

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

HENRIQUE ALVES DE LIMA

**AJUSTE LOG-PERIÓDICO APLICADO À
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES POR MÉTODO DE
MONTE-CARLO**

BRASÍLIA
13 DE NOVEMBRO DE 2019

Henrique Alves de Lima

**Ajuste log-periódico aplicado à precificação de opções
por método de Monte-Carlo**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física

Orientador: Leonardo Luíz e Castro

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

13 de novembro de 2019

Henrique Alves de Lima

Ajuste log-periódico aplicado à precificação de opções por método de Monte-Carlo / Henrique Alves de Lima. – Brasília, 13 de novembro de 2019-

76 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Leonardo Luíz e Castro

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 13 de novembro de 2019.

1. Opções. 2. Crises Financeiras. I. Leonardo Luiz e Castro. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV. Ajuste log-periódico aplicado à precificação de opções por método de Monte-Carlo

CDU 02:141:005.7

*Este trabalho é dedicado aos nascidos na periferia,
que preferiram contrariar as estatísticas.*

Agradecimentos

Esse trabalho é dedicado a todas as pessoas que dedicaram um pouco da sua vida para que eu construísse a totalidade da minha. À minha mãe, Irene Alves de Jesus, a mulher mais incrível do mundo, que lutou com todas as suas forças para que esse sonho fosse construído. A meu saudoso pai, José Miranda, homem provedor, que nunca deixou que nada nos faltasse. À minha família. A meus irmãos, mais que amigos, Paulo Henrique e José Lucas, pelos longos anos de união. Meus companheiros de caminhada, João Augusto, Ana Caroline Manso, Gracielle Arvelos e Henrique Lettieri, por todo apoio dedicado a mim. A todos os amigos e colegas que compartilharam comigo momentos na vida. Ao professor Leonardo Luíz e Castro, por suas orientações preciosas, e por me ensinar valores que levarei para a vida. À Clarissa Martins, por ter acreditado em meu sonho e me apoiado no momento mais difícil da minha vida, dedico muito mais do que a alegria da realização desse trabalho, dedico a felicidade de perceber que os dias difíceis que se passaram foram necessários para forjar o meu caráter.

A todos, muito obrigado.

*O tempo é fluido, e nós,
rochosos demais para entender que a vida muda.
(Clarissa Martins)*

Resumo

O trabalho busca estudar mercados de ações em situações específicas de bolhas financeiras, verificando como os derivativos ligados aos ativos subjacentes tendem a se comportar com variações drásticas nos preços. Toda essa dinâmica econômica será estudada por métodos conhecidos na física estatística e outros métodos particulares da econofísica, como a solução de equações diferenciais específicas e outras técnicas numéricas e computacionais. A dinâmica dos mercados será observada em relação ao comportamento log-periódico, utilizado na modelagem de diversos fenômenos naturais e humanos.

Palavras-chaves: Econofísica. Opções. Bolhas financeiras. Crises econômicas. Monte Carlo. Mercado de ações. Log-periodicidade. Black e Scholes.

Abstract

The paper seeks to study stock markets in specific situations of financial bubbles, looking at how derivatives linked to underlying assets tend to behave with drastic price fluctuations. All of this economic dynamics will be studied by methods known in statistical physics and other particular methods of econophysics, such as solving specific differential equations and other numerical and computational techniques. Market dynamics will be observed in relation to the log-periodic behavior used in modeling various natural and human phenomena.

Key-words: Econophysics. Options. Financial bubbles. Economic crises. Monte Carlo. Stock market. Log-periodicity. Black and Scholes.

Sumário

Introdução	13
I UM ESTUDO SOBRE A DINÂMICA DE MERCADOS 15	
1 UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE DERIVATIVOS E A FÍSICA APLICADA A MERCADOS FINANCEIROS	17
1.1 Opções	17
1.2 Crises financeiras e a log-periodicidade	21
2 AÇÕES E ÍNDICES ESTUDADOS	23
3 O AJUSTE LOG-PERIÓDICO	33
3.0.1 Aplicação do ajuste log-periódico à precificação de opções	36
II MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES 37	
4 MÉTODO DE BLACK-SCHOLES	39
5 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES POR MÉTODO DE MONTE-CARLO 43	
5.1 Algoritmo da simulação	45
5.2 Exemplo de precificação para uma <i>Put</i> européia por método de Monte Carlo	46
5.2.1 Técnica da variável antitética.	48
5.3 Cálculo da volatilidade a partir de dados históricos	49
5.4 Método de Monte Carlo aplicado a casos históricos	52
5.4.1 A contrapartida das opções de compra	54
III O AJUSTE LOG-PERIÓDICO APLICADO AO MÉTODO DE MONTE CARLO 55	
6 AJUSTE LOG-PERIÓDICO APLICADO AO MÉTODO DE MONTE- CARLO PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES	57
6.0.1 Mudanças no algoritmo do programa de precificação	61
6.1 Aplicação do método para o caso Bitcoin	61
6.1.1 Considerações sobre o novo método	65

Conclusão	67
REFERÊNCIAS	69
ANEXOS	71
ANEXO A – ALGORITMO DA PRECIFICAÇÃO POR MÉTODO DE MONTE CARLO	73

Introdução

Estudar a dinâmica de sistemas governados por comportamento econômico tem sido alvo de físicos por todo o mundo durante as últimas décadas. Apesar da complexidade dos movimentos nesses sistemas, que em geral pode ser atribuída pelo fato de que existem diversos agentes econômicos atuando, alguns conceitos e técnicas conhecidos da física estatística, e outros processos numéricos e computacionais, se apresentam como solução para entendermos melhor a dinâmica desses sistemas. Buscaremos analisar nesse trabalho um sistema econômico específico, caracterizado por dois momentos, o crescimento acelerado nos valores das ações e a queda abrupta desses valores. O crescimento desses valores é chamado bolha (bubble) e é definido pela diferença notável e substancial entre o preço de um ativo e seu valor subjacente. Essa definição em si é problemática por envolver o conceito de valor de um ativo, por esse motivo estamos focados em estudar na maior parte resultados quantitativos, com pouca profundidade nos aspectos conceituais.

Existem na história diversos episódios conhecidos de bolhas nos preços, porém, gostaríamos de destacar dois eventos importantes, a crise das tulípas no século XVII e a bolha da internet nos anos 90, essa última caracterizada pela especulação e alta nas ações referentes às tecnologias referentes a internet (dotcom bubble burst). Crises econômicas são acontecimentos dramáticos, e como conhecido da crise mundial de 2008, podem gerar consequências avassaladoras na saúde econômica mundial. Uma forma interessante de se proteger contra variações drásticas de preços dos ativos é investir em opções, contratos futuros e outros tipos de derivativos financeiros. Opções são em geral uma forma muito interessante para agentes garantir alguma segurança para seus ativos, além disso, esses derivativos podem ser facilmente negociados, assim como são negociadas as ações no mercado.

Este trabalho busca estudar como os preços de exercício de opções tendem a se distanciar dos valores das ações subjacentes quando tratamos de um sistema de bolha financeira. Estamos falando de um momento especial da história de uma ação, e os métodos de precificação de opções conhecidos não são desenvolvidos para corrigir essas grandes diferenças. Em geral, consideramos que nesses casos existem situações extremas de perdas e lucros. Usaremos o método do ajuste log-periódico para modelar o evento de *crash* para um conjunto de índices, e a partir disso, verificar como o preço dessas opções se comporta em relação ao valor da ação naquele momento. Serão também analisadas as flutuações nos preços das ações nesses períodos de bolhas e *crashes*, análises que são feitas a partir do estudo dos log-retornos das ações. Para a precificação das opções, analisaremos o

método de Black-Scholes, que usa a solução de uma equação diferencial como resposta para o preço dessas opções no tempo, e o método de Monte-Carlo, que consiste em uma simulação computacional. O trabalho também abordará uma espécie de "solução" para o caso de opções em mercados em bolha, utilizando uma correção no método de Monte Carlo que considera os ajustes feitos pela comportamento log-periódico.

Parte I

Um estudo sobre a dinâmica de mercados

1 Uma breve discussão sobre derivativos e a física aplicada a mercados financeiros

Com o passar dos anos, a dinâmica de mercados financeiros tem se tornado cada vez mais complexa, atraindo a atenção de profissionais que não necessariamente possuam uma formação específica na área de economia ou finanças. Estamos buscando acontecimentos que possuam alguma regularidade, ou padrões de comportamento que possam ser sistematizados e que seja possível usar alguns modelos para descrever esses fatos. Considerando a complexidade de sistemas onde as variáveis são, em sua maioria, descritas por comportamento humano, queremos nos focar em fazer apenas análises quantitativas, que possam gerar alguma resposta sobre os casos estudados.

Uma cadeia de objetos que se encaixam em nossa procura são os derivativos. Os derivativos são um instrumento financeiro em que seus preços dependem de uma ou mais variáveis ligadas a outros itens do mercado, em nosso caso, ações negociadas na bolsa de valores. Existem diversos tipos de derivativos, mas vamos nos ater às opções, cujo preço depende estritamente do preço das ações subjacentes.

1.1 Opções

As opções são um tipo de derivativo financeiro, e assim, possuem preços (prêmio) que derivam do preço de sua ação subjacente. No mercado de ações, uma opção poderia ser de certa forma comparada a uma apólice de seguros, ou a um sinal que é pago para garantir o direto da compra de um bem. Opções são negociadas na bolsa desde 1973 e cresceram significativamente em todo mundo, hoje existem opções para os mais diversos tipos de ativos, como por exemplo, ações, moedas, *commodities* e contratos futuros. As opções garantem ao comprador um direto, mas não a obrigação, de comprar uma ação por um determinado valor em algum tempo futuro. Para o ofertante de uma opção, existe uma obrigação de venda da ação pelo preço determinado. Podemos classificar as opções em dois tipos básicos. Uma opção de compra (call) garante a seu titular o direito de comprar o ativo subjacente a essa opção em certa data por um preço previamente determinado. Uma opção de venda (put) garante a seu titular o direito de vender o ativo subjacente em certa data por um preço previamente determinado.

O fato de que o comprador de uma opção não possui a obrigação de exercer esse contrato no dia do vencimento, torna o mercado de opções muito dinâmico e atrativo

para duas classes de investidores em especial, *hedgers* e especuladores. *Hedgers* buscam minimizar perdas e encontram em opções oportunidades para diminuirem seus riscos. Por exemplo, uma pessoa deseja comprar uma quantidade X de dólares em uma data futura determinada. Buscando se prevenir de um aumento na taxa de câmbio, ele adquire uma opção de compra que lhe garante o direito de comprar nesta data futura essa quantidade de dólares à taxa de câmbio atual. Diferente dos *hedgers*, especuladores buscam lucrar analisando os movimentos de alta e baixa nos preços das ações. Por exemplo, se comprarmos hoje uma opção de compra (call) que nos garanta o direito de exercer por um valor de $50u.m$ e a ação chegue a valer $60u.m$, estariamos comprando por um preço menor uma ação que vale mais. Por outro lado, se a ação passar a custar menos de $50u.m$, dizemos que nossa opção virou pó, pois não é desejável pagar mais por uma ação. O especulador busca estudar esses movimentos e conseguir espaço nesse mercado de ações. Em resumo, enquanto o comprador de uma opção de compra (call) espera que o preço dessa ação suba, o comprador de uma opção de venda (put) espera que ela caia.

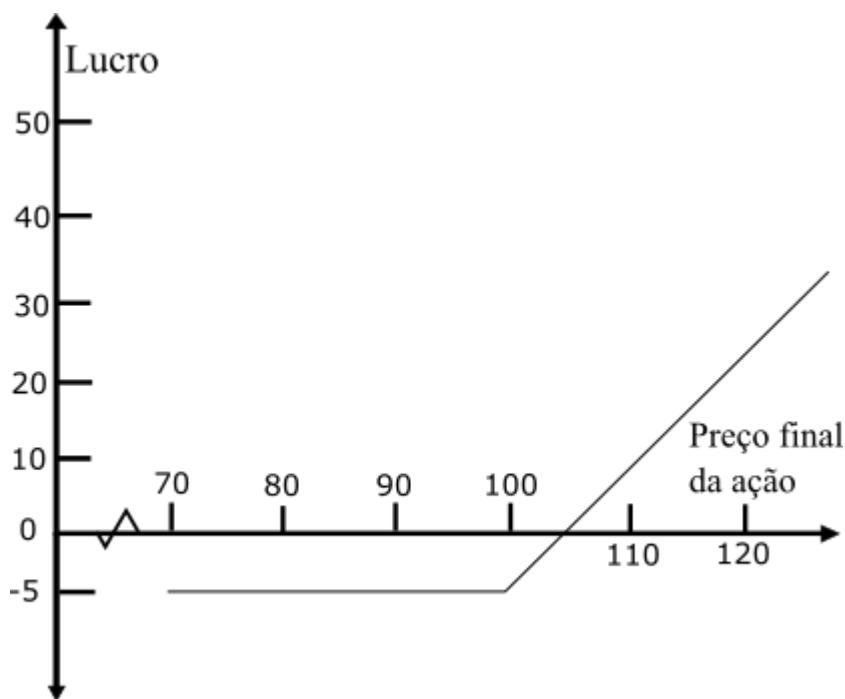


Figura 1 – Lucro resultante da aquisição de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

A outra ponta do contrato de opção está ligada ao agente econômico que oferta essa opção no mercado. Para o ofertante, há um comportamento especialmente diferente para os lucros resultantes no lançamento dessas opções. O detalhe que gostaríamos de destacar sobre os retornos das opções, é que há uma certa "assimetria" quando estamos tratando dessas opções em um cenário de desvalorização ou valorização acentuada dos preços das ações.

Uma das motivações de nosso trabalho consiste em perceber que o acontecimento

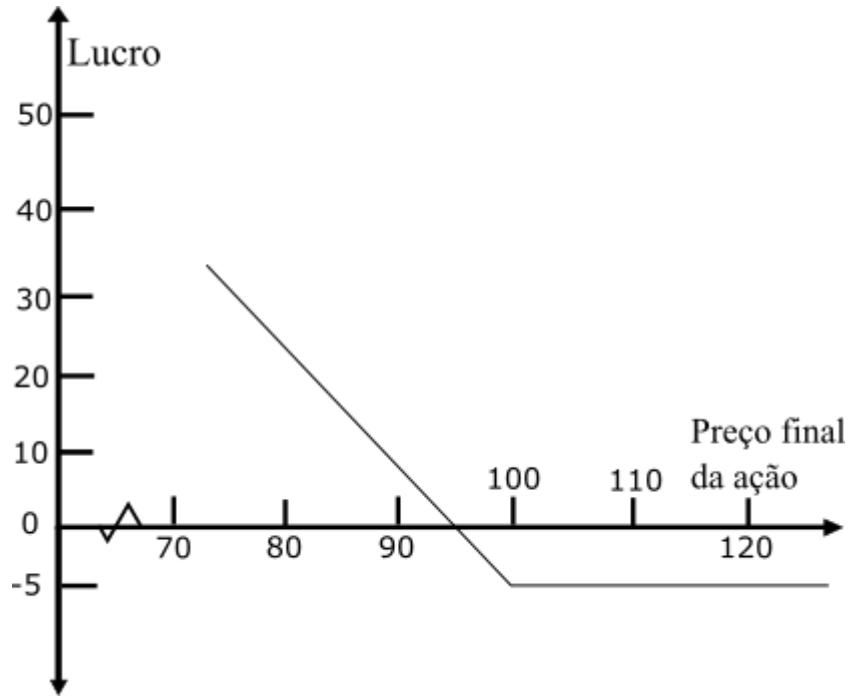


Figura 2 – Lucro resultante da aquisição de uma opção européia de venda. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

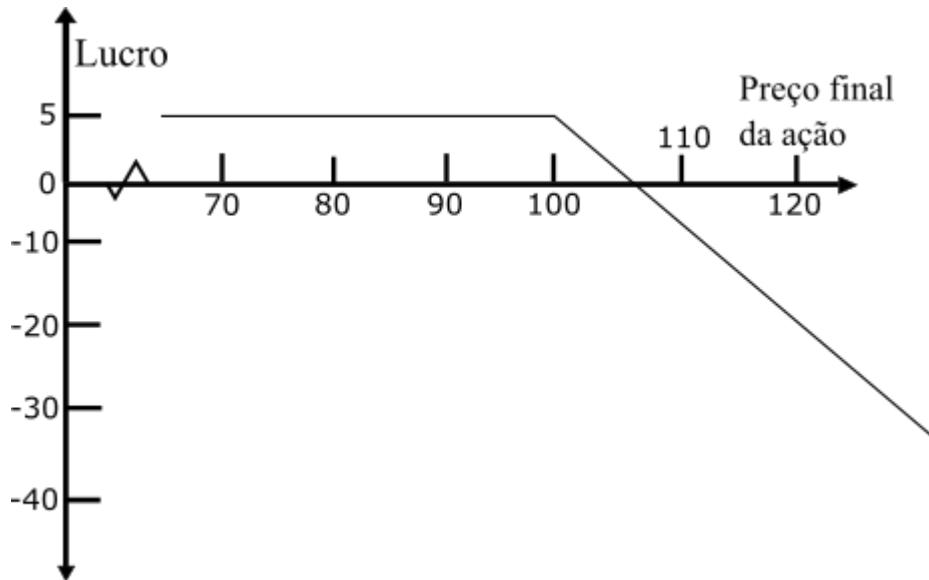


Figura 3 – Lucro resultante do lançamento de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

de uma crise financeira, quebra a condição de um "jogo justo", onde tanto o ofertante quanto o comprador da opção assumem os riscos das perdas e ganhos, e gera um cenário em que há um peso maior para uma das pontas dessa negociação.

