



**Universidade Estadual de Campinas**  
**LCSI** Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

**Controle e Estimação de Estado de Sistemas Multivariáveis Não Lineares Variantes no Tempo Limitados em Norma: Aspectos de Robustez, Descentralização e Otimização  $\mathcal{H}_\infty$**

**Autor: Marcus Pantoja da Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

**Dissertação de Mestrado** apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Campinas, SP  
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si38c Silva, Marcus Pantoja da  
Controle e estimação de estado de sistemas  
multivariáveis não lineares variantes no tempo limitados  
em norma : aspectos de robustez, descentralização e  
otimização H infinito / Marcus Pantoja da Silva. --  
Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Celso Pascoli Bottura.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Controle robusto. 2. Análise de sistemas. I.  
Bottura, Celso Pascoli. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título.

Título em Inglês: Control and state estimation of nonlinear multivariable time-varying  
bounded norm systems : aspects of robustness, decentralization and  
H infinity optimization

Palavras-chave em Inglês: Robust control, systems analysis

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Pedro Luís Dias Peres, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Data da defesa: 17/06/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

Marcus Pantoja da Silva

**Controle e Estimação de Estado de Sistemas Multivariáveis Não Lineares Variantes no Tempo Limitados em Norma: Aspectos de Robustez, Descentralização e Otimização  $\mathcal{H}_\infty$**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Aprovação em 17/06/2010

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura - FEEC - UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres - FEEC - UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira - UNESP

Campinas, SP  
2010

C,  
R-104.8

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Marcus Pantoja da Silva

**Data da Defesa:** 17 de junho de 2010

**Título da Tese:** "Controle e Estimação de Estado de Sistemas Multivariáveis Não Lineares Variantes no Tempo Limitados em Norma: Aspectos de Robustez, Descentralização e Otimização H Infinito"

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente): 

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira: 

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres: 

201017163

“Se você encontrar um caminho sem obstáculos, ele provavelmente não leva a lugar nenhum.”  
*Frank Clark*

# Resumo

Este trabalho propõe uma metodologia para o controle robusto descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma utilizando um procedimento alternativo ao *S-Procedure* proposto por Yakubovich. Com base em nosso procedimento, desenvolvemos também uma metodologia de projeto de observadores robustos descentralizados para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma. Com o estado estimado pelo observador descentralizado projetamos um controlador descentralizado por realimentação de saída que estabiliza o sistema. Outro problema que é resolvido nesse trabalho é o projeto de controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  descentralizado para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma sujeitos a distúrbios externos. Exemplos que ilustram aplicações das metodologias propostas são apresentados.

**Palavras-chave:** Controle robusto, Controle descentralizado, Observador robusto, Observador robusto descentralizado, Sistemas não lineares, LMIs, Otimização  $\mathcal{H}_\infty$ .

# Abstract

This work proposes a methodology for decentralized robust control of nonlinear systems with time-varying uncertainties norm bounded using an alternative procedure to the S-Procedure proposed by Yakubovich. Based on our procedure a decentralized robust observer design methodology for a class of time-varying norm bounded nonlinear systems is also developed. With the state estimated by the decentralized observer we design an output feedback decentralized controller that stabilizes the system. Another problem that is solved in this work is the design of a decentralized  $\mathcal{H}_\infty$  robust controller for a class of time-varying norm bounded nonlinear systems subject to external disturbances. Examples illustrating the application of the proposed methodologies are presented.

**Keywords:** Robust control, Decentralized control, Robust observer, Robust decentralized observer, Nonlinear systems, LMIs,  $\mathcal{H}_\infty$  optimization.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pois sem ele nada disso seria possível. Dedico uma atenção especial nesse agradecimento ao meu orientador, Prof. Celso Bottura, o qual sempre me incentivou a ir atrás do conhecimento e sempre acreditou no resultado desse trabalho que foi fruto de muito esforço e dedicação. Agradeço também a todos os professores e funcionários da FEEC que contribuíram de muitas maneiras para que eu chegasse ao fim desse trabalho.

Aos amigos Néilton, Helen, Fábio, Erick, Bruno, Marcão e Rafael que juntamente comigo, vieram para essa Universidade aprimorar e avançar em seus conhecimentos adquiridos na graduação.

Aos amigos que fiz em Campinas durante esse tempo e que compartilharam os momentos bons e ruins que passamos aqui devido à distância de nossas famílias: Aleixo, Vivi, Gigi, Aline, Carmel, Didi, Sedução, Simony, Moraes, Brutus, Montanha, Marcel, Gabi, Lagoia, Atanazio e muitos outros que espero sinceramente que não se sintam excluídos dessa lista.

Aos amigos que fiz aqui no LCSI: David, Ana, Cesar, Fernando, Murilo, Johanna, Laryssa, Tales e Tomaz pelos vários momentos de descontração que foram necessários para que bons resultados fossem obtidos.

Aos amigos Liviane, Plácido, Acácio, Lucas, Igor que ficaram em Belém e que sempre me incentivaram a seguir meus sonhos e objetivos.

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim, me apoiando incentivando a sempre estudar e nunca desistir de meus objetivos.

Ao meu avô, que com sua experiência de vida, me ofereceu sempre bons conselhos.

Ao meu primo Diego pelo companheirismo.

Ao meu irmão que também sempre me incentivou em tudo o que fiz na minha vida e a minha cunhada Marcélia que sempre me recebeu de braços abertos em sua casa enquanto morou em São Paulo.

Agradeço a Nazaré por todo incentivo e pela paciência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais e irmão*



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Glossário</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Trabalhos Submetidos Pelo Autor</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Apresentação . . . . .	2
<b>2 Conceitos básicos</b>	<b>5</b>
2.1 Estabilidade de sistemas não lineares segundo Lyapunov . . . . .	5
2.2 Robustez . . . . .	8
2.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	8
2.4 Complemento de Schur . . . . .	9
2.5 <i>S-Procedure</i> . . . . .	10
2.6 Transformação de Similaridade . . . . .	10
<b>3 Controle robusto descentralizado de uma classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma</b>	<b>13</b>
3.1 Introdução . . . . .	13
3.2 Controle Robusto . . . . .	14
3.3 Controle Robusto Descentralizado . . . . .	24
3.4 Conclusões . . . . .	30
<b>4 Projeto de observador e controlador robustos descentralizados para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitadas em norma</b>	<b>31</b>
4.1 Introdução . . . . .	31
4.2 Projeto de Observador Descentralizado . . . . .	32
4.3 Projeto de Controlador e Observador Descentralizados . . . . .	39
4.4 Conclusões . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Controle robusto <math>\mathcal{H}_\infty</math> descentralizado por realimentação de estado estimado para um classe de sistemas não lineares limitados em norma sujeitos a distúrbios externos</b>	<b>49</b>
5.1	Introdução . . . . .	49
5.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	50
5.3	Projetos de controlador e observador de estado $\mathcal{H}_\infty$ robustos para sistemas não lineares limitados em norma com entradas exógenas . . . . .	50
5.4	Projeto de controlador e observador de estado descentralizados $\mathcal{H}_\infty$ robustos para sistemas não lineares limitados em norma com perturbações exógenas . . . . .	61
5.5	Conclusões . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>71</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>73</b>

# Lista de Figuras

3.1	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 1. . . . .	19
3.2	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 2 quando o ganho $K$ é limitado. . . . .	21
3.3	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 3 quando o ganho $K$ é limitado. . . . .	24
3.4	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 4 . . . . .	27
3.5	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 5 quando o ganho $K_D$ é limitado. . . . .	29
3.6	Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 6 quando o ganho $K_D$ é limitado. . . . .	30
4.1	Representação de um observador de estado . . . . .	33
4.2	Estado $x_{11}$ real e estimado do sistema 4.24. . . . .	38
4.3	Estado $x_{12}$ real e estimado do sistema 4.24. . . . .	38
4.4	Estado $x_{21}$ real e estimado do sistema 4.24. . . . .	39
4.5	Estado $x_{22}$ real e estimado do sistema 4.24. . . . .	39
4.6	Estado $x_{11}$ real e estimado do Exemplo 8. . . . .	47
4.7	Estado $x_{12}$ real e estimado do Exemplo 8. . . . .	47
4.8	Estado $x_{21}$ real e estimado do Exemplo 8. . . . .	47
4.9	Estado $x_{22}$ real e estimado do Exemplo 8. . . . .	47
5.1	Estado $x_1$ real e estimado do Exemplo 9. . . . .	59
5.2	Estado $x_2$ real e estimado do Exemplo 9. . . . .	60
5.3	Estado $x_{11}$ real e estimado do Exemplo 10. . . . .	68
5.4	Estado $x_{12}$ real e estimado do Exemplo 10. . . . .	68
5.5	Estado $x_{21}$ real e estimado do Exemplo 10. . . . .	69
5.6	Estado $x_{22}$ real e estimado do Exemplo 10. . . . .	69

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	- Espaço dos números reais
$\mathbb{R}^n$	- Espaço dos vetores reais de dimensão $n$
$V$	- Função de Lyapunov
$x^T$	- Transposta de $x$
$w$	- perturbação externa na entrada do sistema
$v$	- sinal medido na saída do sistema
$\ A\ $	- Norma da matriz $A$
$I$	- Matriz identidade

# Trabalhos Aceitos para Publicação

1. Marcus Pantoja, Celso Pascoli Bottura. “Controle robusto descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma”. *XVII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, 2010.*
2. Marcus Pantoja, Celso Pascoli Bottura. “Controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  descentralizado por realimentação de saída para um classe de sistemas não lineares limitados em norma sujeitos à distúrbios externos” *XIV Congresso Latino Americano de Control Automatico, Santiago - Chile, 2010..*
3. Marcus Pantoja, Celso Pascoli Bottura. “A new proposal for  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterization and the optimal  $\mathcal{H}_\infty$  control of nonlinear systems with time-varying uncertainties with know norm bound and exogenous disturbances”. *9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, Serra Negra, June, 2010*
4. Marcus Pantoja, Celso Pascoli Bottura. “Decentralized observer for a class of nonlinear norm bounded systems”. *Dynamics Days South America, São José dos Campos, 2010*

# Capítulo 1

## Introdução

Grande parte dos sistemas físicos pode ser descrito por equações diferenciais não lineares, o que explica o grande interesse existente nessa área de pesquisa [2], [3]. Ainda, na maioria dos casos, estas equações diferenciais não são completamente conhecidas, principalmente no que diz respeito aos seus parâmetros. A preocupação com sistemas incertos deu origem à Teoria de Controle Robusto [4].

Autores como [5], [6], [7], entre outros, utilizam a ferramenta de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) juntamente com a Teoria de Lyapunov para fazer análise de estabilidade de sistemas lineares. Também utilizam essa mesma ferramenta para a síntese de controladores através da realimentação de estado e de realimentação de saída, projeto de controladores dinâmicos [8], projeto de filtros robustos [9], etc.

Diversos autores como [1], [10], entre outros, utilizam essa mesma ferramenta para o a análise de estabilidade, para a síntese de controladores e projeto de observadores de estado para sistemas não lineares. Esta abordagem possui a vantagem de permitir a inclusão de vários aspectos de projeto que podem ser necessários ao desenvolvimento do controlador para o sistema.

A análise das propriedades de sistemas não-lineares será feita através do método direto de Lyapunov [11]. A solução numérica das condições geradas por este método será feita por *solvers* projetados para a solução deste tipo de problema.

Neste trabalho tratamos especificamente de duas classes particulares de sistemas não lineares, a primeira classe é a de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma, a segunda classe de sistemas é descrita como sendo de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma. Podemos citar alguns problemas reais que se enquadram nessas classes de sistemas como controle de sistemas potência, de processos químicos, de espaçonaves, de veículos etc [12].

Os trabalhos propostos na literatura utilizam o *S-Procedure* [13] para tratar da restrição em norma da parte não linear do sistema. Neste trabalho propomos uma solução diferente, que utiliza uma

desigualdade matricial para tratar desse problema. A vantagem dessa abordagem é que ela reduz o custo computacional das metodologias propostas.

## 1.1 Apresentação

Dividimos essa dissertação em seis capítulos. Este primeiro capítulo consiste em uma introdução sobre o problema que será tratado neste trabalho situando o leitor com relação aos capítulos seguintes. Os demais capítulos estruturam-se como indicado:

- **Capítulo 2:** Este capítulo expõe alguns conceitos básicos que serão utilizados nessa trabalho como estabilidade de sistemas não lineares segundo Lyapunov, robustez, entre outros.
- **Capítulo 3:** Este capítulo trata do desenvolvimento de uma metodologia para o controle descentralizado de uma classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma. Primeiramente tratamos do controle robusto centralizado dessa classe de sistemas e através de exemplos propostos, comparamos os resultados obtidos com a metodologia proposta com os da literatura, em seguida tratamos o caso descentralizado e novamente comparamos os resultados obtidos com a metodologia proposta com os da literatura.
- **Capítulo 4:** Neste capítulo apresentamos metodologias para os projetos de observador e controlador robustos descentralizados para uma classe de sistemas não lineares limitados em norma. Primeiramente apresentamos uma metodologia para o projeto de um observador para essa classe de sistemas e então apresentamos um exemplo numérico que ilustra o funcionamento do observador, então a partir dos estados estimados pelo observador, construímos um controlador descentralizado por realimentação de saída que estabiliza o sistema e então apresentamos um exemplo numérico que ilustra a metodologia proposta. O problema do controlador e do observador não pode ser resolvido em um único passo, deste modo resolvemos primeiramente o problema de controle e posteriormente o problema de observação.
- **Capítulo 5:** Neste capítulo tratamos de uma classe de sistemas não lineares limitadas em norma sujeitos a perturbações externas. Para esta classe de sistemas, projetamos observador e controlador descentralizados robustos de forma separadas, em um procedimento de dois passos, sendo que no primeiro passo resolvemos o problema de controle e no segundo resolvemos o problema do observador, com o objetivo de estimar o estado e estabilizar robustamente o sistema que está sujeito a perturbações externas. O critério de robustez utilizado para tratar da robustez em relação às perturbações externas foi a norma  $\mathcal{H}_\infty$  que pode ser caracterizada a partir de uma função de Lyapunov.

- **Capítulo 6:** Utilizamos este capítulo para a discussão final das metodologias desenvolvidas, dos resultados obtidos e para as propostas de continuação deste estudo.



# Capítulo 2

## Conceitos básicos

Este capítulo é dedicado à apresentação de definições preliminares sobre a análise de sistemas que serão bastante utilizados no decorrer deste trabalho e por isso são de fundamental importância.

### 2.1 Estabilidade de sistemas não lineares segundo Lyapunov

O segundo método de Lyapunov usado para investigar a estabilidade de sistemas foi proposto por volta de 1890 e é baseado na extensão da idéia de que se a energia total de um sistema é continuamente dissipada, então este sistema irá convergir para um ponto de equilíbrio [11]. Desta forma, pode-se concluir sobre a estabilidade de um sistema através da análise do comportamento de uma função escalar.

Considere o seguinte sistema definido por

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.1}$$

sendo  $x$  um vetor de estado  $n$ -dimensional,  $f(x, t)$  é um vetor  $n$ -dimensional. Supomos que o sistema (2.1) tem uma única solução começando em uma dada condição inicial. Denotaremos a solução de (2.1) por  $\phi(t; x_0, t_0)$ , com  $x_0$  em  $t = t_0$  e  $t$  é o tempo observado. Portanto

$$\phi(t; x_0, t_0) = x_0 \tag{2.2}$$

A seguir definiremos estado de equilíbrio

**Definição 1** Em (2.1), um estado  $x_e$ , com

$$f(x_e, t) = 0 \quad (2.3)$$

é chamado de um estado de equilíbrio do sistema [14].

