МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.П. ЕРЕМЕЕВ

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие
по курсам
«Теория игр и исследование операций», «Теория принятия решений»
для студентов, обучающихся по специальностям
«Прикладная математика и информатика»,
«Информатика и вычислительная техника»,
«Информационные системы и технологии»,
направлениям «Прикладная математика и информатика»,
«Информатика и вычислительная техника»

Москва Издательство МЭИ 2006

УДК
519
Е 70
УДК 007.681.518.5.001.63(072)

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия для студентов

Подготовлено на кафедре прикладной математики

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор А.Б. Фролов;
зам. директора ГУ РосНИИИТ и АП, лауреат премии Президента РФ в области образования, действительный член РАЕН, д.т.н., проф. Э.В. Попов;
лауреат премии Президента РФ в области образования, действительный член РАЕН, д.т.н., проф. В.Н. Вагин.

Еремеев А.П.
Е70 Теоретико-игровые методы принятия решений: Учебное пособие / А.П. Еремеев – М.: Издательство МЭИ, 2006. – 50 с.
ISBN 5-7046-1383-7

Рассматриваются теоретико-игровые методы принятия решений в конфликтных ситуациях. Основное внимание уделяется игре двух лиц с нулевой суммой (парной антагонистической игре), представленной деревом игры и в матричном виде. Рассматриваются методы поиска решения в случае чистых и смешанных стратегий. Описываются методы решения для игры двух лиц с произвольной суммой (биматричной игры), а также методы теории статистических решений для так называемых игр с «природой» и игр с упорядоченными исходами при наличии ряда критериев.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика» (010500, 010501), «Информатика и вычислительная техника» (230100), «Информационные системы и технологии» (230201) и направлениям «Прикладная математика и информатика», «Информатика и вычислительная техника» и изучающих дисциплины «Теория игр и исследование операций», «Теория принятия решений», а также выполняющих курсовые, научно-исследовательские, выпускные работы по тематике автоматизации процессов принятия решений. Пособие будет полезно аспирантам, научным сотрудникам и специалистам, занимающимся вопросами проектирования компьютерных систем принятия и поддержки принятия решений.

ISBN 5-7046-1383-7

«…существует строгий подход к вопросам, охватывающим проблемы совпадающих или противоположных интересов, полной или неполной информации, свободных разумных решений или случайных воздействий..»

Джон фон Нейман,
Оскар Моргенштерн

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – это математическая дисциплина, исследующая вопросы поиска решений в конфликтных ситуациях. Основы теории игр заложены в 1928 году Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном, исследовавшим конфликтные ситуации в условиях рыночной экономики. Наиболее подробно теория игр изложена ими в фундаментальной работе «*Theory of Games and Economic Behavior*», *Princeton, Princeton University Press*, 1953 (русский перевод [1]), цитата из которой взята в качестве эпиграфа к данной книге. Теоретико-игровые методы и модели нашли достаточно широкое применение в области автоматизации процессов принятия решений (см., например, работы [2÷4]), в том числе в интеллектуальных системах поддержки принятия решений, предназначенных для помощи лицам, принимающим решения, при управлении сложными объектами или процессами различного типа (техническими, экономическими, транспортными и т.д.) [4].

При подготовке материала использованы работы из приведенного в конце книги библиографического списка (эти же работы можно использовать для более широкого знакомства с методами и моделями теории игр и их применением), а также наработки автора. Материал книги изложен в следующем порядке.

В разделе 1 даются определения основных понятий теории игр, и приводится классификация игровых моделей, основываясь на работах [1÷3, 5, 6].

В разделе 2 рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой (антагонистическая игра) при ее наиболее общем (универсальном) представлении в виде дерева игры (дерева решений) и методы поиска решения на дереве. Более подробно с методами поиска (как строгими, так и эвристическими) на деревьях решений можно ознакомиться по работам [7, 8].

В разделе 3 описываются методы решения антагонистической игры, представленной в матричной форме. Рассматриваются ситуации поиска решения в чистых стратегиях при наличии в матрице игры седловой точки и в смешанных стратегиях, когда седловая точка отсутствует. Приводятся строгие методы, гарантирующие нахождение оптимального решения, и приближенные методы, дающие некоторое приближение к оптимальному решению, но характеризующиеся существенно меньшей вычислительной сложностью. Класс антагонистических игр наиболее исследован в теории игр и интересующиеся могут найти дополнительную информацию, например, в работах [1÷3, 5, 6, 9].

В разделе 4 рассматривается игра двух лиц с произвольной суммой (биматричная игра) и подходы к ее решению, в частности, на основе теории Нэша. Дополнительную информацию по биматричным играм, как некооперативным (некоалиционным), так и кооперативным (коалиционным), и методам их решения можно получить из работ [2, 3, 5, 6, 10].

Раздел 5 посвящен методам поиска решений в условиях неопределенности и риска на основе теории статистических решений или так называемым играм с «природой», где под «природой» понимается некоторая реальность (или условия), действия или состояния которой неизвестны, но могут оказывать влияние на результаты принимаемых решений. Описание данного класса игр можно найти в работах [3, 9, 11].

В разделе 6 рассмотрен класс игровых моделей в виде игр с упорядоченными исходами [10], когда предпочтения игроков задаются в виде отношений порядка на множестве исходов (выигрышей, платежей).

В разделе 7 приводится описание и пример использования программной системы для решения антагонистических игр с применением как точного, так и приближенного методов.

Приведены контрольные вопросы по изложенному материалу и библиографический список.

Конечно, сравнительно небольшое пособие не является исчерпывающим по данной проблематике. В частности, не рассмотрены методы поиска решения в условиях неопределенности и риска с использованием теории полезности для игровых моделей в виде так называемых лотерей и проспектов. Соответствующую информацию можно найти в работах [5, 12]. Также, как уже отмечалось, для более глубокого изучения различных разделов курса можно воспользоваться литературой из библиографического списка.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Основные понятия теории игр

Игрой (***теоретико-игровой моделью***) называется упрощённая формализованная модель конфликтной ситуации, а конфликтующие стороны называются игроками.

Ситуация называется конфликтной, если в ней сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные (в частном случае противоположные) цели.

Однократный розыгрыш игры от начала и до конца называется ***партией игры***.

Результатом партии являются ***платежи*** (выигрыши или проигрыши игроков).

Игра состоит из ходов, заключающихся в выборе игроками из некоторого множества возможных альтернатив.

Ходы могут быть личными или случайными. ***Личный ход*** – ход, при котором игрок осуществляет сознательный выбор. ***Случайный ход*** – ход, выбор варианта в котором осуществляется некоторым механизмом случайного выбора (бросание монеты, кости и т. п.).

Игра, в которой присутствуют личные ходы, возможно, наряду со случайными, называется **стратегической**. Игра, состоящая из одних случайных ходов, называется **азартной**.

Задачей теории игр является нахождение оптимальных ***стратегий*** игроков – правил, обеспечивающих максимизацию выигрыша или минимизацию проигрыша игрока в стратегических играх. Множество стратегий игрока должно быть полным (всеобъемлющим), т.е. определять выбор игрока в любой возможной ситуации игры.

Чисто азартные игры относятся к компетенции теории вероятностей и математической статистики.

Определение 1.1. Стратегическая игра *n* лиц (сторон) может быть задана набором $\{A_1, \ldots, A_n, H(A_1, \ldots, A_n)\}$, где – A_i, $i = 1, \ldots, n$, – стратегия i-го игрока, H – платёж игры, т.е. выигрыши (или проигрыши) игроков.

1.2. Классификация игровых моделей

Классификация теоретико-игровых моделей представлена на рис. 1.1.

В зависимости от дискретности или непрерывности множества стратегий игры соответственно делятся на ***дискретные*** или ***непрерывные,*** причем дискретные игры в зависимости от конечности или бесконечности множества стратегий могут быть соответственно ***конечными*** или ***бесконечными***, непрерывные игры – всегда бесконечные.

В зависимости от числа участвующих в игре игроков игры бывают ***N лиц***, которые в зависимости от того, разрешены коалиции (кооперации) игроков или нет, могут быть соответственно ***коалиционными*** (***кооперативными***) или ***некоалиционными*** (***некооперативными***), или ***2-х***

лиц (***парными***), которые в зависимости от суммарной величины платежа могут быть ***антагонистическими***, если суммарный платеж игроков равен нулю, или ***неантагонистическими***, если суммарный платеж не равен нулю. Заметим, что в антагонистической игре интересы игроков строго противоположны, т.е. выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, а в неантагонистической – просто не совпадают, что ведет к ситуации, когда увеличение выигрыша одного игрока ведет к уменьшению выигрыша другого.

- Дискретные
  - конечные
  - бесконечные
- Непрерывные

- N лиц
  - коалиционные (кооперативные)
  - некоалиционные (некооперативные)
- 2-x лиц
  - антагонистические
  - неантагонистические

- С полной информацией
- С неполной информацией

- С нулевой суммой
- С ненулевой суммой

- Одноходовые
- Многоходовые

Рис. 1.1. Классификация теоретико-игровых моделей

Игра называется игрой ***с полной информацией***, если игрокам известна вся предыстория игры, т.е. все личные и случайные ходы противников (противника), в противном случае имеем игру ***с неполной информацией***.

В зависимости от суммарного платежа игроков игры делятся на игры ***с нулевой суммой***, если суммарный платеж равен нулю, и ***с ненулевой суммой***, в противном случае. Примером игры с нулевой суммой является парная антагонистическая игра.

И, наконец, в зависимости от числа ходов в партии игры могут быть ***одноходовые*** и ***многоходовые***.

Наиболее разработанными в теории игр являются модели игр 2-х лиц с нулевой суммой (антагонистических игр).

1.3. Контрольные вопросы к разделу 1

1. Сформулируйте понятие игры как модели конфликтной ситуации.
2. Сформулируйте основную задачу теории игр.
3. Дайте определение стратегической игры n лиц (сторон).
4. Приведите классификацию теоретико-игровых моделей.
5. Какие игры называются антагонистическими и неантагонистическими, с полной и неполной информацией?
6. Модели каких игр являются наиболее разработанными в теории игр?

2. АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА. ПОИСК РЕШЕНИЯ НА ДЕРЕВЕ ИГРЫ

2.1. Представление антагонистической игры

Рассмотрим антагонистическую игру $G(m \times n)$, где у первого игрока A имеется множество стратегий $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, а у второго игрока B – множество стратегий $\{B_j\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Игра $G(m \times n)$ может быть представлена в виде ***дерева игры*** и в виде ***матрицы*** (***матрицы платежей***).

Представление игры в виде дерева является универсальным, т.е. любая игра может быть представлена в виде дерева, матричное представление не является универсальным – не любая игра может быть приведена к матричной форме.

Рассмотрим представление антагонистической игры $G(m \times n)$ в виде дерева.

Корневая вершина дерева представляет начальную ситуацию (состояние), промежуточные вершины – промежуточные ситуации, возможные в игре, концевые вершины – все возможные исходы игры, взвешенные платежами – выигрышами игрока A (соответственно, проигрышами игрока B). Дуги – представляют возможные переходы, возникающие в результате личных или случайных ходов, причем личные ходы выполняются игроками согласно выбранных ими стратегий.

Проиллюстрируем процесс построения дерева игры на следующем примере.

Имеется два игрока – *A*, *B*.

- 1 *ход* (*личный*): игрок *A* выбирает одну из двух цифр – 1 или 2;
- 2 *ход* (*случайный*): бросается монета и если выпадает «герб» (Г), то игроку *B* сообщается о выборе игрока *A*, если выпадает «решетка» (Р), то не сообщается;
- 3 *ход* (*личный*): игрок *B* выбирает одну из двух цифр – 3 или 4.

Платеж определяется следующим образом. Суммируются выборы игроков *A* и *B*, и если сумма чётная, то она выплачивается игроком *B* игроку *A*, если сумма нечетная, то игрок *A* платит игроку *B*. Соответствующее дерево игры представлено на рис. 2.1.

Определение 2.1. ***Классом информации S*** называется множество вершин дерева, в которых игроку, делающему личный ход, доступна одна и та же информация.

Для рассматриваемого примера имеется четыре класса информации (см. рис. 2.1): S_1, S_2 и S_4, содержащие по одной вершине, и S_3, который содержит две вершины.

Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2.1. Для игры с неполной информацией имеется хотя бы один класс информации, содержащий две или более вершин. Соответственно для игры с полной информацией все классы информации содержат по одной вершине.

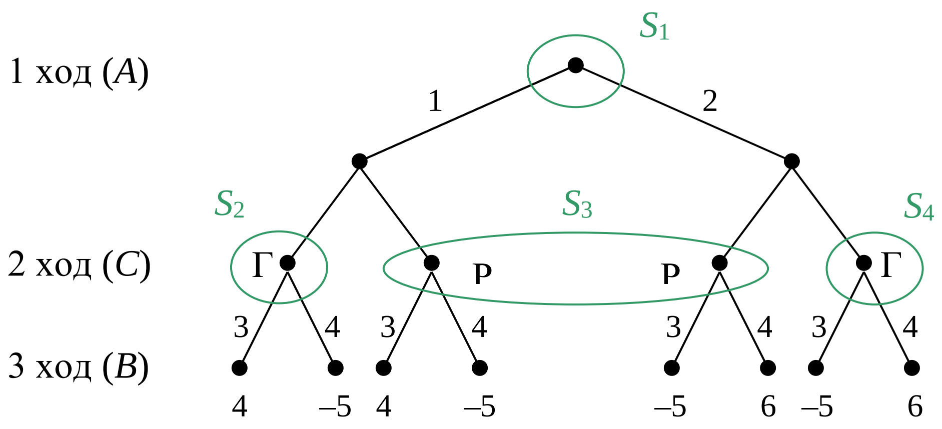


Рис. 2.1. Дерево игры

Так как класс S_3 включает две вершины, то, следовательно, в общем случае имеем игру с неполной информацией. Отметим, что в частном случае, когда выпадает «герб» и игроку B сообщается о выборе игрока A, данная игра становится игрой с полной информацией.

