Algo

Alberto Oporto Ames

29 de noviembre de 2019

git ▪ Branch: tag: v42.0 @ c21c11b ▪ Release: (2019-11-29)

Head tags: v42.0)

Estructuras discretas II

Btw I use arch

Código fuente : https://github.com/otreblan/discre2

git ▪ Branch: tag: v42.0 @ c21c11b ▪ Release: (2019-11-29)

Head tags: v42.0)

Clases

Clase 5

Órdenes parciales

- A un conjunto.

  R una relación de orden parcial.

  (A, R) es un CPO (Conjunto parcialmente ordenado)

- Un CPO con $|A| < \infty$ tiene un diagrama de Hasse.

- $B \sqsubseteq A$ $x \in A$ es una cota superior cota inferior para B.

  si $yRx \forall y \in B$ si $xRy \forall y \in B$

- $x \in B$ es MAXIMAL MINIMAL si no existe $y \in B$ tal que xRy yRx

- $x \in B$ es un máximo mínimo si $x \in B$, es MAXIMAL MINIMAL y es único.

- R es un orden total si R es un orden parcial y $\forall x \vee y$ $xRy \vee yRx$

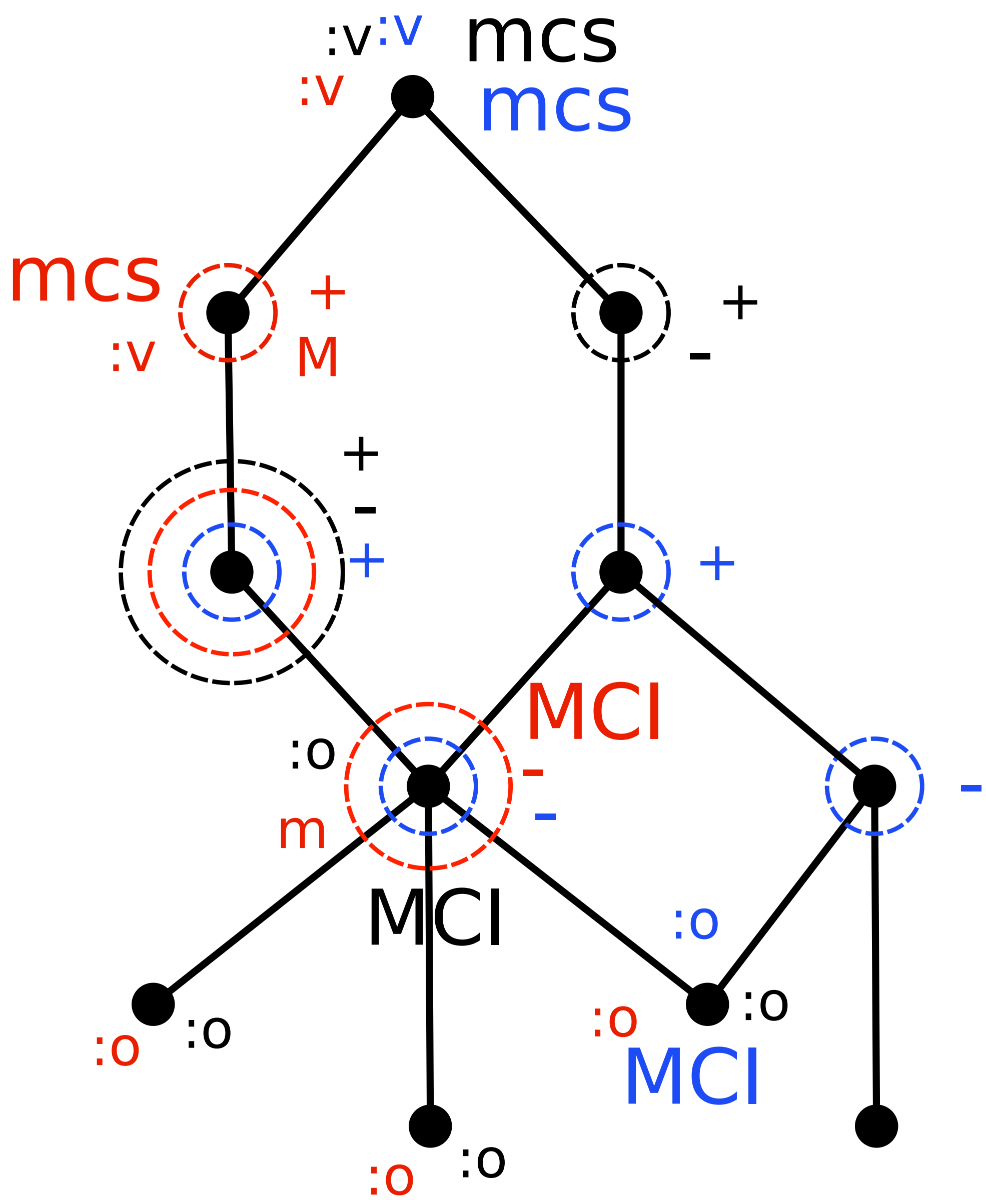
- Dado $B \sqsubseteq A$ X es la menor cota superior la mayor cota inferior de B si x es el mínimo máximo de las cotas superiores inferiores de B.

1. Cota superior: :v

2. Cota inferior: :o

3. Maximales: +

4. Minimales: -
5. Máximo: M
6. Mínimo: m
7. Menor cota superior: mcs
8. Mayor cota superior: MCI



- Obs:

  La menor cota superior mayor cota inferior, cuando existe es única.

- Obs:

  Cuando la menor cota superior mayor cota inferior está dentro del conjunto, es el máximo mínimo del conjunto.

- Obs:

  Si $|B| = 1$ el elemento de B es la cota superior, cota inferior, maximal, minimal, máximo, mínimo, mcs, MCI trivialmente.

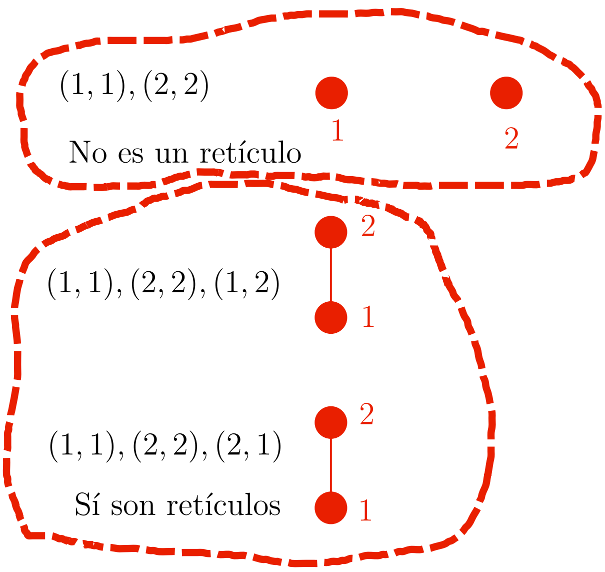
- Obs:

  El primer caso interesante es si $|B| = 2$

- Dfinición:

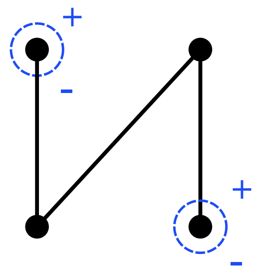
  Si $\forall V \sqsubseteq A, |B| = 2$ podemos definir $mcs(B)$ y $MCI(B)$ entonces estamos en un retículo.

5.1. ¿Cuántas relaciones de orden parcial podemos establecer sobre [2]?

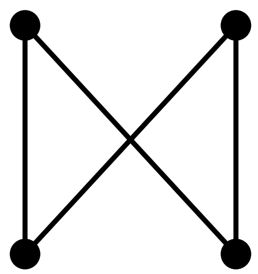


No es un retículo (pero es un semi retículo)

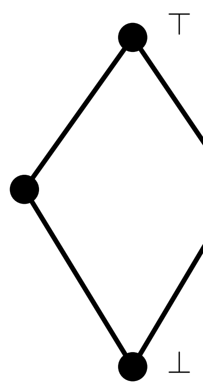
No es retículo. No es semiretículo



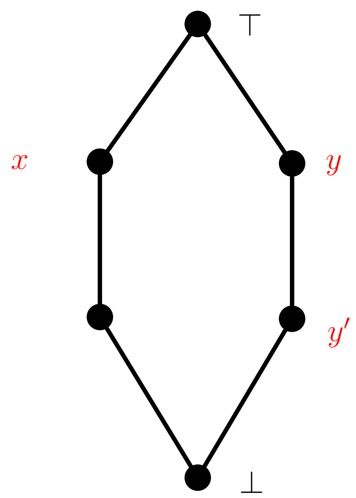
No es retículo. No es semiretículo



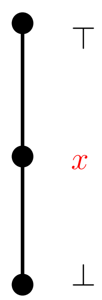
Es un retículo acotado complementado distributivo



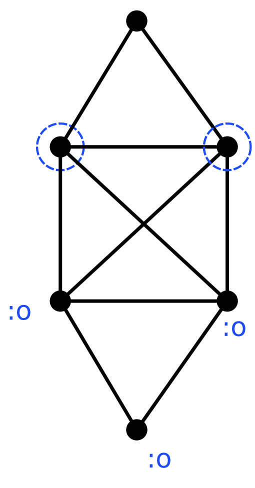
Es un retículo acotado no es complementario ¿Es distributivo?



Es un retículo acotado no es complementario ¿Es distributivo?



No es retículo. No es semiretículo



- D.S:

  (A, R) es un retículo definimos

$$x \vee y = mcs(x, y)(join)$$

$$x \wedge y = MCI(x, y)(meet)$$

- Un retículo (A, R) es

  - DISTRIBUTIVO:

    Si

    $$\forall x \forall y \forall z x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{y}$$
    $$\forall x \forall y \forall z x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

  - ACOTADO:

    Si existen $\top \in A$ y $\bot \in A$ tales que $(\bot Rx) \wedge (xR\top)$ para todo $x \in A$

    Hay un máximo $(\top)$ y un mínimo $(\bot)$ en A

  - COMPLEMENTADO:

    Si $\forall x \in A \exists! y \in A$ tal que

    $$x \vee y = \top \text{ y } x \wedge y = \bot$$

Clase 6

Réticulos y álgebra booleana

$$\vee \longleftarrow \text{ Join (Menor cota superior)}$$

$$\wedge \longleftarrow \text{ Meet (Mayor cota inferior)}$$

Un retículo $(\mathbf{A}, \mathbf{R})$ es un CPO tal que:

$$\begin{array}{rl} mcs(\{x, y\}) & \text{Están bien definidas} \\ MCI(\{x, y\}) & \text{para todo } x \in A,\ y \in B \end{array}$$

Abuso: Escribiremos $mcs(x, y)$, $MCI(x, y)$ en vez de $mcs(\{x, y\})$, $MCI(\{x, y\})$ y entederemos que si $|\{x, y\}| = 1$ la función retorna el valor de la entrada, es decir se comporta como la identidad sobre conjuntos de tamaño 1.

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$\Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}\Big\} = \mathbb{P}_1(A) \cup \mathbb{P}_2(A)$ Debería ser obvio que $mcs(X)$ cuando $X \in \mathbb{P}_1(A)$ está bien definido. $mcs(X) = X$

Si (A, R) es un retículo eso quiere decir que $mcs(X) \in \mathbb{P}_1(A) \forall X \in \mathbb{P}_2(A)$

Un retículo es acotado si existen $\bot, \top \in A$ tales que

$$\bot R x \ \forall x \in A \wedge$$
$$x R \top \ \forall x \in A$$

$$x \vee y := mcs(x, y)$$
$$x \wedge y := MCI(x, y)$$

Un retículo es distributivo:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ \mathbf{y}$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Un retículo es complementado si:

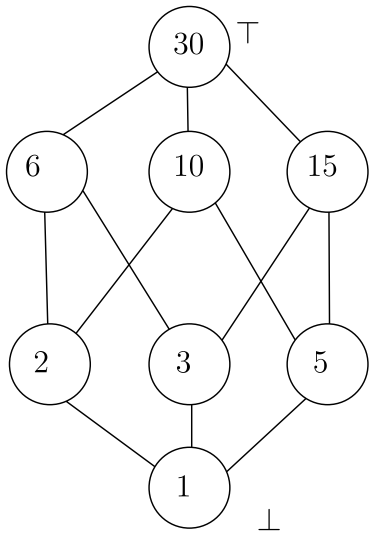
Para todo $x \in A$ existe (y es único) $y \in A$ tal que

$$x \wedge y = \bot$$
$$x \vee y = \top$$
$$\boxed{y = \overline{x}} \text{ Complemento de } x$$

Un $CPO(A, R)$ es una álgebra booleana

si es un retículo acotado, distributivo y complementado.

Veamos que $\left(D_{30}, \Big|\right)$ es una álgebra booleana.



Vean que $mcs(x,y) = mcm(x,y)$ $MCI(x,y) = MCD(x,y)$
Por lo que $\left(D_{30}, \middle|\right)$ es un retículo, acotado, distributivo, complementado. $\overline{x} = \frac{30}{x}$ $\left(D_{30}, \middle|\right)$ es una algebra booleana.

$$mcm(x, MCD(y,z)) = mcm(MCD(x,y), MCS(x,z)) \textbf{ y}$$

$$MCD(x, mcm(y,z)) = MCD(mcm(x,y), mcm(x,z))$$

$$\begin{array}{ll} \forall x, y, z & x \neq y \\ & x \neq z \\ & y \neq z \end{array}$$

Dos caminos:

- Analizar la reacción
- Demostrar por fuerza bruta que funciona

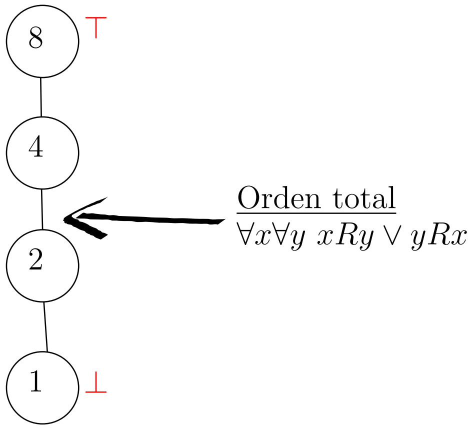
¿Es distributivo?:

$$2 \vee (2 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$$

$$(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 6 \wedge 10 = 2..........$$

Es $\left(D_8, |\right)$ una álgebra booleana

$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$



Claramente tenemos un retículo, acotado, distributivo no es complementario

$$4 \vee (2 \wedge 1) = 4 \vee 1 = 4$$

$$(4 \vee 2) \wedge (4 \vee 1) = 4 \wedge 4$$

$$2 \vee (4 \wedge 1) = 1 \vee 1 = 2$$

$$(2 \vee 4) \wedge (2 \vee 1) = 4 \wedge 2 = 2$$

$$1 \vee (4 \wedge 2) = 1 \vee 2 = 2$$

$$(1 \vee 4) \wedge (1 \vee 2) = 4 \wedge 2 = 2$$

$2 \vee 8 = 8$ Único complemento

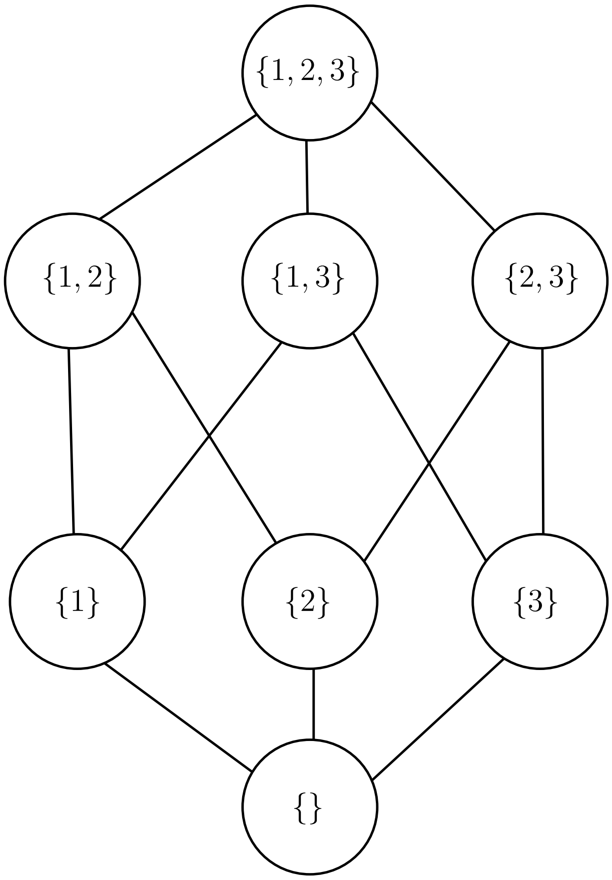
pero

$$\cancel{2 \wedge 8 = 2} \neq 1$$

2 no tiene complemento

¿Es $\left(\mathbb{P}([3]), \sqsubseteq\right)$ **una álgebra booleana?** ($\sqsubseteq \longleftarrow$ subconjunto)

¿Es $\left(D_{12}, \Big|\right)$ **una álgebra booleana?**



$$mcs(x, y) = x \cup y$$

$$MCI(x, y) = x \cap y$$

Es un retículo, acotado, distributivo , complementado $\overline{x} = [3] - x$

$$\forall x, y, z$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \text{ y}$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

6.1. Tarea

¿Qué propiedades hereda meet y join cuando es álgebra booleana?

Clase 8

Cosas booleanas

Una función total <u>booleana</u> con n parámetros:

$$f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Podemos pensar que f es un operador n-ario (o con aridad n)

Si $n = 2$ tenemos un operador <u>binario</u>, $n > 1$ <u>unario</u>

Teorema:

Toda función booleana se puede describir mediante las operaciones $+$ (join), $\cdot$ (meet) y $\overline{x}$ (complemento)

Definición:

$f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ es una conjunción **(disyunción)** fundamental si es un producto **(una suma)** de n literales correspondientes a los n parámetros de f

Un literal es un parámetro o su complemento

Es una conjunción fundamental:

$$f : \mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x_2}x_3x_4$$

No es una conjunción fundamental:

$$g : \mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x_2}$$

Observación:

Conjunción **(Disyunción)** fundamental

Es una etiqueta que se asocia a la regla de asignación de la función y no a la función misma.

No es una conjunción fundamental:

$$h : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$h : (x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + (x_1x_2x_3)(x_1\overline{x_2}x_3)$$

A pesar de:

$$x_1x_2x_3 + (x_1x_2x_3)(x_1\overline{x_2}x_3) = x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_2x_3$$

$$x_1x_2x_3 + (x_1x_2x_3)(x_1\overline{x_2}x_3) = x_1x_2x_3 + 0$$

$$x_1x_2x_3 + (x_1x_2x_3)(x_1\overline{x_2}x_3) = x_1x_2x_3$$

Es una disyunción fundamental:

$$g : \mathbb{B}^5 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$g(x,y,z,w,t) = x + y + z + \overline{t} + \overline{w}$$

Definición:

Una función <u>está</u> en forma normal disyuntiva **(conjuntiva)** si su regla de asignación es una suma **(un producto)** de conjunciones **(disyunciones)** fundamentales. (Creo que están hechos de mintérminos)

Forma normal disyuntiva (FND):

$$f : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overbrace{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{\substack{\text{Conjunción}\\ fundamental}} + \overbrace{x_1 x_2 \overline{x_3}}^{\substack{\text{Conjunción}\\ fundamental}} + \overbrace{\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}}^{\substack{\text{Conjunción}\\ fundamental}}$$

Forma normal conjuntiva(FNC):

$$g : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$g(x,y,z) = \overbrace{(x + y + \overline{z})}^{\substack{\text{Disyunción}\\ fundamental}} + \overbrace{(\overline{x} + \overline{y} + z)}^{\substack{\text{Disyunción}\\ fundamental}}$$

8.1. Funciones de un parámetro:

x	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

8.2. Funciones de 2 parámetros:

Clase 9

Simplificación

FND: Suma de conjunciones fundamentales

Suma de productos

O's de Y's

Están hechos de los mintérminos que son 1 donde el FND es 1

FNC: Producto de disyunciones fundamentales

Producto de sumas

Y's de O's

Están hechos de los maxtérminos que son 0 donde el FNC es 0

Esto tiene que ver con la representación de la función y no con la función en sí.

$$x \oplus y = \underbrace{x\overline{y} + \overline{x}y}_{\text{FND}} = \underbrace{(\overline{x} + \overline{y})(x + y)}_{\text{FNC}} = \sum m(1,2) = \prod M(0,3)$$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{\overline{(x\overline{y})(\overline{x}y)}}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{(\overline{x}+y)(x+\overline{y})}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{(\overline{x}x+\overline{x}\cdot\overline{y}+xy+y\overline{y})}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{(0+\overline{x}\cdot\overline{y}+xy+0)}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{\overline{x}\cdot\overline{y}+xy}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \overline{(\overline{x}\cdot\overline{y})\overline{(xy)}}$$

$$\overline{\overline{(x\overline{y}+\overline{x}y)}} = \boxed{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{\overline{(x+y)}+\overline{(\overline{x}+\overline{y})}}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{\overline{x}\cdot\overline{y}+xy}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{\overline{x}\cdot\overline{y}+x\cdot y}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{(\overline{x}+x)(\overline{x}+y)(\overline{y}+x)(\overline{y}y)}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{1(\overline{x}+y)(\overline{y}+x)1}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{(\overline{x}+y)(\overline{y}+x)}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{(\overline{x}+y)\overline{(\overline{y}+x)}}$$

$$\overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = x\overline{y}+y\overline{x} = \boxed{x\overline{y}+\overline{x}y}$$

$$f = \sum m(2,3,7) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}+\overline{x_1}x_2x_3+x_1x_2x_3$$

¿Quién es esta función?

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$= \prod M(0,1,4,5,6) = (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+x_3)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3)$$

9.1. Mapas de Karnaugh

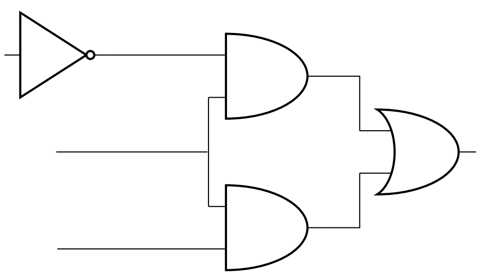
$x_1 \| x_2x_3$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0

$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3 = (\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3) + (\overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3)$$

$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3 = \overline{x_1}x_2(\overline{x_3} + x_3) + x_2x_3(\overline{x_1}x_1)$$

$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3 = \boxed{\overline{x_1}x_2 + x_2x_3}$$

Simplificación con el objetivo de reducir el número de compuertas lógicas.



$$H(x,y,z,w)$$

$zw\|xy$	00	01	11	10
00	${}^{0}0$	${}^{1}1$	${}^{3}1$	${}^{2}0$
01	${}^{4}1$	${}^{5}1$	${}^{7}1$	${}^{6}1$
11	${}^{12}1$	${}^{13}1$	${}^{15}1$	${}^{14}1$
10	${}^{8}0$	${}^{9}1$	${}^{11}1$	${}^{10}0$

Creo que se seleccionan 1's en grupos de potencias de 2

Y después se escribe la suma de las multiplicaciones de los valores que son constantes en cada grupo como en 0 $\overline{z} \cdot \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} +$ ......

FNC H

$$\prod M(0, 2, 8, 10)$$

$$= (\overline{z} + \overline{w} + \overline{x} + \overline{y})(\overline{z} + \overline{w} + x + \overline{y})(z + \overline{w} + \overline{x} + \overline{y})(z + \overline{w} + x + \overline{y}) = \overline{w} \cdot \overline{y} = \overline{(w + y)}$$

Tarea: Escribir FNC, FND y simplificar usando mapas de Karnaugh:

$$x_2x_1x_0 + y_2y_1y_0 = z_3z_2z_1z_0 \qquad \text{Suma de números en binario}$$

$$z_0 = x_0y_0$$

$$z_1 = x_1 + y_1 + C_0$$

Clase 10

Conteo

$$[n] = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$$

$$f : [m] \longrightarrow [n]$$

$$m.n \in \mathbb{B}$$

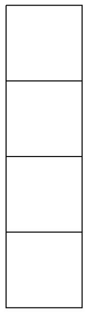
Cuantas funciones totales hay.

Hay n^m funciones totales posibles ente $[m]$ y $[n]$.

$$m = 4 \qquad f : [4] \longrightarrow [3]$$

$$n = 3$$

$[m]$	f_1	f_2	f_3	
1	1	2	3	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

De cuántas formas podemos pintar una madera  usando los colores rojo, azul, verde en los rectángulos marcados. Todos los rectángulos de la cara frontal deben estar pintados.

3^4 Porque hay 4 casilleros y 3 opciones.

¿De cuantas maneras se puede pintar la anterior madera antes de clavar la base?

3^4 es el resultado anterior, 3^2 son los que no tienen duplicados y $3^4 - 3^2$ es el número de patrones duplicados

$$\frac{\overbrace{3^4 - 3^2}^{\text{Patrones duplicados}}}{2} \overbrace{+3^2}^{\text{Patrones irrepetibles}} = 45$$

Lo de arriba es la cantidad de patrones duplicados por 2 más la cantidad de patrones irrepetibles.

Usando las letras A,B,C cuantas palabras de 4 letras podemos hacer si una palabra, es equivalente a su **Reversa.**

$$\text{ABBA} \cong \text{ABBA}$$

$$\text{CABA} \cong \text{ABAC}$$

$$45$$

Teorema:

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{y } f \text{ es } |{:}| \text{ (Biyección total)}$$

$$|A| = |B|$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$$

$$S = R \cup \{(x, \infty) : x \leq \mathbb{N}\}$$

$$S = R \cup \{(\infty, \infty)\}$$

$$\Big(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, S\Big)$$

$$|A| < \infty$$

$f : A \longrightarrow B$ es total si $\mathrm{Dom} f = A$

$$\text{Si } f : A \longrightarrow B \text{ es total.}$$

$$|B| \leq |A|$$

Sobreyectiva:

$$f : A \longrightarrow B \text{ es total y } \underbrace{k : 1}_{k \text{ a } 1} \; \forall y \in B \; \exists x \in A \; f(x) = y$$

Teorema:

Regla del cociente

Si f es $k:1$ podemos decir que

$$\frac{|A|}{k} = |B|$$

10.1. Perdí mis apuntes de discretas I

Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función y $\iff (x,y) \in R \wedge (x, y_2) \in R \implies y_1 = y_2$ **De los elementos de A que salen flechas sale a los mucho 1 flecha.**

Una función $f : A \longrightarrow B$ es una relación entre A y B

$$\mathrm{Dom} f = \{x \in A : (x,y) \in f\} \subset A$$

$$\mathrm{Rango} f = \{y \in A : (x,y) \in f\} \subset B$$

f es total

$$\text{Si } \mathrm{Dom} f = A$$

f es inyectiva si y solo si $\Big(f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y\Big) \implies (x_1 = x_2)$ **Los que reciben flechas reciben a los mucho una flecha**

f es sobreyectiva si $\mathrm{Rango} f = R$

f es la identidad si $A = B$ y $f(x) = x \wedge \forall x \in A$ La identidad es $| : |$

f es constante si $|\mathrm{Rango}(f)| = 1$

f es k-valuada si $|\mathrm{Ranfo}(f)| = k$

f es una biyección si es inyectiva y sobreyectiva.

f es $| : |$ si es una biyección total.

¿De cuantas formas podemos ordenar n objetos distintos en una fila de n objetos?

$$\Huge n! = P_n \normalsize \text{ permutaciones de } n$$

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)}_{n \text{ factores}} = \prod_{j=1}^{n} j = n! = P_n$$

¿De cuantas formas podemos seleccionar k objetos entre n objetos distintos y ordenarlos en una fila de largo k?

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \bigvee_k^n \text{ variaciones de } n \text{ en } k$$

¿De cuántas formas podemos seleccionar k objetos de entre n objetos distintos? (Creo que es lo anterior pero sin ordenar)

$$\frac{\bigvee_k^n}{k!} = C_k^n = \binom{n}{k}$$

Calcula usando combinaciones

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Solución:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

El lado izquierdo cuenta el número de subconjunto de tamaño k de $[n]$ y suma todas las posibilidades para k entre 0 y n

El lado derecho cuenta el número de subconjuntos de $[n]$.

Clase 11

Más conteo

Definición:

Conteo: Si A y B son finitos:

- $|A \times B| = |A| * |B|$ (Principio de multiplicación) **Regla del producto**

-

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

(Principio de la suma) **Regla de la suma**

-

$$f : A \longrightarrow B \qquad f \text{ total sobreyectiva}$$

$$|A| = k|B| \qquad \text{y } k : 1 \ k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{|A|}{k} = |B|$$

(Principio de división) **Regla del cociente**

¿Qué pasa si $A \cap B \neq \varnothing$?

$$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$$
$$\exists x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B$$

$$|A \cup B| = \overbrace{|A - B| + |A \cap B|}^{|A|} + |B - A|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B - A|$$
$$|A \cup B| = |A - B| + |B|$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración:

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$
$$|A| = |A - B| + ||A \cap B|$$
$$|B| = |B - A| + ||B \cap A|$$

$$A \cup (B - A) = A \cup B$$
$$A \cup (B - A) = \varnothing$$

$$|A| + |B - A| = |A \cup B|$$
$$|B| + |A - B| = |B \cup A|$$

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B - A|$$

$$|A \cup B| = |A| + (|B| - |A \cap B|)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Definición:

Principio de inclusión-exclusión

$|A|, |B| < \infty$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

11.1. Problema:

En el menú DUOLINGO el dueño dice que puede comer distinto todos los días del años.

El menú tiene:

- 3 entradas
- 5 fondos
- 7 postres
- 2 bebidas

1. Si un almuerzo consiste en tomar una entrada, un fondo, un postre, y una bebida. ¿Es verdadera la afirmación del dueño?

   Regla del producto:

$$3 * 5 * 7 * 2 = 210 < 366$$

La afirmación es mentira.

2. Si un almuerzo puede consistir en lo que definimos antes o una cosa donde falte alguno de los componentes. ¿Es verdad la afirmación?

$$\overbrace{(3+1)+(5+1)+(7+1)+(2+1)-1}^{\substack{\text{Una opción más: nada.}\\ \text{Pero 4 nadas no cuenta como menú}}} = 575 > 366$$

Ahora la afirmación es verdadera.

3. La sunat define **Almuerzo** como comer al menos un fondo y bebida.

$$(3+1)*(5)*(7+1)*(2) = 320$$

Preso por falsa publicidad

4. Si se define que el almuerzo debe tener al menos un fondo y una bebida, una o dos entradas y postre o no postre.

Entradas:

$$\underbrace{3+\left(\overbrace{\binom{3}{2}}^{\substack{\text{Entradas}\\ \text{distintas}}}+\overbrace{\binom{3}{1}}^{\substack{\text{Entradas}\\ \text{iguales}}}\right)}_{\text{Entrada}}$$

Fondo:

$$\binom{5}{1}$$

Postre:

$$\left(\overbrace{\binom{7}{1}}^{\text{1 postre}}+\overbrace{\binom{7}{0}}^{\text{Ningún postre}}\right)$$

Bebida:

$$\binom{2}{1}$$

$$\boxed{(3+(3+3))*5*(7+1)*2=720}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Demostración aburrida:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{11.1}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{11.2}$$

$$\Omega \quad A\subseteq\Omega$$

$$\overline{A}=\Omega-A$$

$$\overline{(.)}:\mathbb{P}(\Omega)\to\mathbb{P}(\Omega)$$

$$\overline{A}=\Omega-A$$

$\overline{(.)}$ Es:

- Total
- Inyectiva
- Sobreyectiva

Por lo tanto es $|:|$

$\binom{n}{k}$ = número de formas de hacer un conjunto con k elementos de un universo con n elemento.

$\binom{n}{n-k}$ = número de formas de hacer un conjunto de $n-k$ elementos de un universo de n elementos.

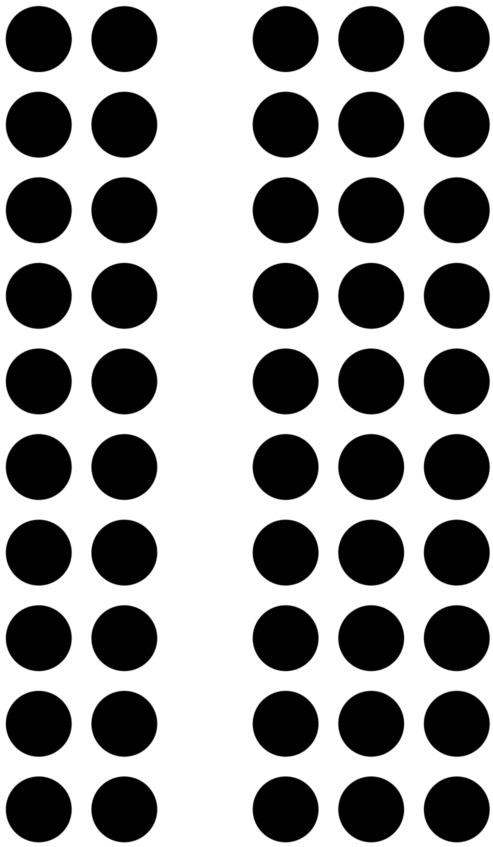
El lado izquierdo selecciona directamente k cosas distintas sin orden de un universo con n **(El lado derecho selecciona $n-k$ cosas del universo de n que serán descartadas para formar el conjunto de k cosas.)**

- ¿De cuantás formas podemos seleccionar 2 colores de 5?

$$\binom{5}{2} = 10$$

- ¿De cuantás formas podemos seleccionar 5 colores de 2?

$$\binom{2}{5} = 10$$



$$\binom{n}{k} = 0 \text{ Si } k > n \wedge k < 0$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

El lado izquierdo cuenta el número de formas de seleccionar k de un universo de $n+1$ cosas diferentes. **Puedo decir que una de esas cosas es especial. (EL HUEVO PODRIDO)**

$$\underbrace{\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{Contar conjuntos}\\ \text{de tamaño}\\ k \text{ que no}\\ \text{tienen al}\\ \text{huevo podrido}}} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\substack{\text{Contar conjuntos}\\ \text{de tamaño}\\ k \text{ que } \textbf{sí}\\ \text{tienen al}\\ \text{huevo podrido}}}}_{\substack{\text{Cualquier conjunto de tamano } k \text{ extraído}\\ \text{del universo de } n+1 \text{ cosas o tiene}\\ \text{al huevo podrido o no tiene al huevi podrido.}}}$$

Sabemos que hay 2^n

$$f : [n] \longrightarrow \mathbb{B}$$

funciones booleanas <u>totales</u> diferentes

¿Cuántas funciones de la forma g : $[\mathbf{n}] \longrightarrow \mathbb{B}$ hay?

Clase 12

Conteo 3

$$\mathbf{g} : [\mathbf{n}] \longrightarrow \mathbb{B}$$

3^n funciones. Pues para cada valor del conjunto de partida hay que decidir 1 de tres cosas.

