А-08-19

Балашов С.А.

Типовой расчёт № 5

Решить систему уравнений $Ax=b$ методом Гаусса.

$$A b: \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -10 & 3 & 12 \\ 24 & -26 & 84 & -24 & -20 \\ 12 & 82 & -4 & -10 & -714 \\ -18 & -78 & -8 & 5 & 675 \end{array}\right)$$

1) Найду коэффициенты для схемы единственного деления:

$\mu_{21} = -8$

$\mu_{31} = -4$

$\mu_{41} = 6$

2) Произведу операции: $II - \mu_{21} I$

$III - \mu_{31} I$

$IV - \mu_{41} I$

$$A b: \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -10 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 76 \\ 0 & 90 & -44 & 22 & -666 \\ 0 & -90 & 52 & -13 & 603 \end{array}\right)$$

3) Найду коэффициенты: $\mu_{32} = 9$

$\mu_{42} = -9$

4) Произведу операции: $III - \mu_{32} II$

$IV - \mu_{42} II$

$$A b: \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -10 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & -80 & 22 & -1350 \\ 0 & 0 & 80 & -13 & 1287 \end{array}\right)$$

А-08-19

Балашов С.А.

Типовой расчёт № 8

Решить систему уравнений методом прогонки.

A:
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

d:
$$\begin{pmatrix} -85 \\ 111 \\ 33 \\ -25 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Найду вектора ненулевых диагоналей:

$$a_{2,3,4,5} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad b_{1,2,3,4,5} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad c_{1,2,3,4} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) $\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = \frac{4}{7}; \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{-85}{49}$

2) $\gamma_2 = b_2 + \alpha_1 \cdot a_2 = 16 + \frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{124}{7}$

$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = \frac{6}{\frac{124}{7}} = \frac{21}{62}; \quad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2 \cdot \beta_1}{\gamma_2} = \frac{111 - 3 \cdot \frac{-85}{49}}{\frac{124}{7}} = \frac{2847}{434}$

3) $\gamma_3 = b_3 + \alpha_2 \cdot a_3 = 9 + \frac{21}{62} \cdot 3 = \frac{621}{62}$

$\alpha_3 = -\frac{c_3}{\gamma_3} = -\frac{2}{\frac{621}{62}} = -\frac{124}{621}; \quad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3 \cdot \beta_2}{\gamma_3} = \frac{33 - 3 \cdot \frac{2847}{434}}{\frac{621}{62}} = \frac{1927}{1449}$

4) $\gamma_4 = b_4 + \alpha_3 \cdot a_4 = 3 - \frac{124}{621} \cdot (-1) = \frac{1987}{621}$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{\gamma_4} = \frac{1}{\frac{1987}{621}} = \frac{621}{1987}; \quad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4 \cdot \beta_3}{\gamma_4} = \frac{-25 - (-1) \cdot \frac{1927}{1449}}{\frac{1987}{621}} = -7{,}397656$

А-08-19

Балашов С.А.

Типовой расчёт № 9

Вычислить нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_\infty$ матрицы A и нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ вектора b.

$$A: \begin{pmatrix} 2,046 & 1,821 & -1,45 \\ -2,198 & 1,181 & 0,742 \\ 2,572 & 0,985 & 2,397 \end{pmatrix} \qquad b: \begin{pmatrix} 2,01 \\ -3,03 \\ -2,1 \end{pmatrix}$$

1) Вычислю нормы A:

$$\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{3}|A_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|A_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|A_{i3}|\right\} = \{6,816;\ 3,987;\ 4,589\} = 6,816$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|A_{i,j}|^2} = \sqrt{29,712204} = 5,450890$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}| = 5,954$$

2) Вычислю нормы b:

Поскольку значения b округлены по дополнению, то

$\Delta b_1 = 0,005$ | $\|b\|_1$: $\Delta^1 b = |0,005| + |0,005| + |0,05| = 0,06$

$\Delta b_2 = 0,005$ | $\|b\|_2$: $\Delta^2 b = \sqrt{0,005^2 + 0,005^2 + 0,05^2} = 0,0504975$

$\Delta b_3 = 0,05$ | $\|b\|_\infty$: $\Delta^\infty b = \max\{|0,005|; |0,005|; |0,05|\} = 0,05$

$$\|b\|_1 = 2,01 + 3,03 + 2,1 = 7,14$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{2,01^2 + 3,03^2 + 2,1^2} = 17,631$$

$$\|b\|_\infty = \max\{|2,01|; |-3,03|; |-2,1|\} = 3,03$$

$$\delta_1 b = \frac{\Delta^1 b}{\|b\|_1} = \frac{0,06}{7,14} = 8,4\cdot 10^{-3}$$

$$\delta_2 b = \frac{\Delta^2 b}{\|b\|_2} = \frac{0,0504975}{17,631} = 2,86\cdot 10^{-3}$$

$$\delta_\infty b = \frac{\Delta^\infty b}{\|b\|_\infty} = \frac{0,05}{3,03} = 0,0165$$

Балашов С.А.

