

UNIVERSITÉ NOUVEAUX HORIZONS



Invariance des transformations géométriques et qualités des objets dans l'ANPR

Auteur :

TSHELEKA KAJILA Hassan

Directeur :

Prof. MASAKUNA Jordan

*Mémoire présenté à la Faculté des Sciences Informatiques en vue de
l'obtention du grade de Licencié en informatique.*

en

Calcul Scientifique

23 mai 2022

RÉSUMÉ

Au cours de la dernière décennie, la taille des données a augmenté plus rapidement que la vitesse des processeurs. Dans ce contexte, faire un traitement de reconnaissance des formes dans des images et vidéos, les ensembles de données d'entraînement pour les problèmes de détection d'objets sont généralement très volumineux et les capacités des méthodes d'apprentissage automatique statistique sont limitées par le temps de calcul plutôt que par la taille de l'échantillon.

Le cas des problèmes d'apprentissage à grande échelle implique la complexité de calcul de l'algorithme d'optimisation sous-jacent de manière non triviale. Des algorithmes d'optimisation improbables tels que la **descente de gradient stochastique** (en anglais : **Stochastic Gradient Descent** ou SGD) montre des performances étonnantes pour les problèmes à grande échelle, lorsque l'ensemble d'apprentissage est volumineux.

En particulier, les variants du SGD n'utilisent qu'un seul nouvel échantillon d'apprentissage à chaque itération, sont asymptotiquement efficaces après un seul passage sur l'ensemble d'apprentissage.

Ce travail vise à proposer une méthode intelligente, basée sur l'intelligence artificielle, qui permet aux ordinateurs et aux systèmes informatiques de dériver des informations significatives à partir d'images numériques, de vidéos et d'autres entrées visuelles, avec un coût plus bas que possible. Dans notre contexte la reconnaissance des plaques d'immatriculation des véhicules à l'aide d'un classificateur de la famille de descente de gradient stochastique. Pour minimiser la **fonction coût** du classificateur, la SGD adopte un modèle d'optimisation convexe. De plus, pour augmenter la vitesse de convergence du classificateur, la descente de gradient stochastique, à chaque étape, elle tire un échantillon aléatoire de l'ensemble des fonctions (f_i), de la fonction objectif, constituant la somme.

Mots clés : Apprentissage supervisé, vision par ordinateur, Descente de gradient stochastique, Adaline, ANPR, ALPR.

ABSTRACT

Over the past decade, data size has grown faster than processor speeds. In this context, doing pattern recognition processing in real-time videos, training datasets for object detection problems are usually very large, and the capabilities of statistical machine learning methods are limited by computation time rather than sample size.

The case of large scale learning problems involves the computational complexity of the underlying optimization algorithm in a nontrivial way.

Improbable optimization algorithms such as **Stochastic Gradient Descent** (SGD) show amazing performance for large scale problems, when the training set is bulky.

In particular, SGD variants use only one new training sample at each iteration, are asymptotically efficient after a single pass over the training set.

This work aims to provide an intelligent method, based on artificial intelligence, that allows computers and computer systems to derive meaningful information from digital images, videos and other visual inputs, with a lower cost. as possible. In our context the recognition of vehicle license plates using a classifier of the family of stochastic gradient descent. To minimize the **cost function** of the classifier, the SGD adopts a convex optimization model. Moreover, to increase the speed of convergence of the classifier, the stochastic gradient descent, at each step, it draws a random sample from the set of functions (f_i), of the objective function, constituting the sum.

Key words : Supervised learning, computer vision, Stochastic gradient descent, Adaline, ANPR, ALPR.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	ii
o Introduction	2
0.1 Choix et intérêt du sujet	2
0.2 Problématique	3
0.3 Hypothèse	4
0.4 Méthode et technique utilisée	4
0.5 Objectifs et division du travail	4
1 Les éléments mathématiques pour l'apprentissage automatique	7
1.1 Les bases d'optimisation numérique et statistique	7
1.1.1 Éléments de calcul différentiel	7
1.1.2 Échantillonnage (statistique)	11
1.2 Apprentissage supervisé, modélisation et classification	13
1.2.1 Introduction	13
1.2.2 Les problèmes de régressions	16
1.2.3 Les problèmes de classifications	20
1.3 Réseau de neurones, apprentissage en profondeur	25
1.3.1 Perceptron	25
1.3.2 Neurones	26

Annexes et Bibliographies

Bibliographie	28
---------------	----

LISTE DES ACRONYMES

ML	Machine Learning
CV	Computer Vision
OCR	Optical character recognition
ANPR	Automatic number-plate recognition
ALPR	Automatic license plate recognition
GD	Gradient Descent
SGD	Stochastic Gradient Descent
ADALINE	ADaptative LInear NEuron
API	Application Programming Interface
UML	Unified Modeling Language

NOTIONS

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathbb{R}^n	Ensemble des réels ou Espace euclidien de dimension n
$\mathbb{B}^n = \{0, 1\}^n$	Espace booléen de dimension n
$\mathcal{O}(\cdot)$ ou $\Omega(\cdot)$	L'ordre de grandeur maximal de complexité d'un algorithme
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	Un vecteur
$x = (x_1, \dots, x_n)^T$	Un vecteur
$x^T = (x_1, \dots, x_n)^T$	Un vecteur transposé
$\langle xy \rangle = x^T y$	Le produit vectoriel
$\ x\ $	La norme du vecteur
M^{-1}	La matrice inverse d'une matrice M
M^T	La matrice transposée
$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$	La dérivée partielle par rapport à x de la fonction f des deux variables x et y
$\nabla_A J(A, B)$	Le vecteur dérivé par rapport au vecteur A de la fonctionnelle J des deux vecteurs

Les éléments en apprentissage

\mathcal{S}	L'échantillon d'apprentissage (un ensemble ou une suite d'exemples)
\hat{y}	valeurs prédites après l'entraînement d'un modèle d'apprentissage automatique
\mathcal{H}	
$h \in \mathcal{H}$	
$y = h(x)$	
$\ell(f(x), h(x))$	



INTRODUCTION

0.1 CHOIX ET INTÉRÊT DU SUJET

L'intelligence désigne communément le potentiel des capacités mentales et cognitives d'un individu, animal ou humain, lui permettant de résoudre un problème ou de s'adapter à son environnement. L'intelligence nous fait ressentir ce besoin d'apprendre pour arriver à nos fins, extresinquement l'intelligence c'est l'apprentissage. Pour que nous puissions dire qu'une machine est intelligente, premièrement elle doit passer par une phase d'apprentissage. Apprendre à résoudre des problèmes ou à réaliser des tâches par lui-même d'une façon autonome. Dans le IA nous parlons de l'apprentissage automatique (en anglais : machine Learning, ML), nous utilisons plusieurs paradigmes d'apprentissage automatique : apprentissage supervisé, apprentissage non supervisé, apprentissage par renforcement, apprentissage en profondeur.

L'apprentissage supervisé représente une grande partie de l'activité de recherche en apprentissage automatique et de nombreuses techniques de ce paradigme ont trouvé une application dans le traitement de contenu multimédia [8]. La caractéristique qui définit ce type d'apprentissage est la disponibilité de données d'apprentissage annotées.

Les algorithmes d'apprentissage supervisé font l'expérience d'un ensemble de données contenant des caractéristiques, et chaque exemple est également associé à une étiquette ou à une cible [11].

L'application de cette étude dans l'apprentissage supervisé est orientée vers la reconnaissance automatique des plaques d'immatriculation (en anglais : automatic number plate recognition, ANPR) dans les images. Une des applications intéressantes parmi tant d'autres dans l'intelligence artificielle. Nous présentons une étude approfondie sur les algorithmes de minimisation de la fonction coût (en anglais : loss function) d'un modèle d'apprentissage appliqué à l'ANPR.

Lorsque nous voulons faire une application dans le traitement de reconnaissance des formes dans des vidéos, les ensembles de données d'entraînement pour les problèmes de détection d'objets sont généralement très volumineux et les capacités des méthodes d'apprentissage automatique statistique sont limitées par le temps de calcul plutôt que par la taille de l'échantillon [4]. Par exemple, pour entraîner une machine à reconnaître des plaques d'immatriculation de voiture, elle doit recevoir de grandes quantités d'images de plaques d'immatriculation et d'éléments liés aux plaques pour apprendre les différences et reconnaître une plaque, en particulier la voiture qui porte une plaque sans défaut. Plus nous avons des données, plus nous gagnons en précision et plus la complexité en

temps augmente.

