r}(t+k)\|_{Q_{y}}^{v},$$
(4.12)

sendo que

 $\Delta l\left(t/t\right)$ é o incremento no vetor de estados no instante atual;

 $y_{m}\left(t
ight)$ é o vetor de saídas medidas no instante atual;

 $\Delta u\left(t+k\right)$ é o incremento no vetor de controle k passos a frente do instante atual;

 $\stackrel{\wedge}{y}(t+k/t,\eta)$ é o vetor de saídas previstas k passos a frente do instante atual; é uma matriz que agrega os coeficientes incertos do modelo; $\Delta \mathbf{u}(t)$ é um vetor que agrega os incrementos futuros no vetor de controle; é um vetor que agrega as referências de saída futuras; $\mathbf{y}_{r}\left(t\right)$ T_u e T_y são os horizontes de controle e de previsão; Q_u e Q_y são ponderações sobre os incrementos no esforço de controle e sobre os erros de rastreio das referências de saída; é um sub índice que denota referência; rdefine a norma utilizada no critério de custo. v

Na abordagem robusta, o critério de desempenho (4.12) é minimizado considerando-se o maior erro de rastreio das referências de saída possível no espaço das incertezas. Esta abordagem é implementada como um problema de otimização do tipo *min-max* (Campo e Morari, 1987), dado por

$$\Delta \mathbf{u}^{*}(t) = \min_{\Delta \mathbf{u}(t)} \left\{ \max_{\eta} J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_{m}(t), \mathbf{y}_{r}(t), \eta\right] \right\}.$$
(4.13)

Considerando-se que

$$\max_{\eta} J\left[\Delta \mathbf{u}\left(t\right), \Delta l\left(t/t\right), y_{m}\left(t\right), \mathbf{y}_{r}\left(t\right), \eta\right] = \gamma^{*},$$

e sendo $\gamma \geq \gamma^*$ um limitante superior para o problema de maximização, o problema de otimização min-max (4.13) pode ser reescrito de forma equivalente como

sendo Λ um hiper retângulo de incertezas. O conjunto de previsões do comportamento futuro do processo deve ser obtido utilizando-se as equações de estado e de saída do modelo MLDSFO com incertezas estruturadas (3.24). As restrições (3.25) devem ser agregadas ao problema de otimização (4.14) para se assegurar que as exigências operacionais do processo sejam respeitadas e que as variáveis binárias e auxiliares do modelo estejam corretamente definidas. As restrições do problema de otimização resultante incluem a previsão incerta da saída ao longo do horizonte T_y-1 . O valor esperado da previsão da saída deve ser utilizado nas restrições do modelo MLDSFO para se determinar as variáveis binárias e auxiliares ao longo do horizonte futuro de previsão.

(4.17)

4.2.1 Controle Preditivo Robusto com Critério de Desempenho Baseado na Norma Quadrática

A sequência de controle preditivo robusto (CPR) para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas pode ser obtida resolvendo-se um problema de otimização cujo critério de desempenho é baseado na norma quadrática ponderada dos incrementos no esforço de controle e erros de rastreio das referências de saída. O critério é dado por

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_{m}(t), \mathbf{y}_{r}(t), \eta\right] = \sum_{k=0}^{T_{u}-1} \left\|\Delta u(t+k)\right\|_{Q_{u}}^{2} + \sum_{k=1}^{T_{y}} \left\|\dot{y}(t+k/t, \eta) - y_{r}(t+k)\right\|_{Q_{y}}^{2}.$$
(4.15)

O CPR-MLDSFO com critério de custo baseado na norma quadrática é escrito como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(t), \gamma} \gamma, \tag{4.16}$$
sujeito a
$$\sum_{k=0}^{T_u - 1} \|\Delta u(t+k)\|_{Q_u}^2 + \sum_{k=1}^{T_y} \left\| \dot{y}(t+k/t, \eta) - y_r(t+k) \right\|_{Q_y}^2 \le \gamma, \quad \eta \in \Lambda,$$

$$M_l \Delta l(t+k/t) + M_u \Delta u(t+k) + M_\delta \delta(t+k/t) + M_z \Delta z(t+k/t) + \dots + M_u \dot{y}(t+k/t, \eta) < M, \quad k = 0, 1, \dots, T_y - 1.$$

Aparentemente o problema de otimização (4.16)-(4.17) contém infinitas restrições, pois a desigualdade que estabelece a equivalência com o problema min-max deve ser satisfeita para todo $\eta \in \Lambda$. Existem supostamente infinitas restrições porque a entrada de controle deve ser determinada considerando-se o pior desempenho de rastreio no espaço das incertezas, o qual descreve infinitos modelos do processo. No entanto, as equações de estado e de saída do modelo MLDSFO com incertezas estruturadas, utilizadas para o cálculo das previsões, são funções afins dos vetores de incertezas. Estes vetores, por sua vez, estão contidos no hiper retângulo Λ , um conjunto convexo, fechado e limitado. Como o critério de desempenho quadrático é uma função convexa em relação às previsões da saída, tem-se uma composição de funções convexas. Isto implica que o critério de desempenho é convexo com relação ao vetor de incertezas η . Desta forma, a solução do problema de otimização (4.16)-(4.17) é alcançada em um dos vértices do hiper retângulo Λ . Como qualquer hiper retângulo possui uma quantidade finita de lados, é possível reescrever o problema de otimização (4.16)-(4.17) com um número finito de restrições. A solução do problema pode então ser obtida em tempo finito desde que sua região factível seja não-vazia

As variáveis do CPR-MLDSFO são os vetores de incrementos da entrada de controle ao longo do horizonte T_u-1 , as variáveis binárias e os incrementos das variáveis auxiliares ao longo do horizonte T_y-1 , e a variável escalar γ . A função-objetivo de (4.16) e as restrições do modelo MLDSFO (4.17) são lineares. As restrições que geram a equivalência com o problema (4.13) são quadráticas. Sendo assim, o CPR-MLDSFO pode ser escrito de forma compacta como

$$\min_{\Psi} S_2 \Psi,$$
 (4.18) sujeito a $F_1 \Psi \leq F_2 + F_3 \Delta l \left(t/t \right) + F_4 y_m \left(t \right) + F_5 \mathbf{y}_r \left(t \right),$ (4.19)

As matrizes F_i , i=1,2,3,4,5 devem ser definidas adequadamente de acordo com as restrições lineares, $C(\Psi)$ agrega as restrições não-lineares derivadas do problema (4.13) e o vetor Ψ agrega as variáveis do problema de otimização:

$$\Psi = \left[\begin{array}{c} \Omega \\ \Theta \\ \Xi \\ \gamma \end{array} \right],$$

sendo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Delta u \left(t \right) \\ \vdots \\ \Delta u \left(t + T_u - 1 \right) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \delta \left(t/t \right) \\ \vdots \\ \delta \left(t + T_y - 1/t \right) \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \Delta z \left(t/t \right) \\ \vdots \\ \Delta z \left(t + T_y - 1/t \right) \end{bmatrix}.$$

O problema de otimização (4.18)-(4.19) é do tipo MINLP (*Mixed-Integer Non-Linear Programming*), e pode ser resolvido utilizando-se algoritmos de otimização numérica baseados no método *Branch and Bound* (Fletcher e Leyffer, 1995), por exemplo. Métodos contínuos baseados em SQP (*Sequential Quadratic Programming*) não podem ser utilizados para resolver problemas de otimização do tipo MINLP devido à presença de variáveis binárias.

Utilizando-se os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, por exemplo, o CPR-MLDSFO pode ser escrito como

sujeito a
$$\Delta u^T(t) Q_u \Delta u(t) + \left[\stackrel{\wedge}{y}(t+1/t,\eta) - y_r(t+1) \right]^T Q_y \left[\stackrel{\wedge}{y}(t+1/t,\eta) - y_r(t+1) \right] + \left[\stackrel{\wedge}{y}(t+2/t,\eta) - y_r(t+2) \right]^T Q_y \left[\stackrel{\wedge}{y}(t+2/t,\eta) - y_r(t+2) \right] \leq \gamma, \quad \eta \in \Lambda,$$

$$M_l \Delta l(t/t) + M_u \Delta u(t) + M_\delta \delta(t/t) + M_z \Delta z(t/t) + M_y y_m(t) \leq M,$$

$$M_l \Delta l(t+1/t) + M_\delta \delta(t+1/t) + M_z \Delta z(t+1/t) + M_y \stackrel{\wedge}{y}(t+1/t,\eta) \leq M,$$

sendo as previsões da saída dadas por

$$\hat{y}(t+1/t,\eta) = y_m(t) + c_l^T(\eta_l) H_l \Delta l(t/t) + \left[c_l^T(\eta_l) H_u + c_u^T(\eta_u) \right] \Delta u(t) + \\
+ \left[c_l^T(\eta_l) H_\delta + c_\delta^T(\eta_\delta) \right] \delta(t/t) + \left[c_l^T(\eta_l) H_z + c_z^T(\eta_z) \right] \Delta z(t/t) , \\
\hat{y}(t+2/t,\eta) = y_m(t) + \\
+ c_l^T(\eta_l) \left(H_l + H_l^2 \right) \Delta l(t/t) + \left[c_l^T(\eta_l) (I_{N \times N} + H_l) H_u + c_u^T(\eta_u) \right] \Delta u(t) + \\
+ \left[c_l^T(\eta_l) (I_{N \times N} + H_l) H_\delta + c_\delta^T(\eta_\delta) \right] \delta(t/t) + \left[c_l^T(\eta_l) H_\delta + c_\delta^T(\eta_\delta) \right] \delta(t+1/t) + \\
+ \left[c_l^T(\eta_l) (I_{N \times N} + H_l) H_z + c_z^T(\eta_z) \right] \Delta z(t/t) + \left[c_l^T(\eta_l) H_z + c_z^T(\eta_z) \right] \Delta z(t+1/t) .$$

As variáveis do problema de otimização podem ser agregadas no vetor

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Delta u (t) \\ \delta (t/t) \\ \delta (t+1/t) \\ \Delta z (t/t) \\ \Delta z (t+1/t) \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o CPR-MLDSFO com horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$ pode ser reescrito na forma compacta (4.18)-(4.19) definindo-se

$$\mathbf{C}\left(\Psi\right) = \Delta u^{T}\left(t\right)Q_{u}\Delta u\left(t\right) + \left[\dot{y}\left(t+1/t,\eta\right) - y_{r}\left(t+1\right)\right]^{T}Q_{y}\left[\dot{y}\left(t+1/t,\eta\right) - y_{r}\left(t+1\right)\right] + \left[\dot{y}\left(t+2/t,\eta\right) - y_{r}\left(t+2\right)\right]^{T}Q_{y}\left[\dot{y}\left(t+2/t,\eta\right) - y_{r}\left(t+2\right)\right] - \gamma, \quad \eta \in \Lambda^{\angle},$$

onde Λ^{\angle} é o conjunto dos vértices de Λ .

4.2.2 Controle Preditivo Robusto com Critério de Desempenho Baseado na Norma Infinita

A seqüência de controle preditivo robusto (CPR) para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas pode ser calculada minimizando-se um critério de custo baseado na norma infinita ponderada dos incrementos no esforço de controle e erros de rastreio das referências de saída. O critério é dado por

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t), \Delta l(t/t), y_m(t), \mathbf{y}_r(t), \eta\right] = \left[\|\Delta u(t+j)\|_{Q_u}^{\infty}, \|\dot{y}(t+k/t, \eta) - y_r(t+k)\|_{Q_y}^{\infty} \right],$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, T_y.$$
(4.20)

Na abordagem robusta a seqüência de incrementos na entrada de controle é determinada minimizando-se o critério (4.20) considerando-se o maior erro de rastreio das referências de saída possíveis no espaço das incertezas. Utilizando-se a definição da norma infinita de um vetor, a otimização do critério de custo (4.20) pode ser escrita como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(t)} \left\{ \max_{\eta} \left\{ \max_{j,k,i,s} \left[Q_u \left| \Delta u_i \left(t + j \right) \right|, Q_y \left| \hat{y}_s^{\wedge} \left(t + k/t, \eta \right) - y_{s,r} \left(t + k \right) \right| \right] \right\} \right\}, (4.21)$$

$$j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \quad k = 1, 2, \dots, T_y, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

O problema de otimização (4.21) é do tipo min-max-max. Assumindo-se que

$$\max_{\eta} \left\{ \max_{j,k,i,s} \left[Q_u \left| \Delta u_i \left(t + j \right) \right|, Q_y \left| \hat{y}_s^{\wedge} \left(t + k/t, \eta \right) - y_{s,r} \left(t + k \right) \right| \right] \right\} = \gamma^*, \\ j = 0, 1, \dots, T_u - 1, \quad k = 1, 2, \dots, T_y, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

e sendo $\gamma \geq \gamma^*$ um limitante superior para os problemas de maximização, o problema de otimização min-max-max pode ser reescrito de forma equivalente como

$$\begin{aligned} & \underset{\Delta \mathbf{u}(t), \gamma}{\min} \quad \gamma, \\ & \text{sujeito a} \quad -\gamma \leq Q_u \Delta u_i \left(t+j\right) \leq \gamma, \ j=0,1,\ldots,T_u-1, \ i=1,2,\ldots,n, \\ & -\gamma \leq Q_y \left[\mathring{y_s} \left(t+k/t,\eta\right) - y_{s,r} \left(t+k\right) \right] \leq \gamma, \\ & k=1,2,\ldots,T_u, \ s=1,2,\ldots,m, \ \eta \in \Lambda^{\angle}, \end{aligned}$$

sendo Λ^{\angle} o conjunto dos vértices de Λ . O índice de desempenho e as restrições do problema de otimização (4.22) são lineares. As desigualdades do modelo MLDSFO com incertezas estruturadas em (3.25), que devem ser agregadas ao problema de otimização (4.22), também são lineares.

