А-08-19
Балашов С.А.

Типовой расчёт №24

Численно решить задачу Коши для ОДУ 1-го порядка на отрезке $[t_0, t_0+0{,}8]$ с шагом $h=0{,}2$: а) методом Эйлера
б) методом Рунге-Кутты 2-го порядка

$$\begin{cases} f(t,y) = -y\,tg\,t + 2t\cos t, & [0; 0{,}8] \\ y(0)=2 \end{cases}$$

а) Метод Эйлера: $y_{n+1} + h\cdot f(t_n, y_n)$

$y_1 = y_0 + h\cdot f(t_0,y_0) = 2+0{,}2\left(-2\cdot tg(0)+2\cdot 0\cdot\cos(0)\right) = 2$

$y_2 = y_1 + h\cdot f(t_1,y_1) = 2+0{,}2\left(-2\cdot tg(0{,}2)+2\cdot 0{,}2\cdot\cos(0{,}2)\right) =$
$= 1{,}997321$

$y_3 = y_2 + h\cdot f(t_2,y_2) = 1{,}997321+0{,}2\left(-\overset{1{,}997321}{\cancel{2}}\cdot tg(0{,}4)+2\cdot 0{,}4\cdot\cos(0{,}4)\right) =$
$= 1{,}975800$

$y_4 = y_3 + h\cdot f(t_3,y_3) = 1{,}9758+0{,}2\left(-1{,}9758\cdot tg(0{,}6)+2\cdot 0{,}6\cdot\cos(0{,}6)\right) =$
$= 1{,}903537$

$$y_{\partial}^{0,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1{,}997321 \\ 1{,}975800 \\ 1{,}903537 \end{pmatrix}$$

б) Метод Рунге-Кутты 2-го порядка:

$y_{n+1} = y_n + h\cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$

$y_1 = y_0 + h\cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right) = 2 + 0{,}2 f(0{,}1; 2) =$

$= 2 + 0{,}2\left(-2\,tg(0{,}1) + 2\cdot 0{,}1\cdot\cos(0{,}1)\right) = 1{,}999666$

$y_2 = y_1 + h\cdot f\left(t_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{h}{2} f(t_1; y_1)\right) = 1{,}999666 + 0{,}2\cdot f(0{,}3;$

$1{,}999666 + 0{,}1 f(0{,}2; 1{,}999666)) = 1{,}999666 + 0{,}2 f(0{,}3; 1{,}998333)$

$= 1{,}999666 + 0{,}2\left(-1{,}998333\,tg(0{,}3) + 2\cdot 0{,}3\cdot\cos(0{,}3)\right) = 1{,}990675$

$y_3 = y_2 + h\cdot f\left(t_2 + \frac{h}{2}; y_2 + \frac{h}{2} f(t_2; y_2)\right) = 1{,}990675 + 0{,}2\cdot f(0{,}5; 1{,}990675 +$

$+ 0{,}1 f(0{,}4; 1{,}990675)) = 1{,}990675 + 0{,}2\cdot f(0{,}5; 1{,}980195) =$

$= 1{,}990675 + 0{,}2\left(-1{,}980195\,tg(0{,}5) + 2\cdot 0{,}5\cdot\cos(0{,}5)\right) = 1{,}949834$

$= y_4 = y_3 + h f\left(t_3 + \frac{h}{2}; y_3 + \frac{h}{2} f(t_3; y_3)\right) = 1{,}949834 + 0{,}2 f(0{,}7; 1{,}949834 +$

$+ 0{,}1 f(0{,}6; 1{,}949834)) = 1{,}949834 + 0{,}2 f(0{,}7; 1{,}915479) =$

$= 1{,}949834 + 0{,}2\left(-1{,}915479\,tg(0{,}7) + 2\cdot 0{,}7\cdot\cos(0{,}7)\right) = 1{,}841313$

$$y^{0,2}_{RK2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}999666 \\ 1{,}990675 \\ 1{,}949834 \\ 1{,}841313 \end{pmatrix}$$

• Точное решение задачи Коши:

$y' = -y\,tg(t) + 2t\cos(t)$

$y(t) = C_1\cos(t) + t^2\cos(t)$ при $y_0 = 2$ $C_1 = 2$ =>

=> $y(t) = 2\cdot\cos(t) + t^2\cos(t)$

· Оценка погрешности методов по правилу Рунге:

$h_2 = 0,4$

а) $y_1 = y_0 + h_2 f(t_0, y_0) = 2 + 0,4(-2 \cdot tg(0) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0)) = 2$