Des contraintes d'exploitation découlent des observations citées ci-dessus, parmi lesquelles nous citerons celles qui sont liées à la reconnaissance des objets dans les vidéos et images. Par exemple, de nos jours, un très grand nombre de caméras est déployé exclusivement pour la surveillance vidéo [1]. Souvent, le contenu de ces vidéos est interprété par des opérateurs humains qui engendrent des coûts exorbitants pour le suivi et l'analyse du contenu, sans mentionner les erreurs qui peuvent être induites par la fatigue et l'inattention humaine.

0.2 PROBLÉMATIQUE

La complexité de calcul de l'algorithme d'apprentissage devient le facteur limitant critique lorsque l'on envisage de très grands ensembles de données. C'est à ce point critique qu'entre en jeu cette étude, la minimisation des erreurs sans alourdir la complexité en temps et espace de l'algorithme d'apprentissage.

Les ensembles de données d'entraînement pour les problèmes de détection d'objets dans des images sont généralement très volumineux. Minimiser les erreurs dans ces modèles d'apprentissage est une tâche très importante pour renforcer la fiabilité de notre *modèle entraîné* [12].

Établir un algorithme d'apprentissage qui s'adapte au mieux à notre modèle, selon la nature du problème métier traité, il existe différentes approches qui varient selon le type et le volume des données.

L'un des piliers de l'apprentissage automatique est l'optimisation mathématique [6], qui, dans ce contexte, implique le calcul numérique de minimisation des paramètres d'un système conçu pour prendre des décisions en fonction des données disponibles. Ces paramètres sont choisis pour être optimaux par rapport à notre problème d'apprentissage.

Dans l'ensemble, ce document tente d'apporter des réponses aux questions suivantes.

1. Comment les problèmes de minimisation surviennent-ils dans les applications d'apprentissage automatique ?
2. Quelles ont été les méthodes de minimisation les plus efficaces pour les ensembles des données d'apprentissage supervisé à grande échelle et pourquoi ?
3. Comment des algorithmes d'apprentissage supervisé arrivent-t-ils résoudre le problème de la reconnaissance automatique d'objet ?
4. Quelles avancées récentes ont été réalisées dans la conception d'algorithmes de minimisation des erreurs dans l'apprentissage et quelles sont les questions ouvertes dans ce domaine de recherche ?

0.3 HYPOTHÈSE

Le cas des problèmes d'apprentissage à grande ou à petite échelle implique la complexité de calcul de l'algorithme d'optimisation sous-jacent de manière non triviale.

En effet, dans ce travail, nous discutons des algorithmes de descente de gradient stochastique parce qu'ils montrent des performances d'optimisation incroyables pour les problèmes à grande échelle [4].

Le travail de Léon Bottou et al (e.g., dans [4] [17] [5]), présente *la descente de gradient stochastique comme un algorithme d'apprentissage fondamental*.

Une analyse plus précise révèle des compromis qualitativement différents pour le cas des problèmes d'apprentissage à grande échelle [6]. Des algorithmes d'optimisation improbables tels que la **descente de gradient stochastique** (en anglais : **Stochastic Gradient Descent** ou SGD) montre des performances étonnantes pour les problèmes à grande échelle, lorsque l'ensemble d'apprentissage est volumineux. En particulier, le gradient stochastique du second ordre et le gradient stochastique moyennée sont asymptotiquement efficaces après un seul passage sur l' ensemble d'entraînement [4]. Les optimiseurs SGD n'utilisent qu'un seul nouvel échantillon d'apprentissage à chaque itération.

0.4 MÉTHODE ET TECHNIQUE UTILISÉE

0.5 OBJECTIFS ET DIVISION DU TRAVAIL

Nous nous proposons dans ce mémoire d'aborder sur l'utilisation des algorithmes d'optimisation numérique, précisément de minimisation. Appliquée à l'apprentissage automatique qui permet aux ordinateurs et aux systèmes informatiques de dériver des informations significatives à partir d'images numériques et/ou d'autres entrées visuelles, avec un coût plus bas que possible.

En fait, nous faisons la reconnaissance des plaques d'immatriculation des véhicules à l'aide d'un classificateur de la famille de descente de gradient stochastique (SGD). Pour minimiser la fonction de coût du classificateur, la SGD adopte un modèle d'optimisation convexe [10]. De plus, pour augmenter la vitesse de convergence du classificateur, la descente de gradient stochastique, à chaque étape, tire un échantillon aléatoire de l'ensemble des fonctions (f_i), qui est notre fonction objectif, constituant une somme.

Pour chaque algorithme, nous examinons l'efficacité et comparons le score pour différents cas.

En dehors de cette introduction, la partie conclusive et l'annexe, ce mémoire est organisé en quatre chapitres comme suit.

Chapitre 1 est consacré à quelques rappels des matières sur lesquels je me base pour constituer l'ensemble de ce travail. Nous traitons des

considérations de méthodes numériques impliquées dans la résolution de problèmes de minimisation des erreurs d'apprentissage. Certaines discussions sur les modèles de régression linéaire convexe et de classification dans d'apprentissage supervisé. Nous discutons également du réseau neuronal convolutif le plus adapté pour analyser l'imagerie visuelle.

Chapitre 2 explore une méthodologie parmi tant d'autres, pour entraîner les modèles d'apprentissage automatique de façon optimale, qui nous permettra par la suite de faire une classification d'images pour reconnaissance automatique de plaque d'immatriculation.

Pour la minimisation de la fonction coût nous utilisons des algorithmes comme ASGD, ADAM, ADADELTA, NAG. Puis faire une étude comparative de leurs performances.

Chapitre 3, Ici nous construirons des modèles à partir d'une base de données annotée pour l'apprentissage et pour les tests de reconnaissance d'objets. Les résultats concluants de cette étude pourront conduire à un déploiement de notre système dans les domaines comme celui de la surveillance vidéo de voitures dans une entrée de parking. Des métriques connues pour mesurer les erreurs et en déduire le score du classificateur seront utilisées pour évaluer la qualité de la reconnaissance automatique des plaques d'immatriculation (ANPR) par notre approche.

LES ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES POUR L'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1.1 LES BASES D'OPTIMISATION NUMÉRIQUE ET STATISTIQUE

1.1.1 Éléments de calcul différentiel

A. Convexité

DÉFINITION : (ENSEMBLE CONVEXE) Une partie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}^2$, et pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{C}$ combinaison convexe [14].

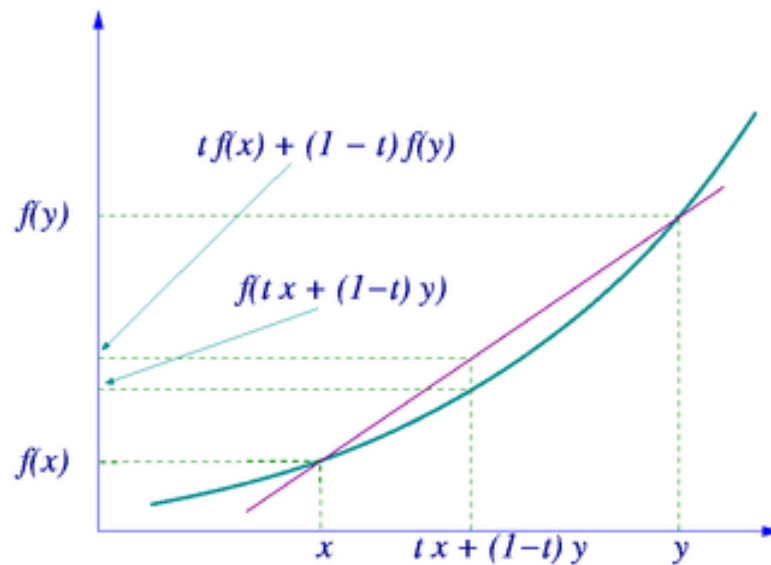


FIGURE 1 : Illustration fonction convexe [image de Wikipédia]

DÉFINITION : (FONCTION CONVEXE) Une fonction f d'un intervalle réel $I \in \mathcal{C}$ est dite fonction convexe lorsque, $\forall (x, y)$ de I tel que $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ et tout $\alpha \in [0, 1]$ on a :

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (1)$$

et si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2)$$

on dit que la fonction est strictement convexe dans \mathbb{C} , [14]

Exemple :

- La fonction $f(x) = x^2$ est convexe.
- La fonction $f(x) = x^T x$ est convexe.
- La fonction $f(x) = x^T A x$ est convexe, ssi A est symétrique semi-définie positive.