Considerando-se um processo SISO (Single-Input, Single-Output) e utilizando-se os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, por exemplo, o CPR-MLDSFO com critério de custo baseado na norma infinita ponderada dos incrementos no esforço de controle e erros de rastreio das referências de saída é dado por

$$\begin{split} & \underset{\Delta \mathbf{u}(t), \gamma}{\min} \quad \gamma, \\ & \text{sujeito a} \quad -\gamma \leq Q_u \Delta u\left(t\right) \leq \gamma, \\ & -\gamma \leq Q_y \left[\stackrel{\wedge}{y}\left(t+1/t, \eta\right) - y_r\left(t+1\right) \right] \leq \gamma, \quad \forall \eta \in \Lambda^\angle, \\ & -\gamma \leq Q_y \left[\stackrel{\wedge}{y}\left(t+2/t, \eta\right) - y_r\left(t+2\right) \right] \leq \gamma, \quad \forall \eta \in \Lambda^\angle, \\ & M_l \Delta l\left(t/t\right) + M_u \Delta u\left(t\right) + M_\delta \delta\left(t/t\right) + M_z \Delta z\left(t/t\right) + M_y y_m\left(t\right) \leq M, \\ & M_l \Delta l\left(t+1/t\right) + M_\delta \delta\left(t+1/t\right) + M_z \Delta z\left(t+1/t\right) + M_y \stackrel{\wedge}{y}\left(t+1/t, \eta\right) \leq M. \end{split}$$

Este problema de otimização também pode ser escrito na forma compacta (4.18)-(4.19).

4.2.3 Exemplo: Controle Preditivo Robusto de um Processo Híbrido com Modos Próprios Sobreamortecidos e Incertos

Considere o projeto de um controlador preditivo robusto para o processo híbrido incerto

$$y\left(t+1,\eta_{1}\right)=G_{1}\left(q^{-1},\eta_{1}\right)u\left(t\right)=\frac{1.25+0.65q^{-1}}{1-\eta_{1}0.65q^{-1}}u\left(t\right) \quad \text{ se } \quad y\left(t\right)\geq0,$$

$$y\left(t+1,\eta_{2}\right)=G_{2}\left(q^{-1},\eta_{2}\right)u\left(t\right)=\frac{1.35+0.75q^{-1}}{1-\eta_{2}0.75q^{-1}}u\left(t\right) \quad \text{ se } \quad y\left(t\right)<0,$$

em que $\eta_1,\eta_2\in[0.5,1.0]$ são parâmetros incertos. Utilizando-se N=4 funções ortonormais e bases de Laguerre, os pólos obtidos resolvendo-se o problema de otimização (2.6) são $p_1=0.32$ e $p_2=0.40$. Os coeficientes e a máxima incerteza dos modelos ortonormais determinados de acordo com as equações (2.13) são dados por

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix}
1.6388 \times 10^0 \\
9.9541 \times 10^{-1} \\
2.0318 \times 10^{-2} \\
9.0337 \times 10^{-2}
\end{bmatrix}, dc_1 = \begin{bmatrix}
1.0530 \times 10^{-1} \\
4.2919 \times 10^{-1} \\
3.4938 \times 10^{-1} \\
1.3189 \times 10^{-1}
\end{bmatrix},$$

$$\bar{c}_2 = \begin{bmatrix}
1.9577 \times 10^0 \\
1.1927 \times 10^0 \\
1.9581 \times 10^{-2} \\
1.6303 \times 10^{-1}
\end{bmatrix}, dc_2 = \begin{bmatrix}
2.0269 \times 10^{-1} \\
7.1225 \times 10^{-1} \\
6.0166 \times 10^{-1} \\
2.7228 \times 10^{-1}
\end{bmatrix}.$$

Uma vez que o modelo MLDSFO é utilizado para controle robusto, os lados do hiper retângulo que delimita as incertezas devem ser escalonados de acordo com o problema de otimização (2.17). As soluções deste problema para o processo considerado são dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 1.3136 \times 10^{-1} \\ 1.3830 \times 10^0 \\ 1.7372 \times 10^0 \\ 3.1684 \times 10^0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 5.9311 \times 10^{-2} \\ 1.7760 \times 10^0 \\ 2.4544 \times 10^0 \\ 3.8680 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 4.2 ilustra-se o desempenho de rastreio das referências do sistema em malha fechada com CPR-MLDSFO e critério de desempenho baseado na norma quadrática. Ilustra-se na mesma figura o desempenho de rastreio das referências admitindo-se que o modelo do processo é invariante no tempo (CP-MLDSFO). Em ambas as simulações utilizou-se os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$, e as ponderações $Q_u=2.5\times 10^{-3}$ e $Q_y=1\times 10^{-3}$. O sistema parte de y (0) = -3 e deve seguir uma referência y_r (t) = 3 no intervalo $0 \le t < 8s$. Quando t=8s, a referência é modificada para y_r (t) = -3, até o final da simulação. Os parâmetros incertos variaram

da seguinte forma: $\eta_1=\eta_2=1$ para t=0; $\eta_1=\eta_2=0.5$ no intervalo $1s\leq t<10s$; $\eta_1=\eta_2=0.75$ para $t\geq 10s$.

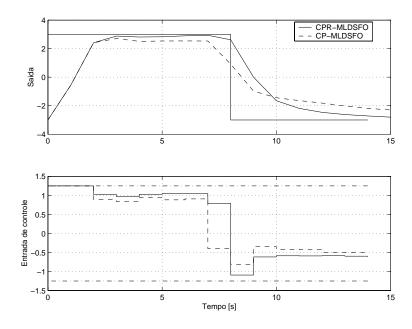


Figura 4.2: CPR-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos.

A referência foi rastreada em ambos os casos devido ao efeito integral dos modelos incrementais em malha fechada. O desempenho de rastreio com CPR-MLDSFO é em geral melhor do que o desempenho de rastreio das referências com CP-MLDSFO. Isto pode ser melhor observado na Figura 4.3, que mostra os valores absolutos dos erros de rastreio das referências em ambos os casos.

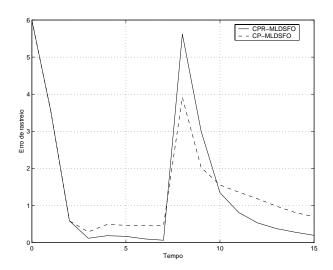


Figura 4.3: Erros de rastreio da referência de saída com CPR-MLDSFO e com CP-MLDSFO.

O problema de otimização do CPR-MLDSFO é composto por 20 variáveis, 108 restrições

lineares e 16 restrições quadráticas. Utilizando-se a mesma quantidade de funções ortonormais para a modelagem das dinâmicas do processo e os mesmos horizontes de controle e de previsão, o problema de otimização do CP-MLDSFO é composto por 19 variáveis, 106 restrições lineares e nenhuma restrição não-linear. Na abordagem robusta existem restrições não-lineares, e a quantidade de variáveis e de restrições lineares do problema de otimização associado é semelhante ao do caso nominal. Isto implica em aumento no esforço computacional necessário para a determinação da seqüência ótima de controle preditivo robusto, quando comparado ao esforço computacional do CP-MLDSFO. O tempo de simulação do CPR-MLDSFO foi aproximadamente 12 vezes maior do que o tempo de simulação do CP-MLDSFO. No entanto, a abordagem robusta possibilita uma melhoria no desempenho de rastreio das referências com relação ao caso nominal.

Na Figura 4.4 compara-se os desempenhos de rastreio das referências do sistema híbrido incerto em malha fechada com CPR-MLDSFO e critérios de custo baseados nas normas infinita e quadrática ponderadas dos incrementos no esforço de controle e dos erros de rastreio das referências de saída. As ponderações e os horizontes utilizados nas simulações foram $Q_u=5\times 10^{-3},\ Q_y=1\times 10^{-3},\ T_u=1$ e $T_y=2$. Os parâmetros incertos foram variados da seguinte forma: $\eta_1=\eta_2=1$ para t=0; $\eta_1=\eta_2=0.5$ no intervalo $1s\leq t<10s$; $\eta_1=\eta_2=0.75$ para $t\geq 10s$.

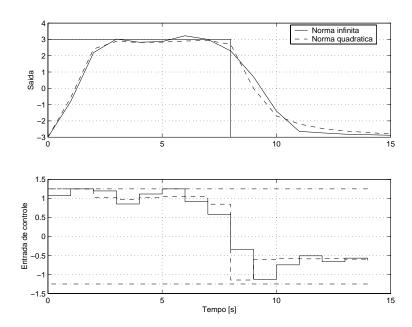


Figura 4.4: CPR-MLDSFO do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos, e critérios de desempenho baseados nas normas quadrática e infinita.

Os desempenhos de rastreio das referências com norma quadrática e com norma infinita são semelhantes. Utilizando-se N=4 funções em cada base ortonormal de Laguerre, o CPR-

MLDSFO com critério de custo baseado na norma quadrática é composto por 20 variáveis, 108 restrições lineares e 16 restrições quadráticas. O CPR-MLDSFO com critério de custo baseado na norma infinita é composto por 20 variáveis e 140 restrições lineares. Os esforços computacionais observados nas simulações são semelhantes pois, apesar da inexistência de restrições quadráticas no problema de otimização baseado na norma infinita, houve um aumento de aproximadamente 30% na quantidade de restrições lineares.

4.2.4 Exemplo: Controle Preditivo Robusto da Temperatura em um Ambiente com Sistema de Climatização Sujeito a Infiltrações de Ar

O modelo MLDSFO com incertezas estruturadas de um ambiente com sistema de climatização sujeito a infiltrações de ar, descrito por

$$\begin{split} \Delta l\left(t+1\right) &= H_l \Delta l\left(t\right) + H_u \Delta u\left(t\right),\\ y\left(t+1,\eta\right) &= y\left(t\right) + c_l^T\left(\eta\right) \Delta l\left(t+1\right),\\ \text{sujeito a} \quad M_u u\left(t\right) + M_\delta \delta\left(t\right) &\leq M, \end{split}$$

é apresentado no Apêndice C. As entradas do processo HVAC (Heating, Ventilating, and Air-Conditioning) são a temperatura do ar de insuflamento, a taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado e a temperatura do ar externo. A taxa de geração de calor sensível pode ser estimada (Moreira, 2001; Moreira, Lima e de Mato Gurgel, 2002). Embora a temperatura do ar externo possa ser medida, o fluxo que entra e que sai do ambiente climatizado através de vazamentos e de infiltrações é incerto. Sendo assim, um controlador preditivo robusto deve ser projetado para regular a temperatura do ambiente climatizado.

A seqüência robusta de incrementos na temperatura do ar de insuflamento pode ser obtida resolvendo-se o problema de otimização (4.16)-(4.17), por exemplo. Os modelos ortonormais do processo HVAC incerto foram identificados na Seção 2.5.1. Como o modelo é utilizado para controle robusto, os lados do hiper retângulo das incertezas devem ser escalonados de acordo com o problema de otimização (2.17), cujas soluções para o processo considerado também podem ser encontradas na Seção 2.5.1.

Na Figura 4.5 ilustra-se o desempenho de rastreio das referências do sistema HVAC incerto em malha fechada com CPR-MLDSFO. Ilustra-se também a entrada de controle temperatura do ar de insuflamento, o calor sensível gerado no ambiente e a temperatura do ar externo ao longo da simulação. Utilizou-se no critério de custo (4.15) as ponderações $Q_u=0.1$ e $Q_y=2.5$, e os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$. As dinâmicas do sistema HVAC incerto foram representadas

utilizando-se bases de Laguerre com N=3 funções ortonormais. A válvula de insuflamento pôde atuar em 31 níveis igualmente espaçados, ou seja, r=5. O rastreio da referência variável foi conseguido com pequenos desvios.

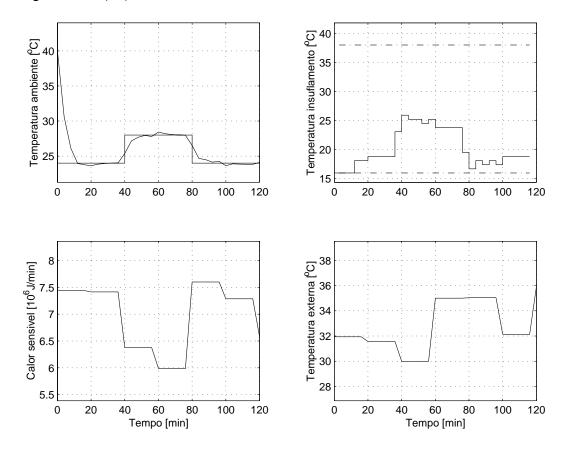


Figura 4.5: CPR-MLDSFO do sistema HVAC incerto.