- **No está en el dominio.**
- **Está en el dominio y su imagen es 0**
- **Está en el dominio y su imágen es 1**

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$Rango_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{Considera } k \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0 \leq x_i \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

¿Cuantas soluciones tiene este problema? $E_{n,k}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 0 \leq x_i \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
0	0	2
0	2	0
2	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 0 \leq x_i \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	3
0	0	3	0
0	3	0	0
3	0	0	0
0	0	2	1
0	0	1	2
0	2	1	0
0	1	2	0
2	1	0	0
1	2	0	0
2	0	0	1
1	0	0	2
2	0	1	0
1	0	2	0
0	2	0	1
0	1	0	2
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

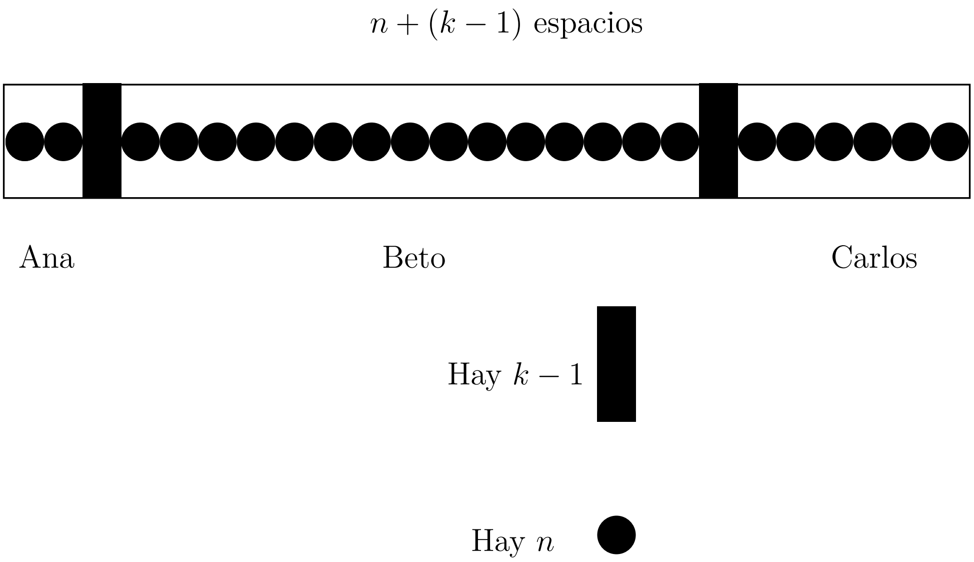
Ana, Beto y Carlos se quieren repartir 23 caramelos y 7 chocolates ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

$$E_{23,3} * E_{7,3}$$

$$\begin{cases} x_{Ana} + x_{Beto} + x_{Carlos} = 23 \\ x_{Ana}, x_{Beto}, x_{Carlos} \in \mathbb{Z} \text{ y son no negativos} \end{cases}$$

Una solución a $E_{n,k}$ se puede representar mediante un vector con k coordenadas donde las misma suman n y son no negativas.

Cada vector de esa forma se puede representar usando los símbolos (Separador) y (Dulce) como sigue primero usamos (Separador)$[k-1]$ para definir k cajas. Luego usamos $[n]$(Dulces) para representar el contenido de cada caja.



$$E_{n,k} = \binom{n + (k-1)}{k-1} = \binom{n + (k-1)}{n}$$

Ahora algo diferente.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i \leq n \\ 0 \leq x_i \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n} E_{j,k} = E_{n,k+1}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i + \omega = n \\ 0 \leq x_i \\ x_i \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \omega \\ \omega \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \leq x_i \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

ω	x_1	x_2	x_3i	$\sum x_i$	
3	0	0	0	0	$E_{0,3}$
2	0	0	1	1	$E_{1,3}$
	0	0	1		
	0	1	0		
	1	0	0		
1	0	0	1	2	$E_{2,3}$
	0	0	2		
	0	2	0		
	2	0	0		
	0	1	1		
	1	0	1		
	1	1	0		
0	0	0	1	3	$E_{3,3}$
	0	0	3		
	0	3	0		
	3	0	0		
	0	1	2		
	0	2	1		
	1	0	2		
	1	2	0		
	2	0	1		
	2	1	0		
	1	1	1		

$$\sum_{j=0}^{3} E_{j,3} = E_{3,4}$$

Ana, Beto, Calos y Diana se quieren repartir 17 manzanas. Ana debe recibir al menos 3. Diana debe recibir al menor 5. ¿De cuántas maneras pueden repartirlas?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 - 5 + 5 = 17 \\ x_1 - 3 \geq 3 - 3 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 - 5 \geq 5 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overbrace{x_1 - 3}^{x_1'} + \overbrace{x_2}^{x_2'} + \overbrace{x_3}^{x_3'} + \overbrace{x_4 - 5}^{x_4'} = 17 - (3 + 5) = 9 \\ x_1' \geq 0 \\ x_2' \geq 0 \\ x_3' \geq 0 \\ x_4' \geq 0 \end{cases}$$

$$E_{9,4} = \binom{9 + (4-1)}{4-1} = \binom{12}{3} = \frac{12 * 11 * 10}{3 * 2 * 1} = 220$$

¿De cuántas formas diferentes podemos expresar el número 10 como suma de 3 naturales?

¿De cuantas formas diferentes podemos expresar el número 10 como suma de naturales?

¿Cuantos tableros **(tableros válidos)** de michi hay?

¿Cuántas placas de carro diferentes se pueden hacer en Perú?

¿Cuántos dados de 6 caras correctos hay? **(Un dado es correcto si sus caras opuestas siempre suman lo mismo.)**

¿Cuantos dados de 12 caras correctos hay? **Un dodecaedro sirve de dado de** 12 **caras**

¿Cuantos brazaletes de 4 cuentas negras y 4 cuentas blancas se pueden hacer?

Clase 13

Conteo 4

$|A| < \infty \quad |B| < \infty$

$$f : A \underset{1:1}{\longrightarrow} B$$
$$|A| = |B|$$

Una ficha de dominó doble-n consiste en un “Rectángulo” con un número entre 0 y n en cada extremo.

El dominó doble-n tiene todas las fichas posibles.

¿Cuántas fichas tiene el dominó doble-6? ¿Doble-9?

$$\Big(\underbrace{6 * 6}_{\substack{\text{Todos los}\\\text{pares}\\\text{ordenados}}} - \underset{\text{Los dobles}}{6}\Big) \underset{\substack{\text{El orden}\\\text{no importa}}}{/2!} + \underset{\text{dobles}}{6} = \binom{6}{2} + \binom{6}{1}$$

$$\underbrace{\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_i \geq 1 \quad x_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}} \longleftrightarrow \underset{\binom{7+3-1}{3-1}}{\begin{cases} x_1' + x_2' + x_3' = 7 \\ x_1 \geq 0 \quad x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

$$|A| = \text{Soluciones de}$$

$$|A| = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$\frac{\binom{9}{2} - 4 * 3}{3!} + 4 = 8$$

Un mazo de baraja francesa consta de un número de cartas que se forman tomando un rango del conjunto $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$ y una pinta del conjunto $\{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$

¿Cuántas cartas tiene un mazo de baraja francesa?

$$(13) * (4) = 52$$

Una mano de pocker consta de 5 cartas seleccionadas al azar de un mazo de baraja francesa bien mezclado. ¿Cuántas manos de poker son posibles?

$$\binom{52}{2}$$

Un <u>Full house</u> es una mano de poker con 3 cartas de un rango y 2 cartas de otro rango. ¿Cuántos full-houses son posibles?

$$\left(\overbrace{13}^{\text{Números}} * \underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{3 cartas de 4} \\ \text{pintas del mismo} \\ \text{número}}} \right) * \left(\overbrace{12}^{\substack{\text{Números} \\ \text{diferentes}}} * \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{2 cartas de 4} \\ \text{pintas del mismo}}} \right)$$

Un doble par consiste de:

2 pares de cartas del mismo rango pero distinto entre sí y una carta de un rango distint de estos.

$$2^{\heartsuit} 2^{\diamondsuit} 3^{\clubsuit} 3^{\diamondsuit} K^{\clubsuit}$$

¿Cuántos dobles pares hay?

$$\overbrace{\binom{13}{2}}^{\substack{\text{Dos números}\\ \text{del rango}}} \quad \underbrace{\binom{4}{2}^2}_{\text{Dos pares de 2}} \quad \overbrace{\binom{11}{1}}^{\substack{\text{Un número}\\ \text{del rango}\\ \text{restante}}} \quad \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{Una carta}}$$

Clase 14

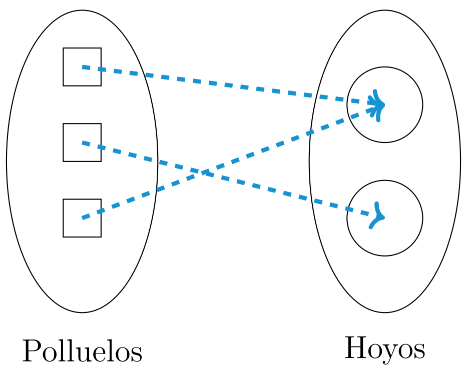
Hollo-polluelo

14.1. Principio del palomar, casillero, Hoyo-polluelo

Si hay más polluelos que hoyos entonces algunos polluelos duermen juntos.

$$f : [n] \longrightarrow [m] \quad \text{si } n > m$$

y f es total entonces f no es $\overbrace{\;|:|\;}^{\substack{\text{Total}\\ \text{inyectiva}\\ \text{sobreyectiva}}}$ (No es inyectiva)

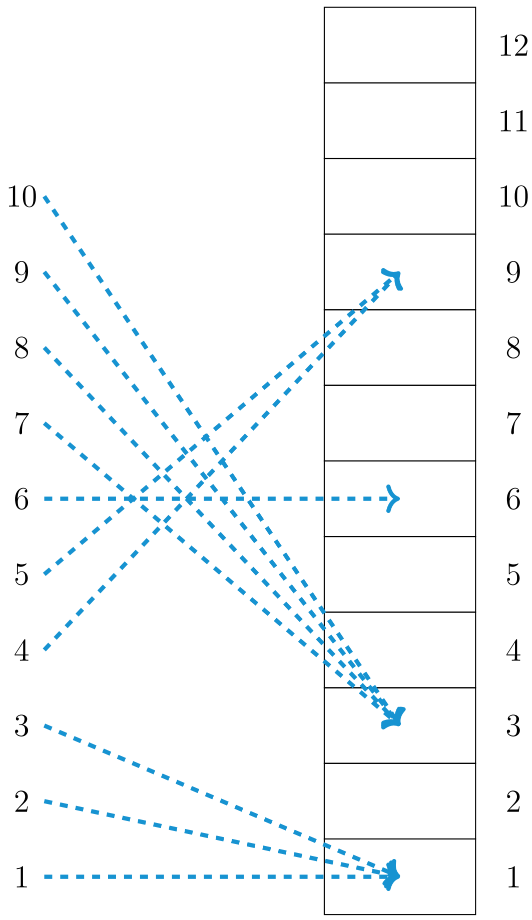


Algún valor del rango recibe al menos dos flechas.

14.2. Menús

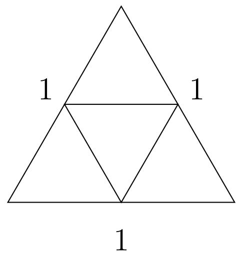
1. Si hay más **Días del año** que **platos**, entonces se repiten algunos **platos**.

2. 36 personas ¿Al menos cuántos comparten el mismo mes de cumpleaños?



$$\left\lceil \frac{36}{12} \right\rceil = 3$$

3. Se escojen n puntos al azar dentro del triángulo ¿Cuanto debe ser n para que al menos 2 puntos esten a distancia menor o igual que $\frac{1}{2}$?



Los puntos son lo polluelos y los 4 subtriángulos los hoyos.

$$\boxed{n = 5}$$

Si se mide solo el perímetro habrían 6 segmentos y n sería 6

4. ¿Qué número de patrones de largo n binarios no tienen unos consecutivos?

$$b_n$$

n	b_n
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Z_n: # de patrones binarios de largo n que no tienen unos consecutivos y terminan en cero

U_n: # de patrones binarios de largo n que no tienen unos consecutivos y terminan en uno.

$$b_n = Z_n + U_n$$

$Z_n = b_{n-1} \quad n \geq 1$ El número de patrones anteriores más un 0

$U_n = Z_{n-1} = b_{n-2} \quad n \geq 2$ El número de Z's anteriores mas un 1

$$\begin{cases} b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} \\ b_1 &= 2 \\ b_2 &= 3 \end{cases}$$

5. Tenemos banderas rojas de $1m$ de alto. Verdes de $2m$ de alto. Azules de $2m$ de alto. Negras de $3m$ de alto.

   ¿De cuantas formas podemos ordenar banderas en un poste de n metros de alto si el orden de las banderas importa? (Sin espacios vacios)

n	f_n	Patrones
0	1	$\emptyset$
1	1	R
2	3	RR,V,A
3	6	RRR,VR,AR,RV,RA,N
4	13	RRRR,RRV,RRA,RVR,RAR,VRR,ARR,RN,NR,AA,AV,VA,VV

$$\begin{cases} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-2} + f_{n-3} \\ f_n &= f_{n-1} + 2f_{n-2} + f_{n-3} \quad n \geq 4 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= 3 \\ f_3 &= 6 \end{cases}$$

Clase 15

Recurrencias

Definición:

Una Ecuación de recurrencia tiene una suceción como solución y ocasionalmente puede venir de problemas de conteo.

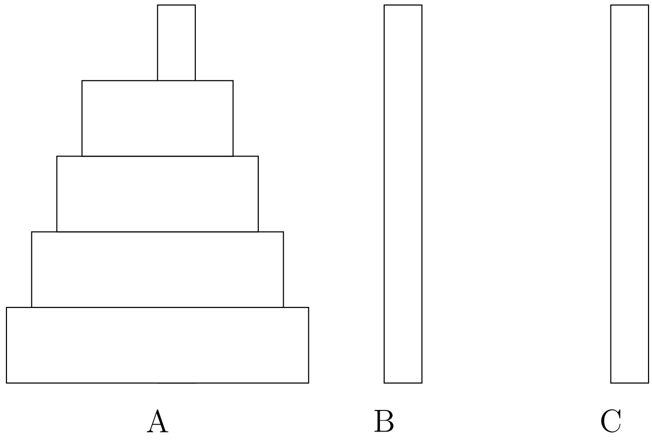
$$\begin{cases} P_n = nP_{n-1} \quad n \geq 1 \longleftarrow \text{o } \begin{array}{c}\text{Factorial}\\ \text{permutaciones}\\ \text{de } n \text{ objetos}\end{array} \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \begin{array}{c} 0\leq k\leq n+1 \\ 0\leq k-1\leq n \\ 0\leq k\leq n \end{array} \\ \binom{0}{0} = 1 \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \end{cases}$$

15.1. Torres de hanoi

- Hay que pasar todos los discos del poste A al poste C.
- Los discos solo pueden moverse:
  - Uno a la vez
  - A un palo adyacente.

- Encima de un disco de mayor diámetro.



Pienses en un "Algoritmo" para mover todos los discos.(n discos)

¿Cuál es la menor cantidad de pasos en que se puede reolver el problema?

Teorema:

T_n: # de movimiento necesarios para resolver torres de hanoi con n discos.

n	T_n
1	2
2	8
3	26
4	80

$$\begin{cases} T_{n+1} = 3T_n + 2 \\ T_1 = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\mathbb{N}} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + (n+1) \\ S_1 = 1 \end{cases}$$

$$Q_n \sum_{k=0}^{n} r^k \quad r \in \mathbb{R} \quad r \neq 0$$

$$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_n + r^{n+1} \\ Q_{n+1} = rQ_n + 1 \end{cases}$$

$$r^0 + rQ_n = r^0 + r\sum_{k=0}^{n} r^i$$

$$r^0 + rQ_n = r^0 + \sum_{k=0}^{n} r^{i+1}$$

$$r^0 + rQ_n = r^0 + \underbrace{1}_{j=i+1} + \sum_{j=1}^{n+1} r^j = Q_{n+1}$$

$$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_n + \underbrace{r^{n+1}}_{\substack{\text{Parte no} \\ \text{homogenea} \\ \text{de la recurrencia}}} \quad n \geq 1 \quad r \neq 0 \quad r \neq 1 \\ Q_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{Q_{n+1} = rQ_n}_{\substack{\text{Grado de la} \\ \text{recurrencia, esta} \\ \text{es de orden 1}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{Parte no} \\ \text{homogenea} \\ \text{de la recurrencia}}} \quad n \geq 1 \quad r \neq 0 \\ \underbrace{Q_0 = 1}_{\substack{\text{Una condición} \\ \text{inicial}}} \end{cases}$$

Igualando ambas versiones de la serie

$$Q_n + r^{n+1} = rQ_n + 1$$

$$(1-r)Q_n = 1 - r^{n+1}$$

$$Q_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ecuación característica:

$$x^{n+1} = rx^n$$

$$x = r$$

15.2. Fibonacci

$$\begin{cases} \underbrace{\overbrace{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}^{\text{Recurrencia homogenea}}}_{\text{Recurrencia de orden 2}} & \text{La parte no homogenea es 0} \\ f_0 = 0 \quad \text{Dos condiciones} \\ f_1 = 1 \quad \text{iniciales} \end{cases}$$

n	f_n
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8

Esta es una recurrencia <u>lineal</u>

Ecuación característica:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \rightarrow \boxed{x^2 = x + 1}$$

$$\begin{cases} P_n = \underbrace{n}_{\substack{\text{No es}\\ \textbf{LINEAL}}} P_{n-1} \quad n \geq 1 \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

Es recurrencia homogenea de orden 1

$$\begin{cases} T_{n+3} = T_{n-5} + \underbrace{2}_{\substack{\text{Recurrencia}\\ \text{no-homogenea}\\ \text{lineal de orden 8}}} -3T_n \quad n \geq 6 \\ T_i = i \quad 1 \leq i \leq 8 \end{cases}$$

Ecuación característica:

$$x^{n+3} = x^{n-5} - 3x^n$$

$$x^8 = 1 - 3x^5$$

Definición:

Si tenemos un $\overbrace{\text{E.R}}^{\substack{\text{Ecuación}\\ \text{en recurrencia}}}$, lineal, de orden K podemos definir la <u>ecuación característica</u> de la E.R reemplazando a_n por x^n y simplificando el polinomio. **Debemos ignorar la parte no homogenea**

¿Qué pasa si r satisface la ecuación característica? (Supongamos que r_1 y r_2 son raíces de $x^2 = x + 1$)

$$r^2 = r + 1$$

Multiplico por r^{n-2}

$$Ar^n = Ar^{n-1} + Ar^{n-2}$$

Propongo $f_n = Ar^n$

$$Ar^n ? = Ar^{n-1} + Ar^{n-2}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$r_1 = x^+ = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$r_2 = x^- = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

15.2.1. Solución general de fibonacci:

$$\begin{cases} f_n = Ar_1^n + Br_2^n \\ f_0 = 0 = A + B \qquad\qquad A = -B \\ f_1 = 1 = Ar_1 + Br_2 \end{cases}$$

$$1 = -Br_1 + Br_2$$

$$1 = B(r_2 - r_1)$$

$$B = \frac{1}{r_2 - r_1}$$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Clase 16

Más recurrencia

Definición:

$$\begin{cases} a_1 = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}\right) + \overbrace{f_n}^{\substack{\text{Es la parte} \\ \text{no homogénea.} \\ \text{no puede tener a's}}} & n \geq k \\ \left.\begin{array}{ll} a_0 = b_0 & \\ a_1 = b_1 & b_i \in \mathbb{R} \\ a_2 = b_2 & c_i \in \mathbb{R} \\ \vdots & \\ a_{n-1} = b_{n-1} & \end{array}\right\} \substack{\text{Caso base} \\ \text{condiciones} \\ \text{iniciales}} \end{cases}$$

Una ecuación en recurrencia para $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

Lineal De orden K $(c_k \neq 0)$

16.1. Receta

- Identificar la ecuación característica y resolverla **(Encontrar todas la raíces)**

La solución a la parte homogénea es de la forma

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{m_j} A_{ij} n^{i-1} r_j\right)$$

Donde m_j es el número de veces que se repite la raíz r_j en la ecuación característica y S es el número de raices diferente que tiene la relación.

Si la recurrencia es homogénea solo falta utilizar las condiciones iniciales para determinar los valores de las A_{ij}

SI la recurrencia es no-homogénea hay que identificar “la forma” que tiene para proponer una solución particular. 16.2

Por ejemplo:

Si la ecuación caractarística fuese:

$$(x-5)^2(x+1)^3(x-7)(x+2)=0$$

La solución para la parte homogénea sería:

$$\overset{A_{11}}{A}5^n + \overset{A_{12}}{B}_n 5^n + \overset{A_{21}}{C}(-1)^n + \overset{A_{22}}{D}_n(-1)^n + \overset{A_{23}}{E}n(-1)^n + \overset{A_{31}}{F}7^n + \overset{A_{41}}{G}(-2)^n$$

$$\sum_{j=1}^{S} m_j = k \ \text{El orden de la recurrencia}$$

Por ejemplo:

$$\begin{cases} d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2} \quad n \geq 2 \\ \\ d_0 = 1 \\ d_1 = 2 \end{cases}$$

n	d_n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
$\vdots$	$\vdots$

E.C.

$$\begin{aligned} x^n &= 4x^{n-1} - 4x^{n-2} \\ x^2 &= 4x - 4 \\ (x^2 - 4x + 4) &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Solución general:15.2.1

$$A2^n + \underbrace{B_n 2^n}_{\substack{\text{Demuestra que} \\ \text{satisfase} \\ \text{la recurrencia}}}$$

$$\begin{aligned} B_n 2^n &= 2^2 \left(B(n-1)2^{n-1}\right) - 2^2 \left(B(n-2)2^{n-2}\right) \\ &= Bn2^{n+1} - \cancel{B2^{n+1}} - Bn2^n + \cancel{B2^{n+1}} \\ &= Bn2^{n+1} - Bn2^n = Bn2^n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 = A2^0 + B * 0 * 2^0 \\ d_1 = 2 = A2^1 + B * 1 * 2^1 \end{cases}$$

$$A = 1$$

$$2A + 2B = 2 \Longrightarrow B = 0 \Longrightarrow d_n = 2^n$$

16.2. Recurrencia no-homogénea

$$\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} + \overbrace{n + 3^n}^{\substack{\text{Parte} \\ \text{no-homogénea}}} \\ \\ h_0 = 1 \\ h_1 = 11 \end{cases}$$

$$f_n = n + 3^n$$

$$f_n = (0 * n^0 * \underbrace{1^n}_{(x-1)}) + (1 * n^1 * \underbrace{1^n}_{(x-1)}) + (1 * n^0 * \underbrace{3^n}_{(x-3)})$$

$$\overbrace{(x-1)^2(x-3)}^{\text{Ecuación característica}}$$

Propongo

$$\boxed{\overbrace{A}^{(x-1)} + \overbrace{Bn}^{(x-1)} + \overbrace{C3^n}^{(x-3)}} \quad \substack{\text{Como} \\ \text{solución} \\ \text{particular}}$$

$$\begin{aligned} A + Bn + C3^n &= 4(A + B(n-1) + C3^{n-1}) \\ &\quad - 4(A + B(n-2) + C3^{n-2}) + n + 3^n \\ A + Bn + C3^n &= \cancel{4A} + \cancel{4Bn} - 4B + 4C3^{n-1} \end{aligned}$$

$\cancel{-4A} + \cancel{-4Bn} - 8B + 4C3^{n-2} + n + 3^n$

$$A = 4B$$

$$Bn = n \Longrightarrow B = 1 \Longrightarrow A = 4$$

$$C3^n = 4C3^{n-1} - 4C3^{n-2} + 3^n$$

$$9C = 12C - 4C + 9$$

$$C = 9$$

$4 + n + 9 * 3^n$ es una solución particular de mi recurrencia no-homogénea

16.3. Algo

$$h_n^4 = h_n^H + h_n^P$$

$$h_n = A2^n + B_n2^n + 4 + n + 9 * 3^n$$

$$h_0 = 1 = A * 2^0 + B * 0 * 2^0 + 4 + 0 + 9 * 3^0$$

$$h_0 = 11 = A * 2 + B * 1 * 2 + 4 + 1 + 9 * 3$$

$$\begin{cases} 1 = A + 4 + 9 \Longrightarrow A = -12 \\ 11 = 2A + 2B + 4 + 1 + 27 \Longrightarrow B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_n = 4\omega_{n-1} - 4\omega_{n-2} + 2n^n + 1 \\ \\ \omega_0 = 1 \\ \omega_1 = 5 \end{cases}$$

$$\omega_n^H = A2^n + Bm2^n$$

Propuesta para solución particular:

$$(x-1)(x-2)^2$$

$$A + Bn^2 2^n + Cn^3 2^n$$

$$\begin{aligned} A + Bn^2 2^n + Cn^3 2^n &= 4(A + B(n-1)^2 2^{n-1} + C(n-1)^3 2^{n-1}) \\ &- 4(A + B(n-2)^2 2^{n-2} + C(n-2)^3 2^{n-2}) + n2^n + 1 \\ A + Bn^2 2^n + Cn^3 2^n &= \cancel{4A} + 4Bn^2 2^{n-1} - 8nB2^{n-1} + 4B2^{n-1} \\ &+ 4C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1)2^{n-1} \\ &\cancel{-4A} - 4B(n^2 - 4n + 4)2^{n-2} - 4C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8)2^{n-2} \\ &+ n2^n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ n^2 2^n & \\ B &= \cancel{2B - 6C - B + 6C} \\ n^3 2^n & \\ C &= \cancel{2C - C} \\ n2^n & \\ 0 &= \cancel{-4B} + 6C + \cancel{4B} - 12C + 1 \\ C &= \frac{1}{6} \\ 2^n & \\ 0 &= 2B - 2C - 4B + 8C \end{aligned}$$

$$0 = -2B + 6C$$

$$0 = -2B + 1$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Solución particular:

$$\omega_n^P 1 + \frac{1}{2}n^2 2^n + \frac{1}{6}n^3 2^n$$

$$\omega_n = A2^n + Bn2^n + 1 + \frac{1}{2}n^2 2^n + \frac{1}{6}n^3 2^n$$

Clase 17

Mini clase

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \end{cases}$$

Definición:

Coprimos.

Su su máximo común divisor es 1.

17.1. Un problema

Se seleccionan 101 enteros de $S = [200]$. Muestra que existe al menos un número que divide a otro.

Converserse de que $x \in S$

$$X = 2^n y$$

con $y \in \overbrace{\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots, 199\}}^{\text{100 números}}$ (Impares) y $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

Al seleccionar 101 números de [200] $\overbrace{\text{repetimos al menos un } y}^{\text{Por hoyo-polluelo}}$

Digamos que ese $y \in y_0$. Entonces hay dos números $x_1 = 2^{n_1}y_0$ y $x_2 = 2^{n_2}y_0$ Son $n_1 \neq n_2$ pero entonces $n_1 > n_2$ o $n_2 > n_1$ y en consecuencia $x_2 \Big| x_1$ o $x_1 \Big| x_2$

- Hoyo: y
- Polluelos: 101 enteros

17.2. Un problema con hombres y mujeres

- 4 Mujeres
- 4 Hombres

Un hombre no puede ir detras de otro. Ya que hay una mujer entre ellos.

¿De cuántas formas se pueden formar?

$$3 * \overbrace{4!}^{\substack{\text{Permuta a} \\ \text{las mujeres}}} \quad \overbrace{3!}^{\substack{\text{Permuta a} \\ \text{los hombres}}}$$

M	M	H
H	M	M
M	H	H
H	M	M
M	H	H
H	M	M
M	H	M
4!3!	<++>	<++>

17.3. Un problema con monedas

Supongan que tienen que dar el vuelto de 47 soles.

Pueden usar monedas/billetes de:

- 1 sol x_1
- 2 soles x_2
- 5 soles x_5
- 10 soles x_{10}
- 20 soles x_{20}
- 50 soles x_{50}

¿De cuántas formas puede hacerse esto?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 50x_{50} = 47 \\ 0 \leq x_i \quad x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Clase 18

Aun más conteo

18.1. Continuación

De 17.3

Definición:

Funciones generadoras

IDEA: Utilizar una "función formal" para llevar la cuenta de cada posibilidad, apoyarnos en Álgebra que es algo que sabemos hacer.

11 soles

S/1	S/2	S/5	S/10
11	0	0	0
9	1	0	0
7	2	0	0
5	3	0	0
3	4	0	0
1	5	0	0
6	0	1	0
4	1	1	0
2	2	1	0
0	3	1	0
1	0	2	0
1	0	0	1

Cuadro 18.1: Cantidad de monedas

$$\overbrace{(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11})}^{\text{Lleva la cuenta de el \# de monedas de 1 sol}} *$$
$$\overbrace{(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})}^{\text{Monto en monedas de 2}} *$$
$$\overbrace{(x^0+x^5+x^{10})}^{\text{Monto en monedas de 5}} \; *$$
$$\overbrace{(x^0+x^{10})}^{\text{Monto en billetes de 10}}$$

La respuesta es el coeficiente de x^{11} $\left(\cdots + \overbrace{n}^{\text{Cantidad}} \; x^{\overbrace{v}^{\substack{\text{Valor de}\\ \text{la moneda}}}} + \cdots\right)$

Ahora con 7 soles:

S/1	S/2	S/5	S/10
7	0	0	0
5	2	0	0
3	4	0	0
1	6	0	0
2	0	5	0
0	2	5	0

Cuadro 18.2: Dinero por tipo de moneda

18.2. Un problema con generadoras

Se quieren repartir 11 caramelos, 17 chocolates y 14 frutas. Entre Ana, Beto, Carlos, Daniela.

¿De cuántas formas se pueden repartir las cosas?

Ana es alérgica al chocolate.

Beto solo come comida en cantidades pares.

Carlos debe recibir al menos 6 caramelos y no más de 8.

Daniela quisiera al menos dos chocolates y un múltiplo de 3 frutas.

Vamos a usar la regla del producto y multiplicaremos los resultados de asignación de caramelos, chocolates y frutas.

Caramelos:

$$\overbrace{\left(\sum_{k=0}^{11} x^k\right)}^{\text{Ana}} \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{5} x^{2k}\right)}^{\text{Beto}} \overbrace{\left(\sum_{k=6}^{8} x^k\right)}^{\text{Carlos}} \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{11} x^k\right)}^{\text{Daniela}} x^{11} : 27$$

Chocolates:

$$\overbrace{1}^{\text{Ana}} \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{8} x^{2k}\right)}^{\text{Beto}} \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{11} x^k\right)}^{\text{Carlos}} \overbrace{\left(\sum_{k=2}^{11} x^k\right)}^{\text{Daniela}} x^{17} : 72$$

Frutas:

$$\overbrace{\left(\sum_{k=0}^{14} x^k\right)}^{\text{Ana}}\overbrace{\left(\sum_{k=0}^{7} x^{2k}\right)}^{\text{Beto}}\overbrace{\left(\sum_{k=0}^{14} x^k\right)}^{\text{Carlos}}\overbrace{\left(\sum_{k=0}^{4} x^{3k}\right)}^{\text{Daniela}} x^{14} : 147$$

$$\boxed{27 * 72 * 147}$$

Clase 19

Funciones generadoras

Idea: Usar los coeficientes de polinomios para responder problemas **(o series)** de conteo.

Si a_n es la respuesta que buscamos, la encontramos como coeficiente de x^n en una "función formal" es decir:

$$a_n = \underbrace{A(x)}_{\substack{\text{Función}\\ \text{generadora}}} [x^n]$$

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Vuelto usando monedas de 1 de 2 y de 5:

$$\underbrace{(x^0 + x + x^2 + x^3 + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} x^k} \underbrace{(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}} \underbrace{(x^0 + x^5 + x^{10} + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} x^{5k}}$$

Vuelto de 12:(Contribución por moneda)

1	2	5
12	0	0
10	2	0
8	4	0
6	6	0
4	6	0
2	10	0
0	12	0
7	0	5
5	2	5
3	4	5
1	6	5
2	0	10
0	2	10

$$(x^0 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^0 + x^2 + x^4 + \cdots) =$$

$$\underbrace{1 + x^1 + (x^2 + x^2) + 2x^3 + 3x^4 + \cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x)}$$

$$(b_k)_{k=0}^{\infty} \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \underset{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{B(x)}$$

19.1. Polinomios torre:

	$\square$	
		$\square$
$\square$		

(Las torres son indistinguibles entre sí) (La tabla tiene solo una orientación)

¿Cuántas formas hay que poner distintos números de torres en el "tablero" sin que estas se ataquen entre sí?

Espacios para cada torre: (3 torres, 9 cuadrados)

$$\frac{\overbrace{9}^{\substack{\text{Para la}\\\text{primera}\\\text{torre}}} * \overbrace{4}^{\substack{\text{Para la}\\\text{segunda}\\\text{torre}}} * \overbrace{1}^{\substack{\text{Para la}\\\text{última}\\\text{torre}}}}{\underbrace{3!}_{\substack{\text{Porque son}\\\text{indistinguibles}}}} = 6$$

$$P_t(x)[x^k] : \substack{\text{\# de formas de poner } k\\\text{torres en el tablero } T\\\text{sin que se ataquen entre sí.}}$$

$$P(x) = xP(x) + P(x)$$

$$P(x) = P(x) = 1 + 4x + 2x^2$$

$$P(x) = xP(x) + P(x)$$

$$xP(x) = P(x) = 1 + 4x + 2x^2$$

$$P(x) = xP(x) + P(x)$$

$$P(x) = xP(x) + P(x)$$

$$P(x) + P(x) = +1 + 2x$$

$$P(x) = xP(x) + P(x)$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x(1 + 2x) + 1 + 4x + 2x^2 \\ &= x + 2x^2 + 1 + 4x + 2x^2 \end{aligned}$$

$$= 1 + 5x + 4x^2$$

$$P(x) = x(1 + 2x) + 1 + 5x + 4x^2$$
$$= x + 2x^2 + 1 + 5x + 4x^2$$
$$= 1 + 6x + 6x^2$$

$$P(x) = x(1 + 4x + 2x^2) + 1 + 6x + 6x^2$$
$$= x + 4x^2 + 2x^3 + 1 + 6x + 6x^2$$
$$= 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3$$

$$P(x) = x(1 + 4x + 2x^2) + 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3$$
$$= x + 4x^2 + 2x^3 + 1 + 7x + 10x^2 2x^3$$
$$= 1 + 8x + 14x^2 + 4x^3$$

$$P(x) = x(1 + 4x + 2x^2) + 1 + 8x + 14x^2 + 4x^3$$
$$= x + 4x^2 + 2x^3 + 1 + 8x + 14x^2 + 4x^3$$
$$= 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3$$

19.2. Tablas

$$
\begin{cases}
S_n = 2S_{n-1} + 8S_{n-2} \\
S_0 = 1 \\
S_1 = 2
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n x^n &= 2S_{n-1}x^n + 8S_{n-2}x^n \\
\sum_{n=2}^{\infty} S_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} (2S_{n-1}x^n + 8S_{n-2}x^n)
\end{aligned}
$$

$$
S(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n}_{\substack{\text{Creo que el } n \\ \text{se puede reemplazar} \\ \text{por otra variable que} \\ \text{en 0.}}}
$$

$$
\begin{aligned}
S(x) - S_1x^1 - S_0 &= \sum_{n=2}^{\infty} 2S_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 8S_{n-2}x^n \\
S(x) - S_1x^1 - S_0 &= 2x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} S_{n-1}x^{n-1}}_{S(x)-S_0} + 8x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} S_{n-2}x^{n-2}}_{S(x)} \\
S(x) - 2x + 1 &= 2x(S(x) - 1) + 8x^2 S(x) \\
\cancel{-2x} - 1\cancel{2x} &= S(x)(8x^2 + 2x - 1) \\
\frac{-1}{8x^2 + 2x - 1} &= S(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \frac{-1}{8x^2 + 2x - 1} \\
S(x) &= \frac{-1}{(4x-1)(2x+1)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{-1}{(4x-1)(2x+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{2x+1}$$
$$-1 = A(2x+1) + B(4x-1)$$

$x = -0{,}5$:

$$-1 = \cancel{A(-1+1)} + B(-2-1)$$
$$-1 = -3B$$
$$B = \frac{1}{3}$$

$x = 0{,}25$:

$$-1 = A(0{,}5+1) + \cancel{B(1-1)}$$
$$-1 = 1{,}5A$$
$$A = \frac{-2}{3}$$

$$S(x) = \frac{-\frac{2}{3}}{4x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{2x+1}$$
$$S(x) = \frac{2}{3} * \frac{1}{1-4x} + \frac{1}{3} * \frac{1}{1-(-2x)}$$
$$S(x) = \frac{2}{3} * \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k + \frac{1}{3} * \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^k$$
$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} 4^k + \frac{1}{3}(-2)^k\right) x^k$$
$$S_k = \frac{2}{3} 4^k + \frac{1}{3}(-2)^k$$

Clase 20

Coeficientes indeterminados

Dada una recurrencia para a_n (Una sucesión (Una función de $\{0\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)) donde

(Esto es como una plantilla para crear recurrencias)

$$\begin{cases} a_n = \overbrace{\sum_{j=1}^{k} c_j a_{n-j}}^{\substack{\text{Una recurrencia de} \\ \text{orden } k \text{ si } c_k \neq 0}} \qquad \underbrace{+f(n)}_{\substack{\text{Si esto es cero} \\ \text{la recurrencia es homogénea} \\ \text{en caso contrario} \\ \text{no es homogénea}}} \qquad \forall n \geq k \\ \left.\begin{array}{l} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} = b_{k-1} \end{array}\right\} \underbrace{\text{Condiciones iniciales}}_{\substack{\text{T. si se tiene una recurrencia lineal de orden } k \text{ para} \\ a_n \text{ bastan } k \text{ condiciones iniciales consecutivas para} \\ \text{determinar de manera única a } a_n}} \end{cases}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ constantes fijas para $i \in [k]$

$b_i \in \mathbb{R}$ constantes fijas para $i \in \{0\} \cup [k-1]$

y $f(n)$ una combinación lineal de polinomios en n por exponenciales en n.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\omega} P_j(n) d_j^n \quad d_j \in \mathbb{R} \text{ Fijos para } j \in [\omega]$$

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-4} + 3 \quad n \geq 4 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 4 \end{cases}$$

Método general para resolver recurencias.