Com esses dois conceitos definiremos a Estabilidade no sentido de Lyapunov.

**Definição 2** Denotaremos uma região esférica de raio  $k$  ao redor de um estado de equilíbrio  $x_e$  como

$$\|x - x_e\| \leq k \quad (2.4)$$

onde  $\|x - x_e\|$  é chamada de norma euclidiana.

Façamos  $S(\delta)$  consistir em todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \quad (2.5)$$

e seja  $S(\epsilon)$  o conjunto de todos os pontos tais que

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.6)$$

Um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (2.1) é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada  $S(\epsilon)$ , houver um  $S(\delta)$  tal que trajetórias partindo de  $S(\delta)$  não saem de  $S(\epsilon)$  quando  $t$  aumenta indefinidamente [14].

A seguir definiremos estabilidade assintótica que será bastante utilizada nesse trabalho

**Definição 3** Um estado de equilíbrio  $x_e$  de (2.1) é dito assintoticamente estável se ele for estável no sentido de Lyapunov e se toda a solução partindo de dentro de  $S(\delta)$  convergir, sem sair de  $S(\epsilon)$ , para  $x_e$  quando  $t$  aumenta indefinidamente [14].

Algum conhecimento do tamanho da máxima região de estabilidade assintótica é geralmente necessário. Esta região é chamada de domínio de atração. Este domínio é a parte do espaço de estados em que se originam trajetórias assintoticamente estáveis. Em outras palavras, toda trajetória que se origina no domínio de atração é assintoticamente estável.

O seguinte Lema apresenta condições suficientes para mostrar a estabilidade e o domínio de atração de um sistema.

**Lema 1** *Considere um sistema da forma*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.7)$$

onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função suave em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que existam escalares positivos  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  e uma função continuamente diferenciável  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 x^T x &\leq V(x) \leq \epsilon_2 x^T x \\ \dot{V}(x) &\leq -\epsilon_3 x^T x \end{aligned} \quad (2.8)$$

Então  $V(x)$  é uma função de Lyapunov em  $D$ .

Não existe um método sistemático para obtenção de funções de Lyapunov para qualquer tipo de sistema, porém a função quadrática  $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é largamente utilizada principalmente, no caso de sistemas lineares invariantes no tempo, visto que a função de Lyapunov quadrática é necessária e suficiente para provar a estabilidade. No caso de sistemas incertos e também não lineares, a função quadrática pode levar a resultados conservadores [15]. Entretanto, a função quadrática ainda é bastante utilizada devido a simplicidade na determinação numérica das condições de estabilidade [16].

A seguir será introduzido o conceito de matriz positiva definida.

**Definição 4** *Uma matriz quadrada  $P$  é dita positiva definida se e somente se*

$$x^T P x > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (2.9)$$

Se a desigualdade acima admitir  $x^T P x = 0$ , a matriz  $P$  é dita positiva semi-definida. Uma condição necessária para que uma matriz seja positiva definida é que todas suas submatrizes principais também sejam positivas definidas. Isto pode ser facilmente verificado se considerarmos um vetor  $x$  com zeros nas linhas que não pertençam à submatriz escolhida.

Uma propriedade útil de matrizes positivas definidas é que todos seus autovalores são positivos.

As seguintes notações serão utilizadas na dissertação:

- $P > 0$ : A matriz  $P$  é positiva definida;
- $P \geq 0$  A matriz  $P$  é semi-definida positiva;
- $P < 0$ : A matriz  $P$  é negativa definida;
- $P \leq 0$  A matriz  $P$  é semi-definida negativa.

## 2.2 Robustez

A propriedade conhecida como robustez é um dos fatores essenciais para o sucesso de um sistema de controle. Dizemos que um sistema é robusto com relação a uma dada característica se ele possui a capacidade de preservá-la mesmo na ocorrência de variações de outras de suas características ou do em meio que se encontra inserido. Neste trabalho estudamos sistemas robustos de classes diversas, deste modo queremos que eles sejam robustos em relação a parâmetros diferentes. Para a classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma, queremos que os sistemas preservem a estabilidade na presença de incertezas. Para a classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitadas em norma sujeitos a perturbações externas, queremos preservar a sua estabilidade mesmo na presença desses sinais externos.

## 2.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  possui a seguinte definição no espaço frequencial [17]

$$\|H(s)\|_\infty := \sup \|H(jw)\|, \quad w \in \mathfrak{R} \quad (2.10)$$

sendo  $H(s)$  a função de transferência do sistema (2.7).

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser interpretada de duas maneiras:

- É a medida para o nível de atenuação de distúrbio;
- É uma medida de robustez.

Essas propriedades associadas com a norma  $\mathcal{H}_\infty$  nos motivam a considerar os seguintes problemas de controle:

- Dado um nível de desempenho  $\gamma > 0$ , determine se existe um controlador que estabilize o sistema em malha fechada tal que sua função de transferência  $\|H_f(s)\| < \gamma$ , sendo que  $H_f(s)$  denota a função de transferência do sistema em malha fechada.
- Determine um controlador em malha fechada que estabilize o sistema e minimize sua norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Neste trabalho trataremos do segundo tipo de problema associado a norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 2.4 Complemento de Schur

Supondo que  $M$  e  $Q$  são matrizes simétricas e  $R$  é uma matriz qualquer, de dimensões apropriadas, as seguintes afirmações são equivalentes [18]:

1. As desigualdades matriciais  $Q > 0$  e  $M - RQ^{-1}R^T > 0$  são satisfeitas.
2. A desigualdade matricial  $\begin{bmatrix} M & R \\ R^T & Q \end{bmatrix} > 0$  é satisfeita.

Isto pode ser facilmente verificado utilizando os argumentos que seguem. As duas desigualdades presentes em 1 são equivalentes à desigualdade

$$\begin{bmatrix} M - RQ^{-1}R^T & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (2.11)$$

Multiplicando (2.11) à esquerda e à direita pela matriz não-singular

$$\begin{bmatrix} I & RQ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & RQ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M - RQ^{-1}R^T & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q^{-1}R^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & R \\ R^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

Portanto a desigualdade 2 é verificada se e somente se a afirmação 1 também for verdadeira.

## 2.5 *S-Procedure*

A técnica conhecida como *S-procedure* [13] permite agrupar restrições de desigualdade na forma de desigualdades matriciais lineares. A seguinte versão do *S-procedure* aplica-se a desigualdades não-estritas.

**Teorema 1** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes simétricas de dimensão  $n \times n$  e considere que a inequação quadrática*

$$x^T A x \geq 0$$

*é estritamente factível (existe  $\bar{x}$  tal que  $\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$ ). Então a inequação quadrática*

$$x^T B x \geq 0$$

*é uma consequência, isto é*

$$x^T A x \geq 0 \Rightarrow x^T B x \geq 0$$

*se e somente se existir um escalar  $\lambda \geq 0$  tal que*

$$B \geq \lambda A$$

Uma versão semelhante do *S-Procedure* pode ser aplicada em desigualdades estritas. Esse Teorema foi provado por Yakubovich em 1971 [19] [13].

## 2.6 Transformação de Similaridade

Duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$  são ditas similares se existe uma matriz invertível  $S$  tal que

$$A = S^{-1} B S \tag{2.14}$$

de modo equivalente

$$B = S A S^{-1} \tag{2.15}$$

A expressão  $SAS^{-1}$  é chamada de transformação de similaridade da matriz  $A$ .

Uma importante propriedade da transformação de similaridade é que ela não altera os autovalores da matriz que passa pela transformação; essa propriedade será bastante utilizada no decorrer deste trabalho.

## Capítulo 3

# Controle robusto descentralizado de uma classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma

### 3.1 Introdução

Controle robusto descentralizado de sistemas não lineares tem sido considerado por diversos autores como [12], [20], [21], [22], [23], [24], [25] entre outros. Ele é caracterizado por tratar problemas de incertezas como sendo problemas determinísticos mas com parâmetros desconhecidos que têm suas magnitudes limitadas. Em [1] um procedimento para o controle descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo utilizando o *S-procedure* [13] é apresentado. Uma abordagem diferente, que garante um custo computacional menor e com resultados equivalentes, é apresentada neste trabalho. Para obter um controlador robusto para sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma, utilizamos o segundo método de Lyapunov e construímos um problema convexo de otimização em termos de *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) [18] que resulta em um controlador que ao mesmo tempo estabiliza o sistema como um todo e simultaneamente, maximiza o limite de incerteza do sistema. As incertezas variantes no tempo do modelo, são tratadas como sendo limitadas em norma, o que é uma hipótese razoável pois vários problemas podem ser incluídos nessa classe de sistema como controle de sistemas de potência, de espaçonaves, de veículos, etc [12]. A metodologia proposta possui vários aspectos positivos, dentre elas citamos:



- O problema do projeto do controlador como um problema de otimização convexa, o que assegura uma solução computacional simples, pois há vários pacotes computacionais que tratam esse problema e que asseguram a existência de uma solução. O ganho ótimo de controle é obtido diretamente, sem a necessidade de usar um procedimento de tentativa e erro.
- A metodologia é flexível pois permite a inclusão de parâmetros de projeto adicionais tais como estrutura e limitação das matrizes de ganho e grau desejado de incerteza.
- Todos os controladores são lineares, o que torna a sua implementação mais simples.

Neste capítulo propomos uma metodologia para o controle robusto de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo com norma limitada. A principal diferença entre os resultados obtidos em [1] e os resultados da metodologia proposta, é que para esta são obtidas condições com um número menor de linhas de LMIs, porém com resultados equivalentes mas com a vantagem de serem obtidos em um tempo menor devido à menor complexidade computacional. O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.2, após a uma breve apresentação do problema de controle centralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma, desenvolvemos um método para resolução do problema de projeto de controle desta classe de sistemas e apresentamos também alguns exemplos numéricos que são comparados com resultados da literatura. Na seção 3.3, estendemos os resultados para o projeto de controle descentralizado e comparamos resultados obtidos com resultados da literatura. Na seção 3.4 são feitas as considerações finais sobre a metodologia desenvolvida e sobre os resultados obtidos.

## 3.2 Controle Robusto

Considere um sistema não linear com incertezas variantes no tempo com a seguinte representação no espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu + h(t, x) \quad (3.1)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o estado do sistema,  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $B$  uma matriz  $n \times m$ ,  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o termo não linear incerto variante no tempo e  $u \in \mathbb{R}^m$  é a lei de controle. Em relação à modelagem do parâmetro incerto variante no tempo  $h(t, x)$ , consideramos que ele é limitado em norma [1]

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq \alpha^2 x^T H^T H x \quad (3.2)$$

sendo o escalar  $\alpha > 0$  o limite de incerteza e  $H$  uma matriz constante de dimensão  $n \times n$ . Iremos agora considerar a estabilidade do sistema (3.1), que é em geral a característica mais importante a ser determinada. O segundo método de Lyapunov é o método mais geral para a determinação da estabilidade de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo. Esse método baseia-se no fato de que se um sistema tem um estado de equilíbrio estável, então a energia decresce com o tempo até que ele atinja o estado de equilíbrio. A estratégia consiste então em encontrar uma função escalar definida positiva  $V(x)$ , sendo  $x$  um vetor de estado  $n$ -dimensional, de forma que  $\dot{V}(x)$  seja definida negativa. Escolhemos para o sistema (3.1) uma possível função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x \quad (3.3)$$

sendo a matriz  $P$  simétrica definida positiva, ou seja,  $P = P^T > 0$ .

A derivada de  $V(x)$  em relação ao tempo e ao longo de qualquer trajetória de (3.1) é dada por

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.4)$$

Para estabilizar o sistema (3.1) utilizamos uma lei de realimentação linear da forma

$$u(x) = Kx \quad (3.5)$$

Aplicando a lei de controle (3.5) no sistema (3.1) obtemos

$$\dot{x} = (A + BK)x + h(t, x) \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) em (3.4) temos

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ x^T (A^T P + PA + K^T B^T P + PBK)x + h^T P x + x^T P h &< 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Neste ponto [1] agrega ao sistema (3.7) a restrição quadrática da parte incerta variante no tempo (3.2), utilizando o *S-procedure* [13] que é um procedimento usado para atestar quando a positividade ou a negatividade de uma forma quadrática implica na positividade ou na negatividade

da outra. Também pode ser visto como uma técnica de relaxação de Lagrange, que é utilizada em problemas com restrições quadráticas. Neste trabalho propomos um procedimento diferente, que utiliza uma identidade matricial, que agrega vantagens computacionais na solução do problema. Para obter a forma quadrática no estado de (3.7) usamos o seguinte Lema:

**Lema 2** *Para quaisquer matrizes (ou vetores)  $X$  e  $Y$  de dimensões adequadas, temos a seguinte desigualdade*

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T J X + Y^T J^{-1} Y, \quad J = J^T > 0 \quad (3.8)$$

*Demonstração.* Sendo  $X$  e  $Y$  matrizes ou vetores de dimensões adequadas temos que

$$\begin{aligned} (S^{-1}Y - SX)^T I (S^{-1}Y - SX) &\geq 0 \\ Y^T S^{-1} S^{-1} Y - Y^T X - X^T Y + X^T S S X &\geq 0, \quad S S = J \\ X^T Y + Y X^T &\leq X^T J X + Y^T J^{-1} Y, \quad J = J^T > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

□

então segue que

$$h^T P x + x^T P h \leq h^T h + x^T P P x \quad (3.10)$$

Utilizando (3.2) e (3.10) encontramos

$$h^T h + x^T P P x \leq \alpha^2 x^T H^T H x + x^T P P x \leq x^T (\alpha^2 H^T H + P P) x \quad (3.11)$$

Deste modo, uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema (3.6) é dada pela seguinte inequação

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P + P A + K^T B^T P + P B K + \alpha^2 H^T H + P P &< 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Multiplicando a inequação (3.12) à direita e à esquerda por  $P^{-1}$ , fazendo  $P^{-1} = Y$  e denotando por  $I$  a matriz identidade, juntamos as variáveis do problema acima obtendo:

$$\begin{aligned} Y &> 0, \\ AY + YA^T + YK^TB^T + BKY + \alpha^2 YH^T HY + I &< 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Em (3.13) temos o produto de duas variáveis, então para tornar o problema uma LMI, fazemos a mudança de variável proposta em [5]

$$\begin{aligned} L &= KY \quad \text{portanto} \\ K &= LY^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

obtendo desse modo a seguinte condição

$$\begin{aligned} Y &> 0, \\ AY + YA^T + L^TB^T + BL + I + \alpha^2 YH^T HY &< 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como ainda temos produto de variáveis no termo  $\alpha^2 YH^T HY$  aplicamos o complemento de Schur para separá-las e deste modo podemos escrever (3.15) como

$$\begin{aligned} Y &> 0 \\ \begin{bmatrix} AY + YA^T + L^TB^T + BL + I & YH^T \\ HY & -\gamma I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A condição (3.16), se satisfeita, garante que o sistema (3.6) seja estável, entretanto queremos que ele seja estável para a maior classe de incertezas possível, por esse motivo queremos que o limite de incerteza  $\alpha$  seja maximizado e que a condição (3.16) seja satisfeita. Chamando  $\gamma = 1/\alpha^2$ , construímos um problema de otimização convexo em  $Y$  e em  $\gamma$  para obter o maior valor possível para  $\alpha$ :

$$\min \quad \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + L^T B^T + BL + I & YH^T \\ HY & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como comparação, é mostrado no Teorema 2 o resultado de [1] para o mesmo caso aqui abordado.

