Топологические уравнения

2. <u>Анализ электрических цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа.</u>

Законы Кирхгофа устанавливают соотношения для токов и напряжений ***в разветвленных*** электрических цепях. На базе законов Кирхгофа формируются уравнения электрических цепей.

При составлении уравнений по законам Кирхгофа необходимо задаться условно-положительными направлениями токов во всех ветвях, обозначив выбранное направление стрелками. Уравнения составляются для узлов и контуров схемы электрической цепи.

Ветвью электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют участок электрической цепи, в котором ток имеет одно и то же значение вдоль всего участка. ***Особая ветвь*** – ветвь с идеальным источником тока *J*, ток в этой ветви считается известным и равным току источника.

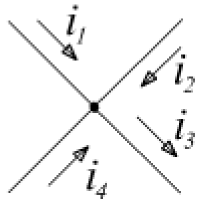
Узлом электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют место соединения трех и более ветвей

Контуром электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. ***Независимый контур*** должен содержать ветвь, входящую только в данный контур и не входящую в другие контуры.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в одном узле, равна нулю. Уравнение, составленное по этому закону, имеете вид:

$$\boxed{\sum I_k = 0},$$

причем токи, выходящие из узла, записывают в уравнении с положительным знаком, а токи, входящие в узел – с отрицательным знаком.



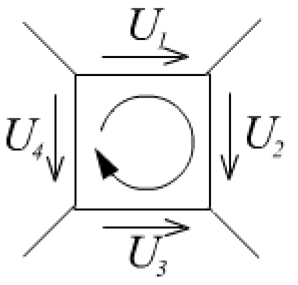
$$-i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

Необходимое и достаточное ***количество уравнений по первому закону Кирхгофа*** равно $n_1 = n_y - 1$, n_y – число узлов.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений ветвей вдоль любого контура равна нулю. Уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа, имеете вид:

$$\boxed{\sum U_k = 0},$$

причем напряжения, направления которых совпадают с направлением обхода контура, берутся с положительным знаком, а напряжения, направления которых противоположны направлению обхода контура – с отрицательным знаком. Напряжение ветвей состоит из напряжений отдельных элементов, входящих в ветвь.



$$\sum_{K=1}^{n_B} U_K(t) = 0$$

$$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0$$

Часто пользуются еще одной формулировкой ***второго закона Кирхгофа***: алгебраическая сумма напряжений в пассивных элементах (резисторах) любого контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.

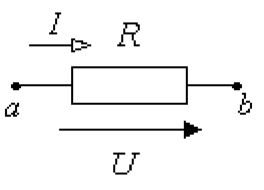
$$\boxed{\sum R_k I_k = \sum E_k}$$

В таком случае контур не должен содержать ветви с источником тока (особые ветви), только ветви с резистивными элементами и источниками ЭДС (***RE – ветви***).

Необходимое и достаточное ***количество уравнений по второму закону Кирхгофа*** равно $к_{II}=n_в-(n_у-1)$, где $n_в$ – число ветвей. Таким образом, число неизвестных в уравнениях, составленных по первому и второму закону Кирхгофа, будет равно числу *RE* – ветвей с неизвестными токами или напряжениями. Если в число ветвей включены особые ветви, то неизвестными являются также напряжения на источниках тока U_J.

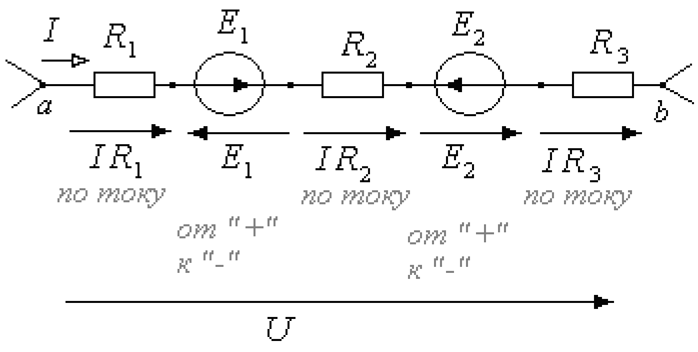
2.3. Компонентные уравнения для ветвей электрической цепи.

1) Для резистивного ветви компонентное уравнение – ***закон Ома***:



$$U = R \cdot I \quad \text{или} \quad I = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}.$$

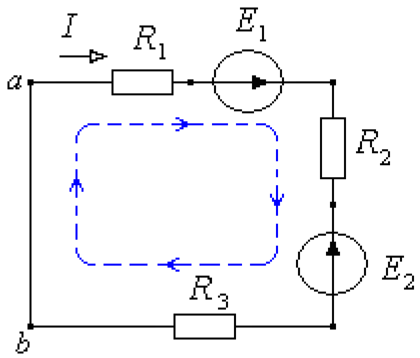
2) Для ветви, представляющей собой последовательное соединение источников ЭДС и резисторов, компонентное уравнение имеет вид ***обобщенного закона Ома***:



Напряжение ветви $U = \varphi_a - \varphi_b$ в соответствии с выбранным направлением тока (от a к b) и компонентными уравнениями участков равно:

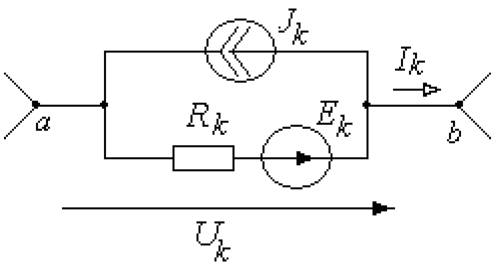
$U = IR_1 - E_1 + IR_2 + E_2 + IR_3$, следовательно $I = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b + E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$.

Если $\varphi_a = \varphi_b$, то для одноконтурной схемы $I = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$.



Это соответствует уравнению по второму закону Кирхгофа: $I = \dfrac{\sum E_n}{\sum R_k} = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$.

3) Для формализации математического описания цепи удобно использовать понятие ***обобщенной ветви***, содержащей три типа идеализированных элементов цепей постоянного тока – резистор, идеальный источник ЭДС и источник тока:



$$U_K = \varphi_A - \varphi_B$$

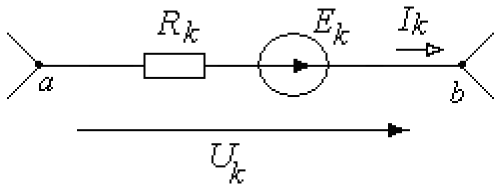
$$\begin{cases} I_K = -J_K + I_{RK} \\ U_K = U_{RK} - E_K = R_k \cdot I_{RK} - E_K \end{cases}$$

Компонентное уравнение обобщенной ветви (*закон **Ома** для **обобщенной ветви***) имеет вид:

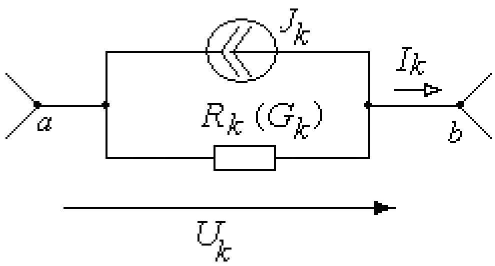
$$\boxed{U_k = R_k(I_k + J_k) - E_k \text{ или } I_k = G_k(U_k + E_k) - J_k}$$

Частные случаи:

- ***RE – ветвь***: $J_k = 0$, $U_k = R_k I_k - E_k$, $I_k = G_k(U_k + E_k)$



- ***GJ– ветвь***: $E_k = 0$, $U_k = R_k(I_k + J_k)$, $I_k = G_k U_k - J_k$.



