

# ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## Основные понятия, классификация электрических цепей

**Электротехника или теория цепей – это предмет, связанный с системами, которые производят, передают, преобразуют, измеряют и потребляют электрическую энергию и информацию.**

*По назначению* электрические цепи можно разделить на:

- **энергетические**, предназначенные для генерации, передачи и потребления электрической энергии,
- **информационные**, предназначенные для передачи и обработки информации, носителями которой являются электрические сигналы (цепи ЭВМ, техники связи, автоматического управления, информационно-измерительные и т.д.).

*По типу используемых напряжений и токов* цепи разделяют на:

- **аналоговые**, в которых токи и напряжения определены на непрерывных множествах моментов времени  $t \in T$ , где  $T$  – интервал определения переменных, который может быть конечным или бесконечным. Различают:
  - цепи постоянного тока и напряжения,
  - цепи переменного тока и напряжения;
- **дискретные**, в которых токи и напряжения определены только в некоторых дискретных точках оси  $t$  либо на множестве коротких интервалов времени  $t$ ;
- **цифровые**, у которых напряжения и токи дискретны и округлены конечным числом разрядов в соответствии с длиной машинного слова;
- **дискретно-аналоговые и цифро-аналоговые**, в которых часть переменных являются аналоговыми, а часть дискретными или цифровыми.

*По типу элементов*, образующих цепь, цепи разделяются на:

- **активные**, которые могут генерировать электрическую энергию;
- **пассивные**, которые только потребляют (рассеивают или накапливают) энергию;
- цепи *с сосредоточенными параметрами*, описываемые обыкновенными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, напряжения и токи которых зависят только от времени и не зависят от пространственных координат;
- цепи *с распределенными параметрами*, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных и алгебраическими уравнениями, в которых переменные являются функциями времени и пространственных координат;

- **линейные**, параметры элементов которых не зависят от режима цепи (т.е. от токов и напряжений), и описываются линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями;
- **нелинейные**, параметры элементов которых зависят от режима цепи и описываются нелинейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями;
- **параметрические** (стационарные) или непараметрические (нестационарные), параметры элементов, которых зависят (или не зависят) от времени;
- **детерминированные** (недетерминированные), у которых параметры или переменные являются неслучайными (случайными, стохастическими) величинами или функциями;
- **взаимные** (невзаимные), удовлетворяющие следующему условию: пусть в ветви  $m$  имеется источник сигнала, в ветви  $n$  измеряется реакция на этот сигнал, тогда при включении такого же сигнала в ветвь  $n$  реакция в ветви  $m$  будет совпадать реакцией в ветви  $n$ .

Практически электрическая цепь может принадлежать тому или иному классу при определенной идеализации; при этом существенное значение имеет диапазон изменения переменных, скорость их изменения, необходимая точность исследования и т.д./

### Интегральные величины, характеризующие процессы в электрических цепях – ток, напряжение, ЭДС

**Электрическая цепь – совокупность устройств, образующих пути для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении.**

Уравнения электрической цепи с использованием интегральных величин могут быть записаны при условии, что цепь рассматривается как **совокупность элементов**, которые характеризуются интегральными параметрами, устанавливающими количественную связь между величинами. Основой такого описания служит способность элемента к накоплению (концентрации) электрической или магнитной энергии и преобразованию ее в другие виды. **Компонентным уравнением элемента** электрической цепи называется уравнение, связывающее ток и напряжение рассматриваемого элемента цепи.

**Электрическим полем** называют одну из сторон электромагнитного поля характеризующуюся воздействием на заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

**Напряженность электрического поля  $E$**  - векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля.

**Электрическое напряжение** – это физическая величина, характеризующая электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равная линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль рассматриваемого пути:

$$u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Электрическое напряжение в безвихревом электрическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и называется **разность электрических потенциалов**:  $\varphi_A - \varphi_B = u_{AB} [B]$

$$\varphi_A - \varphi_B = u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

**Электрический потенциал** заданной точки зависит от выбора точки нулевого потенциала и определяется как  $\varphi_A - \varphi_P = \int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l}$  при условии, что

$$\varphi_P = \int_P^P \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Напряжение  $\varphi_A - \varphi_B = u_{AB} [B]$  - работа по переносу заряда из т.А в т.В.

За положительное направление напряжения принято направление убывающего потенциала.