Na Figura 4.6 apresenta-se os erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com CP-MLD, além do fluxo externo infiltrado ao longo da simulação. No CP-MLDSFO o processo HVAC foi representado por um modelo invariante no tempo estimado utilizando-se bases de Laguerre com N=3 funções ortonormais. No CP-MLD o comportamento futuro do processo HVAC foi calculado utilizando-se o modelo termodinâmico discretizado do Apêndice A. Em todos os casos, o critério de custo utilizou as ponderações $Q_u=0.1$ e $Q_y=2.5$, e os horizontes $T_u=1$ e $T_y=2$. Além disso, as válvulas de insuflamento puderam atuar em 31 níveis igualmente espaçados (r=5), e utilizou-se as mesmas evoluções para a taxa de geração de calor sensível, para a temperatura do ar externo e para o fluxo externo infiltrado. Os erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO são em geral inferiores aos observados com CP-MLDSFO e com CP-MLD.

Na Figura 4.7 apresenta-se os erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com CP-MLD para uma nova evolução do fluxo externo infiltrado. Quando o fluxo

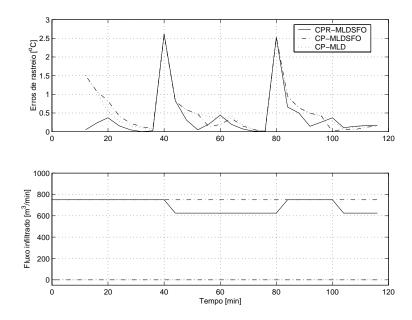


Figura 4.6: Erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com CP-MLD - Caso 1.

externo infiltrado é inexistente ou menor do que na simulação anterior, os erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO são em geral superiores aos observados com CP-MLDSFO e com CP-MLD.

O problema de otimização do CPR-MLDSFO é composto por 7 variáveis, 6 restrições lineares e 512 restrições quadráticas. Os problemas de otimização do CP-MLDSFO e do CP-MLD são compostos por 6 variáveis, 4 restrições lineares e nenhuma restrição não-linear. Observouse um aumento de aproximadamente 22 vezes no tempo de simulação entre as abordagens nominais (CP-MLDSFO e CP-MLD) e a abordagem robusta (CPR-MLDSFO). O CPR-MLDSFO conduz a um maior esforço computacional para a determinação da seqüência de controle, mas permite reduzir os erros de rastreio da referência quando há infiltração de ar externo no ambiente climatizado.

4.3 Estabilidade do Sistema Híbrido Incerto em Malha Fechada com Controle Preditivo Robusto

Em (Kolmanovsky e Gilbert, 1995) propõe-se um algoritmo recursivo para determinar o Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis (CMSA) de sistemas afins, representados no espaço de estados, com perturbação aditiva nas equações de estado e de saída do modelo. O CMSA é a região do espaço de estados onde a trajetória autônoma do processo incerto seguramente converge para

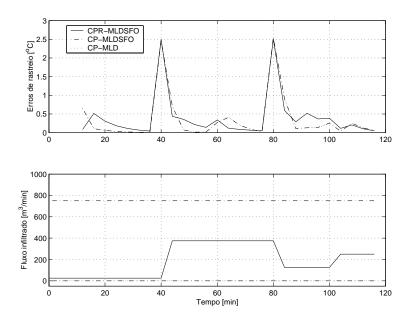


Figura 4.7: Erros de rastreio da referência com CPR-MLDSFO, com CP-MLDSFO e com CP-MLD - Caso 2.

uma vizinhança da origem sem violar restrições. A evolução futura do processo incerto partindo de um vetor de estados contido no CMSA é desconhecida, mas seguramente é estável, não viola restrições e está contida neste conjunto em todos os instantes futuros. O processo incerto será estável em malha fechada se o vetor de estados do modelo estiver contido no conjunto terminal ao final do horizonte de previsão. A demonstração de estabilidade assume que, no interior do CMSA, um ganho de realimentação de estados K conduz o estado do processo para a origem.

A estabilidade robusta do sistema híbrido incerto em malha fechada com CPR-MLDSFO também pode ser assegurada adicionando-se ao critério de desempenho do problema de otimização um custo de estado terminal. O custo de estado terminal deve assegurar que o critério de desempenho é decrescente, mesmo prevendo-se o maior erro de rastreio das referências de saída. Em (Zheng e Morari, 1994) assegura-se a estabilidade robusta otimizando-se o desempenho nominal do processo e agregando-se ao problema de otimização uma restrição de contração robusta. A restrição de contração robusta exige que o erro de previsão do estado seja decrescente em todo o espaço das incertezas. As abordagens por custo de estado terminal e por restrição de contração normalmente tornam o desempenho de rastreio das referências insatisfatório e acarretam problemas de factibilidade para a otimização. Por este motivo, o CMSA é uma escolha adequada para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada com controle preditivo (Mayne et al., 2000).

Em (Mukai et al., 2002) o CMSA é projetado para sistemas afins por partes (PWA - *PieceWise Affine*), representados no espaço de estados, com perturbação aditiva nas equações de estado e

de saída. O CMSA é a intersecção dos conjuntos máximos de saídas admissíveis calculados para cada partição do modelo do processo. O algoritmo para a determinação do CMSA de processos afins com perturbação aditiva nas equações de estado e de saída é apresentado no Apêndice D.

Embora a restrição de conjunto terminal seja pouco onerosa do ponto de vista computacional (Mayne et al., 2000), os projetos de CMSA's mencionados anteriormente necessitam do conhecimento a priori da amplitude máxima da perturbação do modelo. Esta informação normalmente não está disponível. Por outro lado, os intervalos de pertinência dos coeficientes incertos do modelo MLDSFO são estimados. Uma vez que as incertezas da planta são mapeadas unicamente em intervalos de pertinência dos coeficientes da equação de saída do modelo, o algoritmo descrito em (Mukai et al., 2002) não é aplicável ao cálculo do CMSA de sistemas MLDSFO. O projeto do conjunto máximo de saídas admissíveis de sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas é apresentado a seguir.

4.3.1 Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis de Sistemas Híbridos com Incertezas Estruturadas

Os sistemas MLDSFO completamente bem postos são equivalentes a sistemas PWA com incertezas estruturadas tais como (Heemels et al., 2001)

$$l(t+1) = A_{i}l(t) + b_{i}u(t),$$

$$y(t+1, \eta_{i}) = c_{i}^{T}(\eta_{i}) l(t+1), \quad c_{i}(\eta_{i}) \in [c_{i,\min}, c_{i,\max}],$$
se $y(t) \in \mathcal{X}_{i} \stackrel{\Delta}{=} \{y(t) : D^{i}y(t) \leq D_{0}^{i}\}, \quad i = 1, 2, ..., s.$ (4.23)

O conjunto máximo de saídas admissíveis de um sistema MLDSFO completamente bem posto é calculado utilizando-se os pares (A_i,b_i) , $i=1,2,\ldots,s$, os intervalos de pertinência dos vetores incertos c_i (η_i) , e um conjunto de ganhos de realimentação de estados, K_i , $i=1,2,\ldots,s$ definidos para cada partição do modelo PWA (4.23). No interior do CMSA, o modelo afim por partes que descreve o comportamento do processo é dado por

$$l(t+1) = (A_i - b_i K_i) l(t) = \mathcal{A}_i l(t),$$

$$y(t+1, \eta_i) = c_i^T(\eta_i) l(t+1),$$
se $y(t) \in \mathcal{X}_i \cap CMSA, i = 1, 2, \dots, s.$ (4.24)

Os ganhos K_i são utilizados na demonstração teórica de estabilidade, e podem ser calculados resolvendo-se um problema LQR (*Linear Quadratic Regulator*) para cada partição do modelo (4.23). Admitindo-se que o espaço de saídas factíveis é definido pelas desigualdades

$$S^{i}y(t) \leq r^{i}, \quad i = 1, 2, \dots, s^{*},$$

o CMSA de cada partição do modelo (4.24), denotado por $\mathcal{O}_{\infty,m}$, $m=1,2,\ldots,s$, é calculado executando-se o Algoritmo 1, proposto a seguir.

Algoritmo 1 Determinação do CMSA de Sistemas PWA com Incertezas Estruturadas

- (i) Faça t = 0 e vá para (ii);
- (ii) Resolva

$$\max_{x} \ J_{i,m} \left(x \right) = f_{i} \left[c_{m}^{T} \left(\eta_{m} \right) \mathcal{A}_{m}^{t+1} x \right], \quad i = 1, 2, \dots, s^{*}, \quad m = 1, 2, \dots, s, \quad \eta_{m} \in \Lambda_{m},$$
 sujeito a $f_{j} \left[c_{m}^{T} \left(\eta_{m} \right) \mathcal{A}_{m}^{k} x \right] \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, s^{*}, \quad m = 1, 2, \dots, s,$
$$k = 0, 1, \dots, t, \quad \eta_{m} \in \Lambda_{m},$$

sendo $f_i(y) = S^i y - r^i$.

SE
$$J_{i,m}^* \leq 0$$
, $\forall i=1,2,\ldots,s^*$, $\forall m=1,2,\ldots,s$, faça $t^*=t$ e calcule

$$\mathcal{O}_{\infty} = \left\{ x \in \Re^n : \ f_j \left[c_m^T (\eta_m) \mathcal{A}_m^t x \right] \le 0, \right.$$

$$j = 1, 2, \dots, s^*, \ m = 1, 2, \dots, s, \ t = 0, 1, \dots, t^*, \ \eta_m \in \Lambda_m \right\};$$

SENÃO, faça
$$t = t + 1$$
 e volte para (ii).

As restrições dos problemas de otimização contidos no passo (ii) do Algoritmo 1 são partições do espaço de estados correspondentes às evoluções possíveis da saída do processo, para todos os instantes de tempo entre o inicial (k=0) e o presente (k=t), para todos os valores das incertezas das dinâmicas do processo. As soluções $J_{i,m}^*$, $i=1,2,\ldots,s^*$, $m=1,2,\ldots,s$ medem as máximas violações da i-ésima restrição que define o espaço de saídas factíveis, por parte das evoluções possíveis da m-ésima dinâmica do processo no instante seguinte (k=t+1). Quando $J_{i,m}^* \leq 0$, $i=1,2,\ldots,s^*$ o vetor de estados correspondente à saída futura certamente estará contido em uma partição do espaço de estados determinada pela evolução passada do processo. Esta é a definição do Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis (CMSA).

O CMSA do processo híbrido incerto MLDSFO pode ser calculado por meio do Algoritmo alternativo 2, descrito a seguir.

Algoritmo 2 Determinação do CMSA de Sistemas PWA com Incertezas Estruturadas - Formulação Aparentemente Semi-Infinita

(i) - Faça
$$t = 0$$
 e vá para (ii);

(ii) - Resolva

$$\begin{split} \max_{x,\sigma_{i,m}} & \sigma_{i,m}, \quad i = 1, 2, \dots, s^*, \quad m = 1, 2, \dots, s, \\ & \text{sujeito a} \quad f_i \left[c_m^T \left(\eta_m \right) \mathcal{A}_m^{t+1} x \right] \geq \sigma_{i,m}, \quad i = 1, 2, \dots, s^*, \quad m = 1, 2, \dots, s, \quad \eta_m \in \Lambda_m, \\ & \quad f_j \left[c_m^T \left(\eta_m \right) \mathcal{A}_m^k x \right] \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, s^*, \quad m = 1, 2, \dots, s, \\ & \quad k = 0, 1, \dots, t, \quad \eta_m \in \Lambda_m, \end{split}$$

$$& \text{sendo} \quad f_i \left(y \right) = S^i y - r^i. \end{split}$$

$$& SE \quad \sigma_{i,m}^* \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, s^*, \quad \forall m = 1, 2, \dots, s \quad faça \quad t^* = t \quad e \quad calcule \end{split}$$

$$& \mathcal{O}_{\infty} = \left\{ x \in \Re^n : f_j \left[c_m^T \left(\eta_m \right) \mathcal{A}_m^t x \right] \leq 0, \\ & \quad j = 1, 2, \dots, s^*, \quad m = 1, 2, \dots, s, \quad t = 0, 1, \dots, t^*, \quad \eta_m \in \Lambda_m \right\};$$

SENÃO, faça t = t + 1 e volte para (ii).

Os problemas de otimização contidos no passo (ii) do Algoritmo 2 são aparentemente do tipo semi infinitos, pois os critérios de custo são lineares e estão sujeitos a infinitas restrições lineares, uma vez que os índices de custo devem ser maximizados verificando as desigualdades para todo $\eta_m \in \Lambda_m$. No entanto, como as equações de previsão da saída do processo são funções lineares dos vetores de incertezas e as desigualdades que definem o espaço de saídas factíveis são funções afins com relação às saídas, tem-se uma composição de funções convexas. Como os vetores de incertezas estão contidos em conjuntos convexos, fechados e limitados, as soluções dos problemas de otimização contidos no Algoritmo 2 são alcançadas em um dos vértices dos hiper retângulos das incertezas. Sendo assim, os problemas de otimização podem ser reescritos com uma quantidade finita de restrições, e poderão ser resolvidos em tempo finito se forem factíveis. Os índices de custo devem então ser maximizados verificando as desigualdades para todo $\eta_m \in \Lambda_m^{\angle}$, sendo Λ_m^{\angle} o conjunto dos vértices de Λ_m . Na seção seguinte, ilustra-se o projeto do CMSA para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas.