! Обобщенные ветви позволяют компонентные уравнения всех типов ветвей записать в одинаковом виде, что позволяет формализовать описание цепи для машинного расчета.

2.4. Матрично-топологическое описание цепей.

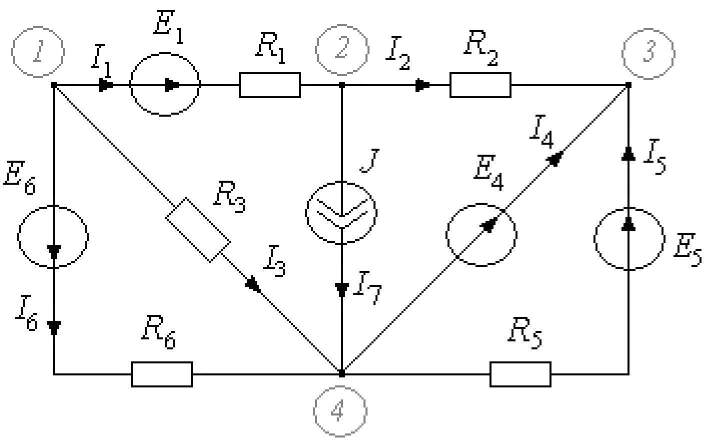
2.4.1. **Граф электрической цепи**.

Топологическое представление схемы электрической цепи, в которой ветви представлены отрезками, а узлы – точками, называют ***графом электрической цепи***. При использовании понятия обобщенной ветви граф электрической цепи получается минимальным. Математически граф представляет собой два множества: множество ветвей графа и множество узлов графа с заданным отношением инцидентности (принадлежности), когда каждой ветви ставится в соответствие два (редко один) узла. Если на графе имеется указание условно-положительных направлений токов ветвей в виде отрезков со стрелками, то такой граф называют ***направленным*** или ***ориентированным графом***. Граф называют ***планарным***, если его удается изобразить так, чтобы никакие две ветви не пересекались. Граф, между любой парой узлов которого имеется ветвь или совокупность ветвей (путь), называют ***связным***.

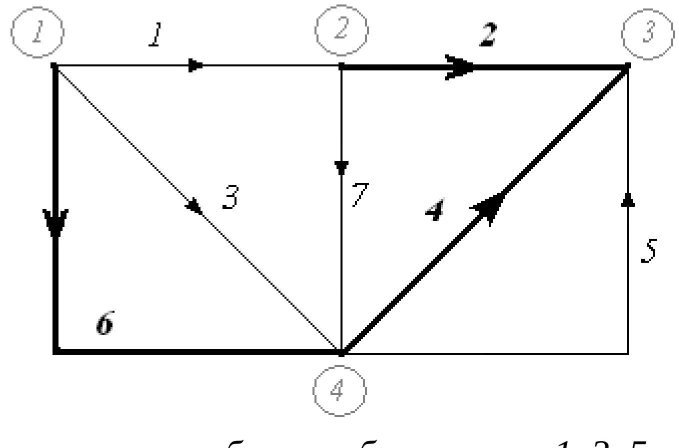
Важным топологическим понятием графа схемы является ***дерево графа схемы*** – совокупность ветвей, соединяющих все узлы графа без образования контуров. Один и тот же граф может иметь различные деревья. Как правило, ветви дерева изображают жирными линиями. Ветви, дополняющие дерево графа до полного, называют ветвями ***связи графа схемы*** (хордами).

Если связный граф имеет $n_В$ ветвей и $n_У$ узлов, то дерево графа будет иметь $n_У$ -1 ветвей, а число ветвей связи $n_В - (n_У - 1)$. Ветвь n_J идеальным источником тока не может входить в дерево графа.

Пример 3. Схема электрической цепи имеет $n_У$ =4 узла и $n_В$ =7 ветвей (включая особую ветвь с источником тока $I_7 = J$).



Изобразим граф схемы. Количество ветвей дерева $n_У$ -1=3, ветвей связи $n_В - (n_У - 1) = 4$. Пусть *2, 4, 6* –ветви дерева, а *1, 3, 5, 7* – ветви связи.



В качестве ветвей дерева можно было выбрать ветви *1*, *3*, *5*, а ветви связи – *2*, *4*, *6*, *7*.

2.4.2. **Топологические матрицы**.

Изображение электрической схемы графом позволяет представить ее в виде таблицы или матрицы.

1. ***Узловая матрица (Матрица соединений***)

$$\boldsymbol{A}_Н = [a_{ij}] = \begin{array}{c|c} & 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n_в \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_у \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрица неопределенная, так как сумма элементов в любом столбце равна нулю.

Узловая матрица может быть получена из ***неопределенной матрицы***, имеющей размерность $n_У$ строк и $n_В$ столбцов вычеркиванием одной строки, в данном случае строки *4* узла. $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$

(количество строк $n_У$ -1, количество столбцов $n_В$).

В узловой матрице элемент $a_{ij} = 1$, если j-ая ветвь соединена с i-м узлом и направлена от узла,
$a_{ij} = -1$, если j-ая ветвь соединена с i-м узлом и направлена к этому узлу и
$a_{ij} = 0$, если j-ая ветвь не соединена с i-м узлом.

Для графа схемы **примера 3**:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \textit{ветви} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \mathbf{A} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \textit{узлы} & \end{array}$$

Определим ***вектор-столбец токов ветвей***: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Матричная форма записи первого закона Кирхгофа для узлов:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}}$$

Для **примера 3**: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 \end{bmatrix}^T$. Тогда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

2. ***Контурная матрица.***

(Матрица главных (***независимых***) ***контуров)***.

Применяя второй закон Кирхгофа, можно составить столько уравнений, сколько имеется контуров в цепи. При этом одни уравнения могут оказаться следствием других. Независимость уравнений для контуров (независимость контуров) будет обеспечена, ***если выбирать эти контуры так, что каждый будет отличаться от других хотя бы одной ветвью***.

Наиболее просто это сделать, если ***выбирать контур из ветвей дерева и одной ветви связи***.

