

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

HENRIQUE ALVES DE LIMA

**AJUSTE LOG-PERIÓDICO APLICADO À  
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES POR MÉTODO DE  
MONTE-CARLO**

BRASÍLIA

3 DE MAIO DE 2019



Henrique Alves de Lima

**Ajuste log-periódico aplicado à precificação de opções  
por método de Monte-Carlo**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física

Orientador: Leonardo Luíz e Castro  
Coorientador: Nome do co-orientador

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

3 de maio de 2019

---

Henrique Alves de Lima

Ajuste log-periódico aplicado à precificação de opções por método de Monte-Carlo/ Henrique Alves de Lima. – Brasília, 3 de maio de 2019-

69 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Leonardo Luíz e Castro

Monografia – Universidade de Brasília – UnB  
Instituto de Física, 3 de maio de 2019.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.  
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

---

*Este trabalho é dedicado aos nascidos na periferia,  
que preferiram contrariar as estatísticas.*

# Agradecimentos

Esse trabalho é dedicado a todas as pessoas que dedicaram um pouco da sua vida para que eu construísse a totalidade da minha. À minha mãe, Irene Alves de Jesus, a mulher mais incrível do mundo, que lutou com todas as suas forças para que esse sonho fosse construído. A meu saudoso pai, José Miranda, homem provedor, que nunca deixou que nada nos faltasse. À minha família. A meus irmãos, mais que amigos, Paulo Henrique e José Lucas, pelos longos anos de união. Meus companheiros de caminhada, João Augusto, Ana Caroline Manso, Gracielle Arvelos e Henrique Lettieri, por todo apoio dedicado a mim. A todos os amigos e colegas que compartilharam comigo momentos na vida. Ao professor Leonardo Luíz e Castro, por suas orientações preciosas, e por me ensinar valores que levarei para a vida. À Clarissa Martins, por ter acreditado em meu sonho e me apoiado no momento mais difícil da minha vida, dedico muito mais do que a alegria da realização desse trabalho, dedico a felicidade de perceber que os dias difíceis que se passaram foram necessários para forjar o meu caráter.

A todos, muito obrigado.



*O tempo é fluido, e nós,  
rochosos demais para entender que a vida muda.  
(Clarissa Martins)*



# Resumo

Segundo a norma da ABNT ([ABNT, 2003](#)), o resumo deve ressaltar o objetivo, o método, os resultados e as conclusões do documento. A ordem e a extensão destes itens dependem do tipo de resumo (informativo ou indicativo) e do tratamento que cada item recebe no documento original. O resumo deve ser precedido da referência do documento, com exceção do resumo inserido no próprio documento. (...) As palavras-chave devem figurar logo abaixo do resumo, antecedidas da expressão Palavras-chave:, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto.

**Palavras-chaves:** latex. abntex. editoração de texto.



# Abstract

This is the english abstract.

**Key-words:** latex, abnTeX, text editoration.



# Sumário

Introdução . . . . .	13
<b>I TÍTULO DA PARTE I</b>	<b>15</b>
1 UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE DERIVATIVOS E A FÍSICA APLICADA A MERCADOS FINANCEIROS . . . . .	17
1.1 Opções . . . . .	17
1.2 Crises financeiras e a log-periodicidade . . . . .	21
2 AÇÕES E ÍNDICES ESTUDADOS . . . . .	23
3 O AJUSTE LOG-PERIÓDICO . . . . .	33
3.0.1 Aplicação do ajuste log-periódico à precificação de opções . . . . .	36
4 MÉTODO DE BLACK-SCHOLES . . . . .	37
<b>II TÍTULO DA PARTE II</b>	<b>41</b>
5 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES POR MÉTODO DE MONTE-CARLO . . . . .	43
5.1 Algorítmo da simulação . . . . .	45
5.2 Exemplo de precificação para uma <i>Put</i> européia por método de Monte Carlo . . . . .	46
5.2.1 Técnica da variável antitética. . . . .	48
5.3 Cálculo da volatilidade a partir de dados históricos . . . . .	49
5.4 Método de Monte Carlo aplicado a casos históricos . . . . .	52
5.4.1 A contrapartida das opções de compra . . . . .	54
<b>III TÍTULO DA PARTE III</b>	<b>55</b>
6 AJUSTE LOG-PERIÓDICO APLICADO AO MÉTODO DE MONTE- CARLO PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES . . . . .	57
7 TÍTULO DO CAPÍTULO 6 . . . . .	59
Conclusão . . . . .	61

<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>63</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO A – TÍTULO DO ANEXO 1</b>	<b>67</b>
<b>ANEXO B – TÍTULO DO ANEXO 2</b>	<b>69</b>

# Introdução

Estudar a dinâmica de sistemas governados por comportamento econômico tem sido alvo de físicos por todo o mundo durante as últimas décadas. Apesar da complexidade dos movimentos nesses sistemas, que em geral pode ser atribuída pelo fato de que existem diversos agentes econômicos atuando, alguns conceitos e técnicas conhecidos da física estatística se apresentam como solução para entendermos melhor a dinâmica desses sistemas. Buscaremos analisar nesse trabalho um sistema econômico específico, caracterizado por dois momentos, o crescimento acelerado nos valores das ações e a queda abrupta desses valores. O crescimento desses valores é chamado bolha (bubble) e é definido pela diferença entre o preço de um ativo e seu valor subjacente. Essa definição em si é problemática por envolver o conceito de valor de um ativo.

Existem na história diversos episódios conhecidos de bolhas nos preços, porém, gostaríamos de destacar dois mais importantes, a crise das tulipas no século XVII e a bolha da internet nos anos 90, caracterizada pela especulação e alta nas ações referentes a tecnologias referentes a internet (dotcom bubble burst). Uma forma interessante de se proteger contra variações drásticas de preços dos ativos é investir em opções, contratos futuros e outros tipos de derivativos financeiros.

Este trabalho busca estudar como o preço de opções tendem a se distanciar dos valores das ações subjacentes quando tratamos de um sistema de bolha financeira. Em geral, consideramos que nesses casos existem situações extremas de perdas e lucros. Usaremos o método do ajuste log-periódico para modelar o evento de *crash* para um conjunto de índices, e a partir disso, verificar como o preço dessas opções se comporta em relação ao valor da ação naquele momento. Serão também analisadas as flutuações nos preços das ações nesses períodos de bolhas e *crashes*, análises que são feitas a partir do estudo dos log-retornos das ações. Para a especificação das opções, usaremos o método de Black-Scholes, que usa a solução de uma equação diferencial como resposta para o preço dessas opções no tempo, e o método de Monte-Carlo, que consiste em uma simulação. O trabalho também abordará uma espécie de "solução" para o caso de opções em mercados em bolha, utilizando o modelo de opções por barreira, ou seja, bandas superiores para o preço das opções que limitam o valor ao qual essas opções podem chegar.



## Parte I

### Título da parte I



# 1 Uma breve discussão sobre derivativos e a física aplicada a mercados financeiros

Com o passar dos anos, a dinâmica de mercados financeiros tem se tornado cada vez mais complexa, atraindo a atenção de profissionais que não necessariamente possuam uma formação específica na área de economia ou finanças. Estamos buscando acontecimentos que possuam alguma regularidade, ou padrões de comportamento que possam ser sistematizados e que seja possível usar alguns modelos para descrever esses fatos. Considerando a complexidade de sistemas onde as variáveis são em sua maioria descritas por comportamento humano, queremos nos focar em fazer apenas análises quantitativas, que possam gerar alguma resposta sobre os casos estudados.

Uma cadeia de objetos que se encaixam em nossa procura são os derivativos. Os derivativos são um instrumento financeiro em que seus preços dependem de uma ou mais variáveis ligadas a outros itens do mercado, em nosso caso, ações negociadas na bolsa de valores. Existem diversos tipos de derivativos, mas vamos nos ater às opções, cujo preço depende estritamente do preço das ações subjacentes.

## 1.1 Opções

As opções são um tipo de derivativo financeiro, e assim, possuem preços (prêmio) que derivam do preço de sua ação subjacente. No mercado de ações, uma opção poderia ser de certa forma comparada a uma apólice de seguros, ou a um sinal que é pago para garantir o direto da compra de um bem. Opções são negociadas na bolsa desde 1973 e cresceram significativamente em todo mundo, hoje existem opções para os mais diversos tipos de ativos, como por exemplo, ações, moedas, *commodities* e contratos futuros. As opções garantem ao comprador um direto, mas não a obrigação, de comprar uma ação por um determinado valor em algum tempo futuro. Para o ofertante de uma opção, existe uma obrigação de venda da ação pelo preço determinado. Podemos classificar as opções em dois tipos básicos. Uma opção de compra (call) garante a seu titular o direito de comprar o ativo subjacente a essa opção em certa data por um preço previamente determinado. Uma opção de venda (put) garante a seu titular o direito de vender o ativo subjacente em certa data por um preço previamente determinado.

O fato de que o comprador de uma opção não possui a obrigação de exercer esse contrato no dia do vencimento, torna o mercado de opções muito dinâmico e atrativo

para duas classes de investidores em especial, *hedgers* e especuladores. *Hedgers* buscam minimizar perdas e encontram em opções oportunidades para diminuirem seus riscos. Por exemplo, uma pessoa deseja comprar uma quantidade  $X$  de dólares em uma data futura determinada. Buscando se prevenir de um aumento na taxa de câmbio, ele adquire uma opção de compra que lhe garante o direito de comprar nesta data futura essa quantidade de dólares à taxa de câmbio atual. Diferente dos *hedgers*, especuladores buscam lucrar analisando os movimentos de alta e baixa nos preços das ações. Por exemplo, se comprarmos hoje uma opção de compra (call) que nos garanta o direito de exercer por um valor de  $50u.m$  e a ação chegue a valer  $60u.m$ , estariamos comprando por um preço menor uma ação que vale mais. Por outro lado, se a ação passar a custar menos de  $50u.m$ , dizemos que nossa opção virou pó, pois não é desejável pagar mais por uma ação. O especulador busca estudar esses movimentos e conseguir espaço nesse mercado de ações. Em resumo, enquanto o comprador de uma opção de compra (call) espera que o preço dessa ação suba, o comprador de uma opção de venda (put) espera que ela caia.

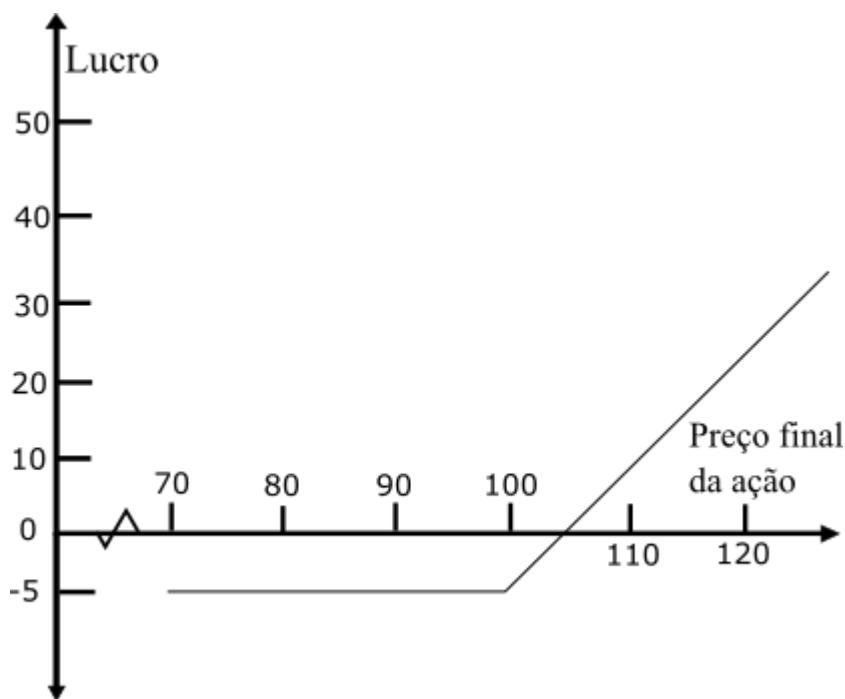


Figura 1 – Lucro resultante da aquisição de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

A outra ponta do contrato de opção está ligada ao agente econômico que oferta essa opção no mercado. Para o ofertante, há um comportamento especialmente diferente para os lucros resultantes no lançamento dessas opções. O detalhe que gostaríamos de destacar sobre os retornos das opções, é que há uma certa "assimetria" quando estamos tratando dessas opções em um cenário de desvalorização ou valorização acentuada dos preços das ações.