PROPRIÉTÉ D'UNE FONCTION DÉRIVABLE : (Extremum local) Parmi les propriétés de dérivabilité il existe une qui est mise en relation avec l'effet qu'une fonction doit être convexe. énoncé ci-dessous [7, p. 212].

Soit $I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I .

- + On dit que m est un **minimum local** de f s'il existe $\alpha > 0$ tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$.
- + On dit que M est un **maximum local** de f s'il existe $\alpha > 0$ tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$.

Donc nous pouvons dire qu'une fonction convexe à un unique point minimum.

B. Développement limité

En physique et en mathématiques, un développement limité (noté DL) d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynomiale et d'un reste négligeable au voisinage du point considéré [7].

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I , et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n^2 (abrégié par DL_n) en x_0 , s'il existe $n + 1$ réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que la fonction $R : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + R(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + R(x)$$

vérifie : $R(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 , et ce plus rapidement que le dernier terme de la somme, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

La fonction reste $R(x)$ vérifiant ceci est notée $o((x - x_0)^n)$ (selon la notation de Landau). On écrit donc :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + R(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$$

Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$ on aura :

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^n a_i h^i + o(h^n)$$

CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

- Si f admet un DL_0 en x_0 , alors $a_0 = f(x_0)$. [7]
- Si f admet un DL_n en x_0 , alors elle admet un DL_k en x_0 pour tout entier $k < n$ [7].
- Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un DL_n en x_0 est l'existence d'un polynôme P tel que $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$ [7]. S'il existe un tel polynôme P , alors il en existe une infinité d'autres, mais un seul d'entre eux est de degré inférieur ou égal à n : le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-x_0)^{n+1}$. On l'appelle la partie régulière, ou partie principale, du DL_n de f en x_0 .

Le théorème de Taylor-Young assure [7, p. 241] qu'une fonction f dérivable n fois au point x_0 (avec $n \geq 1$) admet un DL_n en ce point :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

soit en écriture abrégée

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$$

Le développement d'ordre 0 en x_0 revient à écrire que f est continue en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + o((x - x_0)^0) = f(x_0) + o(1)$$

Le développement limité d'ordre 1 en x_0 revient à approcher une courbe par sa tangente en x_0 on parle aussi d'approximation affine :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

c. Gradient

DÉFINITION : Le gradient d'une fonction de plusieurs variables en un certain point est un vecteur qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point. Défini en tout point où la fonction est différentiable, il définit un champ de vecteurs, également dénommé gradient. Le gradient est la généralisation à plusieurs variables de la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

DÉFINITION MATHÉMATIQUE : Dans un système de coordonnées cartésiennes, le gradient d'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le vecteur de composantes $\partial f / \partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), c'est-à-dire les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées [14].

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

GRADIENT SOUS FORME DE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ : Si une application admet un gradient en un point, alors on peut écrire ce développement limité du premier ordre (voir le point b.).

$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x) | h \rangle + o(h)$$

ou

$$f(x - h) = f(x) - \langle \nabla f(x) | h \rangle + o(h)$$

Numériquement, il est très intéressant de faire ensuite la demi-différence des deux développements pour obtenir la valeur du gradient et on note que celui-ci ne dépend pas en fait de la valeur de la fonction au point $x : f(x)$. Cette formule a l'avantage de tenir compte des gradients du 2e ordre et est donc beaucoup plus précise et numériquement robuste. L'hypothèse est, en pratique, de connaître les valeurs "passé" et "futur" de la fonction autour d'un petit voisinage du point x .

DÉFINITION NUMÉRIQUE : Une fonction multivariée (à variable vectorielle) $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ définie sur un ouvert $O \in \mathbb{R}^n$ est dite dérivable (au sens de Fréchet, voir le point ??) en x ssi il existe un vecteur noté $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x + h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + o(\|h\|) \quad (3)$$

$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ et où l'on a posé que le reste $o(\|h\|) = \|h\| \epsilon(h) \in \mathbb{R}^n$, avec $h \in \mathbb{R}^n$

$$\epsilon(h) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Le vecteur $\nabla f(x)$ est unique et nommé **gradient** de $f(x)$ en x . Le gradient s'adresse aux fonctions scalaires à variables vectorielles.

A PROPOS DE LA NOTATION $o(\|h\|)$: La notation de Bachmann-Landau $o(\|h\|)$ traduit le comportement d'une fonction de h qui tend vers 0 d'un ordre de grandeur plus vite que $\|h\|$.

Elle est infiniment plus petit que h dans le voisinage de 0

D. Hessienne

DÉFINITION MATHÉMATIQUE : Étant donnée une fonction f à valeurs réelles

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

dont toutes les dérivées partielles secondes existent, le coefficient d'indice i, j de la **matrice hessienne**¹ $H(f)$ vaut $H_{ij}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Autrement dit,

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

DÉFINITION NUMÉRIQUE : Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f(x)$ est dite 2 fois continûment dérivable (au sens de Fréchet??) si en tout $x \in \mathcal{O}$ on a

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + o(\|h\|^2) \quad (4)$$

avec $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et où on a posé que le reste $o(\|h\|^2) = \|h\| \epsilon(h) \in \mathbb{R}$ avec $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. La matrice carrée symétrique $\nabla^2 f(x)$ appelée **Hessien** de $f(x)$ en x .

Remarque :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|} = 0 \in \mathbb{R}$$

La Hessienne s'adresse aux fonctions scalaires à variables vectorielles.

1.1.2 Échantillonnage (statistique)

En statistiques, l'échantillonnage est la sélection d'un sous-ensemble (un échantillon statistique) d'individus au sein d'une population statistique pour estimer les caractéristiques de l'ensemble de la population.

Sur un échantillon, on peut calculer différents paramètres statistiques de position (moyenne, etc.) ou de dispersion (écart type, etc.) issus de la statistique descriptive, de la même manière que l'on peut déterminer des paramètres statistiques d'une population par son recensement exhaustif.

¹ En mathématiques, la matrice hessienne (ou simplement la hessienne) d'une fonction numérique f est la matrice carrée, notée $H(f)$, de ses dérivées partielles secondes.

On peut également déduire des propriétés de la population à partir de celles de l'échantillon par inférence statistique. D'après la loi des grands nombres, plus la taille de l'échantillon augmente, plus ses propriétés seront proches de celle de la population. En particulier, on peut estimer une probabilité sur les individus d'une population par la fréquence observée sur un échantillon si sa taille est suffisamment grande.

Cette méthode présente plusieurs avantages : une étude restreinte sur une partie de la population, un moindre coût, une collecte des données plus rapide que si l'étude avait été réalisé sur l'ensemble de la population, la réalisation de contrôles destructifs, etc.

On peut procéder de différentes manières pour collecter les données de l'échantillon, il existe en effet plusieurs méthodes d'échantillonnage [15] :

- ▷ **Échantillonnage aléatoire et simple** : le tirage des individus de l'échantillon est aléatoire, c'est-à-dire que chaque individu a la même probabilité d'être choisi, et simple, c'est-à-dire que les choix des différents individus sont réalisés indépendamment les uns des autres.
- ▷ **Échantillonnage systématique** : le premier individu est choisi de manière aléatoire, puis les suivants sont déterminés à intervalle régulier. Par exemple, dans un verger, on choisit au hasard le 7^e pommier, puis les 27^e, 47^e, 67^e, etc.
- ▷ **Échantillonnage stratifié** : on subdivise la population en plusieurs parties avant de prendre l'échantillon¹.
- ▷ **Échantillonnage par quotas** : la composition de l'échantillon doit être représentative de celle de la population selon certains critères jugés particulièrement importants. On utilise cette méthode pour réaliser les sondages d'opinions.

A. *La collecte de données*

La collecte de données est le processus de collecte et de mesure des informations sur des variables ciblées dans un système établi, qui permet ensuite de répondre aux questions pertinentes et d'évaluer les résultats.