Типовой расчёт №14

Приблизить МНК функцию $y = y(x)$ функцией вида $\Phi(x) = a\varphi_0(x) + b\varphi_1(x)$. Определить величину среднеквадратичного отклонения.

x	0,3	2,8	4,1	4,5	5	5,4
y	7,483	3,614	0,603	0,848	1,951	3,301

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = \cos(x-1)$

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \cos(x_i - 1)\right) a_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \cos(x_i - 1)\right) a_0 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \cos^2(x_i - 1)\right) a_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i - 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a_0 + (-2{,}358928236)\,a_1 = 17{,}8 \\ -2{,}358928236\,a_0 + 3{,}033530015\,a_1 = 1{,}216501086 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 4{,}500126895 \\ a_1 = 3{,}900399015 \end{cases}$$

$\Phi(x) = 4{,}500126895 + 3{,}900399015 \cos(x-1)$

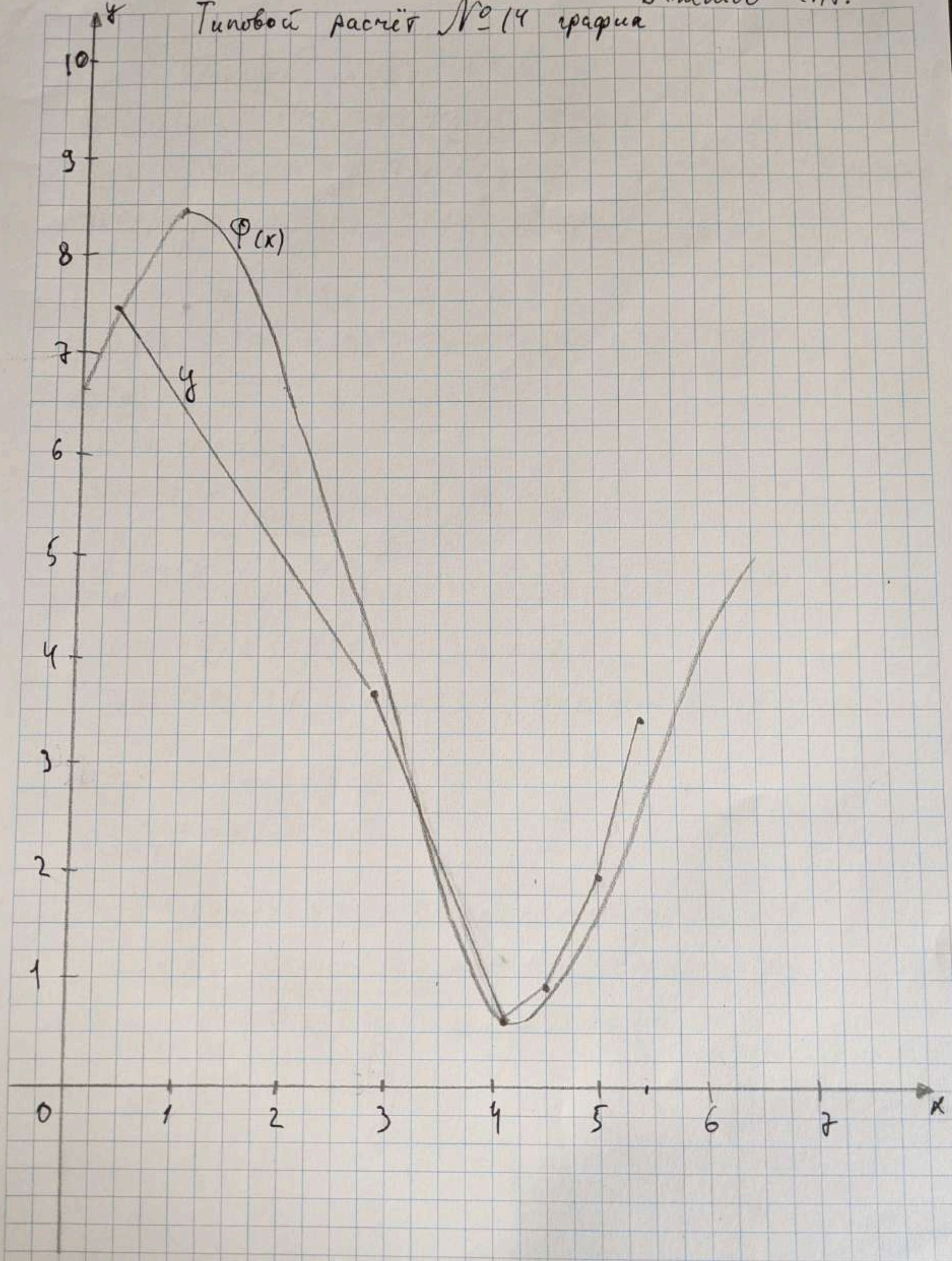
Посчитаю среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (\Phi(x_i) - y_i)^2} = 0{,}0238459222$$

А-08-19

Балашов С.А.