Podemos reparar na figura 4 que o ofertante de uma opção européia de venda, começa a ter prejuízos crescentes quando há uma desvalorização do preço da ação subjacente.

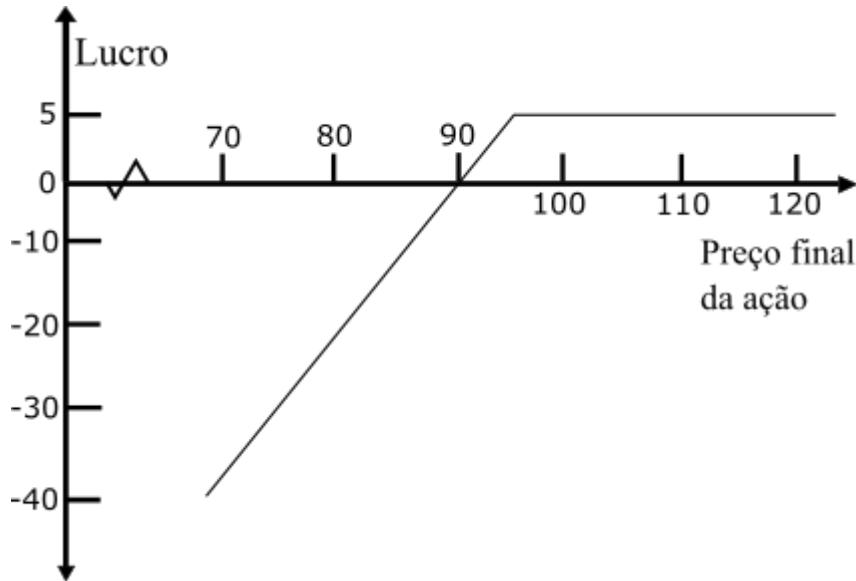


Figura 4 – Lucro resultante do lançamento de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 95.

cente. Em um cenário econômico geral, esses riscos são assumidos pelo ofertante. O caso de uma crise financeira, porém, gera um ambiente completamente diferente, pois durante um período de crise os preços tendem apenas a cair, e os prejuízos, que a pouco eram assumidos dentro de uma margem, agora tendem a se perpetuar (pelo menos no período de crise). Se compararmos as figuras 2 e 4 podemos perceber que há uma diferença substancial entre os prejuízos assumidos pelos agentes, o que faz sentido se compararmos a posição social-econômica entre eles. O comprador de uma opção pode ter uma prejuízo de no máximo o valor da opção, no caso em que a opção vire pó. Os prejuízos do ofertante escalam conforme a desvalorização da ação.

Vamos imaginar um simples caso:

Suponhamos que uma ação tenha seu preço elevado até um valor hipotético de 100. Essa elevação dos preços ocorreu a partir de uma bolha especulativa, ou seja, preço dessa ação não corresponde ao valor real desse ativo financeiro. Vamos supor que o valor de 100 corresponda ao pico do valor que essa ação alcançará. Agora, são ofertadas algumas opções européias de venda, com strike de 110, ou seja, o comprador dessa opção terá o direito de vender no dia do vencimento a ação subjacente pelo preço de 110. Porém, há agora uma quebra dessa bolsa e num curto espaço de tempo os preços dessa ação caem drasticamente e passam a valer 65. Para o comprador da opção essa situação é excelente, porém, o ofertante terá que arcar com os prejuízos, que são mais altos do que o previsto. Não iremos discutir as consequências econômicas do caso acima, porém, acreditamos que os lucros elevados que podem ser gerados durante o período de uma bolha econômica

colaboram ainda mais para a elevação especulativa do preço de um ativo. Podemos dizer que de alguma maneira, uma bolha econômica tende a ser "alimentada" pelo objetivo claro dos agentes, que é de obter lucros cada vez maiores.

1.2 Crises financeiras e a log-periodicidade

As crises financeiras são fenômenos antigos na história econômica mundial, sendo eventos fascinantes para profissionais e acadêmicos das mais diversas áreas. Assim como as catástrofes naturais, epidemias, engarrafamentos em larga escala e outros eventos da vida humana, as crises financeiras possuem uma característica trágica. Em geral, qualquer tentativa de descrever os motivos que levam à quebra de um mercado levam a respostas inconclusivas, porém, a imprevisibilidade desses sistemas dá a eles valor quanto sistemas complexos. No livro ([ROUBINI; MIHM, 2010](#)), o autor descreve que ainda em 2006 o professor Nouriel Roubini já fazia previsões alarmantes, e bastante claras, sobre o futuro da economia americana. Uma bolha especulativa estava claramente formada, e economistas alegavam que na verdade não havia nem uma bolha, o crescimento nos preços dos imóveis eram concretos. O professor Roubini descreveu um cenário ainda mais aterrador: quando os compradores das casas se tornassem inadimplentes, todo o sistema financeiro global pararia de funcionar. Os cenários previstos por Roubini se confirmaram um a um, mostrando que as crises econômicas podem ser de alguma forma previstas, pois todas elas se constróem, em alguma maneira, de forma parecida. O roteiro para uma crise parece sempre tomar um caminho comum: investimentos que se dizem seguros, bens que jamais desvalorizam, garantia de lucro. Além disso, toda essa especulação, geralmente segue acompanhada da fácil obtenção de crédito, e baixas taxas de juros, incentivando ainda mais os agentes a investirem nesses "negócios sem risco".

Pesquisas importantes sugerem que os eventos descritos acima possuem algumas características similares quando próximos de situações extremas, para o nosso caso, queremos estudar principalmente a ocorrência da log-periodicidade ([SORNETTE, 2003](#)) e ([JULIAO et al., 2008](#)).

A log-periodicidade indica uma função que possua em sua estrutura uma expressão da forma:

$$y = \cos(\ln(x)) \quad (1.1)$$

Observando esse comportamento log-periódico, *Sornette* começou a analisar que essa estrutura fazia parte de diversos fenômenos que levassem a alguma ruptura, como se

essa descrição matemática expressasse um comportamento coletivo dos agentes envolvidos. De forma geral, uma quebra é caracterizada por uma grande quantidade de agentes requisitando ordens de venda simultaneamente. Esses agentes tipicamente não se conhecem e não programam essas vendas generalizadas, que reduzem drasticamente o preço de uma ação. Além disso, para Sornette, ao se construir um modelo para a quebra de bolsas, as seguintes características devem ser consideradas:

- Um sistema de investidores que são influenciados por seus vizinhos;
- Imitação local que se propaga espontaneamente na cooperação global;
- Cooperação global entre os investidores que causam uma quebra;
- Os preços relacionam-se com as propriedades do sistema;
- Os parâmetros do sistema evoluem lentamente com o tempo;

Usaremos esses conceitos para fundamentar nossa escolha pelo ajuste log-periódico, que será discutido posteriormente.

2 Ações e índices estudados

As análises que serão realizadas nesse capítulo são baseadas em exemplos presentes no livro ([CHATTERJEE; CHAKRABARTI, 2006](#)). Selecionamos em nosso trabalho, um conjunto de quatro títulos da bolsa, sendo eles, uma ação e três índices de ações. Os títulos são:

- Bitcoin USD (BTC-USD)
- Nikkei 225 (N225)
- S&P 500 (GSPC)
- NASDAQ (IXIC)

Por que estudar índices?

Bem, os índices representam uma espécie de média geral para o comportamento do conjunto de ações que o compõe. Os índices não podem ser negociados como ativos num mercado, porém, por representarem essa média, podemos usá-los para entender o setor como um todo e realizar uma série de simulações. No caso da ação do Bitcoin, fizemos a escolha por considerar que esse título se comportou ao longo do tempo de uma maneira bastante curiosa, com sua bolha e quebra bastante acentuadas, e que ocorreram em um período de tempo curto. A tabela 1 apresenta os títulos estudados e os períodos em que ocorreram a bolha financeira e a crise.

Título	Período de Bolha	Período de Crise
Bitcoin	07/09/2017 - 16/12/2017	16/12/2017 - 10/04/2018
Nikkei 225	15/01/1984 - 24/12/1989	31/12/1989 - 29/08/2004
NASDAQ	01/06/1995 - 26/03/2000	02/04/2000 - 30/03/2003
S&P500	01/03/2004 - 07/10/2007	14/10/2007 - 31/05/2009

Tabela 1 – Períodos de bolha e crise para os títulos estudados.

As figuras abaixo ilustram os períodos citados e o comportamento desses títulos no tempo. Vemos que as imagens descrevem graficamente os fenômenos que discutimos até aqui, preços de ações que crescem e caem substancialmente. Além disso, algumas análises podem ser feitas se analisarmos os log-retornos absolutos normalizados dessas ações.

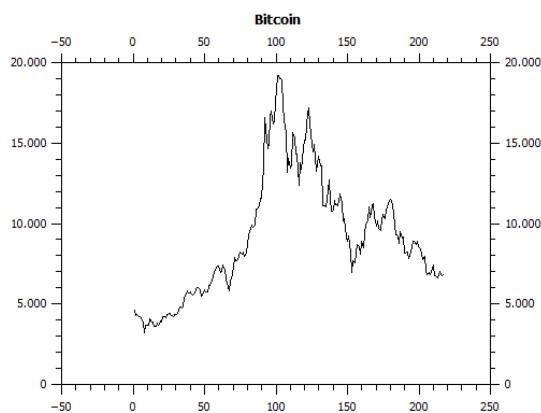


Figura 5 – Bitcoin

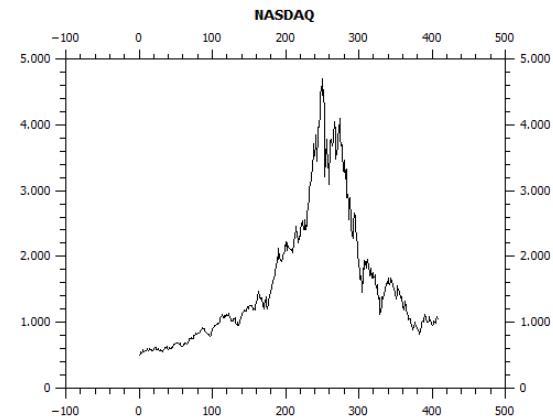


Figura 6 – NASDAQ

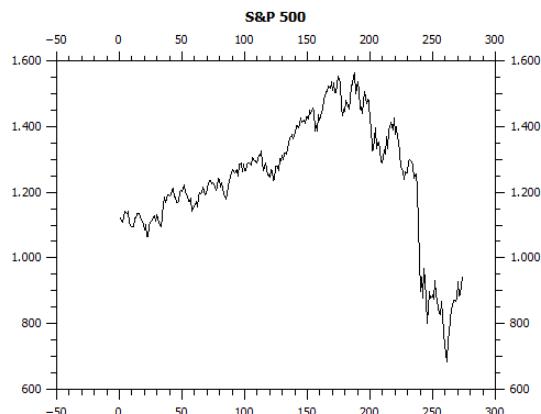


Figura 7 – S&P500

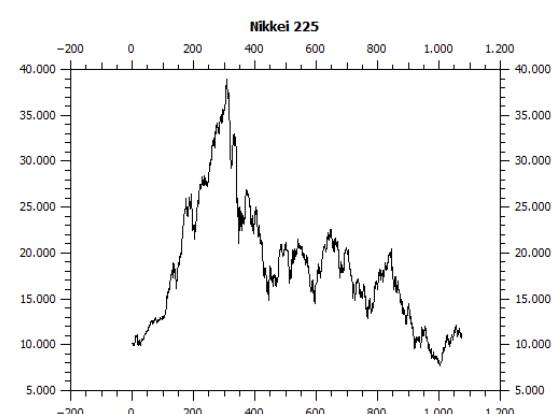


Figura 8 – Nikkei 255

A análise que será feita consiste em observar a probabilidade de encontrarmos um valor maior que um número x do log-retorno absoluto normalizado. Essa probabilidade é dada pela expressão $P(V > x)$. Buscamos verificar a probabilidade de encontrar valores mais altos para os log-retornos absolutos, para os dois períodos das ações estudadas. Em uma síntese, o retorno de uma ação é a medida da variação do preço ativo num intervalo de tempo.

Se dividirmos os intervalos de tempo em espaços discretos (dias, semanas ou meses), podemos expressar o log-retorno absoluto como sendo:

$$|R(t)| = |\ln(S(t)) - \ln(S(t-1))| \quad (2.1)$$

Onde $S(t)$ representa o preço da ação no tempo. Queremos encontrar a função $V(t)$, dada por:

$$V(t) = \frac{|R(t)|}{\sigma} \quad (2.2)$$

Sendo σ o desvio padrão de $|R(t)|$. Vamos então plotar um gráfico no formato semi-log para $P(V(t) > x)$ em função do valor x .

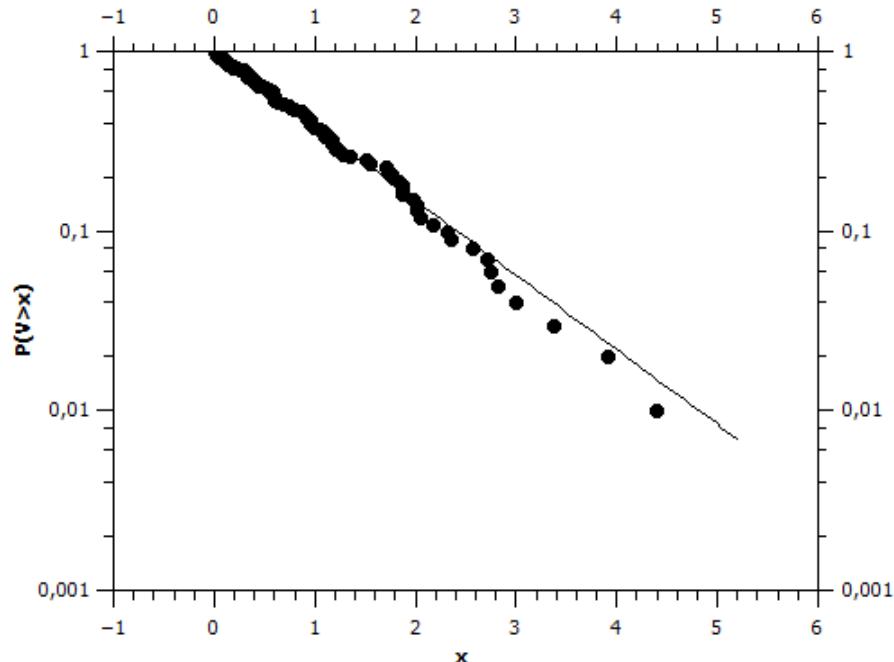


Figura 9 – Probabilidades para a ação Bitcoin no período de bolha.

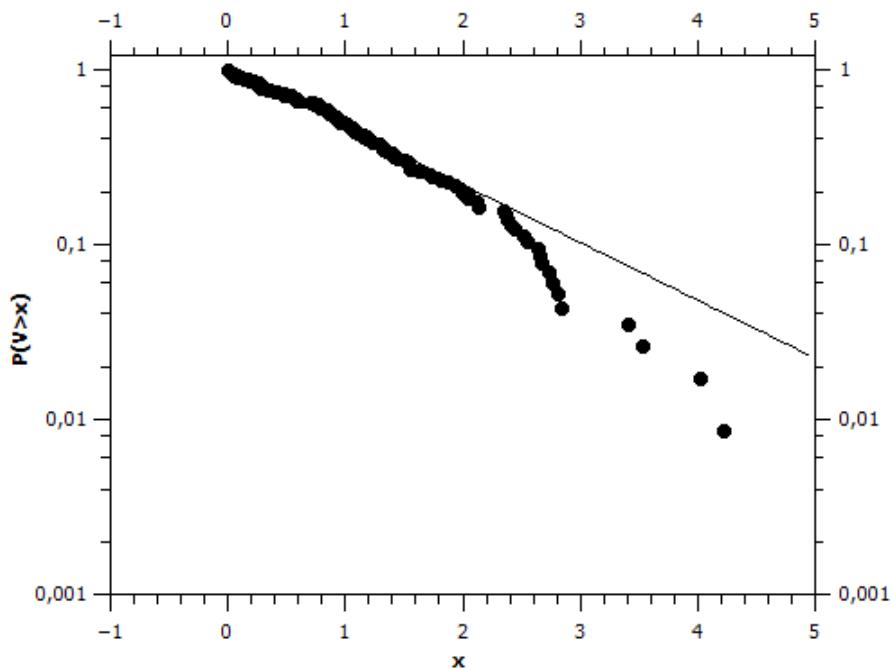


Figura 10 – Probabilidades para a ação Bitcoin no período de crise.