Определим множества стратегий игроков.

Очевидно, что у игрока A имеется всего две стратегии (для класса информации S_1): A_1 – выбор 1, A_2 – выбор 2. У игрока B стратегией B_i является правило (α, β, δ), определяющее выбор игрока в классах информации $S_2(\alpha)$, $S_3(\beta)$ и $S_4(\delta)$. Следовательно, у игрока B имеется восемь стратегий: $B_1 = (3; 3; 3)$, $B_2 = (3; 3; 4)$, …, $B_8 = (4; 4; 4)$.

2.2. Поиск решения на дереве игры

2.2.1. Общие замечания

Дерево игры может быть построено, используя известные методы полного перебора («в глубину», «в ширину», комбинированный) или сокращенного перебора, выполняемого с использованием некоторой оценочной функции (точной или приближенной, эвристической) [7, 8].

Определение 2.2. Алгоритм поиска решения называется ***допустимым***, если он оканчивает свою работу построением оптимального решения (оптимального пути к цели).

Определение 2.3. Допустимый алгоритм поиска решения называется ***оптимальным***, если он при поиске решения анализирует (раскрывает) минимальное число вершин.

Примером допустимого (но, конечно, не оптимального) алгоритма является алгоритм, построенный на основе полного перебора. Эвристические алгоритмы, использующие при поиске решения методы сокращенного перебора на основе эвристических функций, как правило, не являются допустимыми, т.е. эти алгоритмы не гарантируют в общем случае нахождение оптимального решения. Преимуществом эвристических алгоритмов являются существенно меньшие затраты вычислительных ресурсов (времени вычислений и памяти) по сравнению с алгоритмами, основанными на полном переборе.

Нильсон Н. (Nilsson N.) в своей классической работе по искусственному интеллекту [7] доказал теорему, определяющую требования к эвристической функции, чтобы алгоритм поиска решения, построенный на ее основе, был допустимым. К сожалению, проверка выполнимости этого требования, в свою очередь, является сложной и обычно практически нереализуемой задачей.

Рассмотрим два универсальных метода сокращенного перебора на дереве игры – метод максимина (максиминный метод) и метод α-β отсечений.

2.2.2. Метод максимина

Суть метода заключается в следующем. Имеется два игрока – *A* (MAX), задачей которого является максимизация платежа (своего выигрыша), и *B* (MIN), который, естественно, заинтересован в минимизации этого платежа (своего проигрыша).

Реализуется процедура, результатом выполнения которой является определение наилучшего относительно оценочной функции первого хода игрока *A*.

Процедура включает следующие шаги.

1. Строится полное поисковое дерево на максимально возможную с учетом вычислительных ресурсов (времени счета и памяти) глубину, при условии равенства числа ходов у обоих игроков.
2. Концевые вершины дерева взвешиваются значениями оценочной функции.
3. Совершается обратное движение по дереву от концевой к начальной вершине с пересчетом значений оценочной функции и итоговым выбором первого хода игрока *A*, максимизирующего это значение.

Далее осуществляется переход в вершину, соответствующую выбранному ходу, и вся процедура повторяется уже для игрока *B*, с тем только отличием, что игрок *B* заинтересован в минимизации значения оценочной функции.

Описанная процедура поочередно применяется для игроков *A* и *B* до завершения игры (партии).

Алгоритм поиска на основе метода максимина будет допустимым, если используется точная оценочная функция, и эвристическим, если оценочная функция является эвристической.

Рис. 2.2 иллюстрирует данный метод. Цифры у промежуточных вершин являются пересчитанными для этих вершин значениями оценочной функции. В результате выполнения процедуры будет рекомендовано игроку *A* в качестве первого хода выбрать переход к вершине $\boldsymbol{S}_1$ с максимальным значением оценки.

Существенный недостаток метода максимина, следствием которого являются чрезмерно большие затраты вычислительных ресурсов, что, в свою очередь, сокращает глубину построения дерева, заключается в разделении этапов построения дерева и оценки вершин. Усовершенствованием данного метода является метод α-β отсечений, согласно которому отсечение неперспективных вершин производится непосредственно в процессе построения дерева игры.

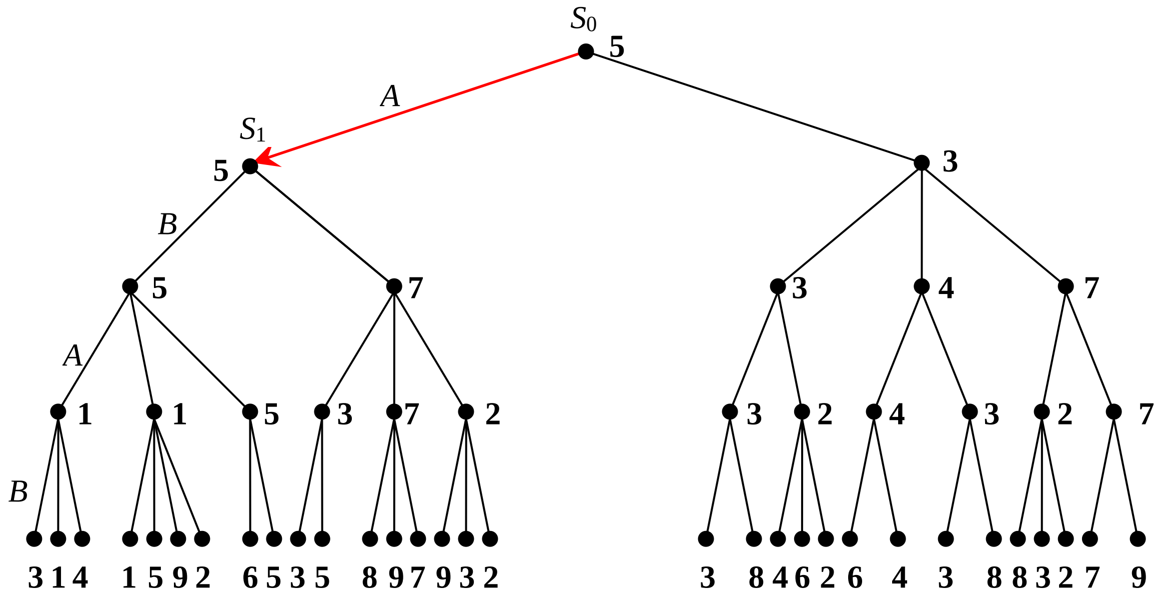


Рис. 2.2. Дерево игры для метода максимина

2.2.3. Метод α-β отсечений

Идея улучшения метода максимина за счет совмещения этапов построения дерева и отсечения неперспективных продолжений была предложено Дж. Маккарти (J. McCarthy) в 1961 г.

Существуют два вида α-β отсечения:

- неглубокое α-β отсечение;
- глубокое α-β отсечение.

Неглубокое α-β отсечение

Рассмотрим дерево игры на рис. 2.3.

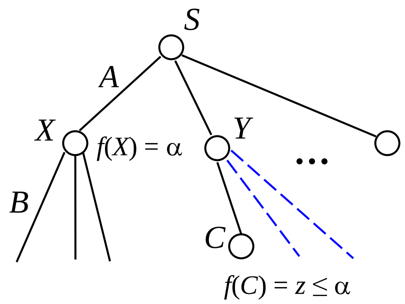


Рис. 2.3. Неглубокое α-β отсечение

Пусть известны оценки $f(X) = \alpha$ и $f(C) = z \leq \alpha$.. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. Если $f(C) \leq \alpha$, то ветви, исходящие из вершины Y и обозначенные штриховой линией, можно отсечь.

Доказательство. Так как игрок B стремится минимизировать оценочную функцию, то оценка вершины Y будет не больше z, т.е. $f(Y) \leq f(C) \leq \alpha$. Следовательно, вершина Y не будет конкурировать с вершиной X при выборе игрока A, так как $f(Y) \leq f(X)$, что и означает неперспективность ветвей, исходящих из вершины Y.

Мы рассмотрели α отсечение, соответствующее выбору игрока A. Аналогичные рассуждения справедливы и для β отсечения в ситуации, когда выбор делает игрок B при справедливости следующих оценок: $f(X) = \beta$, $f(C) = w \geq \beta$.

Глубокое α-β отсечение

Рассмотрим дерево игры на рис. 2.4. Пусть известны оценки $f(X) = \alpha$ и $f(E) = z \leq \alpha$..

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.3. Если $f(E) \leq \alpha$, то ветви, исходящие из вершины D и помеченные штриховой линией, можно отсечь.

Доказательство. Так как игрок B стремится минимизировать оценочную функцию, то для вершины D будет справедлива следующая оценка $f(D) \leq f(E) \leq \alpha$, а для вершины C, ход из которой делает игрок A, стремящийся максимизировать оценочную функцию, соответственно $f(C) \geq f(D)$.

Рассмотрим две возможности:

1. $f(C) = f(D)$, что означает $f(C) \leq f(E) \leq \alpha$, т.е. имеем согласно лемме 2.2 неглубокое α отсечение, означающее неперспективность для игрока A вообще всех продолжений из вершины Y.
2. $f(C) > f(D)$, что означает неучастие (неперспективность) вершины D для получения оценки $f(C)$.

Лемма доказана.

Рис. 2.5 иллюстрирует применение метода α-β отсечений.

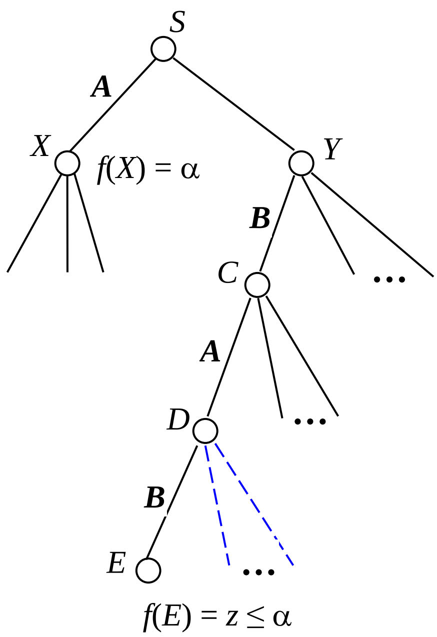


Рис. 2.4. Глубокое α-β отсечение

Из рис. 2.5 видно, что игроку A рекомендуется в качестве первого хода выбрать продолжение, ведущее к вершине X.

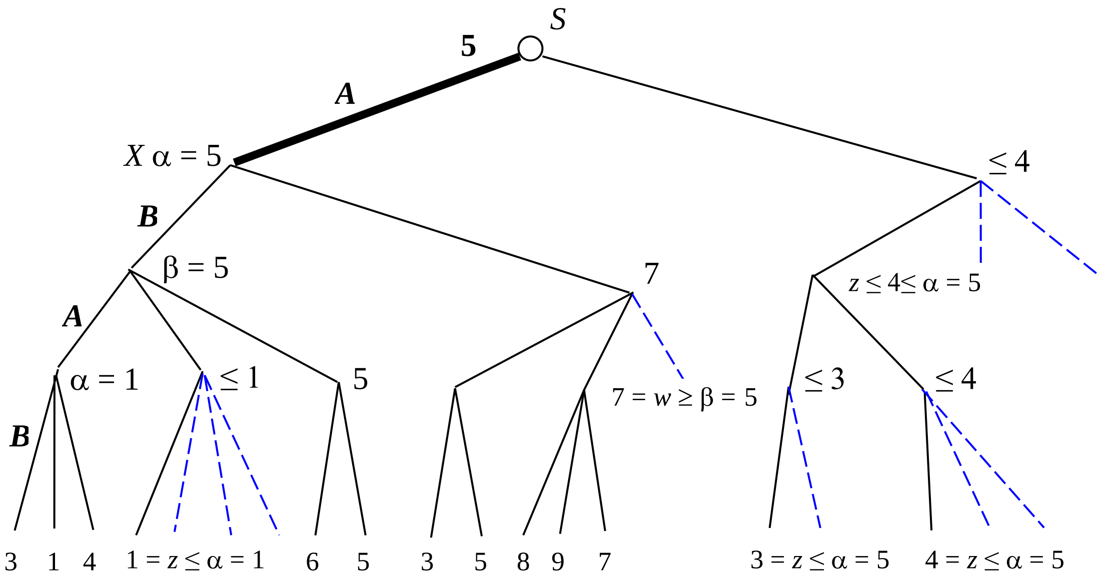


Рис. 2.5. Применение метода α-β отсечений

Табл. 2.1 иллюстрирует процедуру α-β отсечения.

Таблица 2.1

Ход	Наилучшая оценка	Позиция на глубину	Оценка позиции	Условие отсечения	Действие
A (max)	α	Своя	*z*	$z \le \alpha$	α отсечение
B (min)	β	Противника	*w*	$w \ge \beta$	β отсечение

Заметим, что оценка α возрастает при движении по дереву снизу вверх, а оценка β, наоборот, убывает.

