Problema: 1 (5 points)

Suponga que una persona invierte 3000 al 12% de interés compuesto cada trimestre. Sea A_n la cantidad al final de n años. Conteste los siguientes ejercicios:

(a) Encuentre una relación de recurrencia para la sucesión $A_0, A_1, \ldots$

(b) Encuentre una condición inicial para la sucesión $A_0, A_1, \ldots$.

(c) Encuentre A_1, A_2 y A_3.

(d) Encuentre una fórmula explícita para A_n.

(e) ¿Cuánto tiempo tomará que una persona duplique la inversión inicial?

Datos generales:
Cada trimestre se aplica el 12%
Entonces, como en un año hay 4 trimestres → 4*0.12 = 0.48

a)
Relación de recurrencia homogénea
An = An-1 + 0.48*An-1
An = 1.48*An-1, n >= 1, A0 = 3000

b)
A0 = 3000

c)
Reemplazando en la fórmula explícita del ítem d)
A1 = 4440
A2 = 6571,2
A3 = 9725,38

d)
Aplicando la fórmula:
An = 3000*1.48^n, n >= 0

e)
2*A0 = A0*1.48^n
2 = 1.48^n
n = 1,77 años

Problema: 2 (6 points)

Resolver las siguientes relaciones de recurrencias:

(a) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geq 0, a_0 = 3.$
(b) Use el método de funciones generatrices para resolver: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n, n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2.$

a)
Primero, se iguala a 0 como una homogénea
an+1 - an = 0
anh = A*1^n = A
Luego, para anp es un polinomio de grado 2 que al reemplazarlo en an da como resultado
anp = n*(n-1)^2
Finalmente, an = anh + anp
an = A + n*(n-1)^2
A = 3
RPTA: an = 3 + n*(n-1)^2
Comprobación:
a1 = 3
a2 = 5
a3 = 15

b)
Relación de recurrencia no homogénea de segundo orden:
an+2 - 2an+1 + an = 2^n, n >= 0 , **a0 = 1, a1 = 2**
Multiplicamos todo por x^(n+2) y simplificamos la expresión para que el subíndice de a sea igual al exponente de x:
sumatoria(i = 0, hasta infinito) de an+2*x^(n+2) - 2*x*sumatoria(i = 0, hasta infinito) de an+1*x^(n+1) + 1*x^2*sumatoria(i = 0, hasta infinito) de an*x^n = x^2*sumatoria(i = 0, hasta infinito) de (2*x)^n

f(x) = sumatoria(i = 0, hasta infinito) an*x^n, entonces:
(f(x) - a0 - a1*x) - 2*x*(f(x) - a0) + x^2*f(x) = x^2*(1/(1-2*x))

Reemplazar valores iniciales y despejar f(x):
(f(x) - 1 - 2*x) - 2*x*(f(x) - 1) + x^2*f(x) = x^2*(1/(1-2*x))
f(x) - 1 - 2x - 2x*f(x) + 2x + x^2*f(x) = x^2*(1/(1-2*x))
f(x)*(1-2*x+x^2) - 1 = x^2*(1/(1-2*x))
f(x)*(1-2*x+x^2) = x^2/(1-2*x) + (1-2*x)/(1-2*x)
f(x) = (x^2 + 1 - 2*x)/[(1-2*x)*(1-2*x+x^2)]
f(x) = 1/(1-2*x)
No se necesita hacer fracciones parciales, porque ya está simplificado.
1/(1-2*x) = 2^n
an = 2^n

Problema: 3 (5 points)

Use las funciones generatrices para encontrar la cantidad de formas de hacer cambios por \$ 100 usando
(a) Billetes de \$ 10, \$ 20 y \$ 50.
(b) Billetes de \$ 5, \$ 10, \$ 20 y \$ 50 si se utiliza al menos un billete de cada denominación.

a)
$f(x) = 1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90}+x^{100}$
$g(x) = 1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80}+x^{100}$
$h(x) = 1+x^{50}+x^{100}$

Tenemos que buscar el coeficiente que acompaña a x^{100}
Regla del producto:
$f(x)*g(x)*h(x)$
$x^{300}+x^{290}+2*x^{280}+2*x^{270}+3*x^{260}+4*x^{250}+5*x^{240}+6*x^{230}+7*x^{220}+8*x^{210}+10*x^{200}+10*x^{190}+11*x^{180}+11*x^{170}+12*x^{160}+12*x^{150}+12*x^{140}+11*x^{130}+11*x^{120}+10*x^{110}+\mathbf{10}*x^{100}+8*x^{90}+7*x^{80}+6*x^{70}+5*x^{60}+4*x^{50}+3*x^{40}+2*x^{30}+2*x^{20}+x^{10}+1$
RPTA: hay 10 formas

b)
Como se utiliza al menos un billete de cada denominación, entonces se elimina el x^0 para todas las funciones generatrices, ya que eso significaría que estaría utilizando 0 billetes.
$e(x) = x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35}+x^{40}+x^{45}+x^{50}+x^{55}+x^{60}+x^{65}+x^{70}+x^{75}+x^{80}+x^{85}+x^{90}+x^{95}+x^{100}$
$f(x) = x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90}+x^{100}$
$g(x) = x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80}+x^{100}$
$h(x) = x^{50}+x^{100}$

Caso 1: $x^{20}*x^{10}*x^{20}*x^{50}$
Caso 2: $x^{10}*x^{20}*x^{20}*x^{50}$

RPTA: Entonces, estos son los únicos 2 casos para que salga el x^{100}. Por lo tanto, solamente hay 2 formas.

Problema: 4 (4 points)

Una empresa contrata a 25 nuevos empleados, cada uno de los cuales es asignado a una de cuatro divisiones. Cada subdivisión recibe al menos tres pero no más de 10 empleados ¿De cuántas formas se pueden hacer las asignaciones?

Datos:
25 empleados
4 divisiones
Cada subdivisión tiene al menos tres, pero no más de 10 empleados

Procedimiento:
Definimos la función generatriz: f(x) = (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^10)^4
x^12*(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^4
De la derecha debe salir x^13 y buscamos el coeficiente que lo acompaña:
x^28+4*x^27+10*x^26+20*x^25+35*x^24+56*x^23+84*x^22+120*x^21+161*x^20+204*x^19
+246*x^18+284*x^17+315*x^16+336*x^15+344*x^14+**336***x^13+315*x^12+284*x^11+246*x
^10+204*
x^9+161*x^8+120*x^7+84*x^6+56*x^5+35*x^4+20*x^3+10*x^2+4*x+1

RPTA: al multiplicar el polinomio nos da que el coeficiente que acompaña a x^25 es 336 y ese número representa la cantidad de formas en las que se pueden hacer las asignaciones de los 25 empleados cumpliendo las normas establecidas.