Лабораторная работа № 3

Численное интегрирование и дифференцирование

для потоков А-1,2,3,15-19 и А-4,6,7,8,9,12-19 «Вычислительные методы»

Цель работы. Применить на практике простейшие численные методы вычисления интегралов и производных. Исследовать поведение погрешности методов при измельчении шага. Познакомиться с понятиями порядка точности и обусловленности (плохой/хорошей) задачи и их отражением в расчетах. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью.

Задача 1. Найти приближенные значения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и производной $f'(a)$, используя указанные в индивидуальном варианте методы. Организовать серию расчетов с шагами $h_k = (b-a)/10^k$ $(k = 1,2,\dots,15)$. Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Вычислить точное значение J интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
2. Реализовать программно составную формулу численного интегрирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения интеграла I_k для $k = 1,2,\dots,15$. Заполнить второй столбец таблицы.
3. Для каждого приближенного значения интеграла найти погрешность $\Delta_k = |J - I_k|$. Заполнить третий столбец таблицы.

Прим 1. Вычисления можно прекратить на том значении шага, при котором расчет занимает более 40 минут.

4. Вычислить точное значение D производной, подставив число a в формулу для $f'(x)$.
5. Реализовать программно формулу численного дифференцирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения производной d_k для $k = 1,2,\dots,15$. Заполнить 4-ый столбец таблицы.
6. Для каждого приближенного значения производной найти погрешность $\Delta_k = |D - d_k|$. Заполнить 5-ый столбец таблицы.

Прим 2. Все приближенные значения и их погрешности **<u>должны быть округлены</u>** по принятым правилам.

Таблица.

Шаг *h*	**Приближенное значение интеграла**	**Погрешность численного интегрирования**	**Приближенное значение производной**	**Погрешность численного дифференцирования**
$(b-a)/10$				
$(b-a)/10^2$				
…				
$(b-a)/10^{15}$				

7. Сделать выводы (отдельно для каждой из двух формул).
   1. Указать порядок точности формулы по h.
   2. Пользуясь заполненной таблицей, показать, что расчет подтверждает указанный порядок точности.
   3. Отметить, все ли данные соответствующего столбца можно использовать для анализа порядка точности.
   4. Указать шаг h, при котором достигается наилучшая точность.

5. Определить, проявилась ли в расчетах (и в чем именно) хорошая или плохая обусловленность метода.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

N	*f(x)*	*a*	*b*	Квадратурная формула	Формула численного дифференцирования
1	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	левых прямоугольников	левая
2	$\frac{1+\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	правая
3	$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$	1	3	правых прямоугольников	центральная
4	$\frac{\sin x(1+\cos x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$	0	$\frac{\pi}{2}$	трапеций	левая
5	$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$	0	2	левых прямоугольников	правая
6	$\mathrm{tg}\, x \ln\cos x$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	центральная
7	$\frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	правых прямоугольников	левая
8	$\frac{1}{2+\sqrt{5-4x}}$	-1	1	трапеций	правая
9	$x\cos^2 x$	0	$\frac{\pi}{2}$	левых прямоугольников	центральная
10	$(3x+2)\cos 3x$	0	$\frac{\pi}{3}$	центральных прямоугольников	левая
11	$(2x+3)4^{2x}$	0	1	правых прямоугольников	правая
12	$x\sin^2\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	трапеций	центральная
13	$(x^2+1)\sin 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	левых прямоугольников	левая
14	$(2x-1)\cos 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	правая
15	$(x^2-x)\sin\frac{\pi x}{2}$	0	1	правых прямоугольников	центральная
16	$e^{-x}(x^2-x)$	0	3	трапеций	левая

17	$(3x+1)\sin 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	левых прямоугольников	правая
18	$(2x-1)3^x$	0	1	центральных прямоугольников	центральная
19	$(x^2-1)e^{2x}$	1	2	правых прямоугольников	левая
20	$(x-2)e^{-2x}$	0	3	трапеций	правая
21	$\frac{\arccos 2x}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	левых прямоугольников	центральная
22	$\ln(x^2+1)$	0	1	центральных прямоугольников	левая
23	$x\,\mathrm{arctg}\,2x$	0	$\frac{1}{2}$	правых прямоугольников	правая
24	$\arccos\frac{x}{2}$	0	1	трапеций	центральная
25	$\frac{\cos x}{4+\sqrt{\sin x}}$	0	$\frac{\pi}{2}$	левых прямоугольников	левая