Une bonne collecte de données implique :

- Suivre le processus d'échantillonnage défini
- Garder les données dans l'ordre du temps
- Noter les commentaires et autres événements contextuels
- Enregistrement des non-réponses

ERREUR D'ÉCHANTILLONNAGE : Dans les statistiques, les erreurs d'échantillonnage se produisent lorsque les caractéristiques statistiques d'une population sont estimées à partir d'un sous-ensemble, ou échantillon, de cette population. Étant

donné que l'échantillon n'inclut pas tous les membres de la population, les statistiques de l'échantillon (souvent appelées estimateurs), telles que les moyennes et les quartiles, diffèrent généralement des statistiques de l'ensemble de la population (appelées paramètres). La différence entre la statistique d'échantillon et le paramètre de population est considérée comme l'erreur d'échantillonnage [15].

1.2 APPRENTISSAGE SUPERVISÉ, MODÉLISATION ET CLASSIFICATION

1.2.1 Introduction

A. Les ingrédients d'apprentissage

Résoudre un problème d'apprentissage, c'est d'abord le comprendre, c'est-à-dire discuter longuement avec les experts du domaine concerné pour identifier quelles sont les "entrées", les "sorties" ou résultats désirés, les connaissances disponibles, les particularités des données, par exemple : valeurs manquantes, taux de bruit dans les mesures des attributs de description, proportions des classes, stationnarité ou pas de l'environnement. C'est aussi réaliser un gros travail de *préparation des données* : nettoyage, ré-organisation, enrichissement, intégration avec d'autres sources de données, etc. Ces étapes de compréhension du problème, de préparation des données, de mise au point du protocole d'apprentissage et des mesures d'évaluation des résultats, prennent, et de loin, la plus grande partie du temps pour (tenter de) résoudre un problème d'apprentissage [2]. Nous avons toujours tendance à largement sous-estimer ces étapes et à vouloir se concentrer uniquement sur la phase excitante de l'essai de méthodes d'apprentissage sur des données supposées bonnes à la consommation.

B. Modélisation

La modélisation est la conception et l'utilisation d'un *modèle*. Selon son objectif et les moyens utilisés, la modélisation est dite mathématique, géométrique, 3D, empirique, etc. En informatique, la modélisation permet de concevoir l'architecture globale d'un système d'information, ainsi que l'organisation des informations à l'aide de la modélisation des données ;

MODÈLE (INFORMATIQUE) : En informatique, un modèle a pour objectif de structurer les informations et activités d'une organisation : données, traitements, et flux d'informations entre entités.

MODÈLE (MATHÉMATIQUE) : Un modèle mathématique est une description d'un système utilisant des concepts et un langage mathématiques.

Un modèle peut aider à expliquer un système et à étudier les effets de différents composants, et à faire des prédictions sur le comportement.

Modèles non paramétriques

E.g. : Prenons l'exemple de données décrites dans l'espace d'entrée $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ avec n variables réelles et supposons-les étiquetées par \times ou par \bullet . On cherche donc une fonction de décision h , appelée hypothèse ou modèle, telle qu'elle soit capable d'étiqueter toute entrée $x \in \mathcal{X}$, $h : x \rightarrow \{\times, \bullet\}$. Reste à définir l'espace des hypothèses ou modèles \mathcal{H} que l'on est prêt à considérer.

Toujours en considérant le problème de prédiction basique (présenté ci-dessus), on pourrait définir une hypothèse par une procédure qui examine les trois plus proches voisins du point à étiqueter x et qui choisit l'étiquette majoritaire parmi ces trois points pour étiqueter x . Il n'y a évidemment plus de paramètres pour définir les modèles possibles [2, p. 24].

Un **modèle non paramétrique** est construit selon les informations provenant des données. Dans [2] [3, p. 120] il est expliqué que : La régression non paramétrique exige des tailles d'échantillons plus importantes que celles de la régression basée sur des modèles paramétriques parce que les données doivent fournir la structure du modèle ainsi que les estimations du modèle.

Un **modèle paramétrique** est, s'il est approximativement valide, plus puissant qu'un modèle non paramétrique, produisant des estimations d'une fonction de régression qui ont tendance à être plus précises que ce que nous donne l'approche non paramétrique [13]. Cela devrait également se traduire par une prédiction plus précise.

Selon [A. Cornuéjols 2], nous pouvons construire un modèle d'apprentissage, ou l'espaces des hypothèses d'apprentissage, par :

- La classification
- La régression
- Les distributions de probabilités
- Les arbres de décisions
- Les réseaux bayésiens
- Etc.

La table suivante présente d'abord les qualités des différentes représentations des hypothèses en fonction des critères cités ci-dessus.

	Fonctions séparatrices	Distributions de probabilités	Arbres de décision	Hierarchies de concepts	Réseaux bayésiens	Chaînes de Markov
Concept	✓	✓	✓	✓	-	-
Classes multiples	✓	✓	✓	✓	-	-
Ontologies	-	-	✓	✓	-	-
Régression	-	✓	✓	-	-	-
Évolutions temporelles	-	✓	-	-	-	✓
Apprentissage non supervisé	✓	✓	✓	✓	-	-
Données continues	✓	✓	✓	-	-	✓
Connaissances relationnelles				✓	✓	-
Degré de certitude	-	✓	-	-	✓	✓
Degré d'imprécision	-	✓	-	-	✓	-
Transparence, intelligibilité	-	-	-	✓	✓	✓

Entraînement du modèle

Tout modèle, où toutes les informations nécessaires ne sont pas disponibles, contient certains paramètres qui peuvent être utilisés pour adapter le modèle au système qu'il est censé décrire. Si la modélisation est effectuée par un réseau de neurones artificiels ou un autre apprentissage automatique, l'optimisation des paramètres est appelée **entraînement** (en anglais : **training**), tandis que l'optimisation des hyperparamètres du modèle est appelée **réglage** (en anglais : **tuning**) et utilise souvent la validation croisée [??]. Dans une modélisation plus conventionnelle à travers des fonctions mathématiques explicitement données, les paramètres sont souvent déterminés par ajustement de courbe (voir le point ??).

Une partie cruciale du processus de modélisation consiste à évaluer si oui ou non un modèle mathématique donné décrit un système avec précision. Il peut être difficile de répondre à cette question car elle implique plusieurs types d'évaluation différents.

1.2.2 Les problèmes de régressions

L'algorithme d'apprentissage automatique est défini comme un algorithme capable d'améliorer les performances d'un programme informatique à certaines tâches via l'expérience est quelque peu abstraite. Pour rendre cela plus concret, Une des méthode d'apprentissage automatique basique est *la régression linéaire* [11].

Dans la modélisation statistique, l'analyse de régression est un ensemble de processus statistiques permettant d'estimer les relations entre une variable dépendante et une ou plusieurs variables indépendantes [? ?].

En statistique, la régression linéaire est une approche linéaire pour modéliser (voir le point b.) la relation entre une réponse scalaire et une ou plusieurs variables explicatives (également appelées variables dépendantes et indépendantes). Le cas d'une variable explicative est appelé régression linéaire simple ; pour plus d'un, le processus est appelé régression linéaire multiple.

Dans la régression linéaire, les relations sont modélisées à l'aide de *fonctions prédictives*² linéaires dont les paramètres de modèle inconnus sont estimés à partir des données [13]. De tels modèles sont appelés modèles linéaires.

La régression linéaire a de nombreuses utilisations pratiques. Si l'objectif est la prédiction, la prévision ou la réduction des erreurs, la régression linéaire peut être utilisée pour ajuster un modèle prédictif à un ensemble de données observées de valeurs de la réponse et de variables explicatives [9]. Après avoir développé un tel modèle, si des valeurs supplémentaires des variables explicatives sont collectées sans valeur de réponse d'accompagnement, le modèle ajusté peut être utilisé pour faire une prédiction de la réponse.

Dans ce type de tâche, le programme informatique est invité à prédire une valeur numérique à partir d'une entrée donnée. Pour résoudre cette tâche, l'algorithme d'apprentissage est invité à sortir une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ce type de tâche est similaire à la **classification**, sauf que le format de sortie est différent [11].

A. Le problème de la régression linéaire

On appelle problèmes de régression de tels problèmes, dans lesquels la sortie est numérique, généralement un vecteur de réels, supposé dépendre de la valeur d'un certain nombre de facteurs en entrée [13].

Le vecteur d'entrée $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ est souvent appelé variable indépendante, tandis que le vecteur de sortie y est appelé variable dépendante. On formalise

² En statistique et en apprentissage automatique, une fonction de prédicteur linéaire est une fonction linéaire d'un ensemble de coefficients et de variables explicatives, dont la valeur est utilisée pour prédire le résultat d'une variable dépendante.