**Teorema 2** *O sistema (3.1) é robustamente estabilizável pela lei de controle (3.5) se o problema (3.18) for factível*

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.a} \quad & Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + L^T B^T + BL + I & I & YH^T \\ I & -I & 0 \\ HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A seguir resolvemos um exemplo que ilustra o uso do método proposto. Nesse trabalho todos os exemplos são resolvidos utilizando um computador com processador AMD Turion 64 X2 (2.0 GHz) com 2 GB de memória RAM (800 MHz), tendo como sistema operacional o Windows Vista 32 bits. O *solver* utilizado é o SeDuMi (*Self-Dual-Minimization*) [26] interfaciado pelo YALMIP (*Yet Another LMI Parser*) [27] ambos rodando sobre Matlab 7.0 [28]. Os exemplos desse capítulo são resolvidos 100 vezes para que um tempo médio de resolução seja obtido.

**Exemplo 1** *Considere o seguinte sistema que foi retirado de [1]*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + h(t, x). \quad (3.19)$$

onde  $h(t, x)$  é uma função incerta variante no tempo limitada em norma.

Na Figura 3.1 estão os resultados obtidos com o método proposto (3.17) e com o método apresentado em [1] que são resolvidos para  $H = I$ . Notamos que o método proposto apresentou um limite de incerteza  $\alpha$  inferior em comparação com o resultado obtido em [1], entretanto, devido ao menor número de linhas de LMIs, o método proposto apresentou um tempo médio menor de

resolução. Percebemos também que o ganho  $K$  encontrado é excessivamente elevado para os dois métodos citados, pois o objetivo do método é apenas maximizar os limites de  $\|h(t, x)\|$ , sem nenhuma restrição ao tamanho do ganho.

	Siljak and Stipanovic	Método proposto
$\alpha$	$1.3973 \times 10^6$	$1.0058 \times 10^5$
Tempo médio (s)	0.1197	0.0739
Linhas de LMIs	8	6
Variáveis	7	7
K	$10^6 \times \begin{bmatrix} -1.3079 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.3079 \end{bmatrix}$	$10^4 \times \begin{bmatrix} -8.0458 & 0.0000 \\ 0.0000 & -8.0274 \end{bmatrix}$

Figura 3.1: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 1.

Para resolver esse problema, utilizamos a estratégia adotada em [20] em que o ganho de controle  $K$ , que é função de  $Y$  e  $L$  é limitado pela imposição de limites a  $L$  e  $Y^{-1}$  fazendo:

$$L^T L < k_L I; \quad k_L > 0 \quad (3.20)$$

Aplicando o complemento de Schur de modo a separar o produto  $L^T L$ , encontramos que (3.20) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -k_L I & L^T \\ L & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.21)$$

do mesmo modo consideramos que a matriz  $Y$  é limitada como:

$$Y^{-1} < k_Y I; \quad k_Y > 0 \quad (3.22)$$

Aplicando novamente o complemento de Schur, encontramos que (3.22) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} k_Y I & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (3.23)$$

No projeto do controlador podemos adicionar uma restrição de garantia de um valor desejado  $\bar{\alpha}$  de  $\alpha$ , lembramos que  $\gamma = 1/\alpha^2$  e então deste modo requeremos que  $\gamma - 1/\bar{\alpha}^2 < 0$ . Com esses novos requisitos de projeto o problema de controle é dado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma + k_L + k_Y \\
\text{s.a.} \quad & Y > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY + YA^T + L^T B^T + BL + I & YH^T \\ & HY & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\
& \gamma - 1/\bar{\alpha}^2 < 0 \\
& \begin{bmatrix} -k_L I & L^T \\ L & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} k_Y I & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Como comparação, é mostrado no Teorema 3 o resultado de [1] para o mesmo caso aqui abordado.

**Teorema 3** *O sistema (3.1) é robustamente estabilizável pela lei de controle (3.5) com um  $\bar{\alpha}$  requerido se o problema (3.25) for factível*

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma + k_L + k_Y \\
\text{s.a} \quad & Y > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY + YA^T + L^T B^T + BL + I & I & YH^T \\ & I & -I & 0 \\ & HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} -k_L I & L^T \\ L & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} k_Y I & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

A seguir apresentamos um exemplo que ilustra o método proposto:

**Exemplo 2** *Considere o sistema (3.19) com  $H = I$  e  $\bar{\alpha} = 2$*

Resolvendo o exemplo com o método proposto em (3.24) e comparando novamente com o método apresentado em [1], percebemos claramente que os resultados, que estão apresentados

na Figura 3.3, apresentam o mesmo valor para o parâmetro de incerteza  $\alpha$  e também a mesma matriz de ganho  $K$ , que agora apresenta um ganho bem menor em relação ao método (3.17) devido à restrição adotada sobre ele, entretanto diferem no tempo computacional e no número de linhas de LMIs, no qual o método proposto leva vantagem, pois apresenta um menor tempo médio de resolução e também um menor número de linhas de LMIs.

	Siljak and Stipanovic	Método proposto
$\bar{\alpha}$	2	2
$\alpha$	2.0000	2.0000
Tempo médio (s)	0.0691	0.0603
Linhas de LMIs	17	15
Variáveis	9	9
K	$\begin{bmatrix} -1.8655 & -0.1220 \\ -0.1220 & -0.6082 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.8655 & -0.1220 \\ -0.1220 & -0.6082 \end{bmatrix}$

Figura 3.2: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 2 quando o ganho  $K$  é limitado.

A seguir faremos um exemplo de dimensões maiores para que uma diferença significativa entre os dois métodos seja observada.

**Exemplo 3** *Considere o seguinte sistema não linear dado pelas seguintes matrizes:*



A =

0.3796	0.8976	0.548	0.597	0.3747	0.9522	0.729	0.8735	0.1868	0.006011
0.3191	0.2886	0.5669	0.4306	0.4369	0.5433	0.2026	0.1133	0.2472	0.8019
0.9861	0.269	0.6804	0.7307	0.3043	0.2514	0.2163	0.3546	0.05419	0.4974
0.7182	0.5942	0.3714	0.2612	0.2909	0.5786	0.9763	0.2419	0.609	0.5378
0.4132	0.4759	0.07823	0.09481	0.2425	0.9155	0.5932	0.5603	0.7772	0.8709
0.09863	0.3683	0.4564	0.451	0.9367	0.8956	0.3044	0.6127	0.5111	0.7228
0.7346	0.6556	0.04784	0.6401	0.8602	0.4825	0.9677	0.3008	0.02775	0.6681
0.6373	0.9382	0.7383	0.132	0.3972	0.4427	0.896	0.7981	0.9904	0.1788
0.07384	0.6204	0.038	0.4528	0.4794	0.3118	0.19	0.7956	0.5009	0.5505
0.1205	0.2828	0.9542	0.6522	0.565	0.05531	0.001799	0.7811	0.332	0.9599
0.9816	0.2052	0.7424	0.827	0.4896	0.7538	0.7118	0.3511	0.1739	0.596
0.4968	0.4391	0.9374	0.3081	0.2698	0.1319	0.8677	0.0543	0.6256	0.8086
0.02241	0.02725	0.5134	0.4024	0.9897	0.3559	0.1183	0.7087	0.5751	0.9845
0.05383	0.8762	0.2409	0.8842	0.1837	0.3959	0.03902	0.9929	0.751	0.8859
0.1409	0.6101	0.26	0.7006	0.8617	0.8855	0.5982	0.1625	0.1535	0.2138
0.8935	0.2036	0.759	0.2419	0.03263	0.02124	0.6043	0.1136	0.3568	0.03463
0.4658	0.5199	0.9933	0.7598	0.332	0.8441	0.5164	0.9129	0.144	0.4511
0.5609	0.05382	0.3567	0.2909	0.7487	0.2881	0.007507	0.4817	0.8506	0.01379
0.4945	0.8622	0.7529	0.2774	0.6444	0.2503	0.6889	0.8518	0.3379	0.4737
0.06779	0.4429	0.11	0.006108	0.1692	0.4884	0.946	0.8099	0.2752	0.9512
0.249	0.2072	0.2983	0.775	0.5209	0.547	0.8312	0.3808	0.7681	0.5971
0.3864	0.3234	0.4965	0.1653	0.2191	0.403	0.9223	0.6346	0.2331	0.2978
0.4314	0.1109	0.8899	0.9122	0.8424	0.107	0.327	0.3632	0.5874	0.125
0.8309	0.3752	0.5014	0.3192	0.6629	0.7242	0.8041	0.4076	0.459	0.3884
0.8246	0.3299	0.277	0.3298	0.8162	0.6137	0.5383	0.3687	0.861	0.8177
0.453	0.3421	0.534	0.2042	0.7939	0.783	0.4633	0.4684	0.6608	0.9812
0.3806	0.8171	0.5742	0.7672	0.4691	0.5666	0.8208	0.5034	0.3539	0.862
0.9259	0.5317	0.4128	0.06997	0.3095	0.8113	0.9519	0.9105	0.3472	0.08382
0.7408	0.5211	0.01476	0.95	0.6876	0.5768	0.07627	0.2064	0.2537	0.3377
0.7376	0.7743	0.7028	0.1582	0.9869	0.944	0.7087	0.3386	0.9525	0.2361
0.9469	0.1203	0.5067	0.2864	0.7699	0.8715	0.2349	0.5741	0.2982	0.3178
0.5101	0.6255	0.3813	0.6871	0.8296	0.5076	0.3989	0.4869	0.1584	0.9844
0.7919	0.3466	0.06493	0.1411	0.7061	0.7888	0.2681	0.2622	0.3613	0.5483
0.4522	0.3346	0.3586	0.5121	0.5953	0.473	0.8325	0.5796	0.7416	0.7493
0.8492	0.5746	0.2343	0.7213	0.7529	0.8288	0.9954	0.8783	0.7059	0.8419
0.3904	0.8639	0.2035	0.9288	0.4967	0.3225	0.6498	0.06095	0.7009	0.1669
0.7384	0.1986	0.8138	0.7321	0.8651	0.9761	0.704	0.4409	0.006226	0.9031
0.9764	0.6725	0.3934	0.7498	0.06803	0.2782	0.9323	0.08426	0.3743	0.1051
0.5233	0.9018	0.05358	0.4073	0.9685	0.07283	0.6877	0.5632	0.9015	0.7451
0.4299	0.1992	0.3751	0.2395	0.09876	0.7512	0.5684	0.5393	0.3183	0.7294

$$B = \begin{bmatrix} 0.7175 & 0.1024 & 0.6194 & 0.09595 & 0.2138 & 0.7968 & 0.1979 & 0.6065 & 0.9591 & 0.4044 \\ 0.1334 & 0.9591 & 0.6153 & 0.06017 & 0.6457 & 0.1138 & 0.6057 & 0.7146 & 0.7502 & 0.3012 \\ 0.4458 & 0.1529 & 0.1226 & 0.8195 & 0.3806 & 0.1588 & 0.8237 & 0.4015 & 0.981 & 0.9506 \\ 0.5088 & 0.1525 & 0.1238 & 0.7715 & 0.1037 & 0.3558 & 0.8106 & 0.8587 & 0.2335 & 0.4606 \\ 0.5305 & 0.1556 & 0.2845 & 0.1957 & 0.3775 & 0.8478 & 0.8022 & 0.9205 & 0.09623 & 0.2876 \\ 0.8597 & 0.08957 & 0.7357 & 0.8951 & 0.2629 & 0.5828 & 0.7081 & 0.7508 & 0.3846 & 0.08463 \\ 0.6777 & 0.4544 & 0.4113 & 0.6843 & 0.2413 & 0.5862 & 0.8594 & 0.2856 & 0.5003 & 0.5822 \\ 0.8058 & 0.6689 & 0.829 & 0.6568 & 0.6229 & 0.9258 & 0.7811 & 0.7968 & 0.5703 & 0.1531 \\ 0.5312 & 0.8313 & 0.9351 & 0.9904 & 0.5229 & 0.5751 & 0.2038 & 0.1428 & 0.9766 & 0.07309 \\ 0.9559 & 0.7902 & 0.3991 & 0.03369 & 0.4132 & 0.009977 & 0.9933 & 0.5046 & 0.4929 & 0.5806 \\ 0.06668 & 0.7127 & 0.05221 & 0.4243 & 0.2178 & 0.8094 & 0.09362 & 0.6107 & 0.4009 & 0.287 \\ 0.5415 & 0.4726 & 0.5712 & 0.49 & 0.8586 & 0.6088 & 0.6506 & 0.7038 & 0.995 & 0.3619 \\ 0.2817 & 0.7086 & 0.7477 & 0.5835 & 0.861 & 0.4799 & 0.2152 & 0.3833 & 0.261 & 0.7248 \\ 0.4809 & 0.9581 & 0.3202 & 0.08327 & 0.2839 & 0.2684 & 0.2439 & 0.7287 & 0.6653 & 0.8583 \\ 0.6849 & 0.5058 & 0.4929 & 0.6602 & 0.6154 & 0.2581 & 0.3397 & 0.8873 & 0.9643 & 0.3479 \\ 0.2083 & 0.3051 & 0.2217 & 0.05231 & 0.7795 & 0.481 & 0.1979 & 0.05585 & 0.6712 & 0.9617 \\ 0.6082 & 0.7898 & 0.9393 & 0.5568 & 0.9548 & 0.2273 & 0.5068 & 0.1382 & 0.2992 & 0.9536 \\ 0.3262 & 0.2364 & 0.4823 & 0.712 & 0.9196 & 0.0486 & 0.9508 & 0.8631 & 0.5311 & 0.206 \\ 0.8808 & 0.2343 & 0.54 & 0.4879 & 0.3848 & 0.1692 & 0.3946 & 0.4217 & 0.001463 & 0.7682 \\ 0.1334 & 0.4647 & 0.2211 & 0.6176 & 0.1626 & 0.2584 & 0.5845 & 0.4113 & 0.8838 & 0.6155 \end{bmatrix}$$

sendo  $H = I$ .

Utilizando o método proposto encontramos os seguintes resultados

	Siljak and Stipanović	Método proposto
$\alpha$	0.2163	0.2163
Tempo médio (s)	3.0020	2.7960
Linhas de LMIs	151	131
Variáveis	413	413

Figura 3.3: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 3 quando o ganho  $K$  é limitado.