Uma das motivações de nosso trabalho consiste em perceber que o acontecimento

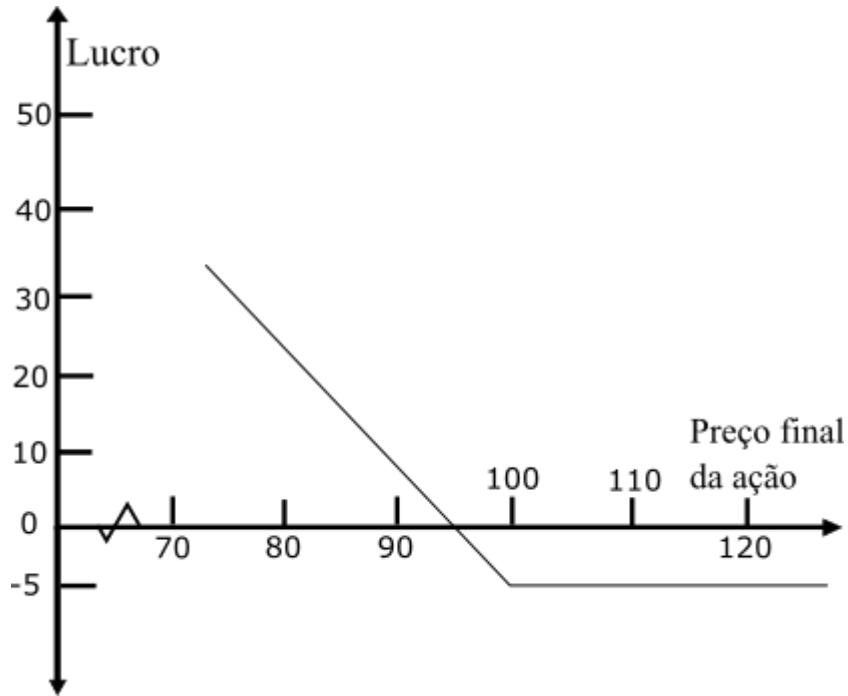


Figura 2 – Lucro resultante da aquisição de uma opção européia de venda. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

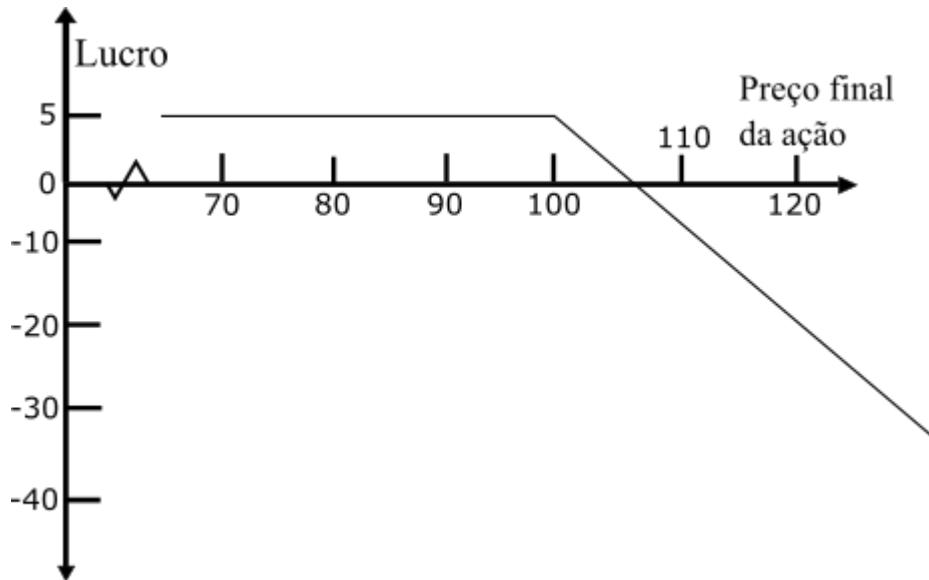


Figura 3 – Lucro resultante do lançamento de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 100.

de uma crise financeira, quebra a condição de um "jogo justo", onde tanto o ofertante quanto o comprador da opção assumem os riscos das perdas e ganhos, e gera um cenário em que há um peso maior para uma das pontas dessa negociação.

Podemos reparar na figura 4 que o ofertante de uma opção européia de venda, começa a ter prejuízos crescentes quando há uma desvalorização do preço da ação subjacente.

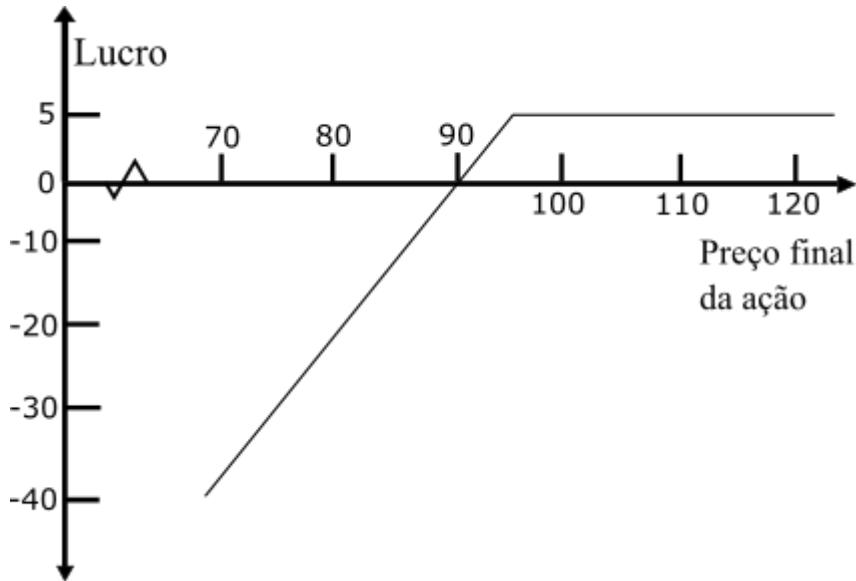


Figura 4 – Lucro resultante do lançamento de uma opção européia de compra. Preço da opção = 5; Preço de exercício = 95.

cente. Em um cenário econômico geral, esses riscos são assumidos pelo ofertante. O caso de uma crise financeira, porém, gera um ambiente completamente diferente, pois durante um período de crise os preços tendem apenas a cair, e os prejuízos, que a pouco eram assumidos dentro de uma margem, agora tendem a se perpetuar (pelo menos no período de crise). Se compararmos as figuras 2 e 4 podemos perceber que há uma diferença substancial entre os prejuízos assumidos pelos agentes, o que faz sentido se compararmos a posição social-econômica entre eles. O comprador de uma opção pode ter uma prejuízo de no máximo o valor da opção, no caso em que a opção vire pó. Os prejuízos do ofertante escalam conforme a desvalorização da ação.

Vamos imaginar um simples caso:

Suponhamos que uma ação tenha seu preço elevado até um valor hipotético de 100. Essa elevação dos preços ocorreu a partir de uma bolha especulativa, ou seja, preço dessa ação não corresponde ao valor real desse ativo financeiro. Vamos supor que o valor de 100 corresponda ao pico do valor que essa ação alcançará. Agora, são ofertadas algumas opções européias de venda, com strike de 110, ou seja, o comprador dessa opção terá o direito de vender no dia do vencimento a ação subjacente pelo preço de 110. Porém, há agora uma quebra dessa bolsa e num curto espaço de tempo os preços dessa ação caem drasticamente e passam a valer 65. Para o comprador da opção essa situação é excelente, porém, o ofertante terá que arcar com os prejuízos, que são mais altos do que o previsto.

## 1.2 Crises financeiras e a log-periodicidade

As crises financeiras são fenômenos antigos na história econômica mundial, sendo eventos fascinantes para profissionais e acadêmicos das mais diversas áreas. Assim como as catástrofes naturais, epidemias, engarrafamentos em larga escala e outros eventos da vida humana, as crises financeiras possuem uma característica trágica. Em geral, qualquer tentativa de descrever os motivos que levam à quebra de um mercado levam a respostas inconclusivas, porém, a imprevisibilidade desses sistemas dá a eles valor quanto sistemas complexos. Pesquisas recentes sugerem que os eventos descritos acima possuem algumas características similares quando próximos de situações extremas, para o nosso caso, queremos estudar principalmente a ocorrência da log-periodicidade.

A log-periodicidade indica uma função que possua em sua estrutura uma expressão da forma:

$$y = \cos(\ln(x)) \quad (1.1)$$

Observando esse comportamento log-periódico, *Sornette* começou a analisar que essa estrutura fazia parte de diversos fenômenos que levavam a alguma ruptura, como se essa descrição matemática expressasse um comportamento coletivo dos agentes envolvidos. Usaremos esses conceitos para fundamentar nossa escolha pelo ajuste log-periódico, que será discutido posteriormente.



## 2 Ações e índices estudados

Selecionamos em nosso trabalho, um conjunto de quatro títulos da bolsa, sendo eles, uma ação e três índices de ações. Os títulos são:

- Bitcoin USD (BTC-USD)
- Nikkei 225 (N225)
- S&P 500 (GSPC)
- NASDAQ (IXIC)

Por que estudar índices?

Bem, os índices representam uma espécie de média geral para o comportamento do conjunto de ações que o compõe. Os índices não podem ser negociados como ativos num mercado, porém, por representarem essa média, podemos usá-los para entender o setor como um todo e realizar uma série de simulações. No caso da ação do Bitcoin, fizemos a escolha por considerar que esse título se comportou ao longo do tempo de uma maneira bastante curiosa, com sua bolha e quebra bastante acentuadas, e que ocorreram em um período de tempo curto. A tabela 1 apresenta os títulos estudados e os períodos em que ocorreram a bolha financeira e a crise.

Título	Período de Bolha	Período de Crise
Bitcoin	07/09/2017 - 16/12/2017	16/12/2017 - 10/04/2018
Nikkei 225	15/01/1984 - 24/12/1989	31/12/1989 - 29/08/2004
NASDAQ	01/06/1995 - 26/03/2000	02/04/2000 - 30/03/2003
S&P500	01/03/2004 - 07/10/2007	14/10/2007 - 31/05/2009

Tabela 1 – Períodos de bolha e crise para os títulos estudados.

As figuras abaixo ilustram os períodos citados e o comportamento desses títulos no tempo. Vemos que as imagens descrevem graficamente os fenômenos que discutimos até aqui, preços de ações que crescem e caem substancialmente. Além disso, algumas análises podem ser feitas se analisarmos os log-retornos absolutos normalizados dessas ações.

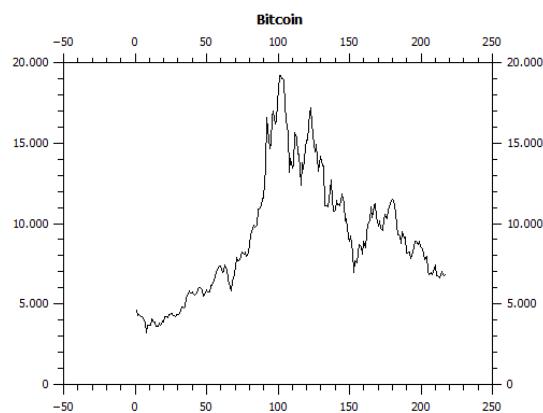


Figura 5 – Bitcoin

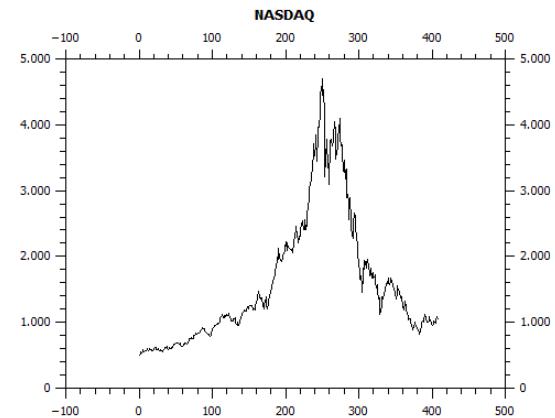


Figura 6 – NASDAQ

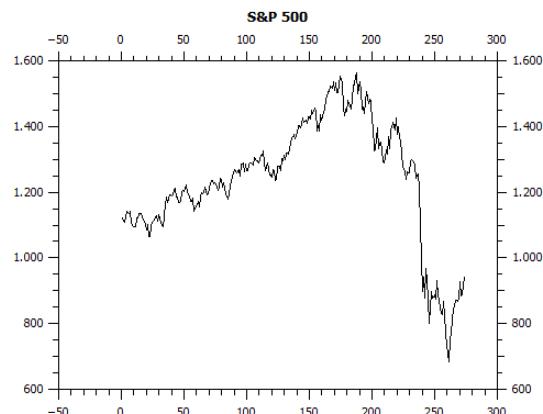


Figura 7 – S&amp;P500

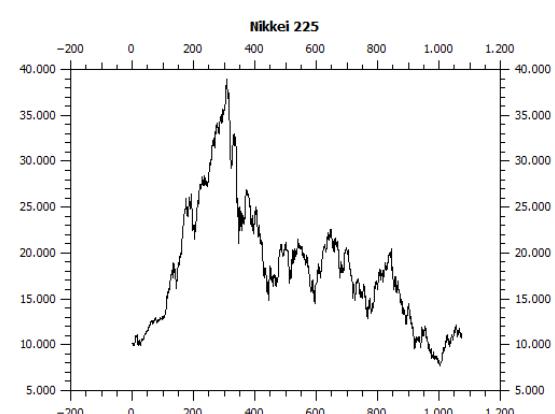


Figura 8 – Nikkei 255

A análise que será feita consiste em observar a probabilidade de encontrarmos um valor maior que um número  $x$  do log-retorno absoluto normalizado. Essa probabilidade é dada pela expressão  $P(V > x)$ . Buscamos verificar a probabilidade de encontrar valores mais altos para os log-retornos absolutos, para os dois períodos das ações estudadas. Em uma síntese, o retorno de uma ação é a medida da variação do preço ativo num intervalo de tempo.