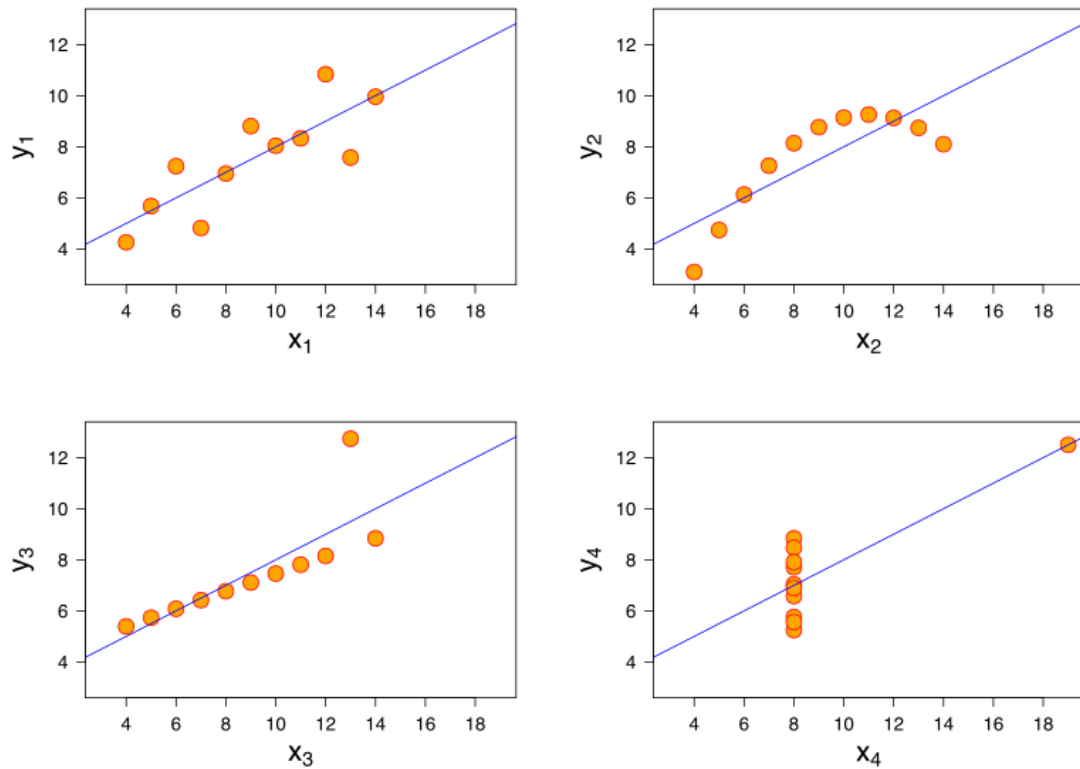


FIGURE 2 : Images illustrant l'efficacité de la régression linéaire sur plusieurs type de modèle [image Wikipédia]

le problème en supposant que la sortie résulte de la somme d'une fonction déterministe f de l'entrée et d'un bruit aléatoire :

$$y = f(x) + \epsilon \quad (5)$$

où $f(x)$ est la fonction inconnue que nous souhaitons approcher par un estimateur $h(x|w)$, où h est défini à l'aide d'un vecteur w de paramètres.

Si l'on suppose que le bruit ϵ est nulle et de variance constante σ^2 , c'est-à-dire $\epsilon = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors, en plaçant notre estimateur $h(\cdot)$ à la place de la fonction inconnue, on devrait avoir la densité conditionnelle réelle $p(y|x)$ vérifiant :

$$p(y|x) = \mathcal{N}(h(x|w), \sigma^2) \quad (6)$$

On peut estimer le vecteur de paramètres w grâce au principe de maximisation de la vraisemblance. On suppose que les couples (x_t, y_t) de l'échantillon d'apprentissage sont tirés par tirages indépendants d'une distribution de probabilités jointes inconnue $p(x, y)$, qui peut s'écrire :

$$p(y|x) = p(y|x)p(x)$$

où $p(y|x)$ est la probabilité de la sortie étant donnée l'entrée et $p(x)$ est la densité de probabilité sur les entrées.[13]

Étant donné un échantillon d'apprentissage $S = \langle (x_t, y_t) \rangle_{1 \leq t \leq m}$ supposé tiré de manière indépendante et identiquement distribuée. Maximiser l'expression résultante revient alors à minimiser la somme de carrés des erreurs (SCE) :

$$\text{SCE}(w|S) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^m [y_t - h(x_t|w)]^2 \quad (7)$$

B. Le cas de la régression générale

La plupart des modèles de régression proposent que Y_i est une fonction de X_i et w , avec ϵ_i représentant un terme d'erreur additif ou bruit statistique aléatoire qui peut remplacer des déterminants non modélisés de Y_i :

$$Y_i = f(X_i, w) + \epsilon_i \quad (8)$$

L'objectif est d'estimer la fonction $f(X_i, w)$ qui correspond le mieux aux données. Pour effectuer une analyse de régression, la forme de la fonction f doit être spécifié. Parfois, la forme de cette fonction est basée sur la connaissance de la relation entre Y_i et X_i . Si ces connaissances ne sont pas disponibles, un formulaire souple ou pratique pour f est choisi. Par exemple, une simple régression univariée peut proposer

$$f(X_i, w) = w_0 + w_1 X_i$$

ou

$$Y_i = w_0 + w_1 X_i + \epsilon_i$$

être une approximation raisonnable du processus statistique générant les données.

Différentes formes d'analyse de régression fournissent des outils pour estimer les paramètres. w . Par exemple, les moindres carrés trouvent la valeur de w qui minimise la somme des carrés des erreurs [10]

$$\sum_i (Y_i - f(X_i, w))^2$$

Étant donné un ensemble de données $\{y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip}\}_{i=1}^n$ de n unités statistiques, un modèle de régression linéaire suppose que la relation entre la variable dépendante y et le vecteur p des régresseurs x est linéaire. Cette relation est modélisée par un terme de perturbation ou une variable d'erreur ϵ : une variable aléatoire non observée qui ajoute du "bruit" à la relation linéaire entre la variable dépendante et les régresseurs. Ainsi le modèle prend la forme

$$y_i = w_0 + w_1 x_{i1} + \dots + w_n x_{in} + \epsilon_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{w} + \epsilon_i, \quad \text{avec } i = 1, \dots, n,$$

Souvent, ces n équations sont empilées et écrites en notation matricielle comme

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\epsilon},$$

où

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

\mathbf{y} est un vecteur de valeurs observées y_i ($i = 1, \dots, n$) de la variable appelée variable mesurée ou variable dépendante.

\mathbf{X} peut être vu comme une matrice de vecteurs-lignes \mathbf{x}_i ou de vecteurs-colonnes à n dimensions X_j , appelées régresseurs, variables explicatives, variables d'entrée, variables prédictives ou variables indépendantes. La matrice \mathbf{X} est parfois appelée la matrice de conception.

\mathbf{w} est un vecteur de paramètre de dimension $(p + 1)$, où w_0 est le terme d'interception, s'il n'est pas inclus dans le modèle \mathbf{w} est de dimension p . Ses éléments sont appelés coefficients de régression [2]. En régression linéaire simple, $p = 1$, et le coefficient est appelé **pente** de régression.

L'estimation statistique et l'inférence dans la régression linéaire se concentrent sur \mathbf{w} . Les éléments de ce vecteur de paramètres sont interprétés comme les dérivées partielles de la variable dépendante par rapport aux différentes variables indépendantes [9].

