Tegundir sannana:

Bein sönnun (direct prood):

Sönnun á $p \to q$ Gerum ráð fyrir p og sýnum að q gildi.

Dæmi:

Sönnum að ef n er oddatala þá er n^2 oddatala.

Notum að allar oddatölur n má rita sem: $n = 2k + 1$.

G.r.f að n sé oddatala svo $n = 2k + 1$. Þá fæst að:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Skrifa má $4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Látum $k' = 2k^2 + 2k$, svo: $n^2 = 2k' + 1$ sem sannar það sem sanna átti.

Mótskilyrðing (contraposition):

Sönnun á $p \to q$ Notar $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

Gerum ráð fyrir $\neg q$ og sönnum $\neg p$.

Dæmi:

Sýnum að ef $3n + 2$ er oddatala þá er n oddatala.

Látum $p := 3n + 2$ er oddatala, og $q := n$ er oddatala.

G.r.f $\neg q$, svo: n er slétt tala, svo: $n = 2k$.

Þá fæst: $3n + 2 = 3 \cdot 2k + 2 = 2(3k + 1)$.

Látum $k' = 3n + 1$, svo: $3n + 2 = 2(3n + 1) = 2k'$, sem sýnir að þá sé 3n+2 slétt tala.

Semsagt $\neg q \to \neg p \equiv p \to q$ sem sannar það sem sanna átti.

Sönnun með mótsögn (proof by contradiction):

Sönnun á p Gerum ráð fyrir $\neg p$ og leiðum út mótsögn, svo $p \equiv T$

Dæmi:

Sýnum að $\sqrt{2}$ sé ekki ræð tala.

Munum að ræða tölu má skrifa sem fullstytt brot $\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0$

Látum $p := \sqrt{2}$ er ekki ræð tala.

G.r.f $\neg p$ svo $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, þá fæst:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Svo: a^2 er slétt tala, svo: $a = 2k$ er slétt tala. Þá fæst:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$$

Svo b er slétt tala sem gefur okkur mótsögn svo $\sqrt{2}$ er ekki ræð tala.

Sönnun á $p \to q$ G.r.f. $p \wedge \neg q$ og leiðum út mótsögn, sem sýnir að: $p \to q$ eða $\neg p \to q$

Sönnun á $p \leftrightarrow q$

Sýnum að $p \to q$ og $q \to p$

Sönnun með mótdæmi á $\neg \forall x(p(x))$

Finnum y með $\neg p(y)$

Pigeonhole principle

Ef n hlutir eru settir í $m < n$ "geymslur", þá þurfa að vera 2 hlutir í a.m.k einni "geymslu".

Þrepasannanir

Þrepun

Grunnskref

Grunnskrefið felst í því að sanna að regla gildir fyrir einhverja tölu, t.d. $n = 1$

Þrepunarskref

Þrepunarforsenda Gerum ráð fyrir að reglan gildir fyrir einhverja tölu $n = k$. Köllum þetta þrepunarforsendu.

Þrepun Sýnum að reglan gildi fyrir $k + 1$. (*Ath! við erum að sanna að reglan gildi fyrir næstu tölu á eftir $n = k$ svo við megum ekki draga þá ályktun að reglan gildri fyrir $n = k + 1$*).

Dæmi um þrepun:

Sönnum að $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Grunnskref: $1 = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, sýnir að reglan gildir fyrir $n = 1$.

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Þrepunarskref Sjáum að:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sem sannar það sem sanna átti.

Sterk þrepun

Ólíkt hefðbundnari þrepun: "$n = k$" $\implies$ "$n = k + 1$", er nú gert ráð fyrir að regla gildir fyrir $n \leq k$ og sönnum að regla gildi fyrir $n = k + 1$.

Dæmi:

Sérhverja tölu $n \geq 2$ má skrifa sem margfeldi prímtalna. Sönnum það með strekri þrepun:

Grunnskref: $2 = 2$ (2 er prímtala)

Þrepunarskref: G.r.f að reglan gildir fyrir $n \leq k$. Þá fáum við tvö tilvik:

1. $n = k + 1$ er prímtala p_1. Þá þarf ekki að gera meir.
2. $n = k + 1$ er samsett, svo: $n = a \cdot b$. Skv. þrepunarforsendu er $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$ og $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_l$, þar sem p_i og q_j eru prímtölur.

Þá er $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_l \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$, Svo reglan gildir fyrir öll n