Se dividirmos os intervalos de tempo em espaços discretos (dias, semanas ou meses), podemos expressar o log-retorno absoluto como sendo:

$$|R(t)| = |\ln(S(t)) - \ln(S(t-1))| \quad (2.1)$$

Onde  $S(t)$  representa o preço da ação no tempo. Queremos encontrar a função  $V(t)$ , dada por:

$$V(t) = \frac{|R(t)|}{\sigma} \quad (2.2)$$

Sendo  $\sigma$  o desvio padrão de  $|R(t)|$ . Vamos então plotar um gráfico no formato semi-log para  $P(V(t) > x)$  em função do valor  $x$ .

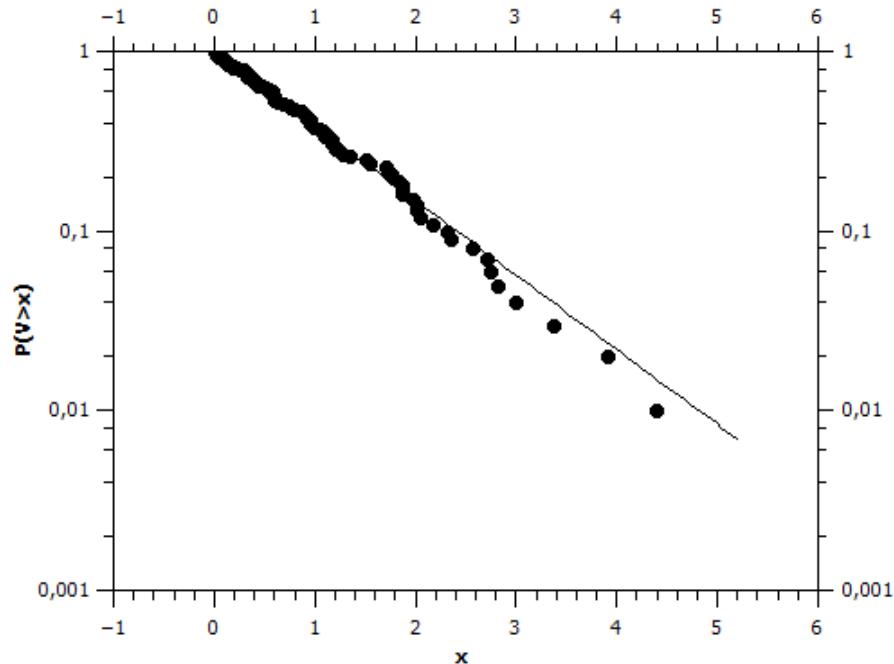


Figura 9 – Probabilidades para a ação Bitcoin no período de bolha.

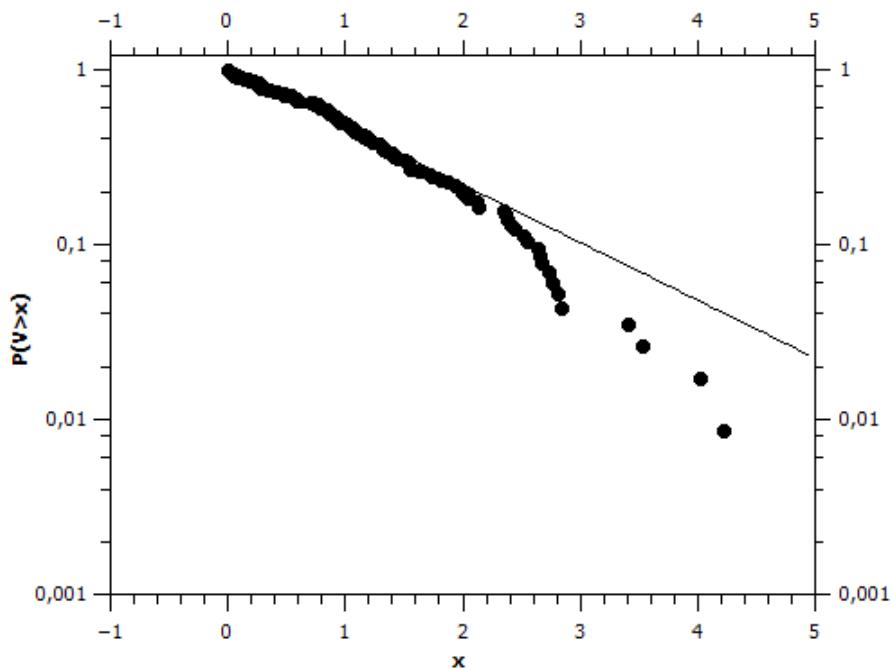


Figura 10 – Probabilidades para a ação Bitcoin no período de crise.

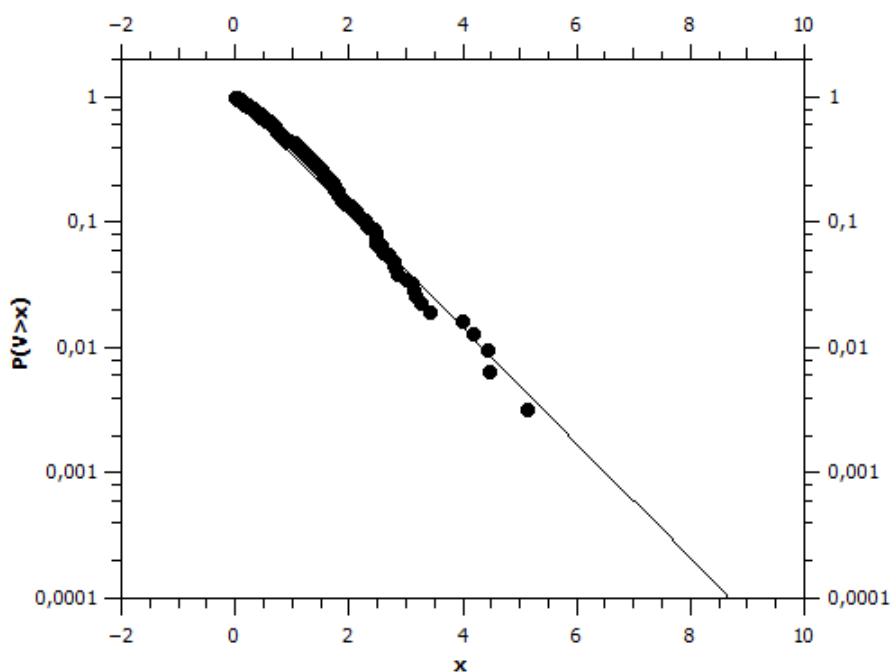


Figura 11 – Probabilidades para o índice Nikkei 225 no período de bolha.

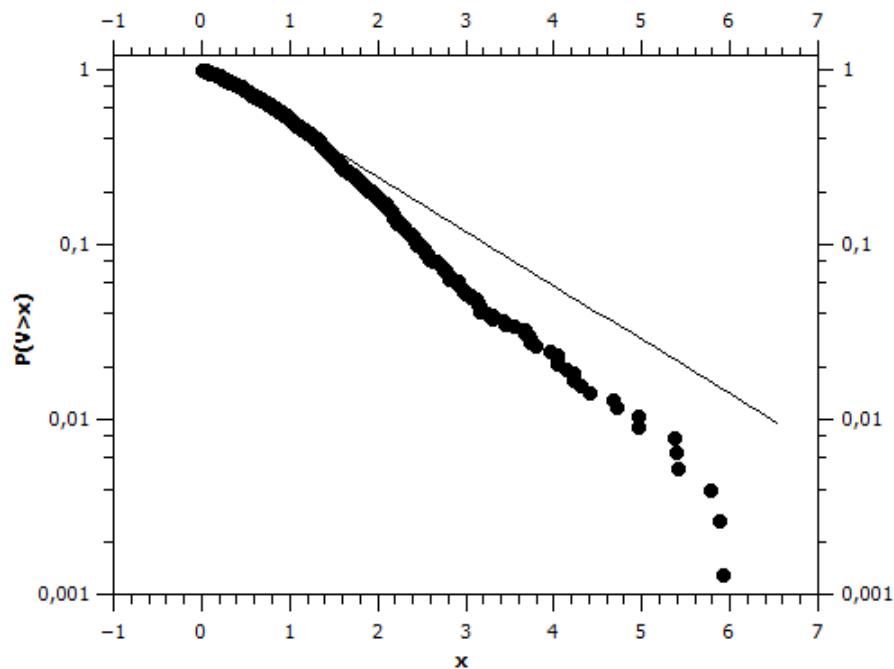


Figura 12 – Probabilidades para o índice Nikkei 225 no período de crise.

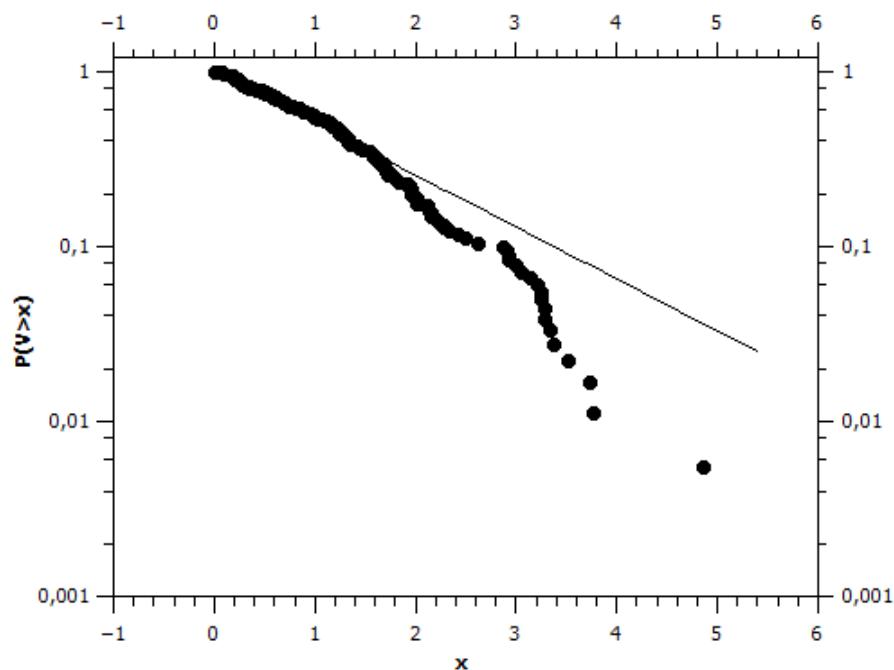


Figura 13 – Probabilidades para o índice S&P500 no período de bolha.