1. **Econtrar la ecuación carácterística. ($i = \sqrt{-1}$)**

$$x^4 = 7$$
$$r_1 = \sqrt[4]{7}$$
$$r_2 = -\sqrt[4]{7}$$
$$r_3 = \sqrt[4]{7}i$$
$$r_4 = -\sqrt[4]{7}i$$
$$x^4 = 7 \Rightarrow (x^4 - 7) = 0 \Rightarrow$$
$$(x - \sqrt[4]{7})(x + \sqrt[4]{7})(x - \sqrt[4]{7}i)(x + \sqrt[4]{7}i) = 0$$

2. **Proponer la solución homogénea. Si las k raíces de la ecuación carácterística son. $r_1, r_2, \cdots, r_s$ con multiplicidades (Las repeticiones de una raiz) $m_1, m_2, \cdots, m_s$ respectivamente. $m_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{s} mi = k$ proponemos $a_n^h = \sum_{i=1}^{s} p_i(n) r_i^n$ donde $p_i(n) = \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{ij} n^j$ (Es un polinomio de grado $m_i - 1$ y A_{ij} (Los $A.B.C$ que había usado para fibonacci) constan-**

te)

$$a_n^h = A_{1,0}\sqrt[4]{7}^n + A_{2,0}\left(-\sqrt[4]{7}\right)^n + A_{3,0}\left(\sqrt[4]{7}i\right)^n + A_{4,0}\left(-\sqrt[4]{7}i\right)^n$$

3. **Considerar la parte no-homogénea para encontrar una relación particular a_n^p Hay que pensar que relación carácterística tendríamos que tener para "ver" la $f(n)$**

$$f(n) = 3 = \underbrace{3}_{\substack{\text{Está repetida}\\ \text{una vez}}} * \underbrace{1^n}_{\substack{\text{La raiz}\\ \text{es 1}}} \rightarrow (r-1)^1 = 0$$

Como 1 no es raíz de la parte homogénea entonces $q_n^p = A \cdot 1^n$

Sustituimos en la recurrencia para encontrar los valores de las constantes.

$$A * 1^n = 7 * A * 1^{n-4} + 3 * 1^n$$

$$A = 7A + 3$$

$$-6A = 3$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

4. **Continuamos la solución general. $a_n = a_n^h + a_n^p$**

$$a_n = A_{1,0}\sqrt[4]{7}^n A_{2,0}\left(-\sqrt[4]{7}\right)^n A_{3,0}\left(\sqrt[4]{7}i\right)^n A_{4,0}\left(-\sqrt[4]{7}i\right)^n - \frac{1}{2}$$

$$1 = A_{1,0} + A_{2,0} + A_{3,0} + A_{4,0} + \left(\frac{-1}{2}\right)$$
$$2 = A_{1,0}\sqrt[4]{7} - A_{2,0}\sqrt[4]{7} + A_{3,0}\sqrt[4]{7}i - A_{4,0}\sqrt[4]{7}i - \frac{1}{2}$$
$$3 = A_{1,0}\sqrt[4]{7}^2 + A_{2,0}\sqrt[4]{7}^2 - A_{3,0}\left(\sqrt[4]{7}i\right)^2 - A_{4,0}\left(\sqrt[4]{7}i\right)^2 - \frac{1}{2}$$
$$4 = A_{1,0}\sqrt[4]{7}^3 - A_{2,0}\sqrt[4]{7}^3 - A_{3,0}\sqrt[4]{7}^3 i - A_{4,0}\sqrt[4]{7}^3 i - \frac{1}{2}$$

Resuelve $A_{1,0}, A_{2,0}, A_{3,0}, A_{4,0}$

20.1. Ejercicios random

Un poste con n metros de altura se quiere llenar con banderas de colores. Las banderas tienen un metro de alto y pueden ser rojas, verdes o azules.

1. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

$$3^n$$

2. Plantea una recurrencia

$$\begin{cases} f_n = 3f_{n-1} \quad f \geq 1 \\ f_0 = 1 \\ f_1 = 3 \end{cases}$$

3. Resuelve la recurrencia y comparala con 1

Ecuación carácterística

$$f^n = 3f^{n-1}$$
$$f^n = 3\frac{f^n}{f}$$
$$f = 3$$

$$f_n^h = A * 3^n$$

$$f_1 = 3 = A * 3^1 \Rightarrow A = 1$$

Estructuras discretas II

Un poste con n metros de altura se quiere llenar con banderas de colores. Las banderas tienen un metro de alto y pueden ser rojas, verdes o azules. O de dos metros de alto blancas o negras.

1. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

$$?$$

2. Plantea una recurrencia

$$\begin{cases} f_n = 3f_{n-1} + 2f_{n-2} \quad f \geq 3 \\ f_0 = 1 \\ f_1 = 3 \\ f_2 = 11 = \underbrace{3^2}_{\substack{\text{Patrones con 2} \\ \text{banderas de } 1m}} + \overbrace{2}^{\substack{\text{Patrones con 1} \\ \text{bandera de } 2m}} \end{cases}$$

3. Resuelve la recurrencia y comparala con 1

Ecuación carácterística

$$f^n = 3f^{n-1} + 2f^{n-2}$$
$$f^n = 3\frac{f^n}{f} + 2\frac{f^n}{f^2}$$
$$1 = \frac{3}{f} + \frac{2}{f^2}$$
$$f^2 = 3f + 2$$
$$f^2 - 3f - 2 = 0$$

$$f^+ = r_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$f^- = r_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$f_n^h = A(r_1)^n + B(r_2)^n$$
$$f_n^h = A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + f\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

$$f_0 = 1 = A + B$$
$$f_1 = 3 = A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^1$$

Para llevar Un poste con n metros de altura se quiere llenar con banderas de colores. Las banderas tienen un metro de alto y pueden ser rojas, verdes o azules.

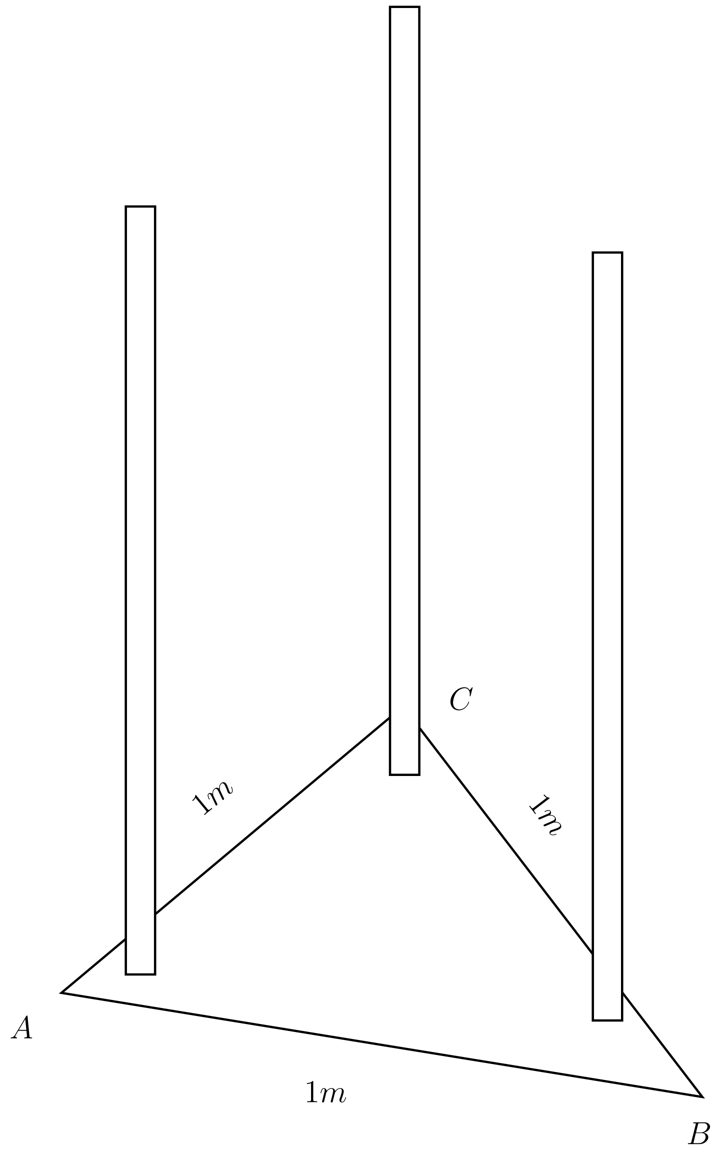
1. ¿De cuántas formas podemos poner las banderas sin que hayan 2 banderas rojas consecutivas?

2. ¿De cuántas formas podemos poner las banderas sin que hayan 2 banderas del mismo color consecutivas?

20.2. Otro torres de Hanoi

Los postes están puestos en un triángulo.

Los 9 billones de nombres de Dios Arthur Clarke



Queremos llevar los discos de A a C.

- No podemos mover más de 1 disco por vez.
- No puede haber un disco grande encima de uno pequeño.

$$\begin{cases} H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} \\ H_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 1 \\ H_1 = 1 \end{cases}$$

$$H^n = 2H^{n-1}$$

$$H = 2$$

Parte homogénea

$$H_n^h = A * 2^n$$

Parte no-homogénea(Solución particular)

$$H_n^p = B * 1^n = B$$

$$B * 1^n = 2B * 1^n + 1$$

$$B = 2B + 1 \quad B = -1$$

Combinando ambas partes

$$H_n = A * 2^n - 1$$

$$H_1 = 1 = A * 2^1 - 1$$

$$2 = A * 2$$

$$A = 1$$

$$H_n = 2^n - 1$$

Para llevar

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + n^2 \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

Con función generadora:

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + n \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

Todo multiplicado por x^n

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (S_{n-1}x^n + nx^n) \\
S(x) - S_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n
\end{aligned}$$

$$S(x) - 0 = xS(x) + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} <$$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \\
\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= xS(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \\
(1-x)S(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\
S(x) &= \frac{x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Estamos buscando el coeficiente de x^n en $S(x)$

$$(S(x))\,[x^n] = \frac{x}{(1-x)^3}\,[x^n]$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\right)=S(x)\quad S(x)[x^k]=\frac{(k+1)(k+1-1)}{2}=\boxed{\frac{(k+1)k}{2}}$$

Derivada otra vez

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=(-2)(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2}{(1-x)^3}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\underbrace{=}_{\substack{nx^{1-1}\\ \text{es constante}\\ \text{respecto a } x.}}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}=\frac{1}{(1-x)^3}$$
$$x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}=\frac{x}{(1-x)^3}=S(x)$$

Clase 21

Funciones generadoras

Se usan para generar sucesiones.(Creo)

21.1. Propiedades

$$\begin{aligned} \text{Si } A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \text{y } B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ \text{y } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La función generadora de $(ca_n)_{n=0}^{\infty}$ es $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n x^n = cA(x) = (cA)(x)$

La función generadora de $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ es $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n x^n = A(x) + B(x) = (A + B)(x)$

Creo que es como una serie geométrica

$$\overset{\text{Sucesión(Función)}}{(1, 1, 1, \cdots) = (1)_{n=0}^{\infty}} \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \overset{\text{FGM}}{\sum_{n=0}^{\infty} 1 * x^n} = \frac{1}{1-x}$$

$$(0, 1, 2, 3, 4, \cdots) \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n},0,0,\cdots\right)\longleftrightarrow(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j i^{n-j}$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Sucesión geométrica multiplicada por una constante

$$(c,c,c,\cdots)\longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}cx^k=\frac{c}{1-x}$$

¿Sucesión geométrica?

$$(c^0,c^1,c^2,c^3,\cdots)\longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}c^k x^k=\frac{1}{1-cx}$$

Idea: Usar Taylor para más series.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

Serie de Maclaurin: (Taylor centrada en uno)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

Fracciones parciales

$$F(x)=\frac{1}{(1-x)}\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(1+x)^2}$$

$$\frac{A(1+x)^2+B(1-x)(1+x)+C(1-x)}{(1-x)(1+x)^2}=\frac{2}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$A(1+2x+x^2)+B(1-x^2)+C(1-x)=2+0*x+0*x^2$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B+C &= 2 \\ 2A-C &= 0 \Rightarrow_{\substack{C=2A\\A=B}} \Rightarrow_{\substack{A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\\C=1}} \\ A-B &= 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} * \frac{1}{1+x} + 1 * \frac{1}{(1+x)^2}$$

Coeficiente en x^n

$$F(x)[x^n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * (-1)^n + \frac{1}{(1+x)^2}[x^n]$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n - (n+1)(-1)^{n+1}$$

Si $F(x)$ es la función generadora para $(f_0)_{n=0}^{\infty}$

$F'(x)$ es la función generadora para $((n+1)f_{n+1})_{n=0}^{\infty}$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(f_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k x^{k-1} \stackrel{(n=k-1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)f_{n+1}x^n$$

Clase 22

Herramientas generadoras

Si $A(x), B(x)$ son *FGO* **(Funciones generadora ordinaria)** de a_n, b_n y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = A(x) + B(x) = (A+B)(x)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n x^n = cA(x)$$

$$(A+B)(x)[x^n] = A(x)[x^n] + B(x)[x^n] = a_n + b_n$$
$$(cA)(x)[x^n] = cA(x)[x^n] = ca_n$$

$$\frac{d}{dx}A(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$$
$$SA(x)dx = c + \sum_{n=0}^{\infty}\int anx^n dx = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \overset{n+1=j}{=} c + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j-1}}{j}x^j$$

$$\left(\frac{d}{dx}A(x)\right)[x^n] = (n+1)a_{n+1}$$

$$\left(\int A(x)dx\right)[x^n] = \begin{cases} c & n = 0 \\ \frac{a_{n-1}}{n} & n > 0 \end{cases}$$

$m \in \mathbb{Z} \quad m \leq 0$

$$\begin{aligned} x^m A(x) &= x^m \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+m} \\ &\underset{k=j+m}{=} \sum_{k=m}^{\infty} a_{k-m} x^k \end{aligned}$$

$$(x^m A(x))[x^n] = \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$$

Más cosas para la caja de herramientas:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_a, \cdots) &\longleftrightarrow A(x) \\ (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m \text{ ceros}}, a_0, a_1, a_2, \cdots) &\longleftrightarrow x^m A(x) \\ (1 * a_1, 2 * a_2, 3 * a_3, 4 * a_4, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{d}{dx} A(x) \\ (c, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \cdots) &\longleftrightarrow \int A(x)dx \end{aligned}$$

22.1. Algo con distributiva infinita

$$(A(x)B(x))[x^n]$$

$$
\begin{aligned}
A(x)B(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\
&= (a_0 b_0)x^0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x^1 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

En la posición n: (a baja y b sube)

$$(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n)x^n$$

$$((A \cdot B)(x))\,[x^n] = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$$

Cosas extrañas:

$$\left(\frac{1}{1-x} \cdot A(x)\right)[x^n] = \sum_{j=0}^{n} a_j$$

$$(a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} A(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1, \cdots)$$

El $S(x)$ es como una sumatoria de sumatorias.

Su n elemento es una sumatoria.

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} j$$

$$
\begin{aligned}
(0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots) &\longleftrightarrow F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \\
(0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x} F(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = S(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1, 2, 3, 4, \cdots) &\longleftrightarrow H(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\
(0, 1, 2, 3, \cdots) &\longleftrightarrow xH(x) = \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,1,1,1,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x}\\
(1,1+1,1+1+1,1+1+1+1,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

Fracciones parciales:

$$
\underbrace{S(x)=\frac{x}{(1-x)^3}=x\left(\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}\right)}_{\text{Esto no funciona}}
$$

Intentando resolverlo:

$$
(1,1,1,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}
$$

$$
\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\underset{k-1=j}{=}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^j
$$

$$
\begin{aligned}
(1,2,3,4,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\\
&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=\frac{-2*1*(-1)}{(1-x)^3}\\
&=\frac{2}{(1-x)^3}\\
(2*1,3*2,4*3,5*4,\cdots) &\longleftrightarrow \sum_{j+1}^{\infty}jx^{j-1}\\
&\longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)x^k
\end{aligned}
$$

$$
\frac{2}{(1-x)^3}[x^n]=(n+2)(n+1)
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{(1-x)^3}\right)[x^n] &= \frac{1}{(1-x)^3}[x^{n-1}]\\
&=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1-x)^3}\right)[x^{n-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)[x^{n-1}] \\
&= \frac{1}{2}(n-1+2)(n-1+1) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)(n)
\end{aligned}
$$

22.2. Suma de cuadrados(Nada de esto funciona)

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} j(j-1+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (j(j-1)+j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \boxed{\sum_{j=1}^{n} j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n = \sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \sum_{j=1}^{n} \overset{\text{FGO}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-x}\cdot\frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} \\
&= \frac{2x+(1-x)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x+1}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^4}
\end{aligned}
$$

Derivando:(No sé de donde sale esta derivada)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right) &= 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) \\
&= \frac{6}{(1-x)^4}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)x^k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)kx^{k-1}$$

Reindexando

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)x^n$$
$$\left(\frac{6}{(1-x)^4}\right)[x^n] = (n+3)(n+2)(n+1)$$

Algo extraño

$$\begin{aligned}
C_n &= \left(\frac{x}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^4}\right)[x^n] \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{6}{(1-x)^4}\right)[x^{n-1}] - \frac{1}{6}\left(\frac{6}{(1-x)^4}\right)[x^n] \\
&= \frac{1}{6}(n+2)(n+1)n + \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1) \\
&= \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Esto sería la respuesta correcta:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Clase 23

Aún más generadoras

23.1. Un repaso de generadoras

$$\begin{array}{ccc} & \underset{f:\{0\}\cup\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}}{\text{Sucesión}} & \text{Función generadora} \\ f_n = (\underbrace{1,1,1,\cdots}_{f_n=1 \quad n\geq 0}) = (f_n)_{n=0}^{\infty} & \overset{\text{FGO}}{\longleftrightarrow} & \dfrac{1}{1-x} \\ f_n = (\underbrace{1,r,r^2,r^3,\cdots}_{f_n=r^n \quad n\geq 0}) = (f_n)_{n=0}^{\infty} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-rx} \end{array}$$

Si $F(x)$ y $G(x)$ son las FGO de f y g y $c \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Entonces:

$$H(x) = F(x) + G(x) \text{ es la FGO de } h = f + g$$

$$\text{es decir } h_n = H(x)[x^n] = (F(x) + G(x))\,[x^n] = f_n + g_n$$

Si $K(x) = cF(x)$ es la FGO $K = cf$

$$K_n = K(x)[x^n] = (cF(x))[x^n] = cf_n$$

23.1.1. Derivadas e integrales

Derivadas

$$\begin{aligned}
DF(x) = \frac{d}{dx}F(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i\right) \\
&\underset{\substack{\text{Derivada}\\ \text{de una}\\ \text{constante}\\ \text{es 0}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(f_i x^i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i f_i x^{i-1} \\
&\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (j+i) f_{j+1} x^j
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = DF(x)[x^n] = (n+1) f_{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

Integrales

$$\begin{aligned}
IF(x) &= \int F(x)dx \\
&= \int \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i\right) dx \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int f_i x^i dx\right) + c \\
&= c + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{i+1} x^{i+1} \\
&\underset{j=i+1}{=} c + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_{j-1}}{j} x^j
\end{aligned}$$

$$\int F(x)dx = IF(x)[x^n] = \begin{cases} c & \text{si } n = 0 \\ \frac{f_{n-1}}{n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

23.1.2. Algo con multiplicación

$$P(x) = F(x)G(x) \text{ es la FGO } P_n = \sum_{j=0}^{n} f_j g_{n-j} \underset{i=n-j}{=} \sum_{i=0}^{n} f_{n-i} g_i$$

$$\begin{aligned}
P(x) = F(x)G(x) &= (f_0, f_1x^1, f_2x^2, \cdots)(g_0, g_1x^1, g_2x^2, \cdots) \\
&= f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)x^1 + (f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0)x^2 + \cdots \\
&+ (f_0g_n, f_1g_{n-1}, f_2g_{n-2}, \cdots, f_{n-2}g_2, f_{n-1}g_1, f_ng_0,)x^n + \cdots
\end{aligned}$$

$$P(x)[x^n] = \sum_{j=0}^{n} f_j g_{n-j} \longleftarrow \text{ Esto se demuestra con inducción}$$

$$\begin{aligned}
F(x) * \frac{1}{1-x}[x^n] &= \sum_{j=0}^{n} f_j * 1 \\
&= \sum_{j=0}^{n} f_j \\
&= \underbrace{f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n}_{\substack{n+1 \text{ segundos} \\ (n+1 \text{ términos})}}
\end{aligned}$$

23.1.3. Moviendo n

$$\left(x^k F(x)\right)[x^n] = \begin{cases} f_{n-k} & n \geq k \\ 0 \quad n < k \end{cases}$$

Si $\underbrace{f_n \text{ tiene suficientes}}_{k \text{ ceros}}$ ceros al pricipio.

$$\frac{F(x)}{x^k}[x^n] = f_{n+k} \quad \forall n \geq 0$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \longleftrightarrow A(x)$$
$$(\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{k \text{ ceros}}, a_0, a_1, a_2, \cdots) \longleftrightarrow x^k A(x)$$

$$(b_0, b_1, b_2, \cdots) \longrightarrow B(x) \qquad \text{y se que } b_0, b_1, \cdots, b_{k-1} = 0$$
$$(b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \cdots) \longleftarrow \frac{B(x)}{x^k}$$

23.2. Ejemplos generadores

Queremos encontrar la FGO:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1-1}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{-1}{1-(-i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1-(-i)} \\
&= \overbrace{n+1}^{\frac{1}{(1-x)^2}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1-(-i)}}_{t_n}
\end{aligned}$$

Integrando

$$\int F(x)dx = IF(x) = c + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{i-1}}{i} x^i$$

$$\left(\int F(x)dx\right)[x^n] = \begin{cases} c & \text{si } n = 0 \\ \frac{f_{n-1}}{n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Forma cerrada para $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1-(-i)}$

$$\left(\int \frac{1}{1-x}dx\right)[x^n] = \begin{cases} c & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$-\ln(1-x)[x^n] = \begin{cases} c & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Tomamos $c = 0$

$$\begin{array}{rcl} \text{Generadoras} & & \text{Sucesiones} \\ -\ln(1-x) & \longrightarrow & \left(c, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right) \\ \frac{-\ln(1-x)}{x} & \longrightarrow & \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right) \\ \frac{1}{1-x} * \left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right) & \longrightarrow & \left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \cdots\right) \end{array}$$

$$T(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x(1-x)}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}}$$

Algo sobre alguién llamado Mario.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k+1} + \frac{n}{n+1} \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} S_n & = S_{n-1} + \underset{\text{No}}{\frac{n}{n+1}} \quad n \geq 1 \\ S_0 & = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} x^n \right)$$

$$S(x) - 0 = xS(x)$$

Clase 24

Generadoras exponenciales

Definición:

FGO:

Se usa el coeficiente de x^n para llevar la cuenta

$$A(x)[x^n] = \underbrace{a_n}_{\substack{\text{Coeficiente}\\ \text{del } x^n}} \qquad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Algunas propiedades:

$$(A+B)(x)[x^n] = A(x)[x^n] + B(x)[x^n]$$

$$(cA)(x)[x^n] = cA(x)[x^n] \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(x^k A(x))[x^n] = A(x)[x^{n-k}] \quad k \in \mathbb{N}^2$$

$$(A(x)B(x))[x^n] = \sum_{k=0}^{\infty} a(x)[x^k]B(x)[x^{n-k}]$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right)[x^n] = (n+1)\left(A(x)[x^{n+1}]\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k n^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k n^k\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{\substack{\text{Cambio de variable} \\ n=k-1}}$$

$$\left(\int A(x)dx\right)[x^n] = \begin{cases} \frac{1}{n}\left(A(x)[x^{n-1}]\right) & n > 0 \\ c & n = 0 \end{cases}$$

$$\int A(x)dx = c + \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^k dx$$

$$= c + \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k x^k dx$$

$$= c + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

$$= c + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n}_{\substack{\text{Cambio de variable} \\ n=k+1}}$$

24.1. Problemas con generadoras

1.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k e^k \qquad n \geq 0$$

- Encuentra $S(x)$. FGO de $\left(S_n\right)_{n=0}^{\infty}$
- Encuentra una fórmula cerrada para S_n.

$$(1, 3, 3^2, 3^3, \cdots) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \frac{1}{1-3x}$$

Derivada por alguna razón

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-3x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k 3^k x^{k-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)3^{n+1}x^n$$

Una serie

$$(1 * 3^1, 2 * 3^2, 3 * 3^3, \cdots) \longleftrightarrow \frac{3}{(1-3x)^2}$$

x movido

$$(0 * 3^0, 1 * 3^1, 2 * 3^2, 3 * 3^3, \cdots) \longleftrightarrow \frac{3x}{(1-3x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3x}{(1-3x)^2}\right)$$

Serie de series

$$(0 * 3^0, 0 + 1 * 3^1, 0 + 1 * 3^1 + 2 * 3^2, \cdots) \longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{\text{Esta parte}\\ \text{crea una nueva}\\ \text{serie usando la}\\ \text{serie anterior}\\ \text{como coeficientes}}} * \frac{3x}{(1-3x)^2}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{3x}{(1-x)(1-3x)^2}}$$

Fracciones parciales

$$\frac{3x}{(1-x)(1-3x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x} + \frac{3C}{3(1-3x)^2}$$

$$3x = A(1-3x)^2 + B(1-x)(1-3x) + C(1-x)$$

$$0x^0 + 3x^1 + 0x^2 = A(1-6x+9x^2) + B(1-4x+3x^2) + C(1-x)$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = A + B + C & x^0 \\ 3 = -6A + 4B - C & x^1 \\ 0 = 9A + 3B & x^2 \end{cases}$$

$$A = \frac{3}{4}$$
$$B = -\frac{9}{4}$$
$$C = \frac{6}{4}$$

$$S_n = A\left(\frac{1}{1-x}\right)[x^n] + B\left(\frac{1}{1-3x}\right)[x^n] + \frac{C}{3}\left(\frac{3}{(1-3x)^2}\right)[x^n]$$
$$\boxed{S_n = A + B * 3^n + C(n-1) * 3^{n-1}}$$

24.2. Alias generadores

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\$: \text{ Las sucesiones}$$

$$\mathcal{F} : \text{ Las funciones generadoras}$$

$$fgo : \$ \longrightarrow \mathcal{F} \quad fgo \text{ es } | : |$$

$$fgo((a_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

24.3. Funciones generadoras exponenciales

La función generadora ordinaria, para conteo no toma en cuenta el orden

Si queremos tomar en cuenta el orden necesitamos funciones generadoras exponenciales.

$$fge : \$ \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$fge((a_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

24.4. Generadoras para la casa

De cuantas formas podemos ordenar las letras de:

$$P = \text{ANTI}\ \underbrace{\text{DERI}}\ \overbrace{\text{VADA}}$$

Encuentra una función generadora que resuelva el problema para cualquier sub-palabra de P.

Clase 25

Mini clase 2

25.1. Algo con generadoras exponenciales

ANTIDERIVADA

- A: 3
- N: 1
- T: 1
- I: 2
- D: 2
- E: 1
- R: 1
- V: 1

Resolver simultáneamente

de formas de permutar las letras de cualquier sub-palabra de ANTIDERIVADA. De largo K

git ▪ Branch: tag: v42.0 @ c21c11b ▪ Release: (2019-11-29)

Head tags: v42.0)

$K = 12$

$$\frac{12!}{3!(2!)^2(1!)^5} = \binom{12}{3,2,2,1,1,1,1,1}$$
$$= \binom{12}{3}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$
$$= \frac{12!}{3!\cancel{9!}} * \frac{\cancel{9!}}{2!\cancel{7!}} * \frac{\cancel{7!}}{2!\cancel{5!}} * \frac{\cancel{5!}}{1!\cancel{4!}} * \frac{\cancel{4!}}{1!\cancel{3!}} * \frac{\cancel{3!}}{1!\cancel{2!}} * \frac{\cancel{2!}}{1!\cancel{1!}} * \frac{\cancel{1!}}{1!0!}$$

$K = 1$

$$\overbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)}^{A}\overbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2}^{D,I}\overbrace{\left(1+\frac{x}{1!}\right)^5}^{N,I,E,R,V}\left[\frac{x^1}{1!}\right] = 8$$

$K = 2$

$$\underbrace{2!}_{\text{El orden importa}}\left(\overbrace{\binom{8}{2}\frac{1}{1!}*\frac{1}{1!}*\left(\frac{1}{0!}\right)^6}^{\text{Letras en una palabra de largo 2 con 2 letras diferentes}} + \overbrace{\binom{3}{1}*\frac{1}{2!}*\left(\frac{1}{0!}\right)^7}^{\text{Letras de palabras de largo 2 con 2 letras repetidas}}\right)\frac{x^2}{2!}$$

$$2\left(\frac{8*7}{2}+3*\frac{1}{2}\right) = 56+3 = 59$$

$K = 3$

$$3!\left(\overbrace{\binom{8}{3}*\left(\frac{1}{1!}\right)^3*\left(\frac{1}{0!}\right)^3}^{\text{Todas las letras son iguales}} + \overbrace{\binom{3}{1}\binom{5}{1}*\frac{1}{2!}*\frac{1}{1!}*\left(\frac{1}{0!}\right)^6}^{\text{Hay 2 letras iguales y una distinta solo hay una disponible}}\right.$$
$$\left. + \overbrace{\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{Cuales 2 participan de A, D o I}}\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{Cual de ellos está duplicada}}\frac{1}{2!}*\frac{1}{1!}*\left(\frac{1}{0!}\right)^6}^{\text{Hay 2 letras iguales y una distinta es una con más de una disponible}} + \overbrace{\binom{1}{1}*\frac{1}{3!}*\left(\frac{1}{0!}\right)^7}^{\text{Todas iguales}}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$8*7*6+3*15+3*6+1 = 400$$

Clase 26

Cosas con generatrices exponenciales y grafos

26.1. Algo con banderas

Un poste de n metros con Banderas de 1 metro de alto y de colores Rojo, Verde, Azul y Blanco.

¿De cuántas formas podemos ordenarlas?

- $$4^n$$

- $$\begin{cases} B_n & = 4B_{n-1} \quad n \geq 1 \\ B_1 & = 4 \end{cases} \rightsquigarrow B_n^H = C * 4^n$$

$$B_1 = 4 = C * 4 \Longleftarrow C = 1$$

$$B_n = 4^n$$

$$\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left[\frac{x^n}{n!}\right]$$

Multiplicando todo

$$\left(\left(\left(\binom{4}{4}\left(\frac{1}{0!}\right)^4 x^{0+0+0+0}+\binom{4}{1}\frac{1}{1!}\binom{3}{3}\left(\frac{1}{0!}\right)^3 x^{1+0+0+0}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left(\binom{4}{1}\frac{1}{2!}\binom{3}{3}\left(\frac{1}{0!}\right)^3 x^{2+0+0+0}+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{1!}\right)^2\binom{2}{2}\left(\frac{1}{0!}\right)^2 x^{1+1+0+0}\right)\right)+\cdots\right)\left[\frac{x^n}{n!}\right]=$$
$$(e^x e^x e^x e^x)\left[\frac{x^n}{n!}\right]$$
$$=e^{4x}\left[\frac{x^n}{n!}\right]=$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}4^k\frac{4^k}{k!}\right)\left[\frac{x^n}{n!}\right]=4^n$$

Algo de propiedades

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad x\in\mathbb{R} \\ e^{cx} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cx)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}c^k\frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

26.2. Ejercicio exponencial

Escriban una identidad interesante del tipo $\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}=2^n$ usando las ideas de 26.1

26.3. Algo con banderas 2

Un poste de n metros debe llevar banderas de colores Rojo, Verde, Azul y Blanco. Las banderas miden un metro de alto y el poste debe cumplir con:

Una cantidad par de banderas rojas y una cantidad impar de banderas verdes.

$$\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

Sumatoria de los pares

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x^j+(-x)^j)}{2}*\frac{1}{j!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-x)^j}{j!}\\ &= \frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\\ &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\\ &= \cosh x\end{aligned}$$

Sumatoria de los impares

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

26.4. Grafos

Un grafo G es un par ordenado (V, E) con V un conjunto usualmente denominado "El conjunto de vértices" y E un subconjunto de $\underbrace{\mathbb{P}_2(V)}_{\substack{\text{Partes de } V\\ \text{tamaño 2.}}}$ denominado "El conjunto de aristas"

Por ejemplo:

Si $V = \{9, 3, :\text{v}, *\}$ $\mathbb{P}_2(V) = \{\{9, 3\}, \{9, :\text{v}\}, \{9, *\}, \{3, :\text{v}\}, \{3, *\}, \{:\text{v}, *\}\}$

Un grafo G prodría ser

$$\left(\overbrace{\{9, 3, :\text{v}, *\}}^{V}, \overbrace{\{\{9, 3\}, \{:\text{v}, *\}, \{*, 3\}\}}^{E\subseteq\mathbb{P}_2(V)}\right)$$

Otro grafo podría ser:

$$H = (V, \emptyset)$$

$$K = (V, \mathbb{P}_2(V))$$

Observaciones: en el ejemplo

$$0 \leq |E| \leq |\mathbb{P}_2(V)|$$

Si V es finito $|\mathbb{P}_2(V)| = \binom{|V|}{2}$

G, H, K son distintos

Definición:

(Se G un grafo (V, E) $G = (V, E)$ definimos $V(G) = V, E(G) = E$)

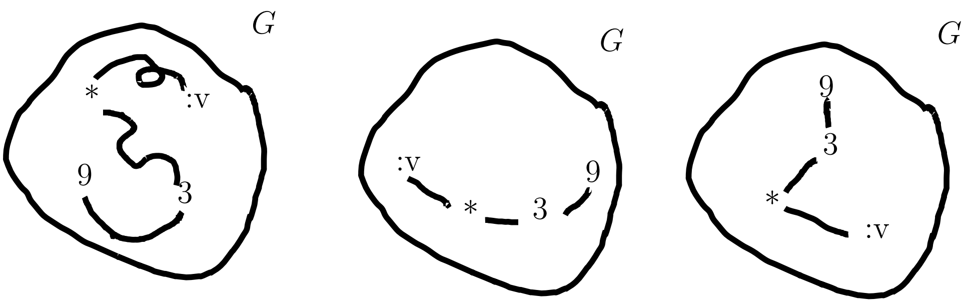
Dos grafos G y H son iguales

$$\text{si } \underset{\substack{\text{El conjunto}\\ \text{de vétices}\\ \text{de } G}}{V(G)} = \underset{\substack{\text{El conjunto}\\ \text{de vétices}\\ \text{de } H}}{V(H)} \text{ y } E(G) = E(H)$$

Observación:

- La igualdad es muy restrictiva.

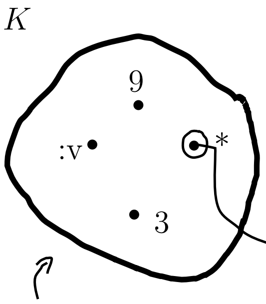
Una representación gráfica de los grafos mencionados es:

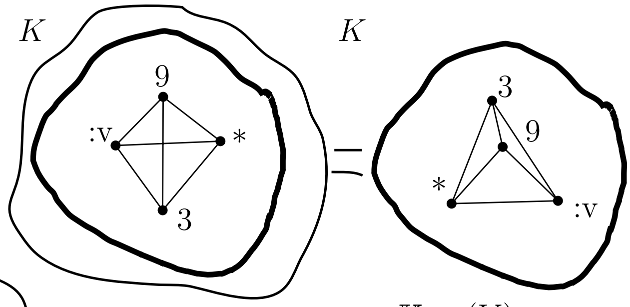


Lo que importa es quíen está conectado con quíen.