En définissant les vecteurs et matrice ci dessous, \mathbf{X} , \mathbf{w} et \mathbf{y} (avec $S_y = \mathbf{y}$) [2]; le critère de la somme des carrés des erreurs s'écrit alors :

$$\text{SCE}(\mathbf{w}|\mathbf{S}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_y - \mathbf{X}\mathbf{w})^T(\mathbf{S}_y - \mathbf{X}\mathbf{w}) \quad (9)$$

Il suffit de prendre la dérivée de la somme des carrés des erreurs (équation 7) par rapport à \mathbf{w} , qui est maintenant remplacer par w , pour obtenir les équations :

$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial \mathbf{w}} = -\mathbf{X}^T(\mathbf{S}_y - \mathbf{X}\mathbf{w})$$

$$\frac{\partial^2 \text{SCE}}{\partial^2 \mathbf{w} \partial^2 \mathbf{w}^T} = -\mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

En supposant que la matrice \mathbf{X} est non singulière, et donc que $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ est positive définie, et en posant que la dérivée première est nulle, on obtient :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w} = \mathbf{X}^T \mathbf{S}_y \quad (10)$$

à partir de quoi on peut calculer l'unique solution par :

$$\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{S}_y \quad (11)$$

La valeur \hat{y} prédite pour une entrée x_n est donc :

$$\hat{y} = \hat{w} \cdot x_n = (X^T X)^{-1} X^T S_y x_n$$

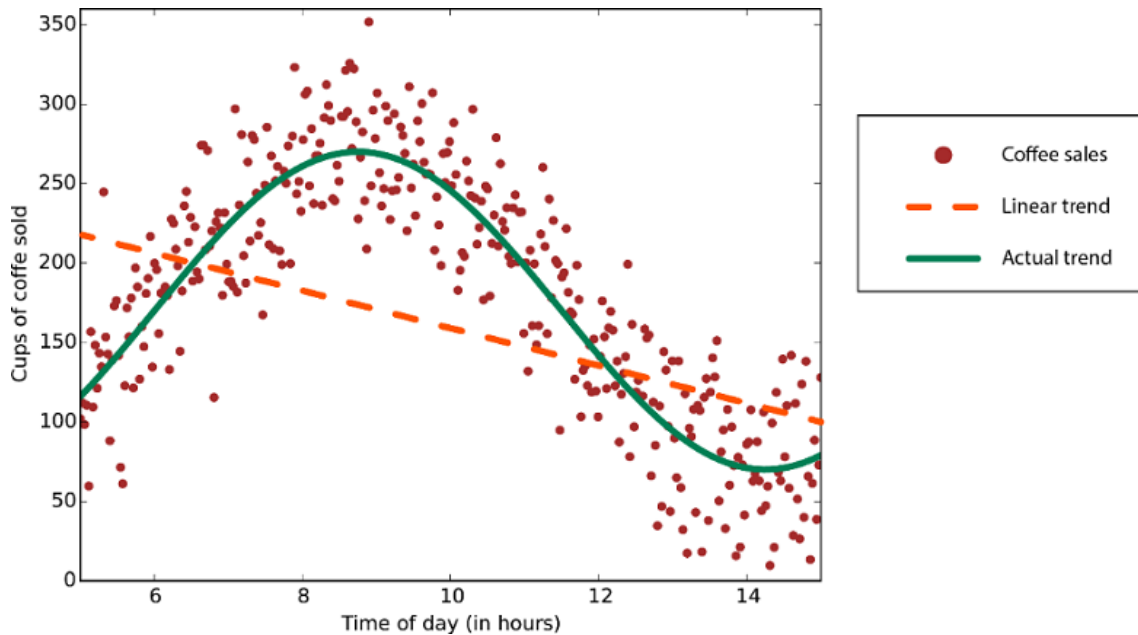


FIGURE 3 : L'efficacité de la régression non linéaire par rapport à une régression linéaire..

La régression linéaire multiple est une généralisation de la régression linéaire simple au cas de plus d'une variable indépendante, et un cas particulier des modèles linéaires généraux, limités à une variable dépendante. Le modèle de base de la régression linéaire multiple est

1.2.3 Les problèmes de classifications

En apprentissage automatique, les classifieurs linéaires sont une famille d'algorithmes de classement statistique. Le rôle d'un classifieur est de classer dans des groupes (des classes) les échantillons qui ont des propriétés similaires, mesurées sur des observations. Un classifieur linéaire est un type particulier de classifieur, qui calcule la décision par combinaison linéaire des échantillons.

Nous nous plaçons dans le cadre où la variable dépendante ou à prédire prend ses valeurs dans un ensemble fini que l'on associe généralement à un ensemble de classes. A la différence de la régression linéaire où l'ensemble de valeurs à prédire est infini.

Lorsque l'on se place dans un espace de représentation euclidien, on peut librement faire des hypothèses sur la géométrie des classes ou sur celles de leurs surfaces séparatrices. La plus simple d'entre elles est de supposer que deux classes peuvent être séparées par une certaine surface, définie par une équation ; les paramètres qui régissent cette équation sont alors les variables à apprendre.

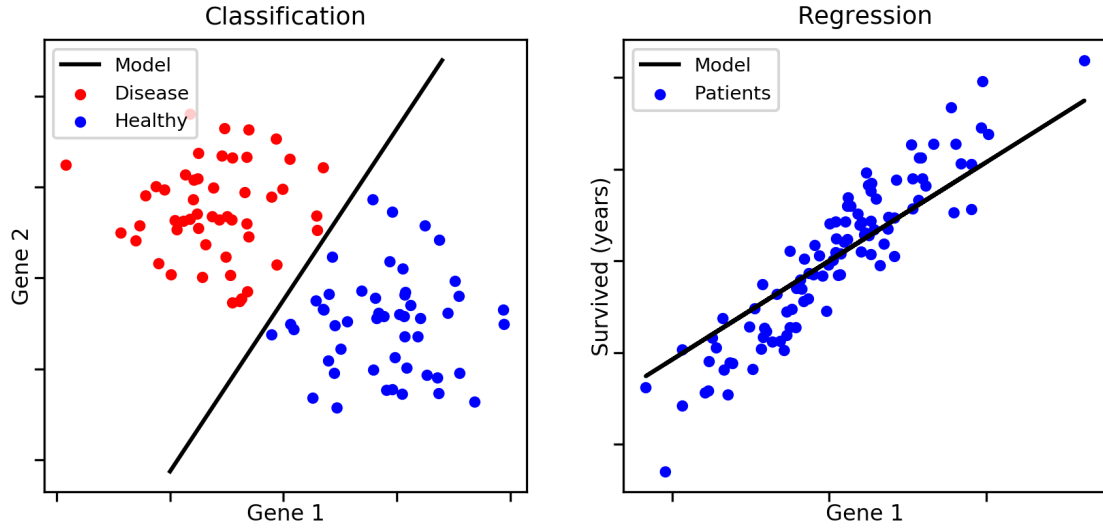


FIGURE 4 : Classification vs régression [image de 16]

Le nombre de paramètres à calculer est minimal si l'on suppose cette surface linéaire; aussi est-ce l'hypothèse qui prévaut souvent, en particulier lorsque l'échantillon de données est de taille réduite par rapport à la dimension de l'espace d'entrée, d'autant qu'elle permet de mener des calculs faciles et de visualiser précisément le résultat obtenu.

Dans \mathbb{R}^n , une surface linéaire est un hyperplan A , défini par l'équation :

$$a_0 + a^T x = 0$$

avec a vecteur de dimension n et a_0 scalaire. Si deux classes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont *séparables* par A , tous les points de la première classe sont par exemple tels que :

$$x \in \mathcal{C}_1 \implies a_0 + a^T x > 0 \quad (12)$$

et ceux de la seconde vérifient alors :

$$x \in \mathcal{C}_2 \implies a_0 + a^T x \leq 0 \quad (13)$$

Dans un espace de dimension $d = 1$, une séparation linéaire se réduit à la comparaison à un seuil. Prenons ce cas particulier pour donner deux exemples où un problème de discrimination à deux classes ne peut pas en pratique être complètement résolu par une séparatrice linéaire.