Задача 2. Повторить расчет интеграла из Задачи 1 с помощью квадратурной формулы Симпсона. Сравнить результаты с результатами Задачи 1 (с учетом порядков точности использованных формул). Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов. Вычислить значение интеграла из Задачи 1 с помощью составной квадратурной формул Симпсона с заданной в индивидуальном варианте точностью ε. (без разбиения отрезка интегрирования, см. алгоритм в Приложении). Предусмотреть возврат значения шага, на котором происходит выход из расчета.

Заполнить таблицу

Шаг *h*	**Приближенное значение интеграла**	**Погрешность численного интегрирования**
10^{-1}		
10^{-2}		
…		
$h=10^{-15}$		

Заполнить таблицу

Значение точности	**Точное значение *I***	**Приближенное значение *I***	**Абсолютная погрешность**	**Значение шага интегрирования**

Сделать выводы: сравнить значение шага, на котором достигнута заданная точность, с данными из предыдущей таблицы и объяснить, проявилось ли преимущество одной из формул над другой.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номера вариантов							ε
1	6	11	16	21	26	31	0.01
2	7	12	17	22	27	32	0.05
3	8	13	18	23	28	33	0.001
4	9	14	19	24	29	34	0.0001
5	10	15	20	25	30	35	0.005

Задача 3 *(для студентов, претендующих на оценку «отлично»).* Вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с помощью составной квадратурной формулы Симпсона с заданной в индивидуальном варианте точностью $\varepsilon = pe\text{-}k$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Разбить отрезок интегрирования на M отрезков.
2. На каждом отрезке применить алгоритм, разработанный в задаче 2
3. Сложить полученные результаты
4. Заполнить таблицу для значений M=2,3,4,5,6,7,8

Значение точности	**Точное значение *J***	**Приближенное значение *I***	**Абсолютная погрешность**	**Значение минимального из шагов интегрирования на отрезках**	**Число отрезков разбиения**

5. Сделать выводы:
   a) выбрать число отрезков, для которого достижение заданной точности фиксируется наибольшем из минимальных шагов для разных разбиений;
   b) выбрать параметр M, при котором достигнута наименьшая трудоемкость (по количеству вычислений интегрируемой функции) и объяснить, за счет чего произошла экономия действий.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

N	*f(x)*	*a*	*b*	**Точность** $\varepsilon = pe\text{-}k$
1	$\frac{x}{x^2+3x+2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	p=1, k= 9
2	$\frac{1}{x\sqrt{(1+x)^3}}$	0	2	p=1, k= 10
3	$\frac{x}{x^4-2x^2+5}$	3	8	p=1, k= 11
4	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	1	$\sqrt{3}$	p=1, k= 12
5	$\frac{1}{\sqrt{e^x+4}}$	4	9	p=2, k= 9
6	$\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x+1}}{1+x^2}$	$\ln 21$	$\ln 32$	p=2, k= 10
7	$x^3\sqrt{x^2-16}$	0	1	p=2, k= 11

8	$\dfrac{x}{\cos^2 x^2}$	4	5	p=2, k= 12
9	$\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$	p=3, k= 9
10	$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}$	$\dfrac{\pi^2}{9}$	π^2	p=3, k= 10
11	$\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^9 x}}$	0	2	p=3, k= 11
12	$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x+1)^2}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	p=3, k= 12
13	$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{3}$	p=4, k= 9
14	$\dfrac{1}{e^x(3+e^{-x})}$	15	80	p=4, k= 10
15	$\sqrt{16-x^2}$	0	$\ln 2$	p=4, k= 11
16	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	0	4	p=4, k= 12
17	$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	p=5, k= 9
18	$\dfrac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}$	0	3	p=5, k= 10
19	$\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}$	e^2	e^3	p=5, k= 11
20	$\dfrac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$	3	8	p=5, k= 12
21	$\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	p=6, k= 9
22	$x\,\mathrm{arctg}\,3x$	0	$\ln 5$	p=6, k= 10
23	$e^{-x}\sin 2x$	0	$\dfrac{1}{3}$	p=6, k= 11
24	$\mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}$	0	π	p=6, k= 12
25	$e^{2x}\cos x$	$\dfrac{1}{2}$	1	p=7, k= 9