Os dois métodos apresentam o mesmo ganho

$$K = \begin{bmatrix} 5.368 & 5.666 & -0.5775 & 0.3299 & -1.351 & 1.725 & 5.393 & 3.851 & -2.325 & -7.333 \\ 4.341 & 3.328 & 0.223 & -0.6928 & 0.1719 & 3.144 & -2.539 & 5.229 & 0.4117 & -3.44 \\ -6.055 & -3.152 & -1.652 & -6.648 & 4.302 & 6.756 & -4.741 & 0.76 & 4.312 & 3.744 \\ -2.216 & -9.616 & 1.274 & -1.571 & -2.251 & -19.01 & -0.1621 & -4.637 & -3.184 & 3.493 \\ 3.396 & 0.9995 & -2.613 & 5.756 & -3.5 & -6.81 & 7.246 & -3.451 & -4.236 & -3.158 \\ -1.034 & 1.257 & -1.6 & -1.571 & 0.04249 & 1.861 & 0.5451 & -0.3101 & -0.1768 & -0.2363 \\ 2.025 & 1.116 & 8.314 & 12.87 & -0.5035 & 5.879 & -9.881 & -1.462 & 4.235 & 5.124 \\ -6.275 & -3.062 & -7.487 & -8.051 & 1.093 & 0.1285 & 2.865 & -2.492 & -0.6755 & 2.06 \\ 0.5385 & 0.5501 & 0.8982 & 6.347 & -0.2422 & 2.077 & -1.134 & -2.166 & 0.2806 & 1.45 \\ 0.3957 & 1.544 & 0.3348 & -7.755 & 1.059 & 1.547 & -0.8688 & 5.541 & 1.199 & -3.801 \\ -0.9481 & -2.216 & -0.3275 & 4.324 & -4.427 & -2.29 & 7.661 & 3.867 & -0.6956 & 1.614 \\ 2.186 & -3.064 & 0.4844 & 0.7382 & -1.334 & -1.741 & 2.211 & 2.651 & 2.988 & -2.29 \\ 5.656 & 2.292 & -4.299 & -2.353 & 4.877 & 4.399 & -4.657 & 1.735 & 6.487 & 6.812 \\ -0.9269 & 2.879 & 1.349 & -6.855 & -0.2037 & -9.529 & -11.32 & -4.1 & -3.421 & -9.103 \\ -4.901 & -0.006876 & 2.472 & 2.745 & -3.112 & -3.052 & 3.653 & -1.517 & -6.588 & -2.861 \\ -1.365 & 0.6718 & -1.569 & 0.3255 & -0.601 & 0.7926 & 0.853 & 0.1094 & 1.107 & 2.511 \\ 1.606 & -4.405 & 7.341 & 2.005 & 5.757 & 6.698 & 1.182 & -3.82 & -3.257 & -8.782 \\ -2.334 & 3.933 & -4.906 & -3.004 & -1.481 & 1.54 & -3.434 & -1.022 & 1.161 & 7.637 \\ -0.8483 & -1.752 & 3.404 & 1.52 & 2.054 & 2.692 & 2.197 & -1.727 & -3.225 & -1.973 \\ 2.689 & -0.2056 & -4.274 & -0.7141 & -2.47 & -3.026 & -0.8424 & 3.945 & 5.384 & 2.443 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo podemos notar que o método proposto é aproximadamente 7% mais rápido que o método de [1]

### 3.3 Controle Robusto Descentralizado

O principal objetivo desse capítulo é a extensão do método apresentado na seção anterior para o controle descentralizado de sistemas não lineares variantes no tempo da forma (3.1). Este problema é importante pois muitas vezes nem todas as variáveis de estado estão presentes para o controle em todos os pontos do sistema. Vamos considerar o problema de encontrar um controlador linear descentralizado para o sistema (3.1) com a forma bloco diagonal

$$u(x) = K_D x \quad (3.26)$$

sendo que a matriz de ganhos  $K_D = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ , possui dimensão  $m \times n$  e os blocos  $K_i$ 's tem dimensões  $m_i \times n_i$ . Consideramos novamente que a função não linear variante no tempo  $h(t, x)$  satisfaz a restrição quadrática dada em (3.2). Aplicando a lei de realimentação de estado descentralizada (3.26) no sistema (3.1) obtemos o sistema em malha fechada dado por

$$\dot{x} = (A + BK_D)x + h(t, x) \quad (3.27)$$

Novamente, para obter as condições de estabilidade robusta, consideramos uma função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P_D x \quad (3.28)$$

sendo a matriz  $P_D$  bloco diagonal, simétrica e positiva definida ( $P_D = P_D^T > 0$ ). A condição suficiente para que o sistema (3.27) seja estável é que  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ , sendo que  $\dot{V}(x)$  é expressa por

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P_D x + x^T P_D \dot{x} \quad (3.29)$$

Substituindo a equação do sistema (3.27) em (3.29) temos que

$$\begin{aligned} P_D &> 0, \\ x^T (A^T P_D + P_D A + K_D^T B^T P_D + P_D B K_D) x + h^T P_D x + x^T P_D h &< 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para que o termo  $h^T P_D x + x^T P_D h$  esteja em uma forma quadrática no estado utilizamos o Lema 2 e a restrição quadrática (3.2) obtendo dessa forma:

$$\begin{aligned} P_D &> 0, \\ A^T P_D + P_D A + K_D^T B^T P_D + P_D B K_D + \alpha^2 H^T H + P_D P_D &< 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Multiplicando (3.31) à direita e à esquerda por  $P_D^{-1}$  e chamando  $P_D^{-1} = Y_D$  temos

$$\begin{aligned}
Y_D &> 0, \\
AY_D + Y_DA^T + Y_DK_D^TB^T + BK_DY_D + \alpha^2Y_DH^THY_D + I &< 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Fazendo novamente a mudança de variável  $L_D = K_DY_D$ , o que implica em  $K_D = L_DY_D^{-1}$ , sendo  $L_D$  é uma matriz bloco diagonal, obtemos

$$\begin{aligned}
Y_D &> 0, \\
AY_D + Y_DA^T + L_D^TB^T + BL_D + I + \alpha^2Y_DH^THY_D &< 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

como ainda existem produtos de variáveis em (3.33), utilizaremos o complemento de Schur para obter

$$\begin{aligned}
Y_D &> 0 \\
\begin{bmatrix} AY_D + Y_DA^T + L_D^TB^T + BL_D + I & Y_DH^T \\ HY_D & -\gamma I \end{bmatrix} &< 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Como queremos maximizar o limite de incerteza  $\alpha$ , construímos o seguinte problema de otimização convexo

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma \\
\text{s.a.} \quad & Y_D > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY_D + Y_DA^T + L_D^TB^T + BL_D + I & Y_DH^T \\ HY_D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

com  $\gamma = 1/\alpha^2$ .

Caso (3.35) seja factível, obtemos o controlador descentralizado que estabiliza o sistema (3.1) e ao mesmo tempo maximiza seu limite de incerteza  $\alpha$ .

Como comparação, é mostrado no Teorema 5 o resultado de [1] para o mesmo caso aqui abordado.

**Teorema 4** *O sistema (3.1) é robustamente estabilizável com um grau com um  $\alpha$  pela lei de controle descentralizada (3.26) se o problema (3.40) for factível*

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.a} \quad & Y_D > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY_D + Y_D A^T + L_D^T B^T + B L_D & I & Y_D H^T \\ & I & -I & 0 \\ & H Y_D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para ilustrar o método proposto usaremos o seguinte exemplo

**Exemplo 4** *Considere o seguinte sistema que foi retirado de [1]*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u + h(t, x) \quad (3.37)$$

com  $H = I$ .

	Siljak and Stipanovic	Método proposto
$\alpha$	1.8898	1.8898
Tempo médio (s)	0.0620	0.0573
Linhas de LMIs	8	6
Variáveis	5	5
K	$10^9 \begin{bmatrix} -3.0757 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$	$10^9 \begin{bmatrix} -4.2758 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$

Figura 3.4: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 4

Percebemos na Figura 3.4 que os resultados obtidos pelo método proposto (3.35) são equivalentes aos obtidos por [1], entretanto os dois métodos apresentam ganhos excessivamente grandes. Para limitar a matriz de ganhos  $K_D$  utilizamos a mesma estratégia adotada na seção anterior. Limitamos as matrizes  $L_D$  e  $Y_D$

$$L_D^T L_D < k_{L_D} I, \quad Y_D^{-1} < k_{Y_D} I \quad (3.38)$$

sendo que  $k_{L_D}$  e  $k_{Y_D}$  são números positivos. Então, no presente contexto podemos estender a versão do problema (3.24) para o caso descentralizado

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma + k_{L_D} + k_{Y_D} \\
\text{s.a.} \quad & Y_D > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY_D + Y_D A^T + L_D^T B^T + B L_D + I & Y_D H^T \\ & H Y_D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\
& \gamma - 1/\bar{\alpha}^2 < 0 \\
& \begin{bmatrix} -k_{L_D} I & L_D^T \\ L_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} k_{Y_D} I & I \\ I & Y_D \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Como comparação, é mostrado no Teorema 5 o resultado de [1] para o mesmo caso aqui abordado.

**Teorema 5** *O sistema (3.1) é robustamente estabilizável com um grau com um  $\alpha$  pela lei de controle descentralizada (3.26) se o problema (3.40) for factível*

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma + k_{L_D} + k_{Y_D} \\
\text{s.a.} \quad & Y > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY_D + Y_D A^T + L_D^T B^T + B L_D & I & Y_D H^T \\ & I & -I & 0 \\ & H Y_D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\
& \gamma - 1/\bar{\alpha}^2 < 0 \\
& \begin{bmatrix} -k_{L_D} I & L_D^T \\ L_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} k_{Y_D} I & I \\ I & Y_D \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

A seguir resolvemos exemplos de forma a ilustrar o uso do método proposto.

**Exemplo 5** Considere o sistema que foi retirado de [1]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + h(t, x) \quad (3.41)$$

Resolvemos o problema (3.39) para o exemplo 5, utilizando  $H = I$  e sem restrição sobre  $\alpha$ . Os resultados obtidos estão sintetizados na Figura 3.5, onde podemos vê-los e compará-los.

	Siljak and Stipanovic	Método proposto
$\alpha$	0.2157	0.2157
Tempo médio (s)	0.1251	0.0856
Linhas de LMIs	30	26
Variáveis	13	13
K	$\begin{bmatrix} -26.4175 & -15.1849 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.9796 & -19.3687 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -26.4179 & -15.1852 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.9798 & -19.3689 \end{bmatrix}$

Figura 3.5: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 5 quando o ganho  $K_D$  é limitado.

Outro exemplo proposto em [1] é

**Exemplo 6** Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + h(t, x) \quad (3.42)$$

Resolvendo novamente o problema (3.39) para o exemplo 6, considerando  $H = I$  e nenhuma restrição sobre  $\alpha$ , obtemos os resultados que estão apresentados na Figura 3.6.



	Siljak and Stipanovic	Método proposto
$\alpha$	0.2157	0.2157
Tempo médio (s)	0.1026	0.0866
Linhas de LMIs	30	26
Variáveis	13	13
K	$\begin{bmatrix} -2.8879 & -2.8663 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8879 & -2.8663 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8879 & -2.8663 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8879 & -2.8663 \end{bmatrix}$

Figura 3.6: Comparação entre o método proposto e o método de [1] para o exemplo 6 quando o ganho  $K_D$  é limitado.

Neste exemplo notamos que o método proposto em (3.39) e o método de [1] apresentam os mesmos resultados, obtendo o mesmo parâmetro  $\alpha$  e praticamente o mesmo ganho  $K_D$ , entretanto o método aqui proposto possui um tempo de resolução menor, como mostram os resultados, e isso se deve ao fato de ele apresentar menor número de linhas de LMIs a serem resolvidas pelo *solver* SeDuMi, o que lhe confere um ganho considerável em relação ao método proposto em [1].

### 3.4 Conclusões

Condições convexas em termos de LMIs foram obtidas de modo a estabilizar robustamente uma classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma e ao mesmo tempo maximizar o limite de incerteza do termo não linear variante no tempo. Em algumas situações, o ganho encontrado foi excessivamente grande, então para resolver esse problema, limitamos o ganho de realimentação. O método desenvolvido foi estendido para o problema de controle descentralizado, onde condições semelhantes foram encontradas. Também foram apresentados exemplos numéricos para os casos descritos e os resultados foram comparados com os da literatura. Os resultados obtidos quando limitamos a matriz de ganho foram iguais aos da literatura, mas com a vantagem de serem obtidos mais rapidamente devido ao menor número de linhas de LMIs a serem resolvidas no problema de otimização. Assim evidenciamos a vantagem da metodologia proposta quando utilizamos a limitação de ganho em relação a metodologia de [1]. Isto mostra que a metodologia apresentada é válida e portanto podemos aplicá-la em outros aspectos de problemas de controle como no projeto de observadores.

## Capítulo 4

# Projeto de observador e controlador robustos descentralizados para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma

### 4.1 Introdução

Neste capítulo propomos uma metodologia para o projeto de um observador descentralizado para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma. O observador é projetado de modo a garantir que ele seja assintoticamente estável, para isso lançamos mão do segundo método de Lyapunov e de um procedimento que propomos. Além disso, construímos um controlador descentralizado que utiliza os estados estimados pelo observador para fazer um controle por realimentação de saída que estabilize o sistema.

Entretanto o problema de controle e de estimação não pode ser resolvido em apenas um passo, então separamos o problema de controle e de observação em dois estágios sendo que no primeiro estágio é resolvido o problema de controle e no segundo é resolvido o problema de estimação. A metodologia proposta possui várias vantagens, dentre elas citamos:

- O problema do observador descentralizado é construído como um problema de otimização convexo, o que assegura uma solução computacional simples, pois há vários pacotes computacionais que tratam desse problema e que asseguram a existência de uma solução.

O ganho de observação é obtido diretamente, sem a necessidade de usar um procedimento de tentativa e erro.

- A metodologia é flexível, pois permite a inclusão de parâmetros de projeto adicionais tais como estrutura e limitação das matrizes de ganho de controle e de ganho de observação.
- O controlador e o observador são lineares, o que torna suas implementações mais simples.

Relativamente a trabalhos similares, a originalidade da metodologia de proposta reside em: i) o uso de uma forma alternativa ao  $S - procedure$  utilizado em [10] para tratar do termo não linear ii) limitação das matrizes de ganho de observação e de controle pois em [29] não é levado em conta o aspecto dos altos ganhos que podem ser obtidos pelo método desenvolvido.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.2 projetamos um observador descentralizado para sistemas não lineares limitados em norma utilizando a teoria de Lyapunov para estabilidade e apresentamos um exemplo numérico. Na seção 4.3 é projetado um controlador descentralizado que utiliza como entrada o estado estimado pelo observador descentralizado e um exemplo numérico é apresentado. Na seção 4.4 são feitas as considerações finais sobre a metodologia desenvolvida e sobre os resultados obtidos.

## 4.2 Projeto de Observador Descentralizado

Considere um sistemas não linear composto de  $N$  subsistemas

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + h_i(x, t) \quad i = 1, \dots, N \\ y_i &= C_i x_i\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  é o estado do  $i$ -ésimo subsistema,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  é o vetor de controle,  $y_i \in \mathbb{R}^{l_i}$  é o vetor de saída,  $h_i(x, t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  é o termo não linear,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  e  $C_i \in \mathbb{R}^{l_i \times n_i}$ , consideramos que o par  $(A_i, C_i)$  é observável.

Em relação à modelagem do termo não linear  $h_i(x, t)$ , consideramos que ele é limitado em norma e satisfaz:

$$h_i^T h_i \leq \alpha_i^2 x_i^T H_i^T H_i x_i\tag{4.2}$$

onde os escalares  $\alpha_i$  e as matrizes  $H_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  são conhecidos.

A representação de estado do sistema global é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_D x + B_D u + h \\ y &= C_D x\end{aligned}\quad (4.3)$$

sendo  $x^T = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$  o vetor de estado do sistema global,  $u^T = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T$  o vetor de controle,  $y^T = [y_1^T, \dots, y_N^T]^T$  o vetor de saídas,  $h = \text{diag}(h_i)$  a matriz de termos não lineares,  $A_D = \text{diag}(A_i)$ ,  $B_D = \text{diag}(B_i)$ ,  $C_D = \text{diag}(C_i)$ . Consideramos que o par  $(A_D, C_D)$  é observável.