Приведем сравнительные оценки методов максимина и α–β отсечений. Пусть оценивается дерево на глубину ходов (уровней) n (для равенства ходов игроков n должно быть четным) и на каждом уровне имеется m вариантов выбора. Тогда сложность вычислений равна:

- m^n для метода максимина;
- $\approx 2m^{n/2}$ для метода α-β отсечения.

Таким образом, метод α-β отсечений позволяет при тех же затратах памяти, что и метод максимина, построить дерево в среднем на глубину, в два раза большую, а значит, найти более качественное решение. Эффективность метод α-β отсечений возрастает, если удается предварительно упорядочить оцениваемые вершины по убыванию оценки α и возрастанию оценки β.

К недостаткам рассмотренных методов относятся:

- по сути оба метода не являются стратегиями и базируются на классических переборных алгоритмах с использованием оценочной функции;
- наличие эффекта горизонта, т.е. методы «не видят» выигрыша, который находится за горизонтом (ниже по дереву) оцениваемых вершин.

2.3. Контрольные вопросы к разделу 2

1. Перечислите возможные виды представления антагонистической игры.

2. Дайте определение класса информации.
3. Сформулируйте лемму 2.1.
4. Приведите пример представления антагонистической игры в виде дерева.
5. Назовите возможные методы поиска решений на дереве игры.
6. Дайте определения допустимого и оптимального алгоритмов поиска.
7. Поясните максиминный метод поиска решения.
8. Поясните неглубокое α-β отсечение.
9. Сформулируйте лемму 2.2.
10. Дайте доказательство леммы 2.2.
11. Поясните глубокое α-β отсечение.
12. Сформулируйте лемму 2.3.
13. Дайте доказательство леммы 2.3.
14. Приведите сравнительные оценки методов максимина и $\alpha-\beta$ отсечений.
15. Перечислите основные недостатки методов максимина и $\alpha-\beta$ отсечений.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

3.1. Матричное представление антагонистической игры

Пусть заданы множества стратегий $\{A_i\}$, $i = 1,\dots m$, и $\{B_j\}$, $j = 1,\dots,n$, игроков A и B соответственно, а также матрица выигрышей $A = ||a_{ij}||$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, где элемент a_{ij} – выигрыш игрока A в ситуации, когда он выбирает стратегию A_i, а игрок B – стратегию B_j. Такая игра $G(m\times n)$ может быть представлена в ***матричной форме*** (и называется ***матричной игрой***) в виде таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

A_i \ B_j	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

В качестве иллюстрации снова рассмотрим игру из примера 1 п. 2.1 для случая неполной информации, т.е. когда игроку B не сообщается о выборе игрока A. У игроков A и B имеется по две стратегии: A_1 и A_2 – выбрать 1 или 2 соответственно, B_1 и B_2 – выбрать 2 или 3 соответственно. Данная игра $G(2\times 2)$ в матричной форме представлена табл. 3.2.

Таблица 3.2

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	4	–5
A_2	–5	6

Для случая, когда игроку B известно о выборе игрока A (т.е. игра с полной информацией), получаем игру $G(2\times 4)$, матричная форма которой представлена табл. 3.3.

Таблица 3.3

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	–5	4	–5
A_2	–5	6	6	–5

У игрока B добавились еще две стратегии: B_3 – отвечать стратегией с тем же номером, что выбрал игрок A (т.е. B_1 на A_1 и B_2 на A_2) и B_4 – отвечать стратегией с номером, отличным от выбора игрока A (т.е. B_2 на A_1 и B_1 на A_2).

3.2. Наличие седловой точки

Определение 3.1.

Нижней оценкой цены игры называется величина $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$;

верхней оценкой цены игры называется величина $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$.

Лемма 3.1. Справедливо соотношение $\alpha \le \beta$.

Для доказательства леммы представим игру $G(m \times n)$ в матричной форме в виде табл. 3.4.

Таблица 3.4

B_j / A_i	B_1	…	B_j	…	B_k	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{ik}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_l	a_{11}	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{in}
…	…	…		…		…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

Пусть $\alpha = a_{jk}$, $\beta = a_{lj}$. Из определения верхней и нижней границ следует, что элемент a_{jk} является минимальным в i-й строке, т.е. $\alpha = a_{jk} \le a_{jj}$, а элемент a_{lj} является максимальным в j-м столбце, т.е. $a_{jj} \le a_{lj} = \beta$. Лемма доказана.

Определение 3.2. Если $\alpha = \beta = V$, то игра имеет ***седловую точку***, стратегии A_i, B_j, при которых достигается выигрыш V, называются ***оптимальными чистыми стратегиями***, а пара стратегий (A_i, B_j) называется ***решением игры*** $\boldsymbol{G(m \times n)}$.

Решение игры обладает свойством устойчивости (равновесия), т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому игроку не выгодно отходить от своей, так как его положение при этом может только ухудшиться. Из леммы 3.1 непосредственно следует, что признаком наличия седловой точки является нахождение в матрице игры такого элемента a_{ij}, который является одновременно минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце. Если такой элемент не единственный, то игра имеет не единственное решение, но все решения равнозначны, т.е. дают выигрыш, равный цене игры V.

Теорема 3.1 [6]. Антагонистическая игра с полной информацией имеет седловую точку.

Таким образом, для любой антагонистической игры с полной информацией существует решение – пара чистых стратегий $\left(A_{i^*}, B_{j^*}\right)$, дающих игроку A устойчивый выигрыш $a_{ij} = V$. Наличие нескольких седловых точек означает существование нескольких решений, но все они дают один и тот же выигрыш, равный цене игры V.

Рассмотрим в качестве примера матричную игру $G(2\times4)$ с полной информацией, представленную табл. 3.3. Дополним данную таблицу новыми строкой и столбцом, получив табл. 3.5.

Таблица 3.5

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	–5	4	–5	–5
A_2	–5	6	6	–5	–5
$\max\limits_i a_{ij}$	4	6	6	–5	

Из таблицы видно, что $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -5$, $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = -5$.

Имеем две седловые точки a_{14} и a_{24}, соответствующие решениям (A_1, B_4) и (A_2, B_4) с ценой игры $V = -5$.

Вернемся теперь к матричной игре $G(2\times2)$ с неполной информацией, представленной в табл. 3.2. Аналогично предыдущему примеру дополним табл. 3.2 до табл. 3.6.

Таблица 3.6

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	–5	–5
A_2	–5	6	–5
$\max\limits_i a_{ij}$	4	6	

Для данной таблицы $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -5$, $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 4$, т.е. $\alpha < \beta$. Седловая точка, а, следовательно, и решение в чистых стратегиях, отсутствуют.

3.3. Методы решения матричных игр при отсутствии седловой точки

3.3.1. Смешанные стратегии

В случае отсутствия седловой точки, в качестве решения игры используются так называемые ***смешанные стратегии***

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \quad S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

где p_i и q_j – вероятности выбора стратегий A_i и B_j игроками A и B соответственно. Решением игры в данном случае является пара оптимальных смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*), максимизирующих математическое ожидание цены игры (средний выигрыш).

Теорема 3.2 [6]. Любая антагонистическая игра имеет хотя бы одно оптимальное решение, т.е., пару в общем случае смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*), дающих игроку A устойчивый выигрыш, равный цене игры V, $\alpha \le V \le \beta$.

Чистую стратегию можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии, когда одна вероятность имеет единичное значение, а все остальные – нулевое.

Рассмотрим матричную игру $G(m \times n)$, не имеющую седловой точки, для которой необходимо найти решение – пару оптимальных смешанных стратегий $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и соответствующую цену игры V.

Предварительно следует попытаться упростить матрицу игры. Для этого вводятся отношения предпочтения (доминирования) и безразличия (дублирования) на множестве стратегий.

Определение 3.3:

- стратегия A_i ***предпочтительнее*** стратегии A_k (***доминирует*** A_k) (обозначается $A_i \succeq A_k$), если все выигрыши, указанные в i-й строке матрицы игры, не меньше соответствующих выигрышей k-й строки, или формально $A_i \succeq A_k \Leftrightarrow \forall j \, (a_{ij} \geq a_{kj})$;
- стратегии A_i и A_k находятся в ***отношении безразличия*** (***дублирования***) (обозначается $A_i \approx A_k$), если все выигрыши, указанные в i-й строке матрицы игры, совпадают с соответствующими выигрышами k-й строки, или формально $A_i \approx A_k \Leftrightarrow \forall j \, (a_{ij} = a_{kj})$;
- стратегия B_j ***предпочтительнее*** стратегии B_r (***доминирует*** B_r) (обозначается $B_j \succeq B_r$), если все выигрыши, указанные в j-м столбце матрицы игры, не меньше соответствующих выигрышей r-го столбца, или формально $B_j \succeq B_r \Leftrightarrow \forall i \, (a_{ij} \leq a_{ir})$;
- отношение безразличия для стратегий игрока B вводится аналогично игроку A, т.е. $B_j \approx B_r \Leftrightarrow \forall i \, (a_{ij} = a_{ir})$.

Можно доказать следующую лемму [5].

Лемма 3.2. Для игры $G(m \times n)$ число ***активных стратегий*** игроков равно $min\{m,n\}$. Другими словами, если, например, $m>n$, то в оптимальной стратегии $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ игрока A будет не более n отличных от нуля вероятностей p_i.

Таким образом, предварительным этапом решения матричной игры является ее упрощение, т.е. удаление из матрицы доминируемых и дублируемых стратегий.

Рассмотрим данный этап на примере матричной игры $G(5 \times 5)$, представленной табл. 3.7.

Таблица 3.7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8
A_4	3	6	1	2	4
A_5	3	5	6	8	9

Так как справедливы соотношения $A_1 \succeq A_4$, $A_2 \approx A_5$, $B_1 \succeq B_2$, $B_1 \succeq B_5$, $B_3 \succeq B_4$, то удалим доминируемые и дублируемые стратегии A_4, A_5, B_2, B_4, B_5.

В полученной матрице снова проведём удаление, так как $A_1 \approx A_3$. Получим упрощенную игру $G(2\times2)$, представленную табл. 3.8.

Таблица 3.8

A_i \ B_j	B_1	B_3
A_1	4	2
A_2	3	6

Нетрудно убедиться, что данная игра не имеет седловой точки и необходимо искать решение в смешанных стратегиях.

После упрощения игры следующим (основным) этапом является поиск оптимального решения в виде смешанных стратегий (S_A, S_B), применяя точные или приближенные методы.

3.3.2. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа относится к точным методам решения матричных игр $G(m\times m)$, т.е. имеющим квадратные матрицы (или приведенные к такому виду после упрощения).

Допустим, что игрок A использует смешанную стратегию $S_A = (p_1, \dots, p_m)$, а игрок B отвечает своей чистой стратегией B_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Цена игры в таком случае равна $V_i = p_1a_{1i} + p_2a_{2i} + \ldots + p_ma_{mi}$. Если же игрок B также будет применять смешанную стратегию $S_B = (q_1, \dots, q_m)$, то итоговая цена игры будет равна

$$V = q_1(p_1a_{11} + p_2a_{21} + \ldots + p_ma_{m1}) + \ldots + q_m(p_1a_{1m} + p_2a_{2m} + \ldots + p_ma_{mm}). \qquad (3.1)$$

Для нахождения оптимального решения необходимо максимизировать значение V при ограничениях $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$; $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Составим функцию Лагранжа $L = V + \lambda_1(p_1 + \ldots + p_m - 1) + \lambda_2(q_1 + \ldots + q_m - 1)$ и приравняем к нулю частные производные по всем аргументам: $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0;\ \ldots;\ \frac{\partial L}{\partial p_m} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0;\ \ldots;\ \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$.

В результате получим следующую систему из $(2m + 2)$ уравнений с $(2m + 2)$ неизвестными:

$$\begin{cases} q_1a_{11} + \ldots + q_ma_{1m} + \lambda_1 = 0 \\ \ldots \\ q_1a_{m1} + \ldots + q_ma_{mm} + \lambda_1 = 0 \\ p_1a_{11} + \ldots + p_ma_{m1} + \lambda_2 = 0 \\ \ldots \\ p_1a_{1m} + \ldots + p_ma_{mm} + \lambda_2 = 0 \\ p_1 + \ldots + p_m - 1 = 0 \\ q_1 + \ldots + q_m - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы и даёт смешанные стратегии для обоих игроков.

Нетрудно заметить, что исходная система уравнений включает две независимые подсистемы (для p_i, $i = 1, ..., m$, λ_1 и q_j, $j = 1, ..., m$, λ_2 соответственно), состоящие из $(m + 1)$ уравнений с $(m + 1)$ неизвестными, решение которых и даст искомые вероятности p_i и q_j, а также после подстановки этих вероятностей в формулу (3.1) цену игры V.

В качестве примера рассмотрим игру $G(2\times2)$, представленную в общем виде табл. 3.9.

Таблица 3.9

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

$V_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$, $V_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$,

$V = V_1q_1 + V_2q_2 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2)q_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)q_2$.

$L = V + \lambda_1(p_1 + p_2 - 1) + \lambda_2(q_1 + q_2 - 1)$.

Приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по всем аргументам, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial L / \partial p_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \lambda_1 = 0 \\ \partial L / \partial p_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \lambda_1 = 0 \\ \partial L / \partial q_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \lambda_2 = 0 \\ \partial L / \partial q_{12} = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \lambda_2 = 0 \\ \partial \mathrm{L} / \partial \lambda_1 = p_1 + p_2 - 1 = 0 \\ \partial \mathrm{L} / \partial \lambda_2 = q_1 + q_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решив данную систему получим следующие значения вероятностей:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{k}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{k}, \quad q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{k}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{k}, \quad k = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}.$$

Подставив полученные значения в выражение для V, получим цену игры.

