Лабораторная работа№4

для потоков А-1,2,3,15-19 и А-4,6,7,8,9,12-19 «Вычислительные методы»

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ»

Задача 1. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$y' = r(t)y(t) \qquad t \in [t_0, T],$$
$$y(t_0) = y_0$$

и вычислить и погрешность приближенного решения.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти аналитическое решение задачи.
2. Найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=\frac{T-t_0}{10}$ явным методом Эйлера (см. файл для студентов), методом Эйлера-Коши, усовершенствованным методом Эйлера (самостоятельно написать программы поиска приближенного решения указанными методами).
3. Используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности (см. Приложение А), найти приближенное решение задачи Коши с тем же шагом h.
4. Найти величины погрешностей приближенных решений по формуле $\varepsilon = \max\limits_{0 \le i \le N} | y(t_i) - y_i |$, где $y(t_i)$ и y_i - значения точного и приближенного решений в узлах сетки t_i, i=0..N.
5. Построить таблицы и графики найденных решений (на одном чертеже). **Сравнить полученные результаты.**

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.

N	$r(t)$	*y0*	*t0*	*T*	N	$r(t)$	*y0*	*t0*	*T*
1	$-tg(0.5t)$	1	0	$\frac{\pi}{2}$	10.1.16	$\frac{4t}{t^2+1}$	0.1	0	2
2	$\frac{-1}{t+3}$	0.5	1	2	10.1.17	$-2\sin(2t)+0.2$	e	0	$\frac{\pi}{2}$
3	$ctg(0.5t)$	1	π	$\frac{3\pi}{2}$	10.1.18	$\frac{t+1}{2t}$	0.908	0.5	2
4	$0.4tg(0.4t)$	1	0	$\frac{\pi}{2}$	10.1.19	$-2\sin(3t)-0.1$	1.948	0	$\frac{\pi}{2}$
5	$-\frac{1}{5}ctg(0.2t)$	1	$\frac{5\pi}{2}$	4π	10.1.20	$\frac{-1}{2t+1}$	1.414	0	2
6	$-\frac{1}{1+t^2}$	1	0	π	10.1.21	$-\cos(3t)-0.1$	0.68	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
7	$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	10.1.22	$-\frac{1}{t\ln(t)}$	1	e	2e
8	$-\frac{2t}{1+t^2}$	1	0	2	10.1.23	$-2\cos(3t)+0.2$	0.57	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
9	$\frac{-4t}{1+t^2}$	1	0	2	10.1.24	$\cos(2t)+0.1$	1.783	0	$\frac{\pi}{2}$
10	$\frac{1}{t\ln(t)}$	1	e	2e	10.1.25	$\frac{2}{1+4t^2}$	1	0	2
11	$\frac{t}{1+t^2}$	1	0	2	10.1.26	$-\frac{1}{2t\ln(t)}$	1	e	2e

N	$r(t)$	y0	t0	T	N	$r(t)$	y0	t0	T
12	$-\frac{1}{4}tg(0.24t)$	1	0	$\frac{\pi}{2}$	10.1.27	$-\frac{2}{1+4t^2}$	1	0	$\frac{\pi}{2}$
13	$-\frac{2t+1}{t}$	0.135	1	2	10.1.28	$-\frac{1}{2+0.5t^2}$	1	0	2π
14	$-ctg(0.5t)$	1	π	$\frac{3\pi}{2}$	10.1.29	$\frac{1}{2+0.5t^2}$	1	0	2π
15	$\frac{1}{1+t^2}$	1	0	π	10.1.30	$\frac{t+2}{t+1}$	0.303	-0.5	0.5

Задача 2. *(для студентов, претендующих на оценку «хорошо»)*
Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1-го порядка