Iremos agora construir um observador linear a partir da saída  $y$  e do sinal de controle  $u$  [30] para a classe de sistema descrita, considerando que as matrizes  $A_D$ ,  $B_D$  e  $C_D$  são conhecidas. Para construir o estimador de estado, duplicamos o sistema original e adicionamos um fator de inovação de modo a informar ao estimador o comportamento do sistema original. A inovação é construída como sendo a diferença entre a saída medida  $y$  e a saída estimada  $\hat{y}$ . Deste modo corrige-se constantemente o modelo com o sinal  $(y - \hat{y})$ . A representação do estimador é mostrada na Figura 4.1

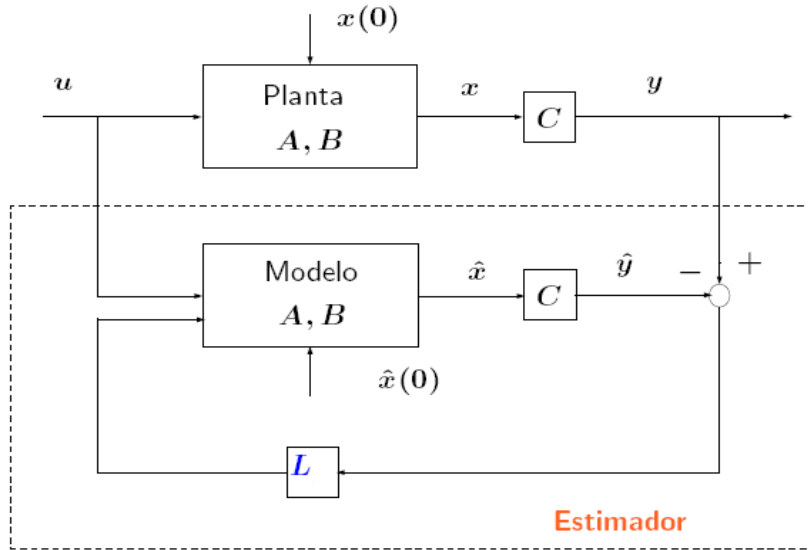


Figura 4.1: Representação de um observador de estado

A equação do estimador considerando a quantidade de informação que atualiza o estimador a cada instante de tempo em função do erro  $y - \hat{y}$  é:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_D \hat{x} + B_D u + L_D (y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_D x\end{aligned}\tag{4.4}$$

com

$$L_D = \text{diag}(L_i)\tag{4.5}$$

O erro de estimação entre o estado real e o observado é dado por

$$e_i = x_i - \hat{x}_i\tag{4.6}$$

De forma global

$$e = x - \hat{x}\tag{4.7}$$

com

$$e^T = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T\tag{4.8}$$

deste modo, podemos escrever que a dinâmica do erro é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= A_D x + B_D u + h - A_D \hat{x} - B_D u - L_D (y - \hat{y}) \\ &= A_D (x - \hat{x}) + h - L_D C_D (x - \hat{x}) \\ &= (A_D - L_D C_D) e + h\end{aligned}\tag{4.9}$$

Se o sistema (4.9) for assintoticamente estável, então  $e(\infty) \rightarrow 0$ , independentemente da condição inicial,  $e(0)$  escolhida. Deste modo o problema de estimação de estado se resume ao calculo da matriz  $L_D$  de modo que (4.9) seja estável.

Segundo o método de Lyapunov para a estabilidade de sistemas, devemos encontrar uma função escalar definida positiva  $V(e)$ , de forma que  $\dot{V}(e)$  seja definida negativa. Escolhemos para o sistema (4.9) uma possível função de Lyapunov

$$V(e) = e^T P_D e\tag{4.10}$$

onde

$$P_D = \text{diag}(P_i), \quad P_i = P_i^T > 0 \quad (4.11)$$

que implica em

$$P_D = P_D^T > 0 \quad (4.12)$$

A derivada de  $V(e)$  em relação ao tempo e ao longo de qualquer trajetória de (4.9) é dada por

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P_D e + e^T P_D \dot{e} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.2) em (4.13) e utilizando (4.10) temos

$$\begin{aligned} V(e) &= e^T P_D e > 0, \\ \dot{V}(e) &= e^T (A_D^T P_D + P_D A_D - C_D^T L_D^T P_D - P_D L_D C_D) e \\ &\quad + e^T P_D h + h^T P_D e < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

para que o termo  $e^T P_D h + h^T P_D e$  esteja em uma forma quadrática conveniente, utilizamos o Lema 2 e então obtemos:

$$e^T P_D h + h^T P_D e \leq h^T h + e^T P_D P_D e \quad (4.15)$$

Usando a restrição (4.2) temos que (4.15) torna-se

$$e^T P_D h + h^T P_D e \leq x^T H_D^T H_D x + e^T P_D P_D e \quad (4.16)$$

onde

$$H_D = \text{diag}(\alpha_i H_i) \quad (4.17)$$

Fazendo a mudança de variável  $P_D L_D = T_D$  e usando (4.16), podemos escrever (4.14) como

$$P_D > 0$$

$$e^T (A_D^T P_D + P_D A_D - C_D^T T_D^T - T_D C_D + P_D P_D) e + x^T H_D^T H_D x < 0 \quad (4.18)$$

Podemos construir o seguinte sistema aumentado

$$P_D > 0$$

$$\begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_D^T P_D + P_D A_D - C_D^T T_D^T - T_D C_D + P_D P_D & 0 \\ 0 & H_D^T H_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

Usando o complemento de Schur podemos escrever (4.19) como

$$P_D > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_D^T P_D + P_D A_D - C_D^T T_D^T - T_D C_D & 0 & P_D \\ 0 & H_D^T H_D & 0 \\ P_D & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

De forma a limitar o ganho  $L_D$  do observador, fazemos as seguintes restrições sobre  $T_D$  e  $Y_D$ :

$$T_D^T T_D < k_{T_D} I, \quad k_{T_D} > 0$$

$$P_D^{-1} < k_{P_D} I, \quad k_{P_D} > 0 \quad (4.21)$$

Usando o complemento de Schur podemos escrever (4.21) como

$$\begin{bmatrix} -k_{T_D} I & T_D^T \\ T_D & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} k_{P_D} I & I \\ I & P_D \end{bmatrix} > 0 \quad (4.22)$$

Acrescentando as restrições (4.22) ao problema (4.20) podemos escrever o seguinte problema de otimização convexo

$$\begin{aligned}
& \min \quad k_{T_D} + k_{P_D} \\
& \text{s.a} \\
& P_D > 0, \\
& \begin{bmatrix} A_D^T P_D + P_D A_D - C_D^T T_D^T - T_D C_D & 0 & P_D \\ 0 & H_D^T H_D & 0 \\ P_D & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} -k_{T_D} I & T_D^T \\ T_D & -I \end{bmatrix} < 0; \\
& \begin{bmatrix} k_{P_D} I & I \\ I & P_D \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Que é uma condição suficiente para que o sistema (4.3) seja estável.

Para ilustrar o método proposto utilizamos o seguinte exemplo:

### Exemplo 7

Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.4534 & 0.6946 & 0 & 0 \\ 0.4449 & -0.3787 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2052 & 0.5226 \\ 0 & 0 & 0.9568 & -0.1199 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.1730 & 0 \\ 0.9797 & 0 \\ 0 & 0.2714 \\ 0 & 0.2523 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 0.8939 & 0.1991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2987 & 0.6614 \end{bmatrix} x
\end{aligned} \tag{4.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
h_1 &= \cos(x_{11}) \begin{bmatrix} 0.0284 & 0.0065 \\ 0.0469 & 0.0988 \end{bmatrix} x_1, \\
h_2 &= \cos(x_{21}) \begin{bmatrix} 0.0950 & 0.0607 \\ 0.0231 & 0.0486 \end{bmatrix} x_2.
\end{aligned} \tag{4.25}$$



e  $x = (x_1^T, x_2^T)^T$  sendo  $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$  e  $x_2 = (x_{21}, x_{22})^T$  com  $x(0) = (1, -2, 1, -2)^T$ .

Utilizando o método proposto encontramos

$$L_D = \begin{bmatrix} 126.6368 & 0 \\ 116.4463 & 0 \\ 0 & 145.6937 \\ 0 & 114.8357 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 podemos ver os estados reais juntamente com os estados estimados

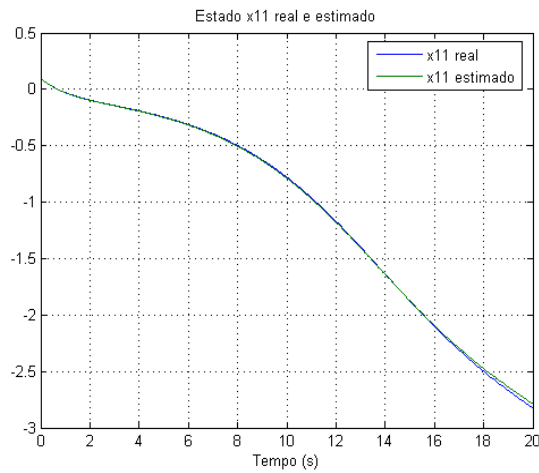


Figura 4.2: Estado  $x_{11}$  real e estimado do sistema 4.24.

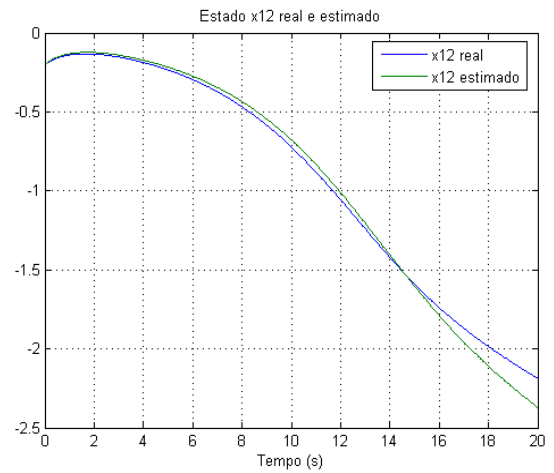


Figura 4.3: Estado  $x_{12}$  real e estimado do sistema 4.24.

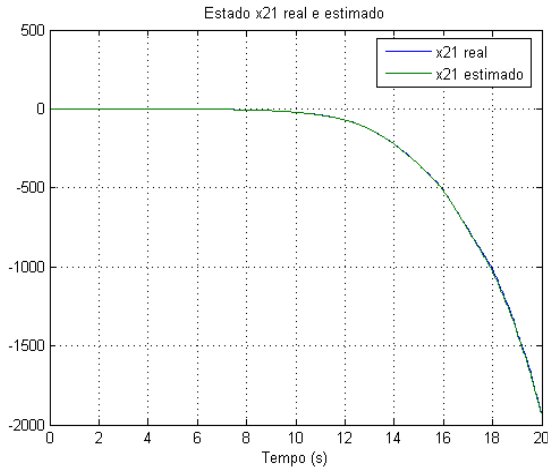


Figura 4.4: Estado  $x_{21}$  real e estimado do sistema 4.24.

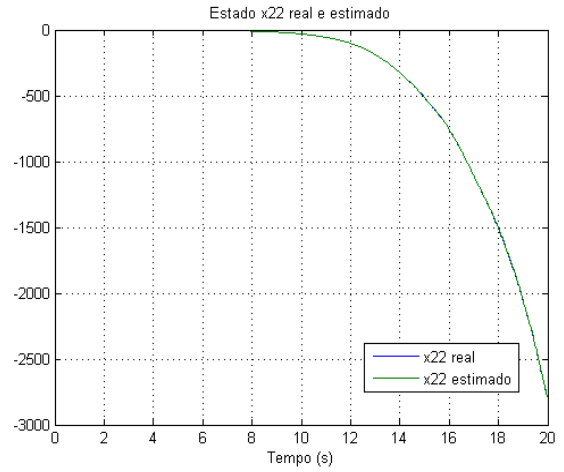


Figura 4.5: Estado  $x_{22}$  real e estimado do sistema 4.24.

Os resultados obtidos mostram que o observador projetado obtém uma boa reconstrução dos estados reais do sistema.

### 4.3 Projeto de Controlador e Observador Descentralizados

Nesta seção iremos projetar um controlador descentralizado que utiliza os estado estimados pelo observador descentralizado de modo a estabilizar o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + h_i \\ y_i &= C_i x_i\end{aligned}\tag{4.27}$$

através de uma lei de controle linear da forma

$$u_i = K_i \hat{x}\tag{4.28}$$

de forma global podemos escrever

$$K_D = \text{diag}(K_i)\tag{4.29}$$

A representação do sistema global é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_D x + B_D u + h \\ y &= C_D x\end{aligned}\tag{4.30}$$

Então o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_D x + B_D K_D \hat{x} + h \\ y &= C_D x\end{aligned}\tag{4.31}$$

sabendo que o erro é definido como

$$e = x - \hat{x}\tag{4.32}$$

e deste modo

$$\hat{x} = x - e\tag{4.33}$$

Substituindo (4.33) em (4.31) temos

$$\dot{x} = (A_D + B_D K_D)x - B_D K_D e + h\tag{4.34}$$

Sabendo que a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (A_D - L_D C_D)x + h\tag{4.35}$$

Podemos construir o seguinte sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_D + B_D K_D & -B_D K_D \\ 0 & A_D - L_D C_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}\tag{4.36}$$

Deste modo o sistema aumentado pode ser escrito da seguinte forma

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{h} \quad (4.37)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_D &= \begin{bmatrix} A_D + B_D K_D & -B_D K_D \\ 0 & A_D - L_D C_D \end{bmatrix} \quad \text{e} \\ \tilde{h} &= \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O problema agora é obter a matriz de ganho de controle  $K_D$  e a matriz de ganho de observação  $L_D$  que estabilizem o sistema (4.37). Para isso utilizamos o segundo método de Lyapunov escolhendo a seguinte função

$$V_D(x, e) = x^T P_c x + e^T P_o e \quad (4.38)$$

com  $P_c = \text{diag}(P_{ci})$  e  $P_o = \text{diag}(P_{oi})$ . A equação (4.38) pode ser escrita como

$$\tilde{V}_D = \tilde{x}^T P_D \tilde{x} \quad (4.39)$$

sendo

$$P_D = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Para que o sistema (4.37) seja estável, impomos que  $\tilde{V}_D > 0$  e  $\dot{\tilde{V}}_D < 0$  com

$$\dot{\tilde{V}}_D = \dot{\tilde{x}}^T P_D \tilde{x} + \tilde{x}^T P_D \dot{\tilde{x}} \quad (4.41)$$

Susbtituindo (4.37) em (4.41) temos

$$\dot{\tilde{V}}_D = \tilde{x}^T (\tilde{A}_D^T P_D + P_D \tilde{A}_D) \tilde{x} + \tilde{h}^T P_D \tilde{x} + \tilde{x}^T P_D \tilde{h} < 0 \quad (4.42)$$

Para obter uma forma quadrática adequada para (4.42) usamos o Lema 2 de modo a obter

$$\tilde{h}^T P_D \tilde{x} + \tilde{x}^T P_D \tilde{h} \leq \tilde{h}^T \tilde{h} + \tilde{x}^T P_D P_D \tilde{x} \quad (4.43)$$

Usando a restrição (4.2) temos então

$$\tilde{h}^T P_D \tilde{x} + \tilde{x}^T P_D \tilde{h} \leq \tilde{x}^T (M_D + P_D P_D) \tilde{x} \quad (4.44)$$

com

$$M_D = \begin{bmatrix} 2H_D^T H_D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Com isso temos que (4.42) pode ser escrita como

$$\tilde{x}^T (\tilde{A}_D^T P_D + P_D \tilde{A}_D + M_D + P_D P_D) \tilde{x} < 0 \quad (4.46)$$