4.3.2 Exemplo: Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis de um Processo Híbrido com Modos Próprios Sobreamortecidos Incertos

Considere o cálculo do CMSA do sistema híbrido incerto

$$y\left(t+1,\eta_{1}\right)=G_{1}\left(q^{-1},\eta_{1}\right)u\left(t\right)=\frac{1.55}{1-\eta_{1}0.65q^{-1}}u\left(t\right)\quad\text{ se }\quad y\left(t\right)\geq0,$$

$$y\left(t+1,\eta_{2}\right)=G_{2}\left(q^{-1},\eta_{2}\right)u\left(t\right)=\frac{1.15}{1-\eta_{2}0.75q^{-1}}u\left(t\right)\quad\text{ se }\quad y\left(t\right)<0,$$

com $\eta_1,\eta_2\in[0.5,1.0]$. Assume-se a existência de limites para a saída y(t). Sendo assim, o modelo ortonormal afim por partes que descreve o comportamento do processo é dado por

$$l(t+1) = A_1 l(t) + b_1 u(t),$$

$$y(t+1, \eta_1) = c_1^T(\eta_1) l(t+1) \quad \text{se} \quad y(t) \in [0, y_{\text{max}}],$$

$$l(t+1) = A_2 l(t) + b_2 u(t),$$

$$y(t+1, \eta_2) = c_2^T(\eta_2) l(t+1) \quad \text{se} \quad y(t) \in [y_{\text{min}}, 0),$$

$$(4.25)$$

com $c_1\left(\eta_1\right)\in [c_{1,\min},c_{1,\max}],\ c_2\left(\eta_2\right)\in [c_{2,\min},c_{2,\max}],\ y_{\min}=-5.0$ e $y_{\max}=5.0$. Utilizandose N=2 funções ortonormais, bases de Laguerre e o critério (2.6), determina-se os pólos $p_1=0.50$ e $p_2=0.58$ para o desenvolvimento ortonormal das dinâmicas incertas $G_1\left(q^{-1},\eta_1\right)$ e $G_2\left(q^{-1},\eta_2\right)$, respectivamente. Estes pólos caracterizam os pares (A_1,b_1) e (A_2,b_2) do modelo afim por partes com incertezas estruturadas (4.25). Os coeficientes e a máxima incerteza dos modelos ortonormais, determinados utilizando-se as equações (2.13), são dados por

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1.7820 \times 10^0 \\ -2.8306 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, dc_1 = \begin{bmatrix} 2.0593 \times 10^{-1} \\ 4.3659 \times 10^{-1} \end{bmatrix},
\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 1.4030 \times 10^0 \\ 5.7542 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, dc_2 = \begin{bmatrix} 2.5412 \times 10^{-1} \\ 4.8333 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Como os modelos ortonormais são utilizados para o projeto de conjuntos terminais, é necessário assegurar que todas as respostas ao impulso do processo estão representadas no modelo. Isto implica que os lados dos hiper retângulos das incertezas devem ser escalonados de acordo com as soluções do problema de otimização (2.17), dadas por

$$\eta_1^* = \begin{bmatrix} 5.3087 \times 10^{-1} \\ 1.8837 \times 10^0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2^* = \begin{bmatrix} 4.2751 \times 10^{-1} \\ 2.3391 \times 10^0 \end{bmatrix}.$$

Os ganhos de realimentação de estados K_1 e K_2 , necessários para a demonstração de estabilidade, são obtidos resolvendo-se um problema LQR para cada partição do modelo do processo. Utilizando-se ponderações unitárias, estes ganhos são dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.5996 \times 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 4.3065 \times 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço de saídas factíveis é definido pelas desigualdades

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) \le \begin{bmatrix} 5.0 \\ 5.0 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente

$$f_1(y) = y - 5.0,$$

 $f_2(y) = -y - 5.0.$

Definindo-se $\mathcal{A}_1=A_1-b_1K_1$ e $\mathcal{A}_2=A_2-b_2K_2$, o CMSA do processo afim por partes (4.25) é calculado executando-se o Algoritmo 2 com $s=s^*=2$. O CMSA do processo é ilustrado na Figura 4.8, e corresponde ao interior da região delimitada pelas retas mostradas. Estas retas são parte das restrições agregadas aos problemas de otimização contidos no Algoritmo 2, após desigualdades redundantes terem sido descartadas.

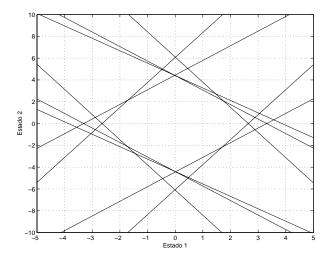


Figura 4.8: CMSA do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos.

Na Figura 4.9 são apresentadas diversas trajetórias de estado partindo de vetores contidos no interior do CMSA. As trajetórias mostradas estão contidas no interior do conjunto. Por este motivo, o conjunto máximo de saídas admissíveis é utilizado em controle preditivo como restrição de conjunto terminal para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada.

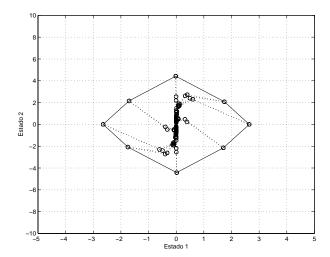


Figura 4.9: Trajetórias no interior do CMSA do sistema híbrido com modos próprios amortecidos e incertos.

A estabilidade do processo em malha fechada com CPR-MLDSFO pode ser assegurada acrescentando-se às desigualdades do problema de otimização as restrições

$$H_{CMSA}l\left(t+T_{y}/t\right) \leq h_{CMSA}.$$

A matriz H_{CMSA} e o vetor h_{CMSA} definem o conjunto máximo de saídas admissíveis do processo híbrido incerto. A restrição de conjunto terminal tende a modificar menos o desempenho de rastreio das referências em malha fechada do que as abordagens por custo de estado terminal e por restrição de contração (Mayne et al., 2000). Como o CMSA é descrito por um conjunto de desigualdades lineares, o método proposto neste trabalho para assegurar a estabilidade acarreta menos problemas de factibilidade para os problemas de otimização do que a restrição de estado terminal, uma igualdade. No entanto, se o problema de otimização resultante do CPR-MLDSFO se mostrar infactível, os horizontes de controle e de previsão devem ser aumentados.

4.4 Resumo

Neste capítulo apresentou-se metodologias para o projeto de controle preditivo (CP) baseado no modelo MLDSFO e para o projeto de controle preditivo robusto (CPR) baseado no modelo MLDSFO com incertezas estruturadas. Ilustrou-se por meio de exemplos de simulação os controladores obtidos com critérios de desempenho baseados nas normas quadrática e infinita ponderadas dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. Os problemas de otimização resultantes envolvem simultaneamente variáveis inteiras e contínuas, e são denominados MILP ou MIQP de acordo com a norma utilizada no critério de

custo. Apresentou-se uma breve revisão dos métodos numéricos aplicáveis à resolução dos problemas de otimização MILP e MIQP. Descreveu-se uma ferramenta existente na literatura utilizada para o cálculo da solução explícita do controlador preditivo de sistemas híbridos e as abordagens existentes que asseguram a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO. Quando comparado às metodologias existentes na literatura, o CP-MLDSFO é vantajoso quando: o modelo teórico no espaço de estados descreve o comportamento do sistema híbrido de forma insatisfatória, porque os erros de modelagem podem ser parcialmente compensados durante a estimação dos coeficientes do modelo MLDSFO; algum estado do modelo teórico do sistema não estiver disponível para medição e o projeto de um observador de estados for inviável, porque o método proposto é uma estratégia de realimentação de saída. Ilustrou-se via exemplos de simulação o CPR-MLDSFO, cujo critério de desempenho é baseado em uma norma ponderada dos incrementos no esforço de controle e dos erros de rastreio das referências de saída. Quando comparados às abordagens existentes na literatura, os problemas de otimização resultantes do controlador proposto são em geral menos onerosos do ponto de vista computacional, visto que a equação de estados do esquema de modelagem MLDSFO é isenta de coeficientes incertos. Aplicou-se o método proposto ao controle preditivo robusto da temperatura ambiente em um sistema de refrigeração industrial sujeito a infiltrações e vazamentos de ar, obtendo-se resultados satisfatórios quando comparados aos obtidos com as abordagens existentes na literatura. Descreveu-se as metodologias existentes para assegurar a estabilidade do sistema híbrido incerto em malha fechada com CPR-MLDSFO e apresentou-se uma nova técnica, baseada em Conjuntos Máximos de Saídas Admissíveis (CMSAs), para sistemas híbridos incertos com CPR-MLDSFO. O projeto dos CMSAs para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas foi ilustrado por meio de exemplo de simulação. O CMSA, quando implementado como restrição de conjunto terminal, é uma das formas menos onerosas de se assegurar a estabilidade de sistemas híbridos incertos em malha fechada com controle preditivo robusto. As principais contribuições deste capítulo são o controlador preditivo para sistemas MLDSFO, a revisão das metodologias para assegurar a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO, o controlador preditivo robusto para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas e a metodologia para o projeto de conjuntos terminais que asseguram a estabilidade do sistema híbrido incerto em malha fechada com CPR-MLDSFO.

Capítulo 5

Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou um novo esquema para a modelagem de sistemas híbridos determinísticos ou incertos. O esquema, denominado MLDSFO (Misto de Lógica e Dinâmica, baseado em Séries de Funções Ortonormais), representa as partes dinâmicas do processo por meio de séries de funções ortonormais e agrega as proposições lógicas ao modelo por meio de desigualdades lineares mistas equivalentes. Os pólos utilizados no desenvolvimento das bases ortonormais podem ser escolhidos de forma ótima ou utilizando-se conhecimento aproximado das características de amortecimento das dinâmicas do processo. Os modelos ortonormais admitem uma representação compacta no espaço de estados cujos coeficientes da equação de saída podem ser facilmente estimados. A ordem do modelo é reduzida quando os pólos do desenvolvimento representam satisfatoriamente as constantes de tempo do processo. Esta característica torna o esquema MLDSFO atrativo para aplicações de controle preditivo em tempo real.

O critério de desempenho do problema de controle preditivo (CP) é baseado em uma norma ponderada dos erros de rastreio das referências de saída e dos incrementos no esforço de controle. Uma vez que o esquema MLDSFO é não-hierárquico, os comportamentos contínuo e lógico futuros do processo podem ser calculados durante a otimização do critério de custo do problema de controle preditivo. O desempenho de rastreio das referências do sistema híbrido em malha fechada com CP-MLDSFO é melhor do que com controle hierárquico, pois de acordo com este último, a lógica futura é desconsiderada ou é obtida empiricamente. O problema de otimização resultante é misto e restrito, ou seja, envolve tanto variáveis binárias quanto contínuas e deve satisfazer as exigências operacionais do processo e as desigualdades provenientes da agregação da lógica ao modelo. O CP-MLDSFO é uma estratégia de realimentação de saída, visto que o vetor de estados dos desenvolvimentos ortonormais não tem sentido físico. Uma ferramenta

existente na literatura empregada para se determinar a solução explícita do CP-MLDSFO foi descrita.

O modelo MLDSFO é adequado para descrever processos híbridos incertos ou variantes no tempo de forma compacta. A incerteza de um conjunto de respostas ao impulso é mapeada em intervalos de pertinência dos coeficientes das representações ortonormais. Escolhendo-se adequadamente os pólos do desenvolvimento reduz-se a quantidade de coeficientes incertos do modelo MLDSFO e obtém-se benefícios computacionais no cálculo da seqüência de controle preditivo robusto (CPR). Na abordagem robusta a seqüência de controle é calculada minimizando-se um critério de desempenho com relação ao maior erro de rastreio das referências de saída dentre as possíveis no espaço das incertezas. Em geral, o CPR-MLDSFO é menos oneroso do ponto de vista computacional do que as estratégias existentes na literatura, visto que a equação de estados do modelo proposto é isenta de coeficientes incertos. Exemplos de simulação ilustraram o desempenho do controlador preditivo robusto proposto. As trajetórias temporais dos processos em malha fechada são ótimas com relação aos critérios de desempenho de cada caso.

Uma nova metodologia para assegurar a estabilidade do sistema híbrido incerto em malha fechada com controle preditivo robusto foi também proposta. A estabilidade do sistema é assegurada agregando-se ao problema de controle uma restrição de conjunto terminal dada pelo Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis (CMSA) para sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas. As abordagens existentes na literatura sugerem agregar determinadas restrições ou adicionar um custo ao critério de desempenho do problema de otimização para garantir o rastreio das referências em tempo finito. Algumas destas abordagens apresentam problemas de factibilidade, tornam a otimização mais onerosa do ponto de vista computacional ou podem deteriorar o desempenho de rastreio das referências do sistema controlado. Acrescentar uma restrição de conjunto terminal é uma das formas menos onerosas de se assegurar estabilidade. As metodologias encontradas na literatura para o projeto de conjuntos terminais assumem que a amplitude da perturbação é conhecida *a priori*, o que nem sempre é possível. No método proposto, os limites da incerteza são estimados.

Resumidamente, o modelo MLDSFO é compacto, não-hierárquico, facilmente estimável e adequado para representar sistemas híbridos incertos utilizando-se uma quantidade reduzida de funções ortonormais e conhecimento aproximado das características de amortecimento das dinâmicas do processo. O controle preditivo robusto de sistemas MLDSFO com incertezas estruturadas não necessita de informação completa de estado. A estabilidade do sistema controlado pode ser assegurada utilizando-se o CMSA como restrição de conjunto terminal.