A este se le conoce como

el <u>grafo compuesto</u> de V





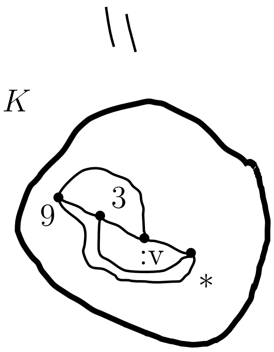
Se le conoce como el vacio de V

$\phi(V)$ es un grafo que solo contiene <u>Puntos aislados</u>

Punto aisalado.

$\mathbb{K} = (V) =$

$(V, \mathbb{P}_2(V))$



$\phi = (\varnothing,\varnothing)$

Es el grafo <u>VACIO</u> no tiene vertices ni aristas

26.4.1. Tarea grafos

Denme un buen dibujo de

$$\mathbb{K}([5])$$

Clase 27

Aún más grafos

$$\underbrace{G = (V, E)}_{\text{Conjunto de vértices}}$$

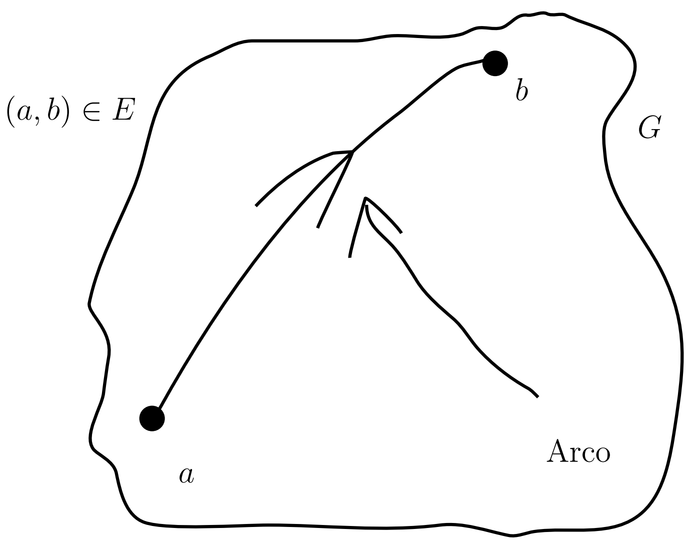
V un conjunto $\underbrace{E \subseteq \mathbb{P}_2(V)}_{\text{Conjunto de aristas}}$

Un grafo

Variantes:

Grafo dirigido

$$G = (V, E) \qquad \underbrace{E \subseteq V \times V}_{\substack{\text{Conjunto de arcos,} \\ \text{tienen dirección}}}$$



Podriamos tener a lo mucho dos arcos entre cada par de vértices en direcciones distintas.

$$G = (\{a, b, c, d, *\}, << (a, c), (a, c), (a, c), (c, b), (*, *) >>)$$

Arco

$G = (V, E)$

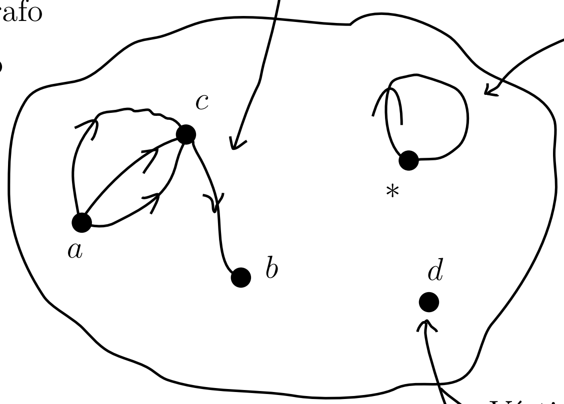
Multigrafo
dirigido

Bucle

Multiconjunto

$E \subseteq V \times V$

Multiconjunto

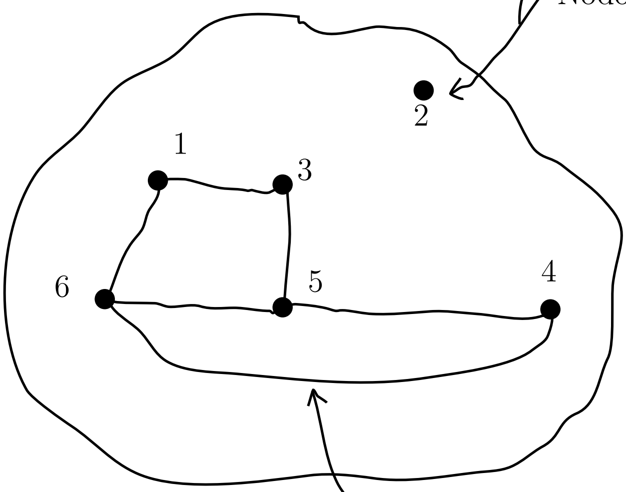


Vértice aislado
Nodo aislado

SImple no
dirigido sin
bucles

Simple: A lo mucho
una arista entre
cada par de vértices

Grafo

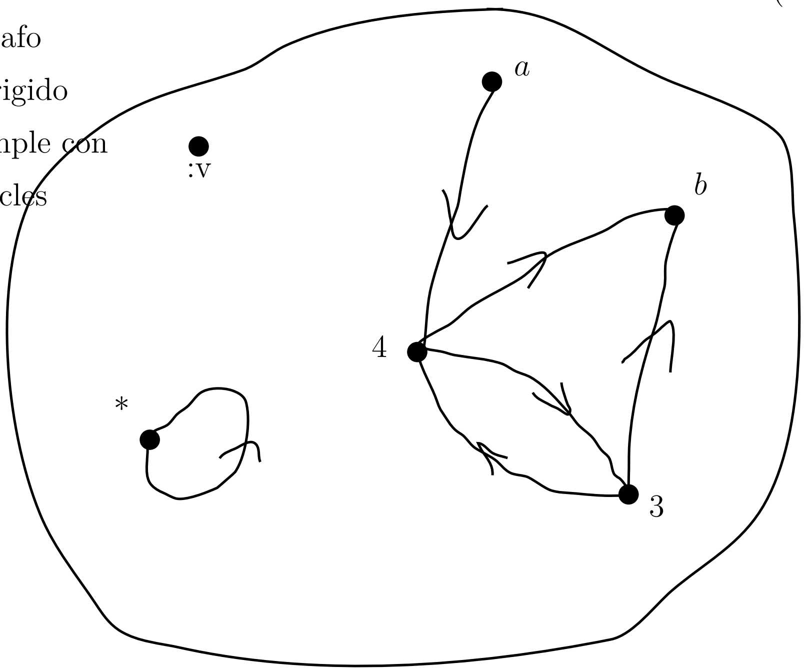


Arista

$G = ([6], \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{6, 5\}, \{1, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 4\}\})$
$G = (V, E) \quad E \subseteq \mathbb{P}_2(V)$

$G = (V, E)$

Grafo dirigido simple con bucles



$E \subseteq V \times V$

Conjunto

Simple:
A los mucho un arco extre cada par de vértices.

$G = (\{:\text{v}, *, a, b, 3, 4\}, \{(*, *), (a, 4), (4, b), (3, b), (3, 4), (4, 3)\})$

Bucle

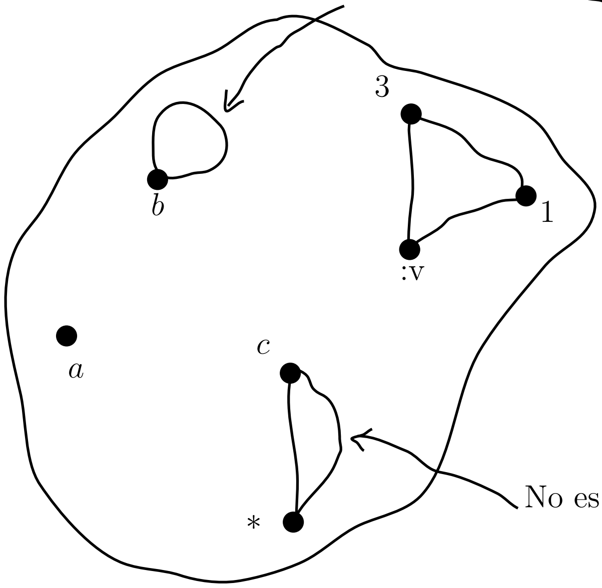
Multigrafo

$E \subseteq \mathbb{P}_2(V)$

Multi-grafo

Tiene bucles

No dirigido



No es simple

$G = (\{a, b, c, *, 3, 1, :\text{v}\})$

Clase 28

Más más grafos

Sea $G = (V, E)$

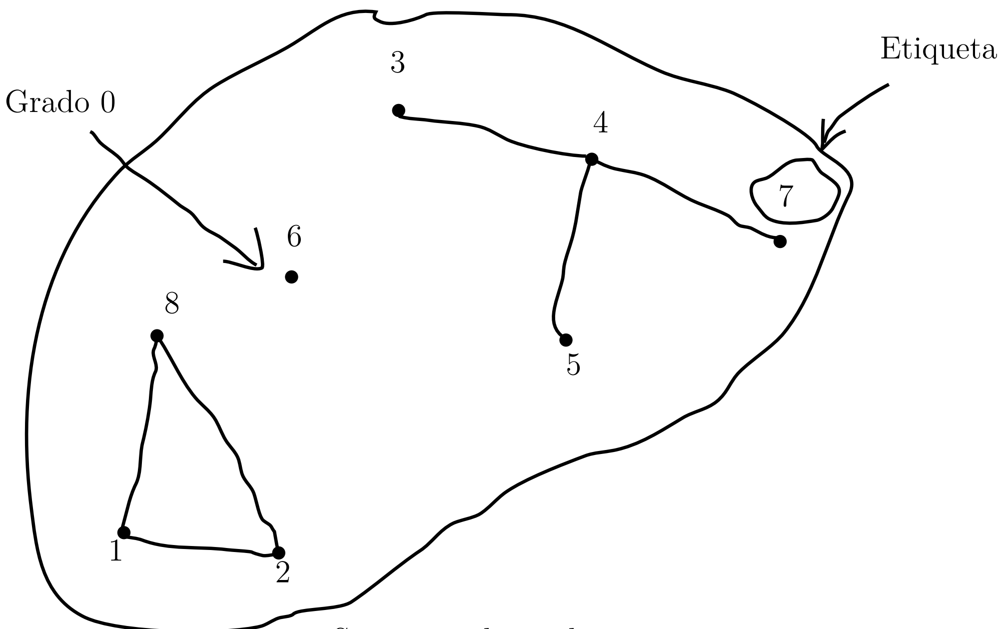
Un grafo:

Representación

Forma directa:

Especificamos V, especificamos E como conjuntos.

Por ejemplo:



Secuencia de grados

$degseq(G) = (0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

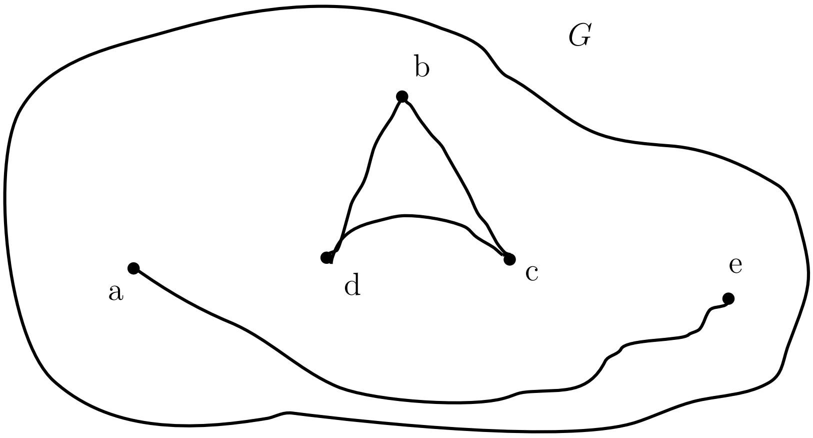
$$E = \{\{1, 8\}, \{2, 8\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}\}$$

Matriz de adyacencia.

(A la izquierda de la matriz deberían estar los números del 1 al 8)

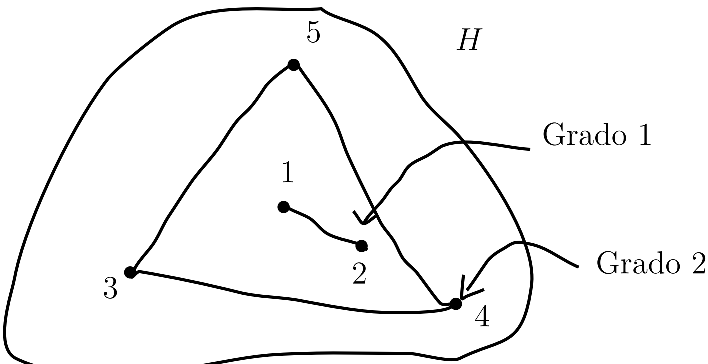
$$\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

G=({a,b,c,d,e},{{a,e},{b,d},{b,c},{d,c}})



$degseq(G) = (1,1,2,2,2)$

$H \neq G$



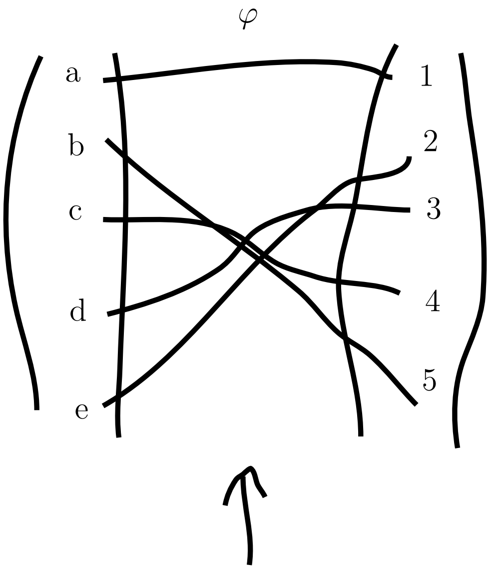
$degseq(H) = (1,1,2,2,2)$

$$H = ([5], \{\{1,2\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\})$$

$$\text{Pero } H \overset{\text{Isomorfo}}{\cong} G$$

$$`` \cong'' \subseteq G' \times \overset{\substack{\text{El conjunto}\\ \text{de los grafos}}}{G'}$$

Dos grafos son isomorfos si existe una biyección entre sus etiquetas que respecta las adyacencias.



Una biyección total

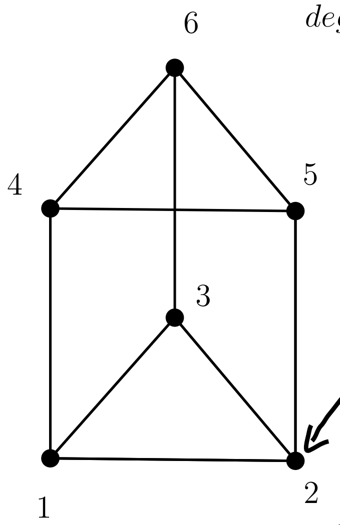
Respeta adyacencias significa.

$$\{x, y\} \in E(G) \Longleftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E(H)$$

$$\forall x, y \in V(G)$$

$degseq(G) = (3,3,3,3,3,3)$

$G =$

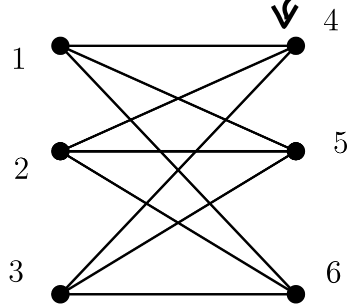


$G \ncong H$

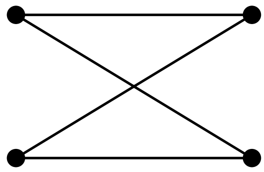
G tiene triángulos y H no

Vértice de grado 3

$H =$



$degseq(H) = (3,3,3,3,3,3)$



Cuadrado

Clase 29

Grafos sin levantar el lápiz

$G = (V, E)$ un grafo. Finito **(Podemos suponer que V es $[n]$)**

$A = ADY(G)$

$A_{ij} \in \{0, 1\} \forall i \neq j$

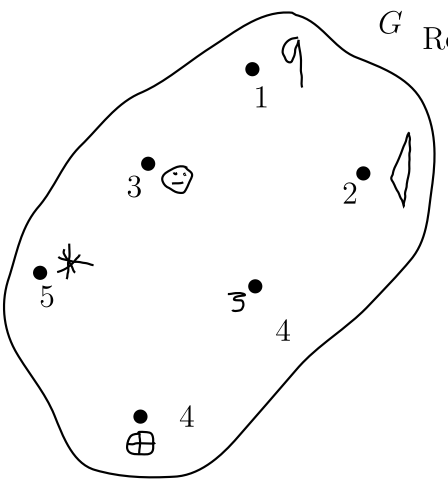
$A_{ii} = 0 \quad \forall i \in V$

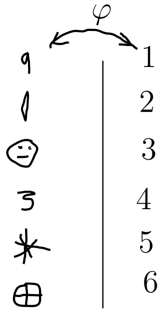
Algo sobre cambio de nombre a los nodos.

Uso φ y G

para definir H.

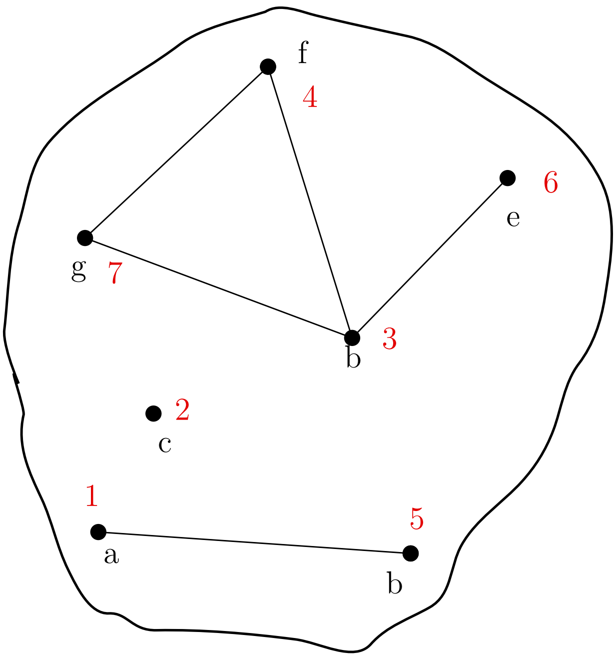
Reetiquetamiento.





$\varphi(9) = 1$
$\varphi(\triangleleft) = 2$
$\vdots$
$\varphi(\oplus) = 6$

$G_i = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{\{g, p\}, \{f, d\}, \{g, d\}, \{d, e\}, \{a, b\}\})$



$$H_i = ([7], \{\{7, 4\}, \{4, 3\}, \{7, 3\}, \{3, 6\}, \{1, 5\}\})$$

$$G_i \cong H_i$$

$$A_{DY}(G_i) = \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{DY}(H_i) = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Observación:

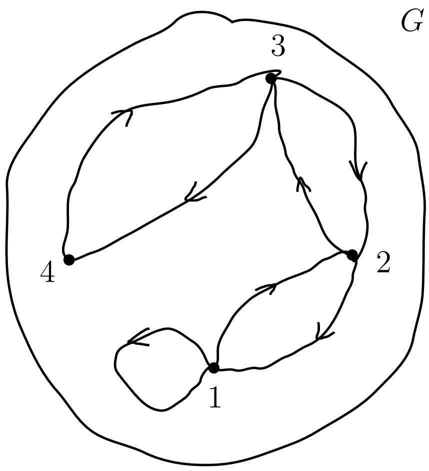
$$A_{DY}(G_i) \neq A_{DY}(H_i)$$

$$\text{pero } G_I \cong H_i$$

Es decir, existe un reordenamiento P de filas y columnas de $A_{DY}(G_i)$ llamemosla B que hacen que $A_{DY}(G_i) = B$

G es un grafo simple, dirigido y con blucles

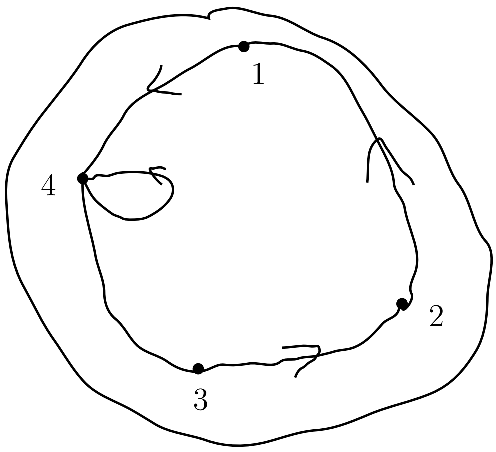
G



$$A_{DY}(G) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pero

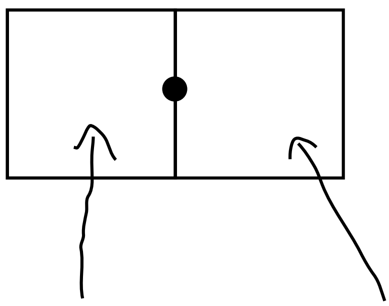
H



$$A_{DY}(H) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

29.1. Algo con dominós

En el juego de dominó doble n hay piezas rectangulares.

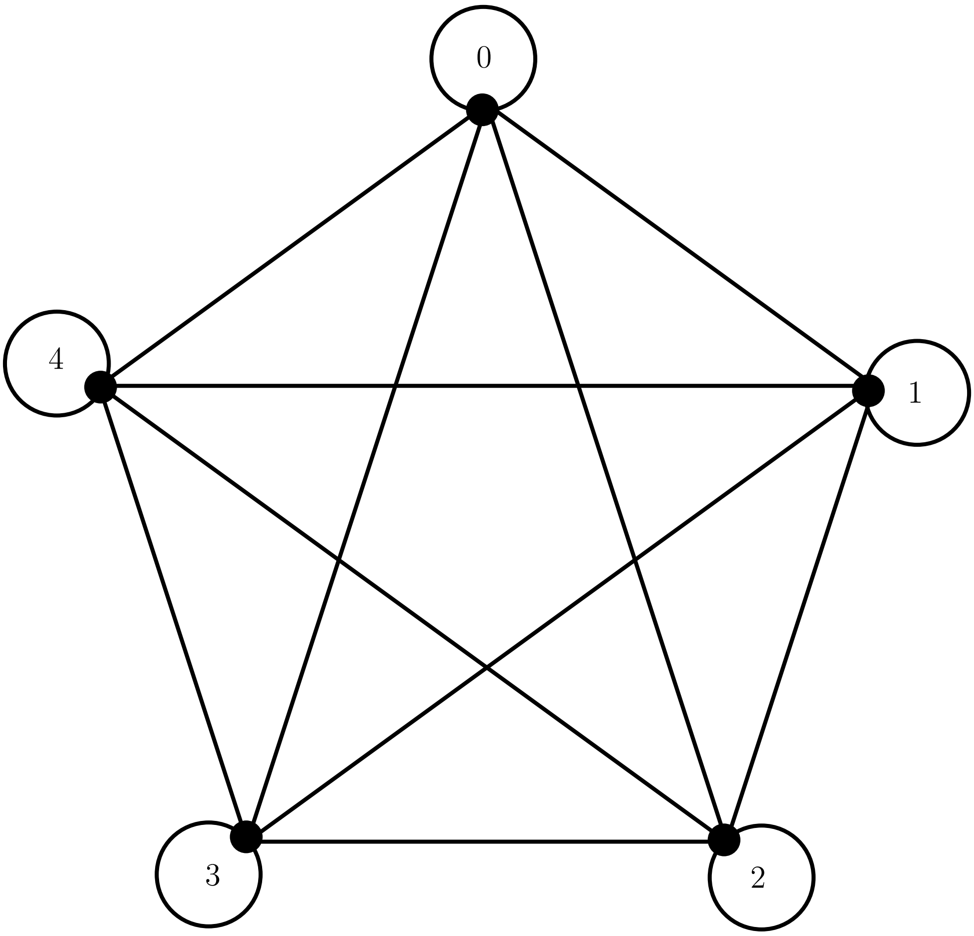


Un número entre 0 y n | Un número entre 0 y n

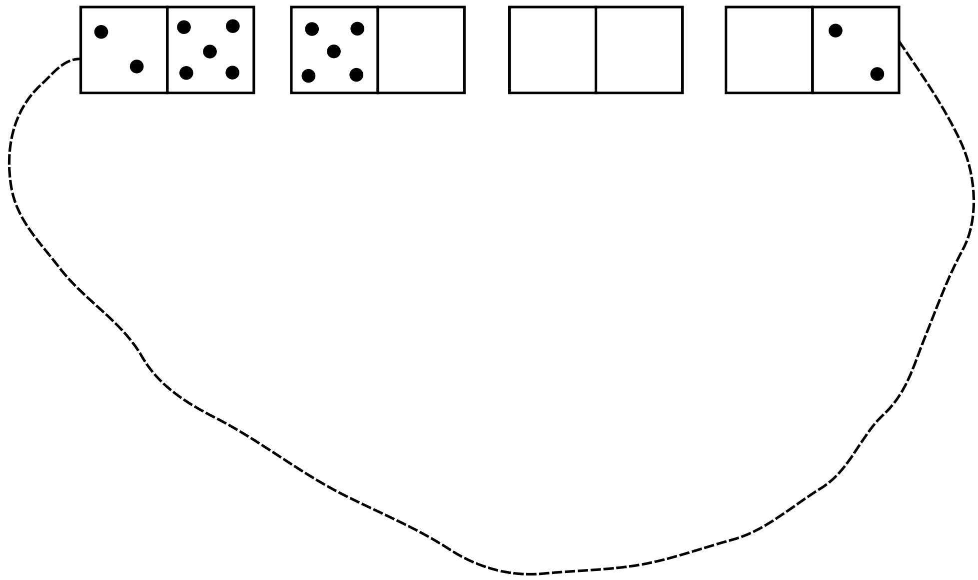
- ¿Cuántas piezas tiene el dominó si hay una copia de cada pieza posible?

$$\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}+(n+1)=\binom{n+2}{2}$$

- Dibuja un grafo que represente el dominó doble 4. **(Dominó doble 4)**

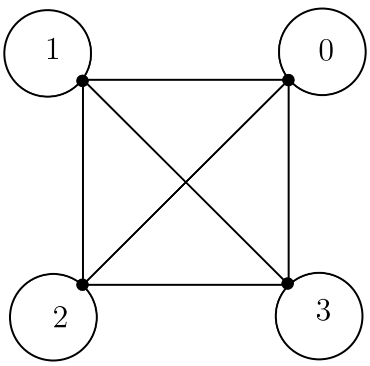


Euler (Recorrer el grafo pasando por todas las aristas solo una vez)

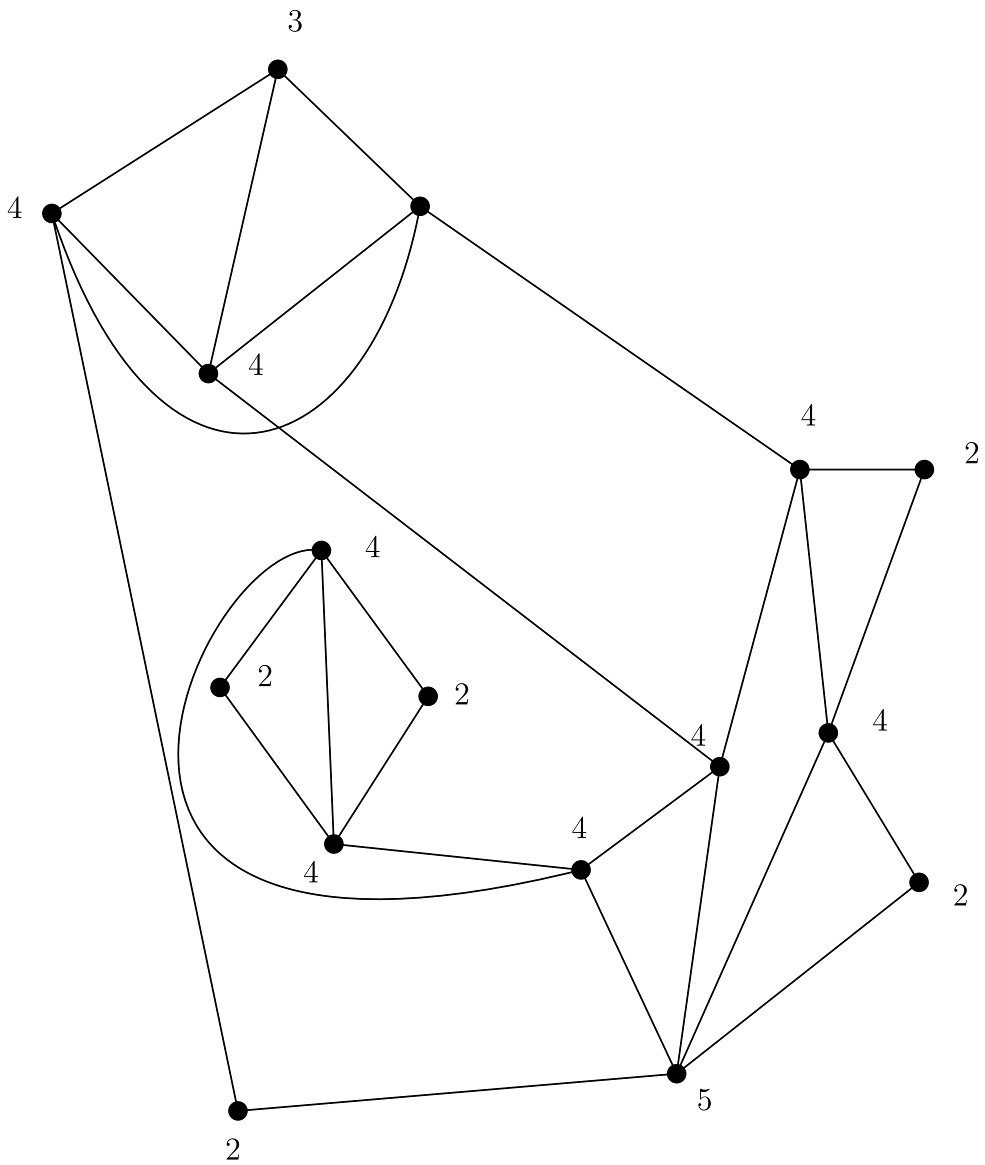


¿Podemos hacer esto en un dominó doble-3?.

No porque es grado de todos los vértices es impar.



Algo extraño (Los números son el grado de cada vértice)

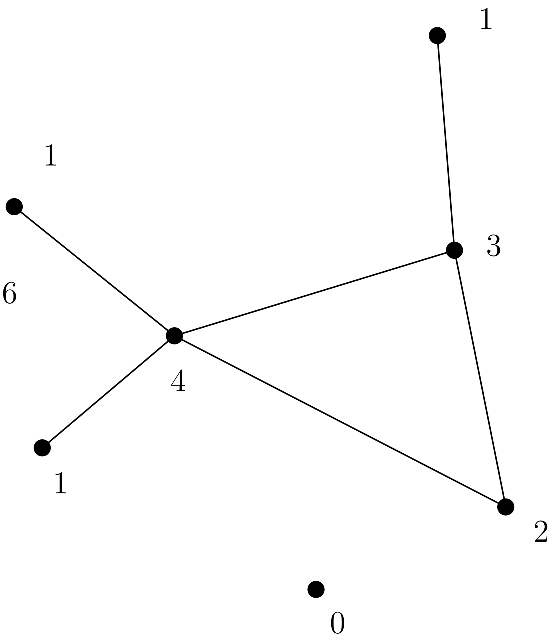


Dado G un grafo y x un vértice en el grafo.

$$d(x) = \left|\underbrace{\{y \in V\} : \{x, y\} \in E}_{V_x\text{: es el vecindario de } x.}\right| \text{ Es el grado de } x.$$

$$2|E| = \sum_{x \in V} d(x)$$

$0+1+1+1+2+3+4 = 2*6$



Un grafo cualquiera **(Con al menos dos vértices)** tiene a lo mucho un número par de vértices de grado impar. ($\dot{2}$: múltiplo de 2)

$$2|E| = \sum_{x\in V} d(x) = \sum_{\substack{x\in V \\ d(x)\in\dot{2}}} d(x) + \sum_{\substack{x\in V \\ d(x)\notin\dot{2}}} d(x)$$

$$\sum_{\substack{x\in V \\ d(x)\notin\dot{2}}} d(x) = 2|E| - \sum_{\substack{x\in V \\ d(x)\in\dot{2}}} d(x) \text{Tiene que ser par}$$

Todo grafo de 2 vértices o más tiene al menos 2 vértices del mismo grado.

#TODO

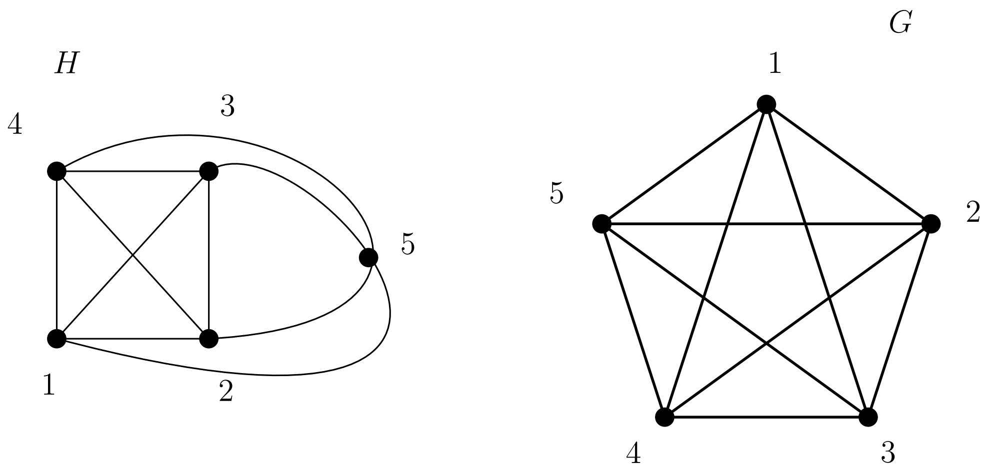
Un grafo extraño.

Acepto pull requests.

https://github.com/otreblan/discre2

Clase 30

Grafos y sub-grafos



Demuestra que H y G son isomórfos o di las razones por las que no lo son.

30.1. Grado

$$G = (V, E)$$

$$d_G(x) = |V_x|$$

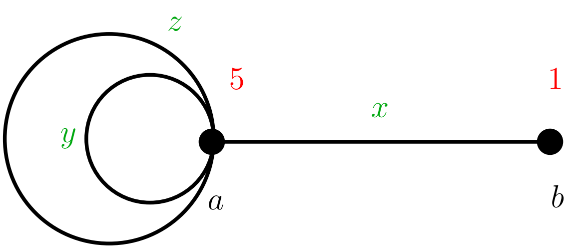
$$\underset{\substack{\text{Los vértices que}\\ \text{están conectados}\\ \text{directamente a } x}}{\overset{\substack{\text{Vecindad de}\\ \text{vértices de } x}}{V_x}} = \{y : \{x, y\} \in E\}$$

$$\underset{\substack{\text{Las aristas que}\\ \text{inciden sobre } x}}{\overset{\substack{\text{Vecindad de}\\ \text{aristas de } x}}{E_x}} = \{e \in E : enx \neq \varnothing\}$$

Si G es un grado simple, sin bucles y no-dirigido.

$$|V_x| = |E_x|$$

En un grafo con bucles, cada bucle aporta 2 al grado del vértice donde está.



$V_a = \{a, b\}$

$V_b = \{a\}$

$E_a = \{x, y, z\}$

$E_b = \{x\}$

30.2. Teoremas de grafos

En un grafo $G = (V, E)$ finito:

1. $$\overbrace{\sum_{x \in V} d(x)}^{\substack{\text{Sumatoria de todos}\\ \text{los grados}}} = \overbrace{2|E|}^{\substack{\text{Dos veces el}\\ \text{número de aristas.}}}$$

   Demostración: Cuando sumamos cada grado estamos contando cada arista 2 veces, una por cada vértice que la toca.