Multiplicando (4.46) à esquerda e à direita por  $Y_D$  onde  $Y_D = P_D^{-1}$

$$Y_D = \begin{bmatrix} Y_c & 0 \\ 0 & Y_o \end{bmatrix}, \quad Y_c = P_c^{-1}, \quad Y_o = P_o^{-1}. \quad (4.47)$$

obtendo

$$Y_D \tilde{A}_D^T + \tilde{A}_D Y_D + I_D + Y_D M_D Y_D < 0 \quad (4.48)$$

sendo  $I_D = \text{diag}(I)$ . Substituindo as matrizes do sistema aumentado,  $M$  e  $Y_D$  temos que

$$\begin{bmatrix} Q_D & -B_D^T K_D Y_o \\ -Y_o K_D^T B_D^T & U_D \end{bmatrix} < 0 \quad (4.49)$$

com

$$Q_D = Y_c A_D^T + A_D Y_c + Y_c K_D^T B_D^T + B_D K_D Y_D + I + 2Y_c H_D^T H_D Y_c \quad (4.50)$$

e

$$U_D = Y_o A_D^T + A_D Y_o - Y_o C_D^T L_D^T - L_D C_D Y_o + I \quad (4.51)$$

Multiplicando (4.49) à direita e à esquerda por

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} Q_D & -B_D K_D \\ -K_D^T B_D^T & S_D \end{bmatrix} < 0 \quad (4.53)$$

com

$$S_D = A_D^T P_o + P_o A_D - C_D^T L_D^T P_o - P_o L_D C_D + P_o P_o \quad (4.54)$$

Utilizando o complemento de Schur em (4.53) encontramos

$$\begin{bmatrix} Q_D & -B_D K_D & 0 \\ -K_D^T B_D^T & \hat{S}_D & P_o \\ 0 & P_o & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.55)$$

sendo

$$\hat{S}_D = A_D^T P_o + P_o A_D - C_D^T L_D^T P_o - P_o L_D C_D. \quad (4.56)$$

Para obter a matriz  $K_D$  e a matriz  $L_D$  devemos resolver o seguinte problema: Encontrar  $Y_c$ ,  $P_o$ ,  $K_D$  e  $L_D$  tal que as seguintes restrições sejam satisfeitas

$$\begin{aligned} Y_c &= Y_c^T > 0 \\ P_o &= P_o^T > 0 \\ \begin{bmatrix} Q_D & -B_D K_D & 0 \\ -K_D^T B_D^T & \hat{S}_D & P_o \\ 0 & P_o & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Não há métodos efetivos que resolvam simultaneamente o problema de controle e de observação. Deste modo dois problemas podem ser desacoplados e resolvidos em um procedimento de dois passos, resolvendo primeiramente o problema de controle e posteriormente o de observação. A seguir tratamos do primeiro passo que é dedicado a resolução do problema de controle, que tem como solução  $Y_c$  e  $K_D$ .

Em (4.57)  $Q_D$  deve ser negativa definida de modo que

$$\begin{aligned} Y_c &> 0 \\ Y_c A_D^T + A_D Y_c + Y_c K_D^T B_D^T + B_D K_D Y_c + I + 2Y_c H_D^T H_D Y_c &< 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para tornar o problema (4.58) uma LMI, fazemos a seguinte mudança de variável:

$$K_D Y_c = F_D, \quad K_D = F_D Y_c^{-1} \quad (4.59)$$

Assim temos

$$\begin{aligned} Y_c &> 0 \\ Y_c A_D^T + A_D Y_c + F_D^T B_D^T + B_D F_D + I + 2Y_c H_D^T H_D Y_c &< 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aplicando o complemento de Schur no termo  $2Y_c H_D^T H_D Y_c$  temos

$$\begin{bmatrix} Y_c A_D^T + A_D Y_c + F_D^T B_D^T + B_D F_D & Y_c H_D^T \\ H_D Y_D & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.61)$$

Para que o ganho  $K_D$  não seja excessivamente grande, devemos limitá-lo impondo limites a  $Y_c$  e  $F_D$

$$\begin{aligned} Y_c^{-1} &< k_{Y_c} I, \quad k_{Y_c} > 0 \\ F_D^T F_D &< k_{F_D} I \quad k_{F_D} > 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Assim se o seguinte problema for factível

$$\begin{aligned} \min \quad & k_{Y_c} + k_{F_D} \\ \text{s.a.} \quad & Y_c = Y_c^T > 0, \\ & \begin{bmatrix} Y_c A_D^T + A_D Y_c + F_D^T B_D^T + B_D F_D & Y_c H_D^T \\ H_D Y_D & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} -k_{F_D} I & F_D^T \\ F_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} k_{Y_c} I & I \\ I & Y_c \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Obtemos  $Y_c$  e  $K_D$ . Com esses dois parâmetros podemos resolver o problema do observador.

Fazendo a substituição de variável  $P_o L_D = T_D$  no problema (4.57) e limitando a matriz de ganho de observação  $L_D$  restringindo  $P_o$  e  $T_D$

$$\begin{aligned} T_D^T T_D &< k_{T_D} I \quad k_{T_D} > 0, \\ P_o^{-1} &< k_{P_o} I \quad k_{P_o} > 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

e aplicando complemento de Schur sobre eles, podemos escrever o seguinte problema de oti-



mização que tem como solução o ganho de observação  $L_D$ :

$$\begin{aligned}
 & \min \quad k_{T_D} + k_{P_o} \\
 & \text{s.a} \\
 & P_o = P_o^T > 0 \\
 & \begin{bmatrix} Q_D & -B_D K_D & 0 \\ -K_D^T B_D^T & \hat{S}_D & P_o \\ 0 & P_o & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -k_{T_D} I & T_D^T \\ T_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} k_{P_o} I & I \\ I & P_o \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Então resolvendo os problemas (4.63) e (4.65) encontramos um controlador por realimentação de saída que usa o estado estimado pelo observador de modo a estabilizar o sistema (4.30).

Para ilustrar a metodologia proposta utilizaremos o seguinte exemplo

**Exemplo 8** *Considere o sistema (4.24) do Exemplo 7 com o mesmo termo de incerteza*

Utilizando o método proposto encontramos

$$L_D = \begin{bmatrix} 121.6072 & 0 \\ 110.9654 & 0 \\ 0 & 195.0420 \\ 0 & 91.6134 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

e

$$K_D = \begin{bmatrix} -0.2816 & -0.3899 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2816 & -0.3899 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Nas Figuras 4.6,4.7,4.8 e 4.9 podemos ver os estados reais juntamente com os estado estimados.

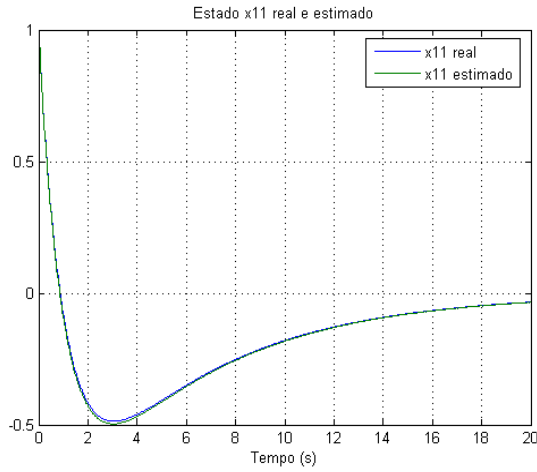


Figura 4.6: Estado  $x_{11}$  real e estimado do Exemplo 8.

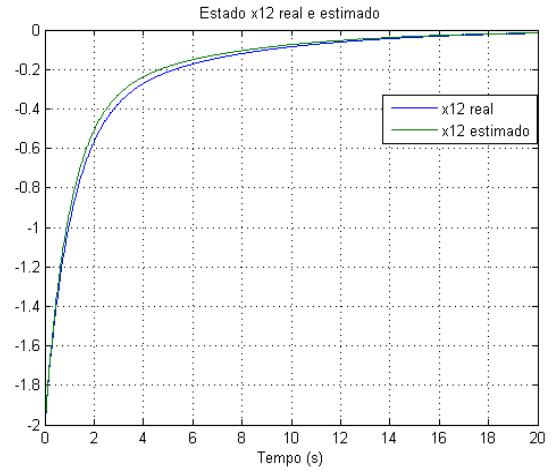


Figura 4.7: Estado  $x_{12}$  real e estimado do Exemplo 8.

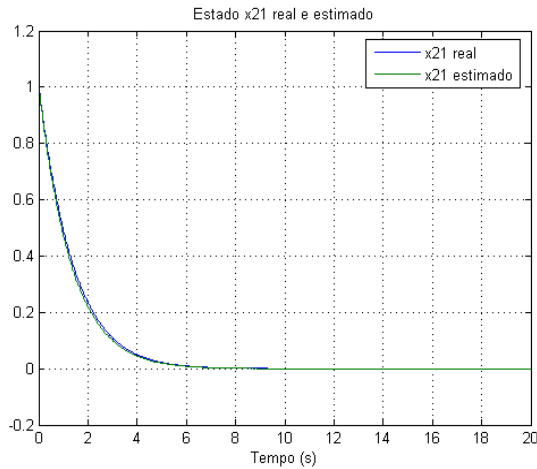


Figura 4.8: Estado  $x_{21}$  real e estimado do Exemplo 8.

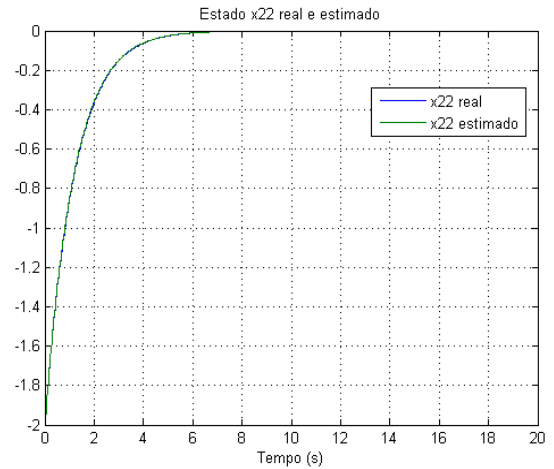


Figura 4.9: Estado  $x_{22}$  real e estimado do Exemplo 8.

Podemos notar que todos os estados estimados acompanham de forma satisfatória os estados reais e, além disso, todos os estados estão indo pra origem que é um ponto de equilíbrio do sistema, o que mostra que o controlador projetado estabiliza o sistema proposto.

## 4.4 Conclusões

Neste capítulo desenvolvemos uma metodologia para o projeto de um observador descentralizado para sistemas não lineares limitados em norma. Para isso utilizamos o segundo método

de Lyapunov para caracterizar a estabilidade assintótica do sistema dinâmico que representa o comportamento do erro entre o estado real e estimado. No exemplo numérico podemos verificar que o estado estimado acompanha de forma bastante satisfatória o estado real. Também desenvolvemos um controlador descentralizado a partir dos estados estimados pelo observador descentralizado o que é muito útil em aplicações reais onde os estados reais não podem ser medidos ou sua medida é muito onerosa. No exemplo numérico notamos que o estado estimado segue o estado real e também notamos que o controlador descentralizado consegue estabilizar o sistema como um todo.

## Capítulo 5

# Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ descentralizado por realimentação de estado estimado para um classe de sistemas não lineares limitados em norma sujeitos a distúrbios externos

### 5.1 Introdução

O controle robusto descentralizado tem sido aplicado para estabilizar sistemas não lineares limitados em norma [1] entretanto em aplicações reais esses sistemas estão na maioria dos casos sujeitos a distúrbios externos. Outro problema muito frequente é que os estados do sistema nem sempre estão disponíveis para o controle ou são muito difíceis de medir. Uma forma de resolver esse problema é construir um observador de estado que estime os estados reais do sistema e então usar esses estados para fazer o seu controle por realimentação de saída como em [10]. Em [31], uma metodologia que utiliza a teoria de Lyapunov para construir um problema de otimização convexo em termos de LMI's (*Linear Matrix Inequalities*) que tem como solução um observador juntamente com um controlador para uma classe de sistemas não lineares limitados em norma é proposta. Entretanto a abordagem não leva em consideração distúrbios externos aos quais sistemas reais estão sempre sujeitos. Neste capítulo propomos uma metodologia para o controle descentralizado de sistemas não lineares limitados em norma sujeitos a perturbações externas. Primeiramente projetamos um observador de estados e um controlador que utiliza os estados estimados na forma centralizada de maneira que sejam robustos em relação às perturbações externas. Para isso, utilizamos o critério da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , com o qual construímos

condições baseadas em uma função de Lyapunov para que o sistema formado pelo observador e pelo controlador seja estável e robusto em relação às perturbações externas. Estendemos as condições para o caso do projeto do observador e do controlador descentralizados, principal objetivo desse capítulo. Relativamente a trabalhos similares, a originalidade da metodologia proposta reside em: i) não utilizar o *S – Procedure*, [13] como proposto em [1] para tratar dos termos não lineares do sistema. ii) limitar as matrizes de ganho de observação e de controle de modo que elas não apresentem ganhos excessivamente elevados. Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 5.3 tratamos do projeto do controlador e do observador robustos  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas não lineares limitados em norma sujeitos a perturbações externas e apresentamos um exemplo numérico. Na seção 5.4 estendemos os resultados para o caso descentralizado e apresentamos um exemplo numérico. Na seção 5.5 são feitas as considerações finais sobre a metodologia proposta e sobre os resultados obtidos.

## 5.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Um importante objetivo no estudo de sistemas de controle é projetar controladores que atenuam os efeitos de distúrbios externos. Um dos mais populares procedimentos para obter esse objetivo é o controle  $\mathcal{H}_\infty$ , sendo que o controlador é projetado de tal forma que o sistema em malha fechada tenha ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado, ou seja, a relação entre as normas induzidas  $\mathcal{L}_2$  dos sinais de entrada (distúrbios) e saída seja limitada por um nível de atenuação  $\gamma$  [32].

## 5.3 Projetos de controlador e observador de estado $\mathcal{H}_\infty$ robustos para sistemas não lineares limitados em norma com entradas exógenas

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + h(t, x) + w \\ y &= Cx + v\end{aligned}\tag{5.1}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o estado do sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controle,  $y \in \mathbb{R}^l$  o vetor de saída,  $w \in \mathbb{R}^n$  um distúrbio externo,  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$  o ruído na saída,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

e  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , supomos que o par  $(A, C)$  é observável e que o par  $(A, B)$  é controlável. Em relação à modelagem do termo não linear variante no tempo  $h(t, x)$ , consideramos que ele é limitado em norma e satisfaz:

$$h(t, x)^T h(t, x) \leq \alpha^2 x^T H^T H x \quad (5.2)$$

sendo que o escalar  $\alpha$  e a matriz  $H$  de dimensão apropriada são conhecidos. Para estimar os estados do sistema (5.1), utilizamos um observador que é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  o estado estimado,  $\hat{y} \in \mathbb{R}^l$  a saída estimada e  $L$  o ganho do observador. O erro de estimação entre o estado real e o observado é definido como:

$$e = x - \hat{x} \quad (5.4)$$

e é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= (A - LC)e + h(t, x) + w - Lv \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para estabilizar o sistema (5.1) utilizamos uma lei de controle linear que utiliza o estado estimado pelo observador

$$u = K\hat{x} \quad (5.6)$$

Então o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} + h(t, x) + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (5.7)$$

De (5.4) temos que  $\hat{x} = x - e$ , substituindo em (5.7) encontramos

$$\dot{x} = (A + BK)x - BKe + h(t, x) + w \quad (5.8)$$

Com (5.8) e (5.5), podemos construir o seguinte sistema aumentado

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{w} + \tilde{h} \quad (5.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{h} = \begin{bmatrix} h(t, x) \\ h(t, x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nosso objetivo agora é encontrar um ganho de controle  $K$  e o ganho de observação  $L$  que estabilizem o sistema (5.9) e minimize sua norma  $\mathcal{H}_\infty$ , para isso utilizamos o *bounded real lemma* [4], [17] que assim enunciamos:

**Lema 3** *Dado um sistema da forma*

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (5.11)$$

*sendo  $w$  é um sinal de energia, ou seja*

$$\int_0^\infty w^T(\tau)w(\tau) < +\infty \quad (5.12)$$

*a norma infinita do sistema (5.11) pode ser caracterizada pelo menor valor de  $\gamma$  tal que*

$$\|x(t)\|_2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2 \quad (5.13)$$

*De maneira similar estabelece-se a seguinte equivalência*

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma \leftrightarrow x^T x < \gamma^2 w^T w \quad (5.14)$$

com  $\|G(s)\|$  denotando a função de transferência do sistema (5.11).