SÉPARATRICE LINÉAIRE : On appelle hyperplan séparateur ou séparatrice linéaire un hyperplan qui sépare parfaitement deux classes, c'est-à-dire qui vérifie les équations 12 et 13; en particulier, il sépare parfaitement leurs points d'apprentissage. Un hyperplan discriminant est un classificateur linéaire pour deux classes qui ne sont pas linéairement séparables. [2]

A. Le cas non séparable

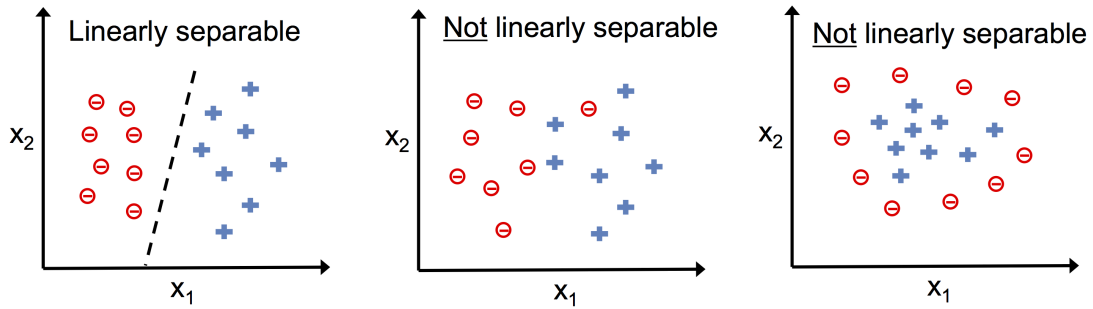


FIGURE 5 : Classes linéairement séparables [image de 16, p. 48]

B. Le modèle de la régression logistique

Ce qu'il est convenu d'appeler *régression logistique* concerne en fait une méthode de classification binaire, à l'instar du perceptron (voir le point 1.3.1). A la différence du perceptron, cependant, nous allons chercher à apprendre une hypothèse h définie de \mathbb{R}^n dans $[0,1]$, et non pas dans $\{0,1\}$, une motivation étant d'interpréter $h(x)$ comme étant la probabilité que l'entrée x appartienne à la classe d'intérêt que nous notons \mathcal{C}_1 . [2]

Dans le cas à deux classes, nous sommes intéressés par le rapport de probabilités conditionnelles :

$$\frac{\mathbf{P}(y = \mathcal{C}_1|\mathbf{x})}{\mathbf{P}(y = \mathcal{C}_2|\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{P}(y = \mathcal{C}_1)}{\mathbf{P}(y = \mathcal{C}_2)} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_1)}{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_2)} \quad (14)$$

Bien entendu, on affecte l'entrée x à la classe \mathcal{C}_1 si le rapport 14 est > 1 , et à la classe \mathcal{C}_2 sinon [2].

Le terme $\frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y=\mathcal{C}_1)}{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y=\mathcal{C}_2)}$ n'est pas facile à estimer à partir des fréquences mesurées des classes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Pour estimer ce terme, il faut faire des hypothèses sur sa forme. Dans la régression logistique, on fait l'hypothèse que le logarithme du rapport est de forme linéaire :

$$\log \left\{ \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_1)}{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_2)} \right\} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b_0$$

Il est possible de ré-exprimer l'équation 14 en utilisant les propriétés logarithmique, rappel :

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b) \quad \log(x)^n = n \log(x)$$

et en utilisant la règle de Bayes, l'équation 14 deviendra :

$$\log \frac{\mathbf{P}(\mathcal{C}_1|\mathbf{x})}{1 - \mathbf{P}(\mathcal{C}_1|\mathbf{x})} = \log \frac{\mathbf{P}(\mathcal{C}_1)}{\mathbf{P}(\mathcal{C}_2)} + \log \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_1)}{\mathbf{p}(\mathbf{x}|y = \mathcal{C}_2)} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b \quad (15)$$

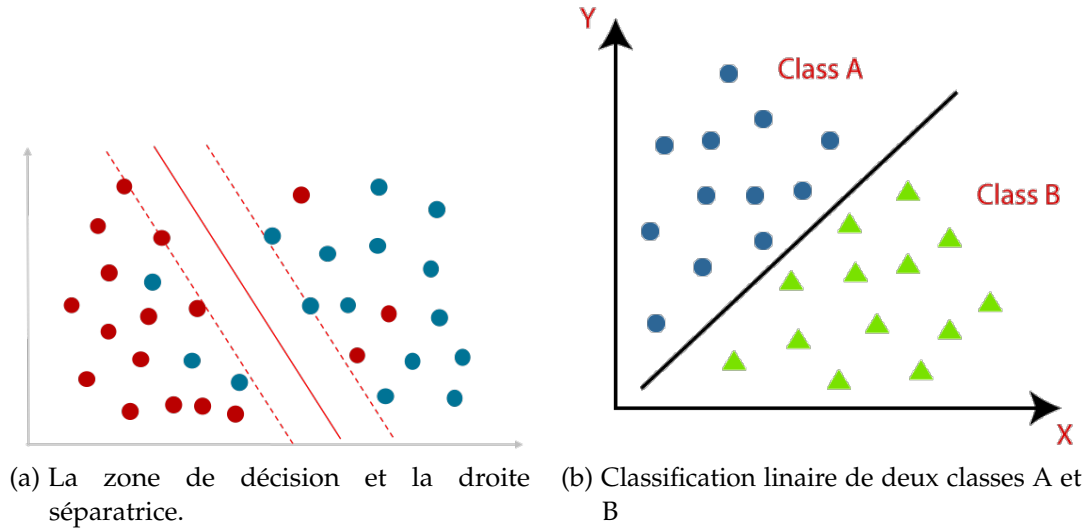


FIGURE 6 : Exemple de la classification

La fonction de la droite séparatrice comme l'illustre la figure 6a et 6b s'écrit :

$$z = w_1x_1 + \dots + w_nx_n + b \quad (16)$$

avec $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \hat{y} = 0 & (y \in \mathcal{C}_1) & \text{si } z < 0 \\ \hat{y} = 1 & (y \in \mathcal{C}_2) & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

La fonction logistique est une fonction sigmoïde, qui prend n'importe quelle entrée réelle t , et renvoie une valeur comprise entre zéro et un [16]. La fonction logistique standard $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ est défini comme suit :

$$\sigma(t) = \frac{e^t}{e^t + 1} = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

Supposons que t est une fonction linéaire (comme la droite de la formule 16) $t = z$. Et la fonction logistique générale $p : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ peut maintenant l'écrire :

$$p(x) = \sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^{-(w_1x_1 + \dots + w_nx_n + b)}} \quad (17)$$

Dans le modèle logistique, $p(x)$ est interprété comme la probabilité de la variable dépendante Y équivalant à un succès/cas-oui plutôt qu'à un échec/non-cas. Il est clair que les variables de réponse Y_i ne sont pas identiquement répartis : $P(Y_i = 1 | X)$ diffère d'un point de données X_i à l'autre, bien qu'ils soient indépendants étant donné la matrice de conception X et paramètres partagés w [2].

LA VRAISEMBLANCE : Indique la plausibilité du modèle vis-a-vis du vraies données. Soit l'échantillon $\mathcal{S} = (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$, avec $y_i \in \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}, \forall i \in (1, \dots, m)$. Sa vrai semblance en fonction des paramètres à apprendre s'écrit :

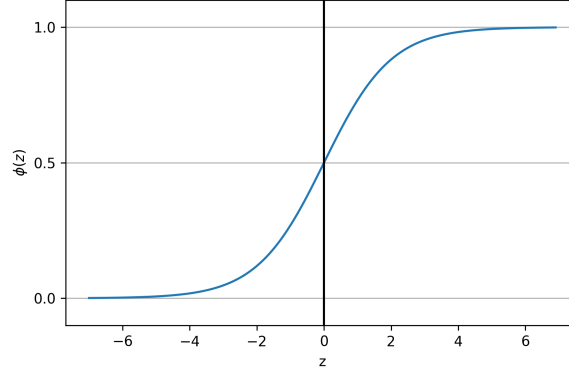


FIGURE 7 : Graphique représentant fonction sigmoïde logistique ajustée aux données (x_n, y_n) . [image de 16]

$$L = \prod_{i=1}^m p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} \quad (18)$$

où m est le nombre d'exemples d'apprentissage appartenant à la classe.

Dans [2], il est montré que ces paramètres peuvent être obtenus par maximisation de la vraisemblance des paramètres conditionnellement aux exemples. Il a été de plus montré que, sous des conditions très générales [?], le maximum de L est unique. La maximisation de la vraisemblance se fait soit en passant par le logarithme, pour obtenir la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \log(L) &= \log\left(\prod_{i=1}^m p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \log(p_i^{y_i}) + \log((1 - p_i)^{1-y_i}) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i) \end{aligned} \quad (19)$$

Comme en Machine Learning on est plus apte à minimiser qu'à maximiser et Maximiser une fonction $f(\cdot)$ consiste à Minimiser $-f(\cdot)$ alors le log-vraisemblance s'écrira :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i) \quad (20)$$

avec le terme $\frac{1}{m}$ pour augmenter la précision.

Avec cette fonction, nous allons maximiser la vraisemblance L en minimisant $-\log(L)$.