Algumas sugestões para trabalhos futuros são listadas a seguir.

i) Pesquisar um esquema de modelagem para sistemas híbridos cujas dinâmicas são não-lineares

- e cujas proposições lógicas podem ser transformadas em desigualdades lineares mistas equivalentes. Utilizando-se séries de funções ortonormais e desprezando-se os termos de mais alta ordem do modelo de Volterra, por exemplo, pode ser possível obter um esquema no qual a dinâmica e a lógica estejam integradas compacta e não-hierarquicamente;
- ii) Pesquisar metodologias heurísticas de modelagem que permitam integrar a dinâmica e a lógica do processo híbrido utilizando-se a menor quantidade possível de variáveis binárias. Isto permitiria reduzir o esforço computacional envolvido com a otimização do critério de custo do problema de controle preditivo robusto;
- iii) Pesquisar técnicas que permitam estimar os intervalos de pertinência dos coeficientes dos desenvolvimentos ortonormais considerando-se limites para o erro máximo de modelagem. O desempenho de rastreio das referências em malha fechada com controle preditivo pode melhorar, caso o conjunto de previsões do comportamento do processo seja mais adequadamente calculado;
- iv) Pesquisar a adaptação das ferramentas existentes na literatura para a análise e o projeto de controle de sistemas híbridos MLDSFO com incertezas estruturadas, tais como a ferramenta para determinação da solução analítica do controlador preditivo robusto;
- v) Pesquisar técnicas de estimação que permitam determinar, segundo critérios de otimalidade, a quantidade de funções, os pólos do desenvolvimento e os intervalos de pertinência dos coeficientes do desenvolvimento ortonormal das dinâmicas do processo;
- vi) Pesquisar técnicas de redução do tempo de solução dos problemas de otimização que envolvem variáveis contínuas e inteiras, para que o CPR-MLDSFO possa ser aplicado ao controle robusto de sistemas com constantes de tempo pequenas;
- vii) Aplicar os resultados deste trabalho ao controle da temperatura e da umidade em um ambiente com sistema de climatização.

Apêndice A

Modelo Termodinâmico de um Ambiente com Sistema de Climatização

A.1 Caso Determinístico

Considera-se um sistema HVAC (*Heating, Ventilating, and Air-Conditioning*) projetado para o controle da temperatura de um ambiente de fábrica. Os modelos termodinâmicos para ambientes com sistemas HVAC são normalmente obtidos utilizando-se o conceito de balanço de energia no volume de controle. O modelo do ambiente com sistema de climatização considerado neste trabalho é descrito pela equação diferencial (Moreira, 2001; Moreira, Lima e de Mato Gurgel, 2002)

$$V_{am}c_{A}\frac{d}{dt}T_{Aam}(t) = f_{in}c_{A}\left[T_{Ain}(t - t_{atr}) - T_{Aam}(t)\right] + H_{sen}(t) - -f_{in}h_{van}\left[w_{Ain}(t - t_{atr}) - w_{Aam}(t)\right] - h_{van}m_{van},$$

sendo T temperatura, w, umidade absoluta, V, volume, A, ar, c, calor específico, h_{vap} , entalpia de vaporização, am, ambiente, f, fluxo, in, insuflamento, t_{atr} , atraso de transporte nos dutos, H_{sen} , taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado e m_{vap} taxa de geração de umidade no ambiente climatizado. Para que a equação diferencial anterior seja linear e de primeira ordem, assume-se que o comportamento dos fluidos é ideal, que as misturas de fluidos são homogêneas e imediatas, que os processos termodinâmicos que ocorrem no interior do ambiente climatizado são adiabáticos, e que o processo não apresenta comportamentos incertos ou variantes no tempo. Estas hipóteses não se verificam na prática, mas a discretização da equação diferencial anterior permite utilizar o esquema MLD ($Mixed\ Logical\ Dynamical$) para

a modelagem do ambiente climatizado. Por outro lado, a estimação dos coeficientes do desenvolvimento ortonormal do ambiente climatizado permite que os erros de modelagem devidos às simplificações teóricas sejam parcialmente compensados. Incertezas no modelo do ambiente são consideradas em seção posterior.

Admitindo-se que a umidade ambiente está em equilíbrio, a equação diferencial anterior pode ser reescrita como

$$V_{am}c_{A}\frac{d}{dt}T_{Aam}\left(t\right) = f_{in}c_{A}\left[T_{Ain}\left(t - t_{atr}\right) - T_{Aam}\left(t\right)\right] + H_{sen}\left(t\right).$$

Os parâmetros de projeto utilizados neste trabalho são $V_{am}=25.000~m^3,~f_{in}=2.500~m^3/min,~c_A=1.005~J/kg^oC$ e $H_{sen}\left(t\right)\in\left[5;12\right]\times10^6~J/min.$ A taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado, $H_{sen}\left(t\right)$, pode ser estimada implementando-se um observador de estados. Isto permite considerá-la no projeto de controle como uma perturbação mensurável (feed-forward). Sendo assim, considerando-se constante o fluxo de insuflamento, f_{in} , o controle da temperatura do ar ambiente, $T_{Aam}\left(t\right)$, é realizado ajustando-se a temperatura do ar de insuflamento, $T_{Ain}\left(t-t_{atr}\right)$. Esta, por sua vez, atua no sistema após um determinado atraso de transporte, t_{atr} , devido aos dutos do sub sistema de ventilação.

Discretizando-se o modelo anterior com interpolação linear e período de amostragem Δt_s , obtém-se

$$V_{am}c_{A}\left[\frac{T_{Aam}\left(t+1\right)-T_{Aam}\left(t\right)}{\Delta t_{s}}\right]=f_{in}c_{A}\left[T_{Ain}\left(t-\frac{t_{atr}}{\Delta t_{s}}\right)-T_{Aam}\left(t\right)\right]+H_{sen}\left(t\right),$$

o que implica

$$T_{Aam}\left(t+1\right) = \frac{V_{am} - f_{in}\Delta t_{s}}{V_{am}}T_{Aam}\left(t\right) + \frac{f_{in}\Delta t_{s}}{V_{am}}T_{Ain}\left(t-k\right) + \frac{\Delta t_{s}}{V_{am}c_{A}}H_{sen}\left(t\right),$$

com $t_{atr}=k\Delta t_s$. Neste trabalho, utiliza-se o período de amostragem $\Delta t_s=4min$. A Transformada Z da equação à diferenças anterior é dada por

$$\mathcal{T}_{Aam}\left(z\right) = \frac{f_{in}\Delta t_{s}z^{-k}/V_{am}}{z - \left(V_{am} - f_{in}\Delta t_{s}\right)/V_{am}} \mathcal{T}_{Ain}\left(z\right) + \frac{\Delta t_{s}/\left(V_{am}c_{A}\right)}{z - \left(V_{am} - f_{in}\Delta t_{s}\right)/V_{am}} \mathcal{H}_{sen}\left(z\right).$$

Note que, teoricamente, as dinâmicas do ambiente com sistema de climatização têm a mesma constante de tempo. Denotando-se

$$T_{Aam}\left(t\right) = y\left(t\right),$$

$$T_{Ain}\left(t\right) = u_1\left(t\right),\,$$

$$H_{sen}\left(t\right) =u_{2}\left(t\right) ,$$

onde a entrada $u_1\left(t\right)$ é uma variável manipulada e a entrada $u_2\left(t\right)$ é uma variável observada, a equação à diferenças que descreve o comportamento da temperatura do ar ambiente pode ser reescrita como

$$y(t) = q^{-1} \frac{f_{in}\Delta t_s/V_{am}}{1 - q^{-1} (V_{am} - f_{in}\Delta t_s)/V_{am}} q^{-k} u_1(t) + q^{-1} \frac{\Delta t_s/(V_{am}c_A)}{1 - q^{-1} (V_{am} - f_{in}\Delta t_s)/V_{am}} u_2(t),$$

ou compactamente

$$y(t) = G_1(q^{-1})u_1(t) + G_2(q^{-1})u_2(t).$$

O modelo ortonormal do ambiente com sistema de climatização é dado por

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{1k} \Phi_{1k} (q^{-1}) u_1(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{2k} \Phi_{2k} (q^{-1}) u_2(t).$$

Assume-se a existência de erros de modelagem e de ruído de medição. Isto implica que, apesar de as dinâmicas $G_1\left(q^{-1}\right)$ e $G_2\left(q^{-1}\right)$ apresentarem a mesma constante de tempo, os respectivos desenvolvimentos ortonormais utilizarão diferentes bases, $\Phi_1\left(q^{-1}\right)$ e $\Phi_2\left(q^{-1}\right)$. O atraso de uma amostra entre as entradas e a saída foi considerado diretamente na base ortonormal. O atraso de transporte entre a temperatura do ar de insuflamento e a temperatura do ar ambiente pode ser absorvido pelos coeficientes das expansões ortonormais durante o procedimento de estimação ou pode ser considerado explicitamente na entrada $u_1\left(t-k\right)$. A escolha deve ser feita tendo-se em vista a qualidade da informação disponível acerca do valor de k. O modelo anterior pode ser escrito de forma equivalente como

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{1}u_{1}(t),$$

$$l_{2}(t+1) = A_{2}l_{2}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{2}u_{2}(t),$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{1k}l_{1k}(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{2k}l_{2k}(t),$$

ou, simplesmente,

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{1}u_{1}(t),$$

$$l_{2}(t+1) = A_{2}l_{2}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{2}u_{2}(t),$$

$$y(t) = c_{1}^{T}l_{1}(t) + c_{2}^{T}l_{2}(t).$$

Os pares (A_1,b_1) e (A_2,b_2) são funções dos pólos escolhidos para representar cada dinâmica. Os vetores c_1 e c_2 devem ser estimados. O modelo anterior pode ser reescrito compactamente na forma matricial

$$\begin{bmatrix} l_1 \left(t + 1 \right) \\ l_2 \left(t + 1 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \left(t \right) \\ l_2 \left(t \right) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{N \times 1} & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \left(t \right) \\ u_2 \left(t \right) \end{bmatrix},$$

$$y \left(t \right) = \begin{bmatrix} c_1^T & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \left(t \right) \\ l_2 \left(t \right) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o modelo ortonormal do ambiente climatizado é dado por

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t).$$

A.2 Caso Incerto

Assume-se a existência de vazamentos e infiltrações de ar na fábrica, sendo tais perturbações devidas à abertura e ao fechamento aleatório de portas e janelas para a entrada de pessoas, insumos e equipamentos no ambiente climatizado. O modelo termodinâmico do ambiente é então dado por

$$V_{am}c_{A}\frac{d}{dt}T_{Aam}(t) = f_{in}c_{A}\left[T_{Ain}\left(t - t_{atr}\right) - T_{Aam}\left(t\right)\right] + H_{sen}(t) +$$

$$+ f_{ex}\left(t,\eta\right)c_{A}\left[T_{Aex}\left(t\right) - T_{Aam}\left(t\right)\right],$$

sendo ex externo e

$$f_{ex}(t,\eta) = f_{ex} + \eta(t) df_{ex}, -1 \le \eta(t) \le 1.$$

O modelo da taxa de variação da temperatura do ar ambiente é composto por três termos: o primeiro quantifica a taxa de calor sensível retirada da fábrica pelo fluxo de insuflamento; o segundo é a taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado; e o terceiro quantifica a taxa de calor sensível inserida ou retirada da fábrica pelas infiltrações ou pelos vazamentos de ar. A temperatura do ar externo pode ser medida, mas não é possível quantificar o fluxo $f_{ex}\left(t,\eta\right)$ que entra ou que sai da fábrica pelas infiltrações e pelos vazamentos. Neste trabalho, assume-se que

$$f_{ex}(t,\eta) \in [-750,750] \ m^3/min.$$

Discretizando-se o modelo anterior com interpolação linear e período de amostragem Δt_s , obtém-se

$$T_{Aam}\left(t+1,\eta\right) = \frac{V_{am} - \Delta t_{s}f_{in} - \Delta t_{s}f_{ex}\left(t,\eta\right)}{V_{am}}T_{Aam}\left(t\right) + \frac{\Delta t_{s}f_{in}}{V_{am}}T_{Ain}\left(t-k\right) + \frac{\Delta t_{s}f_{ex}\left(t,\eta\right)}{V_{am}}T_{Aex}\left(t\right).$$

Neste trabalho, utiliza-se $\Delta t_s = 4 \ min.$ Denotando-se

$$T_{Aam}(t) = y(t),$$

 $T_{Ain}(t) = u_1(t),$
 $H_{sen}(t) = u_2(t),$
 $T_{Aex}(t) = u_3(t),$

onde a entrada $u_1\left(t\right)$ é uma variável manipulada, a entrada $u_2\left(t\right)$ é uma variável observada e a entrada $u_3\left(t\right)$ é uma variável medida, a equação à diferenças anterior pode ser reescrita como

$$\begin{split} y\left(t,\eta\right) &= q^{-1} \frac{\Delta t_{s} f_{in} / V_{am}}{1 - q^{-1} \left[V_{am} - \Delta t_{s} f_{in} - \Delta t_{s} f_{ex}\left(t,\eta\right)\right] / V_{am}} q^{-k} u_{1}\left(t\right) + \\ &+ q^{-1} \frac{\Delta t_{s} / \left(V_{am} c_{A}\right)}{1 - q^{-1} \left[V_{am} - \Delta t_{s} f_{in} - \Delta t_{s} f_{ex}\left(t,\eta\right)\right] / V_{am}} u_{2}\left(t\right) + \\ &+ q^{-1} \frac{\Delta t_{s} f_{ex}\left(t,\eta\right) / V_{am}}{1 - q^{-1} \left[V_{am} - \Delta t_{s} f_{in} - \Delta t_{s} f_{ex}\left(t,\eta\right)\right] / V_{am}} u_{3}\left(t\right), \end{split}$$

ou simplificadamente

$$y(t, \eta) = G_1(q^{-1}, \eta) u_1(t) + G_2(q^{-1}, \eta) u_2(t) + G_3(q^{-1}, \eta) u_3(t).$$