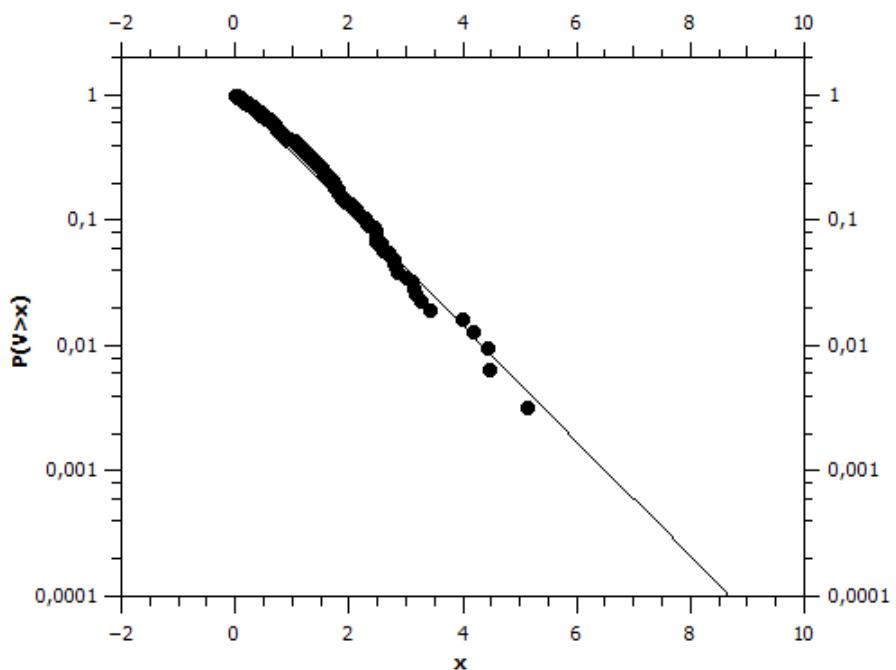


Figura 11 – Probabilidades para o índice Nikkei 225 no período de bolha.

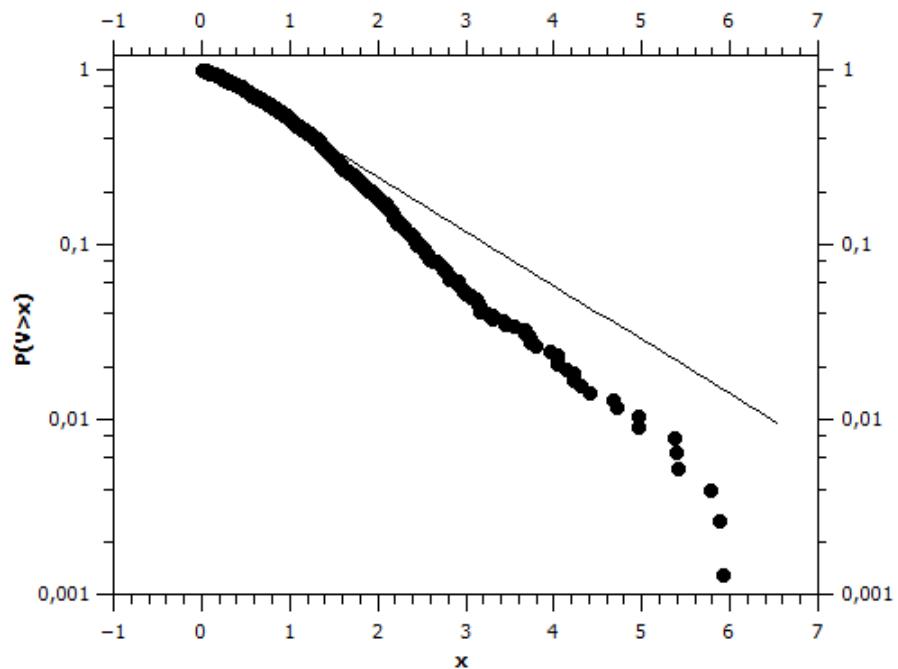


Figura 12 – Probabilidades para o índice Nikkei 225 no período de crise.

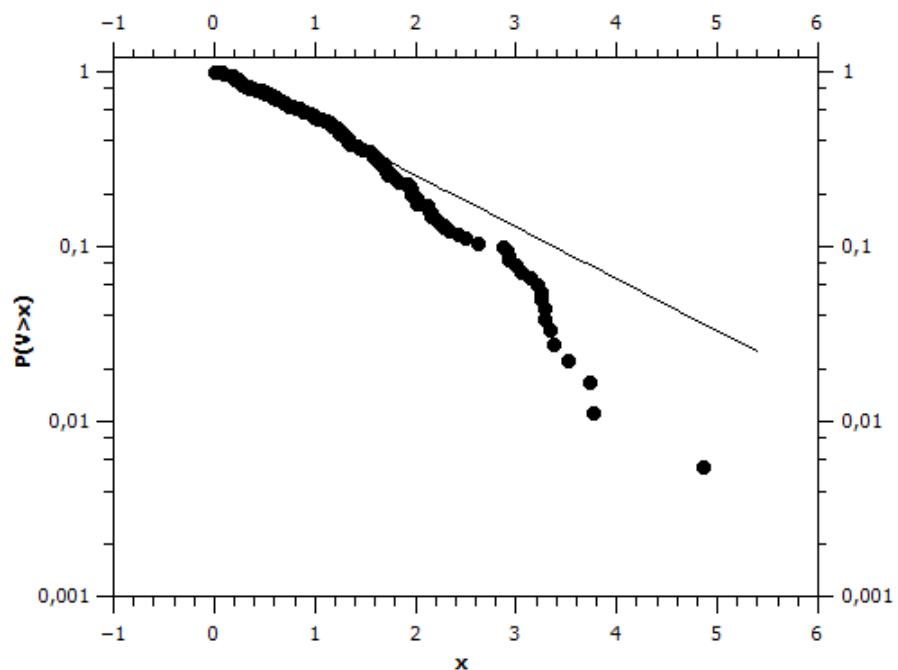


Figura 13 – Probabilidades para o índice S&P500 no período de bolha.

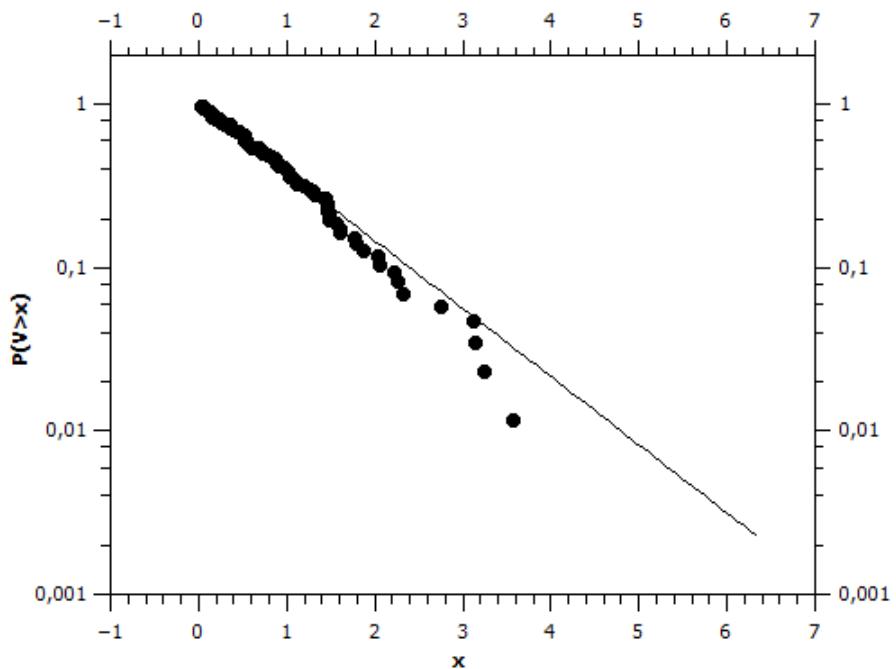


Figura 14 – Probabilidades para o índice S&P500 no período de crise.

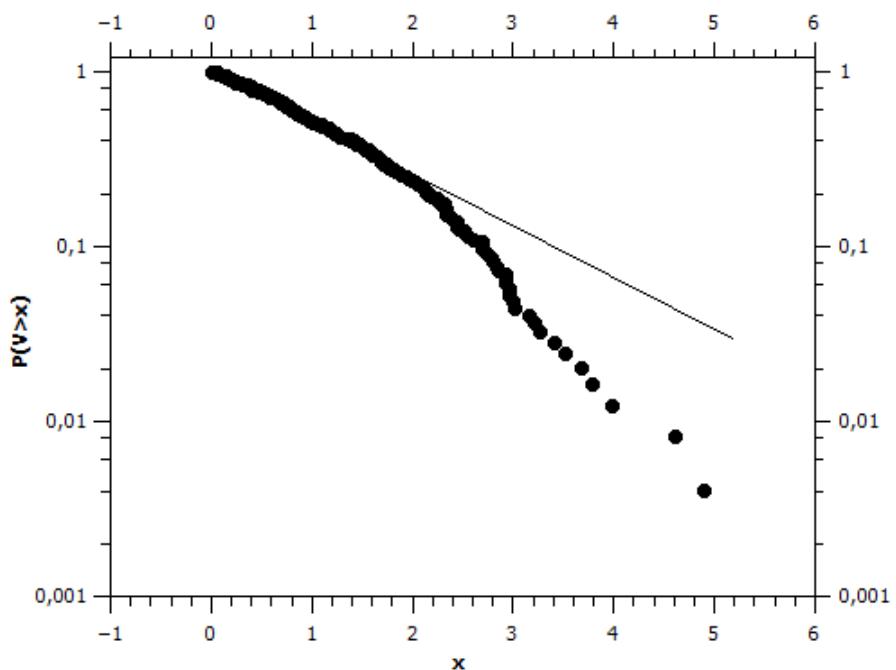


Figura 15 – Probabilidades para o índice NASDAQ no período de bolha.

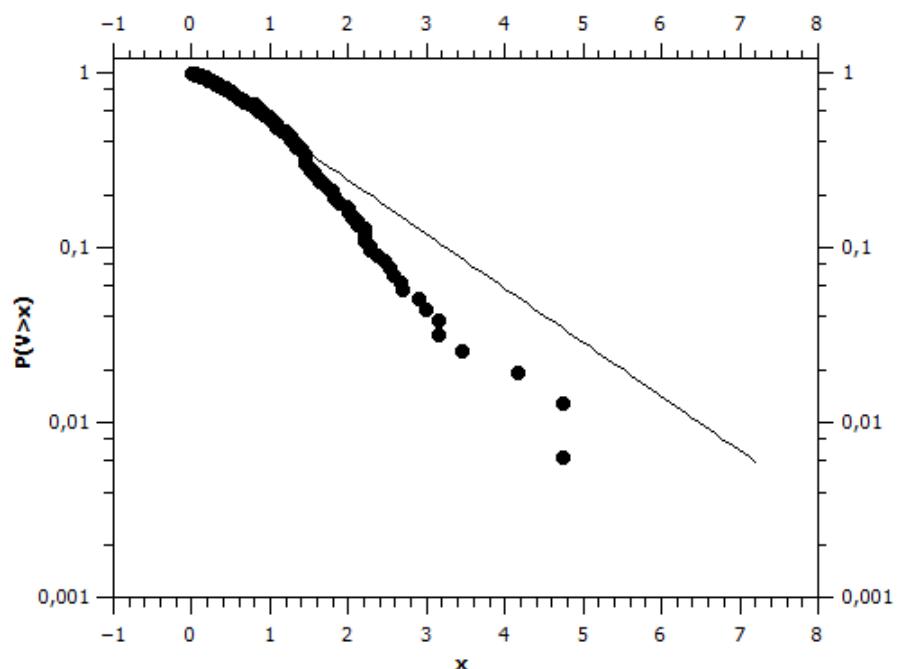


Figura 16 – Probabilidades para o índice NASDAQ no período de crise.

Os ajustes presentes nas figuras 9-16 são da forma:

$$P(V > x) = \exp(-ax) \quad (2.3)$$

Os coeficientes "a" dos ajustes estão presentes na tabela 2.

Título	Período de Bolha	Período de Crise
Bitcoin	0.95	0.76
Nikkei 225	1.05	0.71
S&P	0.68	0.96
NASDAQ	0.67	0.71

Tabela 2 – Parâmetros dos ajustes para os gráficos 9-16.

Usando como exemplo o caso Bitcoin, podemos perceber que o coeficiente para o período de bolha é maior do que para o período de crise. Esse detalhe representa o fato de que para esse caso, há uma possibilidade maior de se encontrar log-retornos absolutos mais elevados na crise. Em resumo, para o caso Bitcoin, no período de crise as variações do preço das ações foram mais severas. A figura 17 ilustra essa ideia. A ideia análoga se aplica aos outros índices no qual foram feitas as análises.

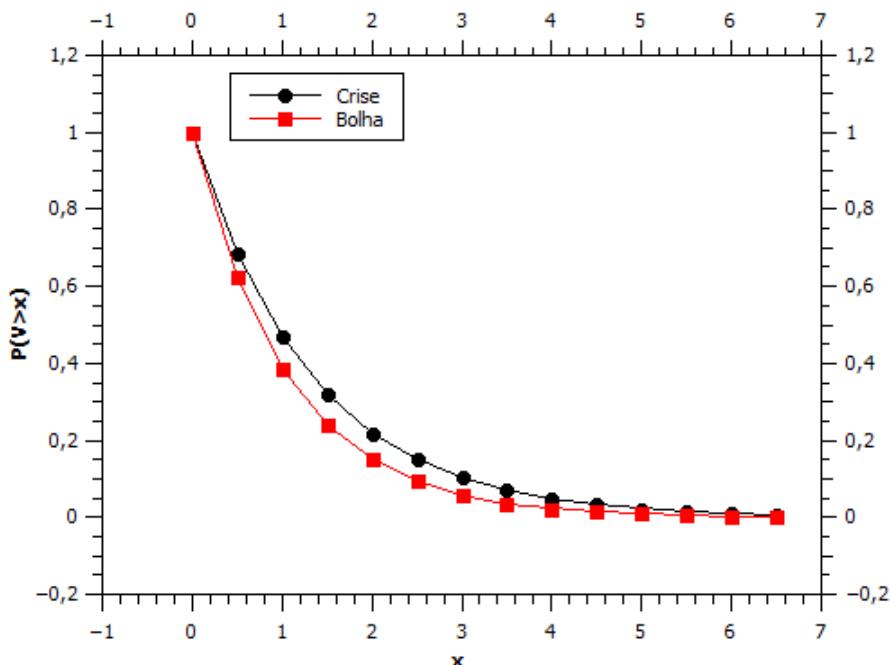


Figura 17 – Comparação das distribuições $P(V > x)$ para os períodos de bolha e crise no caso Bitcoin.

Ao iniciarmos a análise dos log-retornos, havia uma estimativa de que houvesse um padrão para os parâmetros quando comparados entre períodos de bolha e crise. Seguindo a lógica de nossas análises, curvas que possuam parâmetros maiores caem mais

rápido, assim, há uma probabilidade menor da incidência de um valor x do que numa curva que apresente um valor menor para a . A expectativa de que um padrão fosse observado surgia de nosso interesse em criar algum modelo mais simples para nossas análises, **isso porém não pode ser percebido**. No livro ([CHATTERJEE; CHAKRABARTI, 2006](#)) é estudada a hipótese de que o ajuste da forma $\exp(-ax)$ pode não ser adequado em todos os casos, e um ajuste da forma x^{-a} seria mais indicado para os períodos de bolha.

Os períodos de crise geram situações dramáticas, que podem criar problemas em setores muito amplos da economia. O índice S&P500, apresentado na figura 6, está relacionado à crise financeira de 2008, conhecida pela bolha especulativa imobiliária. Essa crise abalou o mundo e deixou algumas marcas que duram até os dias de hoje. Entendendo a importância de se evitar essas crises, pesquisadores buscam criar modelos que ajudem a prever as crises e evitar essas situações de desequilíbrio do mercado. Vamos estudar um desses modelos, conhecido como ajuste Log-Periódico.

3 O ajuste Log-Periódico

Seguindo a discussão apresentada anteriormente sobre o comportamento log-periódico, buscaremos ajustar nossos sistemas econômicos a partir de uma lei de potências, que é descrita da forma:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^z + C(t_c - t)^z \cos(\omega \cdot \log(t_c - t) + \Phi) \quad (3.1)$$

Nesse ajuste, t_c expressa o tempo mais provável para a quebra (fator que assume em si mesmo uma margem de erro), z controla o crescimento exponencial, ω controla a amplitude das oscilações e os parâmetros A , B , C e Φ , servem para ajustar a função e não possuem um significado relevante explícito. A lei de potências log-periódica é utilizada para diversas análises, incluindo a previsão de crises financeiras ([JACOBSSON, 2009](#)). Em nosso trabalho, vamos utilizar essa expressão para ajustar o comportamento temporal das ações escolhidas.