**Электрический ток  $i(t)$  [А]**-скалярная величина, связанная со скоростью изменения заряда  $q$  во времени.

$i(t) = \frac{dq}{dt}$  - мгновенное значение тока. За положительное направление тока

принято направление движения положительных зарядов.

**Магнитная индукция  $B$** - векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны магнитного поля.

Поток вектора магнитной индукции сквозь некоторую поверхность  $S$  называют **магнитным потоком**:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{s}.$$

Единицей магнитного потока служит [Вб] – (Вебер). При изменении магнитного потока в контуре индуцируется **ЭДС индукции** (закон электромагнитной индукции):

$$e_{\text{инд}} = \oint_l \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как величина этой ЭДС зависит от потока сквозь замкнутую поверхность, то эту поверхность делают многослойной (катушка) и вводят расчетное понятие **потокосцепления**  $\Psi = w \cdot \Phi$ , где  $w$  – число поверхностей (витков катушки). Тогда для индуцируемой ЭДС  $e_{\text{инд}} = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$ . Знак

«минус» в выражении для индуцированной ЭДС свидетельствует о том, что эта ЭДС стремится вызвать токи, направленные таким образом, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока. Это положение выражает сформулированный Ленцем **принцип электромагнитной инерции (правило Ленца)**.

В **потенциальных полях** линейный интеграл напряженности электрического поля по любому контуру (замкнутому пути) равен нулю. Это не относится к областям пространства, в которых расположены **источники электродвижущих сил – ЭДС**. Появление ЭДС связано с наличием электрических полей непотенциального характера («сторонних» полей). В замкнутом контуре действует электродвижущая сила  $e$ , если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль контура не равен нулю:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = e.$$

Источниками ЭДС могут являться электрические генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы. Введением понятия ЭДС определяется работа сторонних (не электрических) сил, ЭДС равна разности потенциалов или напряжению на зажимах элемента при разомкнутой внешней цепи.

Единицей электрического напряжения, электрического потенциала и ЭДС в системе СИ является [В] – (Вольт).

### **Основные задачи теории цепей:**

К основным задачам, которые решаются методами теории цепей, относятся:

1. **Анализ цепей.** При анализе электрических цепей обычно известны схема цепи, параметры элементов схемы (двухполюсных и многополюсных) и требуется в общем случае найти напряжения, токи, мощности, энергию (генерируемую, накапливаемую, рассеиваемую).

Источники ЭДС и токов могут быть **постоянными, гармоническими, периодическими, негармоническими, непериодическими**.

Проводят расчет **установившихся режимов** (при действии постоянных, гармонических и периодических источников ЭДС и токов) и расчет **переходных процессов**. Различают **анализ во временной и частотной областях**. Во временной области необходимые переменные рассчитываются как функции времени (непрерывного или дискретного). В частотной области интерес представляют частотные характеристики (амплитудно – и фазо-частотные и др.). Для расчета используют также **комплексную область**

(расчет гармонических токов и напряжений комплексным методом), **операторную область** (расчет переходных процессов операторным методом).

Весьма важным как для линейных, так и для нелинейных цепей является анализ их устойчивости. В неустойчивых схемах возникают непредусмотренные режимы, например, возрастающие по амплитуде паразитные колебания, при которых схема не выполняет необходимые функции или разрушается.

**2. Синтез цепей.** Эта задача является обратной по отношению к задаче анализа и решается при проектировании новых устройств. Различают синтез в частотной и временной областях. При этом соответственно задаются необходимые частотные или временные характеристики и допустимые их отклонения, по которым требуется определить схему цепи и параметры элементов схемы, а также возможно допуски (допустимые отклонения параметров).

Определение параметров схемы называют **параметрическим синтезом**. Синтез линейных схем существенно отличается от синтеза нелинейных схем. Задача синтеза линейных схем решается в два основных этапа. Первый этап – аппроксимация заданных характеристик некоторыми схемными функциями – частотными или временными – с необходимой точностью. Второй этап – схемная реализация найденных схемных функций в определенном элементном базисе.