O modelo ortonormal com incertezas estruturadas utilizado para representar o ambiente com sistema de climatização é dado por

$$y(t,\eta) = \sum_{k=1}^{N} c_{1k}(\eta_{1k}) \Phi_{1k}(q^{-1}) u_1(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{2k}(\eta_{2k}) \Phi_{2k}(q^{-1}) u_2(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} c_{3k}(\eta_{3k}) \Phi_{3k}(q^{-1}) u_3(t).$$

Apesar de as dinâmicas $G_1(q^{-1},\eta)$, $G_2(q^{-1},\eta)$ e $G_3(q^{-1},\eta)$ apresentarem a mesma constante de tempo, os respectivos desenvolvimentos ortonormais utilizarão diferentes bases, $\Phi_1(q^{-1})$, $\Phi_2(q^{-1})$ e $\Phi_3(q^{-1})$, devido à existência de erros de modelagem, ruído de medição e incerteza. O modelo ortonormal do ambiente pode ser reescrito de forma equivalente como

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{1}u_{1}(t),$$

$$l_{2}(t+1) = A_{2}l_{2}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{2}u_{2}(t),$$

$$l_{3}(t+1) = A_{3}l_{3}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{3}u_{3}(t),$$

$$y(t,\eta) = \sum_{k=1}^{N} c_{1k}(\eta_{1k}) l_{1k}(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{2k}(\eta_{2k}) l_{2i}(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{3k}(\eta_{3k}) l_{3i}(t),$$

ou, simplesmente,

$$l_{1}(t+1) = A_{1}l_{1}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{1}u_{1}(t),$$

$$l_{2}(t+1) = A_{2}l_{2}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{2}u_{2}(t),$$

$$l_{3}(t+1) = A_{3}l_{3}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{3}u_{3}(t),$$

$$y(t,\eta) = c_{1}^{T}(\eta_{1})l_{1}(t) + c_{2}^{T}(\eta_{2})l_{2}(t) + c_{3}^{T}(\eta_{3})l_{3}(t).$$

Os pares (A_1,b_1) , (A_2,b_2) e (A_3,b_3) são determinados pelos pólos utilizados para representar as respectivas dinâmicas. Os intervalos de pertinência dos vetores $c_1(\eta_1)$, $c_2(\eta_2)$ e $c_3(\eta_3)$ devem ser estimados. O modelo anterior pode ser reescrito compactamente na forma matricial

$$\begin{bmatrix} l_{1}\left(t+1\right) \\ l_{2}\left(t+1\right) \\ l_{3}\left(t+1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & A_{2} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & A_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \\ l_{3}\left(t\right) \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} b_{1} & \mathbf{0}_{N\times 1} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \mathbf{0}_{N\times 1} & b_{2} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \mathbf{0}_{N\times 1} & \mathbf{0}_{N\times 1} & b_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}\left(t\right) \\ u_{2}\left(t\right) \\ u_{3}\left(t\right) \end{bmatrix},$$

$$y\left(t,\eta\right) = \begin{bmatrix} c_{1}^{T}\left(\eta_{1}\right) & c_{2}^{T}\left(\eta_{2}\right) & c_{3}^{T}\left(\eta_{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1}\left(t\right) \\ l_{2}\left(t\right) \\ l_{3}\left(t\right) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o modelo ortonormal do ambiente climatizado é dado por

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}bu(t),$$

$$y(t,\eta) = c^{T}(\eta)l(t).$$

Apêndice B

Proposições Lógicas e Desigualdades Lineares Mistas

As relações envolvendo operadores lógicos estão presentes em processos industriais para, por exemplo, descrever o intertravamento da planta. Os esquemas de controle preditivo que consideram simultaneamente os comportamentos contínuo e lógico futuros do processo são ditos não-hierárquicos. Em (Bemporad e Morari, 1999) as proposições envolvendo operadores lógicos e variáveis contínuas são transformadas em desigualdades lineares equivalentes (Tyler e Morari, 1999). A abordagem sugere que estas desigualdades sejam agregadas às restrições do problema de MPC. A satisfação das restrições verifica os fatos lógicos da planta.

Para a modelagem de proposições lógicas, considera-se inicialmente um literal X_i , que pode assumir valor V (verdadeiro) ou F (falso). As expressões lógicas envolvendo literais podem ser formadas utilizando-se os conectivos booleanos \land , \lor , \sim , \rightarrow , \leftrightarrow e \oplus (E, OU, NÃO, IMPLICA, SE E SOMENTE SE e OU EXCLUSIVO, respectivamente). Estes conectivos são definidos a partir de regras, normalmente resumidas como na Tabela da Verdade B.1. Para fins de programação numérica, pode-se associar ao literal X_i uma variável binária δ_i , que assumirá valor 1 (um) se $X_i = V$ e assumirá valor 0 (zero) se $X_i = F$. Utilizando-se esta associação, as proposições podem ser transformadas em desigualdades lineares equivalentes (Bemporad e Morari, 1999; Tyler e Morari, 1999), como pode ser visto na Tabela B.2. De fato, pode-se observar na Tabela B.3 que a expressão lógica $X_1 \lor X_2$ é equivalente à desigualdade linear $\delta_1 + \delta_2 \ge 1$. Esta desigualdade pode ser implementada como restrição no problema de MPC.

Um aspecto importante da modelagem de fatos lógicos é a transformação do produto entre variáveis binárias em desigualdades equivalentes. O termo $\delta_3 \stackrel{\Delta}{=} \delta_1 \delta_2$, que pode ser substituído pela expressão lógica

$$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$$

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$	$X_1 \vee X_2$	$\sim X_1$	$\sim X_2$	$X_1 \to X_2$	$X_1 \leftrightarrow X_2$	$X_1 \oplus X_2$
F	F	F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V
V	V	V	V	F	F	V	V	F

Tabela B.1: Tabela da Verdade que define alguns conectivos booleanos.

Expressão lógica	Desigualdades equivalentes
$X_1 \wedge X_2$	$\begin{cases} \delta_1 \ge 1 \\ \delta_2 \ge 1 \end{cases}$
211 / (212	$\delta_2 \geq 1$
$X_1 \vee X_2$	$\delta_1 + \delta_2 \ge 1$
$\sim X_1$	$\delta_1 \leq 0$
$X_1 \to X_2$	$\delta_1 - \delta_2 \le 0$
$X_1 \leftrightarrow X_2$	$\begin{cases} \delta_1 - \delta_2 \le 0 \\ \delta_1 - \delta_2 \ge 0 \end{cases}$
211 1 212	$\delta_1 - \delta_2 \ge 0$
$X_1 \oplus X_2$	$\begin{cases} \delta_1 - \delta_2 \le 1 \\ \delta_1 - \delta_2 \ge 1 \end{cases}$
$n_1 \cup n_2$	$\delta_1 - \delta_2 \ge 1$

Tabela B.2: Expressões lógicas e respectivas desigualdades equivalentes.

X_1					$\delta_1 + \delta_2 \ge 1$
F	F	F V	0	0 1 0 1	F
F	V	V	0	1	V
V	F	V	1	0	V
V	V	V	1	1	V

Tabela B.3: Equivalência entre uma expressão lógica e a respectiva desigualdade equivalente.

é equivalente às desigualdades

$$\begin{cases}
-\delta_1 + \delta_3 \le 0, \\
-\delta_2 + \delta_3 \le 0, \\
\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \le 1.
\end{cases}$$

Quando as expressões lógicas envolvem funções dinâmicas, as desigualdades equivalentes são mistas, ou seja, envolvem variáveis inteiras e contínuas. Considera-se, inicialmente, uma função $f(x):\Gamma\subset\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ tal que

$$f_{\min} \le f(x) \le f_{\max}, \quad x \in \Gamma,$$

onde f_{\min} e f_{\max} são limitantes inferior e superior, respectivamente, para f(x), $x \in \Gamma$. Estes limitantes devem ser definidos de forma que f(x) seguramente assuma valores apenas entre f_{\min} e f_{\max} , e não obrigatoriamente devem corresponder ao menor intervalo onde f(x) está contida. Um exemplo de expressão mista é mostrado a seguir (Bemporad e Morari, 1999):

$$[f(x) \le 0] \wedge [\delta = 1].$$

Se a expressão anterior deve ser sempre verdadeira (V), então a restrição seguinte deve ser sempre satisfeita:

$$f(x) \le (f_{\min} - 1)(1 - \delta).$$

De fato, se $\delta=0$, então $f\left(x\right)\leq f_{\min}-1$, o que implica que a expressão anterior será sempre falsa (F). Por outro lado, se $\delta=1$, a expressão será verdadeira (V) se $f\left(x\right)\leq0$. Outras expressões mistas e suas correspondentes desigualdades são mostradas na Tabela B.4, onde ϵ é uma pequena tolerância (Bemporad e Morari, 1999). A verificação da equivalência é feita como anteriormente.

Expressão mista	Desigualdades equivalentes
$[f(x) \le 0] \lor [\delta = 1]$	$f\left(x\right) \le f_{\max}\delta$
$\sim [f(x) \le 0]$	$f\left(x\right) \geq \epsilon$
$[f(x) \ge 0] \to [\delta = 1]$	$f(x) \le -\epsilon + (f_{\max} + \epsilon) \delta$
$[f\left(x\right)\leq0]\leftrightarrow\left[\delta=1\right]$	$\begin{cases} f(x) \le f_{\max} (1 - \delta) \\ f(x) \ge \epsilon + (f_{\min} - \epsilon) \delta \end{cases}$

Tabela B.4: Expressões mistas e respectivas desigualdades lineares equivalentes.

Outro aspecto importante da modelagem de fatos mistos é a transformação do produto entre variáveis inteiras e contínuas em desigualdades equivalentes. O termo $y \stackrel{\Delta}{=} \delta f(x)$, que pode ser

substituído pela expressão mista

$$\{[\delta = 0] \to [y = 0]\} \land \{[\delta = 1] \to [y = f(x)]\},\$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y \le f_{\text{max}} \delta, \\ y \ge f_{\text{min}} \delta, \\ y \le f(x) - f_{\text{min}} (1 - \delta), \\ y \ge f(x) - f_{\text{max}} (1 - \delta). \end{cases}$$

Note que todas as desigualdades mostradas neste apêndice podem ser agregadas ao conjunto de restrições do problema de controle preditivo, anteriormente formado apenas pelas restrições operacionais do processo.

Outra alternativa para a modelagem de proposições lógicas é utilizar a teoria *fuzzy* (Zadeh, 1973), onde a verificação das expressões é realizada aplicando-se os operadores min e max sobre variáveis binárias associadas aos literais. Neste caso, o comportamento lógico futuro do processo seria desconsiderado no problema de controle preditivo, pois o modelo híbrido resultante teria característica hierárquica.

Apêndice C

Modelagem de um Ambiente com Sistema de Climatização

C.1 Caso Determinístico

O vetor de entradas do modelo ortonormal de um ambiente com sistema HVAC (Heating, Ventilating, and Air-Conditioning) é composto pela temperatura do ar de insuflamento, $u_1(t) = T_{Ain}(t)$, e pela taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado, $u_2(t) = H_{sen}(t)$. A taxa de geração de calor sensível pode ser estimada utilizando-se um observador de estados (Moreira, 2001; Moreira, Lima e de Mato Gurgel, 2002). O ar de insuflamento é gerado misturando-se ar frio, à temperatura T_{min} , com ar de retorno, cuja temperatura é T_{max} , em uma proporção definida pelo controlador. A mistura é realizada posicionando-se válvulas, que por serem atuadas por motores de passo, podem ocupar apenas posições pré-determinadas (Moreira, Ferreira e do Amaral, 2002). Sendo assim, o modelo ortonormal do sistema HVAC, dado por

$$l(t+1) = Al(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}bu(t),$$

$$y(t) = c^{T}l(t),$$

está sujeito à restrição

$$u_{1}(t) \in [u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{1s}(t)].$$

Admite-se que os níveis de abertura das válvulas de insuflamento são igualmente espaçados. Esta condição pode ser modelada utilizando-se variáveis binárias escrevendo-se (Moreira, Ferreira e

do Amaral, 2002)

$$u_{1}(t) = T_{\min} + D\delta(t),$$

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2^{r} - 1} \begin{bmatrix} 2^{0} & 2^{1} & \cdots & 2^{r-1} \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_{1}(t) & \delta_{2}(t) & \cdots & \delta_{r}(t) \end{bmatrix}^{T},$$

$$\delta_{i}(t) \in \{0, 1\}; \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

para algum valor de r. Sendo assim, o modelo do ambiente com sistema HVAC pode ser escrito como

$$\begin{split} l\left(t+1\right) &= Al\left(t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}bu\left(t\right),\\ y\left(t\right) &= c^T l\left(t\right),\\ \text{sujeito a} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]u\left(t\right) \leq T_{\min} + D\delta\left(t\right),\\ & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]u\left(t\right) \geq T_{\min} + D\delta\left(t\right). \end{split}$$

