

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

MILANO (MI)

Laboratorio di Fisica Computazionale

Matricola

Lorenzo *del Prete* 885465

Anno accademico

2023-2024

Marzo 2024

Relazione per l'esame di Laboratorio di Fisica computazionale

Indice

1 Realizzazione	6
2 Esercizio 1	7
2.1 Svolgimento	7
2.2 Conclusioni	8
3 Esercizio 2	9
3.1 Svolgimento	9
3.2 Conclusioni	10
4 Esercizi 3-7: Metodi di integrazione deterministici	12
4.1 Esercizio 3	12
4.2 Esercizio 4	13
4.3 Esercizio 5	15
4.4 Esercizio 6	16
4.5 Esercizio 7	17
5 Esercizio 8	18
5.1 Svolgimento	18
5.2 Conclusioni	19
6 Esercizio 9	20
6.1 Svolgimento	20
6.2 Conclusioni	21
7 Esercizio 10	22
7.1 Svolgimento	22
7.2 Conclusioni	22
8 Esercizio 11	23
8.1 Svolgimento	23
8.2 Conclusioni	24
9 Esercizio 12	25
9.1 Svolgimento	25
9.2 Conclusioni	26
10 Esercizio 13	28
10.1 Svolgimento	28
10.2 Conclusione	29
11 Esercizio 14	30
11.1 Svolgimento	30
11.2 Conclusione	32
12 Esercizio 15	33
12.1 Svolgimento	33
12.2 Conclusione	33

13 Esercizio 16	36
13.1 Svolgimento	36
13.2 Conclusione	36
14 Esercizio 17	38
14.1 Svolgimento	38
14.2 Conclusione	38
15 Esercizio 18	41
15.1 Svolgimento	41
15.2 Conclusione	41
16 Esercizio 19	44
16.1 Svolgimento	44
16.2 Conclusione	44
17 Esercizio 20	46
17.1 Svolgimento	46
17.2 Conclusione	46

Elenco delle tabelle

1	Es 3. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 20$	12
2	Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Tra Laguerre 4 e Laguerre 8 la differenza è dell'ordine del 10^{-11}	13
3	Es 4. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 21$	14
4	Es 4. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 1480,46095086	14
5	Es 5. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 21$	15
6	Es 5. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 169,48212819	15
7	Es 6. Somma dell'integrale con metodo midpoint attorno a 0 + metodo di integrazione chiuso. Il risultato esatto è 0,00623219	16
8	Es 6. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 0,00623219	16
9	Es 7. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 935.6271529	17
10	Tabella che confronta i valori dell'integrale dell'ipersfera unitaria M-dimensionale con il metodo midpoint deterministico e il metodo Monte Carlo tenendo conto dei tempi di computazione.	18
11	Valore degli zeri del polinomio $f(x)$ con entrambi i metodi. L'errore è approssimato alla terza cifra decimale, ma non si hanno discostamenti fino a 10^{-16}	45
12	Valore degli zeri del polinomio di Legendre di grado 10 con entrambi i metodi.	45

Elenco delle figure

1	Somma diretta a precisione singola	7
2	Somma inversa a precisione singola	7
3	Somma diretta a precisione doppia	7
4	Somma inversa a precisione doppia	7
5	Confronto tra Δ con singola diretta e doppia diretta	8
6	$\chi_n(n)$ nelle diverse precisioni	9
7	$\Delta_n(n)$ nelle diverse precisioni	10
8	Confronto con $\varepsilon = 10^{-8}$ in long double e in singola precisione a ε non fissato .	10
9	Es 3. Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$	12
10	Es.4 Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$	14
11	Es.5 Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$	15
12	Comparazione grafica di $t(M)$ per i due metodi di integrazione	19
13	Andamento dei primi tre momenti delle due distribuzioni in funzione di N taglia del pacchetto mediato	20
14	Andamento delle differenze proposte dall'equazione (23)	21
15	Andamento delle deviazioni con entrambi i metodi per i tre integrali fino a $N = 1000001$	22
16	Numeri pseudorandomici generati secondo le tre distribuzioni	23
17	A sinistra l'istogramma di r.v. generati con il metodo esatto, a destra gene- rati con il metodo A/R usando $g(x)$ con plottata la distribuzione gaussiana corrispondente	26
18	Distribuzione delle interazioni minime aspettate tra un W e l'altro	27
19	Deviazioni dei due integrali dal valore analitico in funzione del numero di punti	28
20	Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con Eulero con 50 passi	30
21	Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con RK2 con 50 passi	30
22	Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con RK4 con 50 passi	31
23	Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con Eulero .	31
24	Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con RK2 . .	31
25	Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con RK4 . .	32
26	Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito	33
27	Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito	34
28	Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito	34
29	Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo Eulero	36
30	Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo RK2	37
31	Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo RK4	37
32	Tre plot delle coppie di coordinate con Eulero	38
33	Tre plot delle coppie di coordinate con RK2	39
34	Tre plot delle coppie di coordinate con RK4	39
35	Plot della traiettoria nello spazio tridimensionale RK4	40
36	Plot delle traiettorie nello spazio tridimensionale del problema a tre corpi nelle due configurazioni	42
37	Plot dell'energia totale del problema dei tre corpi nelle due configurazioni . . .	42
38	Plot dell'energia totale a confronto con i due passi	43