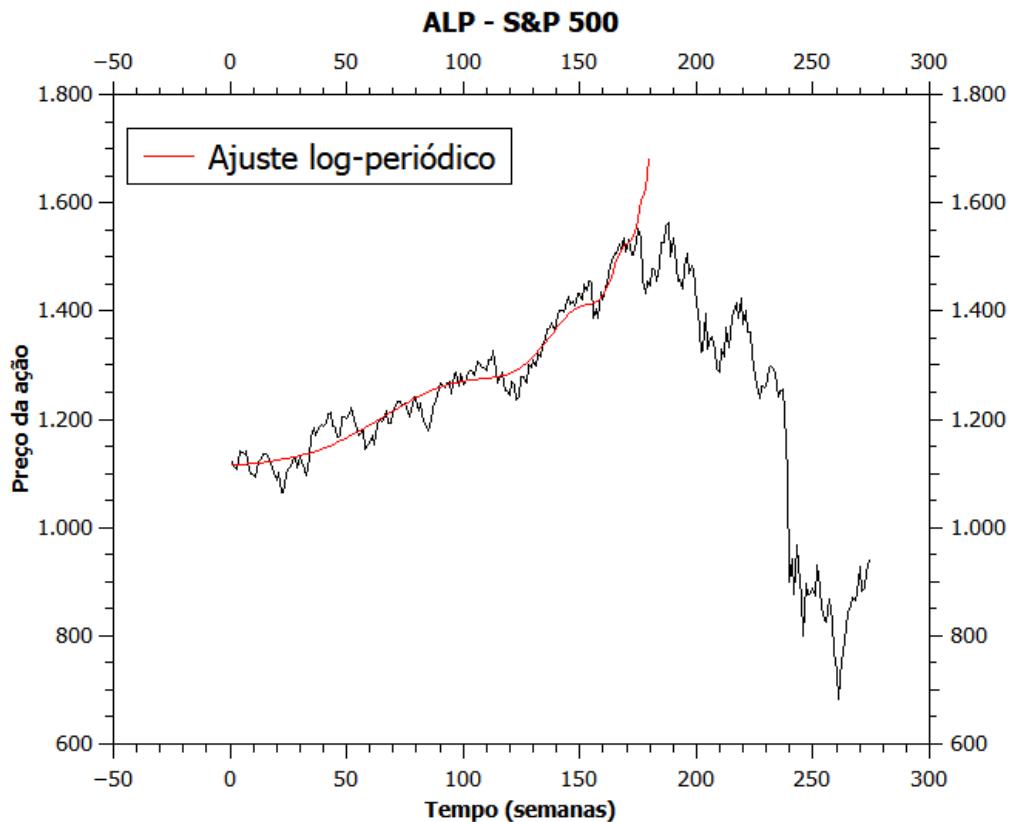


Figura 18 – Ajuste log-periódico para o índice S&P500.

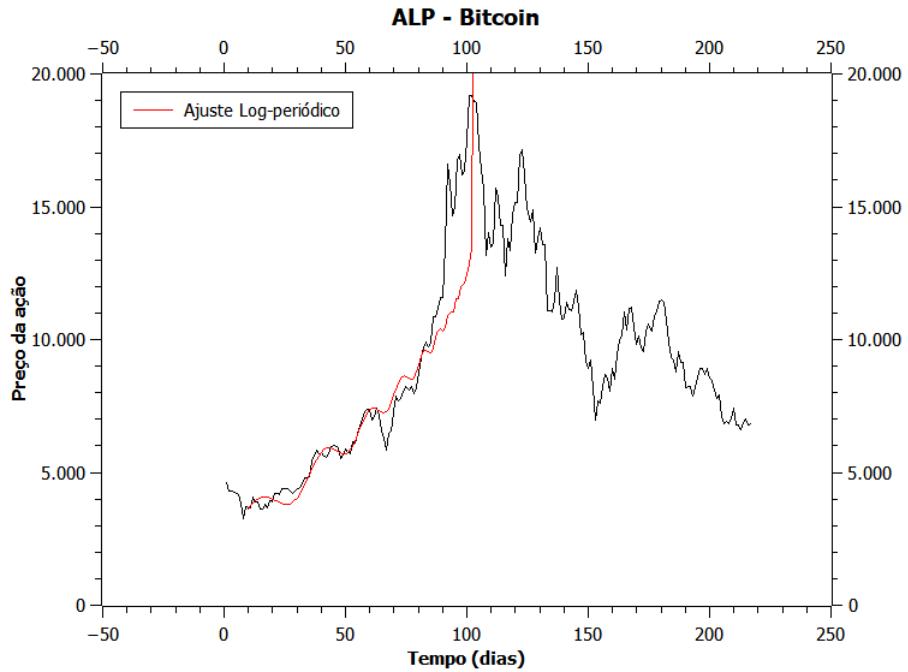


Figura 19 – Ajuste log-periódico para a ação Bitcoin.

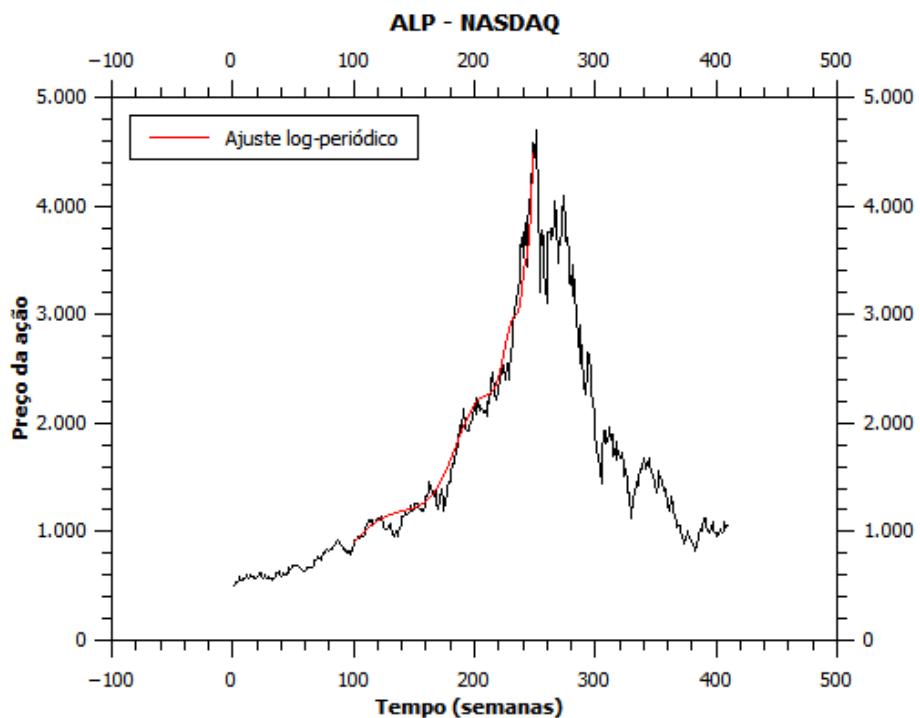


Figura 20 – Ajuste log-periódico para o índice NASDAQ.

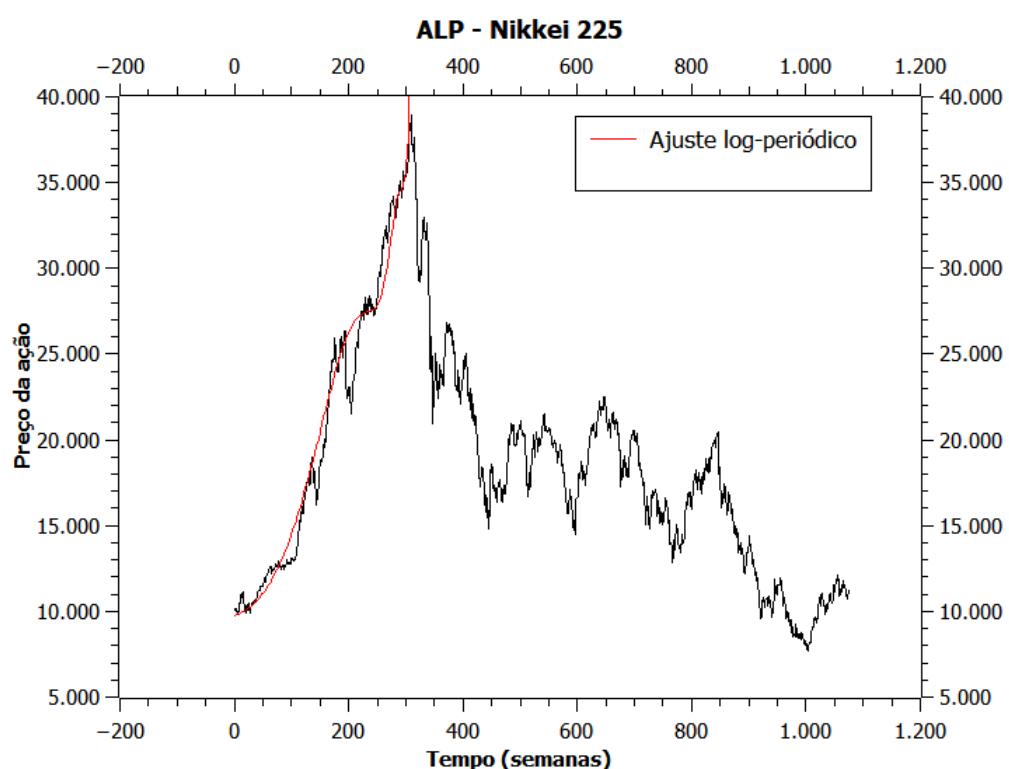


Figura 21 – Ajuste log-periódico para o índice Nikkei 225.

Os parâmetros dos ajustes estão descritos na tabela abaixo.

	Bitcoin	NASDAQ	Nikkei 225	S&P500
A	13.865	4.806	39.200	2.177
B	-818,5	-722,9	-897	-425,8
C	46,8	31,3	118,4	9,08
t_c	102,5	248,4	307,9	182,3
Φ	-1,2	5,6	-6,3	1,14
z	0,568	0,345	0,6	0,17
ω	39,3	-14,4	9,3	15,3

Tabela 3 – Parâmetros dos ajustes log-periódicos para os índices estudados.

Foi possível perceber durante a realização deste trabalho que o ajuste funcionou bem para a maioria dos índices, apresentando alguns problemas apenas para os dados históricos da ação Bitcoin. A consideração que pode ser feita sobre o caso, é de que essa ação apresentou um comportamento acima do que é esperado, até mesmo para a previsão da log-periodicidade. Essa ação, em um dado momento, começou a crescer de maneira tão acentuada, que até mesmo o ajuste log-periódico não conseguiu prever e ajustar esse crescimento. Além disso, como foi apresentado no *capítulo 1*, o modelo estudado aqui prevê que os parâmetros do sistema evoluem lentamente com o tempo, diferentemente do caso Bitcoin, onde as variações ocorreram em um curto espaço de tempo.

Em geral, foi possível fazer boa utilização do ajuste, e iremos utilizar os parâmetros obtidos para realizar algumas simulações computacionais mais a frente. Vamos discutir um pouco sobre como vamos utilizar essas curvas nas análises que serão feitas para as opções.

3.0.1 Aplicação do ajuste log-periódico à precificação de opções

Separamos esse tópico para discutir os processos que serão feitos posteriormente. Considerando que o ajuste log-periódico nos permite realizar diversos procedimentos, inclusive a previsão da quebra de uma bolsa, queremos utilizar essa curva em conjunto ao método numérico de precificação de opções, que será apresentado a frente. A ideia consiste em modelar o comportamento do mercado, de forma que ele ainda possa oscilar livremente, mas sempre tendendo a se comportar com uma log-periodicidade. Assim, queremos que a função log-periódica ajustada funcione como um peso para os valores das ações no tempo. As ações ainda podem flutuar livremente, mas sempre vão tender a caminhar para o valor estimado no ajuste log-periódico. Antes de realizarmos os procedimentos numéricos e computacionais, vamos apresentar a mais conhecida solução para a precificação, que consiste na solução de uma equação diferencial estatística.

Parte II

Métodos de precificação de opções

4 Método de Black-Scholes

A fórmula de Black-Scholes é um dos métodos mais utilizados (se não o mais utilizado) para a precificação de opções. Por ser gerar uma solução explícita, a adaptação dessa solução para os mais diversos tipos de usos é bastante adequada. Diversos softwares possuem pacotes prontos para a utilização dessa expressão, reduzindo a necessidade de se apelar para métodos numéricos, como o de Monte-Carlo. O comportamento dos preços das ações geralmente são expressos por processos de *Wiener*, ou como conhecemos na física, movimentos *brownianos*. Um processo de *Wiener* é um tipo específico do processo estocástico de Markov. Um processo de Markov é um processo estocástico onde apenas o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, ou seja, o histórico dessa variável é irrelevante ([VASCONCELOS, 2004](#)), ([HULL, 2016](#)).

Como o preço da opção é uma função do preço da ação subjacente e do tempo, podemos então considerar que esse é uma função de variáveis estocásticas. Um importante resultado envolvendo variáveis estocásticas é conhecido como *lema de Itô*. Suponhamos que o valor de uma variável x siga o chamado processo de *Itô*:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (4.1)$$

onde dz é o processo de Wiener. O lema de Itô diz que uma função G , de x e t , segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz \quad (4.2)$$

Queremos porém descrever não uma variável x qualquer no processo de Itô, mas uma variável S , que representa o preço da ação subjacente. A adaptação feita na equação [4.1](#) é da forma:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (4.3)$$

Na equação [4.3](#), μ representa a taxa de desvio e σ representa a volatilidade histórica da ação. A partir das equações [4.2](#) e [4.3](#) temos:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (4.4)$$

O próximo passo é escolher uma carteira adequada para a ação e o derivativo, de forma em que possamos eliminar a risco gerado pelo processo de Wiener. Aqui a aleatóriedade desse processo de Wiener é o que gera risco para nossa carteira. Vamos estabelecer o valor da carteira como:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (4.5)$$

Uma mudança diferencial discreta na equação 4.5 em um instante Δt é dada por:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (4.6)$$

O passo a seguir é bastante importante. Vamos tomar a forma diferencial discreta da equação 4.4 juntamente com a equação 4.3, e substituir ambas na equação 4.6. O resultado dessa substituição é:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (4.7)$$

Podemos perceber que essa equação não envolve o processo de Wiener Δz , assim, durante um intervalo de tempo Δt a carteira escolhida não deve apresentar riscos. A partir de premissas econômicas, que envolvem basicamente reduzir a chance de especuladores lucrar sem riscos, podemos apresentar a seguinte relação para nossa carteira:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (4.8)$$

onde r é a taxa de juros livre de risco. Substituindo-a nas equações 4.5 e 4.7, vamos obter:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t \quad (4.9)$$

Ordenando os temos chegamos à:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (4.10)$$

A equação 4.10 é a equação diferencial de Black e Scholes. As soluções para essa equação são diversas, e olhando de forma matemática, o derivativo que é obtido quando resolvemos a equação é caracterizado pelas condições de contorno aplicadas. Nesse trabalho queremos estudar apenas as opções européias de venda. As opções de compra também

podem ser obtidas a partir da paridade entre *puts* e *calls*. O resultado encontrado para a precificação de uma ação européia de venda é:

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (4.11)$$

Na expressão 4.11, $N(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável com média zero e desvio padrão 1.

As variáveis d_1 e d_2 são descritas por:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (4.12)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (4.13)$$

Na equação 4.11 existe uma dificuldade no cálculo da função distribuição normal acumulada. Existem tabelas que dão esses valores e também procedimentos numéricos que podem ser utilizados para fazer esses cálculos. Além disso, o fator σ que está relacionado aos dados históricos dos preços da ação subjacente. Apesar disso, como dito anteriormente, diversos softwares modernos possuem pacotes prontos para realizar a precificação. Contudo, uma fórmula explícita para a precificação não atende às expectativas desse trabalho, sendo assim, iremos trabalhar com métodos numéricos (DYMOCHKIN et al., 2018).

Queremos adaptar um método computacional já conhecido para que a precificação seja mais adequada com o valor de uma ação que segue um comportamento log-periódico.

5 Precificação de opções por método de Monte-Carlo

Com o avanço da tecnologia, os métodos computacionais para a realização de diversos cálculos relacionados ao cenário financeiro, devido ao aumento da eficiência e velocidade na obtenção desses dados. Um ponto importante sobre esses métodos numéricos é a flexibilidade de serem feitas modificações e implementações. O método de Monte Carlo se mostra uma escolha adequada para trabalharmos a precificação das opções que estamos tratando nesse trabalho, e o método é caracterizado principalmente pela dependência do caminho que a precificação toma, considerando que as simulações são baseadas unicamente em *payoffs* hipotéticos, cujo comportamento segue um padrão estocástico, conhecido na física em diversas outras aplicações. (CRACK, 2009), (BOYLE; BROADIE; GLASSERMAN, 1997).

Vamos iniciar nossa discussão apresentando o método e como foi desenvolvido o programa para avaliarmos a precificação das opções.

A lei dos grandes números, que é um teorema fundamental da probabilidade, nos diz que se há uma amostra $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ onde cada um dos números é uma medida independente e com o valor estimado de X_i sendo dado por:

$$E(X_i) = \mu \quad (5.1)$$

para cada i , onde μ é um número finito, podemos então definir:

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad (5.2)$$

com $n \rightarrow \infty$.