Definindo-se

$$H_l = A, \quad H_u = \frac{1}{\sqrt{2}}b, \quad c_l = c,$$

$$M_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_\delta = \begin{bmatrix} -D \\ D \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} T_{\min} \\ -T_{\min} \end{bmatrix},$$

o modelo anterior se enquadra no formato MLDSFO, ou seja

$$\begin{split} &l\left(t+1\right)=H_{l}l\left(t\right)+H_{u}u\left(t\right),\\ &y\left(t\right)=c_{l}^{T}l\left(t\right),\\ &\text{sujeito a}\qquad M_{u}u\left(t\right)+M_{\delta}\delta\left(t\right)\leq M. \end{split}$$

C.2 Caso Incerto

O vetor de entradas do modelo de um ambiente com sistema HVAC sujeito a infiltrações de ar é composto pela temperatura do ar de insuflamento, $u_1\left(t\right) = T_{Ain}\left(t\right)$, pela taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado, $u_2\left(t\right) = H_{sen}\left(t\right)$, e pela temperatura do ar externo, $u_3\left(t\right) = T_{Aex}\left(t\right)$. A taxa de geração de calor sensível no ambiente climatizado pode ser estimada e a temperatura do ar externo pode ser medida. O ar de insuflamento é gerado misturando-se ar frio com ar de retorno, ambos a temperaturas conhecidas. A proporção é definida pelo controlador, que posiciona as válvulas de insuflamento de forma que (Moreira, Ferreira

e do Amaral, 2002)

$$u_1(t) \in [u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{1s}(t)].$$

Admite-se que os níveis de abertura das válvulas de insuflamento são igualmente espaçados, o que pode ser modelado utilizando-se variáveis binárias conforme discutido na Seção C.1. Sendo assim, o modelo do sistema HVAC pode ser escrito como

$$\begin{split} l\left(t+1\right) &= Al\left(t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}bu\left(t\right),\\ y\left(t,\eta\right) &= c^{T}\left(\eta\right)l\left(t\right),\\ \text{sujeito a} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]u\left(t\right) \leq T_{\min} + D\delta\left(t\right),\\ & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]u\left(t\right) \geq T_{\min} + D\delta\left(t\right), \end{split}$$

com $c_{j,\min} \leq c_{j}\left(\eta_{j}\right) \leq c_{j,\max}, \ j=1,2,\ldots,3N$. Definindo-se

$$H_{l} = A, \quad H_{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}b, \quad c_{l}(\eta) = c(\eta),$$

$$M_{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\delta} = \begin{bmatrix} -D \\ D \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} T_{\min} \\ -T_{\min} \end{bmatrix},$$

o modelo anterior se enquadra no formato MLDSFO com incertezas estruturadas, ou seja

$$\begin{split} &l\left(t+1\right) = H_{l}l\left(t\right) + H_{u}u\left(t\right),\\ &y\left(t+1,\eta\right) = c_{l}^{T}\left(\eta\right)l\left(t+1\right)\\ \text{sujeito a} & M_{u}u\left(t\right) + M_{\delta}\delta\left(t\right) \leq M. \end{split}$$

Apêndice D

Estabilidade do Sistema em Malha Fechada com Controle Preditivo

No CP-MLDSFO, o comportamento futuro do processo ao longo do horizonte de previsão T_y é calculado utilizando-se as equações de estado e de saída em (3.14). O problema de otimização cuja solução é a seqüência ótima de controle preditivo ao longo do horizonte T_u-1 é restrito às desigualdades do modelo em (3.15).

D.1 Restrição de Saída Terminal

Para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada com CP-MLDSFO, pode-se agregar ao problema de otimização uma restrição de saída terminal, dada por

$$\hat{y}\left(t+T_{y}/t\right)=y_{r}\left(t+T_{y}\right).$$

Admite-se inicialmente que

$$\Delta \mathbf{u}^{*}(t) = \begin{bmatrix} \Delta u^{*}(t) & \Delta u^{*}(t+1) & \cdots & \Delta u^{*}(t+T_{u}-1) \end{bmatrix}^{T},$$

é a seqüência de controle preditivo que minimiza o critério de desempenho (4.1) no instante t. Sendo assim, a següência

$$\Delta \mathbf{u} (t+1) = \begin{bmatrix} \Delta u^* (t+1) & \Delta u^* (t+2) & \cdots & \Delta u^* (t+T_u-1) & 0 \end{bmatrix}^T,$$

é uma solução candidata factível no instante t+1, assumindo-se que as referências permanecem constantes ao longo de todo o horizonte de previsão. A solução ótima neste instante, dada por

$$\Delta \mathbf{u}^{*}\left(t+1\right) = \min_{\Delta \mathbf{u}\left(t+1\right)} J\left[\Delta \mathbf{u}\left(t+1\right), \Delta l\left(t+1/t+1\right), y_{m}\left(t+1\right), \mathbf{y}_{r}\left(t+1\right)\right],$$

é tal que

$$J[\Delta \mathbf{u}^{*}(t+1), \Delta l(t+1/t+1), y_{m}(t+1), \mathbf{y}_{r}(t+1)] \le$$

 $\le J[\Delta \mathbf{u}(t+1), \Delta l(t+1/t+1), y_{m}(t+1), \mathbf{y}_{r}(t+1)].$

Uma vez que o custo da solução candidata factível pode ser escrito como

$$J\left[\Delta \mathbf{u}(t+1), \Delta l(t+1/t+1), y_m(t+1), \mathbf{y}_r(t+1)\right] = J\left[\Delta \mathbf{u}^*(t), \Delta l(t/t), y_m(t), \mathbf{y}_r(t)\right] - \|\Delta u^*(t)\|_{Q_u}^p - \|\hat{y}(t+1/t) - y_r(t+1)\|_{Q_u}^p.$$

então

$$J\left[\Delta \mathbf{u}^{*}\left(t+1\right), \Delta l\left(t+1/t+1\right), y_{m}\left(t+1\right), \mathbf{y}_{r}\left(t+1\right)\right] \leq J\left[\Delta \mathbf{u}^{*}\left(t\right), \Delta l\left(t/t\right), y_{m}\left(t\right), \mathbf{y}_{r}\left(t\right)\right] - \left\|\Delta u^{*}\left(t\right)\right\|_{Q_{u}}^{p} - \left\|\dot{y}\left(t+1/t\right) - y_{r}\left(t+1\right)\right\|_{Q_{u}}^{p}.$$

Isto implica que, quando a restrição de saída terminal é implementada, o critério de desempenho do CP-MLDSFO é decrescente. Como o custo é limitado inferiormente por zero, tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ J\left[\Delta \mathbf{u}^{*}\left(t\right), \Delta l\left(t/t\right), y_{m}\left(t\right), \mathbf{y}_{r}\left(t\right)\right] - J\left[\Delta \mathbf{u}^{*}\left(t+1\right), \Delta l\left(t+1/t+1\right), y_{m}\left(t+1\right), \mathbf{y}_{r}\left(t+1\right)\right] \right\} \to 0.$$

Sendo assim, o vetor de incrementos nas entradas de controle e o vetor de saídas tendem para seus valores de regime permanente à medida que o tempo evolui, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} \Delta u(t) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{t \to \infty} \hat{y}(t+1/t) = y_r(t+1).$$

D.2 Custo de Saída Terminal

Para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada com CP-MLDSFO, pode-se adicionar ao critério de desempenho (4.1) um custo de saída terminal, dado por

$$\left\| \stackrel{\wedge}{y} (t + T_y/t) - y_r (t + T_y) \right\|_{Q_t}^p.$$

No projeto da ponderação de saída terminal, admite-se que

$$\Delta \mathbf{u}^*(t) = \begin{bmatrix} \Delta u^*(t) & \Delta u^*(t+1) & \cdots & \Delta u^*(t+T_u-1) \end{bmatrix}^T$$

é a sequência ótima de controle preditivo no instante t, e que

$$\Delta \mathbf{u}\left(t+1\right) = \left[\begin{array}{ccc} \Delta u^{*}\left(t+1\right) & \Delta u^{*}\left(t+2\right) & \cdots & \Delta u^{*}\left(t+T_{u}-1\right) & \Delta u\left(t+T_{u}\right) \end{array}\right],$$

é uma solução candidata factível no instante t+1, para algum $\Delta u \, (t+T_u)$. A ponderação Q_t deve assegurar que o critério de desempenho é decrescente, ou seja

$$J\left[\Delta\mathbf{u}^{*}\left(t+1\right),\Delta l\left(t+1/t+1\right),y_{m}\left(t+1\right),\mathbf{y}_{r}\left(t+1\right)\right] \leq J\left[\Delta\mathbf{u}^{*}\left(t\right),\Delta l\left(t/t\right),y_{m}\left(t\right),\mathbf{y}_{r}\left(t\right)\right].$$

Uma vez que a seqüência ótima de controle preditivo no instante t+1 é tal que

$$J\left[\Delta \mathbf{u}^{*}(t+1), \Delta l(t+1/t+1), y_{m}(t+1), \mathbf{y}_{r}(t+1)\right] \leq$$

 $\leq J\left[\Delta \mathbf{u}(t+1), \Delta l(t+1/t+1), y_{m}(t+1), \mathbf{y}_{r}(t+1)\right],$

e o custo da solução candidata factível pode ser escrito como

$$J\left[\Delta\mathbf{u}\left(t+1\right), \Delta l\left(t+1/t+1\right), y_{m}\left(t+1\right), \mathbf{y}_{r}\left(t+1\right)\right] =$$

$$= J\left[\Delta\mathbf{u}^{*}\left(t\right), \Delta l\left(t/t\right), y_{m}\left(t\right), \mathbf{y}_{r}\left(t\right)\right] - \left\|\Delta u\left(t\right)\right\|_{Q_{u}}^{p} - \left\|\dot{y}\left(t+1/t\right) - y_{r}\left(t+1\right)\right\|_{Q_{y}}^{p} - \left\|\dot{y}\left(t+T_{y}/t\right) - y_{r}\left(t+T_{y}\right)\right\|_{Q_{t}}^{p} +$$

$$+ \left\|\Delta u\left(t+T_{u}\right)\right\|_{Q_{u}}^{p} + \left\|\dot{y}\left(t+T_{y}+1/t+1\right) - y_{r}\left(t+T_{y}+1\right)\right\|_{Q_{y}}^{p} +$$

$$+ \left\|\dot{y}\left(t+T_{y}+1/t+1\right) - y_{r}\left(t+T_{y}+1\right)\right\|_{Q_{t}}^{p},$$

então a ponderação Q_t deve satisfazer

$$-\|\Delta u(t)\|_{Q_{u}}^{p} - \|\hat{y}(t+1/t) - y_{r}(t+1)\|_{Q_{y}}^{p} - \|\hat{y}(t+T_{y}/t) - y_{r}(t+T_{y})\|_{Q_{t}}^{p} + \|\Delta u(t+T_{u})\|_{Q_{u}}^{p} + \|\hat{y}(t+T_{y}+1/t+1) - y_{r}(t+T_{y}+1)\|_{Q_{y}}^{p} + \|\hat{y}(t+T_{y}+1/t+1) - y_{r}(t+T_{y}+1)\|_{Q_{t}}^{p} \le 0,$$

para todos os valores factíveis da saída e dos incrementos no esforço de controle. Quando a ponderação de saída terminal é adequadamente calculada, pode-se assegurar que o sistema em malha fechada com CP-MLDSFO é estável.

D.3 Conjuntos Máximos de Saídas Admissíveis

Para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada com CP-MLDSFO, pode-se agregar às exigências operacionais do processo uma restrição de conjunto terminal. O sistema em malha fechada será estável se o vetor de estados do modelo estiver contido no conjunto terminal ao final do horizonte de previsão. A restrição de conjunto terminal é dada por

$$H_{CT}x\left(t+T_{y}/t\right) \leq h_{CT}.$$

O conjunto terminal pode ser implementado através do CMSA (Conjunto Máximo de Saídas Admissíveis - *Maximal Output Admissible Set*) (Gilbert e Tan, 1991), em cujo interior a trajetória de estado converge para a origem sem violar restrições. Esta característica torna a demonstração de estabilidade trivial. O CMSA de um sistema autônomo representado pelo modelo de estados

$$x(t+1) = Ax(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

e cujo espaço de saídas factíveis é definido pelas desigualdades

$$S^{i}y(t) \leq r^{i}, \quad i = 1, 2, \dots, s^{*},$$

é calculado executando-se o Algoritmo 3.

Algoritmo 3 (Gilbert e Tan, 1991) Cálculo do CMSA, denotado por \mathcal{O}_{∞} , de um Sistema Autônomo Representado no Espaço de Estados

- (i) Faça t=0
- (ii) Resolva

$$\begin{aligned} &\max_{x} \ J_{i}\left(x\right) = f_{i}\left(CA^{t+1}x\right), \quad i=1,2,\ldots,s^{*}, \\ &\text{sujeito a} \ f_{j}\left(CA^{k}x\right) \leq 0, \quad j=1,2,\ldots,s^{*}, \quad k=0,1,\ldots,t, \\ &\text{sendo} \ f_{i}\left(y\right) = S^{i}y - r^{i}. \end{aligned}$$

SE
$$J_i^* \leq 0$$
 para $i=1,2,\ldots,s^*$ \Rightarrow PARE. Faça $t^*=t$ e calcule

$$\mathcal{O}_{\infty} = \left\{ x \in \Re^n : f_i\left(CA^tx\right) \le 0, \ i = 1, 2, \dots, s^*, \ t = 0, 1, \dots, t^* \right\};$$

SENÃO, continue.