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T],$$
$$y(t_0) = y_0$$

и оценить погрешность решения задачи при разных значениях шага. Подобрать шаг, при котором достигается точность $\varepsilon = 10^{-4}$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Составить программу, реализующую метод, указанный в индивидуальном варианте. Проверить правильность работы программы на задаче Коши для уравнения $y' = y + 3t^2 - t^3$, точным решением которого является функция $y(t) = t^3$ (начальное условие поставьте самостоятельно).
2. Используя эту программу, найти решение исходной задачи с шагом $h0 = (T - t0)/10$. Построить график полученного решения.
3. Найти решение той же задачи с шагом $h = 2 \cdot h0$ и определить погрешность r_i по правилу Рунге (в тех точках, в которых это возможно). Вычислить величину $R = \max_i |r_i|$.
4. Подобрать шаг $h2$, при котором погрешность по правилу Рунге ($R = \max_i |r_i|$) не превосходит точности $\varepsilon = 10^{-4}$. Построить график полученного решения.
5. Используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности (см. Приложение А), найти решение исходной задачи с шагом $h0 = (T - t0)/10$ и погрешность этого решения по правилу Рунге.
6. Найдите шаг $h3$, при котором погрешность встроенной функции ($R = \max_i |r_i|$, найденная по правилу Рунге) не превосходит той же точности $\varepsilon = 10^{-4}$.
7. Заполнить таблицу

Метод	Порядок точности метода	Погрешность при шаге $h0$	Шаг, при котором достигается точность $\varepsilon = 10^{-4}$
Индивидуальный метод … (название)			
Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности			

8. **<u>Описать кратко</u>**, как в проведенных расчетах проявилась устойчивость и порядок точности методов. Сравните (если возможно) примененные методы по этим показателям.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	**Метод**
1	$-20y+2t-19.9$	-1	1.5	1	Эйлера-Коши
2	$-30y+30\cos(\pi t)-\pi\sin(\pi t)$	0	1.5	1	Усовершенствованный Эйлера
3	$-25y+1.25t-49.95$	0	1.5	-1	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант I)
4	$-20y+20-19e^{-t}$	0	1.5	1	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
5	$-30y+\sin(2t)+30\sin^2(t)$	0	1.5	1	Усовершенствованный Эйлера
6	$-25y-\sin(2t)+25\cos^2(t)$	-1	1.5	1	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант III)
7	$-55y+3t^2-10t+5$	0	1.5	5	Эйлера-Коши
8	$-35y+25-\sqrt{t+15}$	0	5	4	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
9	$-45y+10t^2\sin t-t^3+5$	0	3	3	Эйлера-Коши
10	$-40y+40\cos(\pi t)+4\sin(\pi t)$	0	2	6	Усовершенствованный Эйлера
11	$-35y-5.5e^{-2t}-3t$	0	1.5	-5	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант I)
12	$-50y+6.5+\sqrt{t^2+15}-3t$	0	2	2	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
13	$-20y+3\sin^2(2t)+\cos t$	0	2	5	Эйлера-Коши
14	$-25y+16t^3\cos t-t^2$	0	1.5	4	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант III)
15	$-30y-1.2e^{-t}+30e^{-1.2t}+15$	0	2	-1	Усовершенствованный Эйлера
16	$-45y-10t^2-\sqrt{t}+15$	0	2	-3	Эйлера-Коши
17	$-40y-20\sin(\pi t)+\pi^2\cos(\pi t)$	0	4	2	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
18	$-30y+5\sin^2(2t)$	0	2	-2	Усовершенствованный Эйлера
19	$-30y-10\cos(t)+25\sin(t)-2$	0	2	-5	Эйлера-Коши
20	$-35y+7.2e^{-t}+30e^{-1.6t}$	0	2	6	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант I)
21	$-50y-15+\sqrt{t+30}$	0	3	5	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
22	$-25y-40\cos(t)+15\sin(t)-12$	0	2	-3	Усовершенствованный Эйлера
23	$-30y-15t^2\sin t+t^3+5$	0	1.5	2	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант III)
24	$-20y+10\cos(\pi t)-\sin^2(\pi t)$	0	2	-4	Эйлера-Коши
25	$-35y+6e^{-t}+35e^{-6t}+5$	0	3	-1	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант I)
26	$-35y+14t^2\cos t-t^2-5$	0	3	4	Рунге-Кутты 3 порядка (вариант II)
27	$-25y+15\cos(0.5t)-12\sin t$	0	1.5	3	Усовершенствованный Эйлера
28	$-40y-5.5e^{-4t}+15$	0	2	-2	Эйлера-Коши