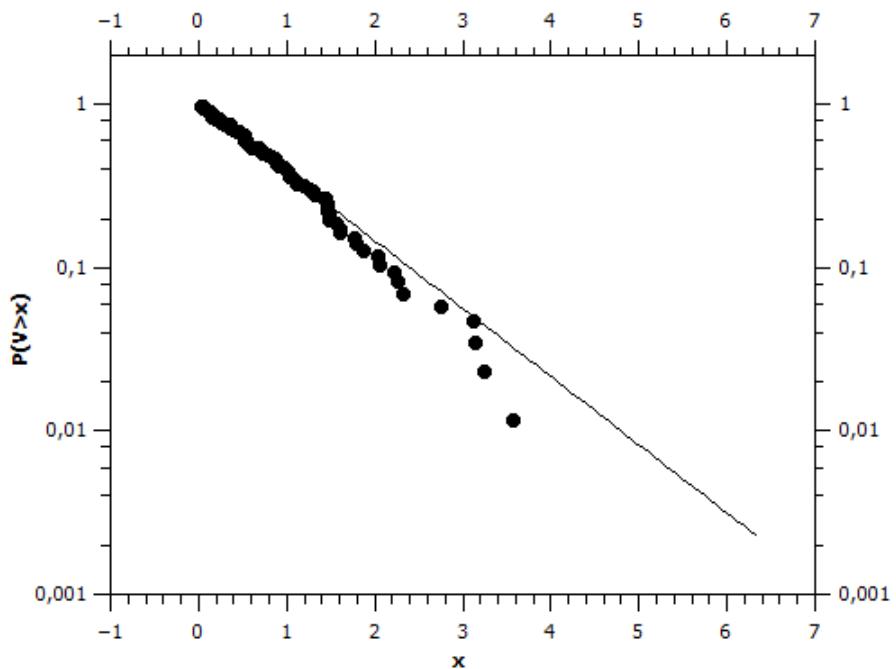


Figura 14 – Probabilidades para o índice S&P500 no período de crise.

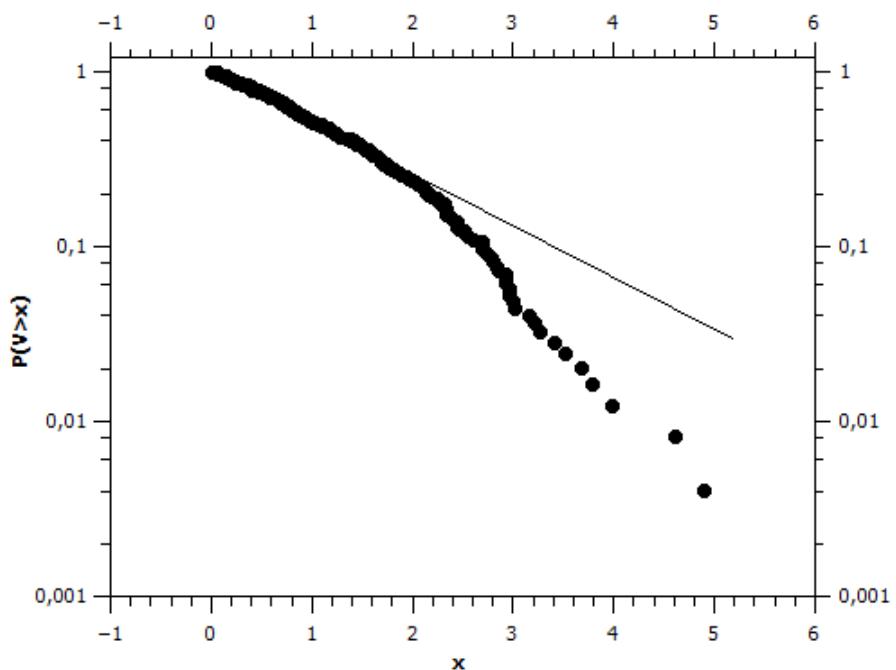


Figura 15 – Probabilidades para o índice NASDAQ no período de bolha.

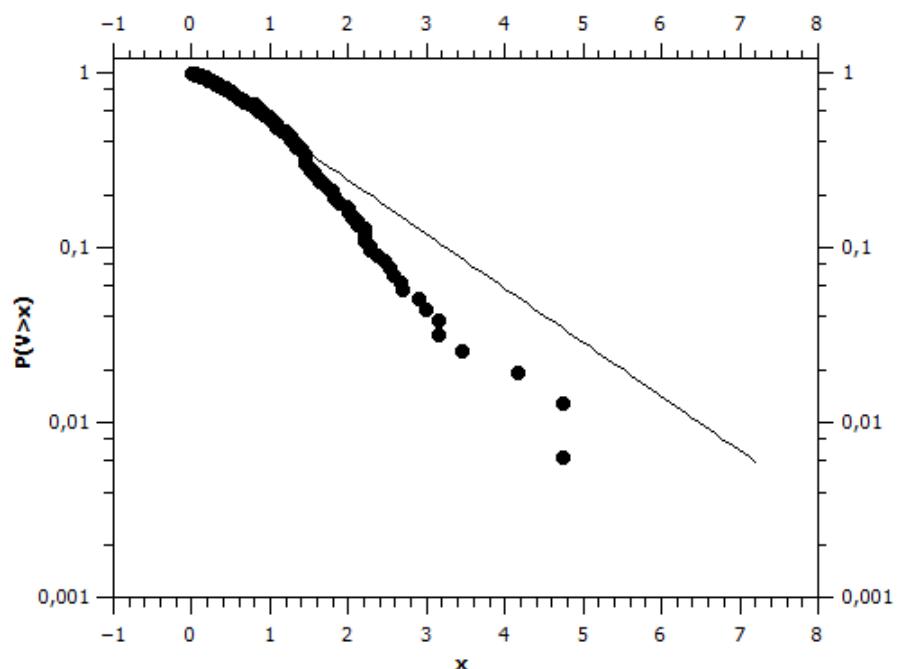


Figura 16 – Probabilidades para o índice NASDAQ no período de crise.

Os ajustes presentes nas figuras 9-16 são da forma:

$$P(V > x) = \exp(-ax) \quad (2.3)$$

Os coeficientes "a" dos ajustes estão presentes na tabela 2.

Título	Período de Bolha	Período de Crise
Bitcoin	0.95	0.76
Nikkei 225	1.05	0.71
S&P	0.68	0.96
NASDAQ	0.67	0.71

Tabela 2 – Parâmetros dos ajustes para os gráficos 9-16.

Usando como exemplo o caso Bitcoin, podemos perceber que o coeficiente para o período de bolha é maior do que para o período de crise. Esse detalhe representa o fato de que para esse caso, há uma possibilidade maior de se encontrar log-retornos absolutos mais elevados na crise. Em resumo, para o caso Bitcoin, no período de crise as variações do preço das ações foram mais severas. A figura 17 ilustra essa ideia. A ideia análoga se aplica aos outros índices no qual foram feitas as análises.

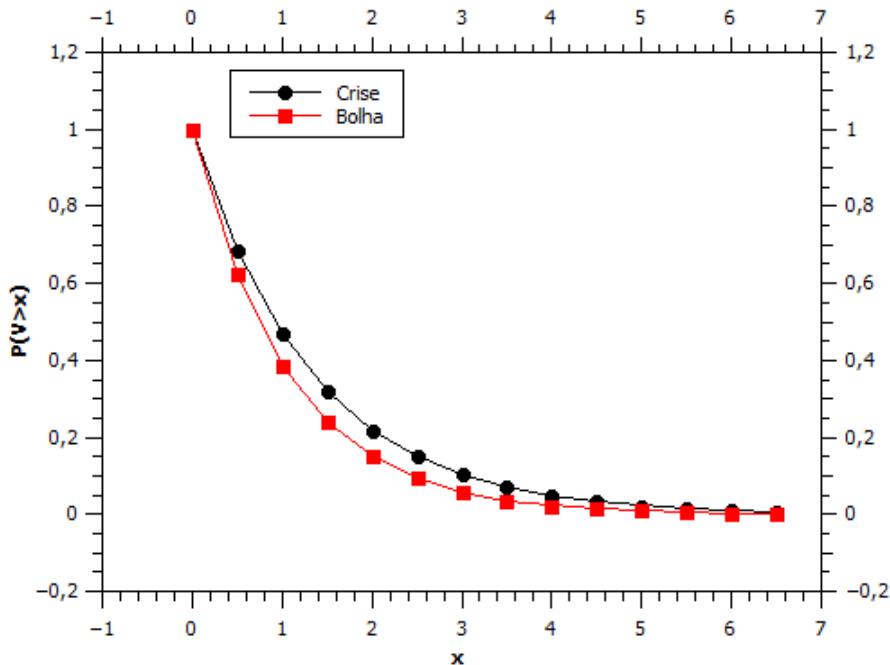


Figura 17 – Comparação das distribuições  $P(V > x)$  para os períodos de bolha e crise.

Ao iniciarmos a análise dos log-retornos, havia uma estimativa de que houvesse um padrão para os parâmetros quando comparados entre períodos de bolha e crise. Seguindo a lógica de nossas análises, curvas que possuam parâmetros maiores caem mais rápido,

---

assim, há uma probabilidade menor da incidência de um valor  $x$  do que numa curva que apresente um valor menor para  $a$ . A expectativa de que um padrão fosse observado surgia de nosso interesse em criar algum modelo mais simples para nossas análises, isso porém não pode ser percebido. No artigo (Chakrabarti) é estudada a hipótese de que o ajuste da forma  $\exp(-ax)$  pode não ser adequado em todos os casos, e um ajuste da forma  $x^{-a}$  seria mais indicado para os períodos de bolha.

Os períodos de crise geram situações dramáticas, que podem gerar problemas em setores muito amplos da economia. O índice S&P500, apresentado na figura 6, está relacionado à crise financeira de 2008, conhecida pela bolha especulativa imobiliária. Essa crise abalou o mundo e deixou algumas marcas que duram até os dias de hoje. Entendendo a importância de se evitar essas crises, pesquisadores buscam criar modelos que ajudem a prever as crises e evitar essas situações de desequilíbrio do mercado. Vamos estudar um desses modelos, conhecido como ajuste Log-Periódico.



### 3 O ajuste Log-Periódico

Seguindo a discussão apresentada anteriormente sobre o comportamento log-periódico, buscaremos ajustar nossos sistemas econômicos a partir de uma lei de potências, que é descrita da forma:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^z + C(t_c - t)^z \cos(\omega \cdot \log(t_c - t) + \Phi) \quad (3.1)$$

Nesse ajuste,  $t_c$  expressa o tempo mais provável para a quebra (fator que assume em si mesmo uma margem de erro),  $z$  controla o crescimento exponencial,  $\omega$  controla a amplitude das oscilações e os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $\Phi$ , servem para ajustar a função e não possuem um significado relevante explícito. A lei de potências log-periódica é utilizada para diversas análises, incluindo a previsão de crises financeiras. Em nosso trabalho, vamos utilizar essa expressão para ajustar o comportamento temporal das ações escolhidas.

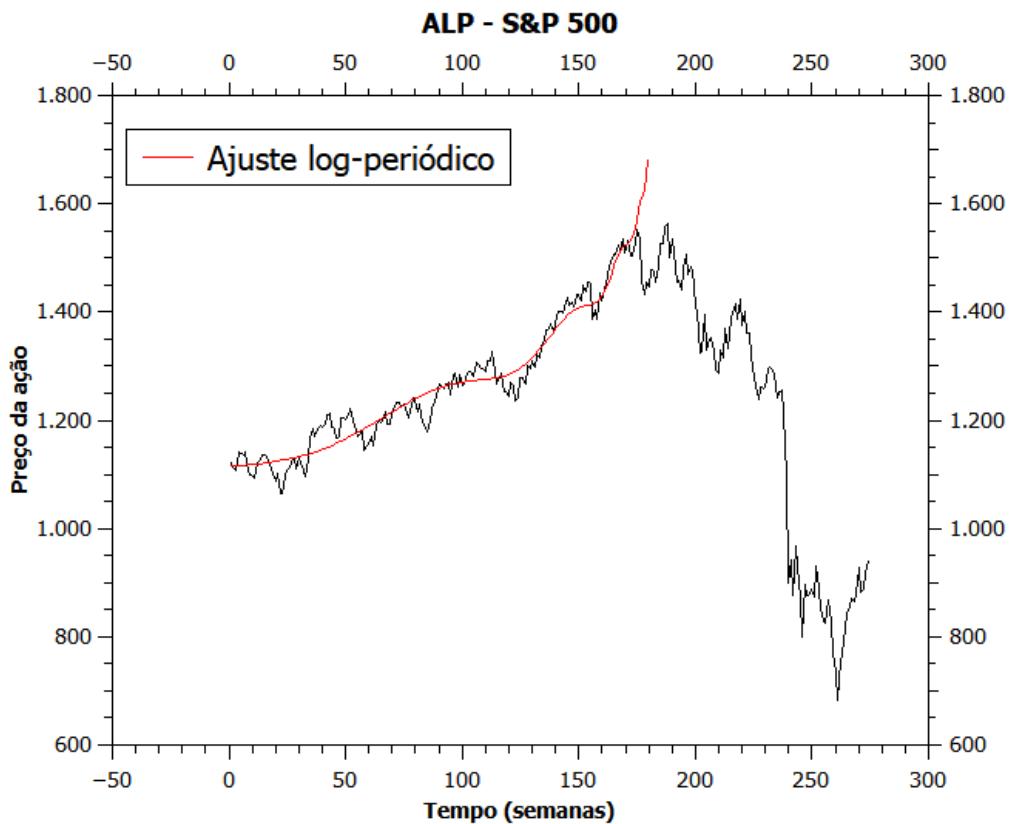


Figura 18 – Ajuste log-periódico para o índice S&P500.

