Институт информационных и вычислительных технологий

Лабораторная работа №2
“Решение нелинейных уравнений методом простой итерации”
по курсу
“**Вычислительные методы**”

Выполнил:
Студент Балашов С.А.
Проверила:
Старший преподаватель кафедры МКМ
Шевченко О.В.

Москва, 2021

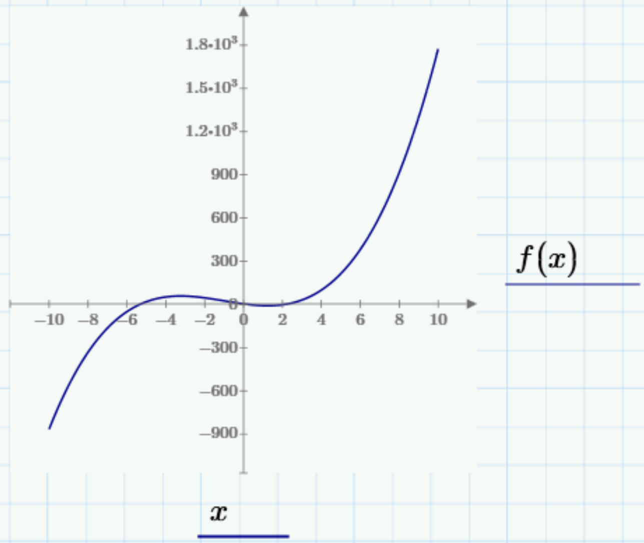
$f(x) := 1.5 \cdot x^3 + 4.5 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 4$

$f'(x) := 4.5 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 18$

$\mathbf{TOL} := 10^{-15}$

$\varepsilon := 10^{-13}$

$\varepsilon_0 := 10^{-4}$



3. Проанализировать полученные результаты.
3.1. Указать, на какой итерации достигается точность е = 10-13 (для каждого корня).
3.1. Указать, на какой итерации достигается точность, указанная в задаче 1 (для каждого корня).
3.3. Сравнить скорость работы методов (по количеству итераций) для разных корней.
3.4. Определить практически скорость убывания погрешности для каждого из корней (для чего вычислить отношение погрешностей у каждой пары последовательных шагов метода).
3.5. Объяснить причину совпадения или различия найденных выше значений для разных корней.

$$
MPI(f,\alpha,q,x_0,\varepsilon,x_{root}) := \left\|
\begin{array}{l}
ORIGIN \leftarrow 0 \\
x_l \leftarrow x_0 \\
x_m \leftarrow x_0 - \alpha \cdot f(x_0) \\
x_r \leftarrow \mathbf{root}(f(x_{root}), x_{root}) \\
i \leftarrow 1 \\
\Delta \leftarrow |x_m - x_r| \\
\text{while } \left(|x_l - x_m| > \left|\dfrac{1-q}{q}\right| \cdot \varepsilon \right) \\
\quad \left\|
\begin{array}{l}
x_l \leftarrow x_m \\
x_m \leftarrow x_l - \alpha \cdot f(x_l) \\
\Delta \leftarrow |x_m - x_r| \\
A_{i,0} \leftarrow i \\
A_{i,1} \leftarrow x_m \\
A_{i,2} \leftarrow \Delta \\
i \leftarrow i + 1
\end{array}
\right. \\
res \leftarrow \begin{bmatrix} x_m \\ i \\ A \end{bmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$[-5.4\ ;-5.3]$

$f(-5.4)=-3.776$
$f(-5.3)=2.48950000000001$

$f'(-5.40)=64.62$
$f'(-5.39)=64.22445$
$f'(-5.38)=63.8298$
$f'(-5.37)=63.43605$
$f'(-5.36)=63.0432$
$f'(-5.35)=62.65125$
$f'(-5.34)=62.2602$
$f'(-5.33)=61.87005$
$f'(-5.32)=61.4808$
$f'(-5.31)=61.09245$
$f'(-5.30)=60.705$