Типовой расчёт № 14 графики



А-08-19

Баласов С.А.

Типовой расчёт № 13

Методом наименьших квадратов приблизить функцию $y = y(x)$ многочленами 1-й и 2-й степеней

X	-4	-2	0	2	4
y	-3,4	-0,6	-2	-4,3	-6,3

1) Найду многочлен 1-й степени $y = ax + b$:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^0\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^1\right) a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^1\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+1) a_0 + 0 \cdot a_1 = -16,6 \\ 0 \cdot a_0 + 40 \cdot a_1 = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{16,6}{5} = -3,32 \\ a_1 = -\frac{19}{40} = 0,475 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1 x = -3,32 + 0,475x$$

Посчитаю среднеквадратичное уклонение:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} (\varphi_1(x_i) - y_i)^2} = \cancel{4,16718130 2}\ 3,035226515$$

2) Найду многочлен 2-й степени $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^0\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^1\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^1\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right) a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Балашов С.А.

Типовой расчёт №16

Вычислить приближенное значение функции в точке $\tilde{x}$, используя интерполяционные многочлены Ньютона 1-й, 2-й и 3-й степени.

x	3	3,8	4,2	4,6	5
y	11,7	17,4	20,7	24,3	28,2

$\tilde{x} = 4{,}03$

Расположу значения в порядке удаления от $\tilde{x}$:

x	4,2	3,8	4,6	5	3
y	20,7	17,4	24,3	28,2	11,7

$x_0 = 4{,}2$	$F_0 = y_0 = 20{,}7$	F_{01}			
$x_1 = 3{,}8$	$F_1 = y_1 = 17{,}4$	F_{12}	F_{012}		
$x_2 = 4{,}6$	$F_2 = y_2 = 24{,}3$	F_{23}	F_{123}	F_{0123}	F_{01234}
$x_3 = 5$	$F_3 = y_3 = 28{,}2$	F_{34}	F_{234}	F_{1234}	
$x_4 = 3$	$F_4 = y_4 = 11{,}7$				

$F_{01} = \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} = 8{,}25$ $\quad F_{012} = 0{,}9375$ $\quad F_{0123} = 0$ $\quad F_{01234} = 0$

$F_{12} = 8{,}625$ $\quad F_{123} = 0{,}9375$ $\quad F_{1234} = 0$

$F_{23} = 9{,}75$ $\quad F_{234} = 0{,}9375$

$F_{34} = 8{,}25$

1) $m = 0$ $\quad P_0(x) \equiv F_0 = 20{,}7$

$\varepsilon_0 \approx |F_{01} \cdot \omega_1(\tilde{x})| = |F_{01} \cdot (\tilde{x} - x_0)| = +1{,}4025 \approx 1{,}4$

$f(\tilde{x}) = 20{,}7 \pm 1{,}4$

2) $m = 1$ $\quad P_1(x) = P_0(x) + F_{01} \cdot \omega_1(x) = 19{,}2975$

$\varepsilon_1 = |F_{012} \cdot \omega_2(\tilde{x})| = 0{,}0365625 \approx 0{,}04$

$f(\tilde{x}) = 19{,}29 \pm 0{,}04$

А-08-19

Балашов С.А.

Типовой расчёт №15

Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона для функции $y=y(x)$ в точке $\tilde{x}$

x	-4	-3	-2	-1
y	1	0	3	2

$\tilde{x} = -2{,}87$

1) Форма Лагранжа:

$$L_3(\tilde{x}) = y_0 \frac{(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)(\tilde{x}-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_2)(\tilde{x}-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

$$= 0{,}334204 \Rightarrow f(-2{,}87) \approx \underline{0{,}334204}$$

2) Форма Ньютона:

$x_0 = -4$	$y_0 = 1$	$\Delta^1 y_0 = -1$	$\Delta^2 y_0 = 4$	$\Delta y_0 = -8$
$x_1 = -3$	$y_1 = 0$	$\Delta^1 y_1 = 3$	$\Delta^2 y_1 = -4$	
$x_2 = -2$	$y_2 = 3$	$\Delta^1 y_2 = -1$		
$x_3 = -1$	$y_3 = 2$			

$$P_3(\tilde{x}) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!}(\tilde{x}-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot$$

$$\cdot (\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2) = 0{,}334204 \Rightarrow f(-2{,}87) \approx \underline{0{,}334204}$$