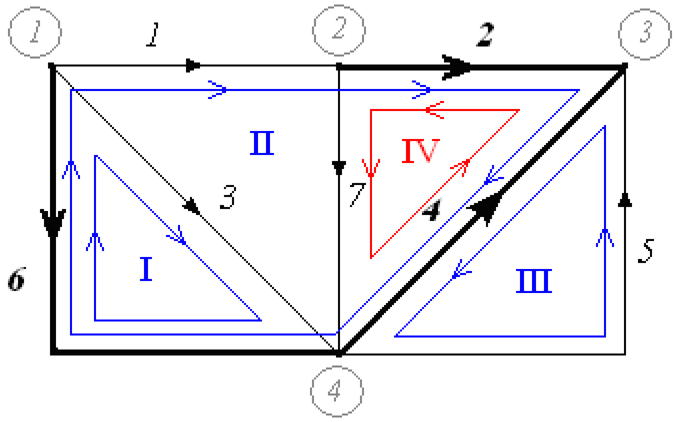
Для графа **примера 3**, *2*, *4*, *6* –ветви дерева, а *1*, *3*, *5*, *7* – ветви связи, причем *7* ветвь – особая с источником тока, проводимость этой ветви равна нулю. Выберем контура, состоящие из ветвей дерева и одной ветви связи, направление ***обхода контура определим по направлению ветви связи***:

I контур: *6* (ветвь дерева) и *3* (ветвь связи),

II контур: *2*, *4*, *6* (ветви дерева) и *1* (ветвь связи),

III контур: *4* (ветвь дерева) и *5* (ветвь связи),

IV контур: *2*, *4* (ветви дерева) и *7* (ветвь связи) – особый контур.



Матрица главных контуров $\mathbf{B} = \left\{ b_{ij} \right\}^{n_B - (n_У - 1) \times n_B}$

$\mathbf{B} = \left\{ b_{ij} \right\}^{n_B - (n_У - 1) \times n_B}$ где $n_В$ - ($n_У$ -1) количество строк, количество столбцов $n_В$.

У матрицы **B** элемент $b_{ij} = 1$, если j-ая ветвь содержится в i-м контуре и ее направление совпадает с обходом этого контура,

$b_{ij} = -1$, если j-ая ветвь содержится в i-м контуре и ее направление противоположно направлению обхода этого контура,

$b_{ij} = 0$, если j-ая ветвь не содержится в i-м контуре.

Для графа схемы **примера 3**:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
\text{ветви} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\end{array}
$$

$$
\mathbf{B} = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

контура

Определим ***вектор-столбец напряжений ветвей***:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{n_B} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_p \end{bmatrix}^T$$

Матричная форма записи второго закона Кирхгофа для контуров:

$$\boxed{\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}}$$

Для **примера 3**: $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда второй закон Кирхгофа в матричном виде для графа схемы:

$$
\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.
$$

! Матрицы **A** и **B** называют топологическими матрицами, ***основное свойство этих матриц*** определяется соотношением

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

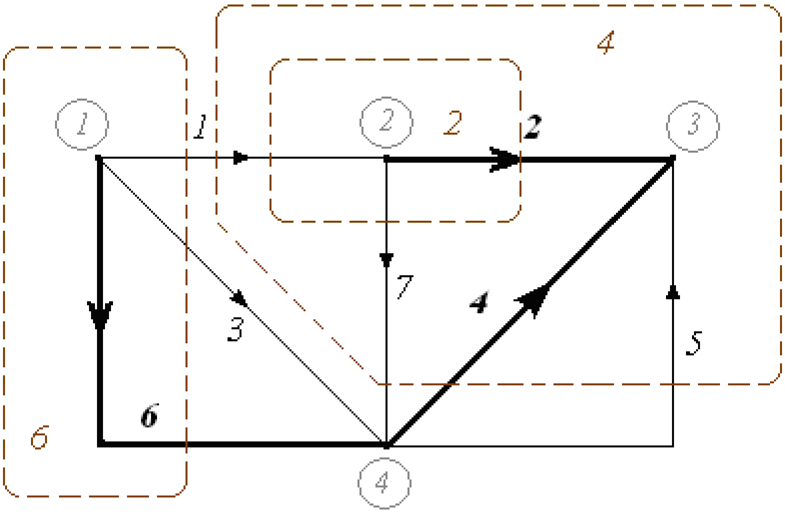
3. ***Матрица сечений*** (***разрезов***).

Первый закон Кирхгофа может быть сформулирован для сечений. Число независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, равно q-1, следовательно, столько же должно быть сечений. При этом число сечений будет равно числу ветвей дерева. Будем составлять сечения из ветвей связи и одной ветви дерева. Номер сечения будет соответствовать номеру ветви дерева, образующего это сечение.

Матрица сечений $\mathbf{D} = \left\{ d_{ij} \right\}^{(q-1)\times p}$ (количество строк q-1, количество столбцов p). У матрицы сечений элемент $d_{ij} = 1$, если j-ая ветвь разрезается i-

м сечением и ориентирована по отношению к сечению так же, как и ветвь дерева, образующая сечение, $d_{ij} = -1$, если j- ветвь разрезается i-м сечением, но ориентирована по отношению к сечению не так, как ветвь дерева, образующая сечение, и $d_{ij} = 0$, если j-ая ветвь не разрезается i-м сечением.

Для графа **примера 3** *2, 4, 6* –ветви дерева, а *1, 3, 5, 7* – ветви связи.



Выберем сечения, состоящие из одной ветви дерева и ветвей связи.

$$\begin{array}{cc} \text{ветви} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array} \\ \mathbf{D}=\begin{array}{c}2\\4\\6\end{array} & \begin{bmatrix}-1&1&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&0&-1\\1&0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}. \\ \text{сечения} & \end{array}$$

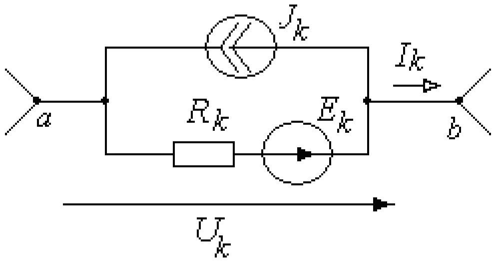
Матричная форма записи первого закона Кирхгофа для сечений:

$$\boxed{\mathbf{D}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{0}}$$

! Законы Кирхгофа в матричном виде с использованием топологических матриц характеризуют систему в целом без учета параметров ее элементов и определяют систему из p уравнений. Такая система недостаточна, так как не известны p токов и p напряжений.

2.4.3. **Компонентное уравнение в матричной форме для обобщенной ветви**.

Некоторая k-ая обобщенная ветвь, содержащая все три типа идеализированных элементов цепей постоянного тока – резистор, идеальный источник ЭДС и источник тока – имеет компонентное уравнение $U_k = R_k(I_k + J_k) - E_k$ или $I_k = G_k(U_k + E_k) - J_k$.