Например, для игры $G(2\times2)$, представленной табл. 3.8, получим:

$p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}4$; $q_1 = 0{,}8$; $q_3 = 0{,}2$; $V = 3{,}6$.

Можно также найти решение в общем виде для игры $G(3\times3)$ и т.д.

Приведем более универсальный и достаточно легко компьютеризируемый способ решения матричных игр методом Лагранжа.

Рассмотрим игру игры $G(3\times3)$ в общем виде, представленную табл. 3.10.

Таблица 3.10

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Для нахождения решения в смешанных стратегиях необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1a_{11}+q_2a_{12}+q_3a_{13}+\lambda_1=0 \\ q_1a_{21}+q_2a_{22}+q_3a_{23}+\lambda_1=0 \\ q_1a_{31}+q_2a_{32}+q_3a_{33}+\lambda_1=0 \\ p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31}+\lambda_2=0 \\ p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32}+\lambda_2=0 \\ p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33}+\lambda_2=0 \\ p_1+p_2+p_3-1=0 \\ q_1+q_2+q_3-1=0 \end{cases}$$

Эту систему можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot A1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}\cdot A1^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$где\, A1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решением в общем виде представляется системой

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot A1^{-1} \\ \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \left(A1^T\right)^{-1} \end{cases}$$

Более конкретно:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{|A1|}\begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{|A1|}\begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{32} & a_{33} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{33} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Обозначив

$k = -a_{11}a_{22} + a_{11}a_{32} + a_{11}a_{23} - a_{11}a_{33} + a_{21}a_{12} - a_{21}a_{32} -$
$- a_{21}a_{13} + a_{21}a_{33} - a_{31}a_{12} + a_{31}a_{22} + a_{31}a_{13} - a_{31}a_{23} -$
$- a_{12}a_{23} + a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13} - a_{22}a_{33} - a_{32}a_{13} + a_{32}a_{23}$,

получим итоговое решение:

$p_1 = (- a_{21}a_{32} + a_{21}a_{33} + a_{31}a_{22} - a_{31}a_{23} - a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23}) / k$
$p_2 = (\ \ a_{11}a_{32} - a_{11}a_{33} - a_{31}a_{12} + a_{31}a_{13} + a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) / k$
$p_3 = (- a_{11}a_{22} + a_{11}a_{23} + a_{21}a_{12} - a_{21}a_{13} - a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13}) / k$
$q_1 = (- a_{12}a_{23} + a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13} - a_{22}a_{33} - a_{32}a_{13} + a_{32}a_{23}) / k$
$q_2 = (\ \ a_{11}a_{23} - a_{11}a_{33} - a_{21}a_{13} + a_{21}a_{33} + a_{31}a_{13} - a_{31}a_{23}) / k$
$q_3 = (- a_{11}a_{22} + a_{11}a_{32} + a_{21}a_{12} - a_{21}a_{32} - a_{31}a_{12} + a_{31}a_{22}) / k$
$V = - |A| / |A1|$,

где A — исходная матрица игры.

Данный подход легко применим для произвольной игры $G(m \times m)$: строится матрица $A1$, далее, используя определители, записываются выражения для p_i и q_j, множитель знака для них будет равен $(-1)^{m+i+1}$.

3.3.3. Метод линейного программирования

Данный метод также относится к точным методам решения матричных игр и применим к игре $G(m \times n)$ при условии, что все элементы матрицы игры a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, положительны (этого легко добиться прибавлением ко всем элементам матрицы положительной константы, большей, чем модуль наименьшего отрицательного элемента или нуля, если отрицательных элементов нет).

Рассмотрим ситуацию, когда игрок A применяет свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B последовательно отвечает своими чистыми стратегиями $B_1, \dots, B_n$. Поскольку оптимальные стратегии обладают свойством устойчивости, то справедлива следующая система неравенств:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \ge V \\ \vdots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \ge V \end{cases} \tag{3.2}$$

Введем новые переменные:

$$x_i = \frac{p_i}{V}, \quad i = \overline{1, m}; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{V}.$$

Система неравенств (3.2) теперь примет вид:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_m a_{m1} \ge 1 \\ \vdots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_m a_{mn} \ge 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Так целью игры для игрока A является максимизация цены игры V, то получаем задачу линейного программирования:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$$

при системе ограничений (3.3).

Решив эту задачу, найдем цену игры V и вероятности p_i в оптимальной смешанной стратегии $S_A = (p_i)$, $i = 1,\ldots,m$, игрока A:

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}; \qquad p_i = x_i \cdot V, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогичные построения проводятся и для игрока B, учитывая, что целью игрока B является минимизация цены игры V.

В итоге получим следующую задачу линейного программирования:

$$G(y) = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} \to \max$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \ldots + y_n a_{1n} \le 1 \\ \ldots \\ y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \ldots + y_n a_{mn} \le 1 \end{cases}.$$

Решив данную задачу, найдем вероятности q_j в оптимальной смешанной стратегии $S_B = (q_j)$, $j = 1, \ldots, n$, игрока B.

В [5] доказано, что сформулированные задачи являются двойственными задачами линейного программирования, т.е. минимум линейной формы для одной из них совпадает с максимумом для другой. Для решения данных задач можно использовать, например, симплекс-метод.

3.3.4. Итерационный метод Брауна-Робинсона

Также универсальным, но менее трудоемким по сравнению с методом линейного программирования в плане затрат вычислительных ресурсов является приближенный метод Брауна-Робинсона. Данный итерационный метод предназначен для решения любой игры $G(m \times n)$, не требуя никаких ограничений на элементы матрицы игры.

Метод базируется на многократном разыгрывании игры и подсчете верхней и нижней оценок цены игры с занесением результатов в таблицу специального вида (табл. 3.11):

Таблица 3.11

k	i	B_1	…	B_n	j	A_1	…	A_m	$\underline{V}$	$\overline{V}$	V^*

Каждая строка таблицы соответствует однократному розыгрышу игры (партии игры).

Поясним записи в соответствующих позициях:

- k — номер партии (итерации);
- i и j — номера стратегий, выбранных соответственно игроками A и B в данной партии;
- $B_1, \ldots, B_n$ — накопленный за k партий выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i в данной партии и ответе игроком B соответственно стратегиями $B_1, \ldots, B_n$;
- $A_1, \ldots, A_m$ — накопленный за k партий выигрыш игрока A при выборе игроком B стратегии B_j в данной партии и ответе игроком A соответственно стратегиями $A_1, \ldots, A_m$;
- $\underline{V}$ —нижняя оценка цены игры (минимальный накопленный выигрыш, поделенный на k);
- $\overline{V}$ — верхняя оценка цены игры (максимальный накопленный выигрыш, поделенный на k);
- $V^* = \dfrac{\underline{V} + \overline{V}}{2}$.

В [6] доказано, что при $k \to \infty$: $V^* \to V$, $p_i^* = \dfrac{N_i}{k} \to p_i$, $q_j^* = \dfrac{N_j}{k} \to q_j$, где V – цена игры, N_i и N_j – число применений соответственно стратегий A_i и B_j за k партий, p_i и q_j – значения вероятностей в оптимальных стратегиях $S_A = (p_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $S_B = (q_j)$, $j = 1, \ldots, n$, игроков A и B соответственно.

Проиллюстрируем метод на примере игры $G(3\times3)$, представленной табл. 3.12.

Таблица 3.12

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Требуется найти решение – пару оптимальных смешанных стратегий (S_A, S_B), $S_A = (p_1, p_2, p_3)$, $S_B = (q_1, q_2, q_3)$, и цену игры V.

Будем искать пару смешанных стратегий $S_A = (p_1, p_2, p_3)$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $S_B = (q_1, q_2, q_3)$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ и цену игры V.

Построим табл. 3.13 для первых десяти итераций.

Таблица 3.13

k	i	B_1	B_2	B_3	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{V}$	$\overline{V}$	V^*
1	3	9	**0**	11	2	2	**9**	0	0	9	4,5
2	2	11	**9**	11	2	4	**18**	0	4,5	9	6,75
3	2	13	18	**11**	3	13	**18**	11	3,67	6	4,84
4	2	15	27	**11**	4	**22**	18	**22**	2,75	5,5	4,13
5	1	22	29	**20**	3	31	18	**33**	4,0	6,6	5,3
6	3	31	**29**	31	2	**33**	27	**33**	4,84	5,5	5,17
7	1	38	**31**	40	2	35	**36**	33	4,43	5,14	4,79
8	2	**40**	**40**	**40**	2	37	**45**	33	5,0	5,61	5,30
9	2	42	49	**40**	3	**46**	45	44	4,45	5,11	4,78
10	1	**49**	51	**49**	1	**53**	47	**53**	4,90	5,30	5,1

Поясним процесс заполнения табл. 3.13.

Пусть начинает ($k = 1$) игрок A и выбирает на первом шаге стратегию A_1. Его выигрыш в зависимости от выбора игрока B может равняться 9 (при выборе стратегии B_1), 0 (при выборе B_2) или 11 (при выборе B_3). Поскольку теперь выбор за игроком B (а он заинтересован в минимизации выигрыша игрока A), то выделим (жирным шрифтом) минимальный выигрыш 0, соответствующий стратегии B_2. Следовательно игроку B выгоднее всего ответить стратегией B_2, что, в свою очередь, может привести к выигрышу игрока A при его ответе в следующей партии, равному 2 (при выборе стратегии A_1), 9 (A_2) или 0 (A_3). Так как игрок A заинтересован в максимизации выигрыша, то выделим максимальный выигрыш 9 (для A_2). Соответствующие значения $\underline{V}$, $\overline{V}$ и V^* равны 0; 9 и 4,5.

Во второй партии ($k = 2$) игроку A, следовательно, выгодно выбрать стратегию A_2, которая позволит ему накопить выигрыш, равный соответственно 11 (для B_1), 9 (для B_2) или 11 (для B_3) и т.д. Заметим, что для $k = 4$ в столбцах A_1 и A_3 получаются одинаковые накопленные выигрыши (22), поэтому игрок A в пятой партии может выбрать как стратегию A_1, так и A_3.

К сожалению (что видно и по табл. 3.12), сходимость данного метода довольно слабая, но существуют методы ее ускорения. Критерием останова можно выбрать достаточную стабильность величины V^* при увеличении числа итераций.

Для рассматриваемого примера в итоге получим:

$p_1^* \to 0.25,\quad p_2^* \to 0.5,\quad p_3^* \to 0.25,\quad q_1^* \to 0.25,\quad q_2^* \to 0.5,\quad q_3^* \to 0.25$ и $V^* \to 5$, что соответствует точному решению, полученному, например, методом Лагранжа.

Как уже отмечалось, сравнительно невысокая трудоемкость данного метода часто делает его более предпочтительным по сравнению с методом линейного программирования (например, симплекс-методом) при решении задач линейного программирования (после их сведения к соответствующей теоретико-игровой задачи) большой размерности.

3.4. Практический пример

Рассмотрим следующую задачу. Проводится конкурс на реализацию двух проектов, в котором участвует два претендента – конструкторское бюро 1 (КБ1), имеющее 4 отдела, и конструкторское бюро 2 (КБ2), имеющее 3 отдела. Финансирование первого проекта – a денежных единиц, второго – b. Практика проведения данного конкурса показывает, что, как правило, проект достаётся тому КБ, которое выделяет большее число отделов на его выполнение. Если каждое КБ выделяет одинаковое число отделов на выполнение проекта, то они имеют одинаковую вероятность на его получение. Требуется определить, сколько отделов следует выделить каждому КБ на выполнение первого и второго проектов с целью максимизации их финансирования.

Если в качестве стратегии КБ взять пару (α, β), где α и β – количество отделов, выделяемых соответственно под первый и второй проекты, то у КБ1 (игрока A) имеется 5 стратегий: $A_1 = (4; 0)$, $A_2 = (3; 1)$, $A_3 = (2; 2)$, $A_4 = (1; 3)$, $A_5 = (0; 4)$, а у КБ2 (игрока B) – 4 стратегии: $B_1 = (3; 0)$, $B_2 = (2; 1)$, $B_3 = (1; 2)$, $B_4 = (0; 3)$.

Так как целью каждого из игроков является максимизация собственного выигрыша (возможного финансирования), то соответствующая парная игра $G(5\times4)$ не является антагонистической (выигрыш одного игрока не равен проигрышу другого).

Для того чтобы свести данную игру к антагонистической необходимо из выигрышей a_{ij} игрока A вычесть средний выигрыш – $(a + b)/2$. В итоге получим антагонистическую игру $G(5\times4)$, представленную табл. 3.14.

Таблица 3.14

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$a/2$	$(a-b)/2$	$(a-b)/2$	$(a-b)/2$
A_2	$b/2$	$a/2$	$(a-b)/2$	$(a-b)/2$
A_3	$(b-a)/2$	$b/2$	$a/2$	$(a-b)/2$
A_4	$(b-a)/2$	$(b-a)/2$	$b/2$	$a/2$
A_5	$(b-a)/2$	$(b-a)/2$	$(b-a)/2$	$b/2$

Рассмотрим случай $a = b$, представленный табл. 3.15. Упростим игру, удалив доминируемые и дублируемые стратегии A_1, A_5, B_2, B_3, A_3. Получим игру $G(2\times2)$, представленную табл. 3.16.