2. El número de vértices de grado impar es par.

3. En $G = (V, E)$ un grafo finito. Tal que $|V| > 1$ existen al menos 2 vértices del mismo grado.

Demostración: Supongamos que G no tiene vértices aislados.

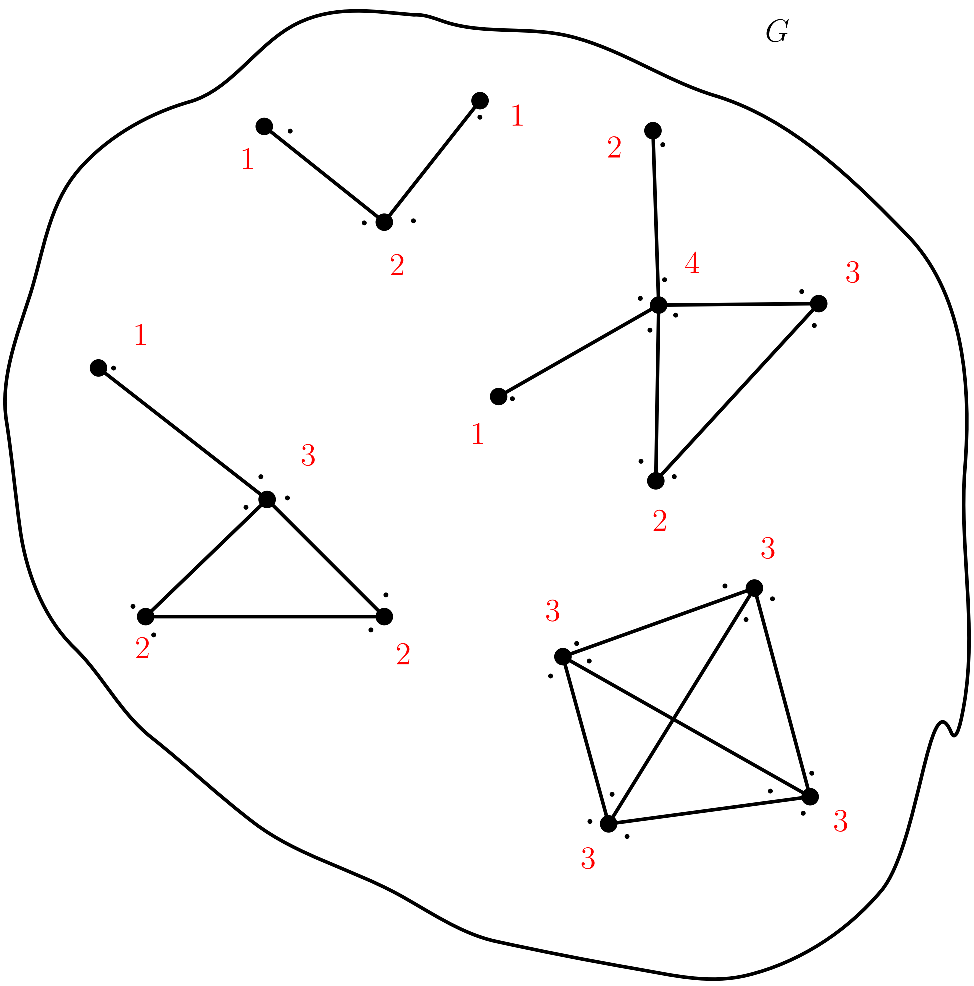
Claramente $1 \leq d(x) \leq |V| - 1$

Por hoyo-polluelo, como hay $\overbrace{|V| - 1 \text{ grados}}^{\text{Hoyos}}$ diferentes y $\overbrace{|V| \text{ vértices}}^{\text{Polluelos}}$,al menos 2 vértices comparten el mismo grado.

Si G tiene vértices aislados $0 \leq d(x) \leq |V| - 2$.

Y por hoyo-polluelo de nuevo al menos 2 vértices comparten grados.

Demostración del teorema 1:



Demostración del teorema 2:

Sabemos por T1 que:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$$

Podemos separar la suma $\sum_{x\in V} d(x)$ en 2 términos.

$$\overbrace{\sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\in\dot{2}}} d(x)}^{\substack{\text{Sumatoria de los}\\ \text{grados pares.}}} + \overbrace{\sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\notin\dot{2}}} d(x)}^{\substack{\text{Sumatoria de los}\\ \text{grados impares.}}} = 2|E|$$

Supongamos que hay una cantidad impar de vértices de grado impar. Eso significa que $\sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\notin\dot{2}}} d(x)$ es impar.

Como $\sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\in\dot{2}}} d(x)$ es par eso implica que $\sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\notin\dot{2}}} d(x) + \sum_{\substack{x\in V\\ d(x)\in\dot{2}}} d(x)$ es impar y esto es una contradicción pues sabemos que la suma es $2|E|$, un número par.

30.3. Conectitud y sub-grafos

Definición:

$G = (V, E)$ un grafo finito.

$$\Delta(G) := \max_{x\in V}(d(x)) \qquad \text{Grado máximo}$$

$$\delta(G) := \min_{x\in V}(d(x)) \qquad \text{Grado mínimo}$$

Observación:(teoremas fáciles)

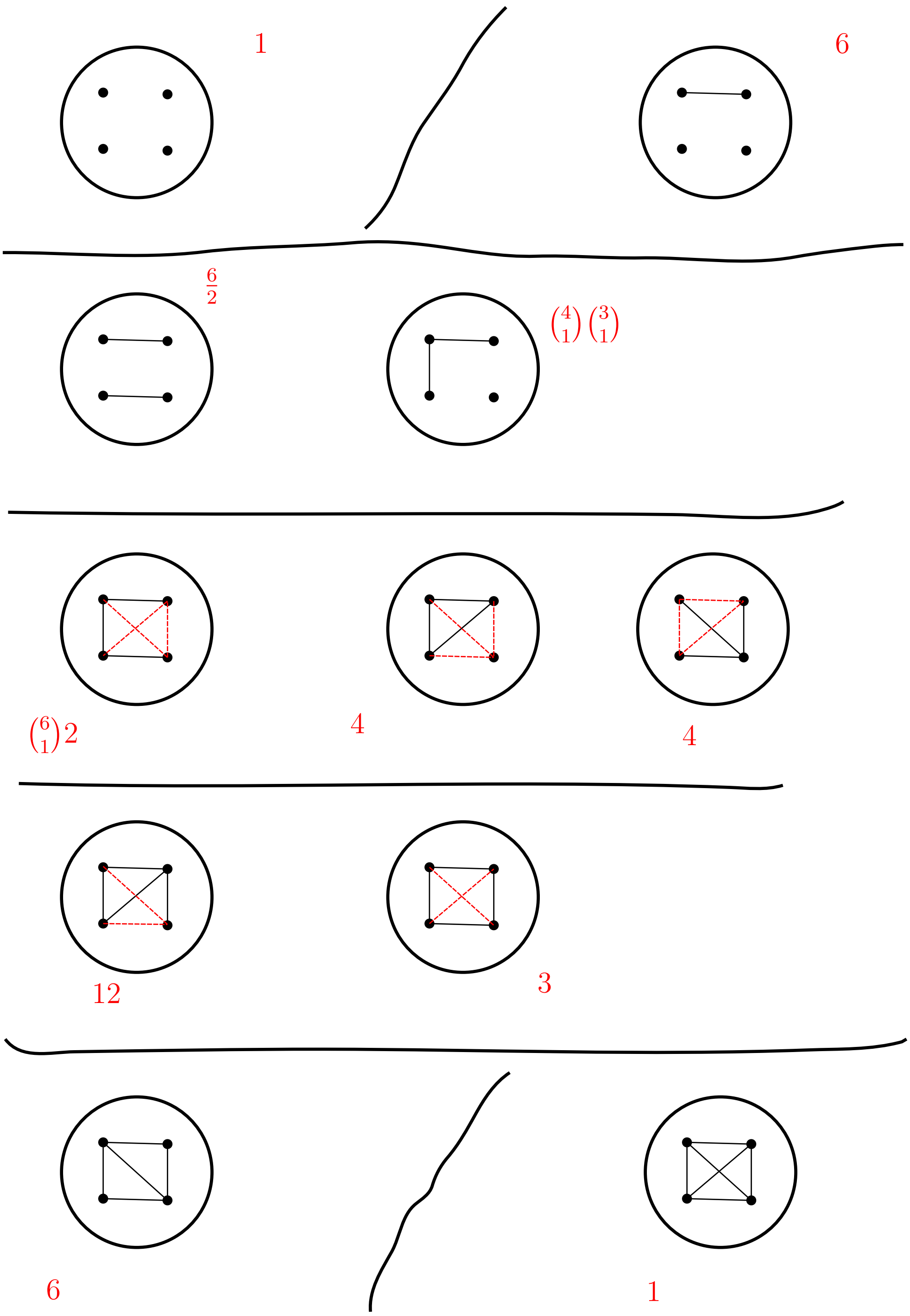
$$0 \leq \delta(G) \leq d(x) \leq \Delta(G) \leq |V| - 1$$

Si $\delta(G) = \Delta(G) = d \implies d(x) = d$ es constante y diremos que G es un grado $d-$REGULAR.

Definición:

Si G es 0-REGULAR. Entonces $G \cong \phi_n$ para algún $n \in \mathbb{N}^*$.

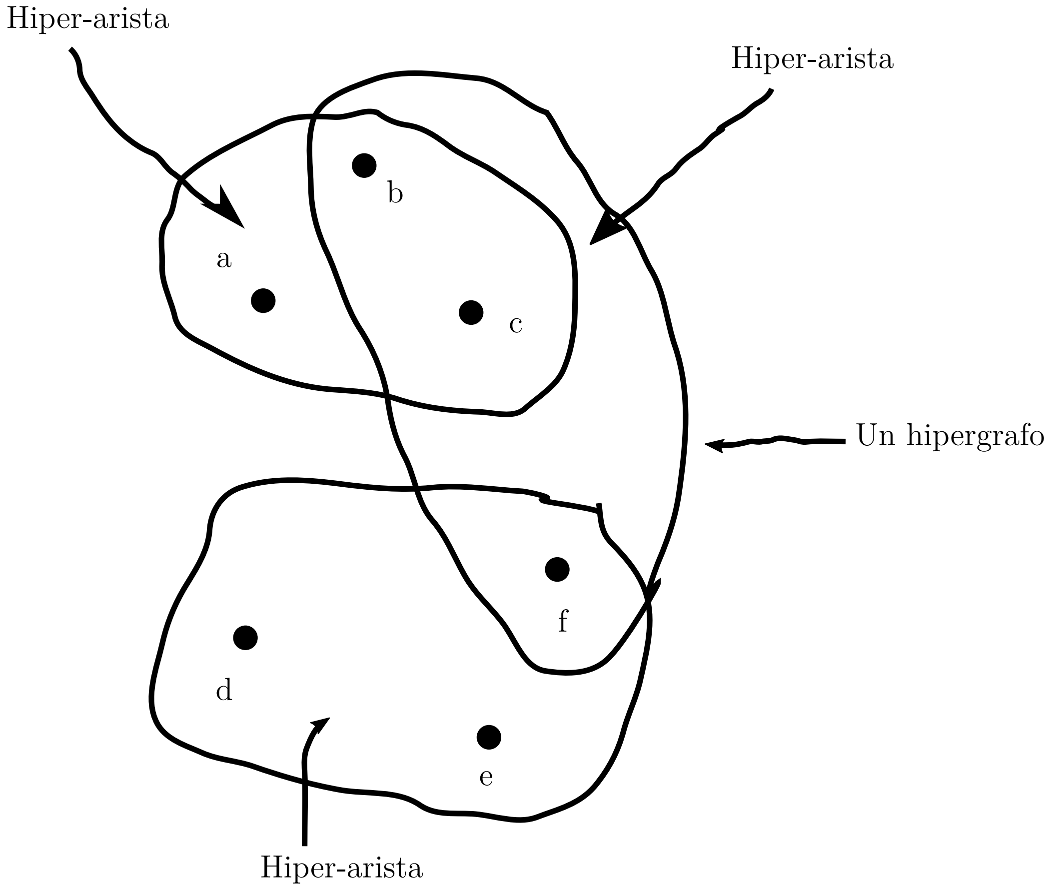
Donde $\underbrace{\phi_n = ([n].\varnothing)}_{n \text{ vértices aislados}}$ para $n \geq 1$, o $\phi = \underbrace{(\varnothing, \varnothing)}_{\text{El grafo vacío}}$



Clase 31

Ruedas y apareamientos

Cantidad de grafos diferentes (No iguales) etiquetados sobre $V = [n]$ son $2^{\binom{n}{2}}$ pues $|\mathbb{P}_2(V)| = \binom{n}{2}$



$$G = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{\{a, b.c\}, \{b, c, f\}, \{d, e, f\}\})$$

Teorema 1:

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$$

Teorema 2: Número de grados impar es par

Teorema 3: Si $|V| > 1$ hay al menos 2 vértices del mismo grado.

31.1. Cosas de grafos

Si G es finito:

$$\delta(G) = \min_{x\in V} d(x)$$
$$\Delta(G) = \max_{x\in V} d(x)$$

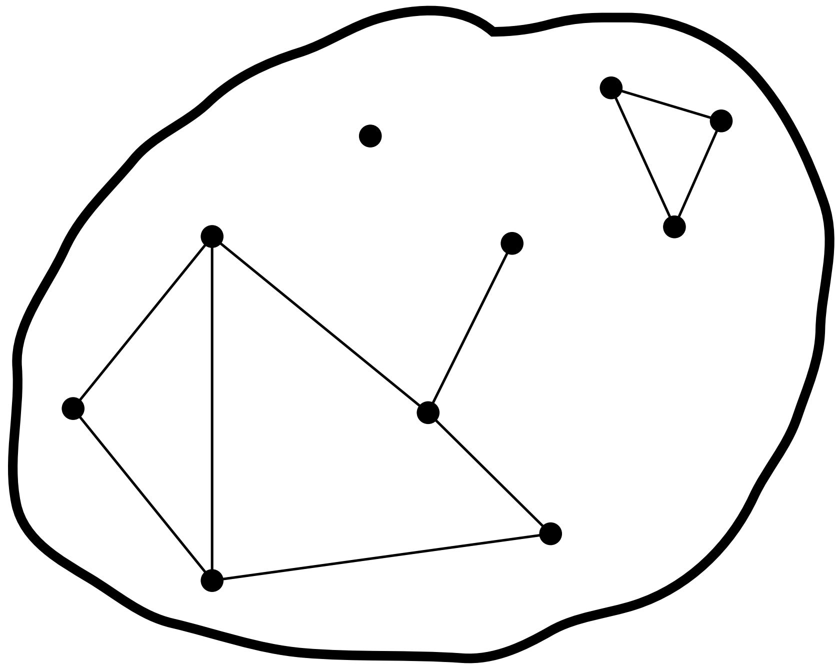
$$\text{sec.grad} : G \longrightarrow (\mathbb{Z}^*)^{|V(G)|}$$
$$\text{sec.grad}(G) = (d_1, d_2, \cdots, d_{|V(G)|})$$
$$\text{donde } d_i = \overset{\text{con } x_i \in V}{d(x_i)} \quad \text{y } d_i \leq d_j \quad \forall i \leq j$$

Es decir la secuencia de grados es el vector con los grados ordenados de menor a mayor.

Definición:

Si $\delta(G) = \Delta(G) = d \Longrightarrow d(x)$ es constante y G es regular o ($d-$regular)

Ejemplo:



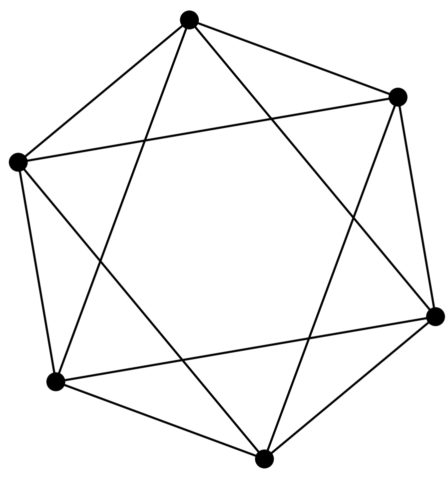
G_1

$$\delta(G_1) = 0 \qquad |V(G_1)| = 10$$

$$\Delta(G_1) = 3 \qquad |E(G_1)| = 10$$

$$\text{sec.grados}(G_1) = (0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$$

G_1 no es regular.

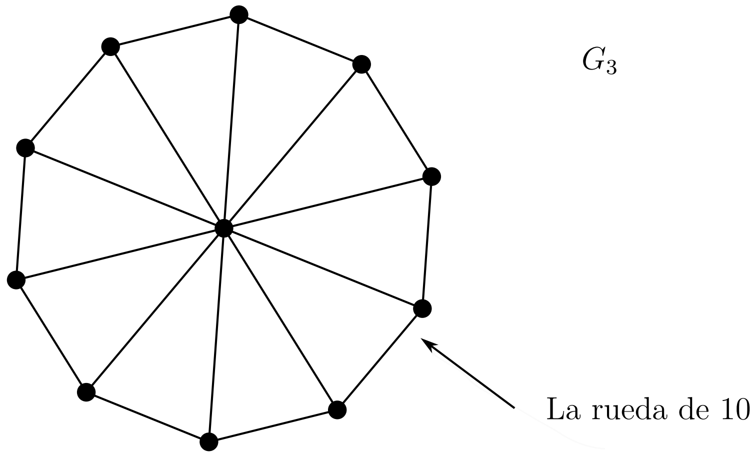


G_2

$$|V(G_2)| = 6 \qquad |E(G_2)| = 12$$

$$\delta(G_2) = 4 = \Delta(G_2)$$

G_2 es 4-regular o regular de grado 4.



$$|V(G_3)| = 11$$

$$|E(G_3)| = \frac{10 * 3 + 10}{2} = 20$$

$$\delta(G_3) = 3$$

$$\Delta(G_3) = 10$$

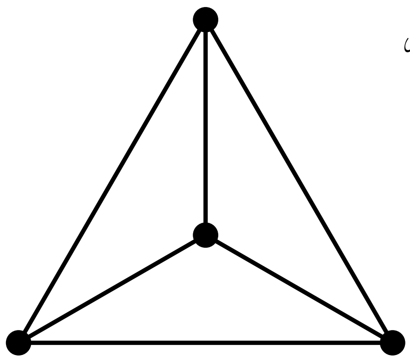
Hay $2^{\binom{11}{2}}$ grafos etiquetados de 11 vértices con $V(G) = [11]$ G_3 no es regular.

$$\text{sec.grados}(G_3) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 10)$$

Si ω_n de n.

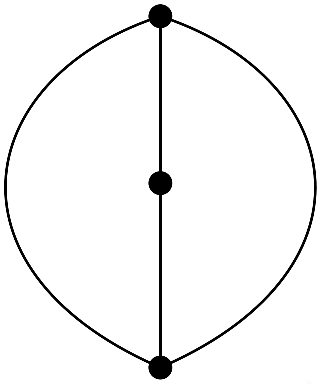
$$
\begin{aligned}
|V(\omega_n)| &= n+1 \\
|E(\omega_n)| &\stackrel{?}{=} 2n = \frac{3n+n}{2} = \sum_{x \in V(\omega_n)} d(x) \\
\delta(\omega_n) &= 3 \\
\Delta(\omega_n) &= n \\
\text{sec.grados}(\omega_n) &= (\underbrace{\overbrace{3, \cdots, 3}^{n \text{ veces}}, n}_{n+1 \text{ vértices}})
\end{aligned}
$$

ω_3 es una rueda regular. ω_n no es regular si $n > 3$



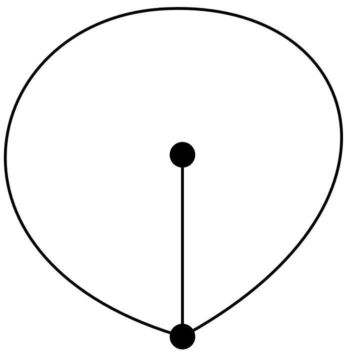
ω_3

"ω_2" no es un grafo



ω_2

"ω_1" tampoco es un grafo



ω_1

ω_0

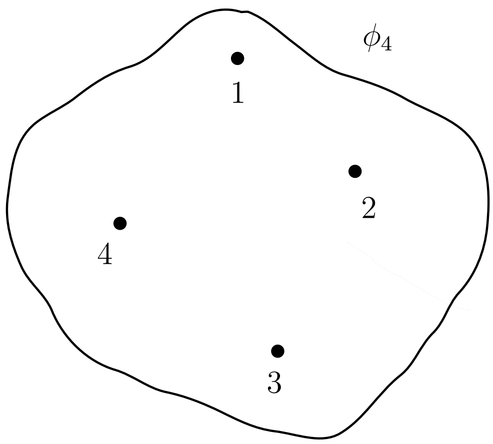
Vemos que podemos decir si

$$\Delta(G) = 0 \quad \text{y} \quad |V(G)| = n$$

$$G \cong ([n], \varnothing) = \phi_n$$

$$\phi_0 = (\varnothing, \varnothing)$$

$$\phi_4 = ([4], \varnothing) =$$



ϕ_n es 0-regular

$$\delta(\phi_n) = \Delta(\phi_n) = 0$$

$$\text{sec.grados}(\phi_n) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n \text{ veces}})$$

Si $|V(G)| = n$ y $\Delta(G) = 1$

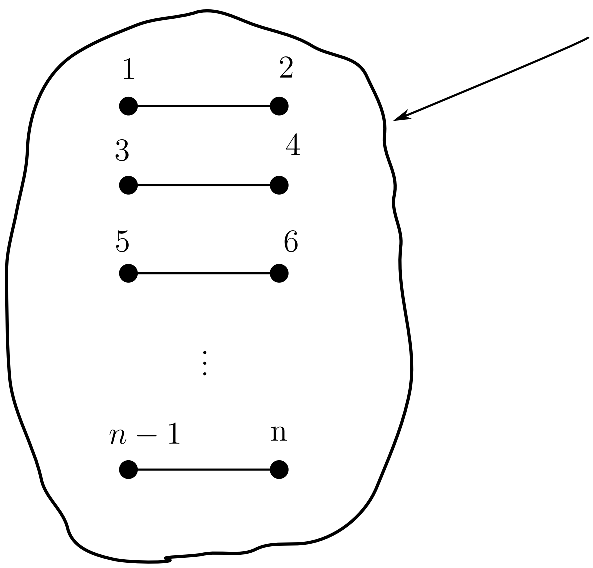
Dos casos:

- $\delta(G) = 0$ el grafo tiene puntos aislados. Si le quitamos los puntos aislados debe quedar un grafo 1-regular con una cantidad par de vértices de grado 1. (Como el de abajo)

- $\delta(G) = 1$ el grafo no tiene puntos aislados. G es 1-regular y n debe ser par.

¿Cómo es un grafo G finito con $\delta(G) = \Delta(G) = 1$?

G



Apareamiento de $\frac{n}{2}$

n sea par

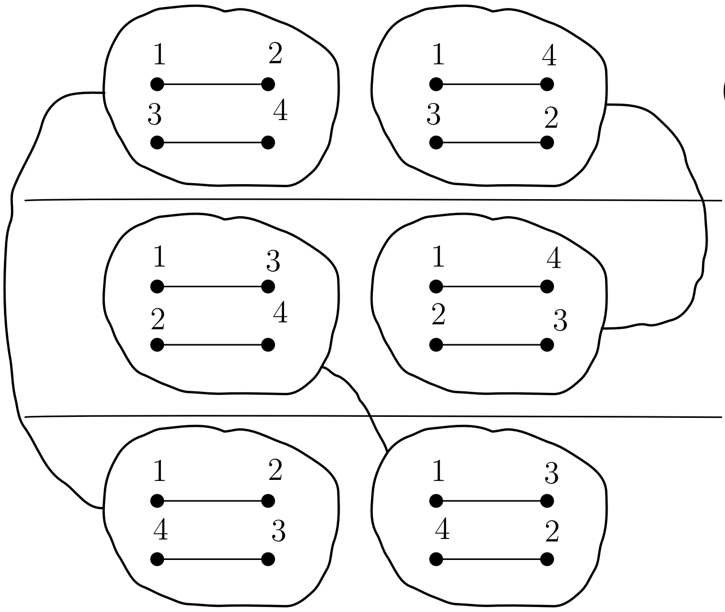
$$\mathbb{A}_{\frac{n}{3}} = ([n], \quad)$$

$$\begin{aligned} E(\mathbb{A}_n) &= \{\{a, a+1\}, a \notin \dot{2}, a \in [n-1]\} \\ &= \{\{a, a+1\} : a \notin \dot{2}, a \in [n]\} \end{aligned}$$

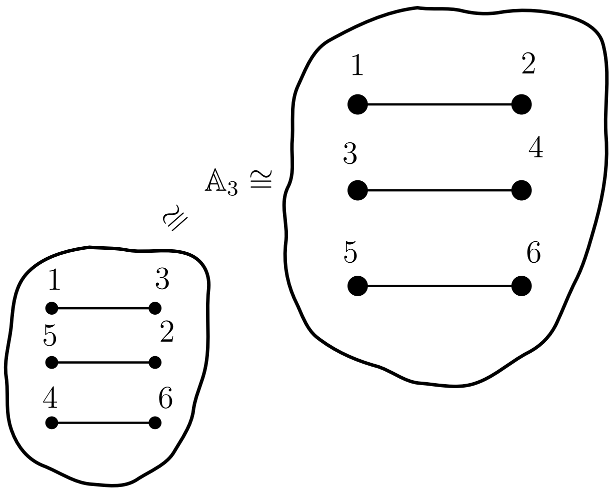
¿Cuantos apareamientos diferentes de $\frac{n}{2}$ hay?

$$\overbrace{\binom{n}{\frac{n}{2}}}^{\substack{\text{El lado}\\\text{izquierdo}}}\ \overbrace{\left(\frac{n}{2}\right)}^{\text{Las sobras}}!$$

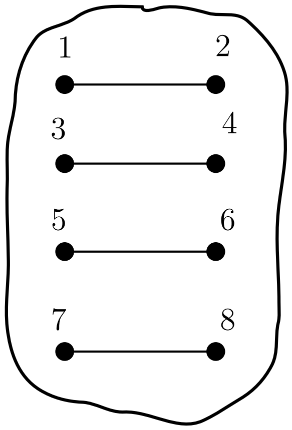
$\mathbb{A}_2$:



$\binom{4}{2}\left(\frac{4}{2}\right)!$



$\mathbb{A}_4 \cong$



31.2. Tarea de grafos

1. Define por comprensión un conjunto de aristas para ω_n la rueda de n.

2. Determina el número de $\mathbb{A}_{\frac{n}{2}}$ los apareamientos de $\frac{n}{2}$ para n par.

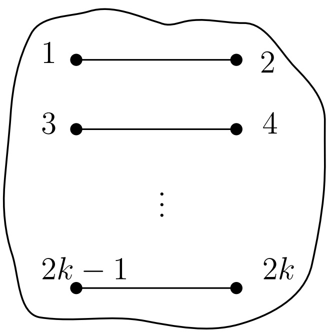
Clase 32

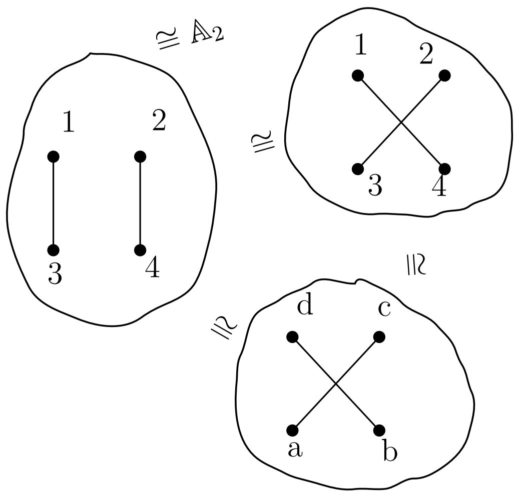
Varios grafos

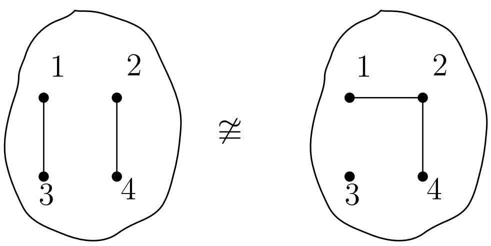
Definición:

Apareamiento de k $\quad k \in \mathbb{N} \quad [2k] = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2k\}$

$$\overset{\text{Apareamiento de } k}{\mathbb{A}_k} = ([2k], \{\{j, j+1\} : j \in [2k] \wedge j \notin \dot{2}\})$$

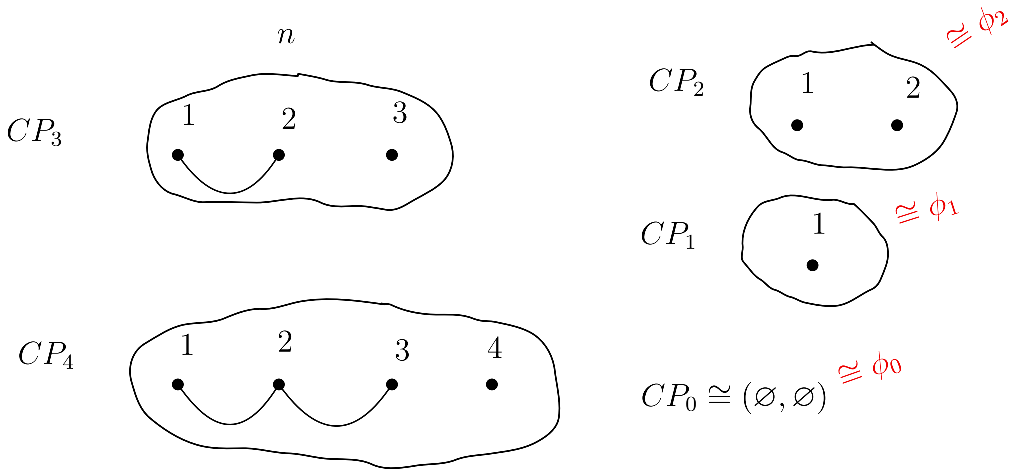






$$CP_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-2]\})$$

Camino y punto:



32.1. Qué pasa si

Qué pasa si G es tal que

$$\Delta(G) = 1$$

- Caso 1:

  G tiene vértices aislados

  $$(\exists x \in V(G) : d(x) = 0)$$

- Caso 2:

  G no tiene vértices aislados

  $$\Rightarrow n = |V(G)| \in \dot{2} \text{ y } G \text{ es 1-regular}$$

  $$G \cong \mathbb{A}_{\frac{n}{2}}$$

- Caso 1:

Sea k el número de vértices aislados de G.

$$1 \leq K \leq n - 2$$

$$n - k \text{ número de vértices de grado 1.}$$

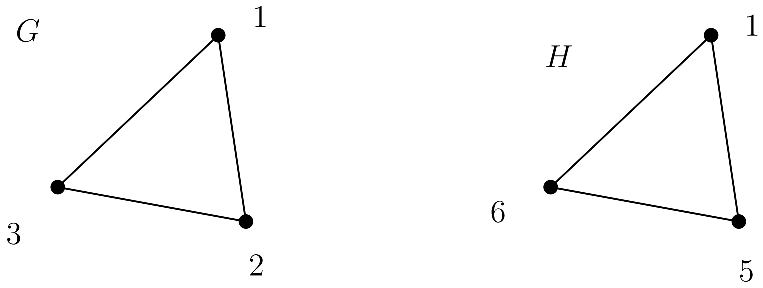
$$n - k \in \dot{2}$$

$$G \cong \phi_k \overset{\text{Unión disjunta}}{\sqcup} \mathbb{A}_{\frac{n-k}{2}}$$

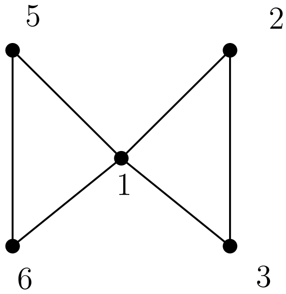
Operaciones de grafos:

Dado G y H grafos

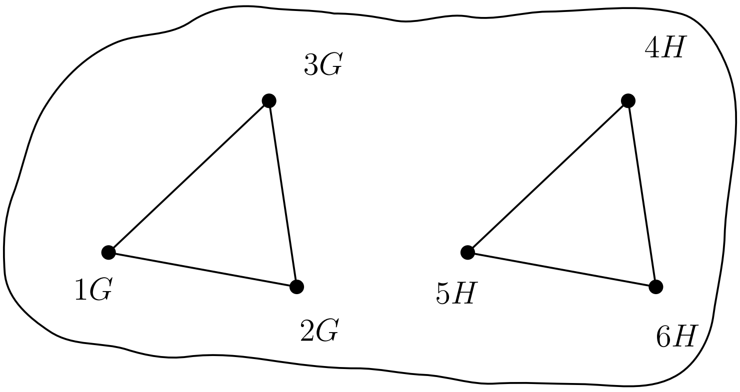
$$G \cup G = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$$

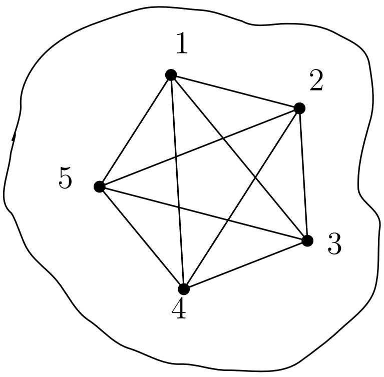


$G \cup H =$

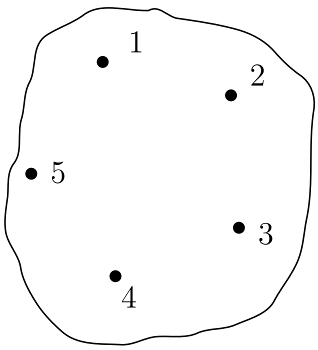


$G \sqcup H \cong$



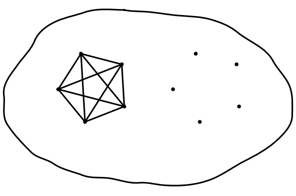


$\cup$



$\cong = \mathbb{K}_5$

$\mathbb{K}_5 \sqcup \phi_5 \cong$



Qué pasa si G es tal que

$$n = |V(G)| \qquad \text{y} \qquad \Delta(G) = 2$$

- Caso 1:

$$\delta(G) = 2 \Rightarrow$$

  G 2-regular.

$$\text{sec.grad}(G) = \{\overbrace{2, 2, 2, \cdots, 2}^{n \text{ veces}}\}$$

$$G \cong \overset{\substack{\text{Número de}\\ \text{ciclos en } G}}{\bigsqcup_{i=1}^{k}} C_i \text{ donde } C_i \cong \mathbb{C}_{m_i} \text{ un ciclo de } m_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n \text{ y } m_i \geq 3 \text{ y } k \geq 1$$

- Caso 2:

$$\delta(G) = 1 \Rightarrow$$

  G no tiene puntos aislados y G tiene una cantidad par de vértices de grado 1.

$$\text{sec.grad}(G) = \{\overbrace{1, 1, 1, \cdots, 1}^{\substack{\text{Número par}\\ \text{de veces } k}}, \overbrace{2, 2, 2, \cdots, 2}^{n-k \text{ veces}}\}$$

$$G \cong \left(\bigsqcup_{i=1}^{\omega} F_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{\omega} H_j\right)$$

  k es el número de ciclos en G ω es el número de caminos en G.

$$H_j \cong \mathbb{C}_{m_j}$$

$$F_i \cong \mathbb{P}_{n_i}$$

$$\sum_{j=1}^{k} m_j + \sum_{i=1}^{\omega} n_j = |V(G)|$$

$$m_j \geq 3 \quad n_i \geq 2$$

k podría ser 0. Pero $\omega \geq 1$

- Caso 3:

$$\delta(G) = 0 \Rightarrow$$

G tiene puntos aislados y una cantidad par de vértices de grado 1.

$$\text{sec.grad}(G) = \{\overbrace{0,0,0,\cdots,0}^{1\leq z},\overbrace{1,1,1,\cdots,1}^{k\in\dot{2}},\overbrace{2,2,2,\cdots,2}^{n-k-z\geq 1}\}$$

Definición:

$$\mathbb{P}_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\})$$

$\mathbb{P}_n$ el camino de largo $n-1$

n	$\mathbb{P}_n$	Un dibujo de $\mathbb{P}_n$
1	$([1], \{\})$	$1 \quad \cong \phi_1 \cong \mathbb{K}_1$
2	$([2], \{1, 2\})$	$1 - 2 \quad \cong \mathbb{K}_1 \cong \mathbb{A}_1$
3	$([3], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$	$1 - 2 - 3$
4	$([3], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\})$	$1 - 2 - 3 - 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\})$	$1 - 2 - 3 \cdots n-1 - n$

$$|V(\mathbb{P}_n)| = n$$

$$|E(\mathbb{P}_n)| = n - 1$$

$$\delta(\mathbb{P}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

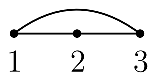
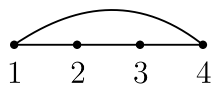
$$\Delta(\mathbb{P}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ 2 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{sec.grad}(\mathbb{P}_n) = \begin{cases} (0) & \text{si } n = 1 \\ (1, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{n-2}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Definición:

$$\mathbb{C}_n = \mathbb{P}_n \cup (\{1, n\}, \{\{1.n\}\})$$

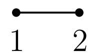
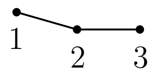
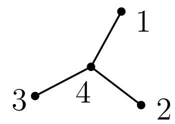
El camino de antes pero con un vértice entre la primera y última arista.

n	$\mathbb{C}_n$	Un dibujo de $\mathbb{C}_n$
1	No son grafos	
2		
3	$([3], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$	
4	$([3], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\})$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Definición:

$$\mathbb{S}_n = ([n + 1], \{\{n + 1, i\} : i \in [n]\})$$

La estrella de n.

n	$\mathbb{S}_n$	Un dibujo de $\mathbb{S}_n$
0	$([1], \{\})$	
1	$([2], \{\{1, 2\}\})$	 $\cong \mathbb{P}_2 \cong \mathbb{K}_2 \cong A_1$
2	$([3], \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\})$	 $\cong \mathbb{P}_3$
3	$([4], \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\})$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$|V(\mathbb{S}_n)| = n + 1$$

$$|E(\mathbb{S}_n)| = n$$

$$\delta(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 1, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Delta(\mathbb{S}_n) = n$$

$$\text{sec.grad}(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}, n) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

La rueda. Unión de una estrella y un camino cerrado.

$$\mathbb{W}_n \cong \mathbb{S}_n \cup \mathbb{C}_n$$

Definición:

Dado $G = (V, E)$

$$\overline{G} = (V_{|}\mathbb{P}_{ares_2} \overset{\text{Todos las aristas}}{(V)} \overset{\text{Diferencia de conjuntos}}{\diagdown} E)$$

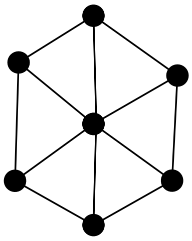
Obsevación

$$G \cup \overline{G} = \mathbb{K}_V$$

Clase 33

Paseos

$\omega_n =$

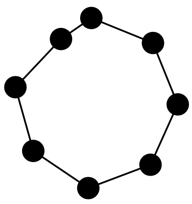


$n+1$ vértices

n vértices

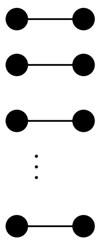
$\mathbb{P}_n =$

$\mathbb{C}_n =$



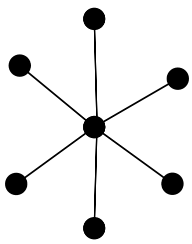
n vértices

$\mathbb{A}_n =$



n vértices

$\mathbb{S}_n =$



$n+1$ vértices

$$\text{Si } G = (V, E) \qquad \overline{G} = (V_1\mathbb{P}_2 \diagdown E)$$

$$G = (V_G, E_G)$$

$$H = (V_H, E_H)$$

$$F = G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$$

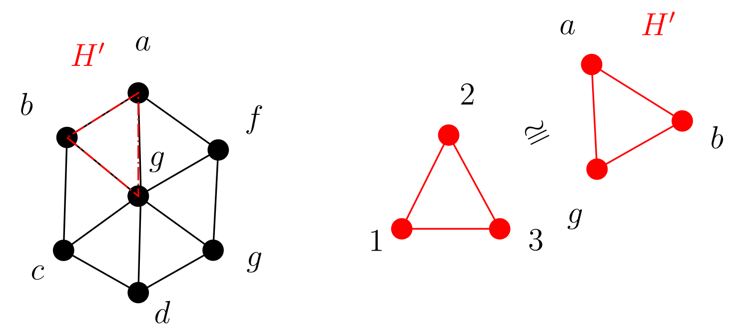
$$G \sqcup H \leftarrow \text{ Unión disjunta}$$

Dado $G = (V, E)$ un grafo, diremos que H es un subgrafo de G.

$$H \subseteq G$$

Siempre que $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$

OBSERVACIÓN: De manera disimulada vamos a incluir la idea de isomorfismo dentro de la idea de subgrafo.