Задача синтеза отличается от задач анализа тем, что оба этапа решения задачи синтеза не имеют единственного решения – имеется множество решений; кроме того, решение может не существовать. В этом случае приходится изменять заданные требования. Задача анализа линейных цепей, как правило, имеет единственное решение. Решение не существует только в одном случае – когда в схеме имеются контуры из источников ЭДС или (и) сечения из источников тока. При анализе нелинейных цепей возможны многозначные решения (несколько режимов). Следует отметить, что при синтезе линейных схем, определяемые передаточные функции должны обладать условиями физической реализации, т.е. определенным свойствам при заданном элементном базисе. Эти свойства находятся методами анализа цепей.

При синтезе возможно применение еще одного этапа – параметрической оптимизации, чтобы удовлетворить некоторым практическим критериям (точности, требованиям к массогабаритным характеристикам и т.д.).

После выполнения синтеза найденная схема подвергается анализу, чтобы определить соответствие заданных и реализованных характеристик. В настоящее время все этапы анализа и синтеза выполняются с помощью ЭВМ. Анализ на ЭВМ часто называют **численным моделированием** или вычислительным экспериментом.

**Электрическая цепь – совокупность устройств, образующих пути для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении.**

Уравнения электрической цепи с использованием интегральных величин могут быть записаны при условии, что цепь рассматривается как **совокупность элементов**, которые характеризуются интегральными параметрами, устанавливающими количественную связь между величинами. Основой такого описания служит способность элемента к накоплению (концентрации) электрической или магнитной энергии и преобразованию ее в другие виды/

**Компонентным уравнением элемента** электрической цепи называется уравнение, связывающее ток и напряжение рассматриваемого элемента цепи и не зависящее от способа их соединения.

Основными элементами электрических цепей являются **источники** электромагнитной энергии, **устройства для передачи и преобразования** электромагнитной энергии и **приемники** этой энергии.

**Источниками электромагнитной энергии** являются различные устройства для генерации электромагнитной энергии, т.е. преобразования различных видов энергии в электрическую. К химическим источникам относятся гальванические элементы и батареи, аккумуляторные элементы и батареи, электрохимические генераторы (топливные элементы). Физическими источниками являются электромашинные генераторы (турбо –, гидро –, дизель – генераторы), МГД –генераторы, термоэлектрические генераторы и генераторы, преобразующие энергию солнечного излучения, атомного распада и другие

**Приемники** осуществляют преобразование электромагнитной энергии в энергию другого вида: в электродвигателях – в механическую, в электролизерах и заряжаемых аккумуляторах – в химическую, в электрических печах и нагревательных устройствах – в теплоту, в радиоприемниках – в акустическую энергию и т.д.

В электрической цепи источники и приемники соединяются с помощью линий электропередачи, кабелей, шин (**проводов**), которые обеспечивают передачу электромагнитной энергии.

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условное изображение ее участков и отражающее их соединение, называют **схемой электрической цепи**.

**Схема замещения ЭЦ** – это математическая модель реального устройства, учитывающая **физические процессы** происходящие в реальном устройстве.

Математическая модель отображает свойства цепи **при определенных условиях** и облегчает изучение процессов в ней.

Часть электрической цепи, в которой действуют источники, называют **активной частью** и обычно обозначают прямоугольником с буквой **А**.

Часть электрической цепи, в которой нет источников, называют **пассивной частью** и обычно обозначают прямоугольником с буквой **П**. Элементы цепи могут быть **двухполюсными** или **многополюсными**. Здесь под полюсом понимается зажим (вывод) к которому присоединяются другие элементы.

В схемах выделяются **ветви** – участки, характеризуемые одним и тем же током в начале и конце, и **узлы** – граничные (концевые) точки ветвей, к которым присоединяют другие ветви. Напряжения ветвей равны разности потенциалов их узлов. Ветвям и узлам схемы, как правило, соответствуют ветви и узлы реальной цепи.

Ветви и узлы – **топологические понятия** (т.е. отражающие некоторые свойства соединений в схеме).

**Топологические уравнения** описывают способ соединения компонентов и не зависят от компонентов схемы.

Рассмотрим **линейные цепи**

- 1) с сосредоточенными параметрами;
- 2) в установившемся режиме при действии источников постоянных ЭДС или токов.

## Глава 2. Линейные электрические цепи постоянного тока

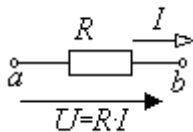
### 2.1 Основные элементы линейных электрических цепей постоянного тока.

Элементами электрических цепей постоянного тока являются **линейные резисторы** и **линейные источники**.