A ideia básica do nosso programa consiste em criar diversas simulações para um valor de payoff $V(T)$ onde T é a data do vencimento da opção. O fator estocástico é responsável pela dinâmica aleatória da nossa simulação, buscando gerar o caso mais próximo possível da realidade.

Nossa equação básica para a valoração das opções pode ser descrita por:

$$V(t) = e^{-r(T-t)} E_t^*[V(T)] \quad (5.3)$$

Essa expressão representa o valor esperado para o *payoff* em um cenário de risco neutro. Nesse caso, fazendo uma analogia com o que foi apresentado anteriormente, nossa variável aleatória nesse caso é o valor final do payoff da opção $V(T)$. Vamos estimar o valor médio de $V(T)$ pelo método de Monte Carlo.

A ideia é utilizar o método para computar diversos caminhos possíveis. Calculamos um primeiro caminho que gere um payoff, chamamos então de $V(T)_1$. Depois, calculamos outro caminho possível que gere um outro payoff $V(T)_2$. Vamos fazendo simulações de caminhos possíveis até que seja gerado um payoff $V(T)_n$, que gere uma média:

$$\overline{V(t)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(T)_i \quad (5.4)$$

A equação 5.4 tende a $E_t^*[V(T)]$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Nosso valor estimado para o preço da opção é então definido como:

$$\widehat{V(t)} \equiv e^{-r(T-t)} \overline{V(t)} \equiv e^{-r(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(T)_i \quad (5.5)$$

Contudo, não tratamos ainda de como é definida a expressão que gera as simulações $V(T)_i$. Assim como no caso do método de Black-Scholes, quando trabalhamos com Monte Carlo, também temos uma expressão bem definida que é responsável por toda a dinâmica da nossa precificação.

A expressão responsável por caracterizar nosso algoritmo é:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\Delta t) + \sigma \sqrt{(\Delta t)} \epsilon_{j+1}]} \quad (5.6)$$

Dividimos o nosso intervalo em espaços de tempo igualmente divididos, onde Δt é igual a $\frac{1}{365}$. Definimos um valor inicial para a ação, da forma $S(t_0)$. Cada simulação gera um caminho de payoff $V(T)_i$ onde:

$$V(T)_i = \max(stk - S(T_J)_i, 0) \quad (5.7)$$

Aqui, J representa o número de dias até o vencimento da opção e stk é o valor de strike na data do vencimento. A média dos payoffs $V(T)_i$ converge para o valor esperado

para o preço da opção pelo método de Black-Scholes ao passo que o número de simulações n aumenta. É parte fundamental de nosso trabalho verificar a precisão do método computacional em relação ao método analítico de Black-Scholes, contudo, vamos antes explicar como funciona o algoritmo que especifica a opção.

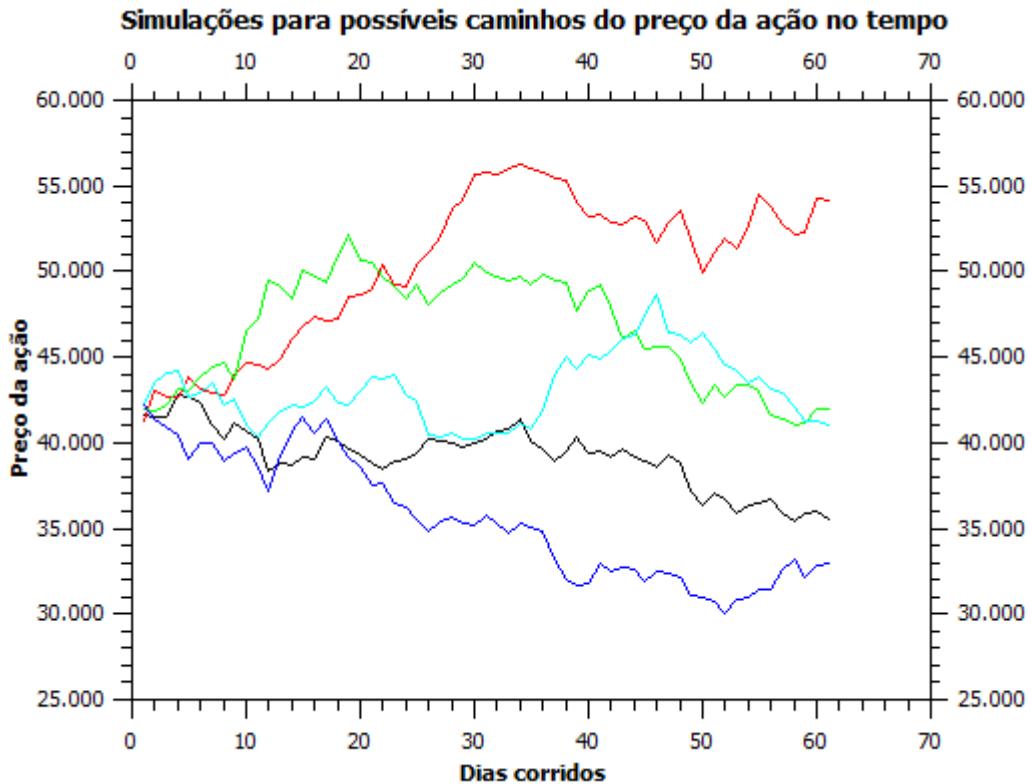


Figura 22 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo. O programa realiza um número elevado dessas simulações para chegarmos ao valor final da precificação.

5.1 Algoritmo da simulação

Considerando o que já foi falado anteriormente, vamos apresentar uma síntese do funcionamento do programa de precificação de opções. Ao criamos o programa, definimos inicialmente a leitura dos valores fundamentais para a simulação, como valor do strike no vencimento, valor inicial da ação, taxa de juros da economia, volatilidade da ação e número de dias para o vencimento. Ao definirmos esses parâmetros, aplicamos esses valores na equação 5.6, fazendo o parâmetro j variar de 0 até $J - 1$. Ao fim, quando chegamos a $S(t_J)$, ou seja, o valor simulado do preço da ação no vencimento, simulamos então o payoff apresentado em 5.7 e guardamos este valor. Repetimos este processo n vezes, compreendendo que a estimativa se torna mais precisa quando maior o número n . A média das n simulações tende a convergir ao valor esperado para o preço da opção conforme n tende a ∞ .

5.2 Exemplo de precificação para uma *Put* européia por método de Monte Carlo

Baseado no exemplo apresentado no livro ([CRACK, 2009](#)), vamos fazer uma simulação para os seguintes valores:

λ	\$45
S_0	\$41.75
σ	0.34
r	5.35%
J	61 Dias

Tabela 4 – Parâmetros usados na precificação.

Aqui, λ representa o valor do strike no vencimento, S_0 o valor da ação na data inicial e r a taxa de juros com o que funciona a economia. Usando esses valores na expressão [5.6](#), teremos:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) e^{[(0.0535 - \frac{1}{2}0.34^2)(\frac{1}{365}) + 0.34\sqrt{(\frac{1}{365})}\epsilon_{j+1}]} \quad (5.8)$$

Para essa aplicação, temos $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$, e os valores $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_J$ é um número aleatório de uma distribuição normal de média zero e desvio padrão = 1. A média dos payoffs converge para um valor da *put* européia, gerada por método de Black-Scholes, de \$4.08, ao passo que a quantidade de simulações n aumenta.

Desenvolvemos então um programa que busca verificar a evolução (melhoria) desse processo, conforme o número n de simulações aumenta. Esse programa realiza diversas precificações, e ao passo que uma é realizada, as próximas precificações são feitas com um número maior de simulações. O que foi percebido durante o trabalho, é que em aproximadamente $n = 20.000$ a qualidade da convergência do programa, ou seja, o quanto o programa converge para o valor esperado para a precificação, começa a crescer lentamente conforme aumentamos o número n . A figura [23](#) mostra como a qualidade do programa evolui com n variando de 0 a 100.000.

Na análise, usamos três métodos diferentes para encontrarmos o valor para o número gerado de uma distribuição normal. Usamos o teorema do limite central, o método descrito por Abramowitz and Stegun e o último método descrito por G. Marsaglia e T. A. Bray. Observamos que o comportamento do programa não é afetado de maneira significativa com relação ao método escolhido para gerar a variável aleatória, assim, iremos usar nas análises seguintes o método do teorema do limite central (CLT). O método CLT

foi escolhido por se mostrar mais rápido do que os outros.

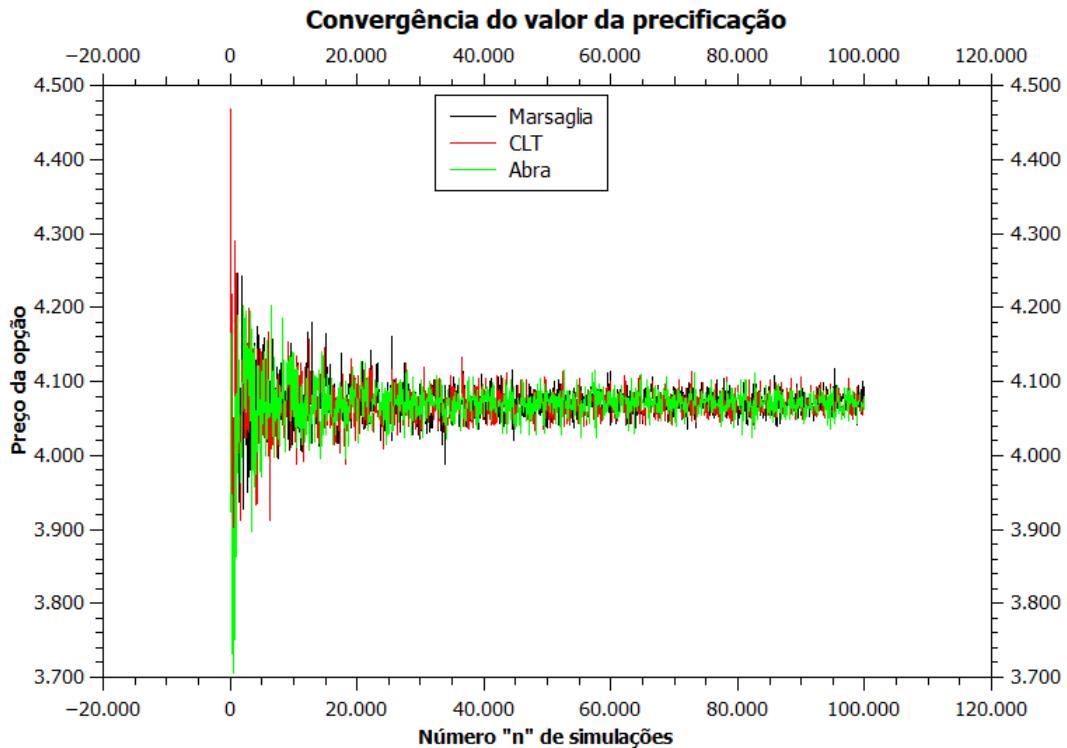


Figura 23 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita para três métodos diferentes para gerar a variável aleatória.

Um ponto importante a se destacar com relação ao método de Monte Carlo é o fato de que ele é lento. Apesar de ser bastante adequado para as análises feitas durante esse trabalho, o tempo que o programa levou para precificar uma opção foi em torno de 55.8 segundos, o que pode ser considerado pequeno para um estudo acadêmico do caso, mas não é viável quando tratamos de um sistema tão dinâmico quanto o mercado de ações, onde esse tempo pode ser o suficiente para que o preço de uma ação mude de forma substancial. Para realizar a precificação proposta no programa, usamos $n = 2.500.000$, valor que consideramos rasoavelmente elevado, porém apresentou convergência adequada com o esperado valor de \$4.08. Alteramos o programa de forma que ele fizesse 100 simulações diferentes para $n = 2.500.000$, então montamos um histograma, apresentado na figura 24, com os valores obtidos e o número de ocorrências. O dados apresentaram uma média de \$4.082 com um erro de 0.001.

$$\widehat{V(T)} = 4.082 \pm 0.001 \quad (5.9)$$

Devemos destacar o fato de que o programa gera resultados com uma precisão muito maior nas casas decimais dos valores da precificação, porém, buscamos precisão

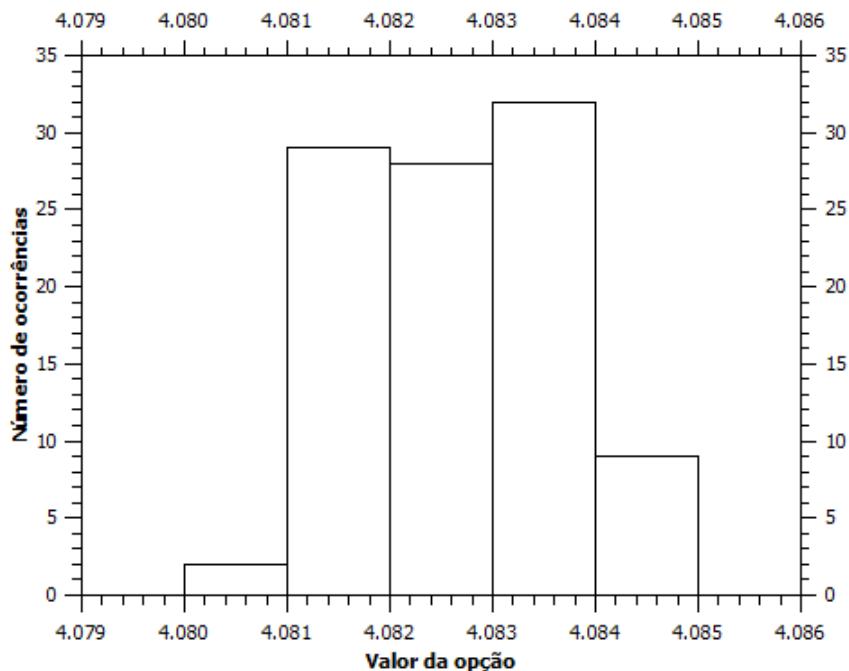


Figura 24 – Histograma com os intervalos do valores da opção e o número de ocorrências.
O valor utilizado para n nessa simulação foi de 2.500.000.

apenas na segunda casa decimal, que nesse caso representaria os centavos.

Para confirmar o intervalo do valor n para o qual nosso programa apresenta a convergência adequada, rodamos novamente o código discutido anteriormente, agora fazendo n variar de 0 até 1.465.000 e geramos um gráfico, que está apresentado na figura 25.

A figura 26 mostra uma aproximação visual do gráfico apresentado na figura 25. Podemos perceber que para n superior a 1.300.000 o programa começa a convergir conforme o esperado. Vamos também estudar uma técnica simples para reduzir a variância do método de Monte Carlo, chamada técnica da variável antitética (antithetic variable technique).

5.2.1 Técnica da variável antitética.

Existem métodos que ajudam a reduzir a variância do método de Monte Carlo, aumentando a precisão das estimativas numéricas que são geradas. A TVA (técnica da variável antitética) consiste em uma simples mudança no algoritmo do nosso programa base, que reduz consideravelmente a variância em nossos resultados. A técnica consiste em calcular os preços $\widehat{V}(T)$ usando as variáveis aleatórias ϵ_j , e também calcular novos preços

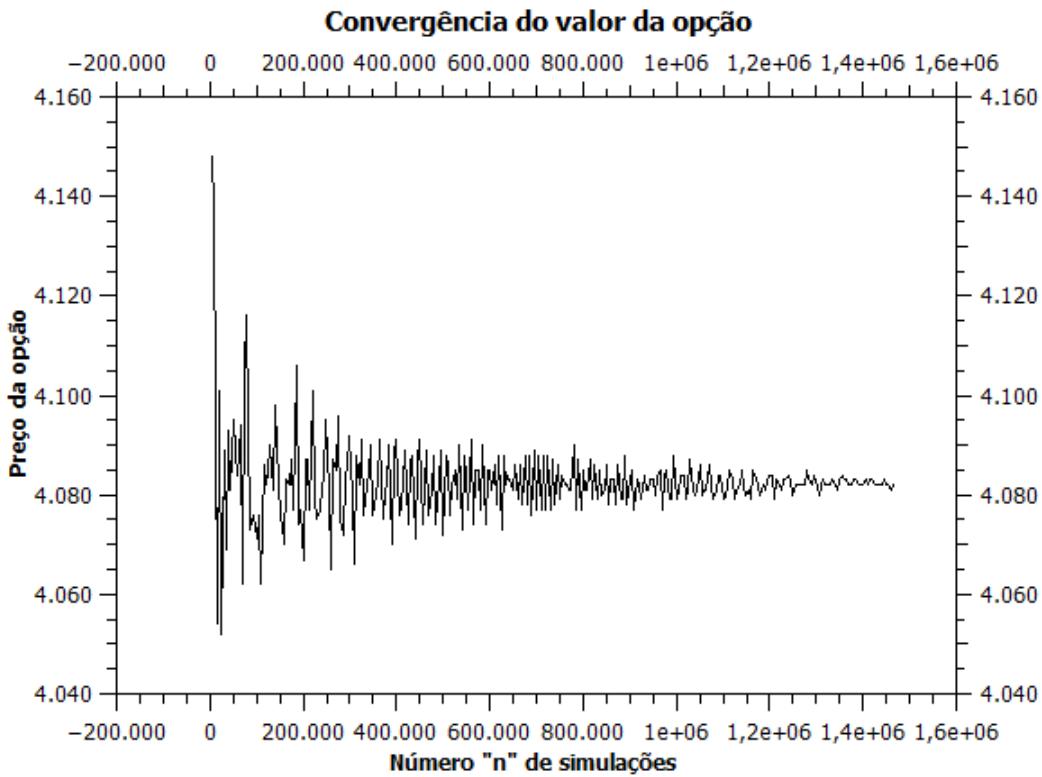


Figura 25 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita com método CLT. Número "n" variando de 0 a 1.465.000.