Пусть цепь содержит $n_В$ обобщенных ветвей. Для матричной формы записи введем матрицы параметров ее элементов:

1. ***Матрица сопротивлений ветвей*** – диагональная матрица сопротивлений ветвей:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_p \end{bmatrix}^{nв \times nв}.$$

2. ***Матрица проводимостей ветвей*** – диагональная матрица проводимостей ветвей:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_p \end{bmatrix}^{nв \times nв}.$$

3. ***Вектор-столбец источников ЭДС ветвей***: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_{nв} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

4. ***Вектор-столбец источников тока ветвей***: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_{n_в} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Компонентное уравнение в матричной форме для обобщенной ветви

$$\boxed{\mathbf{U = R(I + J) - E}} \text{ или } \boxed{\mathbf{I = G(U + E) - J}}.$$

! В **примере 3** ветвь *7* с источником тока имеет бесконечно большое сопротивление и нулевую проводимость. В таком случае для расчета используют матрицу проводимостей; для определения $n_В$ напряжений ветвей записывают $n_В$ уравнений:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{G}(\mathbf{U}+\mathbf{E})-\mathbf{J}\right]=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{0}$$

Метод узловых потенциалов (узловых напряжений) наиболее формализован и поэтому часто реализуется в машинном анализе сложных цепей. Для электрической цепи с $n_у$ узлами можно составить $n_у$ -1 уравнений по первому закону Кирхгофа. Если схема содержит $n_у$ =2 узла, то составляется одно уравнение.

Примем потенциал любого узла (как правило, к которому подходит большее число ветвей) за нулевой ($\varphi_0=0$ или $\varphi_4=0$). В общем случае (исключая ветви, содержащие только источник ЭДС) все остальные $n_у$-1 узла имеют неизвестные ***узловые потенциалы***, которые надо определить. Для обозначения узловых потенциалов будем ставить верхний индекс (у): $\varphi_1^{(у)}$, $\varphi_2^{(у)}$, … Для определения узловых потенциалов составляются ***узловые уравнения***.

Вектор-столбец узловых потенциалов $\boldsymbol{\varphi}^{(у)}=\left[\varphi_1^{(у)} \quad \varphi_2^{(у)} \quad \varphi_3^{(у)} \quad \dots\right]^{\mathrm{T}}$. Определим связь между напряжениями ветвей и потенциалом узлов.

$$\boldsymbol{U}^{в}=\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{nв} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}^{в}=\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{nу-1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U}^{в}=\boldsymbol{A}^{T}\cdot\boldsymbol{\varphi}$$

<u>Вывод узловых уравнений:</u>

1. Первый закон Кирхгофа для узлов: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{0}$ + компонентное уравнение $\mathbf{I}=\mathbf{G}(\mathbf{U}+\mathbf{E})-\mathbf{J}$.
2. Подставим и преобразуем матричное уравнение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{G}(\mathbf{U}+\mathbf{E})-\mathbf{J}\right]=\mathbf{0}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}=\mathbf{0}$.
3. Напряжения ветвей определяются через узловые потенциалы $\mathbf{U}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(у)}$, тогда $\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(у)}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{E}$.
4. Обозначим $\mathbf{G}^{(у)}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ – ***матрица узловых проводимостей***, $\mathbf{J}^{(у)}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{E}$ – ***вектор-столбец узловых токов***.
5. ***Узловые уравнения***:

$$\boxed{\mathbf{G}^{(у)}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(у)}=\mathbf{J}^{(у)}}$$

Элемент матрицы узловых проводимостей $\mathbf{G}^{(у)}=\left\{G_{ij}\right\}^{(n_У-1)\times(n_У-1)}$

равен сумме проводимостей ветвей, соединенных с узлом i (собственная узловая проводимость),

если $i = j$; проводимости ветви, соединяющей узлы i и j, (взаимная узловая проводимость), если $i \neq j$.

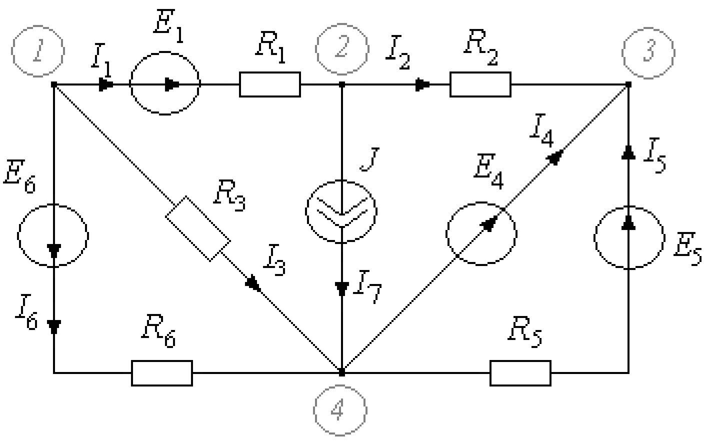
Элемент $J_i^{(\text{у})}$ вектор-столбца узловых токов $\mathbf{J}^{(\text{у})}$ равен алгебраической сумме токов источников тока ветвей, подходящих к узлу i;

если k-ая ветвь с конечным сопротивлением R_k содержит источник ЭДС E_k, то RE – ветвь преобразуется в GJ – ветвь,

вклад k-ой ветви в узловой ток будет равен отношению $J_k = E_k/R_k$,

взятому со знаком «+», если источник направлен к узлу и «-», если от узла.

Пример 5. Схема электрической цепи имеет $n_{\text{У}}= 4$ узла и $n_{\text{В}} =7$ ветвей (включая особую ветвь с источником тока $I_7 = J$). Составить узловые уравнения и определить токи ветвей.



Пусть

$$\textit{Пусть}\ \varphi_4 = 0$$

$\varphi_4 = 0$, неизвестные узловые потенциалы φ_1, φ_2. Потенциал третьего узла известен, так как четвертая ветвь содержит только идеальный источник ЭДС и сопротивление этой ветви равно нулю.

Для этого ***особого узла*** составляется ***особое уравнение*** $\varphi_3 = E_4$.

Вектор-столбец узловых потенциалов $\boldsymbol{\varphi}^{(\text{у})} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix}^{\text{T}}$.

Матрица узловых проводимостей $\mathbf{G}^{(\text{у})} = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

где третья строка определяет особое уравнение для 3-го узлового потенциала $\varphi_3 = E_4$, третий столбец определяет взаимные проводимости 3-го и остальных узлов схемы.

Собственные проводимости 1-го и 2-го узлов:

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_6 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}; \quad G_{22} = G_1 + G_7 + G_2 = \frac{1}{R_1} + 0 + \frac{1}{R_2}.$$

Взаимные проводимости 1-го и 2-го узлов $G_{12} = G_{21} = G_1 = \dfrac{1}{R_1}$,

взаимные проводимости 1-го и 3-го $G_{13} = G_{31} = 0$ (нет ветви, соединяющей эти узлы),

2-го и 3-го узлов $G_{23} = G_{32} = G_2 = \dfrac{1}{R_2}$

Узловые токи

$$\mathbf{J}^{(\text{у})} = \begin{bmatrix} (-\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_6}{R_6}) & (\dfrac{E_1}{R_1} - J) & E_4 \end{bmatrix}^{\text{T}}$$

. Последний элемент соответствует особому уравнению.