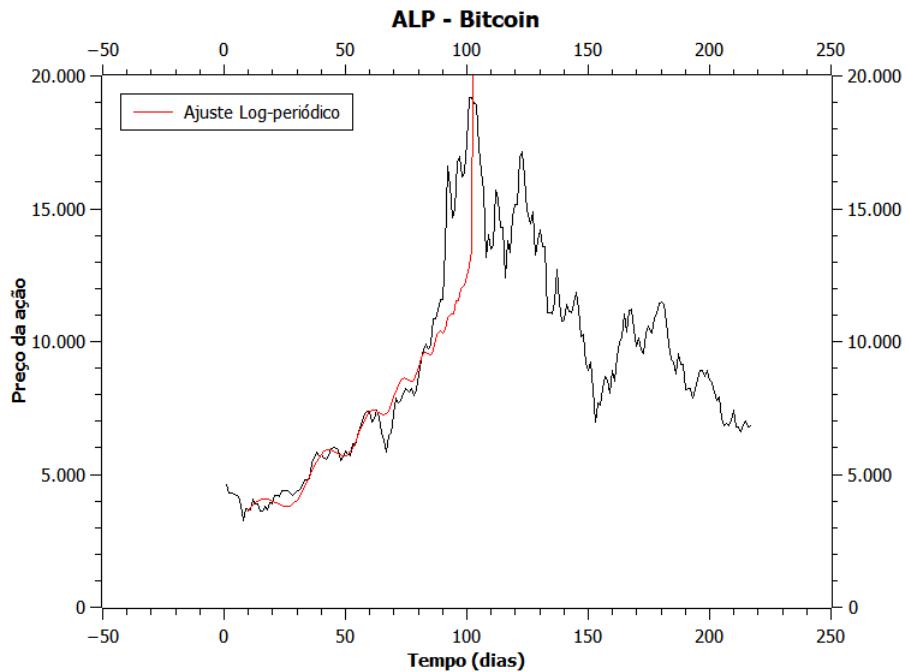


Figura 19 – Ajuste log-periódico para a ação Bitcoin.

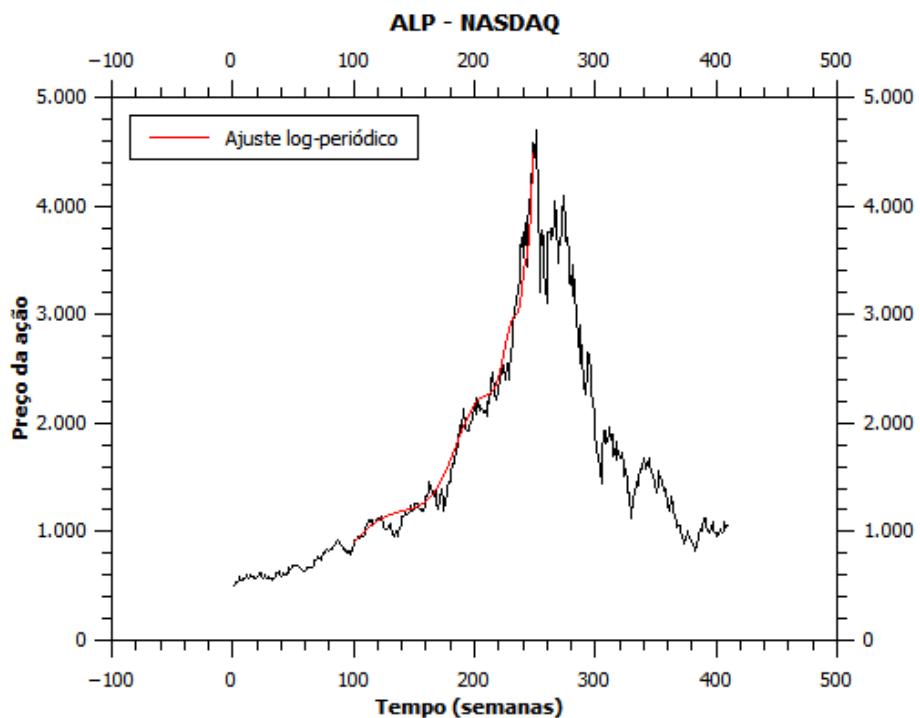


Figura 20 – Ajuste log-periódico para o índice NASDAQ.

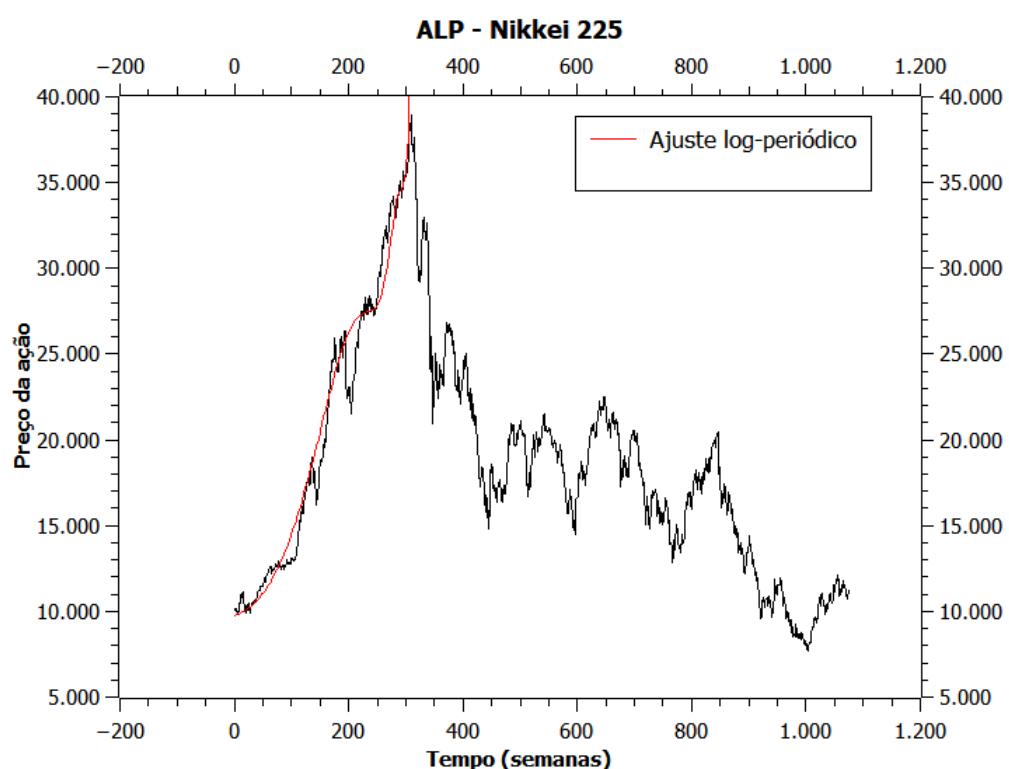


Figura 21 – Ajuste log-periódico para o índice Nikkei 225.

Os parâmetros dos ajustes estão descritos na tabela abaixo.

	<b>Bitcoin</b>	<b>NASDAQ</b>	<b>Nikkei 225</b>	<b>S&amp;P500</b>
A	<b>13.865</b>	<b>4.806</b>	<b>39.200</b>	<b>2.177</b>
B	<b>-818,5</b>	<b>-722,9</b>	<b>-897</b>	<b>-425,8</b>
C	<b>46,8</b>	<b>31,3</b>	<b>118,4</b>	<b>9,08</b>
$t_c$	<b>102,5</b>	<b>248,4</b>	<b>307,9</b>	<b>182,3</b>
$\Phi$	<b>-1,2</b>	<b>5,6</b>	<b>-6,3</b>	<b>1,14</b>
z	<b>0,568</b>	<b>0,345</b>	<b>0,6</b>	<b>0,17</b>
$\omega$	<b>39,3</b>	<b>-14,4</b>	<b>9,3</b>	<b>15,3</b>

Tabela 3 – Parâmetros dos ajustes log-periódicos para os índices estudados.

Foi possível perceber durante a realização deste trabalho que o ajuste funcionou bem para a maioria dos índices, apresentando alguns problemas apenas para os dados históricos da ação Bitcoin. A consideração que pode ser feita sobre o caso, é de que essa ação apresentou um comportamento acima do que é esperado, até mesmo para a previsão da log-periodicidade. Essa ação, em um dado momento, começou a crescer de maneira tão acentuada, que até mesmo o ajuste log-periódico não conseguiu prever e ajustar esse crescimento.

Em geral, foi possível fazer boa utilização do ajuste, e iremos utilizar os parâmetros obtidos para realizar algumas simulações computacionais mais a frente. Vamos discutir um pouco sobre como vamos utilizar essas curvas nas análises que serão feitas para as opções.

### 3.0.1 Aplicação do ajuste log-periódico à precificação de opções

Separamos essa tópico para discutir os processos que serão feitos posteriormente. Considerando que o ajuste log-periódico nos permite realizar diversos procedimentos, inclusive a previsão da quebra de uma bolsa, queremos utilizar essa curva em conjunto ao método numérico de precificação de opções, que será apresentado a frente. A ideia consiste em modelar o comportamento do mercado, de forma que ele ainda possa oscilar livremente, mas sempre tendendo a se comportar com uma log-periodicidade. Assim, queremos que a função log-periódica ajustada funcione como um peso para os valores das ações no tempo. As ações ainda podem flutuar livremente, mas sempre vão tender a caminhar para o valor estimado no ajuste log-periódico.

Antes de realizarmos os procedimentos numéricos e computacionais, vamos apresentar a mais conhecida solução para a precificação, que consiste na solução de uma equação diferencial estatística.

## 4 Método de Black-Scholes

A fórmula de Black-Scholes é um dos métodos mais utilizados (se não o mais utilizado) para a precificação de opções. Por ser gerar uma solução explícita, a adaptação dessa solução para os mais diversos tipos de usos é bastante adequada. Diversos softwares possuem pacotes prontos para a utilização dessa expressão, reduzindo a necessidade de se apelar para métodos numéricos, como o de Monte-Carlo. O comportamento dos preços das ações geralmente são expressos por processos de *Wiener*, ou como conhecemos na física, movimentos *brownianos*. Um processo de *Wiener* é um tipo específico do processo estocástico de Markov. Um processo de Markov é um processo estocástico onde apenas o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, ou seja, o histórico dessa variável é irrelevante.

Como o preço da opção é uma função do preço da ação subjacente e do tempo, podemos então considerar que esse é uma função de variáveis estocásticas. Um importante resultado envolvendo variáveis estocásticas é conhecido como *lema de Itô*. Suponhamos que o valor de uma variável  $x$  siga o chamado processo de *Itô*:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (4.1)$$

onde  $dz$  é o processo de Wiener. O lema de Itô diz que uma função  $G$ , de  $x$  e  $t$ , segue o processo:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz \quad (4.2)$$

Queremos porém descrever não uma variável  $x$  qualquer no processo de Itô, mas uma variável  $S$ , que representa o preço da ação subjacente. A adaptação feita na equação 4.1 é da forma:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (4.3)$$

Na equação 4.3,  $\mu$  representa a taxa de desvio e  $\sigma$  representa a volatilidade histórica da ação. A partir das equações 4.2 e 4.3 temos:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (4.4)$$

O próximo passo é escolher uma carteira adequada para a ação e o derivativo, de forma em que possamos eliminar a risco gerado pelo processo de Wiener. Aqui a aleatóriedade desse processo de Wiener é o que gera risco para nossa carteira. Vamos estabelecer o valor da carteira como:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (4.5)$$

Uma mudança diferencial discreta na equação 4.5 em um instante  $\Delta t$  é dada por:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (4.6)$$

O passo a seguir é bastante importante. Vamos tomar a forma diferencial discreta da equação 4.4 juntamente com a equação 4.3, e substituir ambas na equação 4.6. O resultado dessa substituição é:

$$\Delta\Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (4.7)$$

Podemos perceber que essa equação não envolve o processo de Wiener  $\Delta z$ , assim, durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  a carteira escolhida não deve apresentar riscos. A partir de premissas econômicas, que envolvem basicamente reduzir a chance de especuladores lucrar sem riscos, podemos apresentar a seguinte relação para nossa carteira:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (4.8)$$

onde  $r$  é a taxa de juros livre de risco. Substituindo-a nas equações 4.5 e 4.7, vamos obter:

$$\left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t \quad (4.9)$$

Ordenando os temos chegamos à:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (4.10)$$

A equação 4.10 é a equação diferencial de Black e Scholes. As soluções para essa equação são diversas, e olhando de forma matemática, o derivativo que é obtido quando resolvemos a equação é caracterizado pelas condições de contorno aplicadas. Nesse trabalho queremos estudar apenas as opções européias de venda. As opções de compra também

podem ser obtidas a partir da paridade entre *puts* e *calls*. O resultado encontrado para o derivativo é:

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (4.11)$$

Na expressão 4.11,  $N(x)$  é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável com média zero e desvio padrão 1.

