Цель работы.

Применить на практике простейшие численные методы вычисления интегралов и производных. Исследовать поведение погрешности методов при измельчении шага. Познакомиться с понятиями порядка точности и обусловленности (плохой/хорошей) задачи и их отражением в расчетах. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью.

Задача 1.

Найти приближенные значения интеграла ( ) b a f x dx ∫ и производной f a′( ) , используя указанные в индивидуальном варианте методы. Организовать серию расчетов с шагами k hk = (b − a)/10 (݇ = 1,2, …,15). Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Вычислить точное значение J интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

J = 1.295587149392638

2. Реализовать программно составную формулу численного интегрирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения интеграла k I для ݇ = 1,2, … ,15. Заполнить второй столбец таблицы.

3. Для каждого приближенного значения интеграла найти погрешность k k Δ = − J I . Заполнить третий столбец таблицы. Прим 1. Вычисления можно прекратить на том значении шага, при котором расчет занимает более 40 минут.

4. Вычислить точное значение D производной, подставив число a в формулу для f x ′( ).

D = 1.414213562373095

5. Реализовать программно формулу численного дифференцирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения производной k d для ݇ = 1,2, … ,15. Заполнить 4-ый столбец таблицы.

6. Для каждого приближенного значения производной найти погрешность Δ௞ = |ܦ௞݀ − |. Заполнить 5-ый столбец таблицы.

Прим 2. Все приближенные значения и их погрешности должны быть округлены по принятым правилам.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Шаг h | Приближенное значение интеграла | Погрешность численного интегрирования | Приближенное значение производной | Погрешность численного дифференцирования |
| (b-a)/10 | 1.2906159471058327 | 0.004971202286805365 | 1.4083779968112637 | 0.00583556556183118 |
| (b-a)/10­2 | 1.295537508404436 | 4.964098820203766\*10-5 | 1.4141554031982309 | 5.815917486406974e-05 |
| (b-a)/10­3 | 1.2955866529898004 | 4.964028377241192\*10-7 | 1.4142129808008812 | 5.815722137203494e-07 |
| (b-a)/10­4 | 1.295587144428611 | 4.964027189302556\*10-9 | 1.4142135565573748 | 5.815720127699819e-09 |
| (b-a)/10­5 | 1.2955871493429891 | 4.9648951616632075\*10-11 | 1.4142135623149379 | 5.81570347435445e-11 |
| (b-a)/10­6 | 1.295587149392154 | 4.840572387365683\*10-13 | 1.4142135623725134 | 5.81534820298657e-13 |
| (b-a)/10­7 | 1.2955871493927806 | 1.425526363618701\*10-13 | 1.4142135623730894 | 5.551115123125783e-15 |
| (b-a)/10­8 | 1.2955871493920335 | 6.046274592108603\*10-13 | 1.4142135623730951 | 2.220446049250313e-16 |
| (b-a)/10­9 | 1.2955871493968423 | 4.204192549650543\*10-12 | 1.414213562373095 | 0.0 |

7. Сделать выводы (отдельно для каждой из двух формул).

1. Указать порядок точности формулы по h.

2. Пользуясь заполненной таблицей, показать, что расчет подтверждает указанный порядок точности.

3. Отметить, все ли данные соответствующего столбца можно использовать для анализа порядка точности.

4. Указать шаг h, при котором достигается наилучшая точность.

5. Определить, проявилась ли в расчетах (и в чем именно) хорошая или плохая обусловленность метода.

Задача 2. Повторить расчет интеграла из Задачи 1 с помощью квадратурной формулы Симпсона. Сравнить результаты с результатами Задачи 1 (с учетом порядков точности использованных формул). Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов. Вычислить значение интеграла из Задачи 1 с помощью составной квадратурной формул Симпсона с заданной в индивидуальном варианте точностью ε. (без разбиения отрезка интегрирования, см. алгоритм в Приложении). Предусмотреть возврат значения шага, на котором происходит выход из расчета. Заполнить таблицу

Сделать выводы: сравнить значение шага, на котором достигнута заданная точность, с данными из предыдущей таблицы и объяснить, проявилось ли преимущество одной из формул над другой.