! При анализе установившихся режимов при действии источников постоянных ЭДС или токов для обозначения используют буквы  $I$ ,  $U$ ,  $E$ ,  $J$ .

**Резистор** – это математическая модель устройства, в котором энергия электромагнитного поля преобразуется в тепло.

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления.



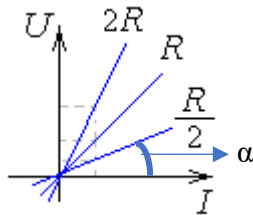
Для линейного резистора **компонентное уравнение** (зависимость между напряжением и током) определяется **законом Ома**:  $U=R \cdot I$ .

Параметром резистивного элемента является значение **сопротивления**  $R$  [Ом]. В качестве параметра резистивного элемента может быть задано как

сопротивление  $R$  [Ом], так и величина ему обратная – **проводимость**  $G = 1/R$  [См] – (Сименс). Компонентное уравнение  $I = G \cdot U$ .

**!** В пассивном элементе за **условно-положительное направление электрического тока  $I$**  принято направление от большего потенциала  $\varphi_a$  к меньшему потенциалу  $\varphi_b$ ,  $\varphi_a > \varphi_b$ . При расчетах электрических цепей условно-положительные направления токов и напряжений на каждом резисторе принимают совпадающими.

Зависимость напряжения от тока  $U(I)$  или тока от напряжения  $I(U)$  (**вольт-амперная характеристика, ВАХ**) для резистора – прямая линия, проходящая через начало координат.



При увеличении сопротивления увеличивается угол наклона прямой  $U(I)$ .

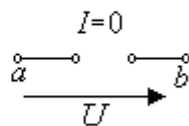
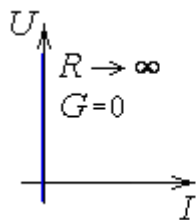
$$\operatorname{tg} \alpha = R$$

Рассчитаем мощность, потребляемую резистором

$$P(t) = U(t) \cdot i(t) = Ri^2(t) > 0$$

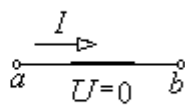
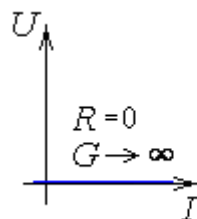
**Резистор – пассивный элемент**, при нулевом токе и конечном сопротивлении напряжение на резисторе также равно нулю.

При  $R \rightarrow \infty$  проводимость  $G=0$ , компонентное уравнение имеет вид  $I = 0 \cdot U = 0$  при любом напряжении на элементе.



Пассивный участок с нулевой проводимостью называют «**разомкнутый**» и изображают с разрывом.

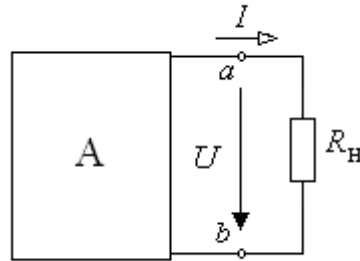
При  $R=0$  (идеализированный случай, на данном участке пренебрегают его электрическим сопротивлением) компонентное уравнение имеет вид  $U = 0 \cdot I = 0$  при любом токе в элементе.



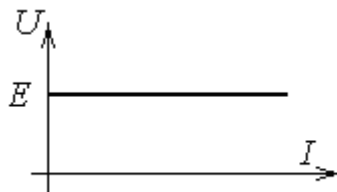
Пассивный участок с нулевым сопротивлением называют «**короткозамкнутый**» и изображают как провод, при этом  $\varphi_a = \varphi_b$ .



В схемах электрических цепей используют два типа идеальных источников энергии – **идеальный источник напряжения (ЭДС)** и **идеальный источник тока**. Для исследования свойств активного элемента двухполюсника построим внешнюю характеристику  $U(I)$  источника при изменении сопротивления нагрузки (приемника) – **нагрузочную характеристику**.



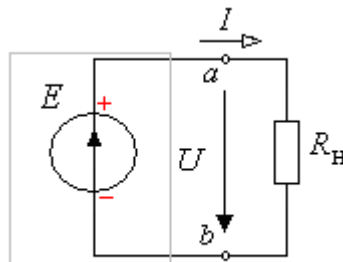
Для идеального источника напряжения (ЭДС) напряжение не зависит от тока в источнике. Нагрузочная характеристика – прямая, параллельная оси тока.