En sentido esctricto:

$$H \subseteq G \quad \text{pues} \quad 1 \notin V(G)$$

Pero en general diremos

$$H \underset{\sim}{\subset} G$$

Lo que realmente estamos diciendo es hay un $H' \cong H$ con $H' \subseteq G$

Por ejemplo:

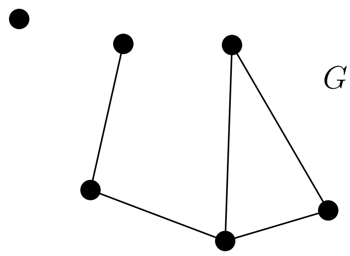
Las ruedas con más de 3 vértices tienen triángulos como subgrafos.

OBSERVACIÓN:

$$G \subseteq G \forall G$$

$$\phi_0 \subseteq \phi_{|V(G)|} \underset{\sim}{\subset} G$$

ϕ_6



G

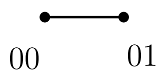
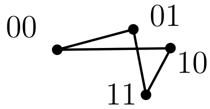
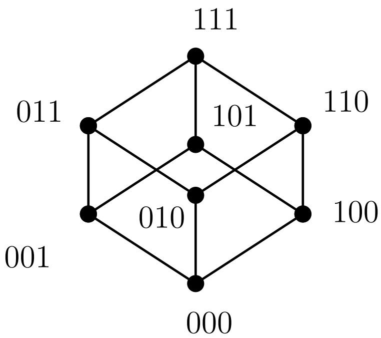
$\phi_6 \subseteq G$

$\mathbb{K}_3 \subseteq G$

$n \in \mathbb{B}^2$

$$\mathbb{Q}_n = \left(\{0\} \cup [2^n - 1], \left\{ \{x, y\} : \underset{\substack{\text{Difieren}\\ \text{solo en}\\ \text{un bit}}}{x \text{ y } y} \right\} \right)$$

$\mathbb{Q}_n$ es el n-cubo

n	Un dibujo de $\mathbb{Q}_n$
0	
1	 $\cong \mathbb{K}_2 \cong \mathbb{A}_1 \cong \mathbb{P}_2$
2	 $\cong \mathbb{C}_4$
3	

33.1. Cosas del grafo cubo

$$|V(\mathbb{Q}_n)| = 2^n$$

$$|E(\mathbb{Q}_n)| = n2^{n-1}$$

$$\delta(\mathbb{Q}_n) = n$$

$$\Delta(\mathbb{Q}_n) = n$$

$\mathbb{Q}_n$ es n-regular.

$$\sum_{x\in V(\mathbb{Q}_n)} d(x) = \sum_{x\in V(\mathbb{Q}_n)} n = n\overbrace{\left(\sum_{x\in V(\mathbb{Q}_n)} 1\right)}^{|V(\mathbb{Q}_n)|} = n2^n = 2|E(\mathbb{Q}_n)|$$

Definición:

Dado $G = (V, E)$ diremos que H es un subgrafo inducido por $\omega \subseteq V$ en G y denotaremos $H = G[\omega]$

$$\text{Si } H = (\omega, \{\{x, y\} \in E(G) : x \in \omega \wedge y \in \omega\})$$

H es un subgrafo de G con todas sus aristas con ambos extremos en ω.

$$x = \boxed{}$$

$$F = (\{a, b, c\}\{\{a, b\}, \{b, c\}\})$$

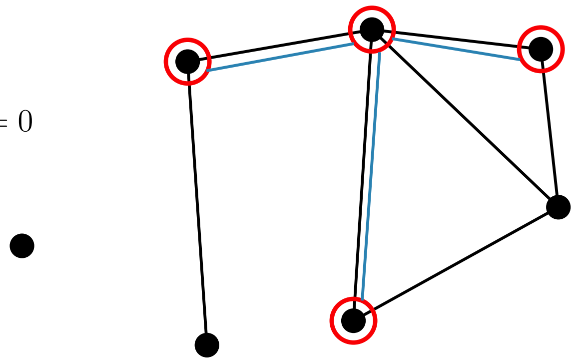
No es un subgrafo de G

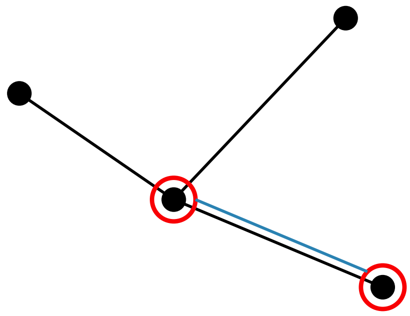
inducido por X

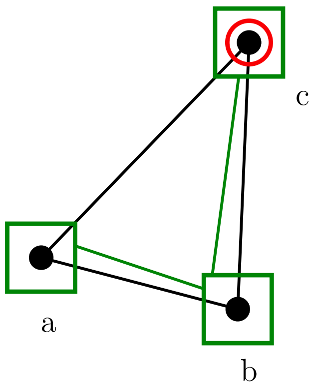
Pues falta $\{a, c\}$

G

$\omega = 0$





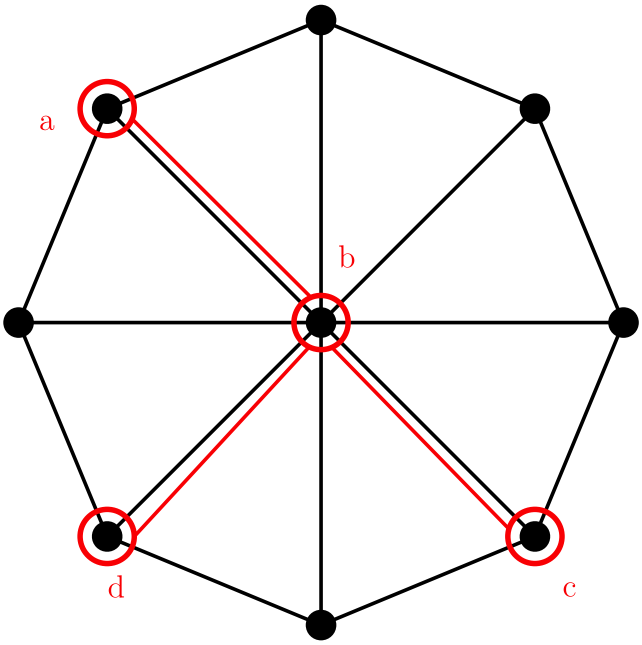


(ω, ϕ)

$G[\omega]$

Hay estrellas como subgrafos inducidos de la rueda ω_n

ω_7



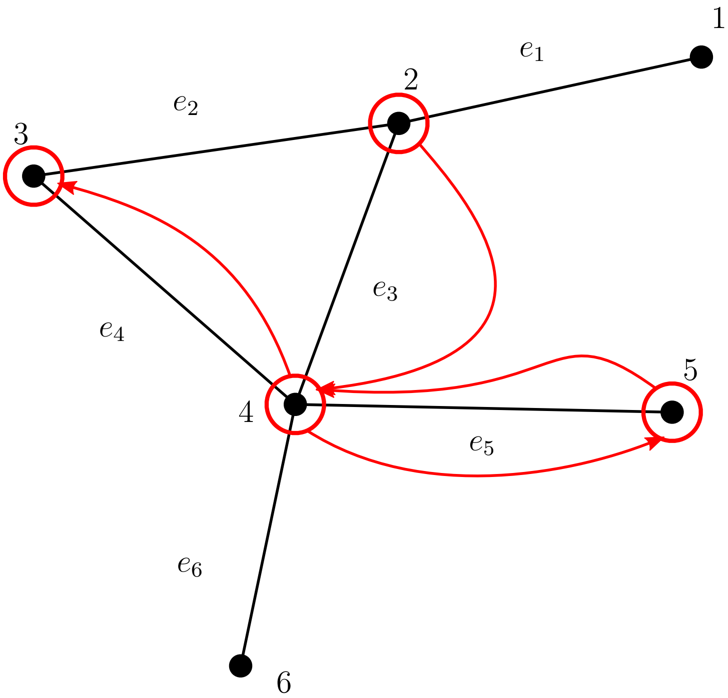
$\mathbb{S}_3 \cong I\omega[\bullet]$

$\cong \omega_7[\{a, b, c, d\}]$

$\{a, b, c, d\}$

Definición:

Un paseo **(en G)** de largo n es una secuencia alternate de vértices y aristas de G de maneras que comenzamos y terminamos en un vértice y las aristas del paseo conectan con los extremos respectivos.



$$\omega = (\underset{\substack{\text{Inicio}\\ \text{del}\\ \text{paseo}}}{2}, e_3, 4, e_5, 5, \overset{\substack{\text{El largo del paseo es el}\\ \text{número de aristas que usa.}}}{\underset{\substack{\text{Los extremos}\\ \text{de } e_5 \text{ son}\\ 4 \text{ y } 5}}{e_5}}, 4, e_4, \overset{\substack{\text{Fin}\\ \text{del}\\ \text{paseo.}}}{3})$$

En un paseo podemos repetir arístas y vértices.

Si el inicio=fin el paseo es cerrado, en caso contrario es abierto.

Definición:

Un paseo que no repite aristas se conoce como un sendero.

Definición:

Un sendero que no repite vértices salvo posiblemente el primero y el último se conoce como camino.

Definición:

Un sendero cerrado es un circuito.

Definición:

Un camino cerrado es un ciclo.

Definición:

$G = (V, E)$ es conexo si entre todo par de vértices de G existe un paseo que comienza en uno y termina en el otro.

33.2. Tarea de paseos

Demostrar que si hay un paseo de G entre x y y entonces hay un camino entre x y y.

Si miramos el subgrafo correspondiente al camino.

Podemos definir la distancia entre x y y como la consitud del camino más corto entre x y y.

Definición:

Un sendero que visita todas las aristas del grafo se llama de Euler.

Definición:

Un camino que visita todos el vértices del grafo es de Hamilton.

Clase 34

Paseos y más definiciones

34.1. Algo sobre la clase pasada

Un paseo es una secuencia de vértices y aristas que comienza y termina en un vértice tal que:

$$\omega = (x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, \cdots, x_n, e_n, x_{n-1})$$
$$e_i = \{x_i, x_{i+1}\} \in E(G) \quad \forall i \in [n]$$

Notar que esta definición se puede ajustar a versiones diferentes de grafos, cambiando lo que sea necesario *(Mutatis mutandis)*.

Por ejemplo:

Un camino dirigido es:

$$(x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, \cdots, x_n, e_n, x_{n+1})$$
$$e_i = (x_i, x_{i+1}) \in E(G)$$

34.2. Paseos

El largo del paseo es el número de aristas en el.

$$\omega = (x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, \cdots, x_n, e_x, x_{n+1})$$

$$\text{largo}(\omega) = n$$

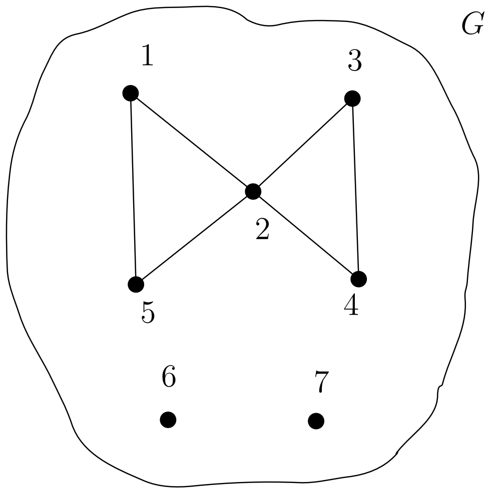
- Si $\overbrace{x_1}^{\text{Inicio}} = \overbrace{x_{n+1}}^{\text{Fin}}$ diremos que el paseo es cerrado.
- Un paseo que no repite aristas es un sendero.
- Un sendero cerrado es un circuito.
- Un sendero que no repite vértices (salvo posiblemente el primero) es un camino.
- Un camino cerrado es un ciclo.
- Un camino **(ciclo)** que visita todos los vértices de G es un Camino **(Ciclo)** Hamiltoniano. Exactamente una vez. **(Salvo el primero.)**
- Un sendero **(circuito)** que visita todas las aristas de G es un Sendero **(Circuito)** de Euler. Exactamente una vez.

Observación:

- ¿Cómo es un Camino de Euler?
- ¿Cómo es un grafo con un Camino de Euler?
- ¿Cuándo es un Sendero de Euler un Camino Hamiltoniano?
- ¿Cómo es un grafo que tiene un Camino de Hamilton que también es un Sendero de Euler?
- ¿Cómo es un grafo que tiene un Camino de Hamilton y un Sendero de Euler?

git ▪ Branch: tag: v42.0@c21c11b ▪ Release: (2019-11-29)

Head tags: v42.0)



$$\omega_1 = (\overbrace{1, \underbrace{2, 3, 4, 2}_{\text{Vértices internos}}, 5}^{\text{Extremos}})$$

Un paseo. Un Sendero.
No es un camino pues
repite "2" un vértice interno.

$$\omega_2 = (1, 2, 3, 4)$$

Un camino **(abierto)**.

$$\omega_3 = (1, 2, 3, 4, 2, 5, 1)$$

Un circuito de Euler.

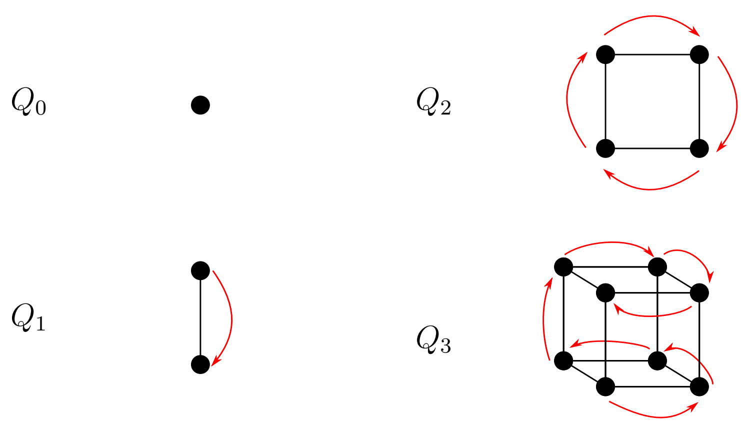
34.3. Tarea de paseos 2

1. Muestra por inducción que Q_n **(el *n*-cubo)** siempre tiene al menos un Camino Hamiltoniano.

2. Recuerda que si $G = (V, E)$ es tal que $d(x) \in \dot{2} \quad \forall x \in V$

   Entonces G tiene un Circuito de Euler.

   Es decir $\underset{n \in \mathbb{N}}{Q_{2n}}$ tiene Caminos Hamiltonianos y Circuitos de Euler.



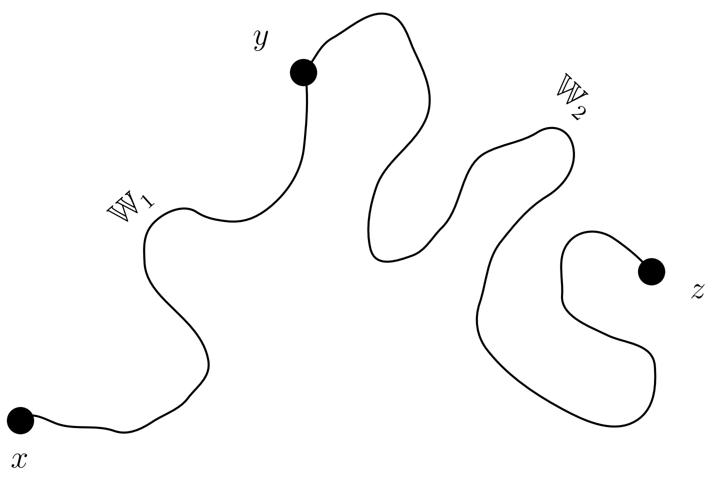
Definición:

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si $\forall x, y \in V$ existe un paseo entre x y y.

Usualmente un paseo de esa forma de denota.

$$x\mathbb{W}y$$

$$x\mathbb{W}y = \underbrace{x\mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 z}_{\mathbb{W}}$$



Observación:

La relación

$x\mathbb{C}y$: x está conectado a y mediante algún paseo en G.

Es:

- Reflexiva.

- Simétrica.

- Transitiva.

$\mathbb{C}$ define una relación de equivalencia sobre los vértices de G.

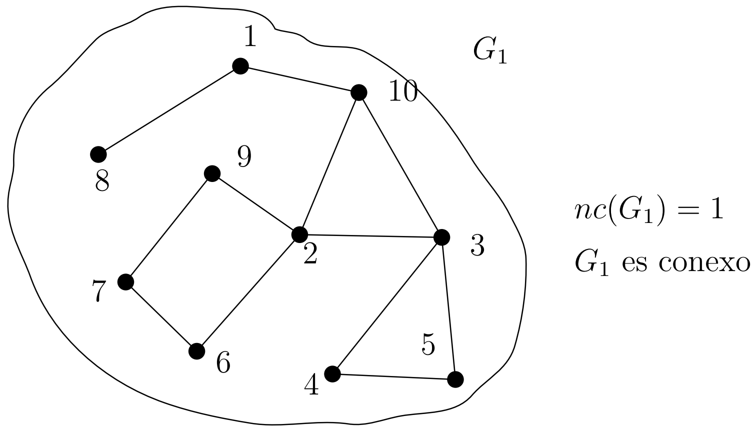
Definición:

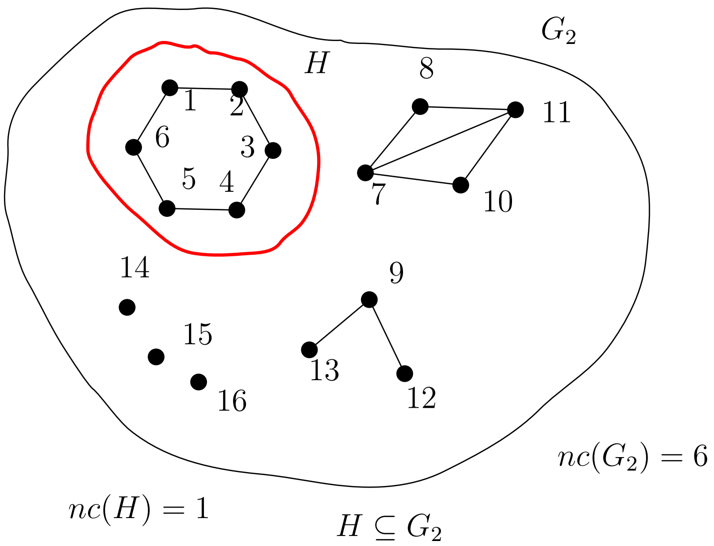
G es conexo si $\forall x, y \in V \Rightarrow x\mathbb{C}y$

Es decir, todos los vértices de G están en la misma clase de equivalencia.

Definición:

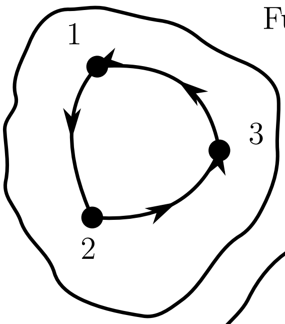
Dado $G = (V, E)$ $nc(G)$ es el número de clases de equivalencia de conectitud en G.



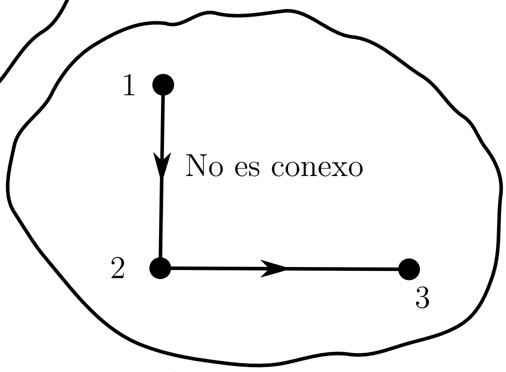


CUIDADO

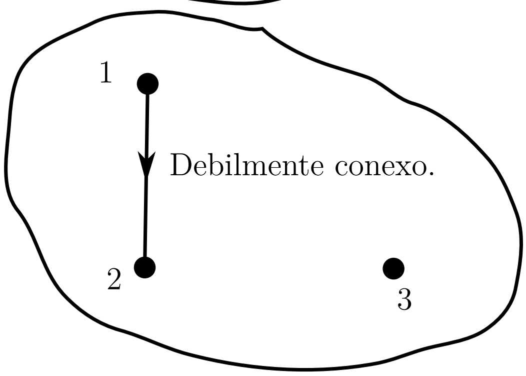
Si el grafo es dirigido la conectitud es más dificil de ver.



Fuertemente conexo



No es conexo en el sentido de la definición



Un grafo dirigido es debilmente conexo si cada par de vértices x, y existe alguna forma de ir de x a y o de y a x.

Definición:

Si $\overset{\text{finito}}{G}$ es conexo. Entonces:

$$\text{dist}(x, y) = \text{mín}\,|E(x\mathbb{P}y)|$$

$$\text{dist}_{G_1}(1, 4) = 3$$

$$\text{dist}_{G_2}(1, 8) = \infty$$

$$\text{dist}_{G_2}(1, 6) = 2 = \text{dist}_H(6, 1)$$

Se sobrecarga la idea de distancia para incluir ∞ como distancia entre vértices en distintas componentes conexas.

34.4. Tarea parte 3

Si $\text{dist}_G(x, y) = k \qquad k \in \mathbb{N}^* = \{0\} \cup \mathbb{N}$

- ¿Qué podemos decir sobre $\text{dist}_H(x, y)$ si $H \subseteq G$? $x, y \in V(H)$
- ¿Qué podemos decir sobre $\text{dist}_F(x, y)$ si $F = G[w]$? Para algún w con $x \in w, y \in w$.

  $x, y \in V(F) \quad w \subseteq V(G)$

Calcula $nc(G)$ para los grafos que ya definimos

$$\mathbb{K}_n, \omega_n, \mathbb{S}_n, \mathbb{A}_n, \cdots$$

Definición:

$\mathbb{K}_{n,m}$: el grado bipartito completo

$$\begin{aligned} V(\mathbb{K}_{n,m}) = \{(i, j) : \text{con } i \in [2], \\ j \in [n] \text{ si } i = 1, \\ j \in [m] \text{ si } i = 2\} \end{aligned}$$

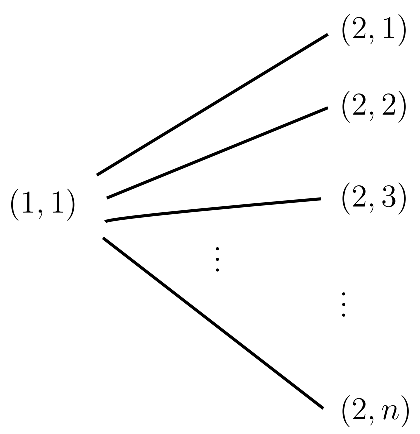
$$E(\mathbb{K}_{n,m}) = \{\{i, j\}, \{k, l\} : i \neq k\}$$

$\mathbb{K}_{1,n}$:

$$V(\mathbb{K}_{i,n}) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), \cdots, (2, n)\}$$

$$E(\mathbb{K}_{i,n}) = \{\{(1, 1), (2, 1)\}, \{(1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 1), (2, 3)\}, \cdots, \{(1, 1), (2, n)\}\}$$

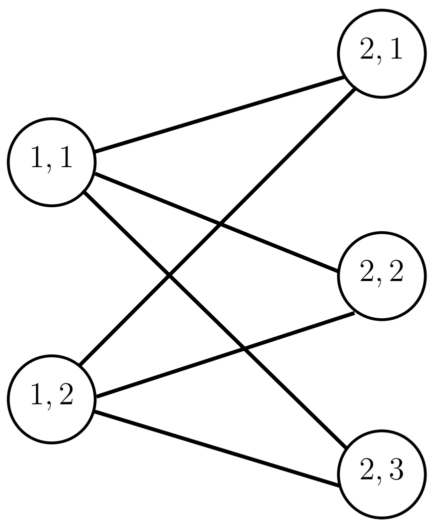
$$\mathbb{K}_{1,n} \cong \mathbb{S}_n$$



$$\mathbb{K}_{1,n} \cong \mathbb{K}_{n,1}$$

$\mathbb{K}_{2,3}$

$$V(\mathbb{K}_{2,3}) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), \}$$



No hay aristas entre vértices con la misma primera coordenada.

Demuestra

$$\overline{\mathbb{K}}_{n,m} \cong \mathbb{K}_n \sqcup \mathbb{K}_m$$

$$\overline{\mathbb{K}}_{n,m} \cup \mathbb{K}_{n,m} \cong \mathbb{K}_{n+m}$$

Clase 35

Repaso de grafos

Definición:

- Paseo:

  Una secuencia de vértices

$$\omega = (V_1, V_2, V_3, \cdots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1})$$
$$\{V_i, V_{i+1}\} \in E(G) \quad \forall i \in [n]$$

- Sendero:

  Un paseo que no repite aristas si es cerrado en un circuito.

- Camino:

  Un sendero que no repite vértices si es cerrado es un ciclo.

- Largo:

  Número de aristas por las que pasa.

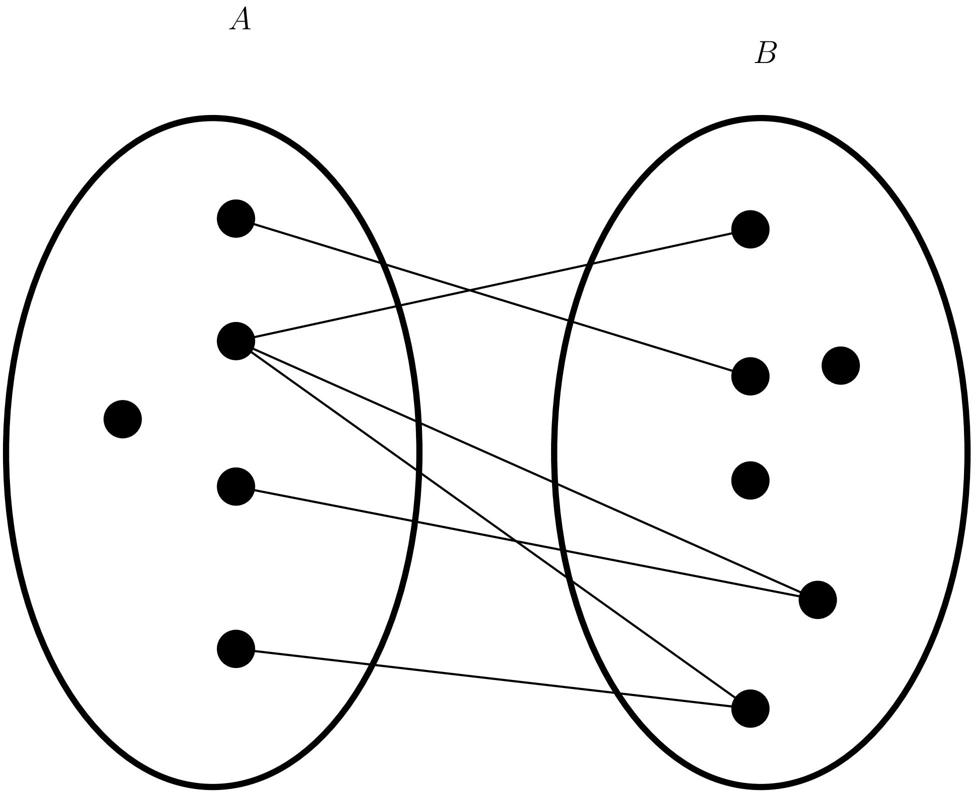
- Un sendero es euleriano si visita todas las aristas de G exactamente una vez.

- Un camino es hamiltoniano si visita todos los vértices de G exactamamente una vez.

Definición:

$G = (V, E)$ es bipartito si existen conjuntos A y B tales que $A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = V$

Tales que las aristas de G tienen un extremo en A y otro en B.



Al parecer no hay aristas entre los vértices dentro de A con los de A. Ni desde B con los de B.

Todo grafo bipartito es coloreable con 2 colores o menos.

$\mathbb{K}_{n,m}$ es bipartito

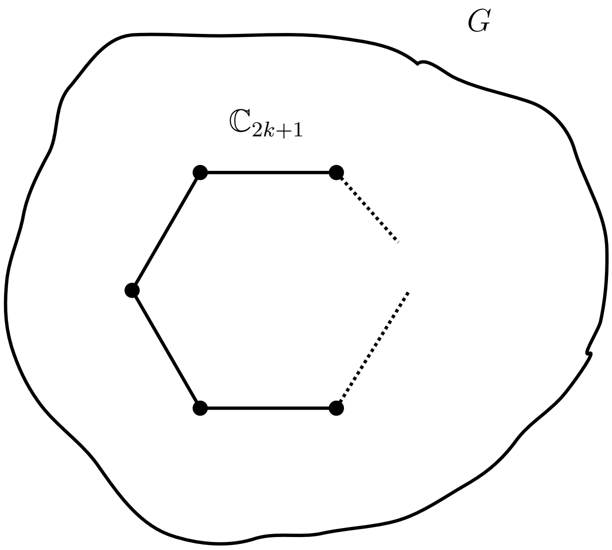
$\mathbb{A}_n$ es bipartito

$\mathbb{S}_n$ es bipartito

$\mathbb{Q}_n$ es bipartito

Teorema:

Si G tiene un ciclo impar como subgrafo entonces G no es bipartito.



Demostración:

Supongamos que G es bipartito, podemos separar $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ de manera que las aristas de G tienen un extremo en A y otro en B. Esto induce una partición de los vértices de $\mathbb{C}_{2k+1}$

$$V(\mathbb{C}_{2k+1}) = X \cup Y$$

$$\text{con } X \cap Y = \varnothing$$

$$X \subseteq A \wedge Y \subseteq B$$

Es decir las aristas de $\mathbb{C}_{2k+1}$ deben tener un extremo en X y el otro en Y. Hay $2k+1$ aristas.

Digamos que $1 \in X \rightarrow 2 \in Y \Rightarrow 3 \in X \Rightarrow \cdots 2k+1 \in \mathbb{X}$

Pero $\{1, 2k+1\} \in \mathbb{E}(\mathbb{C}_{2k+1}) \subseteq E(G) \Rightarrow\Leftarrow$

Definición:

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y} \ \operatorname{dist}(x,y)$$

$$\operatorname{dist}(G) = \min_{xPy} \ \underbrace{|E(xPy)|}_{\text{Largo del camino}}$$

$E(xPy)$ Conjunto de aristas del camino entre x y y.

$$\operatorname{diam}(\mathbb{K}_n) = \begin{cases} 1 & n > 1 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 & n > 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}(\mathbb{A}_n) = \begin{cases} \infty & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}(\mathbb{P}_n) = n - 1$$

$$\operatorname{diam}(\omega_n) = \begin{cases} 2 & n > 3 \\ 1 & n = 3 \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}(\phi_n) = \begin{cases} \infty & n > 1 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}(\mathbb{C}_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \dot{2} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n \notin \dot{2} \end{cases} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Clase 36

Coloración

Un grafo G es bipartito si existen conjuntos A y B tales que $V(G) = A \cup B \quad A \cap B = \varnothing$ y todas las aristas de G tienen un extremo en A y B.