As variáveis  $d_1$  e  $d_2$  são descritas por:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (4.12)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (4.13)$$

Na equação 4.11 existe uma dificuldade no cálculo da função distribuição normal acumulada. Existem tabelas que dão esses valores e também procedimentos numéricos que podem ser utilizados para fazer esses cálculos. Além disso, o fator  $\sigma$  que está relacionado aos dados históricos dos preços da ação subjacente. Apesar disso, como dito anteriormente, diversos softwares modernos possuem pacotes prontos para realizar a precificação. Contudo, uma fórmula explícita para a precificação não atende às expectativas desse trabalho, sendo assim, iremos trabalhar com métodos numéricos.

Queremos adaptar um método computacional já conhecido para que a precificação seja mais adequada com o valor de uma ação que segue um comportamento log-periódico.



## Parte II

### Título da parte II



## 5 Precificação de opções por método de Monte-Carlo

Com o avanço da tecnologia, os métodos computacionais para a realizações de diversos cálculos relacionados ao cenário financeiro, devido ao aumento da eficiência e velocidade na obtenção desses dados. Um ponto importante sobre esses métodos numéricos é a flexibilidade de serem feitas modificações e implementações. O método de Monte Carlo se mostra uma escolha adequada para trabalharmos a precificação das opções que estamos tratando nesse trabalho, e o método é caracterizado principalmente pela dependência do caminho que a precificação toma, considerando que as simulações são baseadas unicamente em *payoffs* hipotéticos, cujo comportamento segue um padrão estocástico, conhecido na física em diversas outras aplicações.

Vamos iniciar nossa discussão apresentando o método e como foi desenvolvido o programa para avaliarmos a precificação das opções.

A lei dos grandes números, que é um teorema fundamental da probabilidade, nos diz que se há uma amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  onde cada um dos números é uma medida independente e com o valor estimado de  $X_i$  sendo dado por:

$$E(X_i) = \mu \quad (5.1)$$

para cada  $i$ , onde  $\mu$  é um número finito, podemos então definir:

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad (5.2)$$

com  $n \rightarrow \infty$ .

A ideia básica do nosso programa consiste em criar diversas simulações para um valor de payoff  $V(T)$  onde  $T$  é a data do vencimento da opção. O fator estocástico é responsável pela dinâmica aleatória da nossa simulação, buscando gerar o caso mais próximo possível da realidade.

Nossa equação básica para a valoração das opções pode ser descrita por:

$$V(t) = e^{-r(T-t)} E_t^*[V(T)] \quad (5.3)$$

Essa expressão representa o valor esperado para o *payoff* em um cenário de risco neutro. Nesse caso, fazendo uma analogia com o que foi apresentado anteriormente, nossa variável aleatória nesse caso é o valor final do payoff da opção  $V(T)$ . Vamos estimar o valor médio de  $V(T)$  pelo método de Monte Carlo.

A ideia é utilizar o método para computar diversos caminhos possíveis. Calculamos um primeiro caminho que gere um payoff, chamamos então de  $V(T)_1$ . Depois, calculamos outro caminho possível que gere um outro payoff  $V(T)_2$ . Vamos fazendo simulações de caminhos possíveis até que seja gerado um payoff  $V(T)_n$ , que gere uma média:

$$\overline{V(t)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(T)_i \quad (5.4)$$

A equação 5.4 tende a  $E_t^*[V(T)]$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Nosso valor estimado para o preço da opção é então definido como:

$$\widehat{V(t)} \equiv e^{-r(T-t)} \overline{V(t)} \equiv e^{-r(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(T)_i \quad (5.5)$$

Contudo, não tratamos ainda de como é definida a expressão que gera as simulações  $V(T)_i$ . Assim como no caso do método de Black-Scholes, quando trabalhamos com Monte Carlo, também temos uma expressão bem definida que é responsável por toda a dinâmica da nossa precificação.

A expressão responsável por caracterizar nosso algoritmo é:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\Delta t) + \sigma \sqrt{(\Delta t)} \epsilon_{j+1}]} \quad (5.6)$$

Dividimos o nosso intervalo em espaços de tempo igualmente divididos, onde  $\Delta t$  é igual a  $\frac{1}{365}$ . Definimos um valor inicial para a ação, da forma  $S(t_0)$ . Cada simulação gera um caminho de payoff  $V(T)_i$  onde:

$$V(T)_i = \max(stk - S(T_J)_i, 0) \quad (5.7)$$

Aqui,  $J$  representa o número de dias até o vencimento da opção e  $stk$  é o valor de strike na data do vencimento. A média dos payoffs  $V(T)_i$  converge para o valor esperado

para o preço da opção pelo método de Black-Scholes ao passo que o número de simulações  $n$  aumenta. É parte fundamental de nosso trabalho verificar a precisão do método computacional em relação ao método analítico de Black-Scholes, contudo, vamos antes explicar como funciona o algoritmo que especifica a opção.

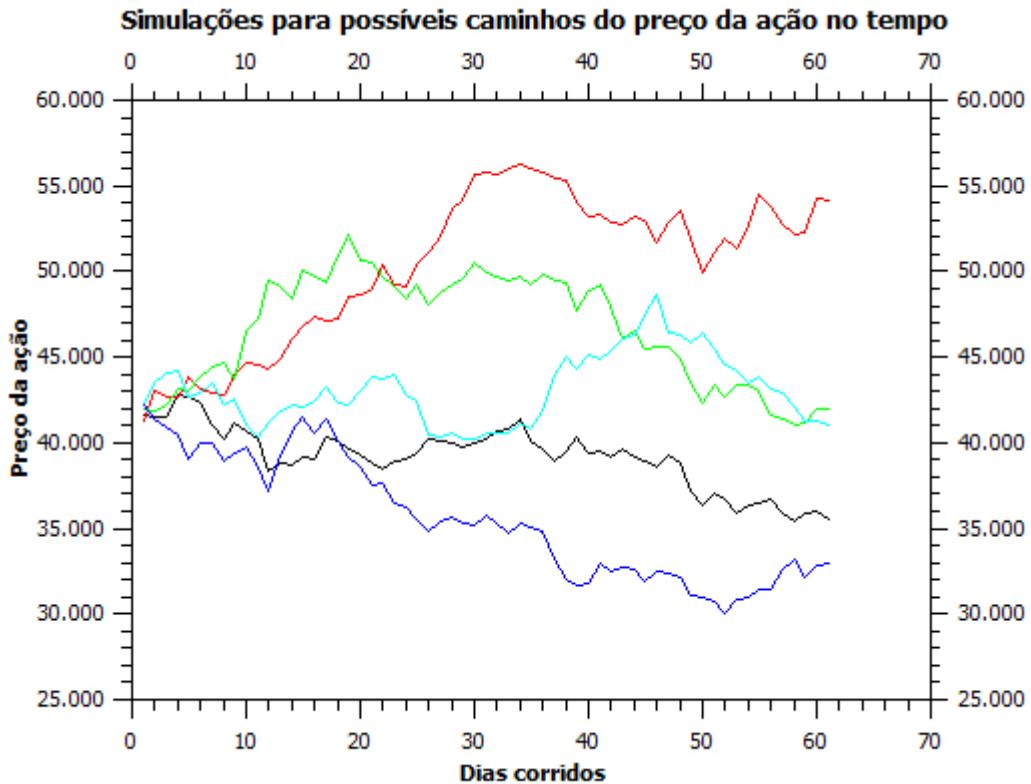


Figura 22 – Simulações para possíveis caminhos do preço da ação no tempo. O programa realiza um número elevado dessas simulações para chegarmos ao valor final da precificação.

## 5.1 Algoritmo da simulação

Considerando o que já foi falado anteriormente, vamos apresentar uma síntese do funcionamento do programa de precificação de opções. Ao criamos o programa, definimos inicialmente a leitura dos valores fundamentais para a simulação, como valor do strike no vencimento, valor inicial da ação, taxa de juros da economia, volatilidade da ação e número de dias para o vencimento. Ao definirmos esses parâmetros, aplicamos esses valores na equação 5.8, fazendo o parâmetro  $j$  variar de 0 até  $J - 1$ . Ao fim, quando chegamos a  $S(t_J)$ , ou seja, o valor simulado do preço da ação no vencimento, simulamos então o payoff apresentado em 5.7 e guardamos este valor. Repetimos este processo  $n$  vezes, compreendendo que a estimativa se torna mais precisa quando maior o número  $n$ . A média das  $n$  simulações tende a convergir ao valor esperado para o preço da opção conforme  $n$  tende a  $\infty$ .

## 5.2 Exemplo de precificação para uma *Put* européia por método de Monte Carlo

Baseado no exemplo apresentado no livro -88888-, vamos fazer uma simulação para os seguintes valores:

$\lambda$	\$45
$S_0$	\$41.75
$\sigma$	0.34
r	5.35%
J	61 Dias

Tabela 4 –

Aqui,  $\lambda$  representa o valor do strike no vencimento,  $S_0$  o valor da ação na data inicial e  $r$  a taxa de juros com o que funciona a economia. Usando esses valores na expressão 5.8, teremos:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) e^{[(0.0535 - \frac{1}{2}0.34^2)(\frac{1}{365}) + 0.34\sqrt{(\frac{1}{365})}\epsilon_{j+1}]} \quad (5.8)$$

Para essa aplicação, temos  $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ , e os valores  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_J$  é um número aleatório de uma distribuição normal de média zero e desvio padrão = 1. A média dos payoffs converge para um valor da *put* européia, gerada por método de Black-Scholes, de \$4.08, ao passo que a quantidade de simulações  $n$  aumenta.

Desenvolvemos então um programa que busca verificar a evolução (melhoria) desse processo, conforme o número  $n$  de simulações aumenta. Esse programa realiza diversas precificações, e ao passo que uma é realizada, as próximas precificações são feitas com um número maior de simulações. O que foi percebido durante o trabalho, é que em aproximadamente  $n = 20.000$  a qualidade da convergência do programa, ou seja, o quanto o programa converge para o valor esperado para a precificação, começa a crescer lentamente conforme aumentamos o número  $n$ . A figura 23 mostra como a qualidade do programa evolui com  $n$  variando de 0 a 100.000.

Na análise, usamos três métodos diferentes para encontrarmos o valor para o número gerado de uma distribuição normal. Usamos o teorema do limite central, o método descrito por Abramowitz and Stegun e o último método descrito por G. Marsaglia e T. A. Bray. Observamos que o comportamento do programa não é afetado de maneira significativa com relação ao método escolhido para gerar a variável aleatória, assim, iremos usar nas análises seguintes o método do teorema do limite central (CLT). O método CLT

foi escolhido por se mostrar mais rápido do que os outros.