Приложение

Квадратурные формулы и априорные оценки погрешностей для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Формула *<u>левых прямоугольников</u>:*

S= $h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$ *; априорная оценка погрешности* $\left|I-I^*\right| \le \frac{M_1(b-a)}{2}h$.

Формула *<u>правых прямоугольников</u>:*

S= $h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ *; априорная оценка погрешности* $\left|I-I^*\right| \le \frac{M_1(b-a)}{2}h$.

Формула *<u>центральных прямоугольников</u>:*

S= $h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$ *; априорная оценка погрешности* $\left|I-I^*\right| \le \frac{M_2(b-a)}{24}h^2$.

Формула *<u>трапеций*</u>:*

S= $h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$*; априорная оценка погрешности* $\left|I-I^*\right| \le \frac{M_2(b-a)}{12}h^2$.

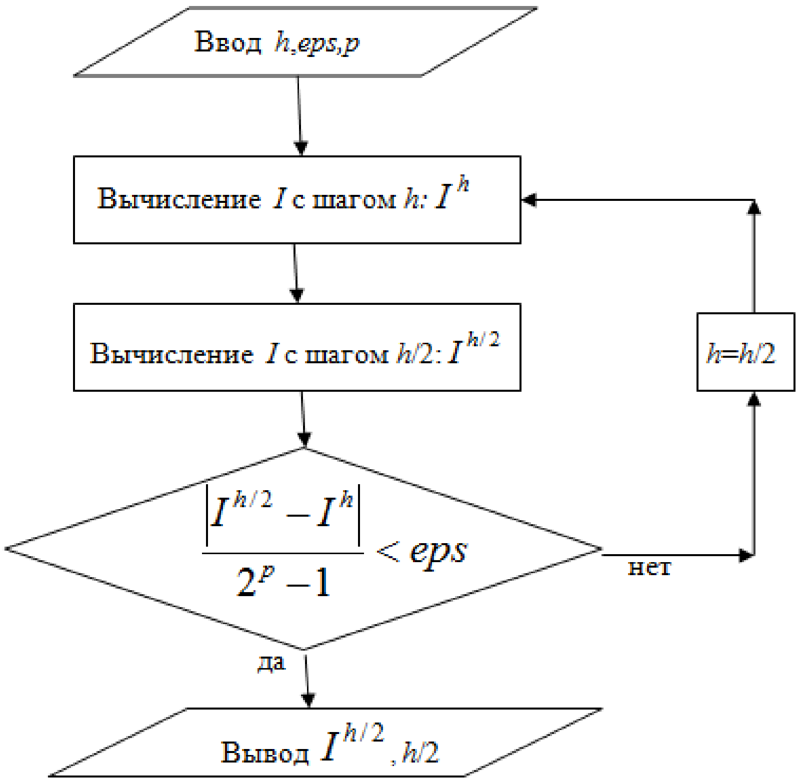
Формула *<u>Симпсона*</u>:*

S= $\frac{h}{6}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})\right)$;

априорная оценка погрешности $\left|I-I^*\right| \le \frac{M_4(b-a)}{2880}h^4$.

<u></u> - при использовании Mathcad нужно предусмотреть отдельный расчет для элементарной формулы*

Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью (для Задачи 2)



Пример вычисления определенного интеграла с помощью библиотек на Python

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Доверенный Python 3

Запуск Код

В [16]:

```python
from scipy import integrate
from math import cos, pi

def f(x):
    return 1.0/cos(x)
J = integrate.quad(f, 0, pi/4)
print(J)
```

```
(0.881373587019543, 9.785212496055606e-15)
```