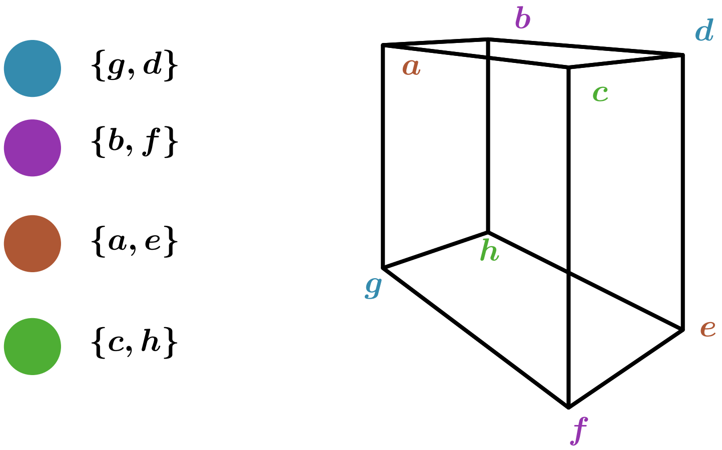
$$\operatorname{dist}_G(x,y) = \min_{xPy} |E(xPy)|$$
$$\operatorname{diam}(x,y) = \max_{x,y} |dist(x,y)|$$

36.1. Coloraciones

Definición:

Una m-coloración(propia) de los vértices de un grafo es una función $f : V(G) \longrightarrow [m]$ tal que los extremos de las aristas de G son de colores diferentes.

Es decir si $\{x,y\} \in E(G) \quad f(x) \neq f(y) \quad \forall \{x,y\} \in E(G)$



Teorema:

Si G es bipartito entonces G no tiene ciclos impares.

Teorema:

Si G es bipartito entonces existe una 2-coloración de los vértide de G.

Teorema:

Si G admite una 2-coloración entonces G es bipartito.

$\mathbb{K}_n$ admite una n-coloración.

$\mathbb{K}_n$ no admite ninguna m-coloración con $m < n$

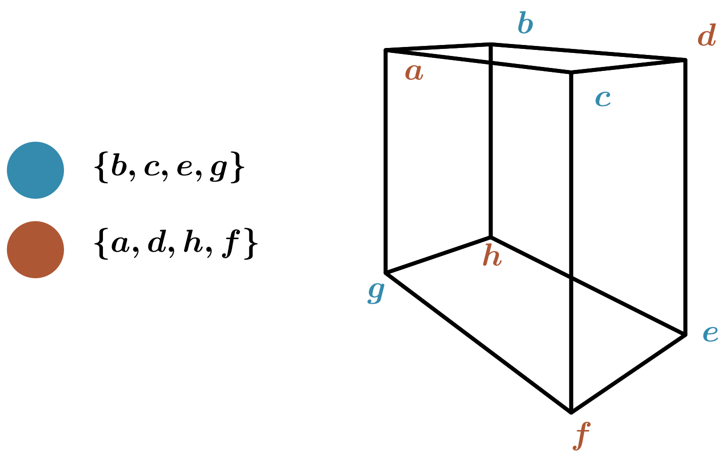
Definición:

$\chi(G)$: número cromático de G.

Es el mínimo número de colores con los que se puede hallar una coloración propia de G.

G debe admitir una $\chi(G)$-coloración y no debe admitir coloraciónes con menos colores.

$$\chi(\mathbb{Q}_3) = 2$$



Teorema:

$$\chi(G) > 1 \text{ si } |E(G)| \geq 1$$

Colorario:

$$\chi(\phi_n) = 1$$

$$|E(G)| \geq 1 \Rightarrow \chi(G) > 1$$

$$\neg(\chi(G) > 1) \Rightarrow \neg(|E(G)| \geq 1)$$

$$\chi(G) \leq 1 \Rightarrow |E(G)| < 1$$

$$\chi(G) = 1 \qquad |E(G)| = 0$$

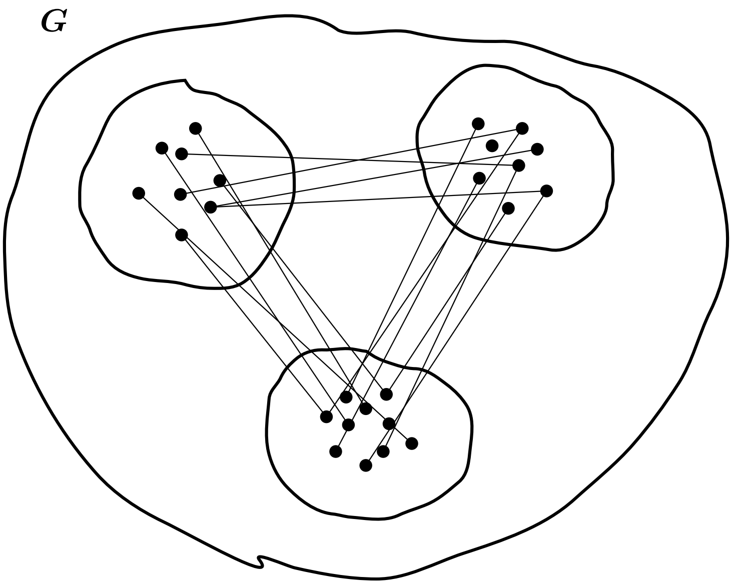
Definición:

Un grafo es k-partito si existe una k-coloración de sus vértices. **(Sin embargo: $|V(G)| \geq k$)**

De manera equivalente deben existir. k conjuntos A_i con $i \in [k]$ tales que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} = V(G) \text{ y } A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$$

y las aristas de G tienen extremos en conjuntos distintos.



Teorema:

cono(G) solo es bipartito si $G = \phi_n$ **(Para crear un cono hay que tomar un grafo G, agregarle un vértice y añadir vértices entre todos los vértices de G y el nuevo vértice.)**

Conjetura:

$$\chi(\text{cono}(G)) = \chi(G) + 1$$

Conjetura

$$\chi(\text{cono}(G)) \leq \chi(G) + 1$$

Demostración:

De manera trivial coloreamos G con $\chi(G)$ colores y el vértice adicional con el color nuevo.

$$\underset{\text{verdad?}}{\overset{\text{¿Podría}}{\text{esto ser}}} \quad \chi(\text{cono}(G)) < \chi(G)$$

No. Por lo tanto

$$\chi(\text{cono}(G)) \geq \chi(G)$$

¿Será que podemos decir $\chi(\text{cono}(G)) = \chi(G) + 1$ siempre?

1. $\chi(\text{cono}(G)) \leq \chi(G) + 1$
2. $\chi(\text{cono}(G)) \geq \chi(G)$
3. Hay grafos donde $\chi(\text{cono}(G)) \neq \chi(G)$

Sea f una coloración de cono(G) con el mínimo número posible de colores (son $\chi(\text{cono}(G))$ colores)

¿De qué color es el $\underset{x_0}{\text{vértice}}$ de cono(G)?

El vértice de cono(G) es de un color diferente a todos los colores de los vértices con la coloración propia que da f.

Esto quiere decir que $f(x) \neq f(x_0) \quad \forall x \in V(G)$ por lo que f colorea a G con $\chi(\text{cono}(G)) - 1$.

$$\chi(\text{cono}(G)) - 1 \geq \chi(G)$$
$$\chi(\text{cono}(G)) \geq \chi(G) + 1$$

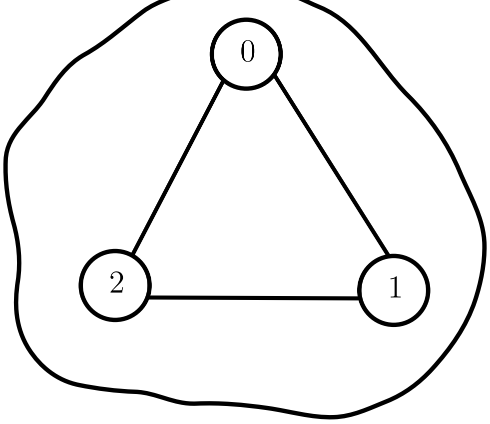
Usando Conjetura:

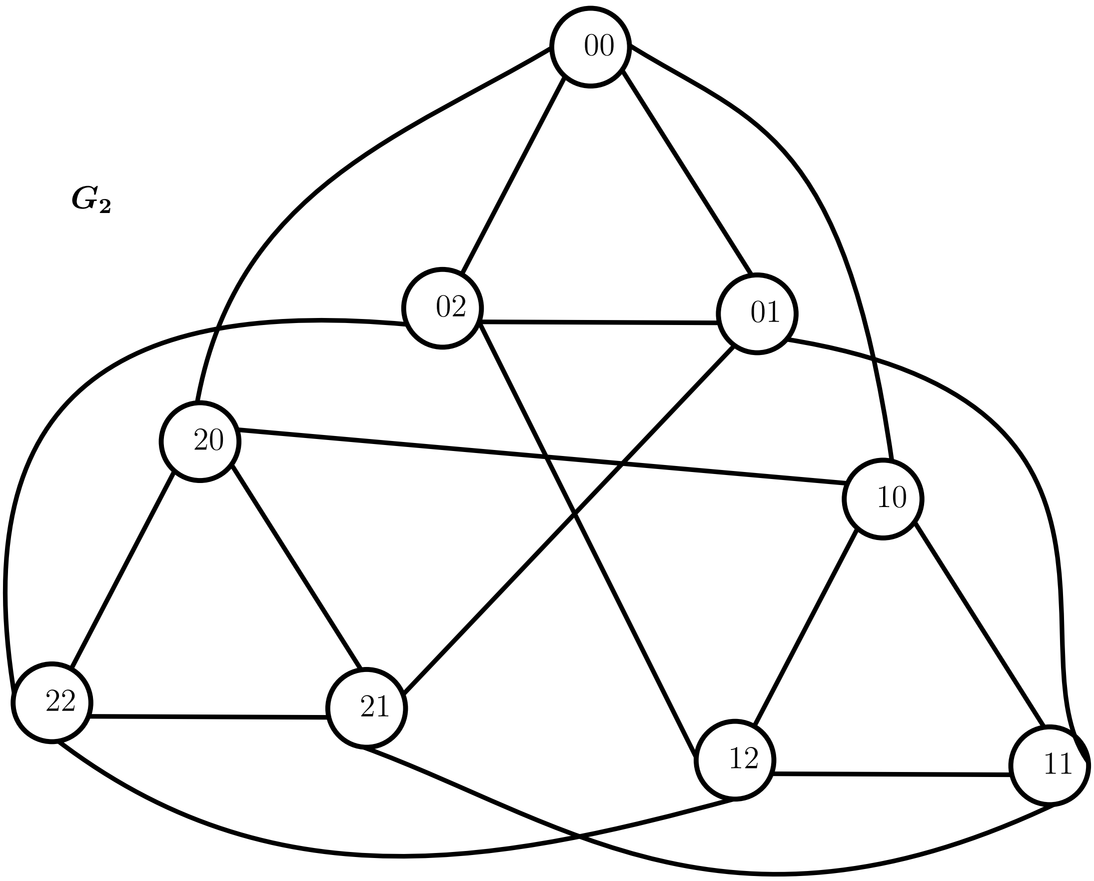
$$\chi(\text{cono}(G)) = \chi(G) + 1$$

$$V(G_n) = \left\{ \underbrace{\overbrace{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_2x_1x_0}^{\substack{\text{Secuencias en}\\ \text{ternario}\\ \text{con } n \text{ trits.}}}}_{n\text{-trits}} : \underset{i\in[n-1]\cup\{0\}}{x_i \in \{0,1,2\}} \right\}$$

$$E(G_n) = \left\{ \{\vec{x}, \vec{y}\} : \substack{\text{Si } \vec{x} \text{ y } \vec{y}\\ \text{difieren}\\ \text{exactamente}\\ \text{en unn trit.}} \right\}$$

G_1




G_2
00
02
01
20
10
22
21
12
11

Clase 37

Mini clase grafos

Si $\mathbb{K}_w$ es subgrafo de G entonces $\chi(G) \geq w$ $(\boldsymbol{w} \in \mathbb{N})$

Si $\neg(\chi(G) \geq w)$ entonces $\neg(\mathbb{K}_w$ es subgrafo de $G)$

Si $\chi(G) < w$ entonces $\mathbb{K}_w$ no es subgrafo de G.

$$G \cong \overline{G}$$

$$|V(G)| = |V(\overline{G})| = n$$

$$|E(G)| = |E(\overline{G})|$$

$$|E(G)| + |E(\overline{G})| = 2|E(G)| =$$

$$\binom{n}{2} = |E(\mathbb{K}_n)|$$

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$n \in \dot{4}$$

$$(n-1) \in \dot{4}$$

Algo con matrices

Acepto pull request's

Clase 38

Cosas extrañas

Definición:

El número de clique de un grafo es el n tal que $\mathbb{K}_n$ es subgrafo de g y n es lo más grande posible.

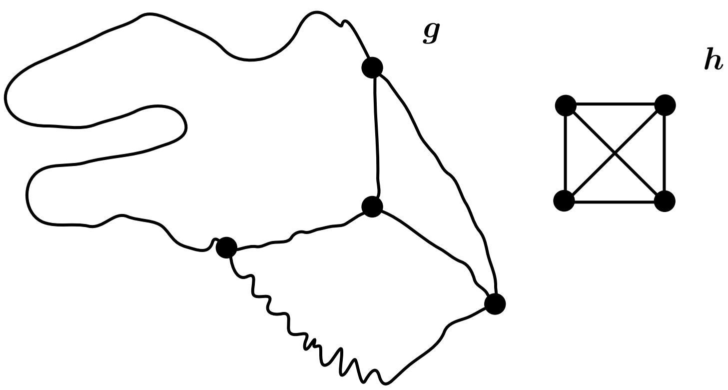
$$\text{clique}(G) = \max n$$

Definición:

Un grafo g es planar si tiene una representación plana.

Definición:

Un a representación plana de un grafo es plana si es un dibujo del grafo donde las aristas son curvas en el plano que solo tocan vértices en sus extremos.



$$g \cong \mathbb{K}_4$$

$$h \cong \mathbb{K}_4$$

La representación de g es plana.

La representación de h es plana.

$\mathbb{K}_4$ es planar.

Ejemplo

$\mathbb{K}_5$ no es planar.

$\mathbb{K}_{3,3}$ no es planar.

Demostrar que un grafo "general" no es planar es "dificil".

Teorema:

Kuratowsky: G es planar si no tiene a $\mathbb{K}_5$ o $\mathbb{K}_{3,3}$ como menor.

git ▪ Branch: tag: v42.0 @ c21c11b ▪ Release: (2019-11-29)

Head tags: v42.0)

Clase 39

Planaridad

G es planar si admite una representación plana (Si las aristas no se cruzan).

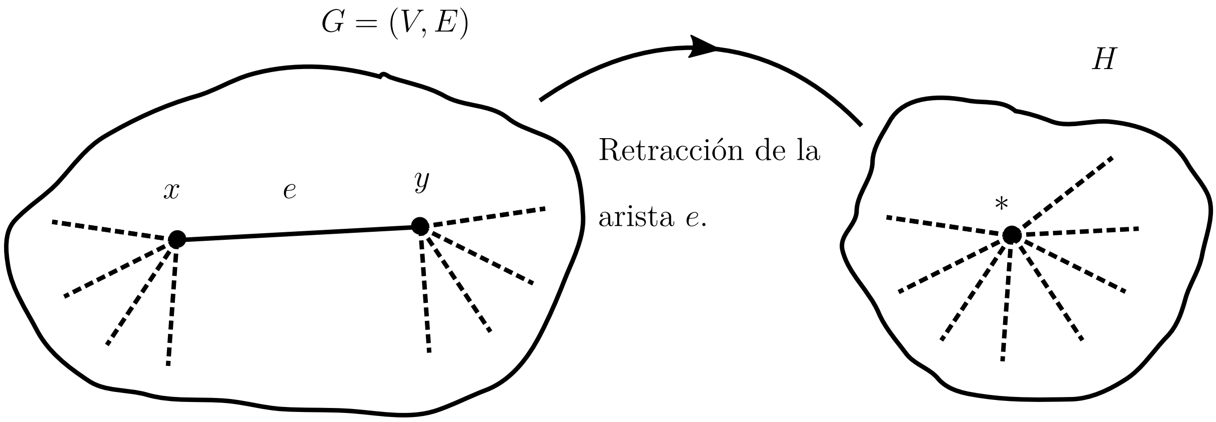
Teorema:

G es planar si no a tiene a $\mathbb{K}_5$ o $\mathbb{K}_{3,3}$ como menor.

Definición:

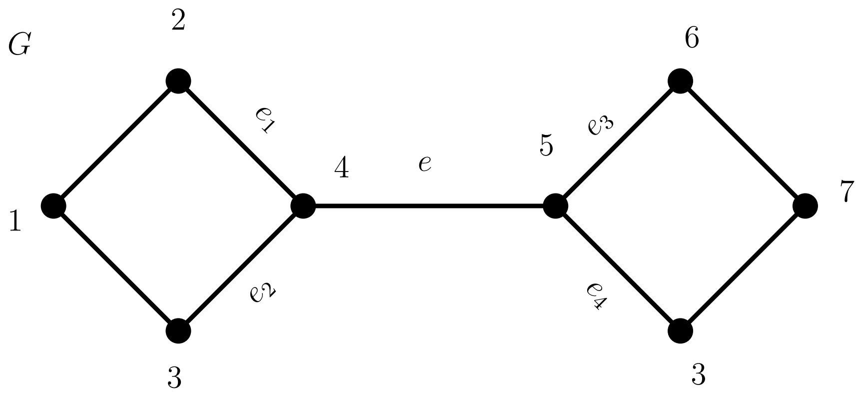
H es un menor de G si se puede obtener H a partir de G mediante operaciones sucesivas de:

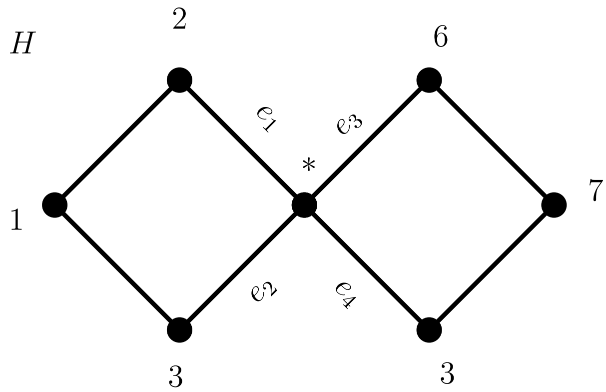
- Eliminación de vértice.
- Eliminación de aristas.
- Retracción de aristas.



$$H = ((V \setminus \{x, y\}) \cup \{*\}(E \setminus \{e \in E : x \in \vee y \in e\}) \cup \{\{*, z\} : z \in (N_x \cup N_y) \setminus \{x, y\}\})$$

Ejemplo:

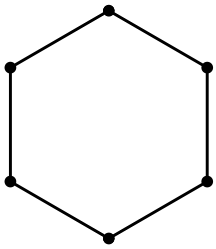




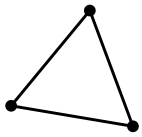
H es un menor de G. $H \not\subseteq G$

Ejemplo 2:

G

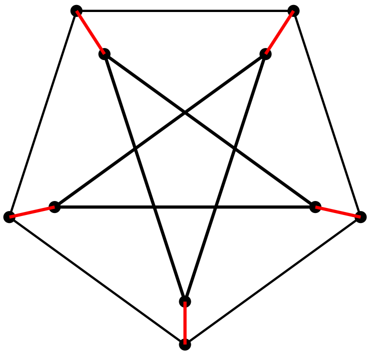


H



H es un menor de G $H \not\subseteq G$

$\boldsymbol{G}$



$$\mathbb{K}_5 \subseteq G$$

$\mathbb{K}_5$ es un menor de G.

¿Es $\mathbb{S}_4$ un menor de $\mathbb{K}_9$?

Sí.

¿Es $\mathbb{C}_4$ un menor de $\mathbb{Q}_5$?

Sí.

Si solo se vale usar retracción de aristas. ¿Qué grafos “terminan” en un único vértice?

Los conexos.

Si G es planar entonces

$$\chi(G) \leq 4$$

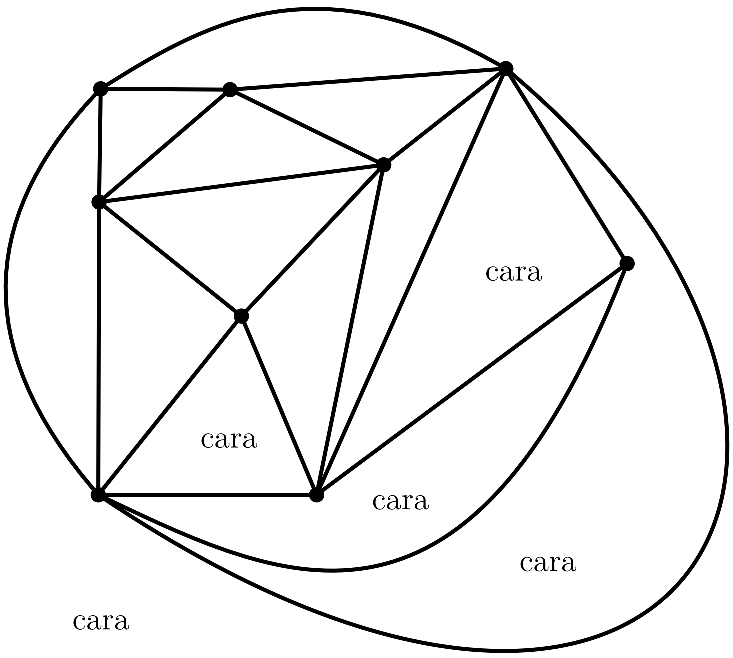
Si $\neg(\chi(G) \leq 4)$ entonces $\neg(G$ es planar).

Si $\chi(G) > 4$ entonces G no es planar.

(Una versión más antigua) Si G es planar. Entonces $\chi(G) \leq 6$

Bosquejo:

Si G es planar y tiene todas las aristas que podría tener, es una triangularización del plano.



Teorema:

$$|\text{caras}| + |V| = |E| + 2$$

$$14 + 9 = 21 + 2$$

$$23 = 23$$

Cosas

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$$

$$3|\text{caras}| = 2|E|$$

G planar:

T_r es una triangularización del plano.

$$|E(G)| \leq |E(T_r)|$$

39.1. Tarea planar

Cuando G es suficientemente grande. Si G es una triangularización entonces G tiene al menos un vértice con grado 5 o más.

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$$

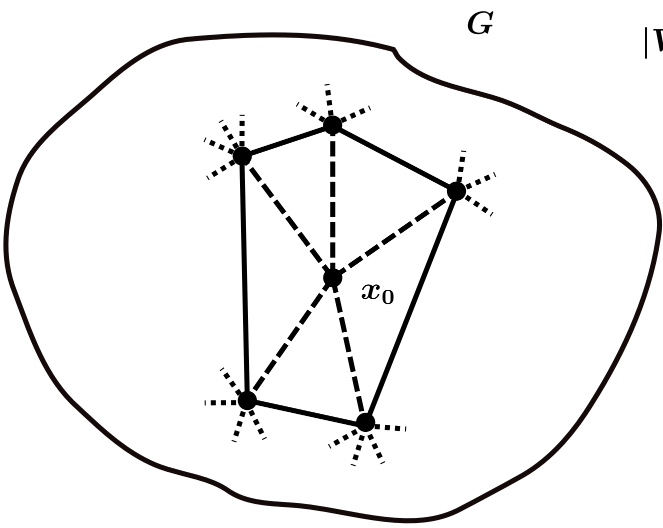
$$\sum_{x\in V} \delta(G) \leq \sum_{x\in V} d(x) \leq \sum_{x\in V} \Delta(G)$$

$$\sum_{x\in V} \Delta(G) = |V|\Delta(G)$$

$$2|E| = \sum_{x\in V} d(x) \leq \sum_{x\in V} \Delta(G) = |V|\Delta(G)$$

$$\frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

$$|E| \leq \frac{(|V|-1)|V|}{2}$$



$$|V|\delta \leq 2|E|$$

$$\delta \leq \frac{2|E|}{|V|}$$

Clase 40

Árboles

Tarea:

Dado G un grafo planar suficientemente grande demostrar que G tiene al menos un vértice de grado 5 o menos.

$$\text{grande}(G) \Rightarrow \delta(G) \leq 5$$

Demostración por inducción:

Si G es planar $\chi(G) \leq 6$.

Pueden usar que si G es planar entonces $|C| + |V| = |E| + 2$.

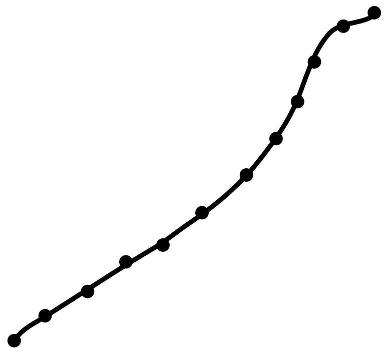
Si G es una triangularización del plano entonces todas las caras son triángulos y $3|C| = 2|E|$

Definición:

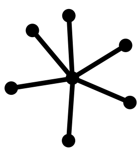
Un grafo es un árbol si es conexo y acíclico **(no tiene ciclos)**.

Ejemplo:

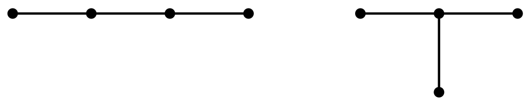
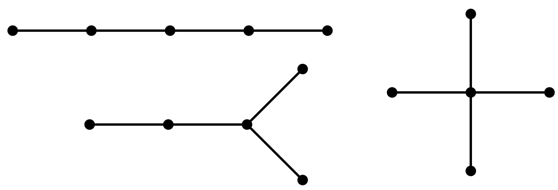
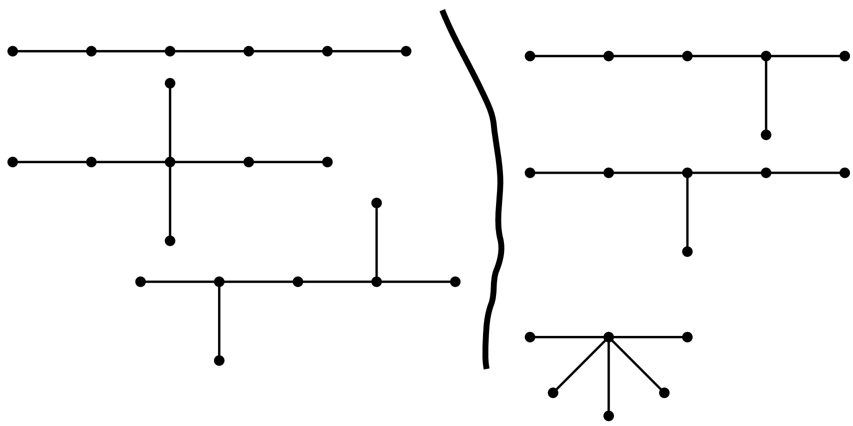
$\mathbb{P}_n$ es un árbol



$\mathbb{S}_n$ es un árbol



n número de vértices

n	$\lvert E \rvert$	Árboles no isomorfos
1	**0**	
2	**1**	
3	**2**	
4	**3**	
5	**4**	
6	**5**	

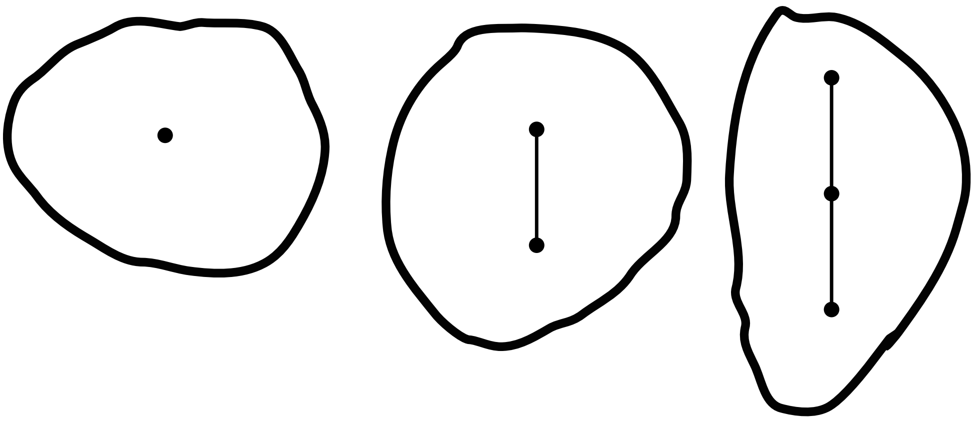
Al parecer se puede armar un árbol con n vértices añadiendo un vértice y una arista a un árbol con $(n-1)$ vértices.

Códigos de Prüfer. Conteo de árboles etiquetados.

Conjetura:

Si T es un árbol entonces $|E(T)| = |V(T)| - 1$

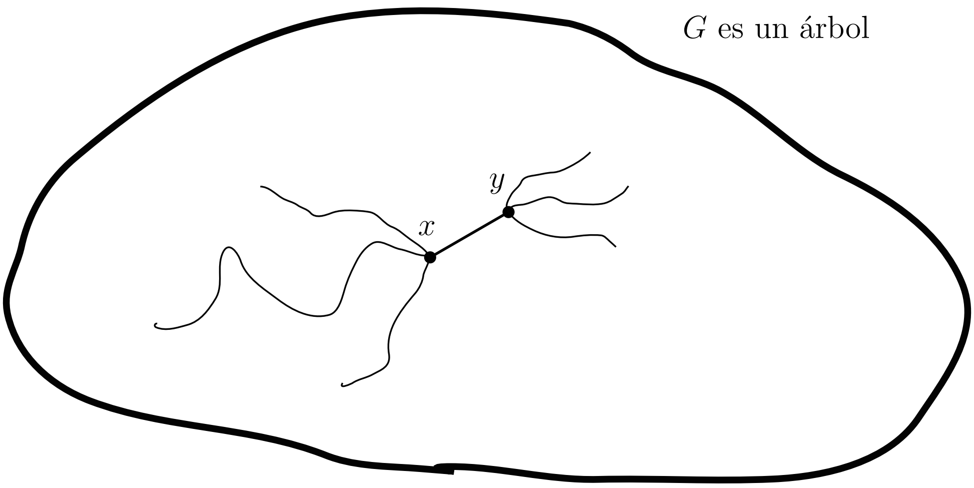
Por inducción sobre $|E|$ caso base:

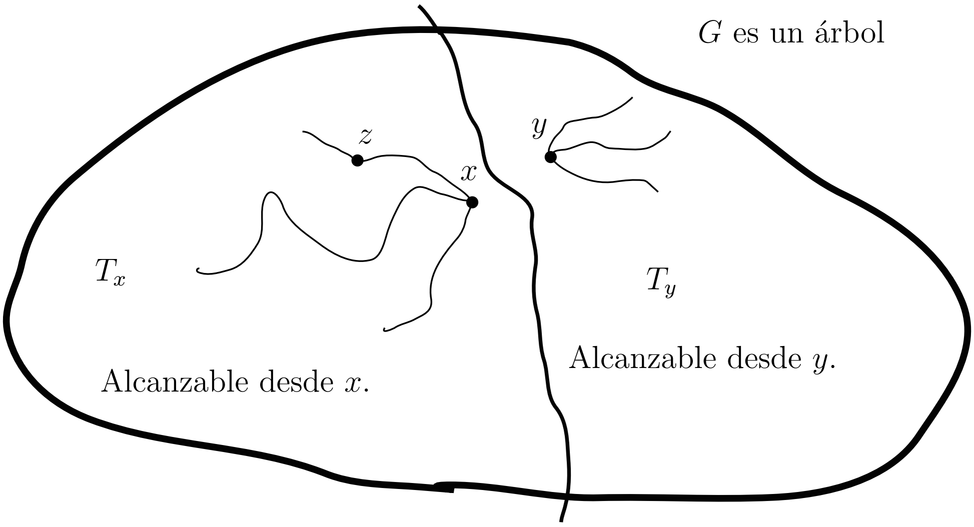


Hipótesis inductiva:

Si T es un árbol con menos de n vértices entonces $|E(T)| = |V(T)| - 1$

Sea G un árbol con n vértices queremos ver que $|E(G)| = |V(G)| - 1 = n - 1$





T_x es un árbol (Claramente es acíclico)

y conexo por definición y lo mismo pasa

con T_y.

$$V(T_x) = \{z \in V(G) : zPx \text{ no pasa por } y\}$$

Por hipótesis inductiva $E(T_x) = |V(T_x)| - 1$ pues $|V(T_x)| < n$ (Y también con T_y)

Finalmente

$$|V(G)| = |V(T_x)| + |V(T_y)|$$

$$|E(G)| = |E(T_x)| + |E(T_y)| + 1$$

$$|E(G)| = |V(T_x)| - 1 + |V(T_y)| - 1 + 1$$

$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$

Si G es un árbol **(Suficientemente grande)**:

- G es maximalmente acíclico. **(Si le añadimos una arista cualquiera formámos algún ciclo.)**
- G es minimalmente conexo. **(Si le quitamos una arista cualquiera deja de ser**

conexo.)

- Planar.

- Bipartito. **(Pues no tiene ciclos. En consecuecia no tiene de ciclos de longitud impar.)**

Si G es planar y conexo entonces:

$$|C| + |V| = |E| + \underset{\substack{\text{Característica} \\ \text{de Euler.}}}{2}$$

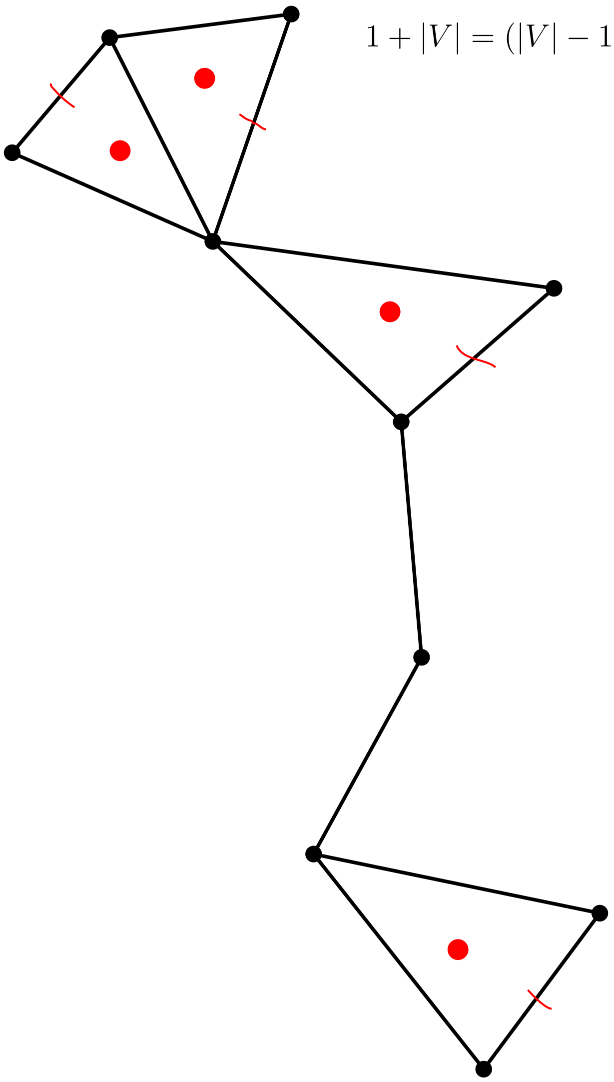
- Si G no tiene ciclos:

$$|C| = 1 \quad \binom{\text{Es un árbol}}{|E|=|V|-1}$$

- Si G tiene ciclos, entonces:

$$|C| > 1$$

  Y existen aristas que son frontera entre 2 caras distintas. Y están sobre un ciclo. Si quitamos la arista frontera, pierdo una cara y una arista sin desconectar el grafo.



$1 + |V| = (|V| - 1) + 2$

Tarea:

Si T es un árbol con más de 1 vértice entonces $\delta(T) = 1$

Si $\delta(G) \geq 2$ entones G tiene al menos un ciclo.

SI G es un árbol entonces hay un único camino entre x y y para todo $x, y \in G$.

Clase 41

Más árboles

41.1. Repaso árboles

Un árbol es un grafo conexo y acíclico.

Teorema:

Si T es un árbol $|E(T)| = |V(T)| - 1$

Teorema:

Si T es un árbol entonces:

- T es minimalmente conexo.
- T es maximalmente acíclico.
- T es bipartito.
- T es planar.