Таблица 3.15

B_j / A_i	B_1	~~B_2~~	~~B_3~~	B_4
~~A_1~~	~~$a/2$~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
A_2	$a/2$	~~$a/2$~~	~~0~~	0
~~A_3~~	~~0~~	~~$a/2$~~	~~$a/2$~~	~~0~~
A_4	0	~~0~~	~~$a/2$~~	$a/2$
~~A_5~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~$a/2$~~

Таблица 3.16

B_j / A_i	B_1	B_4
A_2	$a/2$	0
A_4	0	$a/2$

Решив данную игру, например, методом Лагранжа, получим: $p_2 = p_4 = 0{,}5$; $q_1 = q_4 = 0{,}5$; $V = a/4$.

Тогда для исходной игры $G(5\times4)$ решением будет: $S_A = (0{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}0)$, $S_B = (0{,}5;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}5)$, $V_{КБ1} = a/4 + a = 5a/4$, $V_{КБ2} = 3a/4$.

Полученный результат означает, что КБ1 рекомендуется использовать равновероятно стратегии A_2 или A_4, т.е. распределить отделы между проектами в соотношении 3 к 1 или 1 к 3 с ожидаемым финансированием $5a/4$, а КБ2 – стратегии B_1 или B_4, т.е. направить все усилия (отделы) на выполнение одного из проектов с ожидаемым финансированием $3a/4$.

3.5. Контрольные вопросы к разделу 3

1. Приведите общий вид матричного представления антагонистической игры.
2. Дайте определения нижней и верхней оценки цены игры.
3. Сформулируйте лемму 3.1.
4. Дайте доказательство леммы 3.1.
5. Дайте определения седловой точки, оптимальных чистых стратегий игроков, решения игры.
6. Сформулируйте теорему 3.1.
7. Дайте определение смешанной стратегии.
8. Сформулируйте теорему 3.2.
9. Сформулируйте отношения предпочтения и безразличия на множестве стратегий.
10. Сформулируйте лемму 3.2.
11. Поясните метод Лагранжа.

12. Найдите решение игры $G(3\times3)$ в общем виде, используя метод Лагранжа.
13. Решите методом Лагранжа игру $G(3\times3)$, представленную следующей матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

14. Поясните метод линейного программирования.
15. Назовите основной недостаток точных методов поиска решения.
16. Поясните приближенный (итерационный) метод Брауна-Робинсона.
17. Рассмотрите задачу о конкурсе на реализацию проектов для случаев a = 2b и a = b / 2.

4. ИГРА ДВУХ ЛИЦ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СУММОЙ

4.1. Определение игры двух лиц с произвольной суммой

В отличие от игры двух лиц с нулевой суммой (антагонистической игры) ***игра двух лиц с произвольной суммой, или биматричная игра***, не носит антагонистического характера – в соответствующей конфликтной ситуации интересы сторон не строго противоположны, а просто различны, причем успех одной стороны обычно означает неудачу другой. Реальные конфликты не часто сводятся к моделям антагонистических игр, разве что при обычных играх (шахматы, шашки и т.д.) или при военных операциях малого масштаба, например, когда одна (нападающая) сторона пытается максимизировать вероятность уничтожения некоторого объекта, а другая (обороняющаяся) сторона – минимизировать эту вероятность.

Теория биматричных игр не так хорошо развита, как теория антагонистических игр, и не дает общих рекомендаций по их решению. Исследование таких игр усложняется тем, что игрокам может быть выгодно вступать в коалиции.

Биматричная игра $G(m\times n)$ с множествами $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, и $\{B_j\}$, $j = 1, \ldots ,n$, игроков A и B соответственно, задается двумя матрицами выигрышей $A = ||a_{ij}||$, $B = ||b_{ij}||$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, где элемент a_{ij} (b_{ij}) – выигрыш игрока A (B) в ситуации, когда игрок A выбирает стратегию A_i, а игрок B – стратегию B_j. Обычно две матрицы заменяются одной $||(a_{ij}, b_{ij})||$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, каждый элемент которой представляет собой пару (a_{ij}, b_{ij}) соответствующих выигрышей (табл. 4.1).

Таблица 4.1

A_n \ B_m	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1					
…					
A_i			$(a_{ij},\ b_{ij})$		
…					
A_m					

4.2. Теория Нэша для некооперативных игр

В качестве решения биматричной игры Дж. Нэшем (J. Nash) [2, 5] предложено считать ситуацию равновесия (S_A^*, S_B^*), которая определяется следующим образом.

Определение 4.1. Пара смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*), где $S_A^* = (p_i^*)$, $i = 1, \ldots, m$, $S_B^* = (q_j^*)$, $j = 1, \ldots, n$, является ***ситуацией равновесия***, если для любых других двух смешанных стратегиях $S_A = (p_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $S_B = (q_j)$, $j = 1, \ldots, n$, игроков A и B выполняются следующие условия:

1. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$,
2. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Согласно определению ситуация равновесия обладает свойством устойчивости, т.е. игрокам не выгодно от нее отступать. Нэш доказал следующую теорему [5].

Теорема 4.1. Каждая некооперативная биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия.

Решением биматричной игры является ситуация равновесия, причем, если таких ситуаций несколько, то они должны быть взаимозаменяемы (равноценны). Нэш доказал, что для любой биматричной игры существует ситуация равновесия, но не дал общего метода её поиска.

Рассмотрим примеры биматричных игр, к которым плохо применима теория Нэша.

1. «Дилемма заключенного»

Данная биматричная игра $G(2\times2)$ представлена табл. 4.2.

Таблица 4.2

B_m / A_n	B_1	B_2
A_1	(–1; –1)	(–10; 0)
A_2	(0; –10)	(–6; –6)

Интерпретация игры следующая.

Два заключенных находятся в разных камерах и подозреваются в совершении одного и того же преступления. Каждый из них располагает двумя стратегиями поведения: кооперативными (молчать и не давать показания) A_1 и B_1, и некооперативными (давать показания на другого) A_2 и B_2.

Нетрудно заметить, что вторые стратегии игроков предпочтительнее (доминируют) первых, и, следовательно, ситуацией равновесия будет пара (A_2, B_2) с выигрышем (–6; –6), но, очевидно, что ситуация (A_1, B_1), дающая выигрыш (–1; –1) более выгодна сразу для обоих игроков (правда, для ее достижения игрокам необходимо договориться между собой, т.е. вступить в коалицию, иначе можно попасть на невыгодные стратегии (A_1, B_2) и (A_2, B_1)).

2. «Конкурирующие фирмы»

Эта биматричная игра $G(2\times2)$ представлена табл. 4.3.

Таблица 4.3

B_m / A_n	B_1	B_2
A_1	(5; 5)	(2; 7)
A_2	(7; 2)	(3; 3)

Здесь также у игроков (конкурирующих фирм) по две стратегии: стратегии сохранения цен на продаваемый ими товар A_1, B_1 и стратегии снижения цен A_2, B_2. Аналогично предыдущей игре вторые стратегии предпочтительнее первых и ситуацией равновесия является пара (A_2, B_2) с выигрышем (3; 3), но и в этой игре ситуация (A_1, B_1) с выигрышем (5; 5) более выгодна сразу для обоих игроков (правда, и здесь для ее достижения фирмам необходимо договориться не снижать цены, что может противоречить их интересам).

3. «Семейный спор»

Рассмотри еще одну биматричную игру $G(2\times2)$, представленную табл. 4.4.

Таблица 4.4

A_n \ B_m	B_1	B_2
A_1	(2; 1)	(–1; –1)
A_2	(–5; –5)	(1; 2)

У игроков A – мужа и B – жены имеются по две стратегии: A_1 и B_1 – пойти на футбол; A_2 и B_2 – пойти в театр. В данном случае получаем две ситуации равновесия – (A_1, B_1) с выигрышем (2; 1) и (A_2, B_2) с выигрышем (1; 2), но так как ситуации равновесия не являются равноценными, то данная игра считается неразрешимой по Нэшу.

4.3. Рефлексивная игра

Для поиска решения биматричной игры может быть использована игровая модель в виде так называемой ***рефлексивной игры***, т.е. игры, в которой игрок моделирует поведение соперника.

Рассмотрим рефлексивную игру на примере приведенной выше игры «конкурирующие фирмы» (см. табл. 4.3) в предположении, что игрок A моделирует поведение (выбор) игрока B. Соответствующая матрица игры $G(2\times4)$ представлена табл. 4.5.

Таблица 4.5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3^+	B_4^-
A_1	(5; 5)	(2; 7)	(5; 5)	(2; 7)
A_2	(7; 2)	(3; 3)	(3; 3)	(7; 2)

У игрока B (в отличие от табл. 4.3) добавились еще две «предполагаемые» стратегии – $B_3^{+\,-}$ отвечать той же по номеру стратегией, что выбрал игрок A, и $\boldsymbol{B_4^-}$ – отвечать противоположной стратегией.

Доказано, что в рефлексивной игре выигрывает тот игрок, у которого ранг рефлексии на единицу больше, чем у соперника. Если ранг рефлексии отличается больше, чем на единицу, то исход игры не ясен.

4.4. Практический пример

Пусть имеется фирма, состоящая из двух отделов – производственного (П), в задачу которого входит производство некоторого товара, и транспортного (Т), который должен доставить произведенный товар потребителю. Известно, что доход отдела П от выпуска продукции в объеме одной машины равен a денежных единиц, затраты отдела Т на отправку потребителю одной машины с грузом равен c денежных единиц, а затраты на хранение на складе невывезенной продукции в объеме одной машины составляют b денежных единиц и делятся поровну между отделами П и Т.

Пусть также известно, что в интересующий период времени (например за рабочий день) отдел П может произвести продукции в объеме 5 или 10 машин, а отдел Т для ее перевозки выделить малую автоколонну (4 машины), большую автоколонну (7 машин), две малые автоколонны (8 машин) или одну большую и одну малую автоколонны (11 машин).

Моделью описанной ситуации может быть биматричная игра, представленная табл. 4.6.

Таблица 4.6

$Т_j$ / $П_i$	$T_1(4)$	$T_2(7)$	$T_3(8)$	$T_4(11)$
$П_1$ (5 машин)	$(4a - b/2;$ $-4c - b/2)$	$(-5a;\ -7c)$	$(5a;\ -8c)$	$(5a;\ -11c)$
$П_2$ (10 машин)	$(4a - 3b;$ $-4c - 3b)$	$(7a - 1{,}5b;$ $-7c - 1{,}5b)$	$(8a - b;$ $-8c - b)$	$(10a;\ -11c)$

Необходимо дать рекомендации руководителю отдела П о наиболее выгодном для него объеме производимой продукции (т.е. о выборе стратегии $П_1$ или $П_2$), учитывая, что отдел П заинтересован в максимизации своего дохода, а отдел Т – в минимизации своих затрат.

Для получения численных результатов примем $a = 10,\ b = 6,\ c = 2$. Тогда табл. 4.6 примет вид табл.4.7.

Таблица 4.7

$Т_j$ / $П_i$	$T_1(4)$	$T_2(7)$	$T_3(8)$	$T_4(11)$	$\min\limits_j a_{ij}$
$П_1$ (5 машин)	37; –11	50; –14	50; –16	50; –22	37
$П_2$ (10 машин)	22; –26	61; –23	74; –22	100; –22	22

Воспользуемся сначала методом максимина, ориентирующим руководителя отдела П на наиболее осторожное поведение. В этом случае оптимальной является стратегия $П_1$, гарантирующая отделу П доход в 37 денежных единиц (см. последний столбец табл. 4.7). Учитывая интересы отдела Т (как видно из табл. 4.7, минимальные затраты для Т будут при выборе стратегии $Т_1$), именно этот доход и будет получен отделом П.

Отметим, однако, что выбор стратегии $П_1$ вряд ли является наилучшим для отдела П. Так, если он выберет стратегию $П_2$ и сообщит о своем выборе руководителю отдела Т, то тот, руководствуясь интересами своего отдела, должен будет выбрать стратегии $Т_3$ или $Т_4$, что гарантирует доход отдела П в 74 или 100 денежных единиц. Более того, можно «стимулировать» отдел Т на выбор стратегии $Т_4$, поделившись с ним в этом случае частью дохода, например в 10 денежных единиц (при этом доход отдела П составит 90 денежных единиц, а затраты отдела Т – всего 12 единиц). Именно так скооперировано и рекомендуется действовать руководителю отдела П.

Изменим несколько исходную ситуацию, повысив стоимость хранения не вывезенной продукции: $a = 10,\ b = 10,\ c = 2$. Получим соответствующую таблицу табл. 4.8.

Таблица 4.8

Π_i \ T_j	$T_1(4)$	$T_2(7)$	$T_3(8)$	$T_4(11)$	$\min\limits_j a_{ij}$
Π_1 (5 машин)	35; –13	50; –14	50; –16	50; –22	35
Π_2 (10 машин)	10; –38	55; –29	70; –26	100; –22	10

Хотя в этом случае минимально возможный доход для отдела П при выборе стратегии Π_1 в 3,5 раза больше, чем при выборе стратегии Π_2 (35 и 10 соответственно),однако и в этом случае лучше выбрать стратегию Π_2, проинформировав о своем решении руководителя отдела Т. Тот, руководствуясь интересами своего отдела, должен будет выбрать стратегию T_4 (соответствующую минимальным затратам отдела Т), что гарантирует доход отдела П в 100 денежных единиц. Заметим, что в этой ситуации в «стимулировании» отдела Т нет необходимости.