$\widehat{V(T)}'$ usando uma nova variável $-\epsilon_j$. Chegamos então ao resultado de que a média:

$$[\widehat{V(T)} + \widehat{V(T)}']/2 \quad (5.10)$$

é mais precisa, ou seja reduz a variância do programa. Percebemos que apesar de mais precisa, essa simulação exige mais da capacidade de processamento, assim, os processos realizados se apresentaram mais lentos que o usual.

Se compararmos a figura 27 com 23, podemos perceber que a técnica da variável antitética torna o programa mais preciso para o mesmo intervalo da variável n . Existem outros métodos para reduzir a variância do método numérico de Monte Carlo, porém esses não serão discutidos aqui.

5.3 Cálculo da volatilidade a partir de dados históricos

Um dos fatores mais importantes nesse trabalho está ligado a como analisamos as oscilações do preço de um ativo. Buscamos calcular a volatilidade, aqui denotado por σ , para realizar as diversas análises propostas para os índices (HIRSA; NEFTCI, 2013), (CRACK, 2009). Há um método para calcular a volatilidade do preço de uma ação no

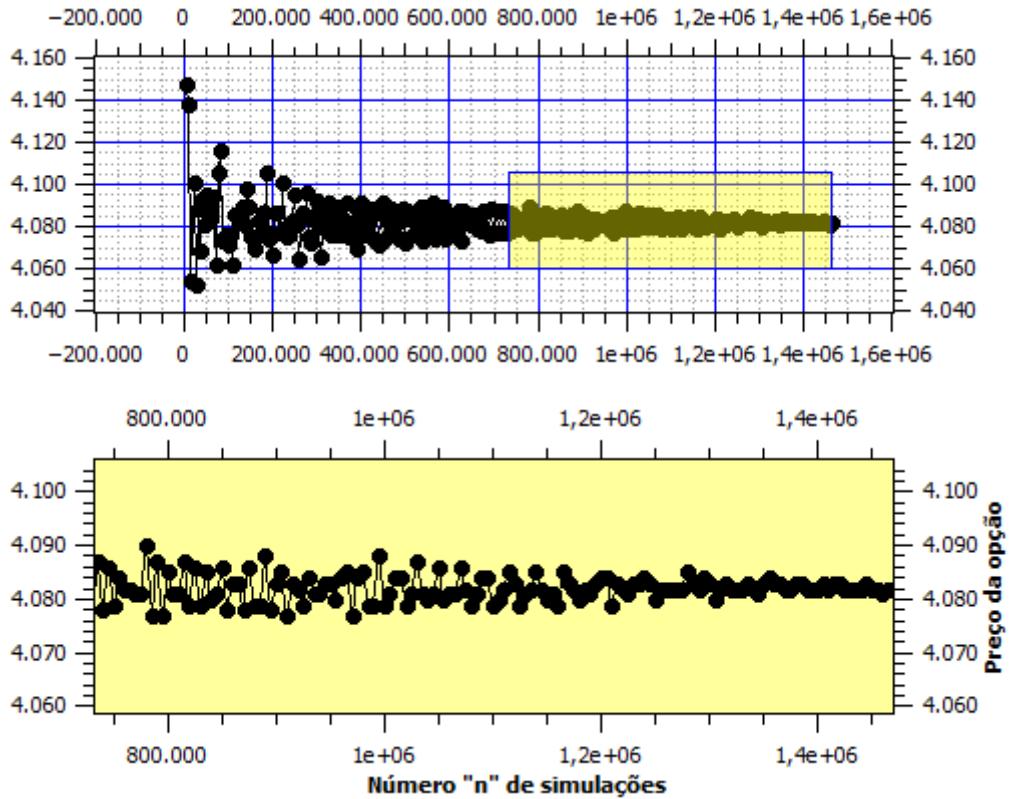


Figura 26 – Aproximação visual da figura 25.

tempo, considerando os dados históricos em tempos anteriores. Consideremos os seguintes fatores:

- $n + 1$: número de observações;
- S_i : preço da ação para o intervalo de tempo i ;
- τ : Intervalo de tempo em anos;

Vamos definir o log-retorno:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (5.11)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. O desvio padrão dos valores dos log-retornos é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (5.12)$$

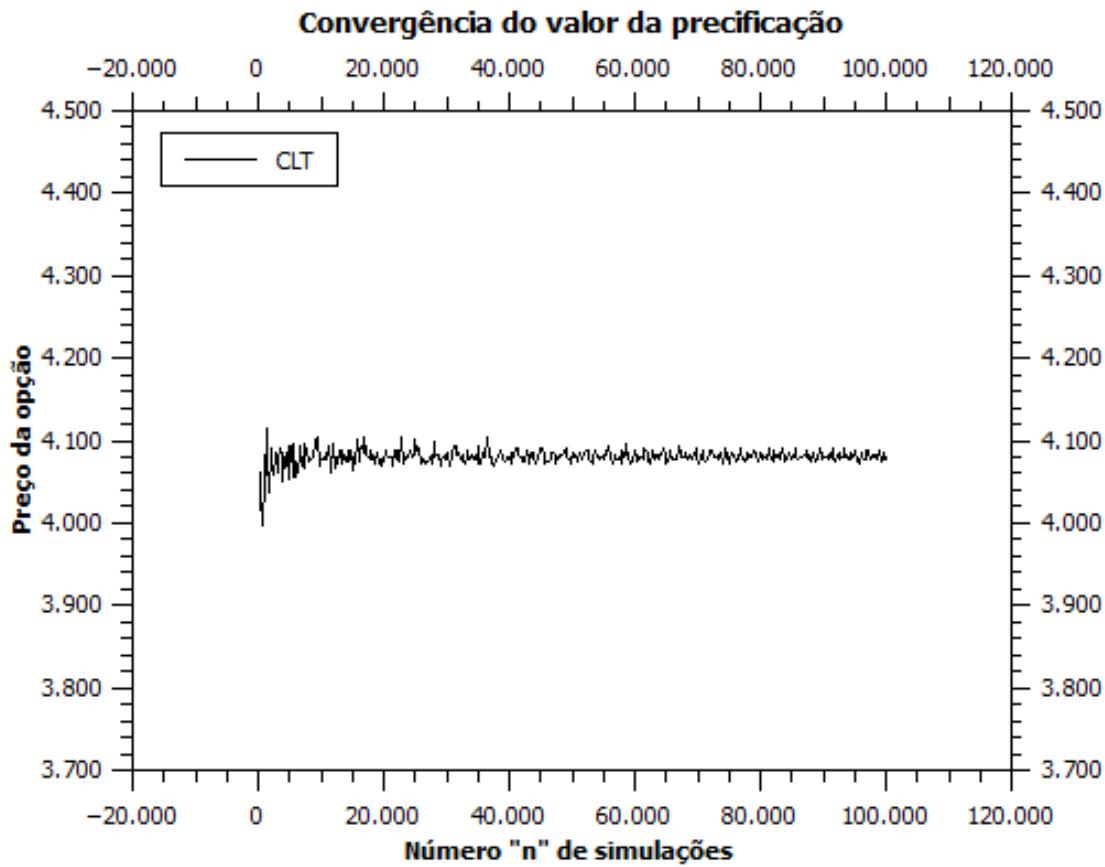


Figura 27 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita pela técnica da variável antitética.

onde \bar{u} é a média dos valores do log-retorno u_i . Podemos escrever também s da forma:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2} \quad (5.13)$$

Podemos então definir o fator $s^* = \sigma$, onde:

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \quad (5.14)$$

O erro padrão é de aproximadamente $s^* / \sqrt{2n}$.

O fator τ vale $1/252$, onde o número 252 é relativo aos dias de pregão do ano. Queremos então calcular os valores para as volatilidades dos índices propostos no trabalho, em alguns momentos diferentes para cada índice. Consideramos importante encontrar esses valores para momentos chave dos preços das ações, basicamente, buscarmos em pontos antes do pico da bolha e num momento bem próximo ao pico, avaliando como

os movimentos envolvendo as opções se comportarão no período de crise. Para os quatro índices estudados, calculamos as seguintes volatilidades, para dois momentos da fase de bolha:

Índice / Ação	Data (1)	σ (1)	Data (2)	σ (2)
BitCoin	07/09/17 - 26/10/17	59,8%	07/09/17 - 14/12/17	62,52%
Nikkei 225	15/01/84 - 04/01/87	19,74%	15/01/84 - 10/12/89	20,96%
NASDAQ	01/06/95 - 19/10/97	29,26%	01/06/95 - 05/03/00	35,96%
S&P 500	01/03/04 - 18/12/05	14,17%	01/03/04 - 23/09/07	14,82%

Tabela 5 – Volatilidade dos índices para dois momentos distintos.

A partir dos dados apresentados na tabela 5 iremos estudar como uma precificação hipotética de uma ação poderia ser comparada com valores reais no tempo. A ideia é utilizar o programa para especificar uma opção relacionada ao preço real de um ativo em uma data passada, estipulando uma data posterior para o vencimento, e verificar se nessa data haveria a possibilidade de lucro para o comprador da opção.

5.4 Método de Monte Carlo aplicado a casos históricos

Vamos realizar a análise citada acima para o caso da ação Bitcoin. Na data de 26/10/2017 o valor dessa ação era de \$5.810, a volatilidade era 59,8%, a taxa de juros do mercado como sendo de 5,35%, e o prazo de vencimento de 30 dias. Agora precisamos destacar um ponto importante para a análise, o valor do strike da opção, ou seja, o valor esperado para o ativo no dia do vencimento da opção. Vamos considerar que num caso excepcional, o preço da ação cresça absurdos 25% num período de 30 dias, passando de \$5.810 para \$7.262,5. Este último valor será o strike de nossa simulação. Utilizando o programa para fazer a precificação, usando os valores descritos acima como parâmetros, obtemos um valor de \$1.467,6. Assim, considerando o valor da opção, somado ao valor do ativo, o agente econômico que está negociando essa opção terá alguma vantagem econômica apenas no caso em que o preço da ação seja igual ou menor a \$7.277,6.

Porém, o que aconteceu na realidade? No dia 25/11/2017, ou seja, 30 dias depois da precificação, o valor da ação Bitcoin era de \$8.766, muito acima dos 25% que estipulamos. Podemos perceber que mesmo dentro de uma margem de erro, o valor do strike é muito abaixo ao preço da ação na data de vencimento. Podemos também simular o caso em que a precificação seja feita em um momento logo antes da crise. Vamos pegar uma data próxima ao pico do preço da ação no intervalo estudado. No dia 14/12/2017 as ações da Bitcoin valiam \$16.383 no fechamento, e utilizando a tabela 5, vamos que a volatilidade era de 62,52% na data. Sendo a taxa de juros do mercado 5,35%, o strike de \$20.478,75

(novamente 25% de acréscimo no valor da ação), e agora o período de vencimento como sendo de 60 dias, chegamos ao valor de \$4.429,13 para o valor da opção. Novamente, o que aconteceu de fato? Agora a situação se torna completamente diferente, e favorável agentes que buscam vantagens econômicas operando essas opções. O período de crise levou o preço das ações da Bitcoin à quantia de \$8.901, sendo assim, o agente que possui a opção de venda dessa ação, poderá vender por \$20.478,75 uma ação que vale \$8.901, uma diferença de \$11.577,75 que será paga pelo ofertante da opção. Os valores apresentados no trabalho são de certa forma elevados para um caso real, mas ilustram bem a idéia que queremos passar. Outro detalhe a se considerar é que essas opções, geralmente, são vendidas em pacotes com diversas quantidades, por exemplo, pacotes com 100 opções.

As mesmas análises foram feitas para os outros três índices estudados nesse trabalho, avaliando a precificação num momento do crescimento da bolha e logo perto da quebra do mercado. Os resultados estão expressos nas tabelas 6 e 7.

	BitCoin	Nikkei	NASDAQ	S&P 500
Data (1)	26/10/17	04/01/87	05/09/1999	24/09/2006
Preço da ação na data	5.890	18.810	2.535	1.336
Volatilidade (σ)	59,80%	19,74%	52,86%	22,82%
Prazo de vencimento	30 dias	90 dias	90 dias	90 dias
Valor do Strike	6.183	19.738	2.870	1.412
Preço da opção	596,31	1.135,11	455,40	95,03
Valor da ação no vencimento	8.766	22.739	3.203	1.418

Tabela 6 – Precificação de opções para um período no intervalo de bolha financeira.

	BitCoin	Nikkei	NASDAQ	S&P 500
Data (2)	14/12/17	10/12/89	05/03/2000	23/09/2007
Preço da ação na data	16.383	38.271	4.587,16	1.526,75
Volatilidade (σ)	62,52%	20,96%	35,96%	14,82%
Prazo de vencimento	30 dias	90 dias	90 dias	90 dias
Valor do Strike	17.236	40.276	4.999,54	1.583
Preço da opção	1.617	2.474,25	542,03	65,55
Valor da ação no vencimento	14.191	32.616	3.760,26	1.411,63

Tabela 7 – Precificação de opções para uma data próxima do início da crise financeira.

É possível notar nas tabelas que em todos os casos a opção de venda seria lucrativa para o agente econômico que a possuísse. Vamos expor na sessão os argumentos que nos levam a crer que há a necessidade de se considerar uma correção no modelo número da precificação de opções. Porém, vamos antes disso, imaginar em uma breve discussão como se dão as opções de compra nos mesmos períodos estudados.

5.4.1 A contrapartida das opções de compra

Discutimos acima as vantagens e desvantagens de se investir em opções de venda nos períodos de crise e bolha financeira. Mas de modo geral, como se comportam as opções de compra? Para essas é fácil perceber que a situação se inverte, existindo vantagem no período de bolha e desvantagem no período de crise. Todas análises feitas até aqui se tornam análogas para o caso das opções de compra, então não iremos explicitar-las.

Feitas todas as análises propostas, vamos agora realizar uma aplicação do ajuste log-período ao método numérico descrito ao longo desse capítulo.

Parte III

O ajuste log-periódico aplicado ao método de
Monte Carlo

6 Ajuste log-periódico aplicado ao método de Monte-Carlo para precificação de opções

Vamos agora tratar da análise fundamental deste trabalho. Nossa intenção aqui é propor um ajuste para o método numérico de Monte-Carlo para precificação de opções. A vantagem da precificação a partir de uma técnica computacional é o fato de podermos propor essas mudanças e verificar, quase que imediatamente, a coerência das novas mudanças com os resultados esperados.

A figura 22 mostra que o algoritmo usado na precificação numérica de Monte-Carlo prevê um sistema econômico que pode evoluir no tempo de modo aleatório. Esse fato pode ser observado se analisarmos a variável aleatória ϵ_j , presente na equação 5.6. A hipótese estudada aqui é a de que no período de bolha econômica os preços não tomam caminhos tão aleatórios assim, e tendem sempre a crescer. Esse crescimento porém não toma qualquer forma, e como já analisamos durante o trabalho, a forma mais possível para esse crescimento é a log-periodicidade. Sendo assim, nossa proposta é unir o método numérico de Monte-Carlo com o ajuste log-periódico, usado nesse trabalho como uma forma de prever possíveis movimentos dos índices econômicos. A equação fundamental para expressar nossa idéia é um ajuste da expressão 5.6, dada por:

$$S(t_{j+1}) = \frac{1}{2} \left(S(t_j) e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\Delta t) + \sigma\sqrt{(\Delta t)} \epsilon_{j+1}]} + \frac{1}{2} L(t_{j+1})(1 + e^{\sigma\epsilon_{j+1}}) \right) \quad (6.1)$$

Na equação 6.1, o termo $L(t_{j+1})$ é o valor do ajuste log periódico no tempo discreto t_{j+1} . O termo $\frac{1}{2}L(t_{j+1})(1 + e^{\sigma\epsilon_{j+1}})$ na equação 6.1 surgiu a partir de uma suposição sobre como o mercado deve se comportar nesse período de bolha. Esse termo produz a média entre o valor exato do ajuste log-periódico no tempo e o valor do ajuste multiplicado por um fator aleatório que gera pequenos desvios nesse valor. Podemos reescrever a função da forma:

$$S(t_{j+1}) = \frac{1}{2} \left(S(t_j) e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\Delta t) + \sigma\sqrt{(\Delta t)} \epsilon_{j+1}]} + \frac{1}{2} L'(t_{j+1}) \right) \quad (6.2)$$

A nova fórmula gerada, onde há agora um novo termo $L'(t_{j+1})$, também é uma média entre dois valores. A média agora é tomada entre a fórmula padrão apresentada em 5.6 e esse novo termo. Buscamos aqui utilizar o termo $L'(t_{j+1})$ como um peso para a evolução temporal do preço da ação, ou seja, ainda queremos que essa ação tenha o seu comportamento aleatório, porém, o preço da ação tenderá sempre a se comportar

de maneira log-periódica. O conceito de que a ação ainda pode tomar diversos caminhos ainda permanece, porém, esse caminhos agora estão ponderados por um comportamento que já é esperado. As figuras 28, 29, 30 e 31 representam o comportamento do preço da ação no tempo, para a equação 6.2. Os parâmetros que foram utilizadas para construir as funções $L'(t)$ estão presentes na tabela 3.