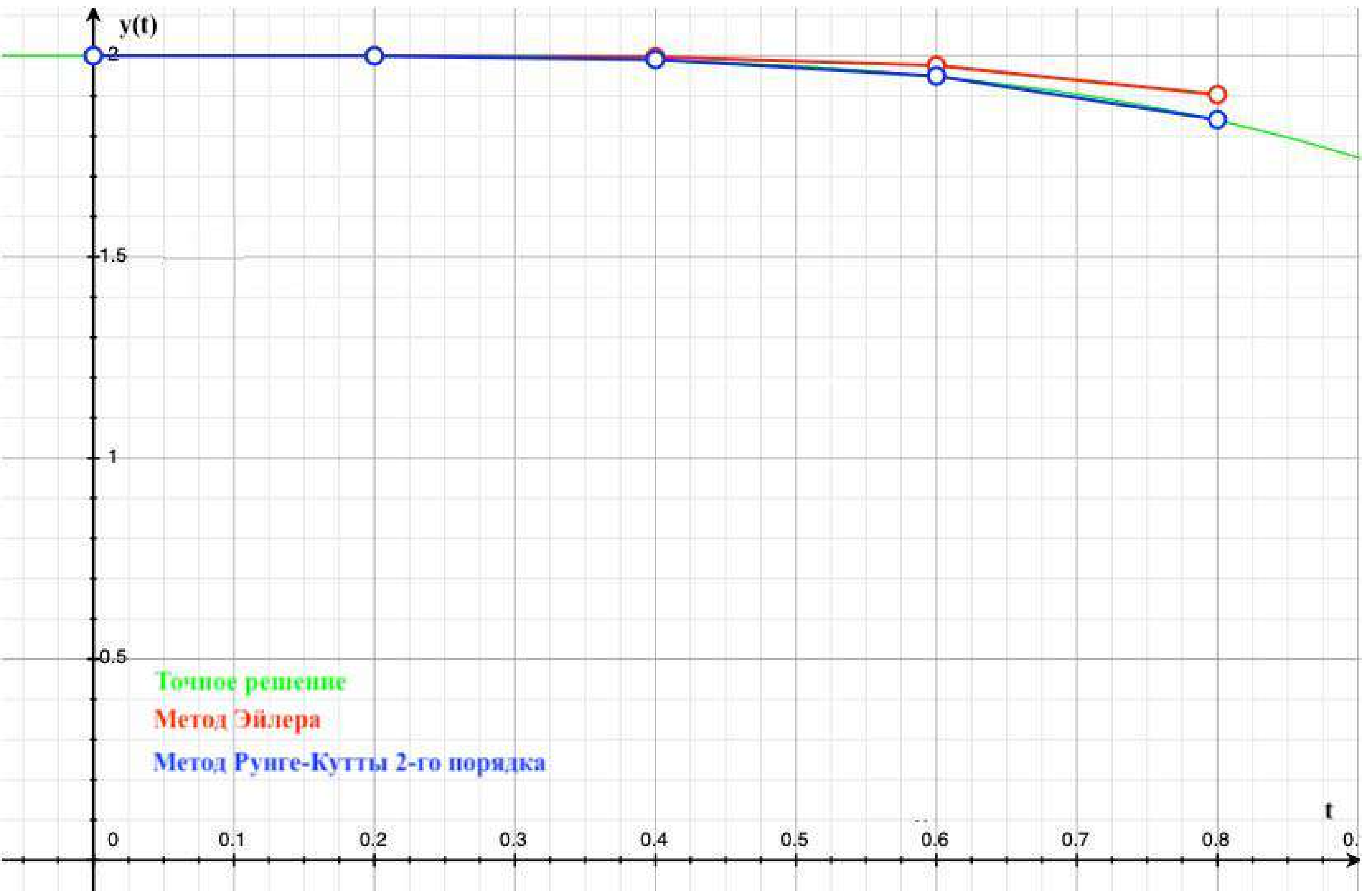
$$R \approx \frac{|y_э^{0,2} - y_э^{0,4}|}{2^1 - 1} = \frac{|1,997321 - 2|}{1} = 0,002679$$

б) $y_1 = y_0 + h_2 f\left(t_0 + \frac{h_2}{2}; y_0 + \frac{h_2}{2} f(t_0; y_0)\right) = 2 + 0,4 f(0,2; 2 +$

$+ 0,2 f(0; 2)) = 2 + 0,4 f(0,2; 2) = 2 + 0,4(-2\,tg(0,2) + 2 \cdot 0,2 \cdot \cos(0,2)) =$

$= 1,994643$

$$R \approx \frac{|y_{RK2}^{0,2} - y_{RK2}^{0,4}|}{2^2 - 1} = \frac{|1,990675 - 1,994643|}{3} = 0,00132267$$



y(t)
2
1.5
1
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
t
Точное решение
Метод Эйлера
Метод Рунге-Кутты 2-го порядка