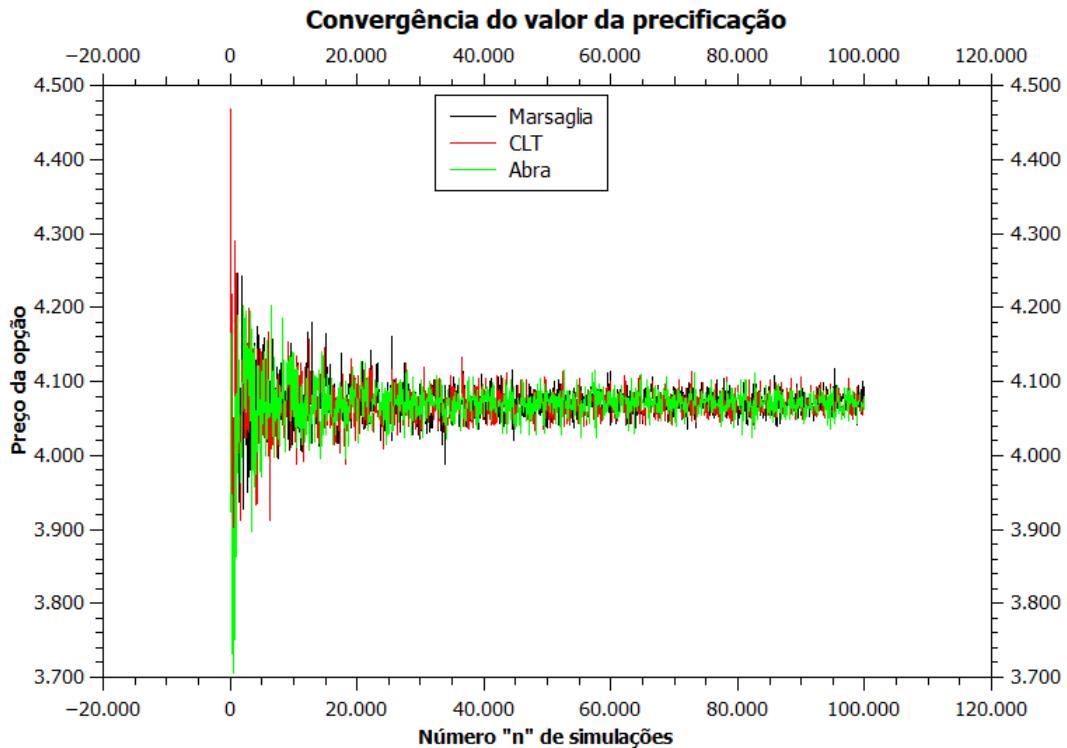


Figura 23 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita para três métodos diferentes para gerar a variável aleatória.

Um ponto importante a se destacar com relação ao método de Monte Carlo é o fato de que ele é lento. Apesar de ser bastante adequado para as análises feitas durante esse trabalho, o tempo que o programa levou para precificar uma opção foi em torno de 55.8 segundos, o que pode ser considerado pequeno para um estudo acadêmico do caso, mas não é viável quando tratamos de um sistema tão dinâmico quanto o mercado de ações, onde esse tempo pode ser o suficiente para que o preço de uma ação mude de forma substancial. Para realizar a precificação proposta no programa, usamos  $n = 2.500.000$ , valor que consideramos rasoavelmente elevado, porém apresentou convergência adequada com o esperado valor de \$4.08. Alteramos o programa de forma que ele fizesse 100 simulações diferentes para  $n = 2.500.000$ , então montamos um histograma, apresentado na figura 24, com os valores obtidos e o número de ocorrências. O dados apresentaram uma média de \$4.082 com um erro de 0.001.

$$\widehat{V(T)} = 4.082 \pm 0.001 \quad (5.9)$$

Devemos destacar o fato de que o programa gera resultados com uma precisão muito maior nas casas decimais dos valores da precificação, porém, buscamos precisão

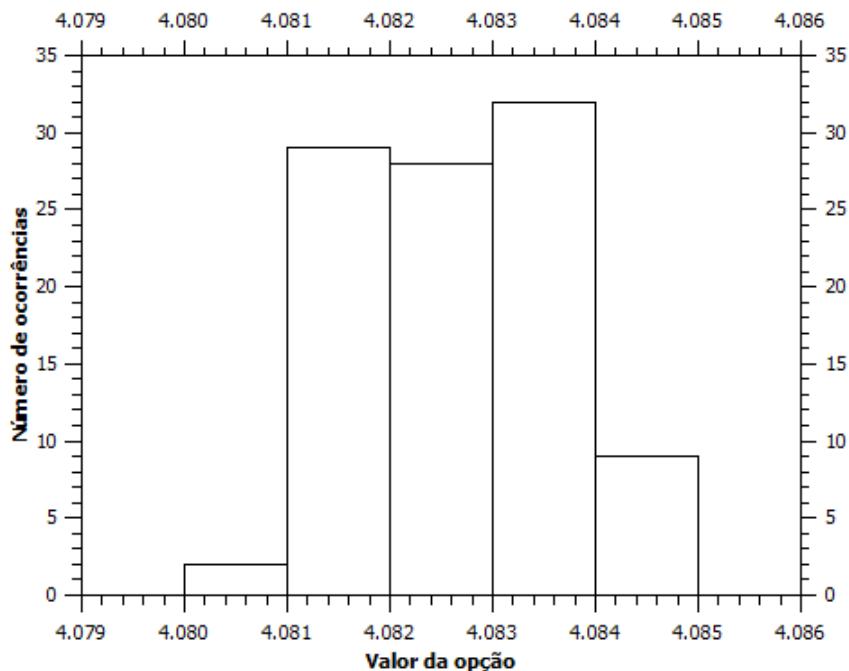


Figura 24 – Histograma com os intervalos do valores da opção e o número de ocorrências.  
O valor utilizado para  $n$  nessa simulação foi de 2.500.000.

apenas na segunda casa decimal, que nesse caso representaria os centavos.

Para confirmar o intervalo do valor  $n$  para o qual nosso programa apresenta a convergência adequada, rodamos novamente o código discutido anteriormente, agora fazendo  $n$  variar de 0 até 1.465.000 e geramos um gráfico, que está apresentado na figura 25.

A figura 26 mostra uma aproximação visual do gráfico apresentado na figura 25. Podemos perceber que para  $n$  superior a 1.300.000 o programa começa a convergir conforme o esperado. Vamos também estudar uma técnica simples para reduzir a variância do método de Monte Carlo, chamada técnica da variável antitética (antithetic variable technique).

### 5.2.1 Técnica da variável antitética.

Existem métodos que ajudam a reduzir a variância do método de Monte Carlo, aumentando a precisão das estimativas numéricas que são geradas. A TVA (técnica da variável antitética) consiste em uma simples mudança no algoritmo do nosso programa base, que reduz consideravelmente a variância em nossos resultados. A técnica consiste em calcular os preços  $\widehat{V}(T)$  usando as variáveis aleatórias  $\epsilon_j$ , e também calcular novos preços

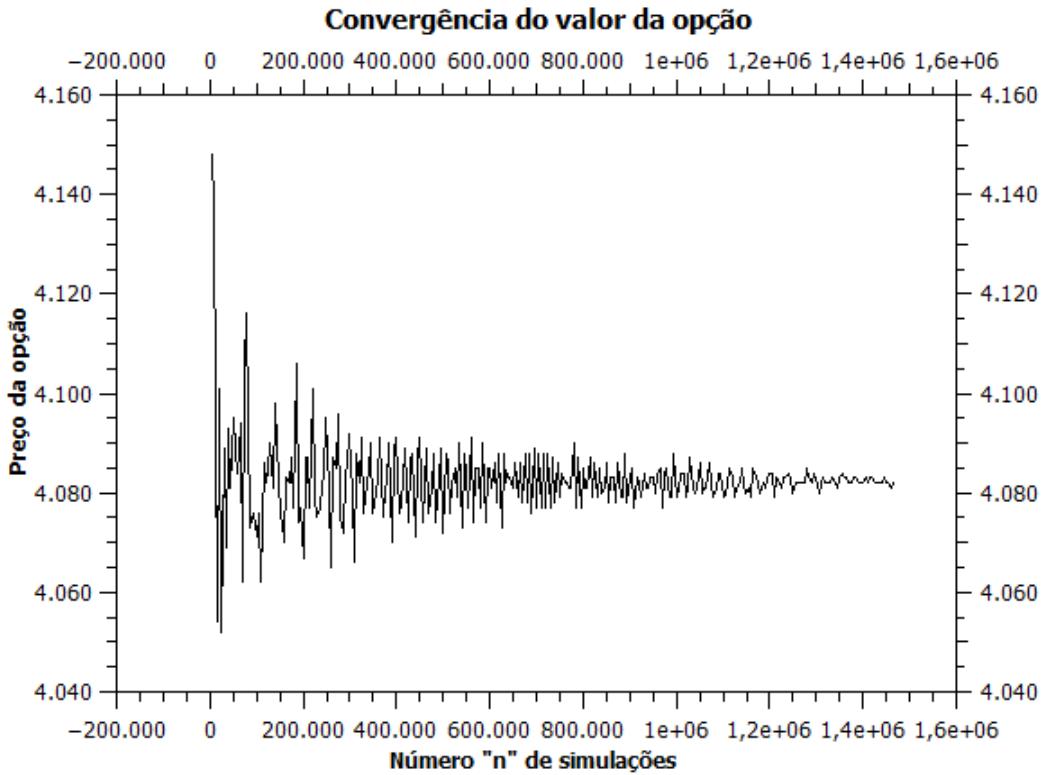


Figura 25 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita com método CLT. Número "n" variando de 0 a 1.465.000.

$\widehat{V(T)}'$  usando uma nova variável  $-\epsilon_j$ . Chegamos então ao resultado de que a média:

$$[\widehat{V(T)} + \widehat{V(T)}']/2 \quad (5.10)$$

é mais precisa, ou seja reduz a variância do programa. Percebemos que apesar de mais precisa, essa simulação exige mais da capacidade de processamento, assim, os processos realizados se apresentaram mais lentos que o usual.

Se compararmos a figura 27 com 23, podemos perceber que a técnica da variável antitética torna o programa mais preciso para o mesmo intervalo da variável  $n$ . Existem outros métodos para reduzir a variância do método numérico de Monte Carlo, porém esses não serão discutidos aqui.

### 5.3 Cálculo da volatilidade a partir de dados históricos

Um dos fatores mais importantes nesse trabalho está ligado a como analisamos as oscilações do preço de um ativo. Buscamos calcular a volatilidade, aqui denotado por  $\sigma$ , para realizar as diversas análises propostas para os índices. Há um método para calcular a

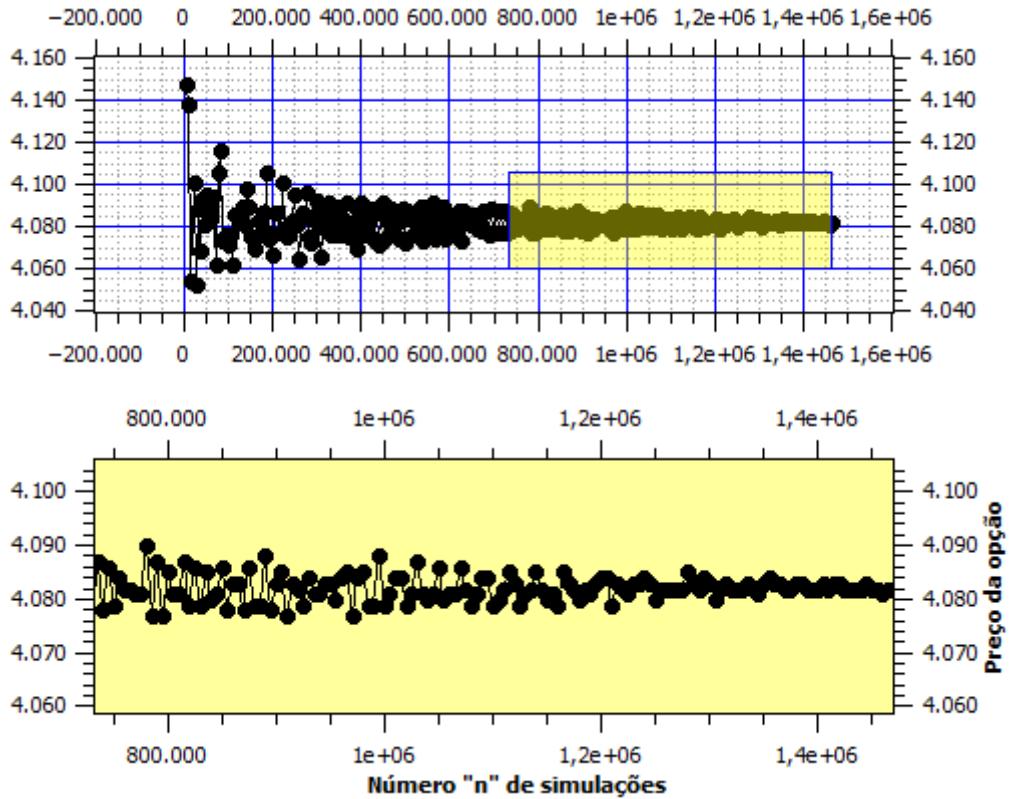


Figura 26 – Aproximação visual da figura 25.