$m_1:=60.705$

$M_1:=64.62$

$$\alpha_1:=\frac{2}{m_1+M_1}=0.015958507879513$$

$$q_1:=\left|\frac{M_1-m_1}{M_1+m_1}\right|=0.031238779174147$$

$$x_{01}:=\frac{-5.4-5.3}{2}=-5.35$$

$x_{s1}:=-5.4$

$[2.1\ ;2.2]$

$f(2.1)=-0.063500000000005$
$f(2.2)=2.15200000000001$

$f'(2.10)=20.745$
$f'(2.11)=21.02445$
$f'(2.12)=21.3048$
$f'(2.13)=21.58605$
$f'(2.14)=21.8682$
$f'(2.15)=22.15125$
$f'(2.16)=22.4352$
$f'(2.17)=22.72005$
$f'(2.18)=23.0058$
$f'(2.19)=23.29245$
$f'(2.20)=23.58$

$m_2:=20.745$

$M_2:=23.58$

$$\alpha_2:=\frac{2}{m_2+M_2}=0.045121263395375$$

$$q_2:=\left|\frac{M_2-m_2}{M_2+m_2}\right|=0.063959390862944$$

$$x_{02}:=\frac{2.2+2.1}{2}=2.15$$

$x_{s2}:=2.1$

$[0.2\ ;0.3]$

$f(0.2)=0.592$
$f(0.3)=-0.954499999999999$

$f'(0.20)=-16.02$
$f'(0.21)=-15.91155$
$f'(0.22)=-15.8022$
$f'(0.23)=-15.69195$
$f'(0.24)=-15.5808$
$f'(0.25)=-15.46875$
$f'(0.26)=-15.3558$
$f'(0.27)=-15.24195$
$f'(0.28)=-15.1272$
$f'(0.29)=-15.01155$
$f'(0.30)=-14.895$

$m_3:=-16.02$

$M_3:=-14.895$

$$\alpha_3:=\frac{2}{m_3+M_3}=-0.064693514475174$$

$$q_3:=\left|\frac{M_3-m_3}{M_3+m_3}\right|=0.036390101892285$$

$$x_{03}:=\frac{0.2+0.3}{2}=0.25$$

$x_{s3}:=0.2$

$x_{b1}:=\mathbf{root}(f(x_{s1}),x_{s1})=-5.34048569379365$

$x_1:=MPI(f,\alpha_1,q_1,x_{01},\varepsilon,x_{s1})^{\langle 0\rangle}=[-5.34048569379365]$

$j_1:=MPI(f,\alpha_1,q_1,x_{01},\varepsilon,x_{s1})^{\langle 1\rangle}=[6]$

$|x_1-x_{b1}|=0$

$|x_{01}-x_{b1}|\cdot q_1=0.000297215310575$

$k:=1..6 \qquad n:=1..3$

$x_{b2}:=\mathbf{root}(f(x_{s2}),x_{s2})=2.10305470170974$

$x_2:=MPI(f,\alpha_2,q_2,x_{02},\varepsilon,x_{s2})^{\langle 0\rangle}=[2.10305470170975]$

$j_2:=MPI(f,\alpha_2,q_2,x_{02},\varepsilon,x_{s2})^{\langle 1\rangle}=[10]$

$|x_2-x_{b2}|=0.000000000000014$

$|x_{02}-x_{b2}|\cdot q_2=0.003002592682524$

Максимальный корень при точности 10^-4

$x_{20}:=MPI(f,\alpha_2,q_2,x_{02},\varepsilon_0,x_{s2})^{\langle 0\rangle}=[2.10313916353119]$

$j_{20}:=MPI(f,\alpha_2,q_2,x_{02},\varepsilon_0,x_{s2})^{\langle 1\rangle}=[2]$

$|x_{20}-x_{b2}|=0.000084461821451$

$|x_{02}-x_{b2}|\cdot q_2=0.003002592682524$

$k:=1..10 \qquad n:=1..3$

$x_{b3}:=\mathbf{root}(f(x_{s3}),x_{s3})=0.237430992083906$

$x_3:=MPI(f,\alpha_3,q_3,x_{03},\varepsilon,x_{s3})^{\langle 0\rangle}=[0.237430992083912]$

$j_3:=MPI(f,\alpha_3,q_3,x_{03},\varepsilon,x_{s3})^{\langle 1\rangle}=[6]$

$|x_3-x_{b3}|=0.000000000000006$

$|x_{03}-x_{b3}|\cdot q_3=0.000457387478752$

$k:=1..6 \qquad n:=1..3$

Таблица №1

Отрезок локализации	m	M	alpha	q	Найденное приближение	Абсолютная погрешность
[-5.4;-5.3]	60.705	64.62	0.01596	0.03124	-5.34048569379365	0
[2.1;2.2]	20.745	23.58	0.04512	0.06396	2.10305470170974	0.000000000000014
[0.2;0.3]	-16.02	-14.895	-0.06469	0.03639	0.237430992083906	0.000000000000006