Напряжение равно ЭДС при нулевом токе (при  $R_H \rightarrow \infty$ ).

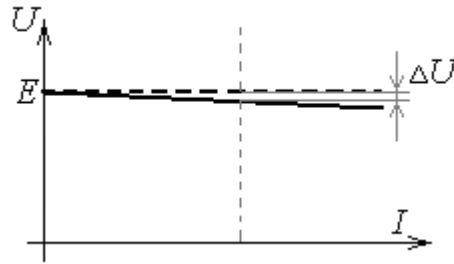
**Компонентное уравнение  $U=E$ .**

Условное обозначение при выбранном условно-положительном направлении тока и напряжения имеет вид

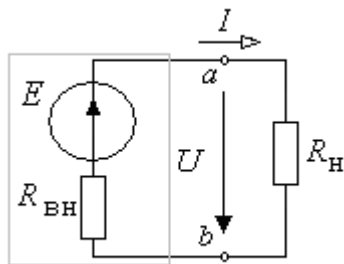


Внутренняя стрелка источника ЭДС  $E$  однозначно определяет больший потенциал («+»), соответственно напряжение  $U$  на идеальном источнике численно равно  $E$ , но направлено от большего потенциала к меньшему, т.е. против стрелки ЭДС.

Внешняя характеристика **реального источника напряжения** отличается от характеристики идеального источника напряжения:



Только при нулевом токе  $U(0)=E$ , это напряжение называют **напряжением холостого хода**, все переменные, соответствующие холостому ходу помечают индексом «хх», «р» или «0»: обозначают  $U_{хх}$  или  $U_p$ . При ненулевом токе напряжение на элементе отличается от  $E$  на  $\Delta U$ , чем больше ток, тем меньше напряжение на элементе. В качестве **модели реального источника** можно принять идеальный источник ЭДС, последовательно соединенный с резистором. Сопротивление резистора схемы замещения называют **внутренним сопротивлением** реального источника напряжения  $R_{вн}$ . При этом  $\Delta U = R_{вн} \cdot I$ .



**Компонентное уравнение** реального источника:  $U = E - \Delta U$ ,  
 $U = E - R_{вн} \cdot I$ .

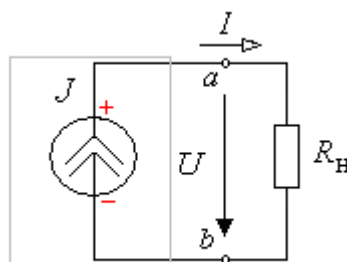
**Для идеального источника тока ток не зависит от напряжения на его зажимах.** Нагрузочная характеристика – прямая, параллельная оси напряжения.



Ток в ветви с источником тока равен току источника  $J$ .

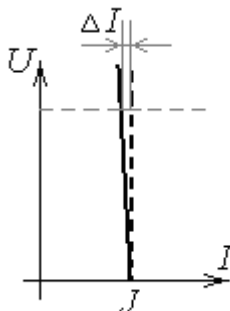
**Компонентное уравнение**  $I = J$ .

Условное обозначение при выбранном условно-положительном направлении тока и напряжения имеет вид:

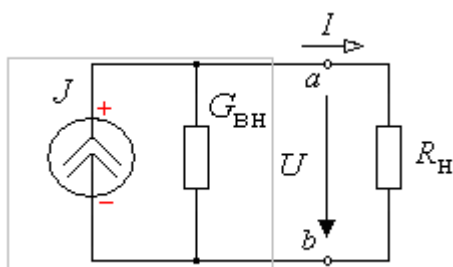


! Напряжение  $U$  на идеальном источнике тока численно равно разности потенциалов  $U = \varphi_a - \varphi_b$ .

Внешняя характеристика **реального источника тока** отличается от характеристики идеального источника тока:



При ненулевом напряжении ток на элементе отличается от  $J$  на  $\Delta I$ , чем больше напряжение, тем меньше ток. В качестве **модели реального источника** можно принять идеальный источник тока, параллельно соединенный с резистором. Сопротивление резистора схемы замещения называют **внутренним сопротивлением** реального источника тока  $R_{вн}$ . При этом  $\Delta I = U / R_{вн} = G_{вн} \cdot U$ .