Узловые уравнения в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_6} & -\dfrac{1}{R_1} & 0 \\ -\dfrac{1}{R_1} & \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_6}{R_6} \\ \dfrac{E_1}{R_1} - J \\ E_4 \end{bmatrix}.$$

После определения узловых потенциалов для расчета токов используют обобщенный закон Ома, связывающий ток ветви с напряжением ветви (разностью узловых потенциалов):

$$I_1 = G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1},\ I_2 = G_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = \frac{\varphi_2 - E_4}{R_2},$$

$$I_3 = G_3 \cdot (\varphi_1 - \varphi_4) = \frac{\varphi_1 - 0}{R_3},\ I_5 = G_5 \cdot (\varphi_4 - \varphi_3 + E_5) = \frac{0 - E_4 + E_5}{R_5},$$

$$I_6 = G_6 \cdot (\varphi_1 - \varphi_4 + E_6) = \frac{\varphi_1 - 0 + E_6}{R_6}.$$

Ток 4-ой ветви нельзя определить по обобщенному закону Ома, так как сопротивление этой ветви равно нулю. Для определения тока надо воспользоваться первым законом Кирхгофа и составить уравнение для 3-го узла: $-I_2 - I_4 - I_5 = 0$

$$I_4 = -(I_5 + I_2)$$

Алгоритм решения методом узловых потенциалов (МУП)

1. Определить число независимых узлов $n_{\text{I}} = (n_{\text{У}} - 1)$, равное числу определяемых узловых потенциалов.

2. Пронумеровать узлы. Примем потенциал любого узла за нулевой.

При наличии ветвей с идеальным источником ЭДС рекомендуется один из потенциалов граничного узла такой ветви принять за нулевой, тогда потенциал второго граничного узла считается известным (особый узел).

3. Составить и решить узловые уравнения относительно неизвестных узловых потенциалов. Для особых узлов составляются особые узловые уравнения.
4. Определить токи ветвей из найденных узловых потенциалов по обобщенному закону Ома, для ветви с идеальным источником ЭДС – по первому закону Кирхгофа.
5. Проверка решения осуществляется путем составления уравнений по законам Кирхгофа и проверки их выполнения после численной подстановки.

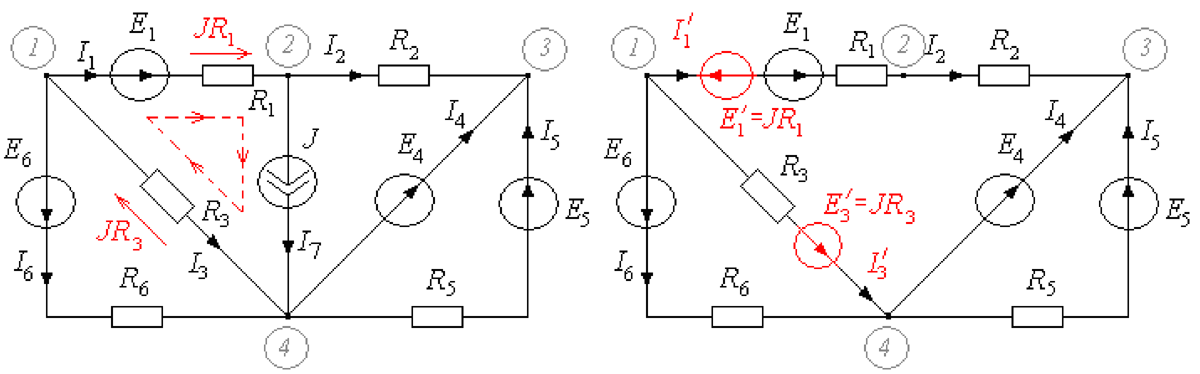
Формула двух узлов.

Если число узлов в схеме равно двум, то количество уравнений, составленных по МУП – одно. ***Формула двух узлов*** для определения, к примеру, потенциала φ_1 имеет вид:

$$\boxed{G_{11}\varphi_1 = J_1^{(\text{у})}} \text{ или } \boxed{\varphi_1 = \frac{\sum G\cdot E + \sum J}{\sum G}}$$

Компенсация тока источника тока введением эквивалентных ЭДС уменьшает количество узлов, следовательно, число неизвестных узловых потенциалов. При расчете цепей МУП это преобразование позволяет сократить число решаемых уравнений и является целесообразным.

Для **примера 5** замкнем ток источника по первой и третьей ветви и компенсируем известные напряжения введением дополнительных ЭДС:



После преобразования 2-ой узел становится устранимым. Пусть $\varphi_4 = 0$, неизвестный узловой потенциал только φ_1, так как $\varphi_3 = E_4$. Узловое уравнение имеет вид формулы: $G_{11}\varphi_1 - G_{13}\varphi_3 = J_1^{(\text{у})}$. В преобразованной схеме общая ветвь с током $I_1' = I_2$, сопротивлением ветви $R_1 + R_2$ и ЭДС ветви $E_1' - E_1$ (выбрано направление к 1-му узлу), 3-я ветвь содержит дополнительную ЭДС E_3'. Тогда $G_{11} = G_1' + G_3 + G_6 = \dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_6}$, $G_{13} = \dfrac{1}{R_1 + R_2}$, узловой ток $J_1^{(\acute{o})} = \dfrac{E_1' - E_1}{R_1 + R_2} - \dfrac{E_3'}{R_3} - \dfrac{E_6}{R_6}$.

Решаем уравнение и определяем неизвестный φ_1:

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}\right)\varphi_1 - \frac{1}{R_1 + R_2} E_4 = \frac{J \cdot R_1 - E_1}{R_1 + R_2} - \frac{J \cdot R_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6}.$$

Для преобразованной схемы

$$I_1' = I_2 = G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_3 + E_1 - E_1') = \frac{\varphi_1 - E_4 + E_1 - J \cdot R_1}{R_1},$$

$$I_3' = G_3 \cdot (\varphi_1 - \varphi_4 + E_3') = \frac{\varphi_1 - 0 + J \cdot R_3}{R_3},$$

токи $I_5 = G_5 \cdot (\varphi_4 - \varphi_3 + E_5) = \dfrac{0 - E_4 + E_5}{R_5}$ и $I_6 = G_6 \cdot (\varphi_1 - \varphi_4 + E_6) = \dfrac{\varphi_1 - 0 + E_6}{R_6}$ остались такие же, как в исходной схеме. Для определения исходных токов I_1 и I_3 необходимо составить уравнения по первому закону Кирхгофа для 2-го и 1-го узлов.

2.6. Основные свойства линейных цепей постоянного тока

2.6.1. **Принцип наложения и метод наложения**.

Для линейных электрических цепей справедлив ***принцип наложения***, согласно которому ток (напряжение) любой ветви равен сумме частичных токов (напряжений), создаваемых в этой ветви каждым из источников в отдельности. Этот принцип лежит в основе ***метода наложения***.

Метод наложения применим только для расчета линейных цепей.