4.5. Контрольные вопросы к разделу 4

1. Определите игру двух лиц с произвольной суммой.
2. Дайте определение ситуации равновесия в биматричной игре.
3. Сформулируйте теорему 4.1.
4. Приведите примеры биматричных игр, к которым плохо применима теория Нэша.
5. Почему игра типа «семейный спор» объявляется неразрешимой по Нэшу?
6. Определите рефлексивную игру.
7. Кто выигрывает в рефлексивной игре?
8. Рассмотрите практический пример на использование биматричной игры.
9. Рассмотрите в приведенном примере биматричной игры случаи $a = 10$, $b = 6$, $c = 5$ и $a = 10$, $b = 10$, $c = 5$.

5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ. ИГРЫ С «ПРИРОДОЙ»

5.1. Определение игры «с природой»

Под ***игрой с «природой»*** понимается модель конфликтной ситуации, где в качестве одной из конфликтующих сторон выступает некая объективная реальность, называемая «природой», действия («поведение») которой может влиять на выбор другого игрока, принимающего решения и называемого ЛПР – лицом, принимающим решения.

Рассмотрим игру с природой $G(m \times n)$, представленную в матричной форме (табл. 5.1).

Таблица 5.1

A_i \ $П_j$	$П_1$	…	$П_j$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

В табл. 5.1 a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, – выигрыш игрока A (ЛПР) при выборе им стратегии A_i в состоянии «природы» (условиях) $П_j$.

В играх с «природой» кроме выигрыша вводится также понятие риска, определяемое следующим образом.

Определение 5.1. ***Риском*** $\boldsymbol{r_{ij}}$ называется разность между выигрышем, который ЛПР получил бы, зная, в каких условиях $П_j$ он принимает решение, и выигрышем, который он получит, не зная этих условий и выбирая стратегию A_i, т.е. $r_{ij} = \max\limits_{j} a_{ij} - a_{ij}$.

Используя опр. 5.1, по матрице игры (выигрышей) $G(m \times n)$ может быть построена матрица рисков $R(m \times n)$, которая, как это будет показано ниже, также может быть применена для поиска оптимальной стратегии ЛПР. Матрица рисков $R(3 \times 4)$ для игры $G(3 \times 4)$ (табл. 5.2) представлена табл. 5.3.

Подчеркнем, что использовать методы решения антагонистических игр применительно к играм с «природой» нельзя, так как конфликтная ситуация имеет качественно иной характер из-за отсутствия сознательно противодействующего противника.

Таблица 5.2

$G(3 \times 4)$

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Таблица 5.3

R(3×4)

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

5.2. Методы решения игр «с природой»

5.2.1. Случай стохастической неопределенности

В случае стохастической неопределенности предполагаются известными вероятности q_j состояний «природы» Π_j, $j = 1, \ldots, n$. Для поиска оптимального решения применяется критерий Лапласа, согласно которому оптимальной для ЛПР является та стратегия, которая максимизирует средний выигрыш a_i:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \to \max$$

Легко показать, что эта же стратегия будет минимизировать средний риск r_i:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \to \min$$

В качестве примера рассмотрим игру, матрицы выигрышей и рисков которой представлены табл. 5.2 и табл. 5.3 соответственно.

Пусть заданы вероятности q_j: $q_1 = 0{,}1$; $q_2 = 0{,}5$; $q_3 = q_4 = 0{,}2$.

Тогда:

$a_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}2 = 4{,}9$;
$a_2 = 3 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}2 = \mathbf{5{,}7}$;
$a_3 = 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}2 = 5$.

Согласно критерию Лапласа оптимальной является стратегия A_2.

Расчет относительно рисков также приведет к стратегии A_2:

$r_1 = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = 2{,}5$;
$r_2 = 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}2 = \mathbf{1{,}7}$;
$r_3 = 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}2 = 2.4$.

5.2.2. Случай с неизвестными вероятностями состояний «природы»

Если вероятности состояний «природы» не известны, то для поиска решения ЛПР может применять различные критерии оптимальности. Рассмотрим наиболее используемые критерии.

Критерий Вальда – наиболее осторожный критерий (критерий крайнего пессимизма), согласно которому оптимальной для ЛПР является стратегия, максимизирующая минимальный выигрыш:

$$V = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Критерий Сэвиджа – также осторожный критерий, согласно которому оптимальной для ЛПР является стратегия, минимизирующая максимальный риск:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} .$$

Компромиссный критерий Гурвица – компромиссный критерий, согласно которому в качестве оптимальной для ЛПР выбирается стратегия, максимизирующая следующее выражение:

$$H = \max_i (k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij}) ,$$

где k – коэффициент осторожности (пессимизма), $0 \le k \le 1$. Заметим, что при $k = 1$ критерий Гурвица переходит в критерий Вальда, а при $k = 0$ имеем так называемый критерий «крайнего оптимизма», предлагающий ЛПР в качестве оптимальной стратегию, максимизирующую максимальный выигрыш.

Естественно, чем ответственнее выбор и чем меньше склонен рисковать ЛПР, тем ближе к 1 следует выбирать коэффициент k. При отсутствии у ЛПР информации для выбора или «по умолчанию» рекомендуется выбирать $k \approx 0{,}6$.

Если ЛПР сомневается при выборе критерия оптимальности, то рекомендуется применить несколько критериев и выбрать ту стратегию, которую рекомендует большинство из них.

В качестве примера рассмотрим игру с «природой», матрицы $G(3\times4)$ и $R(3\times4)$ которой с некоторыми дополнительными столбцами представлены соответственно табл. 5.4 и табл. 5.5.

Таблица 5.4

$G(3\times4)$

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	α_i	w_i	h_i
A_1	19	30	41	49	19	49	31
A_2	51	38	10	20	10	51	26,4
A_3	73	718	81	11	11	81	39

Таблица 5.5

$G(3\times4)$

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	s_i
A_1	54	8	0	0	54
A_2	22	0	71	29	71
A_3	0	30	40	38	40

Дополнительные столбцы таблиц содержат следующую информацию, определяемую по соответствующим матрицам выигрышей и рисков: $a_i = \min_j a_{ij}$, $w_i = \max_j a_{ij}$, $h_i = k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij}$, $s_i = \min_j r_{ij}$.

Применение соответствующих критериев приведет к следующим результатам:

- согласно критерию Вальда оптимальной для ЛПР стратегией будет A_1;
- согласно критерию Сэвиджа оптимальной для ЛПР стратегией будет A_3;
- согласно критерию Гурвица (с $k = 0{,}6$) оптимальной для ЛПР стратегией будет A_3.

Два критерия из трех рекомендуют ЛПР выбрать стратегию A_3., что и следует сделать, если ЛПР не боится риска получить очень маленький выигрыш 11, возможный при выборе этой стратегии. Если такой риск не приемлем для ЛПР, то следует выбрать наиболее осторожную стратегию A_1, рекомендуемую критерием Вальда и гарантирующую минимальный выигрыш 19.

Заметим, что в играх с «природой», как правило, не используются смешанные стратегии по следующим причинам:

- в антагонистических играх смешанные стратегии применяются часто для того, чтобы обмануть, запутать противника, что в играх с «природой» не имеет смысла;
- аппарат смешанных стратегий ориентирован на получение максимального среднего выигрыша, т.е. выигрыша, который будет получен при многократном повторении игры, но в таком случае накапливается статистика и выявляются вероятности q_i состояний «природы», при наличии которых может быть применен критерий Лапласа, дающий решение в чистых стратегиях.

5.3. Контрольные вопросы к разделу 5

- Дайте определение игры с «природой».
- Определите понятие риска.
- Сформулируйте критерий Лапласа для случая стохастической неопределенности.
- Сформулируйте критерий Вальда.
- Сформулируйте критерий Сэвиджа.
- Сформулируйте критерий Гурвица.
- Приведите пример на решение игры с «природой».
- Рассмотрите игру с природой $G(4\times3)$, заданную следующей матрицей игры для случая стохастической неопределенности при $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}1$; $q_4 = 0{,}2$ и случая отсутствия вероятностей состояний природы:

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

- Дайте пояснения по поводу использования смешанных стратегий в играх с «природой».

6. ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

6.1. Определение игры с упорядоченными исходами при наличии ряда критериев

Рассмотрим следующий пример. Пусть ожидается эпидемия некоторого заболевания, который может быть вызван вирусами, условно обозначенными B_1, B_2, B_3. Против данного типа вирусов могут быть использованы вакцины типа $V_1, \ldots, V_7$. Предполагается, что чем больше номер вакцины i, тем меньше затраты α_i (в некоторых условных единицах) на ее производство, пусть $\alpha_i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Эффективность вакцины типа V_i, $i = 1, \ldots, 7$, оценивается величиной $\beta_i \in \{1; 2; 3; 4\}$ (чем больше значение β_i, тем эффективнее вакцина).

Технология производства вакцины такова, что одновременно в массовом порядке может производиться вакцина только одного типа. Требуется определить, какого типа вакцину следует производить с целью минимизации затрат на производство (что позволит произвести больше вакцины при тех же затратах) и максимизации ее эффективности.

Введем понятие ***исхода*** $R(V_i, B_j) = (\alpha_i, \beta_i)$ – результата (выигрыша), отражающего как затраты α_i на производство вакцины V_i, так и ее эффективность β_i применительно к вирусу типа B_j. Тогда для поиска оптимального решения (стратегии производства) может быть использован критерий

$$R(V_i, B_j) \to (max, max).$$

6.2. Поиск решения игры с упорядоченными исходами

Пусть задана табл. 6.1 возможных исходов. Нетрудно заметить, что проблемная ситуация моделируется игрой с «природой», где стратегиями (выборами) ЛПР являются типы вакцин, а состояниями «природы» (условиями) – типы вирусов. Поскольку вероятности состояний «природы» неизвестны, то в качестве критерия оптимальности выберем наиболее осторожный критерий Вальда, предварительно выделив наихудший исход для вакцины каждого типа (см. последний столбец табл. 6.1).

Таблица 6.1

B_j V_i	B_1	B_2	B_3	$\min(\alpha_i, \beta_j)$
~~V_1~~	~~(1; 4)~~	~~(1; 3)~~	~~(1; 3)~~	~~(1; 3)~~
V_2	(2; 3)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 3)
~~V_3~~	~~(3; 4)~~	~~(3; 3)~~	~~(3; 2)~~	~~(3; 2)~~
~~V_4~~	~~(4; 3)~~	~~(4; 2)~~	~~(4; 3)~~	~~(4; 2)~~
V_5	(5; 2)	(5; 3)	(5; 2)	(5; 2)
~~V_6~~	~~(6; 3)~~	~~(6; 2)~~	~~(6; 1)~~	~~(6; 1)~~
V_7	(7; 1)	(7; 2)	(7; 3)	(7; 1)

Применение критерия Вальда сводится к установлению отношения предпочтения (доминирования) на множестве выделенных исходов и удаления доминируемых исходов, а значит, и соответствующих им стратегий (вакцин) ЛПР (отмечены перечеркнутыми строками). В результате получаем множество эффективных (недоминируемых) решений Парето $\{V_2, V_5, V_7\}$, для окончательного выбора из которого ЛПР необходима дополнительная информация. Например, если известно, что эпидемия не носит всеобщего характера (заболевают в основном дети и пожилые люди), но болезнь протекает тяжело, то предпочтение следует отдать наиболее дорогой, но и наиболее эффективной в целом вакцине типа V_2. Для противоположного случая – всеобщность эпидемии при сравнительной легкости заболевания – целесообразно производить наиболее дешевую (но и менее эффективную) вакцину типа V_7. Для промежуточного случая или при отсутствии дополнительной информации может быть рекомендована вакцина типа V_5. Заметим, что если имеется достаточно средств, то следует производить наиболее эффективную вакцину V_2.

Если для той же задачи, например, поступила информация, что ожидается вирус типа B_3, то табл. 6.1 трансформируется в табл. 6.2.

Таблица 6.2

V_i \ B_j	$\boldsymbol{B}_3$
$\boldsymbol{V}_1$	(1; 3)
$\boldsymbol{V}_2$	(2; 4)
$\boldsymbol{V}_3$	(3; 2)
$\boldsymbol{V}_4$	(4; 3)
$\boldsymbol{V}_5$	(5; 2)
$\boldsymbol{V}_6$	(6; 1)
$\boldsymbol{V}_7$	(7; 3)

Снова используя отношение доминирования на множестве исходов, получим множество эффективных решений Парето, состоящее только из двух решений (вакцин) V_2, и V_7. Привлекая дополнительную информацию о тяжести заболевания и его массовости, решается вопрос о том, какую из двух вакцин производить.

6.3. Контрольные вопросы к разделу 6

- Дайте определение игры с упорядоченными исходами. Приведите пример.
- Каким образом можно ввести отношение доминирования на множестве исходов?
- Когда в качестве критерия оптимальности рекомендуется использовать критерий Вальда?
- Рассмотрите на примере возможности решения игры с упорядоченными исходами.
- Для примера, представленного табл. 6.1, рассмотрите случай, когда ожидается вирус B_1.
- Для примера, представленного табл. 6.1, рассмотрите случай, когда ожидается вирус B_2.
- Для примера, представленного табл. 6.1, рассмотрите случай стохастической неопределенности с вероятностями $q_1 = 0{,}5$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}2$.

7. ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

7.1. Общее описание системы

Система MatrixGames[1] предназначена для решения матричных игр с использованием как точных (метода Лагранжа и симплекс-метода линейного программирования), так и приближенного метода (метода итераций Брауна-Робинсона).

Главное окно системы представлено на рис. 7.1.

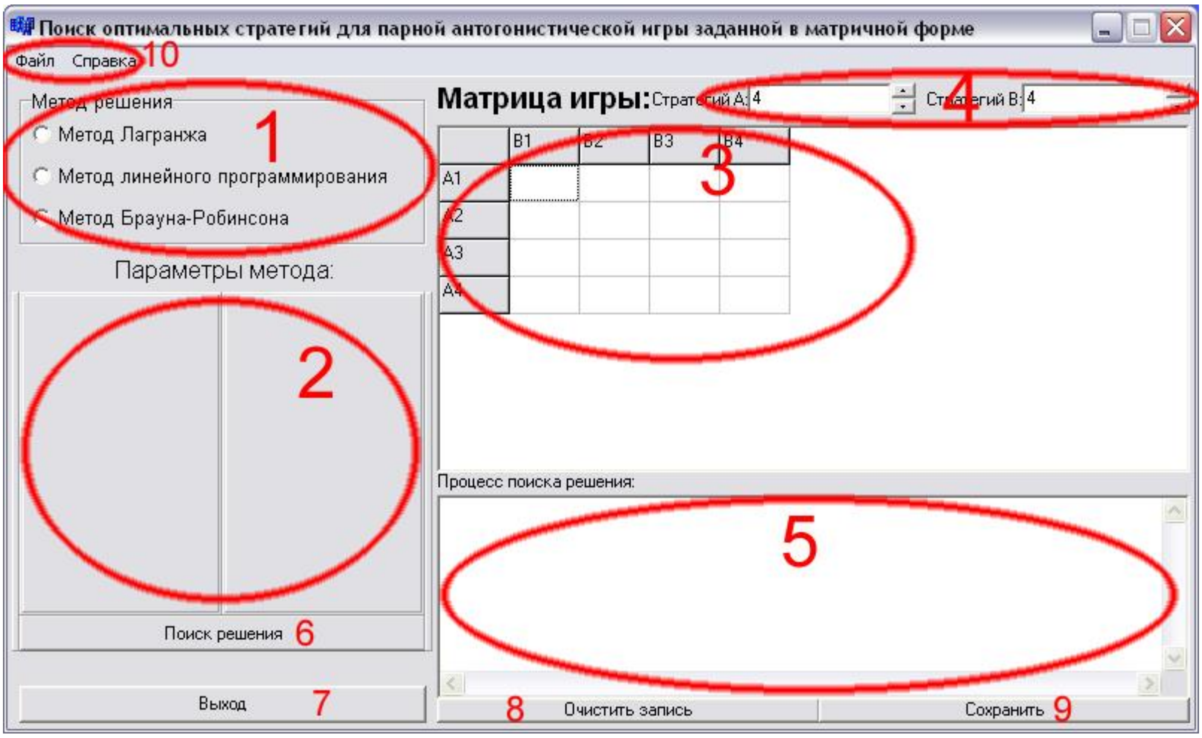


Рис. 7.1. Главное окно системы MatrixGames

Главное окно содержит следующие поля и кнопки (на рис. 7.1 они обведены овалами и пронумерованы):

1. ***Метод решения*** – для выбора метода решения (поиска оптимальной стратегии);
2. ***Параметры метода*** – для задания параметров выбранного метода;
3. ***Матрица игры*** – для ввода и отображения матрицы игры;
4. ***Стратегий А*** (***Стратегий В***) – для задания количества стратегий игроков *А* и *В*;
5. ***Процесс поиска решения*** – для отображения хода решения и полученных результатов;
6. ***Поиск решения*** – кнопка запуска процесса поиска решения;
7. ***Выход*** – кнопка для прекращения процесса поиска и выхода из программы;

[1] Программная реализация системы MatrixGames выполнена студентами Ашраповым Д.Ф. и Ашраповой О.В. под руководством старшего преподавателя Чибизовой Н.В.

8. ***Очистить запись*** – кнопка для очистки записи о процессе поиска решения;
9. ***Сохранить*** – кнопка для сохранения записи о процессе поиска решения в текстовом файле;
10. ***Файл, Справка*** – кнопки меню программы, включающее пункты сохранения, загрузки и очистки матрицы игры, а также вызов помощи (Help).

В качестве примера на рис. 7.2 приведено поле задания параметров для итерационного метода Брауна-Робинсона со следующими окошками для выбора:

- ***Приводить матрицу к квадратной*** – для запуска алгоритма поиска и удаления доминируемых и дублируемых стратегий;
- ***Показывать значения для итераций*** – для просмотра выбранного количество итераций метода
- ***Показывать p, q*** – для вывода в окне, отображающем итерационный процесс, вместе (или вместо) с накопленным выигрышем вероятностей p и q для смешанных стратегий, что позволяет наблюдать их сходимость к точному решению.

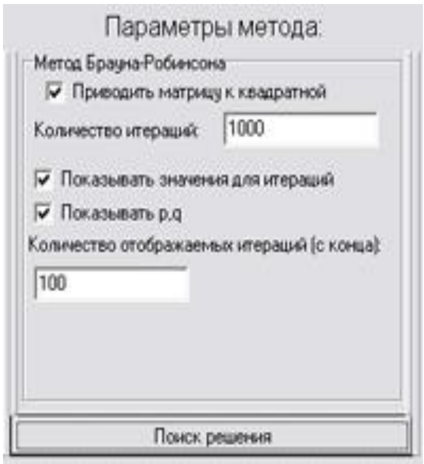


Рис. 7.2. Пример поля для задания параметров метода

7.2. Примеры работы с системой

Пусть имеется игра $G(3\times4)$, представленная в матричном виде (табл. 7.1).

После ввода матрицы, выбора метода решения (метода Лагранжа) и активизации процедуры поиска решения главное окно системы будет иметь вид, представленный на рис. 7.3.

Таблица 7.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

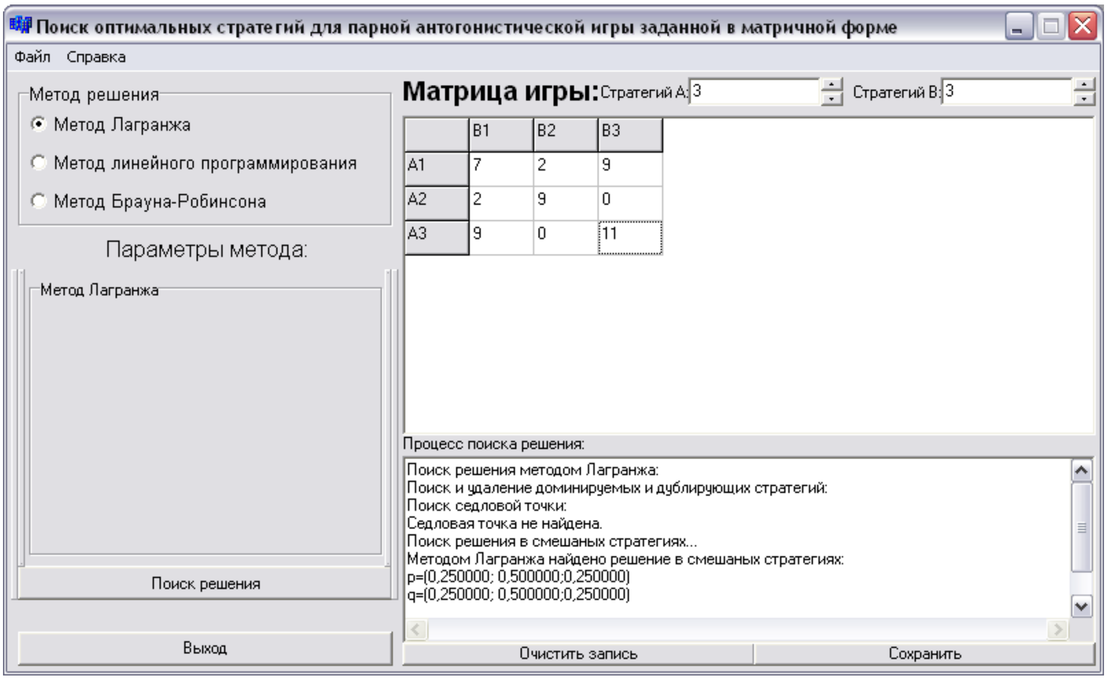


Рис. 7.3. Вид главного окна с полученными результатами

Ход решения и полученные результаты отображены в окне ***Процесс поиска решения***:

Поиск решения методом Лагранжа.
Поиск и удаление доминируемых и дублируемых стратегий.
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях.
Методом Лагранжа найдено решение в смешанных стратегиях:
p = (0,250000; 0,500000; 0,250000)
q = (0,250000; 0,500000; 0,250000)
Цена игры: V = 5,000000.

В случае выбора для решения симплекс-метода окно ***Процесс поиска решения*** примет следующий вид:

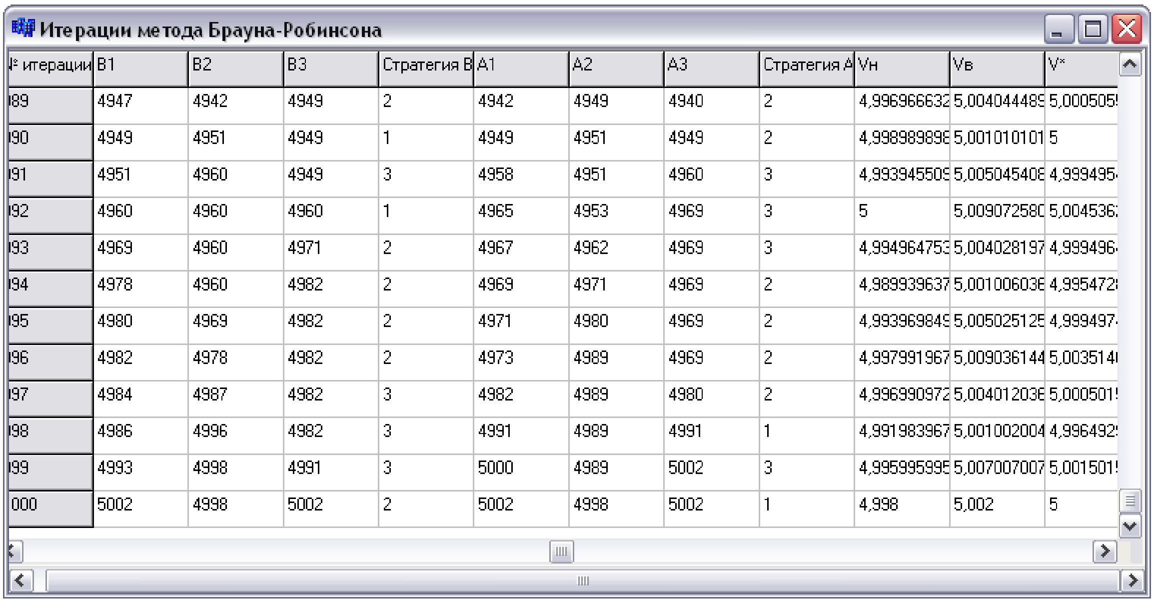
Поиск решения симплекс-методом.
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях.
Симплекс-методом найдено решение в смешанных стратегиях:
p = (0,250000; 0,500000; 0,250000)
q = (0,250000; 0,500000; 0,250000)
Цена игры V = 5,000000.

В случае выбора для решения итерационного метода Брауна-Робинсона окно ***Процесс поиска решения*** примет следующий вид:

Поиск решения методом Брауна-Робинсона.
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях…
Методом Брауна-Робинсона найдено решение в смешанных стратегиях:

p = (0,249000; 0,500000; 0,251000)
q = (0,249000; 0,500000; 0,251000)
Цена игры V = 5,000000.

Результаты последних итераций в табличном виде будут представлены в специальном окне (рис. 7.4).


Итерации метода Брауна-Робинсона

№ итерации	B1	B2	B3	Стратегия B	A1	A2	A3	Стратегия A	Vн	Vв	V*
89	4947	4942	4949	2	4942	4949	4940	2	4,996966632	5,00404448	5,000505
90	4949	4951	4949	1	4949	4951	4949	2	4,99898989	5,001010101	5
91	4951	4960	4949	3	4958	4951	4960	3	4,99394550	5,00504540	4,999495
92	4960	4960	4960	1	4965	4953	4969	3	5	5,00907258	5,004536
93	4969	4960	4971	2	4967	4962	4969	3	4,99496475	5,004028197	4,999496
94	4978	4960	4982	2	4969	4971	4969	2	4,989939637	5,00100603	4,995472
95	4980	4969	4982	2	4971	4980	4969	2	4,99396984	5,00502512	4,999497
96	4982	4978	4982	2	4973	4989	4969	2	4,997991967	5,009036144	5,00351
97	4984	4987	4982	3	4982	4989	4980	2	4,996990972	5,00401203	5,000501
98	4986	4996	4982	3	4991	4989	4991	1	4,991983967	5,001002004	4,996492
99	4993	4998	4991	3	5000	4989	5002	3	4,99599599	5,007007007	5,001501
000	5002	4998	5002	2	5002	4998	5002	1	4,998	5,002	5

Рис. 7.4. Окно с результатами последних итераций

Рассмотрим еще один пример для игры $G(5\times5)$ при наличии дублируемых и доминируемых стратегий. Вид главного окна с полученными результатами при использовании метода Лагранжа представлен на рис. 7.5.