29	$-20y+2t-19.9$	0	1.5	0	Эйлера-Коши
30	$-30y+30\cos(\pi t)-\pi\sin(\pi t)$	0	1.5	-1	Усовершенствованный Эйлера

Задача 3. *(для студентов, претендующих на оценку «отлично»)*

Решить приближенно задачу Коши (из задания 1) с заданной точностью, используя указанный в индивидуальном варианте метод. Для получения информации о погрешности использовать правило Рунге.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1) Реализовать **адаптивную** процедуру вычисления решения задачи Коши с заданной точностью:

1.1. Выбрать начальное значение шага $h=0.5$.

1.2. Найти реализуемым методом значение приближенного решения в первой точке сетки.

1.3. Уменьшить шаг вдвое. Найти реализуемым методом приближенное решение в первых двух точках новой сетки.

1.4. Найти модуль оценки по правилу Рунге во второй точке сетки с уменьшенным шагом.

1.5. Сравнить результат п.1.4 с заданной точностью. Если точность не достигнута, повторить пп. 1.1-1.4 для уменьшенного вдвое начального значения шага. Если точность достигнута, зафиксировать итоговое значение шага.

1.6. Повторить пп.1.1-1.6, для поиска следующих значений приближенного решения, начиная каждый новый подбор с предыдущего зафиксированного значения шага.

2) Заполнить таблицу

Значение точности	**Метод**	**Массив значений использованных шагов**	**Минимальное значение шага *h* из использованных**

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.

Номера вариантов					ε	**метод**
1	7	13	19	25	0.01	явный метод Эйлера
2	8	14	20	26	0.05	усовершенствованный метод Эйлера
3	9	15	21	27	0.03	метод Эйлера-Коши
4	10	16	22	28	0.04	явный метод Эйлера
5	11	17	23	29	0.06	усовершенствованный метод Эйлера
6	12	18	24	30	0.02	метод Эйлера-Коши

Приложение А

```
# Реализация метода Рунге-Кутты 4 порядка точности на Python (код отсюда можно скопировать)
def RK4(f,t0,y0,h,N):
        y[0]=y0
        for i in range (N):
                K1=f(t0+i*h,y[i])
                K2=f(t0+i*h+h/2,y[i]+h*K1/2)
                K3=f(t0+i*h+h/2,y[i]+h*K2/2)
                K4=f(t0+i*h+h,y[i]+h*K3)
                y[i+1] = y[i]+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4)
        return y
```

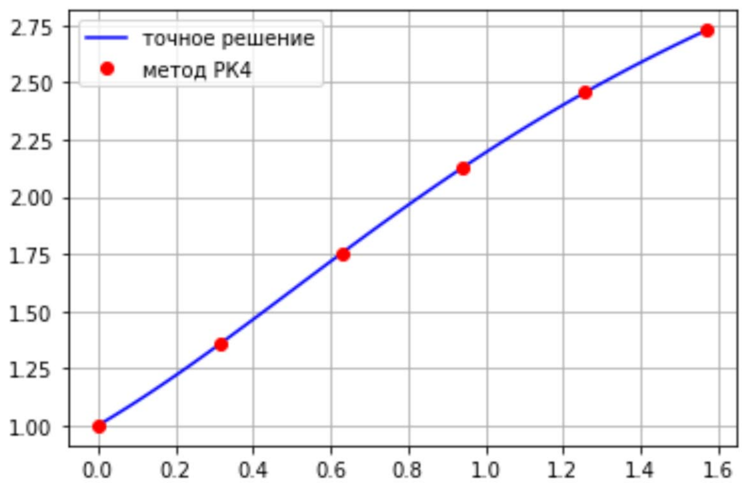
Применение – см. на след. странице.