Частичный ток – ток в ветви от действия только одного источника энергии, когда все остальные источники приняты нулевыми. Пусть в цепи действуют n идеальных источников ЭДС и m идеальных источников тока. Тогда ток в i-ой ветви может быть определен как

$$I_i = I_i^{(E_1)} + I_i^{(E_2)} + \ldots + I_i^{(E_n)} + I_i^{(J_1)} + I_i^{(J_2)} + \ldots + I_i^{(J_m)}.$$

Для удобства использования принципа наложения вводят коэффициенты g_{ij} и k_{ij}, определяющие связь тока I_i со значениями источников, так как при действии одного источника ток в линейной цепи пропорционален величине источника:

$$I_i = g_{i1}E_1 + g_{i2}E_2 + \ldots + g_{in}E_n + k_{i1}J_1 + k_{i2}J_2 + \ldots + k_{im}J_m,$$

где g_{ij} – ***взаимная проводимость ветвей*** i и j

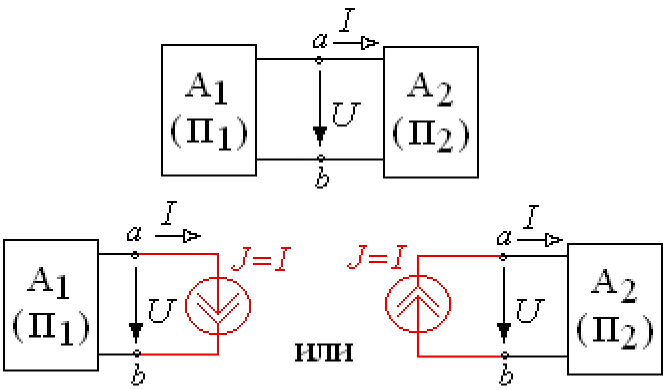
(при $j=i$, $g_{ij} = g_{ii}$ называют ***входной проводимостью*** ветви i),
а k_{ij} – ***коэффициент передачи по току*** между ветвями i и j.

Взаимная проводимость (коэффициент передачи по напряжению) g_{ij} определяется как отношение тока в ветви i, обусловленного действием ЭДС E_j к величине этой ЭДС при условии, что остальные ЭДС и токи источников тока цепи равны нулю: $g_{ij} = \dfrac{I_i^{(E_j)}}{E_j}$. Коэффициент передачи по току k_{ij} определяется как отношение тока в ветви i, обусловленного действием источника тока J_j к току источника при условии, что остальные источники ЭДС и токи источников тока равны нулю: $k_{ij} = \dfrac{I_i^{(J_j)}}{J_j}$. Определить частичные токи и соответственно коэффициенты можно по ***частичным схемам***. Используя расчетные коэффициенты ***можно решать*** не только задачи прямого анализа электрических цепей, но и ***обратные задачи***, в которых часть параметров цепи с известной топологией неизвестна и подлежит определению, а в число известных параметров могут быть включены токи и напряжения некоторых ветвей цепи.

Значительно упрощает расчет сложных цепей использование ***теоремы компенсации***, применение ***эквивалентных преобразований*** активных и пассивных участков сложной цепи. Для линейных цепей выполняется ***принцип линейности*** и ***принцип взаимности***.

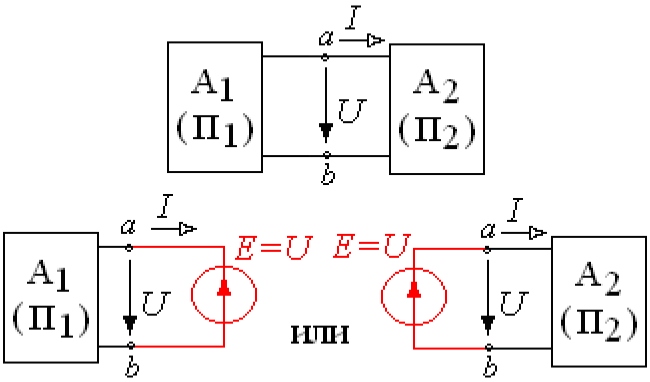
2.6.2. **Теорема компенсации.**

В сложной электрической цепи любой двухполюсник с известным током может быть заменен ветвью с источником тока, равным исходному и совпадающим с ним по направлению. В оставшейся части схемы токи после замены останутся неизменными.



! Если после замены не образуются ***особые разрезы***, то не изменятся и напряжения в оставшейся части схемы. Особый разрез рассекает только ветви с источниками тока (с нулевой проводимостью).

В сложной электрической цепи любой двухполюсник с известным напряжением (или известным сопротивлением и током) может быть заменен ветвью с источником ЭДС, равным этому напряжению и направленным противоположно напряжению ветви. В оставшейся части схемы напряжения после замены останутся неизменными.



! Если после замены не образуются ***особые контура***, то не изменятся и токи в оставшейся части схемы. Особый контур состоит только из ветвей с источниками ЭДС (с нулевыми сопротивлениями).

Как правило, при решении задач компенсируют ток источника тока, вводя эквивалентные (компенсационные) источники ЭДС. Число узлов при этом уменьшается и в ряде методов это сокращает число решаемых уравнений.

2.6.3. **Принцип взаимности и принцип линейности**.

Для линейных цепей справедлив ***принцип взаимности***: если единственная ЭДС $E_{ab}=E$, действуя в ветви ab сколь угодно сложной цепи, вызывает в другой ветви cd этой цепи ток $I_{cd}=I$, то такая же единственная ЭДС $E_{cd}=E$, действуя в ветви cd, вызовет в ветви ab такой же ток $I_{ab}=I$. Принцип взаимности в сочетании с принципом наложения позволяет упростить расчет сложной цепи при действии нескольких источников. Следствием принципа взаимности является равенство коэффициентов взаимной проводимости и передачи по току:

$$\boxed{g_{mn} = g_{nm}} \text{ и } \boxed{k_{mn} = k_{nm}}.$$

Согласно ***принципу линейности*** при изменении сопротивления R резистивного элемента в одной из ветвей линейной электрической цепи все токи и напряжения связаны линейными соотношениями.

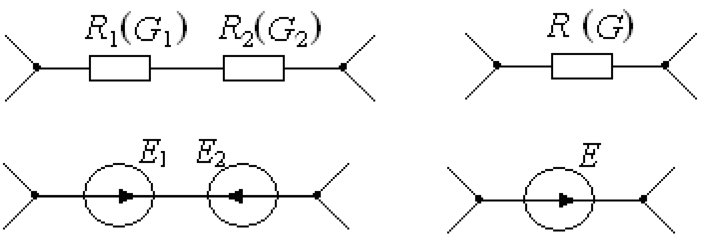
$$I_1 = a_1 U_1 + b_1$$
$$I_2 = a_2 U_1 + b_2 .$$

Коэффициенты линейности определяются из двух любых режимов изменяющегося параметра при неизменности остальных параметров цепи. В частности, из ***режим холостого хода*** и ***режим короткого замыкания***.

2.7. Эквивалентные преобразования электрических цепей.

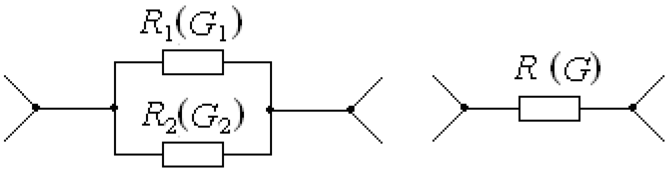
При решении задач часто используют эквивалентные преобразования какой-либо части схемы, не изменяющие в общем случае токи и напряжения в оставшейся части схемы. Так, ***две схемы замещения активного двухполюсника*** являются эквивалентными для расчета токов и напряжений в оставшейся части схемы. ***Перенос источника напряжения через узел***, ***источника тока вдоль контура***, применение ***теоремы компенсации*** – все эти приемы позволяют изменить топологию схемы для упрощения ее анализа. При определении входных и взаимных проводимостей, коэффициентов передачи по току пользуются ***входными сопротивлениями***, расчет которых производится с помощью ***последовательно-параллельных преобразований*** резисторов, преобразованием «***треугольник-звезда***».