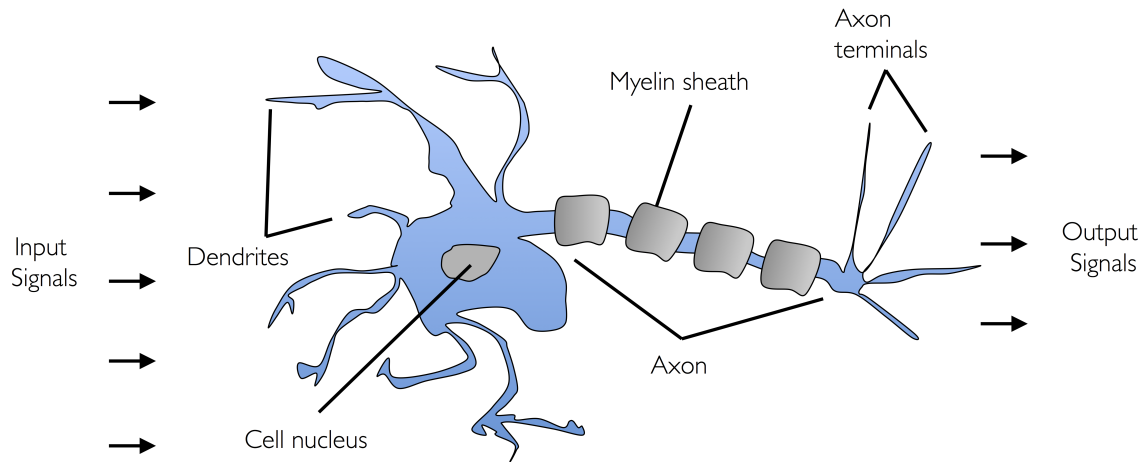


FIGURE 8 : Neurone biologique [16, image de]

1.3 RÉSEAU DE NEURONES, APPRENTISSAGE EN PROFONDEUR

1.3.1 *Perceptron*

Un perceptron est une unité de réseau neuronal (un neurone artificiel) qui effectue certains *calculs* pour détecter des caractéristiques ou une intelligence économique dans les données d'entrée.

Le perceptron, à l'instar du neurone artificiel classique, est un algorithme d'apprentissage supervisé de classificateurs binaires. Un classificateur binaire est une fonction qui peut décider si une entrée, représentée par un vecteur de nombres, appartient ou non à une classe spécifique. Il s'agit d'un type de classificateur linéaire, c'est-à-dire un algorithme de classification qui fait ses prédictions sur la base d'une fonction prédictive linéaire combinant un ensemble de poids avec le vecteur de caractéristiques.

A. *Calcul avec l'algorithme du perceptron*

???

Les perceptrons à une seule couche ne sont capables d'apprendre que des motifs linéairement séparables. Pour une tâche de classification avec une fonction d'activation d'étape, un seul nœud aura une seule ligne divisant les points de données formant les motifs. Plus de nœuds peuvent créer plus de lignes de division, mais ces lignes doivent en quelque sorte être combinées pour former des classifications plus complexes. Une deuxième couche de perceptrons, voire de nœuds linéaires, suffit à résoudre de nombreux problèmes autrement non séparables.

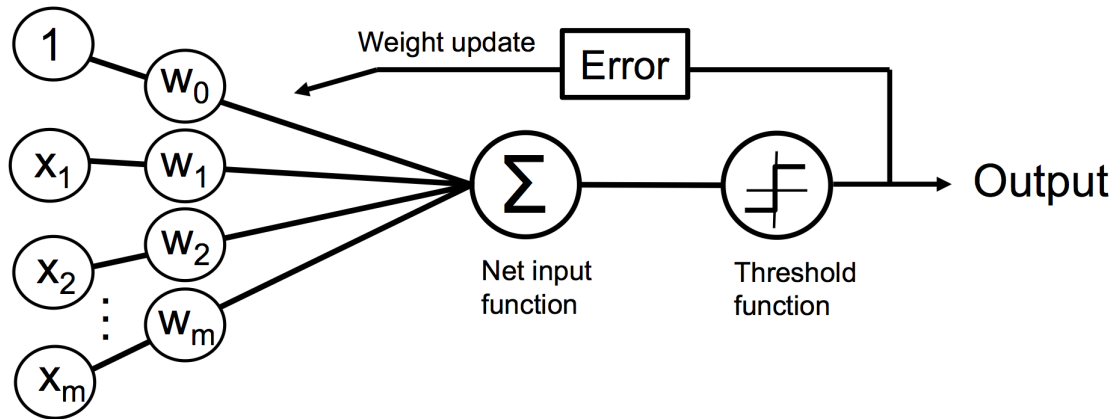


FIGURE 9 : Neurone artificiel modèle : Perceptron [16, image de]

B. *Perceptron Multicouche ???*

1.3.2 Neurones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

A. *Réseau neuronal convolutif (CNN)*

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

ANNEXES ET BIBLIOGRAPHIES

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Yaovi AHADJITSE. "Reconnaissance d'objets en mouvement dans la vidéo par description géométrique et apprentissage supervisé". Thèse de doct. Université du Québec en Outaouais, 2013.
- [2] Vincent Barra ANTOINE CORNUÉJOLS Laurent Michet. *Apprentissage automatique : Deep learning, concepts et algorithmes*. 3rd. Eyrolles, 2018, p. 239-263.
- [3] Christopher M. BISHOP. *Pattern Recognition and Machine Learning*. First. Springer-Verlag New York, 2006, p. 179-195.
- [4] Léon BOTTOU. "Large-scale machine learning with stochastic gradient descent". In : *Proceedings of COMPSTAT'2010*. Springer, 2010, p. 177-186.
- [5] Léon BOTTOU. "Stochastic gradient descent tricks". In : *Neural networks: Tricks of the trade*. Springer, 2012, p. 421-436.
- [6] Léon BOTTOU, Frank E CURTIS et Jorge NOCEDAL. "Optimization methods for large-scale machine learning". In : *Siam Review* 60.2 (2018), p. 223-311.
- [7] F. COULOMBEAU, G. DEBEAUMARCHÉ, B. DAVID, F. DORRA, S. DUPONT et M. HOCHART. *Mathématiques MPSI-PCSI: Programme 2013 avec algorithmique en Scilab*. Cap Prépa. Pearson, 2013. ISBN : 9782744076527. URL : <https://books.google.cd/books?id=e4vfnQEACAAJ>.
- [8] Pádraig CUNNINGHAM, Matthieu CORD et Sarah Jane DELANY. "Supervised learning". In : *Machine learning techniques for multimedia*. Springer, 2008, p. 21-49.
- [9] R.B. DARLINGTON et A.F. HAYES. *Regression Analysis and Linear Models: Concepts, Applications, and Implementation*. Methodology in the Social Sciences. Guilford Publications, 2016. ISBN : 9781462521135. URL : <https://books.google.cd/books?id=YDgoDAAAQBAJ>.
- [10] Natarajan DEEPA, B PRABADEVI, Praveen Kumar MADDIKUNTA, Thippa Reddy GADEKALLU, Thar BAKER, M Ajmal KHAN et Usman TARIQ. "An AI-based intelligent system for healthcare analysis using Ridge-Adaline Stochastic Gradient Descent Classifier". In : *The Journal of Supercomputing* 77 (2021), p. 1998-2017.
- [11] I. GOODFELLOW, Y. BENGIO et A. COURVILLE. *Deep Learning*. Adaptive Computation and Machine Learning series. MIT Press, 2016. ISBN : 9780262035613. URL : <https://books.google.cd/books?id=Np9SDQAAQBAJ>.
- [12] Daniel Kirsch JUDITH HURWITZ. *Machine Learning For Dummies*. IBM Limited Edition. John Wiley et Sons, Inc., 2018.

- [13] N. MATLOFF. *Statistical Regression and Classification: From Linear Models to Machine Learning*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. CRC Press, 2017. ISBN : 9781351645898. URL : <https://books.google.cd/books?id=IHs2DwAAQBAJ>.
- [14] Jorge NOCEDAL et Stephen J WRIGHT. *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [15] Carl-Erik SÄRNDAL, Bengt SWENSSON et Jan WRETMAN. *Model assisted survey sampling*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [16] Vahid Mirjalili SEBASTIEN RASCHKA. *Python Machine Learning and Deep Learning, with sckit-learn and Tensorflow*. 2nd. Packt, 2017, p. 17-139.
- [17] Rob GJ WIJNHOFEN et PHN de WITH. "Fast training of object detection using stochastic gradient descent". In : *2010 20th International Conference on Pattern Recognition*. IEEE. 2010, p. 424-427.