In [63]:

```
# поиск с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


#правая часть
def f(t, y):
    return y/(1+t*t)
#точное решение
def Yt(t):
    return np.exp(np.arctan(t))
#метод Рунге-Кутты 4 порядка точности
def RK4(f,t0,y0,h,N):
    y[0]=y0
    for i in range (N):
        K1=f(t0+i*h,y[i])
        K2=f(t0+i*h+h/2,y[i]+h*K1/2)
        K3=f(t0+i*h+h/2,y[i]+h*K2/2)
        K4=f(t0+i*h+h,y[i]+h*K3)
        y[i+1] = y[i]+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4)
    return y

t0=0
y0=1
T=np.pi/2
N=5
h=(T-t0)/N;

y=[0]*(N+1)
y=RK4(f,t0,y0,h,N)

print(y)

plt.grid(True)
xx = np.linspace(t0,T,100)
plt.plot(xx,Yt(xx), color='blue', label='точное решение')
x = np.linspace(t0,T,N+1)
plt.plot(x, y, color='red', label='метод РК4', ls='', marker='.',markersize
plt.legend()
```

```
[1, 1.3557962013203753, 1.7523476753806593, 2.1292244630454618, 2.456157506
401115, 2.728755604858967]
```

Out[63]: <matplotlib.legend.Legend at 0xa9c7370>



In [ ]:

Файл для студентов

Лабоpатpоная работа №4

для потоков А-1,2,3,15-19 и А-4,6,7,8,9,12-19 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

"ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ"

Поиск решеничя методом Рунге-Кутты 4 порядлка точности

Исходные данные: $r(t) := \dfrac{1}{1+t^2}$ $\quad t_0 := 0$ $\quad y_0 := 1$

$f(t,y) := y \cdot r(t)$ $\quad T := \dfrac{\pi}{2}$

Точное решение:

$$Y(t) := e^{\operatorname{atan}(t)}$$

Зададим число отрезков: $N := 10$

Шаг сетки: $h := \dfrac{T - t_0}{N}$ $\quad h = 0.1570796327$

Получение решения задачи Коши методом Рунге-Кутты 4 порядка точности:

$$yRK4 := \operatorname{rkfixed}(y, t_0, T, N, f)$$

входные параметры:

y - вектор начальных значений;

t_0- начальная точка отрезка;

T - конечная точка отрезка;

N - число узлов сетки;

f - функция правой части. Функция rkfixed возвращает матрицу, первый столбец которой содержит узлы сетки, а второй - приближенное решение в этих узлах.

Точное решение: $i := 0..N$ $\quad t_i := t_0 + i \cdot h$ $\quad yt_i := Y(t_i)$

Точки сетки: $t =$

	0
0	0
1	0.1570796327
2	0.3141592654
3	0.471238898
4	0.6283185307
5	0.7853981634
6	0.9424777961
7	1.0995574288
8	1.2566370614
9	1.4137166941
10	1.5707963268