Последовательным соединением участков электрической цепи называют соединение, при котором через все участки цепи проходит один и тот же ток. Последовательное соединение пассивных участков (резисторов) и активных участков (источников ЭДС) может быть эквивалентно преобразовано:



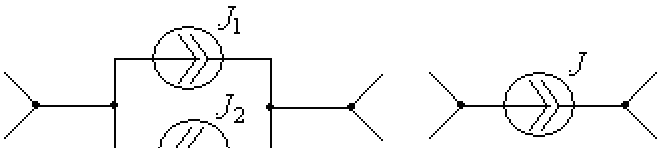
$$R = R_1 + R_2$$
$$G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$
$$E = E_1 - E_2.$$

Параллельным соединением участков (***ветвей***) электрической цепи называют соединение, при котором все участки (ветви) цепи присоединяются к одной и той же паре узлов и на всех участках (ветвях) имеется одно и то же напряжение. Параллельное соединение пассивных участков (резисторов) и активных участков (источников тока) может быть эквивалентно преобразовано:



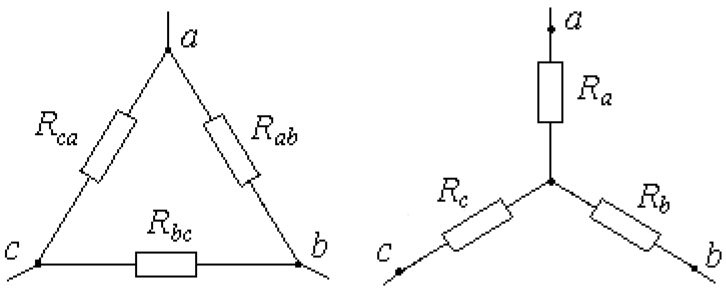
$$G = G_1 + G_2$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$J = J_1 - J_2.$$

При анализе электрических цепей, например, при расчете входного сопротивления, могут понадобиться эквивалентные преобразования ***трехполюсников***. Пассивные трехполюсники в цепях постоянного тока представляют собой соединение резисторов «***треугольник***» и «***звезда***».



Формулы эквивалентного перехода:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c},\ R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a},\ R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b};$$

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}},\ \ R_в = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}},\ R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}}.$$

2.8. Теорема об активном двухполюснике (эквивалентном генераторе) и метод эквивалентного генератора.

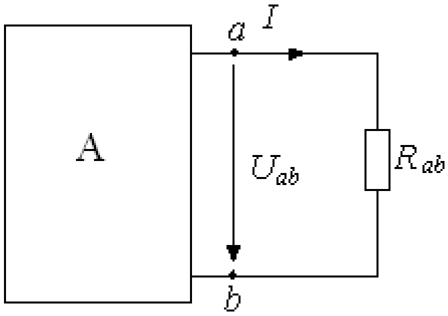
При анализе сложных электрических цепей часто требуется определить ток и напряжение только в одной ветви. В этом случае используют ***метод эквивалентного генератора***. Выделяют исследуемую ветвь (активную или пассивную), присоединенную к сложной цепи. Остальная часть цепи с двумя выделенными узлами представляет собой ***активный двухполюсник***. По отношению к выделенной ветви активный двухполюсник можно преобразовать в ***эквивалентный генератор***.

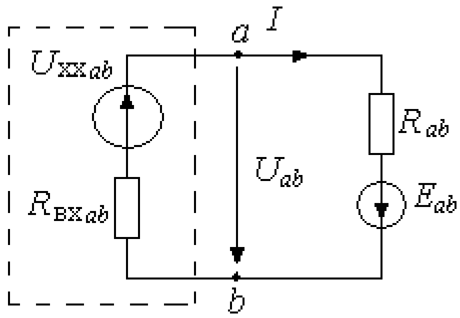
Теорема Тевенена – Гельмгольца: если активный двухполюсник, к которому присоединена выделенная ветвь, заменить источником с ЭДС, равной напряжению на зажимах разомкнутой ветви и сопротивлением, равным входному сопротивлению, то ток в этой ветви не изменится.

Математическая формулировка теоремы для нахождения тока пассивной ветви *ab* выражается ***формулой Тевенена***:

$$\boxed{I_{(ab)} = \frac{U_{\text{хх}ab}}{R_{\text{вх}ab} + R_{ab}}}.$$

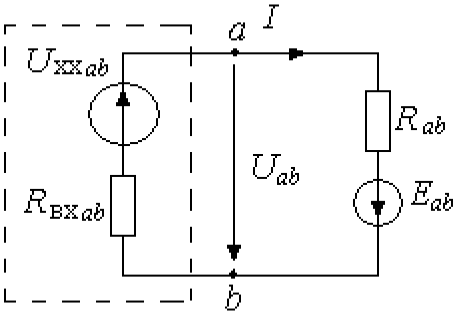
Этому равенству соответствует расчетная схема:





Применение теоремы об эквивалентном генераторе позволяет свести расчет сложной цепи к расчету одноконтурной схемы по закону Ома.

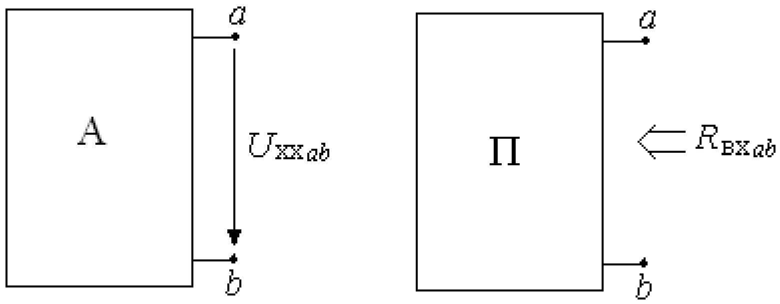
Если выделенная ветвь содержит источник ЭДС, тогда расчетная схема будет иметь вид:



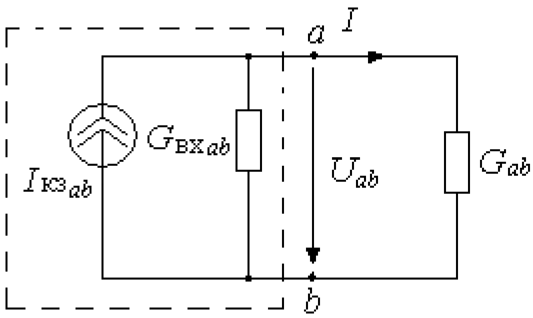
$$I_{(ab)} = \frac{U_{\text{хх}ab} + E_{ab}}{R_{\text{вх}ab} + R_{ab}}.$$

Алгоритм расчета по методу эквивалентного генератора:

1. Находят напряжение холостого хода U_{xxab} на зажимах разомкнутой ветви *ab*.
2. Определяют входное сопротивление двухполюсника, преобразуя его в пассивный (все внутренние источники ЭДС и тока принимают равными нулю).