**Компонентное уравнение** реального источника:  $I = J - \Delta I$ ,  
 $I = J - G_{вн} \cdot U$

При нулевом напряжении  $I(0) = J$ , такой ток называют **током короткого замыкания**, все переменные, соответствующие короткому замыканию, помечают индексом «кз» или «к»: обозначают  $I_{кз}$  или  $I_k$ .

! Для идеального источника напряжения  $R_{вн} = 0$ , схема замещения нулевого источника напряжения ( $E = 0$ ) – короткозамкнутая ветвь (**провод**).

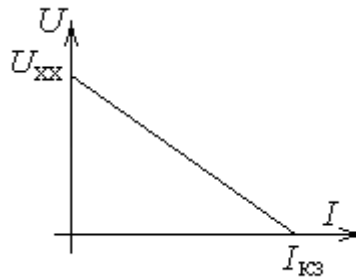
• Для идеального источника тока  $G_{вн} = 0$  ( $R_{вн} \rightarrow \infty$ ), схема замещения нулевого источника тока ( $J = 0$ ) – разомкнутая ветвь (**разрыв**).

Если при изменении сопротивления приемника сохраняется условие

$R_{вн} \ll R_n$ , то для реального источника напряжения режим короткого замыкания является аварийным (недостижимым); для реального источника тока при выполнении условия  $R_{вн} \gg R_n$  недостижимым является режим

холостого хода. Для идеальных источников это условие выполняется автоматически.

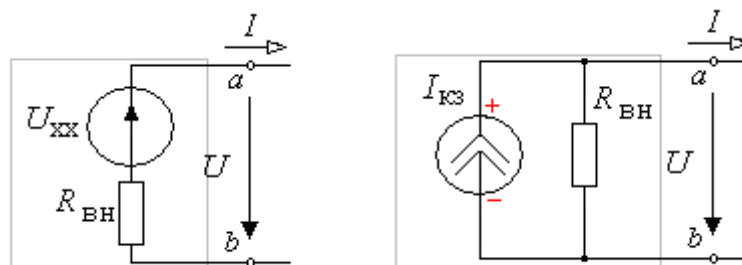
Внешняя характеристика линейного источника (**активного двухполюсника**) может иметь вид:



В этом случае напряжение холостого хода и ток короткого замыкания связаны соотношением  $U_{XX} = R_{BH} \cdot I_{КЗ}$  и находятся в диапазоне изменения напряжения и тока (граничные значения).

Используют **две схемы замещения** такого реального источника или активного двухполюсника: **последовательную** и **параллельную**. Эти схемы замещения являются **эквивалентными** (т.е. во внешней части цепи токи и напряжения будут одинаковыми при использовании последовательной или параллельной схем замещения).

Два источника называются **эквивалентными**, если у них одинаковые внешние характеристики. При этом  $R_{BH} = \frac{1}{G_{BH}}, U_{XX} = U_P = R_{BH} I_{КЗ}$



### Компонентное уравнение

$U = U_{XX} - R_{BH} \cdot I$  соответствует последовательной схеме замещения,

$I = I_{КЗ} - U/R_{BH}$  или  $I = I_{КЗ} - G_{BH} \cdot U$  параллельной схеме замещения.

Выбор схемы замещения определяется **рабочим участком нагрузочной характеристики** источника, т.е. диапазоном изменения тока и напряжения. Внешние характеристики реальных источников могут быть нелинейными, но они часто аппроксимируются линейными зависимостями.

Рассчитаем мощность источника

$$P = U \cdot I = (E - R_{BH} \cdot I) \cdot I = E \cdot I - R_{BH} \cdot I^2$$

Определим максимальную мощность

$$\frac{dP}{dt} = E - 2R_{BH} \cdot I = 0, \text{ тогда ток } I = \frac{E}{2R_{BH}}$$

$$P_{MAX} = U \cdot I = (E - R_{BH} \frac{E}{2R_{BH}}) \cdot \frac{E}{2R_{BH}} = \frac{E^2}{4R_{BH}}$$

$$P_{MAX} = U \cdot I = (E - R_{BH} \frac{E}{2R_{BH}}) \cdot \frac{E}{2R_{BH}} = \frac{E^2}{4R_{BH}}$$

максимальная мощность

выделяется в цепи с согласованной нагрузкой, те  $R_H = R_{BH}$ .