Para um sistema estável, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  por ser caracterizada por meio de uma função de Lyapunov  $V(x) > 0$  impondo-se:

$$\dot{V}(x) + x^T x - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (5.15)$$

Escolhendo uma possível função de Lyapunov para o sistema (5.9)

$$V(x, e) = x^T P_c x + e^T P_o e \quad (5.16)$$

que pode ser escrita como [29]

$$\tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (5.17)$$

com

$$P = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Utilizando o Lema 3 como condição para obter a mínima norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (5.9) podemos escrever:

$$\dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) + \tilde{x}^T \tilde{x} - \gamma^2 \tilde{w}^T \tilde{w} < 0 \quad (5.19)$$

substituindo (5.9) em (5.19) obtemos

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + I) \tilde{x} + \tilde{w}^T \tilde{B}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{B} \tilde{w} + \\ & \tilde{h}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{h} - \gamma^2 \tilde{w}^T \tilde{w} < 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para que o termo  $\tilde{h}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{h}$  esteja em uma forma quadrática conveniente, utilizamos o



Lema 2 e desta forma obtemos:

$$\tilde{h}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{h} \leq \tilde{h}^T \tilde{h} + \tilde{x}^T P P \tilde{x} \quad (5.21)$$

Utilizando a restrição (5.2) temos que

$$\tilde{h}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{h} \leq \tilde{x}^T (M + P P) \tilde{x} \quad (5.22)$$

com

$$M = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 H^T H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

substituindo (5.22) em (5.20) temos

$$\tilde{x}^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + I + M + P P) \tilde{x} + \tilde{w}^T \tilde{B}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{B} \tilde{w} - \gamma^2 \tilde{w}^T \tilde{w} < 0 \quad (5.24)$$

Podemos construir o seguinte sistema aumentado a partir de (5.24)

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + M + P P + I & P \tilde{B} \\ \tilde{B}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.25)$$

Aplicando o complemento de Schur em (5.25) obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + M + I & P \tilde{B} & P \\ \tilde{B}^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ P & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.26)$$

Substituindo  $P$ ,  $\tilde{A}$ ,  $M$  e  $\tilde{B}$  em (5.26) obtemos

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & -P_c B K & P_c & 0 & P_c & 0 \\ -K^T B^T P_c & Z_{22} & P_o & -P_o L & 0 & P_o \\ P_c & P_o & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^T P_o & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ P_c & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.27)$$

onde

$$Z_{11} = A^T P_c + P_c A + K^T B^T P_c + P_c B K + I + 2\alpha^2 H^T H \quad (5.28)$$

e

$$Z_{22} = A^T P_o + P_o A - C^T L^T P_o - P_o L C + I \quad (5.29)$$

A inequação (5.27) contém termos acoplados  $(P_c, K)$  e  $(P_o, L)$  que acarretam uma inequação matricial bilinear.

Para solucionar esse problema, transformemos a inequação (5.27) em uma LMI; para isso multiplicamos a inequação à esquerda e à direita por:

$$\begin{bmatrix} Y_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

onde  $Y_c = P_c^{-1}$ ; além disso fazemos as seguintes substituições de variáveis:

$$K Y_c = T \quad (5.31)$$

e

$$P_o L = F \quad (5.32)$$

obtendo dessa forma

$$\begin{bmatrix} J_{11} & -BK & I & 0 & I & 0 \\ -K^T B & J_{22} & P_o & -F & 0 & P_o \\ I & P_o & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.33)$$

onde

$$J_{11} = Y_c A^T + A Y_c + T^T B^T + B T + Y_c (I + 2\alpha^2 H^T H) Y_c \quad (5.34)$$

e

$$J_{22} = A^T P_o + P_o A - C^T F^T - F C + I \quad (5.35)$$

Então para que o sistema (5.9) seja estável e tenha mínima norma  $\mathcal{H}_\infty$ , basta resolver o seguinte problema de otimização convexo:

min  $\mu$

s.a

$$P_o = P_o^T > 0, \quad P_c = P_c^T > 0$$

$$\begin{bmatrix} J_{11} & -BK & I & 0 & I & 0 \\ -K^T B & J_{22} & P_o & -F & 0 & P_o \\ I & P_o & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F^T & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.36)$$

com  $\gamma = \sqrt{\mu}$ ,  $K = TY_c^{-1}$  e  $L = P_o^{-1}F$ .

Não há métodos que resolvam ao mesmo tempo o problema de controle e o de observação, entretanto podemos dividir o problema em dois estágios. No primeiro resolvemos o problema de controle que é obtido utilizando a condição  $J_{11} < 0$ :

$$\begin{aligned} Y_c &> 0 \\ Y_c A^T + AY_c + T^T B^T + BT + Y_c(I + 2\alpha^2 H^T H)Y_c &< 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Usando o complemento de Schur podemos escrever (5.37) como

$$\begin{aligned} Y_c &> 0 \\ \begin{bmatrix} Y_c A^T + AY_c + T^T B^T + BT & Y_c \\ Y_c & -(I + 2\alpha^2 H^T H)^{-1} \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para que o ganho de controle  $K$  não tenha um valor excessivamente alto, devemos restringi-lo através da limitação de  $T$  e  $Y_c^{-1}$  [20]

$$\begin{aligned} Y_c^{-1} &< k_{Y_c} I, \quad k_{Y_c} > 0 \\ T^T T &< k_T I, \quad k_T > 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Deste modo o problema de controle é dado pelo seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & k_{Y_c} + k_T \\ \text{s.a} \quad & \\ & Y_c = Y_c^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} Y_c A^T + AY_c + T^T B^T + BT & Y_c \\ Y_c & -(I + 2\alpha^2 H^T H)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} -k_T I & T^T \\ T & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k_{Y_c} I & I \\ I & Y_c \end{bmatrix} > 0 \quad (5.40)$$

Se este problema for factível, obtemos  $K$  e  $Y_c$ . Com esses parâmetros passamos para o segundo estágio que é a solução do problema de observação de estado. Substituindo os parâmetros obtidos em (5.40) e restringindo o ganho de observação  $L$  limitando  $P_o^{-1}$  e  $F$ :

$$\begin{aligned} F^T F &< k_F I, \quad k_F > 0 \\ P_o^{-1} &< k_{P_o} I, \quad k_{P_o} > 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

construímos deste modo o problema que calcula o ganho de observação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu + k_F + k_{P_o} \\ \text{s.a} \quad & P_o = P_o^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} J_{11} & -BK & I & 0 & I & 0 \\ -K^T B & J_{22} & P_o & -F & 0 & P_o \\ I & P_o & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} -k_F I & F^T \\ F & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} k_{P_o} I & I \\ I & P_o \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Se este problema for factível, obtemos  $L$ . Para ilustrar a metodologia proposta apresentamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 9** *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.4534 & 0.6946 \\ 0.4449 & -0.3787 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.1730 \\ 0.9797 \end{bmatrix} u + \cos(x_1) \begin{bmatrix} 0.0284 & 0.0065 \\ 0.0469 & 0.0988 \end{bmatrix} x + w \\ y &= \begin{bmatrix} 0.8939 & 0.1991 \end{bmatrix} x + v.\end{aligned}\quad (5.43)$$

onde  $x = (x_1, x_2)^T$  com  $x(0) = (1, -2)^T$ ;  $w$  é um distúrbio externo modelado como um ruído branco de média 0 e variância 0.1 e  $v$  é o ruído na saída.

Utilizando a metodologia proposta encontramos:

$$\gamma = 1.6479 \quad (5.44)$$

e

$$K = \begin{bmatrix} -0.5221 & -0.4732 \end{bmatrix}, \quad L = 10^5 \times \begin{bmatrix} -5.6494 \\ -4.3506 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Nas Figuras 5.1 e 5.2 estão plotados os estados reais e estimados do sistema.

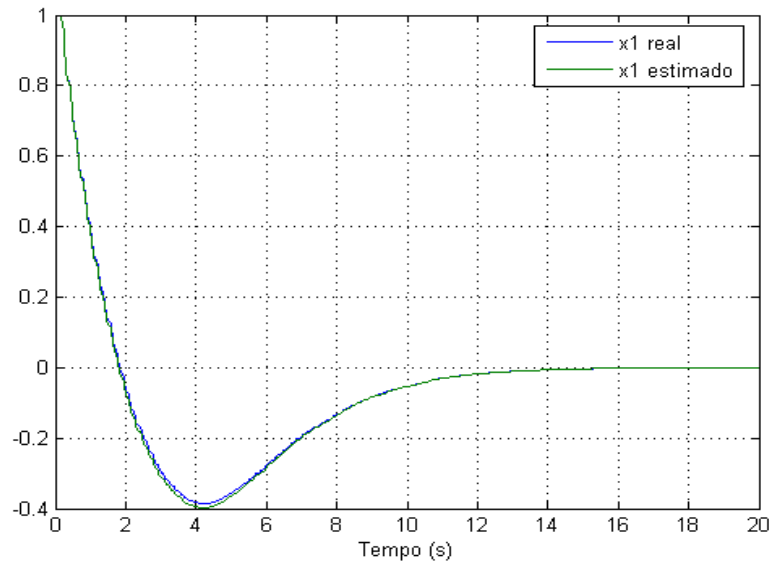


Figura 5.1: Estado  $x_1$  real e estimado do Exemplo 9.

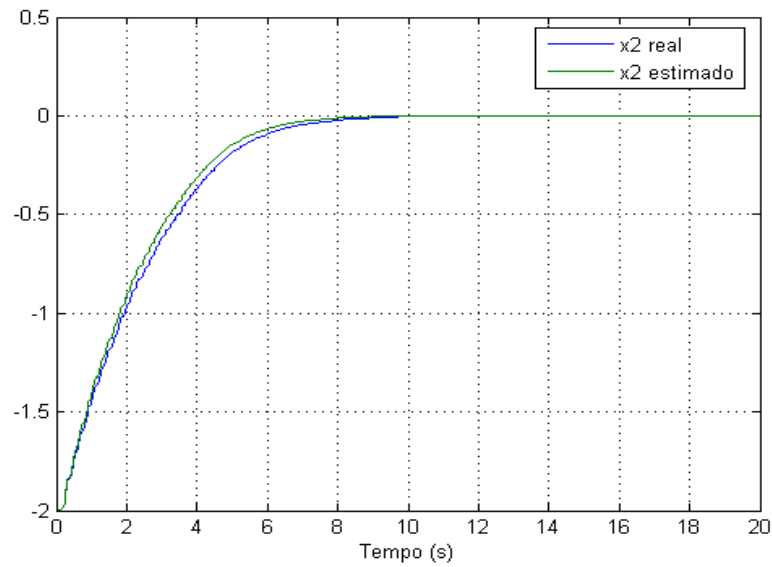


Figura 5.2: Estado  $x_2$  real e estimado do Exemplo 9.

Notamos que o estado estimado acompanha o estado real de forma satisfatória e também que o sistema está estabilizado mesmo na presença de um ruído externo  $w$ .

## 5.4 Projeto de controlador e observador de estado descentralizados $\mathcal{H}_\infty$ robustos para sistemas não lineares limitados em norma com perturbações exógenas

Nesta seção estendemos os resultados obtidos na seção anterior para o caso do projeto de controle e observador descentralizados. Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + h_i + w_i \\ y_i &= C_i x_i + v_i\end{aligned}\tag{5.46}$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  o estado do  $i$ -ésimo subsistema,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  o vetor de controle,  $y_i \in \mathbb{R}^{l_i}$  o vetor de saída,  $w \in \mathbb{R}^{m_i}$  um distúrbio externo,  $v \in \mathbb{R}^{l_i}$  o ruído na saída,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  e  $C_i \in \mathbb{R}^{l_i \times n_i}$ , supomos que os pares  $(A_i, C_i)$  são observáveis e que os pares  $(A_i, B_i)$  são controláveis.

A representação de estado do sistema global é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_D x + B_D u + h + w \\ y &= D x + v\end{aligned}\tag{5.47}$$

sendo  $x^T = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$  o vetor de estado,  $u^T = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T$  o vetor de controle,  $y^T = [y_1^T, \dots, y_N^T]^T$  o vetor de saída,  $w^T = [w_1^T, \dots, w_N^T]^T$  o vetor de distúrbio externo,  $v^T = [v_1^T, \dots, v_N^T]^T$  o vetor de ruído na saída,  $h = \text{diag}(h_i)$  a matriz de termo não linear,  $A_D = \text{diag}(A_i)$ ,  $B_D = \text{diag}(B_i)$ ,  $C_D = \text{diag}(C_i)$ , consideramos que o par  $(A_D, C_D)$  é observável e que o par  $(A_D, B_D)$  é controlável.

Por hipótese, os termos não lineares satisfazem

$$h_i^T h_i \leq \alpha_i^2 x_i^T H_i^T H_i x_i\tag{5.48}$$

De forma compacta podemos escrever que (5.48) é

$$h^T h \leq x^T H_D^T H_D x\tag{5.49}$$



com  $H_D = \text{diag}(\alpha_i H_i)$ . O estimador de estado descentralizado tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_D \hat{x} + Bu + L_D(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_D \hat{x}\end{aligned}\tag{5.50}$$

sendo  $L_D = \text{diag}(L_i)$  o ganho de observação descentralizado.

O erro de estimação é definido como

$$e_i = x_i - \hat{x}_i\tag{5.51}$$

de forma global

$$e = x - \hat{x}\tag{5.52}$$

sendo

$$e^T = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T\tag{5.53}$$

e é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\dot{e} = (A_D - L_D C_D)e + h + w - L_D v\tag{5.54}$$

De modo a estabilizar o sistema (5.47) utilizamos a lei de controle linear

$$u = K_D \hat{x}\tag{5.55}$$

sendo  $K_D = \text{diag}(K_i)$  o ganho de controle descentralizado.