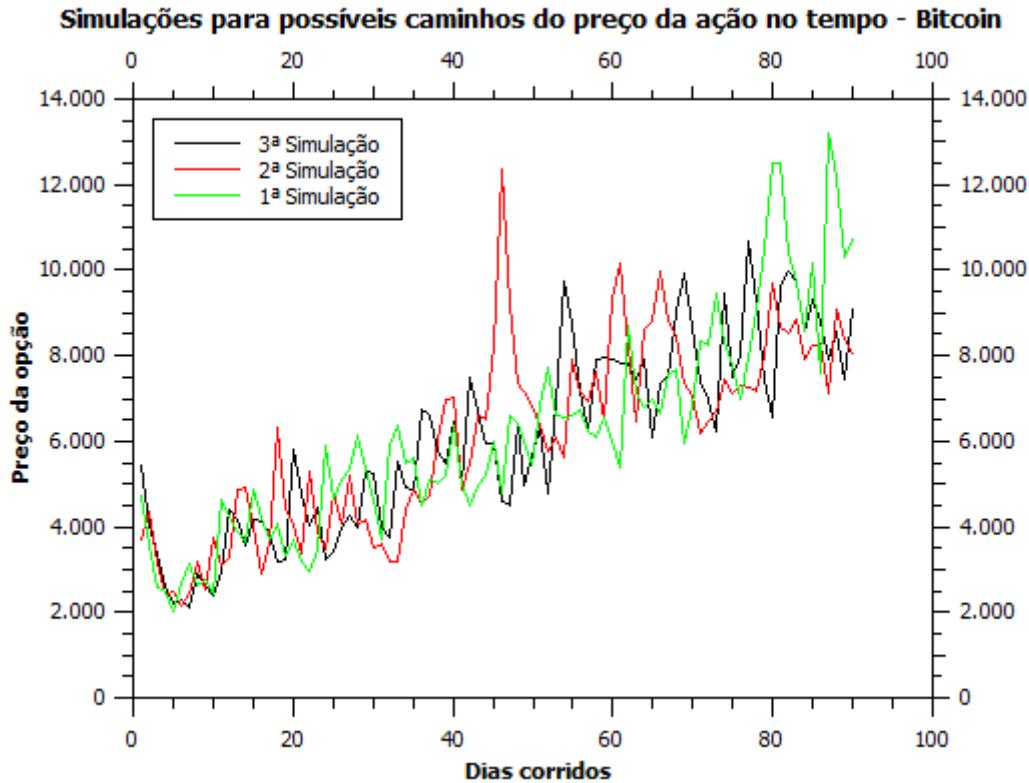


Figura 28 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo, com correção do ajuste log-periódico, para a ação Bitcoin.

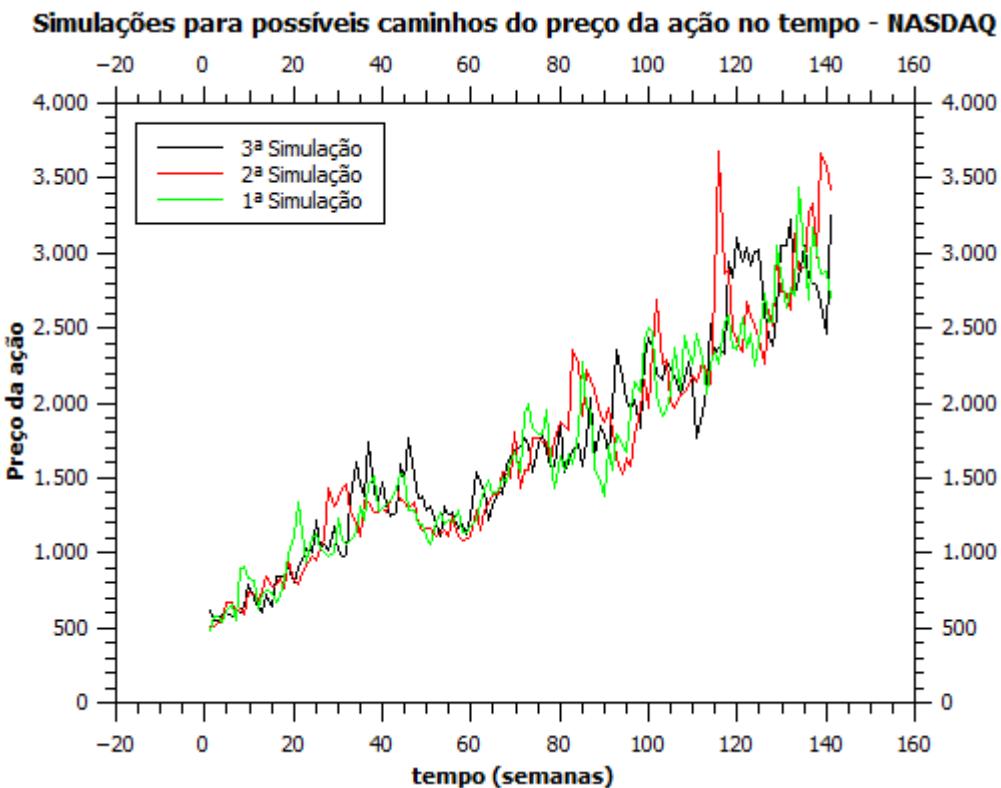


Figura 29 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo, com correção do ajuste log-periódico, para o índice NASDAQ.

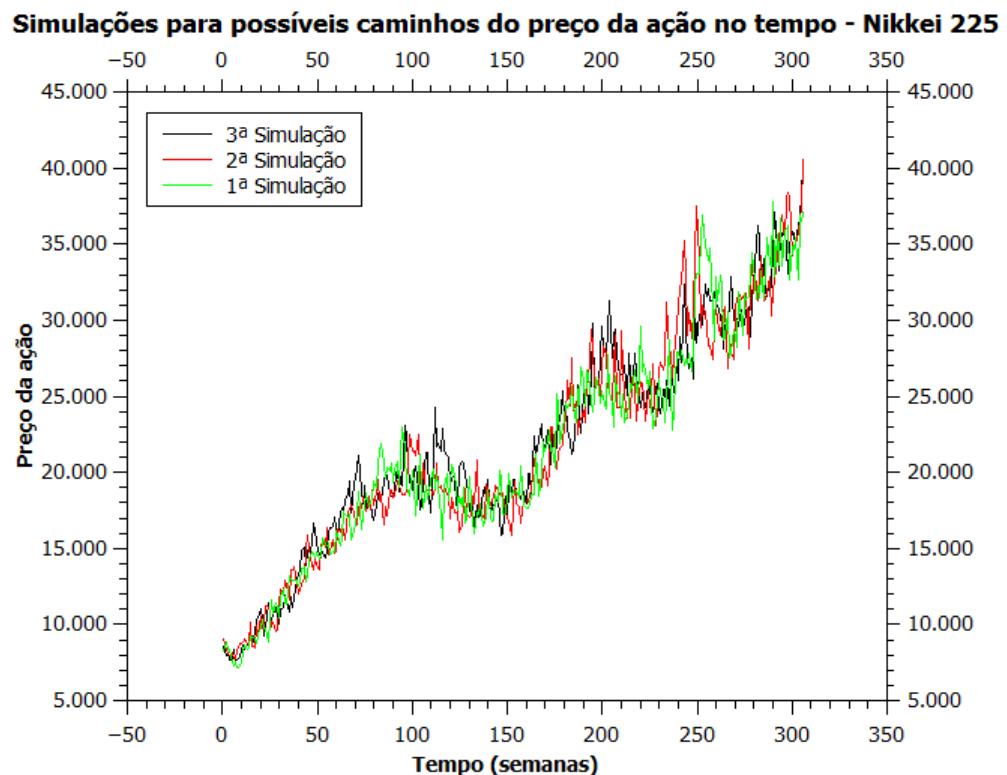


Figura 30 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo, com correção do ajuste log-periódico, para o índice Nikkei 225.

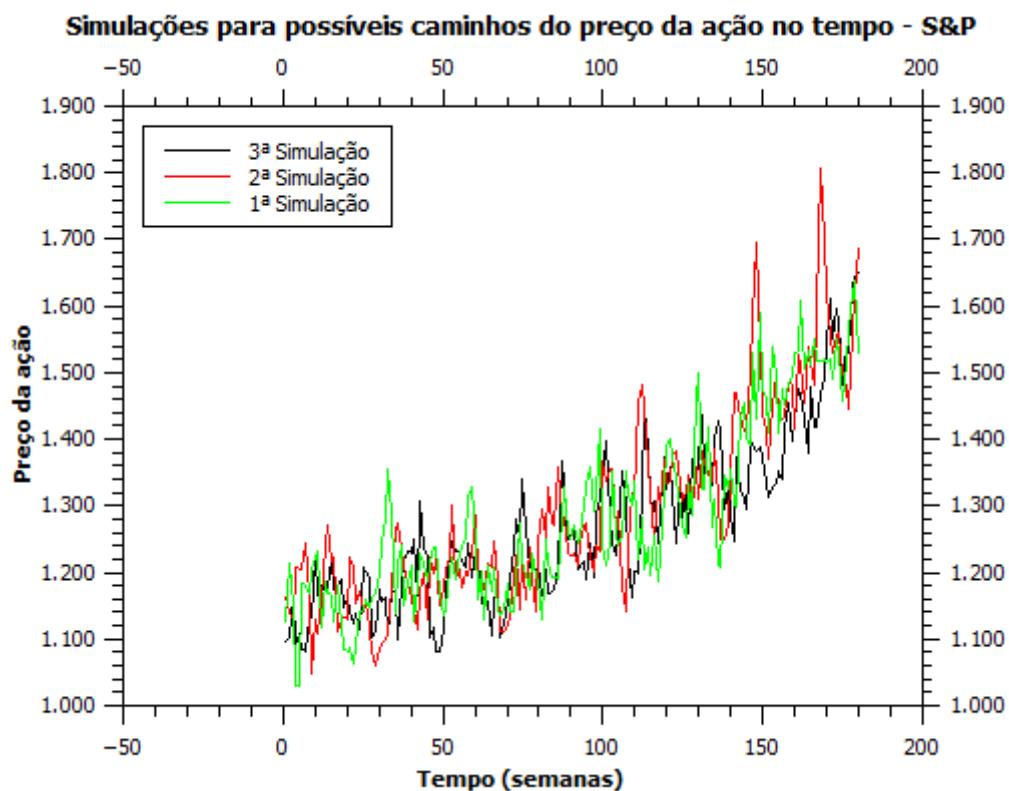


Figura 31 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo, com correção do ajuste log-periódico, para o índice S&P 500.

Os resultados encontrados nas simulações, ilustradas nas figuras acima, foram promissores. Podemos perceber que a aleatoriedade da evolução do preço da ação ainda é respeitada, apesar do comportamento de crescimento agora ser predominante. Foi possível notar também que para a expressão sugerida durante esse trabalho, a volatilidade histórica da ação exerce um papel fundamental. Ações que possuem volatilidades históricas menores terão o comportamento log-periódico mais aparente, que é o caso das figuras 29 e 30. Essa observação agrega ainda mais à credibilidade do processo estudado aqui, pois ações que possuem volatilidades mais altas estão sujeitas a terem o comportamento estocástico predominante.

Se verificarmos a figura 28, e considerarmos que a volatilidade σ utilizada nessa simulação foi de 62,52%, podemos observar que apesar do nítido comportamento de crescimento, os valores oscilam muito entre os pontos. Essa situação observada é excelente e está de acordo com o esperado para nosso trabalho. Como o preço que realmente importa é aquele no vencimento, pois esse é o único que conta para o payoff descrito na equação 5.7, queremos que esses preços no vencimento oscilem de forma adequada para simular a situação real. A figura 28 mostra que os preços no vencimento variaram de forma adequada, e quando consideramos mais simulações, essas variações se tornam ainda mais parecidas com os possíveis casos reais.

6.0.1 Mudanças no algoritmo do programa de precificação

A estrutura básica do algoritmo ainda é bastante semelhante à apresentada no tópico anterior. Vamos agora substituir a equação 5.6 por 6.1, e definir logo no início do programa a função $L(t)$ para a ação no qual queremos precificação um derivativo. Para cada caso, é necessário definir os parâmetros que modelam a curva. Ao fim do período de dias definido para a simulação, o programa também realizará o payoff descrito em 5.7, e após n simulações, a média dessas simulações multiplicado por um fator de ajuste, será o preço da opção.

6.1 Aplicação do método para o caso Bitcoin

Vamos aplicar o método discutido nesse capítulo para o caso da ação Bitcoin. Vamos nos basear nos parâmetros presentes na tabela 3 para determinar a forma do ajuste log-periódico na equação 6.1. Vamos utilizar uma volatilidade de 30%, aproximadamente metade da volatilidade na data de 14/12/17. Os valores utilizados na simulação estão presentes na tabela 6.1.

A precificação realizada resultou o valor de \$218,78, \$377,55 a menos do que a precificação realizada na tabela 6. Um dado ainda mais interessante pode ser obtido se

λ	\$10.000
S_0	\$4.614
σ	0.30
r	5.35%
J	90 Dias

Tabela 8 – Parâmetros usados na nova precificação.

compararmos o preço real da ação na data do vencimento com o valor do strike. Na data do vencimento, o preço real da ação era de \$11.595 e o valor do strike era de \$10.000. Se calcularmos a diferença do preço real pelo valor do strike, veremos que para o novo caso temos o valor de \$1.595 e para o caso anterior, que pode ser verificado na tabela 6, o valor de \$2.583. Uma menor diferença entre o strike e o preço da ação significa que há uma probabilidade maior de que na data de exercício a opção pudesse ter sido aproveitada.

A conclusão é de no novo método, ao estipularmos um strike baseado na previsão que o ajuste log-periódico nos oferece, conseguimos reduzir essa diferença entre preço strike e preço real na data no vencimento, e ainda reduzimos o preço final da opção. **O comprador da ação pagará mais barato por uma opção, mas terá uma chance menor de haja uma situação extrema de lucros ou prejuízos.** Se fizermos agora uma nova precificação, utilizando os mesmos parâmetros mas agora com o preço de strike sendo \$9.600, um valor mais próximo com o previsto pelo ajuste log-periódico, temos \$101.08 para o preço da opção, mostrando que quanto mais o preço do strike se aproxima do valor esperado pelo ajuste, menor o preço da opção. Essa análise permite ao lançador de opções no mercado ofertar opções por baixos preços, e caso a curva do ajuste represente uma boa previsão, baixos riscos. Buscamos também verificar a dependência do preço da opção pela volatilidade histórica da ação, e o comportamento encontrado pode ser expresso na figura 32.

O ajuste realizado é da forma $a + bx + cx^2$, um polinômio com máximo em $x = 84,697$ e parâmetros descritos na imagem 32. Podemos inferir então que a nossa nova fórmula de precificação possui uma dependência considerável com a volatilidade histórica. Esse dados nos mostram que quanto maior a volatilidade do sistema, maior a chance do sistema divergir e o preço da opção se torna maior devido à incerteza do sistema. Essa constatação porém não é um problema, e aumenta a confiança na modificação proposta. A figura 33 confirma o fato da dependência clara da precificação pela volatilidade histórica do preço da ação. Um resultado muito interessante também está ilustrado na figura 34, onde observamos o comportamento dos preços da opção em função do valor do Strike, valor esse que agora pode ser sugerido com base na previsão do ajuste log-periódico. O que se pode perceber é que a partir de um ponto, que identificamos ser o preço previsto pelo

ajuste log-periódico para a data de vencimento, os preços das opções crescem rapidamente.