Teorema:

Si T es un árbol existe un único camino entre x y y para todo $x, y \in V(T)$

Teorema:

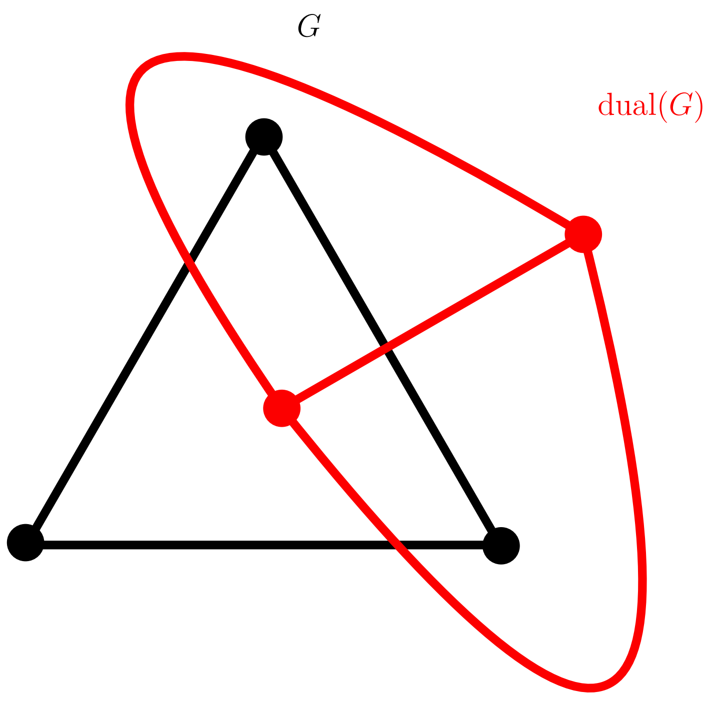
Si $G = (V, E)$ es planar entonces $|C| + |V| = |E| + 2$

Teorema:

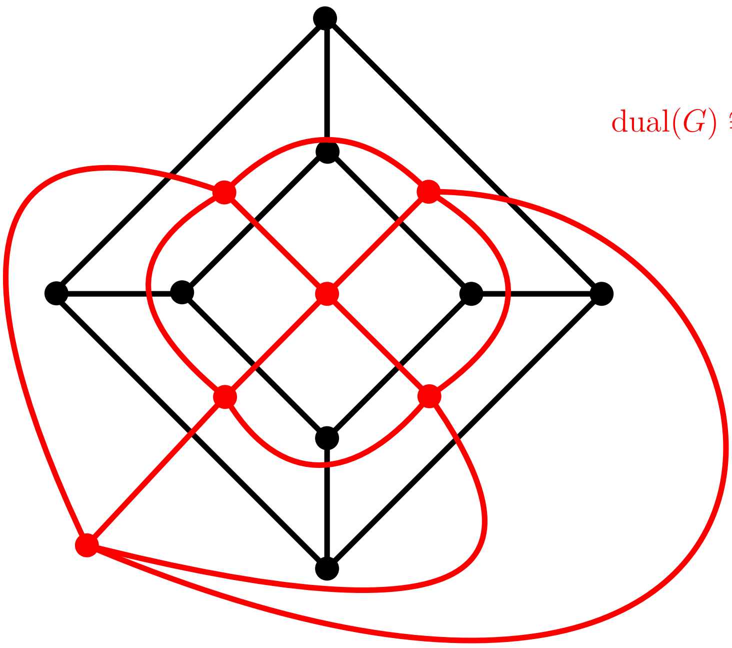
Si T es un árbol y $x \in V(T)$ con $d(x) = 1$ diremos que x es una hoja.

Teorema:

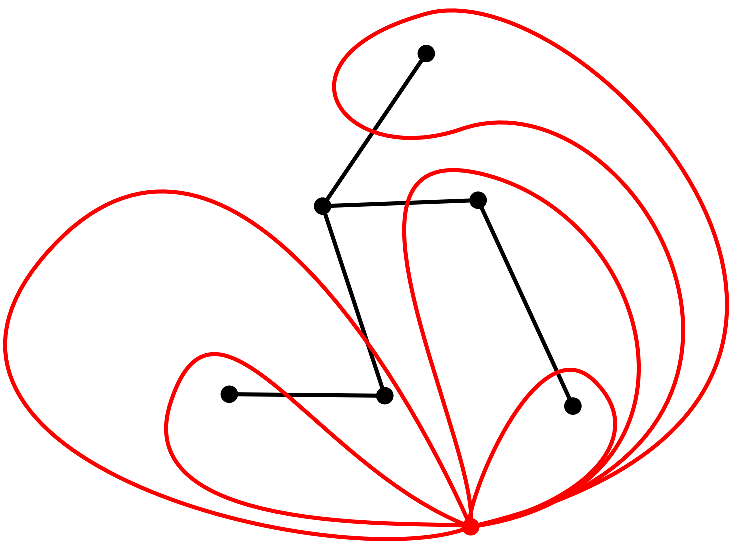
Si G es planar, podemos definir. El dual(G) es planar. Y se define. Los vértices del dual(G) son las caras de G y hay una "arista" entre dos caras si comparten una aristas en G. **(Cuidado, podría no ser un grafo.)**



$\mathbb{Q}_3$

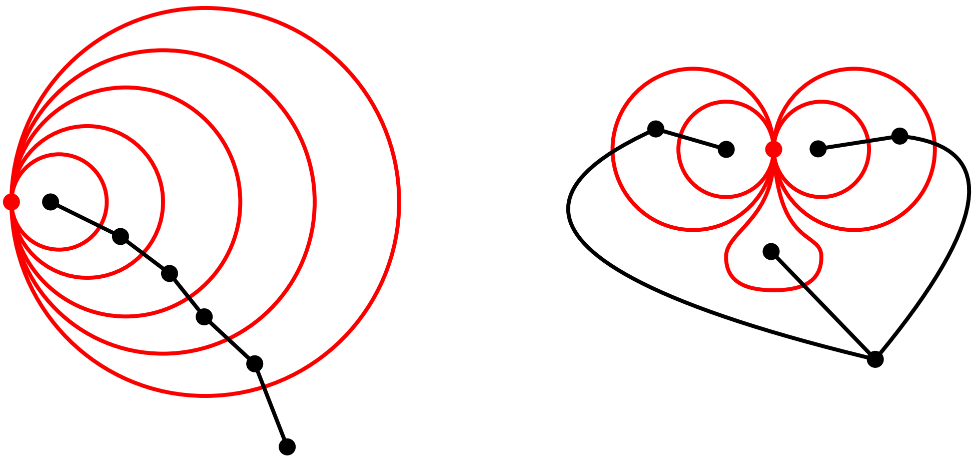


G

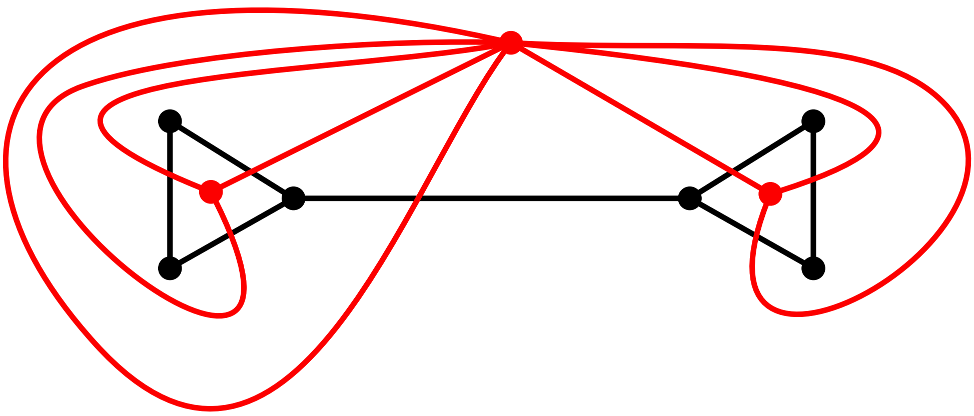


dual(G)

dual(dual(G))



G



Conjetura:

¿El dual(dual(G)) $= G$?

NO

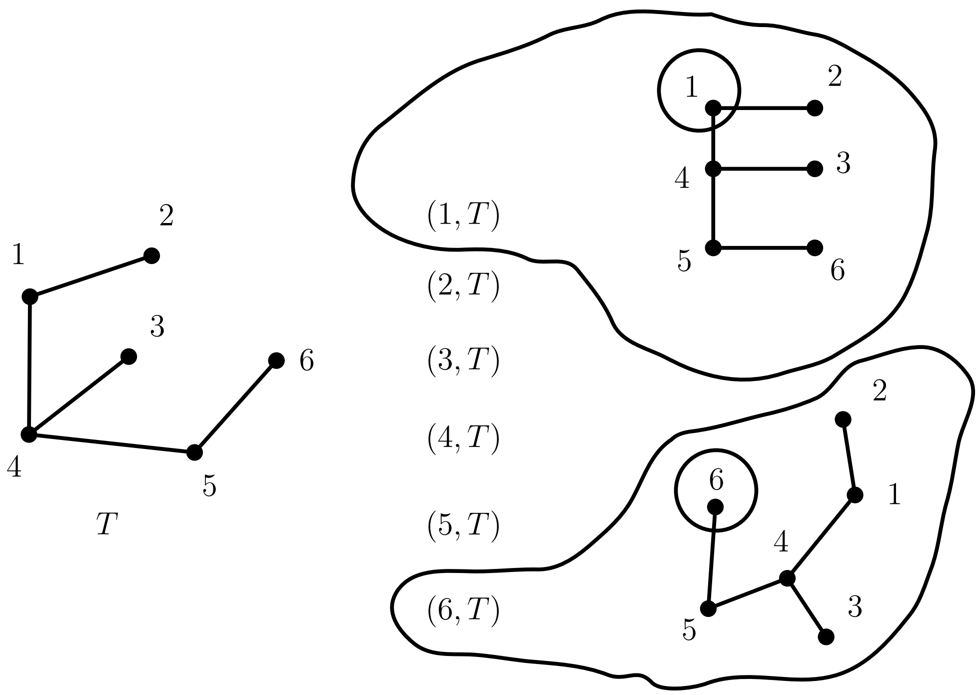
¿Cuando es dual(dual(G)) $= G$?

Cuando las caras de la cosa isomorfa a dual(G) son las mismas.

Recorrido de un árbol.

Un árbol con raíz o enraizado es un par (x, T) con $x \in V(T)$

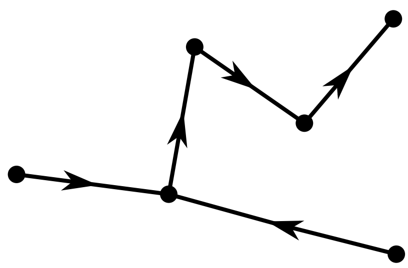
Ejemplo:



Hay otras definiciones asociadas a árboles.

Árbol dirigido:

¿Qué hay que hacer a la definición para respetar la idea de "Camino único"?



Definición:

Un bosque es un grafo acíclico.

Teorema:

Un bosque es un "conjunto de árboles".

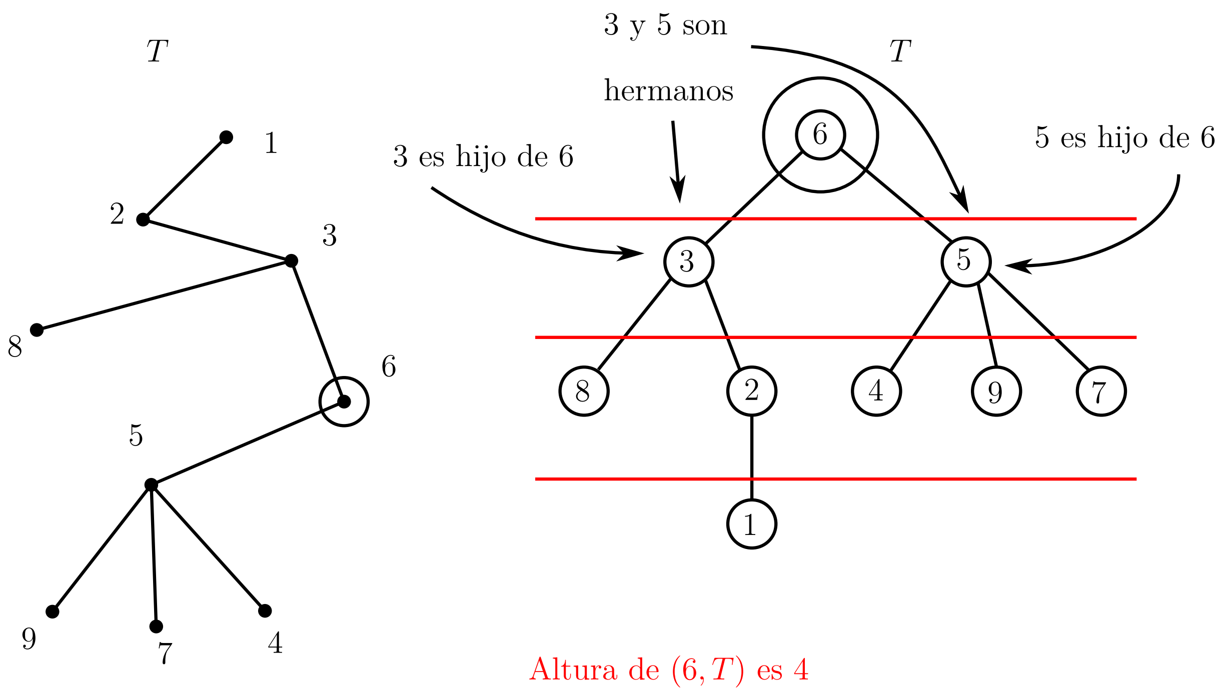
$$G = \bigsqcup_{i=1}^{\mathrm{nc}(G)} T_i \quad \text{con } T_i \text{ un árbol.}$$

Si dibujamos un árbol enraizado con la raíz arriba y los vértices organizados en niveles y aristas solo entre niveles consecutivos.

(¿Se puede siempre?) (¿De cuántas maneras podemos pintarlo?)

El número de niveles es la altura del árbol.

(¿Sería más sensato pensar en el número de niveles menos 1?)



Si tenemos un árbol enraizado pintado de la manera que describrimos en la imágen.

Hay varias formas de recorrerlo:

- Pre orden:

  Primero la raíz y entonces sus sub-árboles de izquierda a derecha en pre orden.

$$T : \quad 6, 3, 8, 2, 1, 5, 4, 9, 7$$

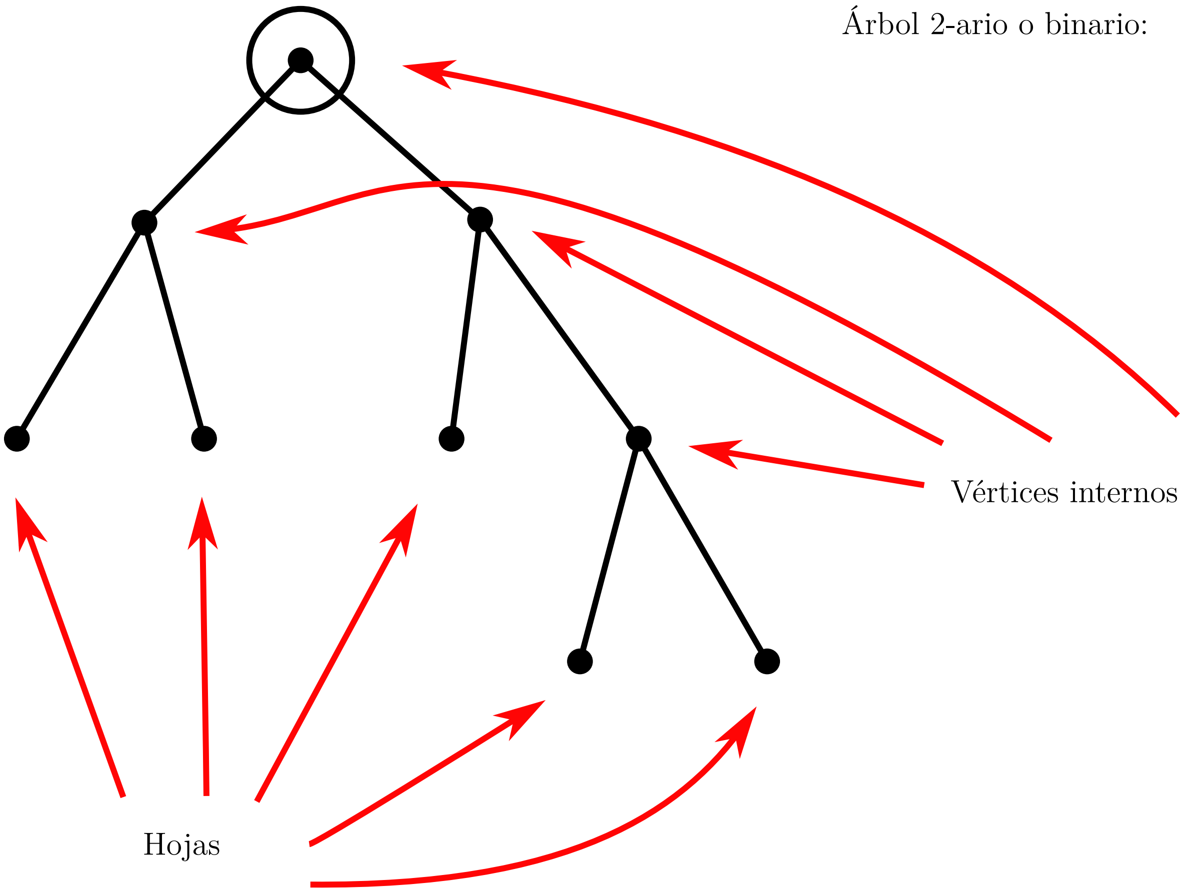
- Post orden:

  De izquierda a derecha los sub-árboles en post orden y finalmente la raíz.

$$T: \quad 8, 1, 2, 3, 4, 9, 7, 5, 6$$

Definición:

Un árbol enraizado es k-ario si cada vértice tiene exactamente k hijos o ninguno.



Si T es k-ario:

Cuando la diferencia entre el nivel mínimo y el nivel máximo de dos hojas es menor o igual que 1 diremos que el árbol es balanceado.

¿Tiene sentido pensar en esa idea de "balanceo" en árboles generales?

¿Cuál es la altura de un árbol k-ario balanceado?

41.2. Más tareas de árboles

¿Qué es una cara en un grafo planar?

Clase 42

Árboles requiem

- Árbol: T un grafo acíclico y conexo.
- Árbol enraizado: $(\underset{\text{Raiz}}{x}, T)$ con $x \in V(T)$
- Árbol k-ario: Un árbol donde todos los vértices que tienen descendientes tienen k descendientes.
- Recorrido en pre-orden:
  - 1^{ro} la raiz
  - 2^{do} después los sub-árboles de izquierda a derecha en pre-orden.
- Recorrido en post-orden:
  - 1^{ro} los subárboles de izquierda a derecha en post-orden.
  - 2^{do} último la raíz.

42.1. Si el árbol es binario

(2 hijos o ninguno)

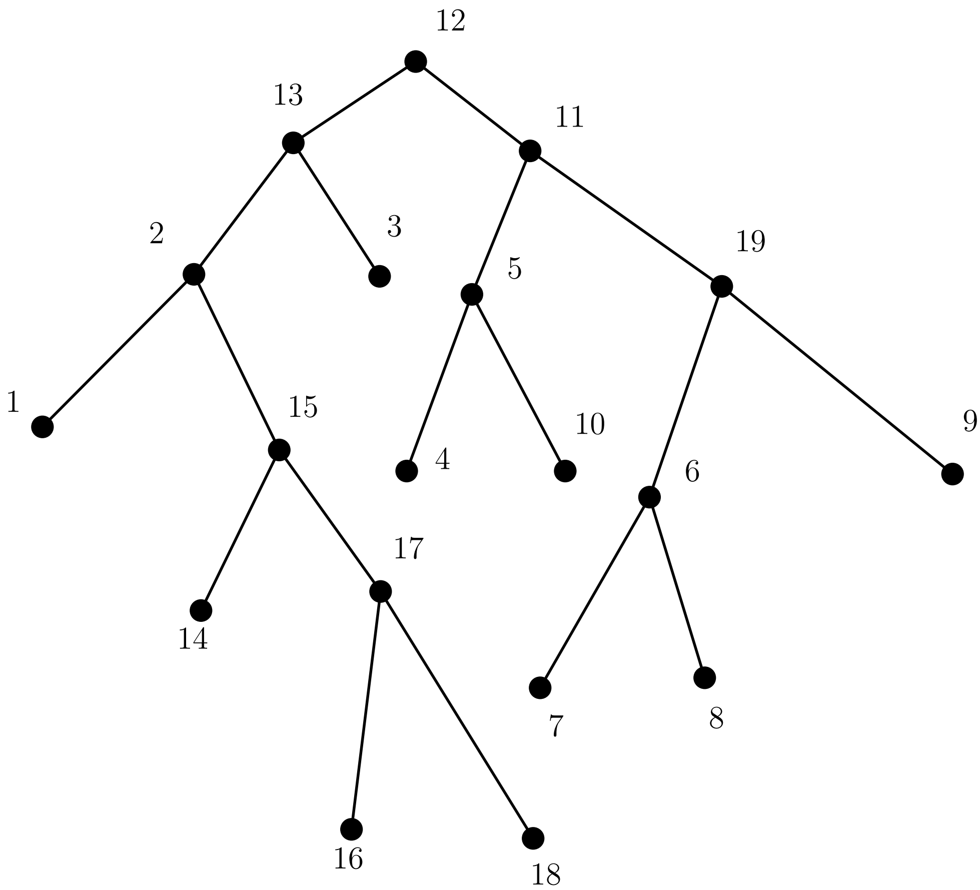
42.1.1. Recorrido en orden

- 1ro Recorrido en orden del sub-árbol izquierdo.

- 2do la raíz.

- 3ro Recorrido en orden del sub-árbol derecho.

$$1, 2, 14, 15, 16, 17, 18, 13, 3, 12, 4, 5, 10, 11, 7, 6, 8, 19, 9$$



Dado un recorrido en orden de un árbol binario. ¿Podemos reconstruir el árbol binario?

$$(((a + b) * c) + (d * e) * ((g + h) + (e + f)))$$

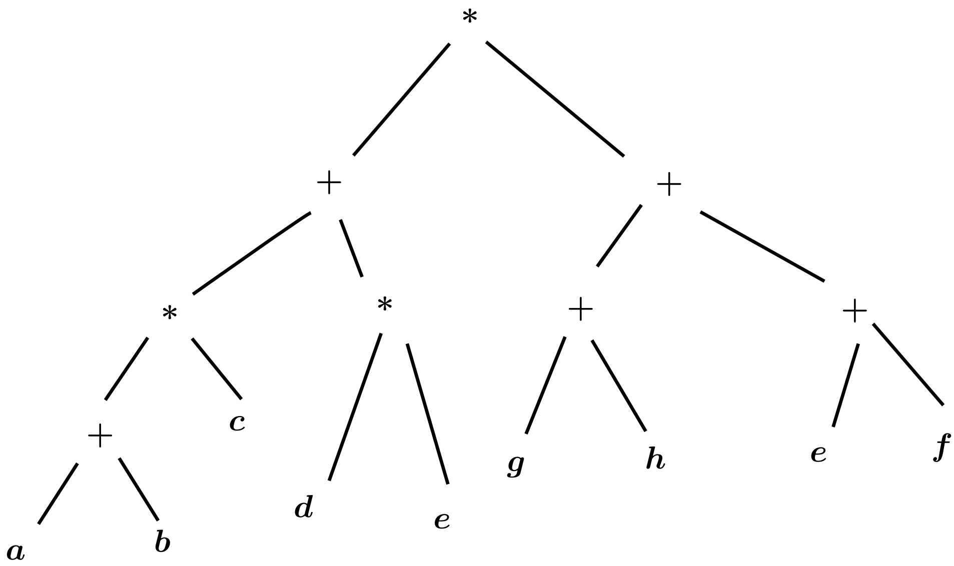


Figura 42.1: Árbol 1

$$(((((a + (b * c)) + ((d * e) * g)) + h) + e) + f)$$

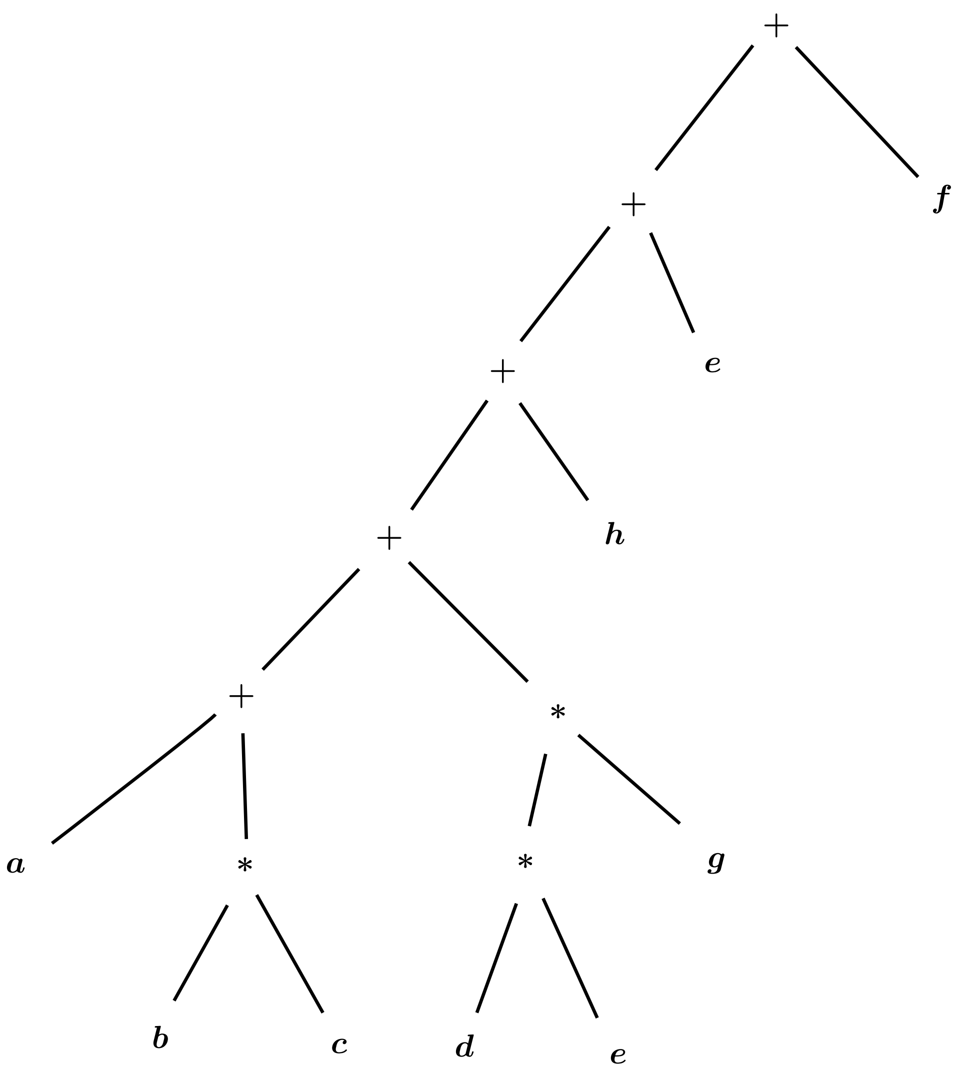


Figura 42.2: Árbol 2

42.2. Notación polaca inversa

Patrón del Árbol 1:

$$ab + c * de * +gh + ef + +*$$

¿Cuántos patrones diferentes podemos hacer con los símbolos $\{a, b, c, *, +\}$ usándolos exactamente una vez?

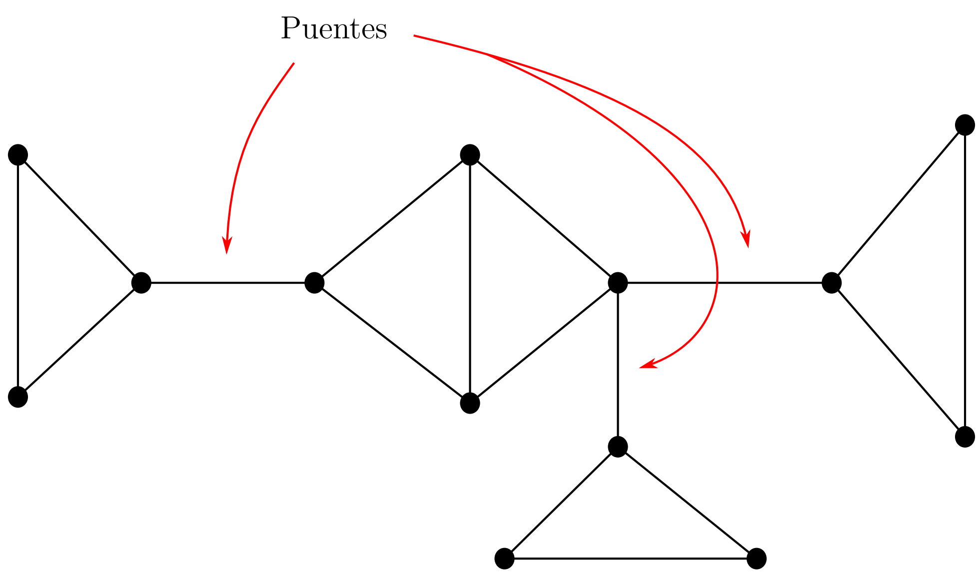
¿A cuantas expresiones matemáticamente distintas corresponden?

42.3. Cosas con árboles

Sea G un grafo conexo:

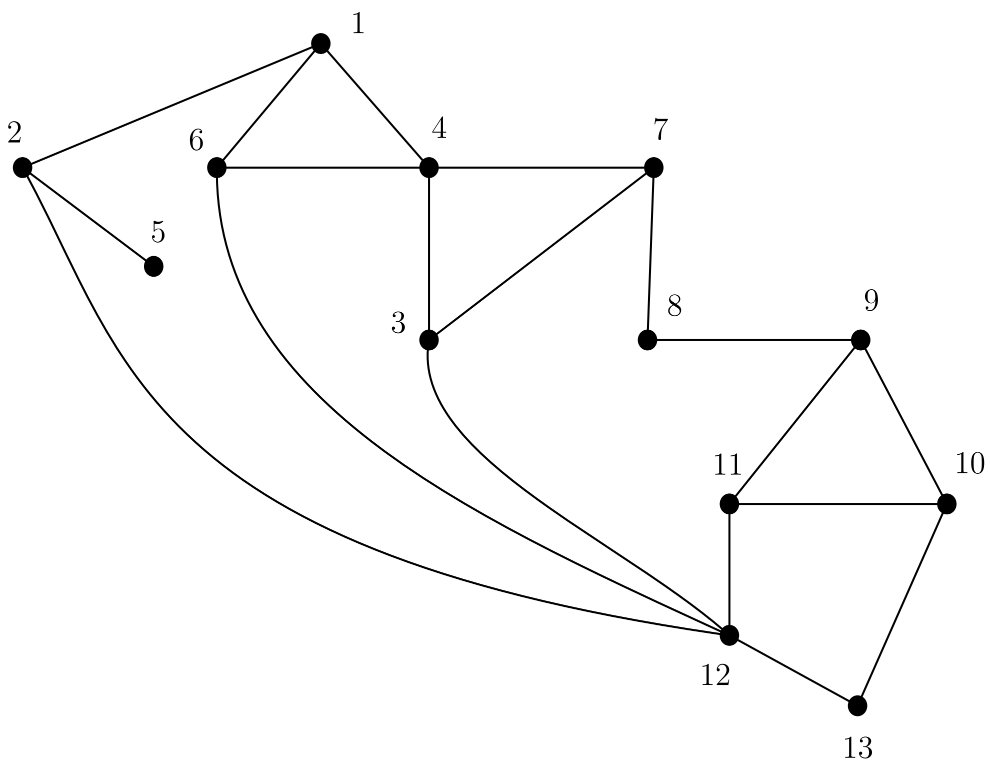
Teorema:

Existe T un árbol que es subgrafo de G e incluye todos sus vértices. **(Un árbol de expansión.)**



Demostración:

Quita una arista sobre un ciclo hasta que no haya ciclos.



42.3.1. BFS

Búsqueda en amplitud o por anchura.

https://es.wikipedia.org/wiki/Búsqueda_en_anchura

42.3.2. DFS

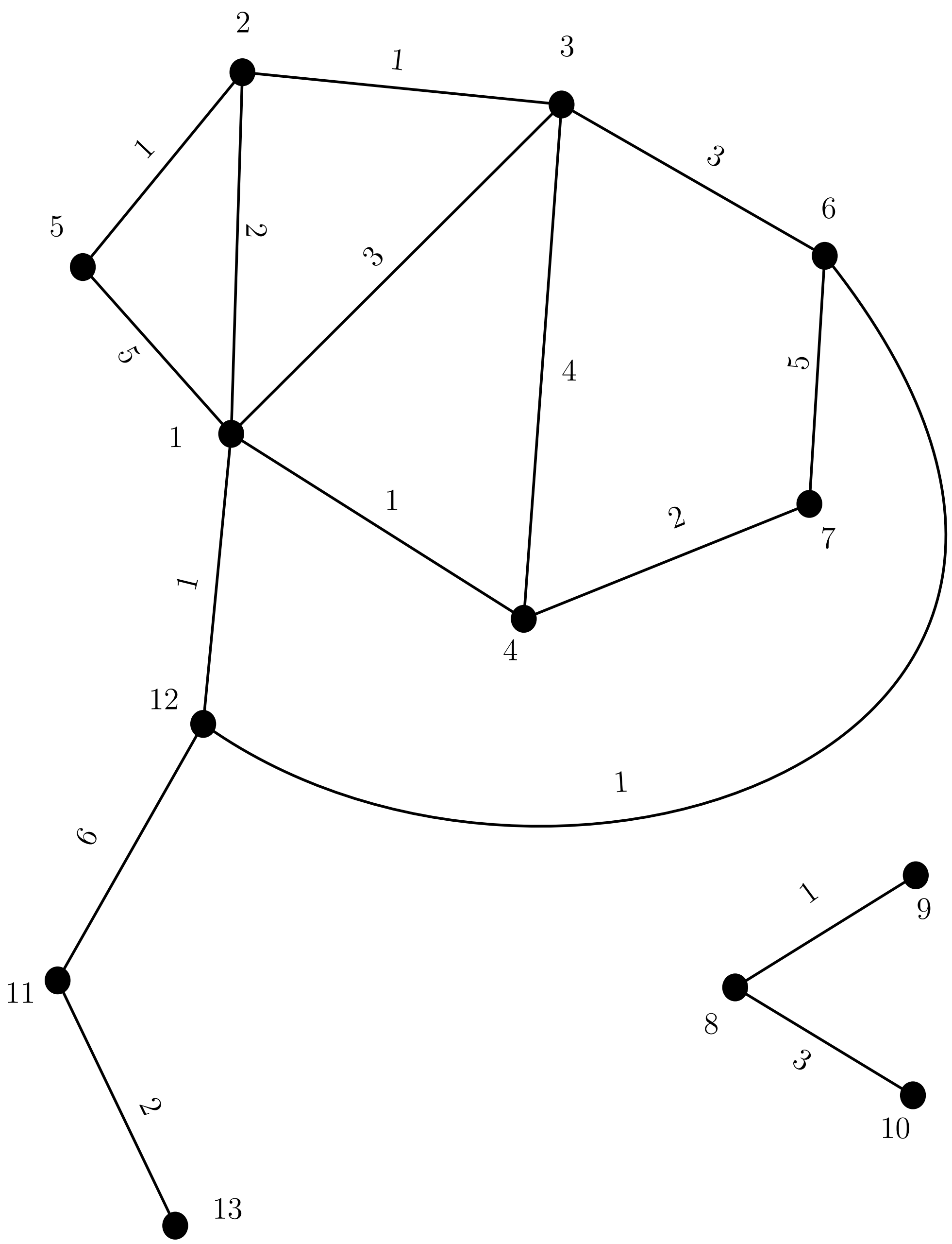
Búsqueda en profundidad.

https://es.wikipedia.org/wiki/Búsqueda_en_profundidad

¿Son el árbol BFS y DFS únicos?

42.3.3. Dijkstra

https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Dijkstra


2
1
3
1
3
5
2
3
6
5
4
5
1
1
2
7
1
4
12
1
6
1
9
11
8
3
10
2
13