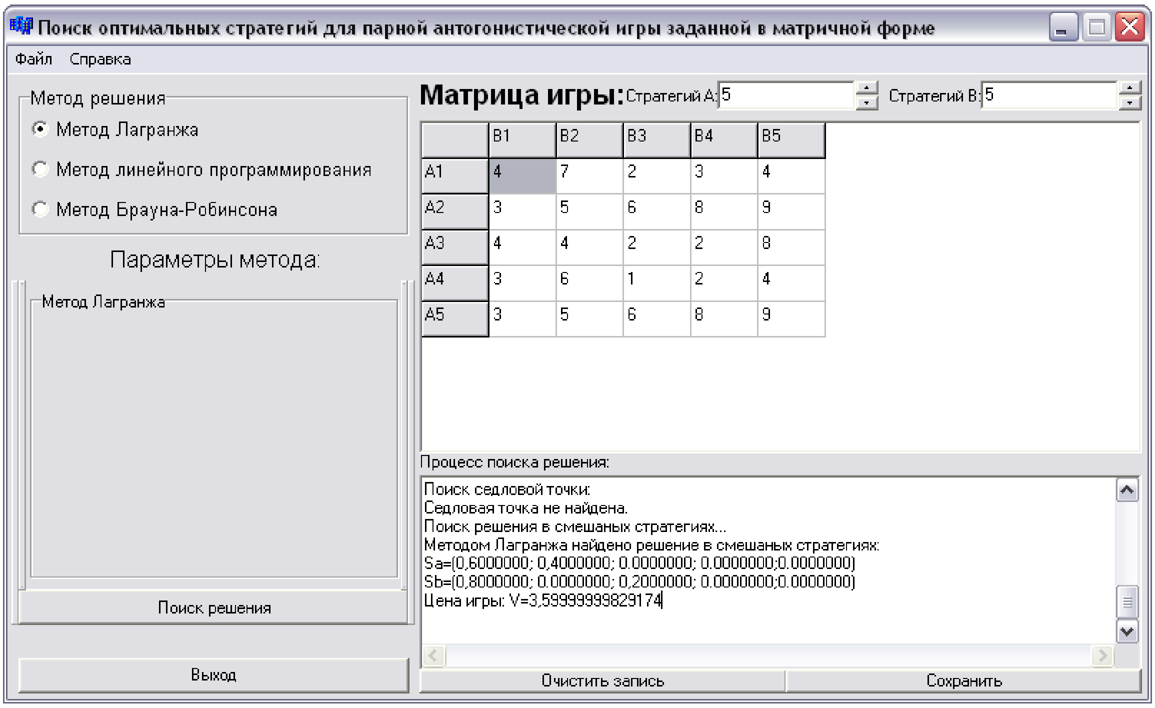


Рис. 7.5. Вид главного окна с полученными результатами для метода Лагранжа

В окне Процесс поиска решения будет выведена следующая информация:

Поиск решения методом Лагранжа.
Поиск и удаление доминируемых и дублируемых стратегий:
Стратегия B1 доминирует над стратегией *B*2!
Стратегия B1 доминирует над стратегией *B*5!
Стратегия B3 доминирует над стратегией *B*4!
Стратегия B3 доминирует над стратегией *B*5!
Стратегия B4 доминирует над стратегией *B*5!
Удаление стратегии *B*2!
Удаление стратегии *B*5!
Удаление стратегии *B*4!
Стратегия *A*1 дублирует стратегию *A*3!
Стратегия *A*1 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*2 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*2 дублирует стратегию *A*5!
Стратегия *A*3 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*5 доминирует над стратегией *A*4!
Удаление стратегии *A*3!
Удаление стратегии *A*4!
Удаление стратегии *A*5!
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях.
Методом Лагранжа найдено решение в смешанных стратегиях:
S_a = (0,600000; 0,400000; 0,000000; 0,000000; 0,000000)
S_b = (0,800000; 0,000000; 0,200000; 0,000000; 0,000000)
Цена игры: V = 3,599999.

При использовании симплекс метода соответственно получим:

Поиск решения симплекс-методом.
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях.
Симплекс методом найдено решение в смешанных стратегиях:
S_a = (0,600000; 0,400000; 0,000000; 0,000000; 0,000000)
S_b = (0,800000; 0,000000; 0,200000; 0,000000; 0,000000)
Цена игры V = 3,599999.

При использовании метода Брауна-Робинсона будет выдана следующая информация:

Поиск решения методом Брауна-Робинсона.
Поиск и удаление доминируемых и дублирующих стратегий:
Стратегия B1 доминирует над стратегией *B*2!
Стратегия B1 доминирует над стратегией *B*5!
Стратегия B3 доминирует над стратегией *B*4!
Стратегия B3 доминирует над стратегией *B*5!
Стратегия B4 доминирует над стратегией *B*5!

Удаление стратегии *B*2!
Удаление стратегии *B*5!
Удаление стратегии *B*4!
Стратегия *A*1 дублирует стратегию *A*3!
Стратегия *A*1 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*2 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*2 дублирует стратегию *A*5!
Стратегия *A*3 доминирует над стратегией *A*4!
Стратегия *A*5 доминирует над стратегией *A*4!
Удаление стратегии *A*3!
Удаление стратегии *A*4!
Удаление стратегии *A*5!
Поиск седловой точки:
Седловая точка не найдена.
Поиск решения в смешанных стратегиях.
Методом Брауна-Робинсона найдено решение в смешанных стратегиях:
S_a = (0,600000; 0,400000; 0,000000; 0,000000; 0,000000)
S_b = (0,800000; 0,000000; 0,200000; 0,000000; 0,000000)
Цена игры V = 3,599500.

Фрагмент таблица значений для последних 100 итераций представлен на рис. 7.6.

Итерации метода Брауна-Робинсона

№ итерации	Стратегия А	B1	B3	Стратегия В	A1	A2	Стратегия А	Vн	Vв	V*
987	1	0,800405268	0,199594731	1	0,600810536	0,399189463	1	3,599797365	3,600810536	3,600303951
988	2	0,799595141	0,200404858	3	0,600202429	0,399797570	2	3,599190283	3,601214574	3,600202429
989	2	0,799797775	0,200202224	1	0,599595551	0,400404448	2	3,599595551	3,600606673	3,600101112
990	1	0,8	0,2	1	0,6	0,4	1	3,598989898	3,6	3,599494949
991	1	0,800201816	0,199798183	1	0,600403632	0,399596367	1	3,599394550	3,600403632	3,599899091
992	1	0,800403225	0,199596774	1	0,600806451	0,399193548	1	3,599798387	3,600806451	3,600302419
993	2	0,799597180	0,200402819	3	0,600201409	0,399798590	2	3,599194360	3,601208459	3,600201409
994	2	0,799798792	0,200201207	1	0,599597585	0,400402414	2	3,599597585	3,600603621	3,600100603
995	1	0,8	0,2	1	0,6	0,4	1	3,598994974	3,6	3,599497487
996	1	0,800200803	0,199799196	1	0,600401606	0,399598393	1	3,599397590	3,600401606	3,599899598
997	1	0,800401203	0,199598796	1	0,600802407	0,399197592	1	3,599799398	3,600802407	3,600300902
998	2	0,799599198	0,200400801	3	0,600200400	0,399799599	2	3,599198396	3,601202404	3,600200400
999	2	0,799799799	0,200200200	1	0,599599599	0,400400400	2	3,599599599	3,600600600	3,600100100

Рис. 7.6. Окно с результатами последних итераций

7.3. Практический пример

Снова вернемся к уже рассмотренной ранее (см. п. 3.4) задаче о конкурсе на реализацию двух проектов при участии конструкторских бюро КБ1 и КБ2. Напомним, что у КБ1 (игрока *A*) имеется 5 стратегий: A_1 = (4; 0), A_2 = (3; 1), A_3 = (2; 2), A_4 = (1; 3), A_5 = (0; 4); у КБ2 (игрока *B*) – 4 стратегии: B_1 = (3; 0), B_2 = (2; 1), B_3 = (1; 2), B_4 = (0; 3).

Пусть $a = 16$, $b = 2$ (т.е. финансирование первого проекта существенно превосходит финансирование второго проекта).

После приведения данной игры $G(5\times4)$ к антагонистической посредством вычитания из выигрышей игрока A средней величины финансирования обоих проектов $(a + b) / 2 = 9$, получим ее матричное представление в виде табл. 7.2.

Таблица 7.2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	7	7
A_2	1	8	7	7
A_3	–7	1	8	7
A_4	–7	–7	1	8
A_5	–7	–7	–7	1

Далее, после проверки на отсутствие седловой точки и упрощения матрицы игры путем удаления доминируемой стратегии A_5, получим игру $G(4\times4)$, представленную табл.7.3.

Таблица 7.3

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	7	7
A_2	1	8	7	7
A_3	–7	1	8	7
A_4	–7	–7	1	8

В табл. 7.4 приведены результаты, полученные программной системой MatrixGames при использовании приближенного метода Брауна-Робинсона (при задании различного числа итераций) и точного метода Лагранжа (последняя строка таблицы) с округлением результата до трех знаков после запятой.

Из таблицы видно, что некоторая стабилизация для итерационного метода (особенно относительно величины $\boldsymbol{V}^*$) наступает при числе итераций более 10000.

Таблица 7.4

Число итераций	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4	V^*
100	0.99	0.01	0	0	0.06	0.03	0.93	0	7.03
200	0,885	0,110	0,005	0	0,045	0,240	0,485	0,230	7,027
500	0,954	0,044	0,002	0	0,018	0,096	0,194	0,692	7,009
1000	0,977	0,022	0,001	0	0,009	0,048	0,097	0,846	7,006
3000	0,905	0,089	0,006	0,003	0,003	0,023	0,175	0,798	7,002
10000	0,895	0,093	0,013	0,001	0,004	0,023	0,180	0,793	7,003
100000	0,879	0,107	0,013	0,002	0,002	0,014	0,111	0,873	7,002
1000000	0,876	0,109	0,013	0,002	0,002	0,013	0,110	0,875	7,002
Точный метод	0,875	0,110	0,013	0,002	0,002	0,013	0,110	0,875	7,002

Вернёмся теперь к исходной задаче. Вычеркнутая стратегия A_5 будет присутствовать в итоговом результате с вероятностью 0:

$$S_A^* = (0,875;\ 0,110;\ 0,013;\ 0,002;\ 0);$$
$$S_B^* = (0,002;\ 0,013;\ 0,110;\ 0,875);$$
$$V^* = 7,002.$$

Если теперь вернуться к начальной ситуации с возможным финансированием КБ1 и КБ2 и округлить результаты, то получим:

$$S_A = (0,9;\ 0,1;\ 0,0;\ 0,0;\ 0,0);$$
$$S_B = (0,0;\ 0,0;\ 0,1;\ 0,9);$$
$$V_A = 16,0;$$
$$V_B = 2,0,$$

Таким образом, КБ1 рекомендуется все усилия направить на выполнение первого проекта, возможно, выделив один отдел на выполнение второго проекта, а КБ2 – наоборот, все усилия направить на выполнение второго проекта, возможно, выделив один отдел на выполнение первого.

7.4. Контрольные вопросы к разделу 7

1. Дайте общее описание программной системы MatrixGames.
2. Поясните структуру главного окна системы MatrixGames.
3. Поясните структуру окна для итерационного метода Брауна-Робинсона.
4. Поясните структуру окна для метода Лагранжа.
5. Поясните структуру окна для метода линейного программирования (симплекс метода).
6. Поясните работу с системой MatrixGames.
7. Рассмотрите практический пример использования системы MatrixGames.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Фон Нейман Д., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ., М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970, 708 с.
2. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 272 с.
3. **Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.** Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981, 336 с.
4. **Башлыков А.А., Еремеев А.П.** Экспертные системы поддержки принятия решений в энергетике / Под. Ред. А.Ф. Дьякова. М.: Издательство МЭИ, 1994, 216 с.
5. **Оуэн Г.** Теория игр: Пер. с англ., М.: Мир, 1971, 230 с.
6. **Воробьев Н.Н.** Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984, 496 с.
7. **Нильсон Н.** Искусственный интеллект: методы поиска решений: Пер. с англ., М.: Мир, 1973, 270 с.
8. **Люгер Д.Ф.** Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е издание: Пер. с англ., М.: Издательский дом «Вильямс», 2003, 864 с.
9. **Вентцель Е.С.** Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980, 208 с.
10. **Розен В.В.** Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений). М.: Радио и связь, 1982, 168 с.
11. **Вилкас Э.Й.** Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990, 256 с.
12. **Ларичев О.И.** Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Логос, 2002, 392 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Еремеев Александр Павлович

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие
по курсам
«Теория игр и исследование операций», «Теория принятия решений»
для студентов, обучающихся по специальностям
«Прикладная математика и информатика»,
«Информатика и вычислительная техника»,
«Информационные системы и технологии»,
направлениям «Прикладная математика и информатика»,
«Информатика и вычислительная техника»

Редактор издательства Е.М. Коновалова

Темплан издания МЭИ 2006(I), учебн. Подписано к печати 12.12.06
Печать офсетная Формат 60×84/16 Физ. печ. л.
Тираж 200 экз. Изд. № Заказ Цена

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14
Отпечатано в типографии НИИ «Геодезия», 141292, Московская обл.,
г. Красноармейск, просп. Испытателей, д. 14

ISBN 5-7046-1383-7