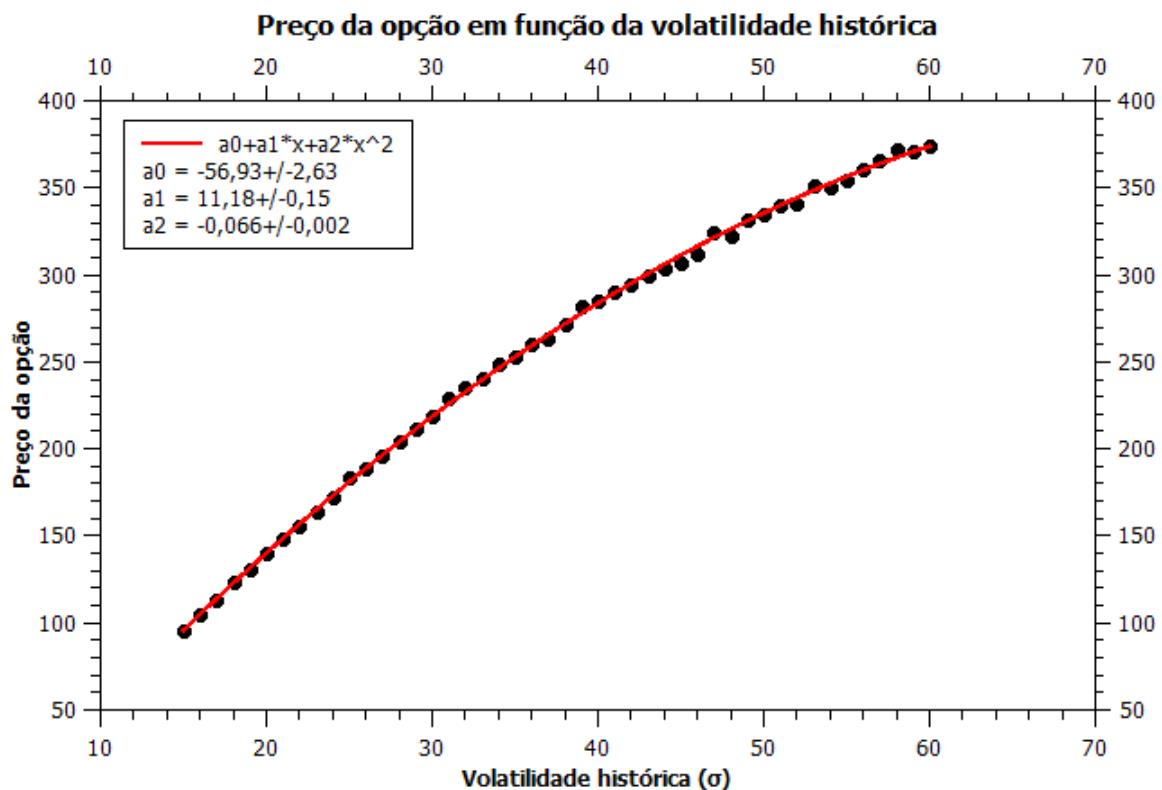


Figura 32 – Preço da opção em função da volatilidade histórica da ação.

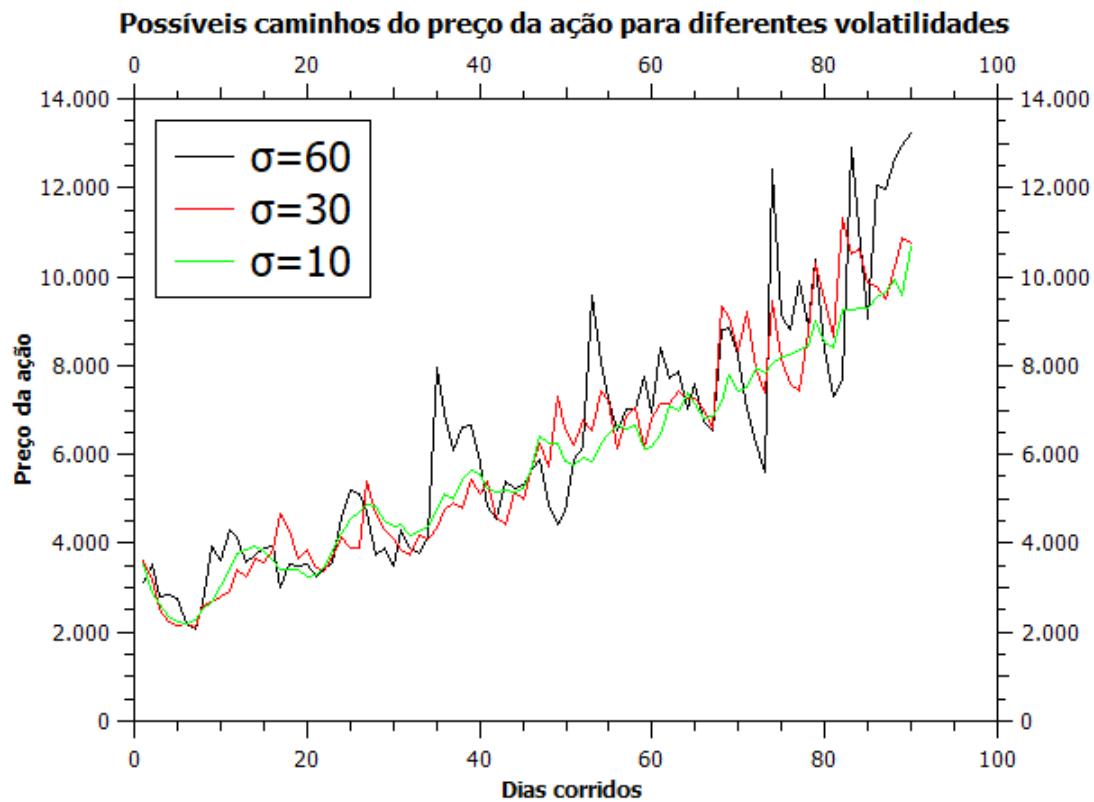


Figura 33 – Possíveis caminhos da ação no tempo, para diferentes volatilidades.

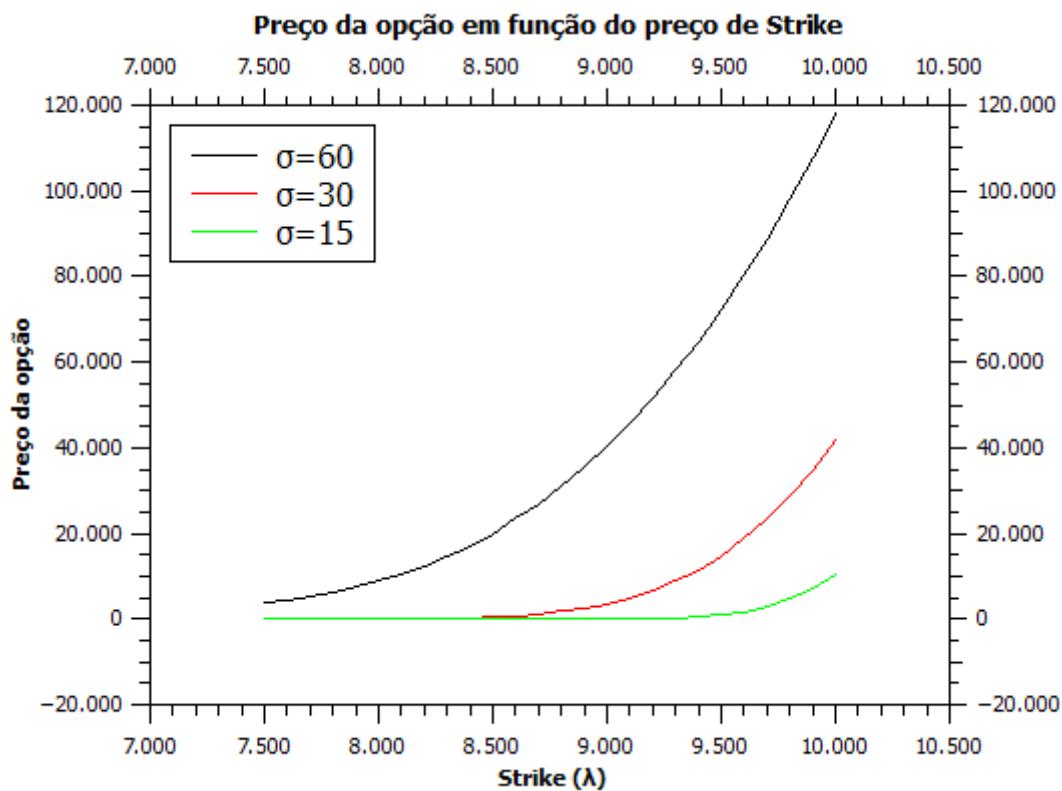


Figura 34 – Preço das opções em função do valor do Strike, para diferentes volatilidades históricas. Preço multiplicado por 1000.

6.1.1 Considerações sobre o novo método

Podemos observar na figura 33 que quanto menor a volatilidade, mais dominante o comportamento log-periódico, contudo, queremos definir o que essas observações representam de fato.

Vamos fazer algumas suposições. Uma volatilidade histórica baixa representa um sistema que apresenta baixas mudanças nos preços, ou seja, retornos menores. Assim, esse sistema é geralmente mais passível a previsões. O caso de uma alta volatilidade está associada a sistemas que possuem altas variações nos preços, assim, são menos suscetíveis a previsões. Se fizermos a previsão de que o sistema se comportará, em um dado período, de maneira log-periódica, teremos maior chance de acertar essa previsão para sistemas com baixa volatilidade. O programa demonstrou funcionar de maneira coerente com os conceitos assumidos. Além disso, como pequenas mudanças foram feitas no algoritmo do programa antigo para a nova simulação proposta, todas as análises presentes no *capítulo 5* são válidas, em especial a consideração de que a qualidade do programa aumenta conforme aumentamos o número n de simulações.

Considerando que fazer esse tipo de previsão é sempre um assunto bastante complexo, podemos considerar que essa previsão se torne, em algum limite, um chute para como o preço de uma ação se comportará no tempo. Mesmo nesse cenário nosso método é coerente, pois considerando que as simulações são sempre feitas sobre diversos caminhos possíveis para o preço da ação (figuras 28, 29, 30 e 31) estamos sempre trabalhando com alguma incerteza sobre o preço na data de vencimento. **Assim, se há uma expectativa de que uma ação terá comportamento exclusivamente crescente, a modificação proposta já possui alguma validade.**

Conclusão

Os resultados do trabalho são satisfatórios e estão de acordo com o esperado. Uma vasta leitura foi realizada para que pudessemos entender um pouco mais sobre essa área tão interessante que é a econofísica, e buscar descrever comportamentos tão complexos quanto são os comportamentos dos agentes econômicos. Buscamos respeitar o ponto de vista quantitativo do trabalho, entendendo que qualquer outra análise que fuja do escopo proposto, pode ser realizada de maneira inadequada. Todas as análises feitas, baseadas em uma extensa bibliografia, apresentaram resultados interessantes e ajudaram a construir um arcabouço teórico considerável sobre as áreas estudadas. Consideramos também que as análises que foram feitas durante o trabalho podem ser ainda melhor aproveitadas se forem acompanhadas de um conteúdo teórico sobre economia, que possa explicar os pontos de vista sobre o qual os agentes econômicos tendem a apresentar os comportamentos discutidos. Foi possível perceber que a correção proposta para o método de precificação de Monte Carlo funcionou bem, e gerou resultados bastante promissores. Acreditamos que com pequenas (ou nenhuma) mudanças, a proposta já pode ser utilizada por ofertantes de opções que possuam alguma capacidade de prever, ou chutar, o comportamento futuro de ações. Uma possível aplicação do método para um caso real, pode ser feita se considerarmos a possibilidade de estudar uma ação que seja alvo de especulação, e assim, realizar todos os processos descritos no trabalho.

Referências

- ALMEIDA, C. I. R. de; DANA, S. Stochastic volatility and option pricing in the brazilian stock market: An empirical investigation. *Journal of Emerging Market Finance*, v. 4, n. 2, p. 169–206, 2005. Nenhuma citação no texto.
- BATTALIO, R.; SCHULTZ, P. Options and the bubble. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 61, n. 5, p. 2071–2102, 2006. Nenhuma citação no texto.
- BOYLE, P. P. Options: A monte carlo approach. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 323–338, 1977. Nenhuma citação no texto.
- BOYLE, P. P.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. Monte carlo methods for security pricing. In: . [S.l.: s.n.], 1997. Citado na página 43.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K. *Econophysics of stock and other markets*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 31.
- CHRISS, N. *Black-Scholes and Beyond : Option Pricing Models*. [S.l.]: McGraw-Hill Professional, 1997. Nenhuma citação no texto.
- COMP.LANG.C. *How can I generate random numbers with a normal or Gaussian distribution?* 2019. Disponível em: <<http://c-faq.com/lib/gaussian.html>>. Acesso em: 06.09.2019. Nenhuma citação no texto.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979. Nenhuma citação no texto.
- CRACK, T. *Basic Black-Scholes: Option Pricing and Trading*. [S.l.]: TIMOTHY FALCON CRACK, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 43, 46, 49 e 73.
- DYMOCHKIN, P. et al. Computer simulation of derivative markets using black-scholes model. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2018. v. 1141, n. 1, p. 012016. Citado na página 41.
- HIRSA, A.; NEFTCI, S. N. *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. [S.l.]: Academic press, 2013. Citado na página 49.
- HULL, J. C. *Opções, futuros e outros derivativos*. [S.l.]: Bookman Editora, 2016. Citado na página 39.
- JACOBSSON, E. How to predict crashes in financial markets with the log-periodic power law. *Mathematical Statistics Stockholm University*, v. 1, n. 1, 2009. Citado na página 33.
- JR., H. d. N. et al. Porque as bolsas de valores quebram: a origem das caudas grossas nas distribuições de retornos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 29, p. 341 – 346, 00 2007. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000300005&nrm=iso>. Nenhuma citação no texto.

JULIAO, C. et al. Precursors log-periodic of events catastrophic: a break of 1999 as an illustrative example. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, p. 2303.1 – 2303.10, 2008. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200004&nrm=iso>. Citado na página 21.

LEVADA, C. L. et al. *Considerações sobre Econofísica*. 2016. Nenhuma citação no texto.

MALKIEL, B. G. *A random walk down Wall Street: including a life-cycle guide to personal investing*. [S.l.]: WW Norton & Company, 1999. Nenhuma citação no texto.

ROSTEK, S. *Option Pricing in Fractional Brownian Markets*. [S.l.]: Springer, 2009. Nenhuma citação no texto.

ROUBINI, N.; MIHM, S. *A economia das crises: Um relâmpago sobre o futuro do sistema financeiro internacional*. [S.l.]: Intrínseca, 2010. Citado na página 21.

SCHILLING, R. L.; PARTZSCH, L. *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*. [S.l.]: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014. Nenhuma citação no texto.

SORNETTE, D. *Why stock markets crash: critical events in complex financial systems*. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. Citado na página 21.

VASCONCELOS, G. L. A guided walk down wall street: an introduction to econophysics. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 34, n. 3B, p. 1039–1065, 2004. Citado na página 39.

VOIT, J. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. [S.l.]: Springer, 2005. Nenhuma citação no texto.

Anexos

ANEXO A – Algoritmo da precificação por método de Monte Carlo

O algoritmo apresentado abaixo foi desenvolvido em *C*, e baseado nas instruções presentes principalmente no livro ([CRACK, 2009](#)). Diversos resultados apresentados durante o trabalho foram obtidos a partir de modificações nesse programa base.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#define PI 3.141592654
#define NSUM 25

double gaussrand()
{
    double x = 0;
    int i;
    for (i = 0; i < NSUM; i++)
        x += (double)rand() / RAND_MAX;
    x -= NSUM / 2.0;
    x /= sqrt(NSUM / 12.0);

    return x;
}

int main()
{
    double st0;
    double st_j;
    double rndnm;
    float strike_t;
    float sigma;
    float rate;
    double deltat;
    double stock;
```

```
double arg;
double exparg;
double summ;
double totalsum;
double valorpay;
double estim;
double arg_n;
double arg1;
double arg2;

FILE *result;
char url []="resultado.txt";
result = fopen(url , "w");

int np, ip, sp;
int days;

srand (time(NULL)); /* gera semente aleatoria */

printf("-----Precificacao de Opcoes-----");
printf ("\nDesenvolvido por Henrique Alves\n");

printf ("\nInsira o preco da Acao:\n");
scanf("%lf" , &stock);
printf ("\nAcao: %f\n" , stock);

printf ("\nInsira o valor do Strike:\n");
scanf("%f" , &strike_t );
printf ("\nStrike: %f\n" , strike_t );

printf ("\nInsira o valor da taxa de juros:\n");
scanf("%f" , &rate );
rate /=100;
printf ("\nTaxa de juros: %f \n" , rate );

printf ("\nInsira o valor da taxa de volatilidade:\n");
scanf("%f" , &sigma );
```

```
sigma/=100;
printf("\nTaxa de volatilidade: %f \n", sigma);

printf("\nInsira a quantidade de dias ate o vencimento:\n");
scanf("%d", &days);
printf("\nDias ate o vencimento: %d \n", days);

printf("\n");
printf("\n");

deltat = 0.002739726027f;
np=0;
arg_n = -(0.167123287f*rate);

for (sp=1; sp<=1000000; sp++)
{
    for (ip=0; ip<days; ip++)
    {
        if (ip==0)
        {
            st0 = stock;
        }
        else
        {
        }

rndnmb = gaussrand();

arg1 = (rate -0.5*(sigma*sigma))*deltat;

arg2 = (sigma*0.05234239226*rndnmb);

arg = arg1+arg2;

exparg = (pow(M_E,arg)); //Exponencial do argumento
```

```
st_j = st0*(exparg);

st0 = st_j;
if (sp==1)
{
    fprintf(result , "%0.3f \n" , st_j );
}
}

np+=1;

if (strike_t-st_j > 0)

{
    summ = strike_t-st0;

    totalsum += summ;

}
else
{
}

printf("soma total = %f , sp = %i \n" , totalsum , sp);

valorpay = totalsum/np;

estim = pow(M_E,arg_n)*valorpay;

printf(" valor da opcao = %f\n" , estim );

}
```