3. Определяют искомый ток по формуле Тевенена.



Можно использовать ***формулу Нортона***, соответствующую параллельной схеме замещения активного двухполюсника:

$$U_{(ab)} = \frac{I_{\text{кз}ab}}{G_{\text{вх}ab} + G_{ab}}$$

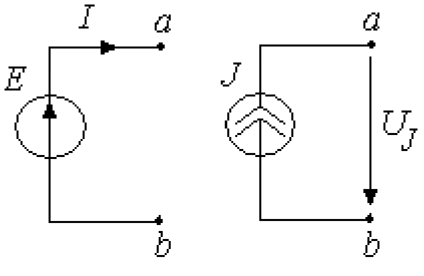
2.9. Энергетические соотношения в цепях постоянного тока.

Важное значение при исследовании электротехнических устройств имеет анализ энергетических соотношений. ***Электрическая мощность*** характеризует скорость передачи или преобразования электрической энергии. Единица мощности **[Вт] – (Ватт).** По закону сохранения энергии для замкнутой цепи вся мощность, которая вырабатывается источниками энергии, должна полностью поглощаться потребителями энергии.

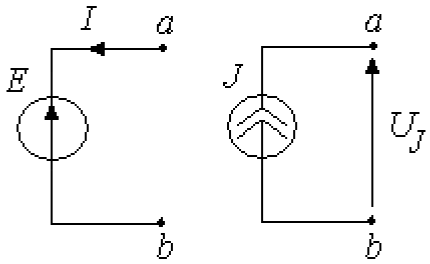
Равенство мощностей генераторов (источников) и приемников (нагрузок) называют ***балансом мощностей***:

$$\boxed{\sum P_{\text{г}} = \sum P_{\text{пр}}}.$$

Расчет ***мощности источников*** проводится следующим образом:



Если условно-положительные направления токов и напряжений на источниках выбраны соответственно рисунку, то $P_E = E \cdot I$,
$P_J = U_J \cdot J = (\varphi_a - \varphi_b) \cdot J$.



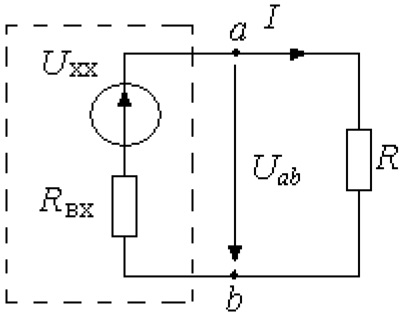
При таком выборе направлений
$P_E = -E \cdot I$,
$P_J = -U_J \cdot J = -(\varphi_b - \varphi_a) \cdot J$.

Мощность приемника (резистора) по формуле Джоуля-Ленца равна $P_R = I^2 R$.
Таким образом, должно выполняться равенство

$$\boxed{\sum_n E_n I_n + \sum_m U_{Jm} J_m = \sum_k I_k^2 R_k}.$$

Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному.

Определим условия, при которых мощность пассивного двухполюсника (приемника) максимальна. По теореме об эквивалентном генераторе ток и напряжение в приемнике R можно определить по расчетной схеме эквивалентного генератора.



Напряжение $U_{ab} = U_{хх} - IR_{вх}$,
мощность приемника $P_{пр} = I^2 R$ или
$P_{пр} = U_{ab} I = \left(U_{хх} - IR_{вх}\right) I = U_{хх} I - I^2 R_{вх}$,
мощность эквивалентного генератора
$P_{г} = U_{хх} I$.

Если мощность приемника максимальна, то $\dfrac{dP_{пр}}{dI} = U_{хх} - 2IR_{вх} = 0$, следовательно, ток приемника должен быть $I = \dfrac{U_{хх}}{2R_{вх}}$. По формуле Тевенена $I = \dfrac{U_{хх}}{R + R_{вх}}$, максимальная мощность выделяется в приемнике при $R = R_{вх}$.

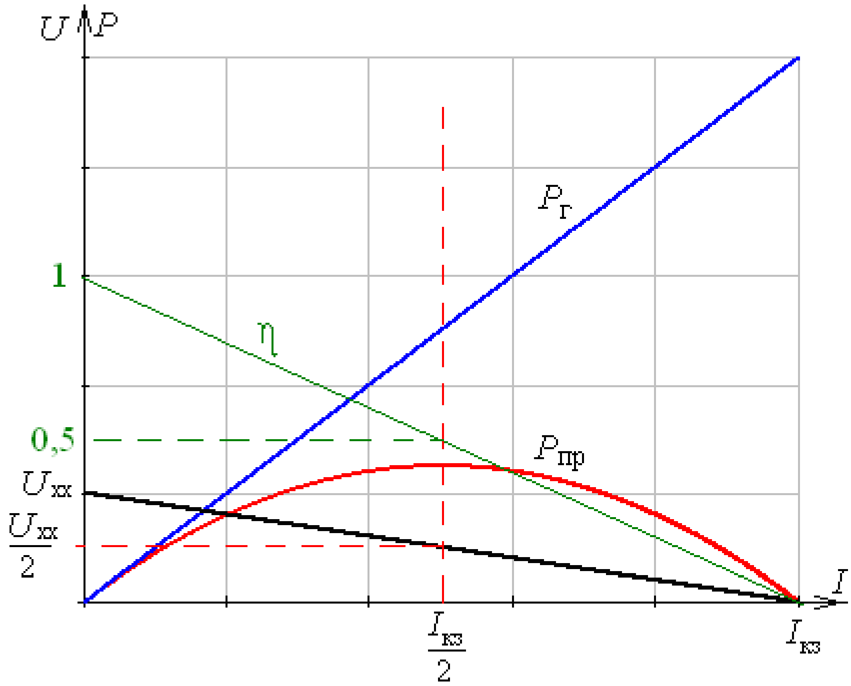
Максимальная мощность равна $P_{пр max} = \left(\dfrac{U_{хх}}{2R_{вх}}\right)^2 R_{вх} = \dfrac{U_{хх}{}^2}{4R_{вх}}$.

Отношение мощности $P_{пр}$ к мощности $P_{г}$ называется ***к.п.д. эквивалентного активного двухполюсника***:

$$\eta = \frac{P_{пр}}{P_{г}} = \frac{\left(U_{хх} - IR_{вх}\right) I}{U_{хх} I} = \frac{R}{R_{вх} + R}.$$

При $R = R_{вх}$ к.п.д. $\eta = 0,5$.

Графики зависимости $P_{пр}(I)$, $P_{г}(I)$, $U(I)$, $\eta(I)$.



Режим, при котором в нагрузке будет выделяться максимальная мощность, называется режимом ***естественно передаваемой мощности*** или ***режимом согласованной работы активного двухполюсника и нагрузки***.