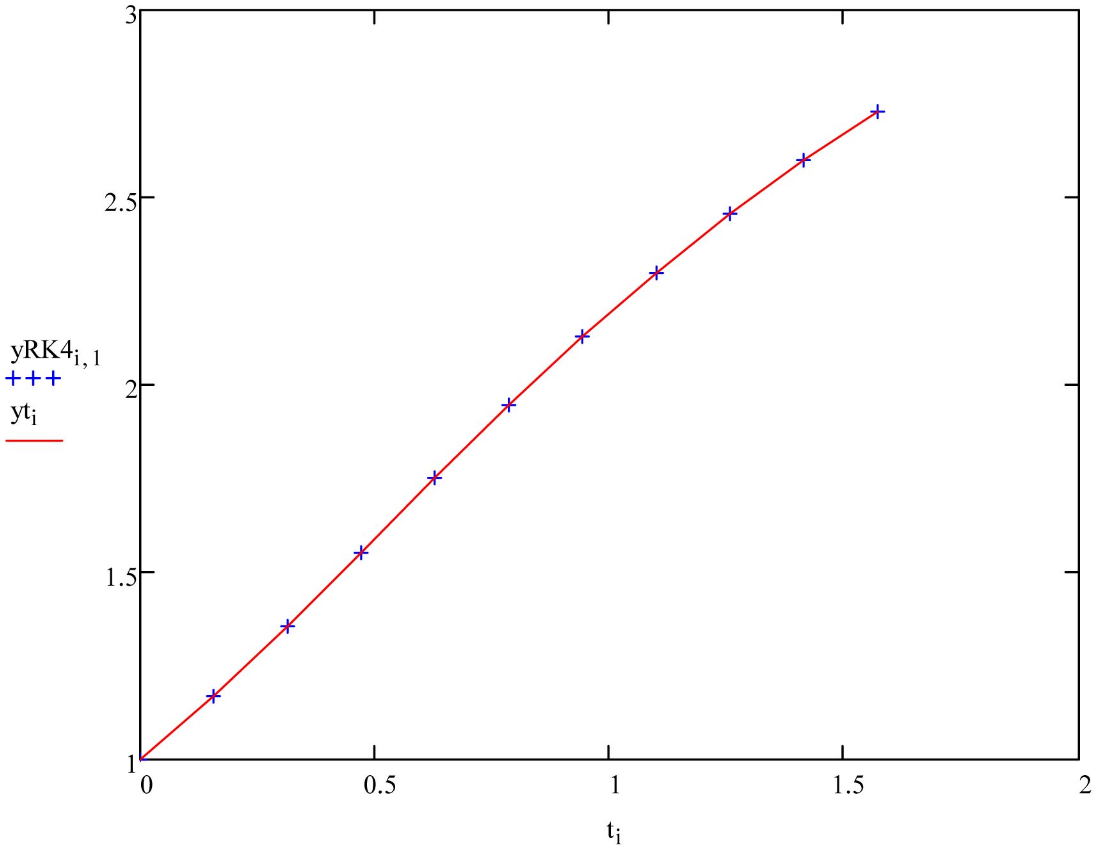
Точное решение: $yt =$

	0
0	1
1	1.1686000571
2	1.3558055742
3	1.5532898179
4	1.7523927085
5	1.9459956532
6	2.1293015522
7	2.2997052535
8	2.4562531843
9	2.5990628989
10	2.7288624076

Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка: $yRK4 =$

	0	1
0	0	1
1	0.1570796327	1.1685999555
2	0.3141592654	1.3558049763
3	0.471238898	1.5532882488
4	0.6283185307	1.7523899589
5	0.7853981634	1.9459918092
6	0.9424777961	2.1292968349
7	1.0995574288	2.2996998833
8	1.2566370614	2.4562473283
9	1.4137166941	2.5990566693
10	1.5707963268	2.7288558767

Графики приближенного и точного решений:



Расчетные формулы методов

Метод Эйлера-Коши

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) \right].$$

Усовершенствованный метод Эйлера

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \boldsymbol{y}_i)\right).$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k1} + 4 \cdot \boldsymbol{k2} + \boldsymbol{k3}), \text{ где}$$

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f(t_i + h, y_i - h \cdot k1 + 2h \cdot k2).$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II)

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k1} + 3 \cdot \boldsymbol{k3}), \text{ где}$$

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + h\frac{k1}{3}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + h\frac{2}{3}k2\right).$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III)

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{9}(2 \cdot \boldsymbol{k1} + 3 \cdot \boldsymbol{k2} + 4 \cdot \boldsymbol{k3}), \text{ где}$$

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + h\frac{3}{4}k2\right).$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k1} + 2 \cdot \boldsymbol{k2} + 2 \cdot \boldsymbol{k3} + \boldsymbol{k4})$, где

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k2}{2}\right), \quad \boldsymbol{k4} = f(t_i + h, y_i + h \cdot k3).$$

Правило Рунге *практической оценки погрешности (правило удвоенного пересчета):*

$$y(t_n) - y^{\frac{h}{2}}(t_n) \approx \frac{y^{\frac{h}{2}}(t_n) - y^h(t_n)}{2^m - 1}$$

Здесь m – порядок точности метода, а вычисления ведутся в узлах сетки t_n с шагом h.