volatilidade do preço de uma ação no tempo, considerando os dados históricos em tempos anteriores. Consideremos os seguintes fatores:

- $n + 1$ : número de observações;
- $S_i$ : preço da ação para o intervalo de tempo  $i$ ;
- $\tau$ : Intervalo de tempo em anos;

Vamos definir o log-retorno:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (5.11)$$

com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . O desvio padrão dos valores dos log-retornos é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (5.12)$$

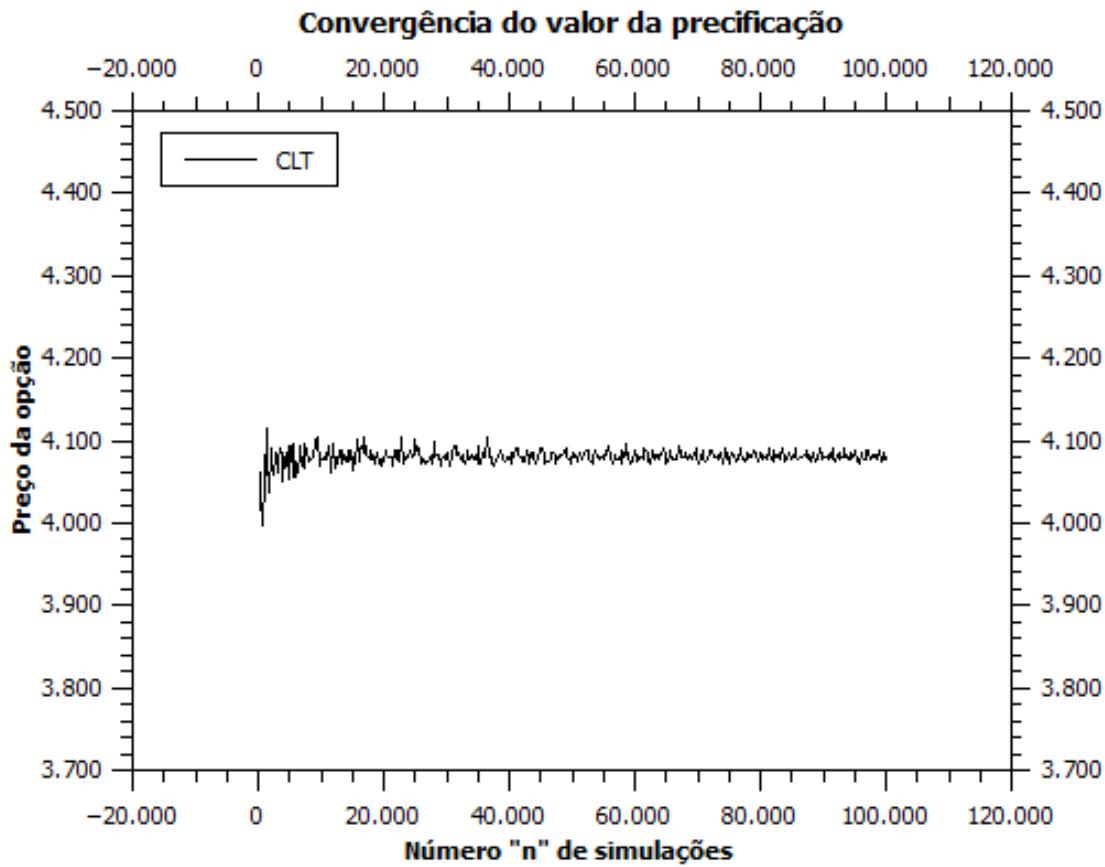


Figura 27 – Convergência do valor da opção conforme aumentamos o número de simulações no programa de precificação. Análise feita pela técnica da variável antitética.

onde  $\bar{u}$  é a média dos valores do log-retorno  $u_i$ . Podemos escrever também  $s$  da forma:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2} \quad (5.13)$$

Podemos então definir o fator  $s^* = \sigma$ , onde:

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \quad (5.14)$$

O erro padrão é de aproximadamente  $s^* / \sqrt{2n}$ .

O fator  $\tau$  vale  $1/252$ , onde o número 252 é relativo aos dias de pregão do ano. Queremos então calcular os valores para as volatilidades dos índices propostos no trabalho, em alguns momentos diferentes para cada índice. Consideramos importante encontrar esses valores para momentos chave dos preços das ações, basicamente, buscarmos em pontos antes do pico da bolha e num momento bem próximo ao pico, avaliando como

os movimentos envolvendo as opções se comportarão no período de crise. Para os quatro índices estudados, calculamos as seguintes volatilidades, para dois momentos da fase de bolha:

Índice / Ação	Data (1)	$\sigma$ (1)	Data (2)	$\sigma$ (2)
<b>BitCoin</b>	07/09/17 - 26/10/17	59,8%	07/09/17 - 14/12/17	62,52%
<b>Nikkei 225</b>	15/01/84 - 04/01/87	19,74%	15/01/84 - 10/12/89	20,96%
<b>NASDAQ</b>	01/06/95 - 19/10/97	29,26%	01/06/95 - 05/03/00	35,96%
<b>S&amp;P 500</b>	01/03/04 - 18/12/05	14,17%	01/03/04 - 23/09/07	14,82%

Tabela 5 – Volatilidade dos índices para dois momentos distintos.

A partir dos dados apresentados na tabela 5 iremos estudar como uma precificação hipotética de uma ação poderia ser comparada com valores reais no tempo. A ideia é utilizar o programa para especificar uma opção relacionada ao preço real de um ativo em uma data passada, estipulando uma data posterior para o vencimento, e verificar se nessa data haveria a possibilidade de lucro para o comprador da opção.

## 5.4 Método de Monte Carlo aplicado a casos históricos

Vamos realizar a análise citada acima para o caso da ação Bitcoin. Na data de 26/10/2017 o valor dessa ação era de \$5.810, a volatilidade era 59,8%, a taxa de juros do mercado como sendo de 5,35%, e o prazo de vencimento de 30 dias. Agora precisamos destacar um ponto importante para a análise, o valor do strike da opção, ou seja, o valor esperado para o ativo no dia do vencimento da opção. Vamos considerar que num caso excepcional, o preço da ação cresça absurdos 25% num período de 30 dias, passando de \$5.810 para \$7.262,5. Este último valor será o strike de nossa simulação. Utilizando o programa para fazer a precificação, usando os valores descritos acima como parâmetros, obtemos um valor de \$1.467,6. Assim, considerando o valor da opção, somado ao valor do ativo, o agente econômico que está negociando essa opção terá alguma vantagem econômica apenas no caso em que o preço da ação seja igual ou menor a \$7.277,6.

Porém, o que aconteceu na realidade? No dia 25/11/2017, ou seja, 30 dias depois da precificação, o valor da ação Bitcoin era de \$8.766, muito acima dos 25% que estipulamos. Podemos perceber que mesmo dentro de uma margem de erro, o valor do strike é muito abaixo ao preço da ação na data de vencimento. Podemos também simular o caso em que a precificação seja feita em um momento logo antes da crise. Vamos pegar uma data próxima ao pico do preço da ação no intervalo estudado. No dia 14/12/2017 as ações da Bitcoin valiam \$16.383 no fechamento, e utilizando a tabela 5, vamos que a volatilidade era de 62,52% na data. Sendo a taxa de juros do mercado 5,35%, o strike de \$20.478,75

(novamente 25% de acréscimo no valor da ação), e agora o período de vencimento como sendo de 60 dias, chegamos ao valor de \$4.429,13 para o valor da opção. Novamente, o que aconteceu de fato? Agora a situação se torna completamente diferente, e favorável agentes que buscam vantagens econômicas operando essas opções. O período de crise levou o preço das ações da Bitcoin à quantia de \$8.901, sendo assim, o agente que possui a opção de venda dessa ação, poderá vender por \$20.478,75 uma ação que vale \$8.901, uma diferença de \$11.577,75 que será paga pelo ofertante da opção. Os valores apresentados no trabalho são de certa forma elevados para um caso real, mas ilustram bem a idéia que queremos passar. Outro detalhe a se considerar é que essas opções, geralmente, são vendidas em pacotes com diversas quantidades, por exemplo, pacotes com 100 opções.

As mesmas análises foram feitas para os outros três índices estudados nesse trabalho, avaliando a precificação num momento do crescimento da bolha e logo perto da quebra do mercado. Os resultados estão expressos nas tabelas 5.4 e 5.4.

	BitCoin	Nikkei	NASDAQ	S&P 500
<b>Data (1)</b>	26/10/17	04/01/87	05/09/1999	24/09/2006
<b>Preço da ação na data</b>	5.890	18.810	2.535	1.336
<b>Volatilidade (<math>\sigma</math>)</b>	59,80%	19,74%	52,86%	22,82%
<b>Prazo de vencimento</b>	30 dias	90 dias	90 dias	90 dias
<b>Valor do Strike</b>	6.183	19.738	2.870	1.412
<b>Preço da opção</b>	596,31	1.135,11	455,40	95,03
<b>Valor da ação no vencimento</b>	8.766	22.739	3.203	1.418

Tabela 6 – Precificação de opções para um período no intervalo de bolha financeira.

	BitCoin	Nikkei	NASDAQ	S&P 500
<b>Data (2)</b>	14/12/17	10/12/89	05/03/2000	23/09/2007
<b>Preço da ação na data</b>	16.383	38.271	4.587,16	1.526,75
<b>Volatilidade (<math>\sigma</math>)</b>	62,52%	20,96%	35,96%	14,82%
<b>Prazo de vencimento</b>	30 dias	90 dias	90 dias	90 dias
<b>Valor do Strike</b>	17.236	40.276	4.999,54	1.583
<b>Preço da opção</b>	1.617	2.474,25	542,03	65,55
<b>Valor da ação no vencimento</b>	14.191	32.616	3.760,26	1.411,63

Tabela 7 – Precificação de opções para uma data próxima do início da crise financeira.

É possível notar nas tabelas que em todos os casos a opção de venda seria lucrativa para o agente econômico que a possuísse. Vamos expor na sessão os argumentos que nos levam a crer que há a necessidade de se considerar uma correção no modelo número da precificação de opções. Porém, vamos antes disso, imaginar em uma breve discussão como se dão as opções de compra nos mesmos períodos estudados.

### 5.4.1 A contrapartida das opções de compra

Discutimos acima as vantagens e desvantagens de se investir em opções de venda nos períodos de crise e bolha financeira. Mas de modo geral, como se comportam as opções de compra? Para essas é fácil perceber que a situação se inverte, existindo vantagem no período de bolha e desvantagem no período de crise. Todas análises feitas até aqui se tornam análogas para o caso das opções de compra, então não iremos explicitar-las.

Feitas todas as análises propostas, vamos agora realizar uma aplicação do ajuste log-período ao método numérico descrito ao longo desse capítulo.

## Parte III

Título da parte III



## 6 Ajuste log-periódico aplicado ao método de Monte-Carlo para precificação de opções

Vamos agora tratar da análise fundamental deste trabalho. Nossa intenção aqui é propor um ajuste para o método numérico de Monte-Carlo para precificação de opções. A vantagem da precificação a partir de uma técnica computacional é o fato de podermos propor essas mudanças e verificar, quase que imediatamente, a coerência das novas mudanças com os resultados esperados.

A figura 22 mostra que o algoritmo usado na precificação numérica de Monte-Carlo prevê um sistema econômico que pode evoluir no tempo de modo aleatório. Esse fato pode ser observado se analisarmos a variável aleatória  $e_j$ , presente na equação 5.8. A hipótese estudada aqui é a de que no período de bolha econômica os preços não tomam caminhos tão aleatórios assim, e tendem sempre a crescer. Esse crescimento porém não toma qualquer forma, e como já analisamos durante o trabalho, a forma mais possível para esse crescimento é a log-periodicidade. Sendo assim, nossa proposta é unir o método numérico de Monte-Carlo com o ajuste log-periódico, usado nesse trabalho como uma forma de prever possíveis movimentos dos índices econômicos. A equação fundamental para expressar nossa idéia é um ajuste da expressão 5.8, dada por:

(6.1)



## 7 Título do capítulo 6

Texto do capítulo 6.



# Conclusão

Este é o texto da conclusão.



## Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6028*: Resumo - apresentação. Rio de Janeiro, 2003. 2 p. Citado na página [7](#).



## Anexos



## ANEXO A – Título do anexo 1

Faça-se de conta que isto é um anexo.



## ANEXO B – Título do anexo 2

Faça-se de conta que isto é um anexo.