(iii) - Faça t = t + 1 e volte para (ii).

Quando o sistema é representado pelo modelo de estados

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

é necessário definir um ganho de realimentação de estados, K, cuja função é estabilizar o sistema nas referências desejadas quando o vetor de estados estiver contido no interior do CMSA. O CMSA é calculado executando-se o Algoritmo 3 utilizando-se como parâmetros de entrada as matrizes A+bK, C, S e r. O ganho K é utilizado apenas na demonstração teórica de estabilidade, mas modifica as dimensões do CMSA.

Em (Kolmanovsky e Gilbert, 1995) propõe-se o Algoritmo 4 para determinar o CMSA de processos autônomos, representados no espaço de estados, com perturbação aditiva nas equações de estado e de saída do modelo. O sistema é descrito por

$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t),$$

onde $w(t) \in W$ é um vetor de perturbações.

Algoritmo 4 (Kolmanovsky e Gilbert, 1995) Cálculo do CMSA de um Sistema Autônomo, Representado no Espaço de Estados, com Perturbação Aditiva nas Equações de Estado e de Saída do Modelo

- (i) Faça t=0
- (ii) Calcule

$$\begin{split} Y_t &= \left\{y \in \Re^p: \; Sy \leq r_t\right\}, \\ \mathcal{O}_t &= \left\{x \in \Re^n: \; H_t x \leq g_t\right\}, \\ \text{onde } r_0^i &= r^i - h_W \left(D^T S^i\right), \quad i = 1, 2, \dots, s^*, \\ r_{t+1}^i &= r_t^i - h_W \left(\left(C A^t B\right)^T S^i\right), \quad i = 1, 2, \dots, s^*, \\ H_0 &= SC, \quad g_0 = r_0, \\ H_{t+1} &= \left[\begin{array}{c} H_t \\ SC A^{t+1} \end{array}\right], \quad g_{t+1} = \left[\begin{array}{c} g_t \\ r_{t+1} \end{array}\right], \\ e \; \text{sendo} \quad h_W \left(\eta\right) = \sup_{w \in W} \left(\eta^T w\right) \quad \text{a função apoio de } W. \end{split}$$

SE todas as designaldades acrescentadas ao conjunto \mathcal{O}_t são redundantes \Rightarrow PARE; Faça $t^*=t$ e $\mathcal{O}_\infty=\mathcal{O}_t$;

SENÃO, continue.

(iii) - Faça t = t + 1 e volte para (ii).

Em (Mukai et al., 2002) o Algoritmo 4 é utilizado para determinar o CMSA de cada partição do modelo de um processo afim por partes (PWA) com perturbação aditiva nas equações de estado e de saída. O sistema é descrito por

$$x(t + 1) = A_i x(t) + B_i u(t) + B_w w(t),$$

 $y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + D_w w(t),$

se $S^iy(t) \leq r^i$, $i=1,2,\ldots,s$. O Algoritmo 4 é executado utilizando-se como parâmetros de entrada as matrizes $A_i+B_iK_i$, $C_i+D_iK_i$, B_w , D_w , S e r, sendo K_i , $i=1,2,\ldots,s$ ganhos de realimentação de estados definidos para cada partição do modelo afim por partes do processo. O CMSA do processo é dado por

$$\mathcal{O}_{\infty} = \cap \mathcal{O}_{\infty,i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

onde $\mathcal{O}_{\infty,i}$ é o CMSA da partição i do modelo do processo.

Apêndice E

Trabalhos Publicados

Moreira, V. D., do Amaral, W. C. e Ferreira, P. A. V. (2004). A New Approach for Robust Model Predictive Control with an Application to an Air-Conditioning System, In Proceedings of the Conference on Control Applications, Taipei, Taiwan.

Moreira, V. D., Ferreira, P. A. V. e do Amaral, W. C. (2002). Controle Preditivo de Sistemas de Tratamento de Ar: Integração de Variáveis Lógicas ao Modelo, Nos Anais do Congresso Brasileiro de Automática, Natal, RN, pp. 2804-2809.

Bibliografia

- Bemporad, A. (2002). An efficient technique for translating mixed logical dynamical systems into piecewise affine systems, *In Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, pp. 1970–1975.
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2000a). Optimal controllers for hybrid systems: stability and piecewise linear explicit form, *In Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, pp. 1810–1815.
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2000b). Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems, *In Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, IL, pp. 1190–1194.
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2001). Robust model predictive control: piecewise linear explicit solution, *In Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, pp. 939–944.
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2002). Model predictive control based on linear programming the explicit solution, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(12): 1974–1985.
- Bemporad, A., Heemels, W. P. M. H. e de Schutter, B. (2002). On hybrid systems and closed-loop mpc systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(5): 863–869.
- Bemporad, A. e Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica* **35**(2): 407–427.
- Bemporad, A. e Morari, M. (2001). Optimization-based hybrid control tools, *In Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA, pp. 1689–1703.
- Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. e Pistikopoulos, E. N. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems, *Automatica* **38**(1): 3–20.

Bemporad, A., Roll, J. e Ljung, L. (2001). Identification of hybrid systems via mixed-integer programming, *In Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Orlando, USA, pp. 786–792.

- Branicky, M. S., Borkar, V. S. e Mitter, S. K. (1998). A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(1): 31–45.
- Broome, P. W. (1965). Discrete orthonormal sequences, *Journal of the Association for Computing Machinery* **12**(2): 151–168.
- Camacho, E. F. e Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, UK.
- Campo, P. J. e Morari, M. (1987). Robust model predictive control, *In Proceedings of the American Control Conference*, Minneapolis, MN, pp. 1021–1026.
- Cavalier, T. M., Pardalos, P. M. e Soyster, A. L. (1990). Modeling and integer programming techniques applied to propositional calculus, *Computers and Operations Research* 17(6): 561–570.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. e Tuffs, P. S. (1987a). Generalized predictive control part 1: the basic algorithm, *Automatica* 23(2): 137–148.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. e Tuffs, P. S. (1987b). Generalized predictive control part 2: extensions and interpretations, *Automatica* **23**(2): 149–160.
- Clarke, D. W. e Scattolini, R. (1991). Constrained receding horizon predictive control, *In Proceedings of the IEE, part D, Control Theory and Applications* **138**(4): 347–354.
- Cutler, C. R. e Ramaker, B. C. (1980). Dymanic matrix control a computer control algorithm, In Proceedings of the Joint Automatic Control Conference, San Francisco, CA.
- Cuzzola, F., Geromel, J. C. e Morari, M. (2001). An improved discrete-time robust approach for constrained model predictive control, *In Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, pp. 3759–3764.
- den Hof, P. M. J. V., Heuberger, P. S. C. e Bokor, J. (1995). System identification with generalized orthonormal basis functions, *Automatica* **31**(12): 1821–1834.
- Dua, V. e Pistikopoulos, E. N. (2000). An algorithm for the solution of multiparametric mixed integer linear programming problems, *Annals of Operations Research* (99): 123–139.

Dumont, G. A. e Huzmezan, M. (2002). Concepts, methods and techniques in adaptive control, *In Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, pp. 1137–1150.

- Feng, G. (2002). Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems, *IEEE Transactions* on Automatic Control **47**(7): 1108–1112.
- Ferrari-Trecate, G., Cuzzola, F. A., Mignone, D. e Morari, M. (2001). Analysis and control with performance of piecewise affine and hybrid systems, *In Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA, pp. 200–205.
- Finn, C. K., Wahlberg, B. e Ydstie, B. E. (1993). Constrained predictive control using orthogonal expansions, *Process Systems Engineering, AIChE Journal* **39**(11): 1810–1826.
- Fletcher, R. e Leyffer, S. (1995). Numerical experience with lower bounds for MIQP branch-and-bound, *Technical report*, Department of Mathematics, University of Dundee, Scotland, U.K., URL: http://www.mcs.dundee.ac.uk:8080/sleyfer.
- Gilbert, E. G. e Tan, K. T. (1991). Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets., *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(9): 1008–1020.
- Heemels, W. P. M. H., de Schutter, B. e Bemporad, A. (2001). Equivalence of hybrid dynamical models, *Automatica* **37**(7): 1085–1091.
- Huzmezan, M., Dumont, G. A., Gough, W. A., Janiewicz, T., Kovac, S. e Meade, D. (2002). A multivariable laguerre-based indirect adaptive predictive controller applied to a fuel blending process, *In Proceedings of the AdConIP*, Kumamoto, Japão.
- Johansson, M. e Rantzer, A. (1998). Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(4): 555–559.
- Keerthi, S. S. e Gilbert, E. G. (1988). Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving-horizon approximations, *Journal of optimization theory and applications* **57**(2): 265–293.
- Kolmanovsky, I. e Gilbert, E. G. (1995). Maximal output admissible sets for discrete-time systems with disturbance inputs, *In Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, WA, pp. 1995–1999.
- Kothare, M. V., Balakrishnan, V. e Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **32**(10): 1361–1379.

Labinaz, G., Bayoumi, M. M. e Rudie, K. (1997). A survey of modeling and control of hybrid systems, *Annual reviews in control* 21: 79–92.

- Lambert, M. (1987). Adaptive Control of Flexible Systems, PhD thesis, University of Oxford, England.
- Lennartson, B., Egardt, B. e Tittus, M. (1994). Hybrid systems in process control, *In Proceedings* of the Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, USA, pp. 3587–3592.
- Lindskog, P. (1996). *Methods, Algorithms and Tools for System Identification Based on Prior Knowledge*, PhD thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Lygeros, J., Tomlin, C. e Sastry, S. (1999). Controllers for reachability specifications for hybrid systems, *Automatica* **35**(3): 349–370.
- Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. e Scokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: stability and optimality, *Automatica* **36**(6): 789–814.
- Morari, M. e Lee, J. H. (1999). Model predictive control: past, present and future, *Computers and Chemical Engineering* **23**(4-5): 667–682.
- Moreira, V. D. (2001). *Modelagem, caracterização e controle de sistemas de tratamento de ar industrial*, Master's thesis, Universidade Federal da Paraíba, Campus II, Campina Grande, PB.
- Moreira, V. D., do Amaral, W. C. e Ferreira, P. A. V. (2004). A new approach for robust model predictive control with an application to an air-conditioning system, *In Proceedings of the Conference on Control Applications*, Taipei, Taiwan, CD-ROM, pp. 1–6.
- Moreira, V. D., Ferreira, P. A. V. e do Amaral, W. C. (2002). Controle preditivo de sistemas de tratamento de ar: Integração de variáveis lógicas ao modelo, *Nos Anais do Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN, pp. 2804–2809.
- Moreira, V. D., Lima, A. M. N. e de Mato Gurgel, J. M. A. (2002). Modelagem, caracterização e controle de um sistema de tratamento de ar industrial, *Nos Anais do Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN.
- Mukai, M., Azuma, T. e Fujita, M. (2002). Robust receding horizon control for piecewise linear systems based on constrained positively invariant sets, *In Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, pp. 2348–2353.

Ninness, B., Gómez, J.-C. e Weller, S. (1995). MIMO system identification using orthonormal basis functions, *In Proceedings of the Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, pp. 703–708.

- Ninness, B. e Gustafsson, F. (1994). A unifying construction of orthonormal bases for system identification, *Technical report*, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Ninness, B. e Gustafsson, F. (1995). Orthonormal bases for system identification, *In Proceedings* of the European Control Conference, Roma, Itália, pp. 13–18.
- Oliveira, G. H. C. (1997). Controle Preditivo para Processos com Incertezas Estruturadas baseado em Séries de Funções Ortonormais, PhD thesis, DCA/FEE/UNICAMP Campinas/SP/Brasil.
- Oliveira, G. H. C., Amaral, W. C., Favier, G. e Dumont, G. A. (2000). Constrained robust predictive controller for uncertain processes modeled by orthonormal series function, *Automatica* 36(4): 563–571.
- Äström, K. J. e Wittenmark, B. (1989). Adaptive Control, Addison-Wesley Publishing Company.
- Passino, K. M., Michel, A. N. e Antsaklis, P. J. (1994). Lyapunov stability of a class of discrete event systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(2): 269–279.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. e Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control: applications to industrial processes, *Automatica* 14(5): 413–428.
- Silva, M. P., Bemporad, A., Botto, M. A. e da Costa, J. S. (2003). Optimal control of uncertain piecewise affine/mixed logical dynamical systems, *In Proceedings of the European Control Conference*, Cambridge, UK.
- Slupphaug, O., Vada, J. e Foss, B. A. (1997). MPC in systems with continuous and discrete control inputs, *In Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, NM, pp. 3495–3499.
- Tyler, M. L. e Morari, M. (1999). Propositional logic in control and monitoring problems, *Automatica* **35**(8): 565–582.
- Williams, H. P. e Brailsford, S. C. (1997). The splitting of variables and constraints in the formulation of integer programming models, *European Journal of Operational Research* 100(3): 623–628.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach of the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **SMC-3**(1): 28–44.

- Zervos, C. e Dumont, G. (1988). Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation, *International Journal of Control* **48**(1): 2333–2359.
- Zheng, A. e Morari, M. (1994). Robust control of linear time-varying systems with constraints, In Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, ML, pp. 2416–2420.