Таблица№2

$B_{k,n}$

$$[B]:=MPI\left(f,\alpha_1,q_1,x_{01},\varepsilon,x_{s1}\right)^{\widehat{2}}=[[6\times 3]]$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5.34048587682282 & 0.000000183029177 \\ 2 & -5.34048569491329 & 0.000000001119641 \\ 3 & -5.3404856938005 & 0.00000000000685 \\ 4 & -5.34048569379369 & 0.000000000000042 \\ 5 & -5.34048569379365 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{k,n}$

$$[C]:=MPI\left(f,\alpha_2,q_2,x_{02},\varepsilon,x_{s2}\right)^{\widehat{2}}=[[10\times 3]]$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.10313916353119 & 0.000084461821453 \\ 2 & 2.10305977438257 & 0.000005072672834 \\ 3 & 2.10305500662195 & 0.000000304912214 \\ 4 & 2.10305472003856 & 0.000000018328821 \\ 5 & 2.10305470281152 & 0.000000001101784 \\ 6 & 2.10305470177597 & 0.000000000066232 \\ 7 & 2.10305470171372 & 0.000000000003983 \\ 8 & 2.10305470170998 & 0.000000000000241 \\ 9 & 2.10305470170975 & 0.000000000000016 \end{bmatrix}$$

$D_{k,n}$

$$[D]:=MPI\left(f,\alpha_3,q_3,x_{03},\varepsilon,x_{s3}\right)^{\widehat{2}}=[[6\times 3]]$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.237431646790866 & 0.000000654706963 \\ 2 & 0.237430985648579 & 0.000000006435325 \\ 3 & 0.237430992147162 & 0.000000000063259 \\ 4 & 0.237430992083284 & 0.00000000000062 \\ 5 & 0.237430992083912 & 0.000000000000008 \end{bmatrix}$$

3.1 Скорость достижения точности 10^-13

Корень	*Результат*	*Итерация*
x_1	-5.34048569379365	6
x_2	2.10305470170975	10
x_3	0.237430992083912	6

3.2 Скорость достижения точности 10^-4

Корень	*Результат*	*Итерация*
x_1	-5.34048587682282	2
x_2	2.10313916353119	2
x_3	0.237431646790866	2

3.3 Согласно полученным результатам, поиск второго (максимального) корня занимает больше итераций, чем поиск остальных корней, которые ищутся с одной скоростью.

3.4 Скорость убывания погрешности для 1 корня

Δx_k	Δx_{k1}	δ
0	0.000000183029177	0
0.000000183029177	0.000000001119641	163.471306427685
0.000000001119641	0.00000000000685	163.451240875912
0.00000000000685	0.000000000000042	163.095238095238
0.000000000000042	0	∞

3.4 Скорость убывания погрешности для 2 корня

Δx_k	Δx_{k1}	δ
0	0.000084461821453	0
0.000084461821453	0.000005072672834	16.6503585421255
0.000005072672834	0.000000304912214	16.6365025770991
0.000000304912214	0.000000018328821	16.6356698011291
0.000000018328821	0.000000001101784	16.6355846518011
0.000000001101784	0.000000000066232	16.6352216451262
0.000000000066232	0.000000000003983	16.6286718553854
0.000000000003983	0.000000000000241	16.5269709543568
0.000000000000241	0.000000000000016	15.0625

3.4 Скорость убывания погрешности для 3 корня

Δx_k	Δx_{k1}	δ
0	0.000000654706963	0
0.000000654706963	0.000000006435325	101.736425588451
0.000000006435325	0.000000000063259	101.729793389083
0.000000000063259	0.00000000000062	102.03064516129
0.00000000000062	0.000000000000008	77.5

3.5 Судя по полученным результатам, я могу сделать вывод, что у каждого поиска корня собственная скорость убывания погрешности. Сделаю предположение, что это связано с разными для каждого корня значениями q и alpha, которые зависят от производной функции на определенных отрезках локализации.