Substituindo (5.55) em (5.47) e utilizando (5.52), obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_D + B_D K_D)x - B_D K_D e + h + w \\ y &= C_D x\end{aligned}\tag{5.56}$$

Com a dinâmica do erro (5.54) e com a dinâmica do sistema (5.56) podemos construir o seguinte sistema aumentado

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{w} + \tilde{h} \quad (5.57)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_D + B_D K_D & -B_D K_D \\ 0 & A_D - L_D C_D \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{h} = \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.58)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (5.57) pode ser caracterizada por uma função de Lyapunov

$$V(x, e) = x^T P_c x + e^T P_o e \quad (5.59)$$

com  $P_c = \text{diag}(P_{ci})$  e  $P_o = \text{diag}(P_{oi})$ ; que pode ser escrita como

$$\tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (5.60)$$

com

$$P = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Impondo

$$\dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) + \tilde{x}^T \tilde{x} - \gamma^2 \tilde{w}^T \tilde{w} < 0 \quad (5.62)$$

fazendo a substituição das matrizes do sistema aumentado e  $P$ , usando o Lema 2, multiplicando a inequação encontrada à direita e à esquerda por  $\text{diag}(Y_c, I)$  sendo que  $Y_c = P_c^{-1}$ , fazendo as mudanças de variáveis

$$K_D Y_c = T_D \quad (5.63)$$

e

$$P_o L_D = F_D \quad (5.64)$$

sendo

$$T_D = \text{diag}(T_i) \quad \text{e} \quad F_D = \text{diag}(F_i) \quad (5.65)$$

formulamos o seguinte problema de otimização convexo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & P_o = P_o^T > 0, \quad P_c = P_c^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} R_{11} & -B_D K_D & I & 0 & I & 0 \\ -K_D^T B_D & R_{22} & P_o & -F_D & 0 & P_o \\ I & P_o & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_D^T & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

com  $K_D = T_D Y_c^{-1}$  e  $L_D = P_o^{-1} F_D$  sendo

$$R_{11} = Y_c A_D^T + A_D Y_D + T_D^T B_D + B_D T_D + Y_c (I + 2H_D^T H_D) Y_c \quad (5.67)$$

$$R_{22} = A_D^T P_o + P_o A_D - C_D^T F_D^T - F_D C_D + I \quad (5.68)$$

Entretanto este problema não pode ser resolvido em um único passo. Então dividimos o problema em dois estágios, sendo que no primeiro estágio resolvemos o problema de controle e com sua solução resolvemos o problema de observação que é o segundo estágio.

Primeiramente tratamos do problema de controle utilizando a condição  $R_{11} < 0$ , deste modo:

$$\begin{aligned}
 Y_c &> 0 \\
 Y_c A_D^T + A_D Y_c + T_D^T B_D + B_D T_D + Y_c (I + 2H_D^T H_D) Y_c &< 0
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Usando o complemento de Schur e restringindo o ganho  $K_D$  fazendo

$$\begin{aligned}
 Y_c^{-1} &< k_{Y_c} I, \quad k_{Y_c} > 0 \\
 T_D^T T_D &< k_{T_D} I, \quad k_{T_D} > 0
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

construimos o seguinte problema de otimização convexo que caso seja factível, tem como solução  $K_D$  e  $Y_c$ :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & k_{Y_c} + k_{T_D} \\
 \text{s.a} \quad & Y_c = Y_c^T > 0 \\
 & \begin{bmatrix} Y_c A_D^T + A_D Y_c + T_D^T B_D + B_D T_D & Y_c \\ Y_c & -(I + 2H_D^T H_D)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -k_{T_D} I & T_D^T \\ T_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} k_{Y_c} I & I \\ I & Y_c \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Com a solução do problema (5.71), podemos construir o problema de observação, sendo o ganho  $L_D$  limitado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F_D^T F_D &< k_{F_D} I, \quad k_{F_D} > 0 \\
 P_o^{-1} &< k_{P_o} I, \quad k_{P_o} > 0
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Deste modo obtemos

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \mu + k_{F_D} + k_{P_o} \\
 & \text{s.a} \\
 & P_o = P_o^T > 0 \\
 & \begin{bmatrix} R_{11} & -B_D K_D & I & 0 & I & 0 \\ -K_D^T B_D & R_{22} & P_o & -F_D & 0 & P_o \\ I & P_o & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_D^T & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & P_o & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -k_{F_D} I & F_D^T \\ F_D & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} k_{P_o} I & I \\ I & P_o \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Se (5.73) for factível, sua solução minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema aumentado (5.57) e fornece o ganho de observação  $L_D$ .

Para ilustrar a metodologia apresentada, considere o seguinte sistema não linear

**Exemplo 10**

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.4534 & 0.6946 & 0 & 0 \\ 0.4449 & -0.3787 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2052 & 0.5226 \\ 0 & 0 & 0.9568 & -0.1199 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.1730 & 0 \\ 0.9797 & 0 \\ 0 & 0.2714 \\ 0 & 0.2523 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} + w \\
 y &= \begin{bmatrix} 0.8939 & 0.1991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2987 & 0.6614 \end{bmatrix} x + v
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

com

$$h_1 = \cos(x_{11}) \begin{bmatrix} 0.0284 & 0.0065 \\ 0.0469 & 0.0988 \end{bmatrix} x_1,$$

$$h_2 = \cos(x_{21}) \begin{bmatrix} 0.0950 & 0.0607 \\ 0.0231 & 0.0486 \end{bmatrix} x_2. \quad (5.75)$$

e  $x = (x_1^T, x_2^T)^T$  sendo  $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$  e  $x_2 = (x_{21}, x_{22})^T$  com  $x(0) = (1, -2, 1, -2)^T$ ;  $w$  é um distúrbio externo modelado como um ruído branco de média 0 e variância 0.1 e  $v$  é o ruído na saída.

Utilizando o método proposto encontramos

$$\gamma = 1.7387 \quad (5.76)$$

$$L_D = 10^5 \times \begin{bmatrix} -5.0532 & 0 \\ -3.8983 & 0 \\ 0 & -4.1569 \\ 0 & -4.8888 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

e

$$K_D = \begin{bmatrix} -0.7420 & -0.6791 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.59457 & -1.4179 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Nas Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 podemos ver os estados reais juntamente com os estados estimados.

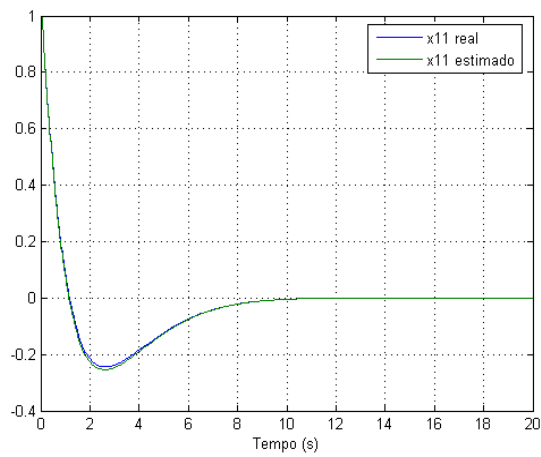


Figura 5.3: Estado  $x_{11}$  real e estimado do Exemplo 10.

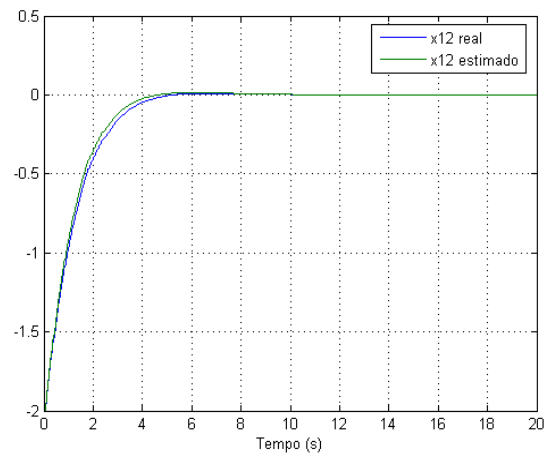


Figura 5.4: Estado  $x_{12}$  real e estimado do Exemplo 10.

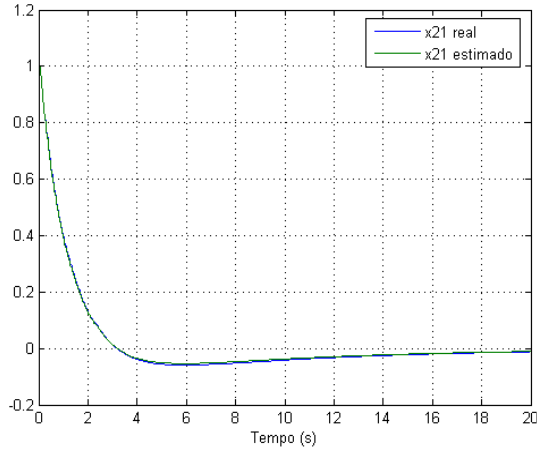


Figura 5.5: Estado  $x_{21}$  real e estimado do Exemplo 10.

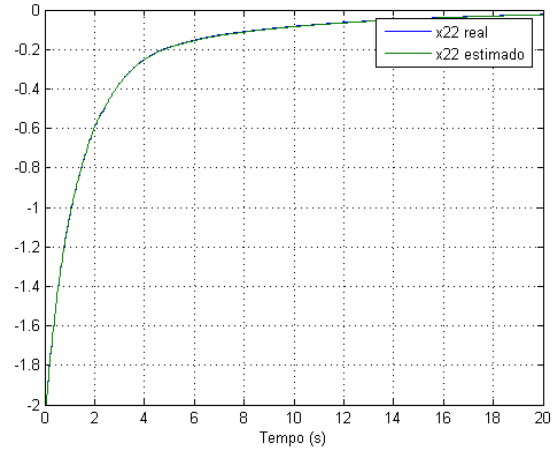


Figura 5.6: Estado  $x_{22}$  real e estimado do Exemplo 10.

Notamos que os estados estimados seguem os estados reais de forma satisfatória mesmo na presença de ruídos, além disso notamos que o esquema proposto estabiliza o sistema como um todo pois todos os estados tendem para a origem que é um ponto de equilíbrio do sistema.

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo desenvolvemos uma metodologia de projeto para o controle e observação para uma classe de sistemas não lineares limitados em norma sujeito a distúrbios externos. Utilizando o modelo do estimador e o modelo da dinâmica do erro do sistema, construímos um sistema aumentado que deve ser estável e ao mesmo tempo ser robusto com relação a ruídos externos. Para alcançar esses objetivos utilizamos uma definição de norma  $\mathcal{H}_\infty$  caracterizada a partir de uma função de Lyapunov. Partindo desses requisitos construímos um problema de otimização em termos de LMI's que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema ao mesmo tempo em que o estabiliza. Entretanto não é possível encontrar a solução do problema de controle e de observação em um único passo, deste modo dividimos o problema em dois estágios. No primeiro resolvemos o problema de controle e com as suas saídas resolvemos o problema de observação e de minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  que é o segundo estágio. A metodologia é estendida para o caso em que o sistema é descentralizado, requerendo dessa maneira um observador e um controlador descentralizados. Resultados numéricos que comprovam a viabilidade da metodologia são apresentados.



## Capítulo 6

### Conclusões e trabalhos futuros

Concluimos essa dissertação enumerando as contribuições desse trabalho e propondo algumas perspectivas de extensão em pesquisas futuras. Começaremos pelas contribuições:

- Desenvolvimento de metodologias para projeto de controladores robustos centralizado e descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo que utiliza um procedimento alternativo ao *S-Procedure* onde o ganho de controle é obtido através da solução de um problema de otimização convexo em termos de LMIs sendo que os resultados obtidos mostram a eficiência do método desenvolvido quando comparado com método da literatura.
- Desenvolvimento de metodologia para o projeto de um observador descentralizado para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitados em norma e de um controlador descentralizado para esta mesma classe de sistemas que utiliza os estados estimados pelo observador de modo a construir um controlador por realimentação de saída que estabiliza o sistema; as duas metodologias utilizam um procedimento proposto alternativo ao *S-Procedure*. Simulações numéricas evidenciam a eficácia da metodologia desenvolvida.
- Desenvolvimento de metodologia para o projeto de controladores robustos centralizado e descentralizado para uma classe de sistemas não lineares variantes no tempo limitada em norma sujeita a distúrbios externos, que utiliza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como parâmetro de robustez do sistema em relação aos distúrbios externos. Projetamos um observador que estima os estados dessa classe de sistemas e um controlador que utiliza esses estados para estabilizar robustamente o sistema de forma que ele apresente a menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  possível. Os exemplos numéricos confirmam a viabilidade da metodologia proposta.

As possibilidades de extensão desse trabalho são diversas. A seguir listamos algumas idéias que podem ser desenvolvidas

- Extensão dos resultados de controle descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma para o caso de sistemas interconectados. Uma outra proposta seria a obtenção de análogos para o caso discreto. Estudos preliminares indicam que esta pode ser um problema complexo.
- Extensão dos resultados obtidos no Capítulo 3 para o caso de sistemas interconectados e obtenção de condições para sistemas discretos.
- Extensão dos resultados obtidos no Capítulo 4 para o caso de sistemas interconectados e obtenção de condições para sistemas discretos.

## Referências Bibliográficas

- [1] Siljak, D.D., Stipanovic, D.M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 6:461–493, 2000.
- [2] Khalil, H.K. *Nonlinear systems*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.
- [3] Conte, G., Moog, C. H., Perdon, A.M. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 1999.
- [4] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K. *Robust and optimal control*. Prentice Hall Upper Saddle River, 1995.
- [5] Bernussou, J., Peres, P. L. D., Geromel, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 13(1):65–72, July 1989.
- [6] Geromel, J. C., Peres, P. L. D., Bernussou, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.
- [7] De Oliveira, M. Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Maio 1999.
- [8] Gahinet, P., Apkarian, P. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4):412–448, July-August 1994.
- [9] Geromel, J. C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):168–175, 1999.
- [10] Zhu, Y., Pagilla, P. R. Decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 24:57–69, 2007.

- [11] Kalman, R. E., Bertram, J. E. Control system analysis and design via the “second method” of lyapunov I continuous-time system. *ASME Transactions, Journal of Basic Engineering*, 2:371–393, June 1960.
- [12] Siljak, D. D. *Decentralized control of complex systems*. Academic Press, 1991.
- [13] Derinkuyu, K., Pinar, M. C. On the s-procedure and some variants. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(1):55–77, August 2006.
- [14] Ogata, K. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1985.
- [15] Gahinet, P., Apkarian, P., Chilali, M. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 41(3):436—442, 1996.
- [16] Davison, E. J., Kurak, E. M. A computational method for determining quadratic lyapunov functions for non-linear systems. *Automatica*, 7(5):627—636, 1971.
- [17] Skelton, R. E., Iwasaki, T., Grigoriadis, K. *A unified algebraic approach to linear control design*. Prentice Hall, 1998.
- [18] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [19] Yakubovich, V. A. The s-procedure in nonlinear control theory - in Russian. *Vestnik Leningr. Univ.*, (1):62–77, 1971.
- [20] Chen, G., Yu, L., Chu, J. Decentralized stabilization of large-scale linear systems with time-delay. In *Proceedings of the 14th IFAC Congress*, page 284–289, 1999.
- [21] Geromel, J. C., Bernussou, J., Peres, P. L. D. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, 30(10):1565–1578, 1994.
- [22] De Oliveira, M. C., Geromel, J. C., Bernussou, J.  $H_2$ -norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7):1499–1454, July 1999.
- [23] Halicka, M., Rosinová, D. Stability robustness bound estimates of discrete systems: analysis and comparison. *International Journal of Control*, 60(2):297–314, 1994.
- [24] Barmish, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability or an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46:399–408, 1985.

- [25] Siljak, D. D. *Large-scale dynamic systems*. Dover, 1978.
- [26] Sturm, J. F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*. Optim. Methods Softw., 1999.
- [27] Lofberg, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. Computer Aided Control Systems Design*, page 284–289, Taipei, Taiwan, Septembre 2004.
- [28] Biran, A., Breiner, M. *Matlab for engineers*. Prentice Hall, 2002.
- [29] Dhbaibi, S., Tlili, A. S., Elloumi, S., Braiek, N. B.  $\mathcal{H}_\infty$  decentralized observation and control of nonlinear interconnected systems. *ISA Transactions*, 48:458–467, 2009.
- [30] Chen, C. *Linear systems theory and design*. Oxford University Press, 1999.
- [31] Stankovic, S. S., Stankovic, D. M., Siljak, D. D. Decentralized dynamic output feedback for robust stabilization of a class of nonlinear interconnected systems. *Automatica*, 43:861–867, 2007.
- [32] Doyle, J. C., Francis, B. A., Tannembaum, A. R. *Feedback control theory*. Maxwell Macmillan, 1992.