39	Grafici delle due funzioni	44
40	Griglia complessa con colore in funzione di j , passo d'arresto.	46
41	Curva nel Piano di Gauss a partire da $(-1.25, 0.25)$	47

1 Realizzazione

Negli seguenti esercizi svolti è stato utilizzato *C++* come linguaggio di programmazione, mentre per l'elaborazione di grafici è stato utilizzato *MATLAB*. Per la realizzazione dell'elaborato è stato utilizzato *L^AT_EX*. Eventuali librerie sfruttate verranno citate nella sezione dedicata all'esercizio e incluse nella cartella dei files.

2 Esercizio 1

Il primo esercizio del corso riguarda la maniera in cui la macchina deposita le cifre significative in caso di somma in due metodi differenti e con due precisioni diverse.

2.1 Svolgimento

L'esercizio chiedeva di calcolare in modo computazionale la sommatoria

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

utilizzando la somma diretta in precisione singola e doppia, e la somma inversa in entrambe le precisioni.

Per effettuare il calcolo si è utilizzato un ciclo *for* con 60000 ripetizioni, mentre per la precisione si sono utilizzate rispettivamente variabili di tipo *float* e *double*. In particolar modo sappiamo che il float arriva a 10^{-7} mentre il double a 10^{-15} .

Dopodiché si è plottata la differenza tra il valore computato e quello reale, facendo un confronto nel caso di precisione singola e doppia. Si riporta la Δ nei due metodi, con entrambe le precisioni

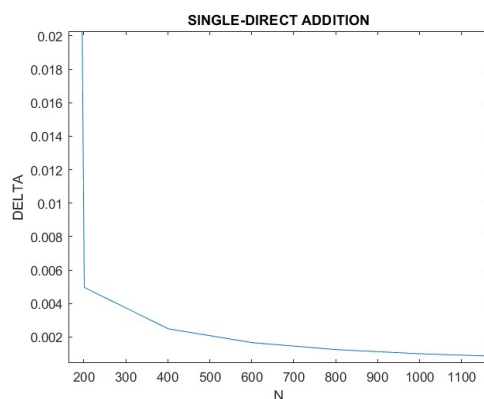


Figura 1: Somma diretta a precisione singola

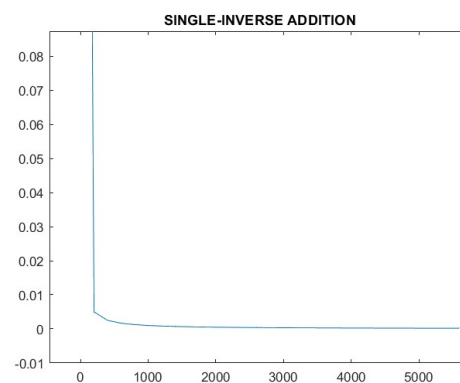


Figura 2: Somma inversa a precisione singola

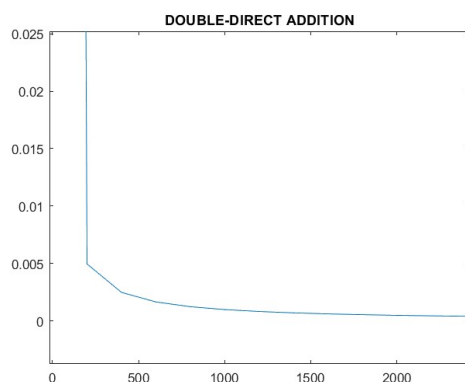


Figura 3: Somma diretta a precisione doppia

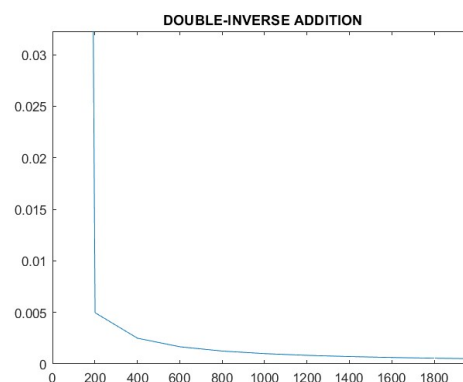


Figura 4: Somma inversa a precisione doppia

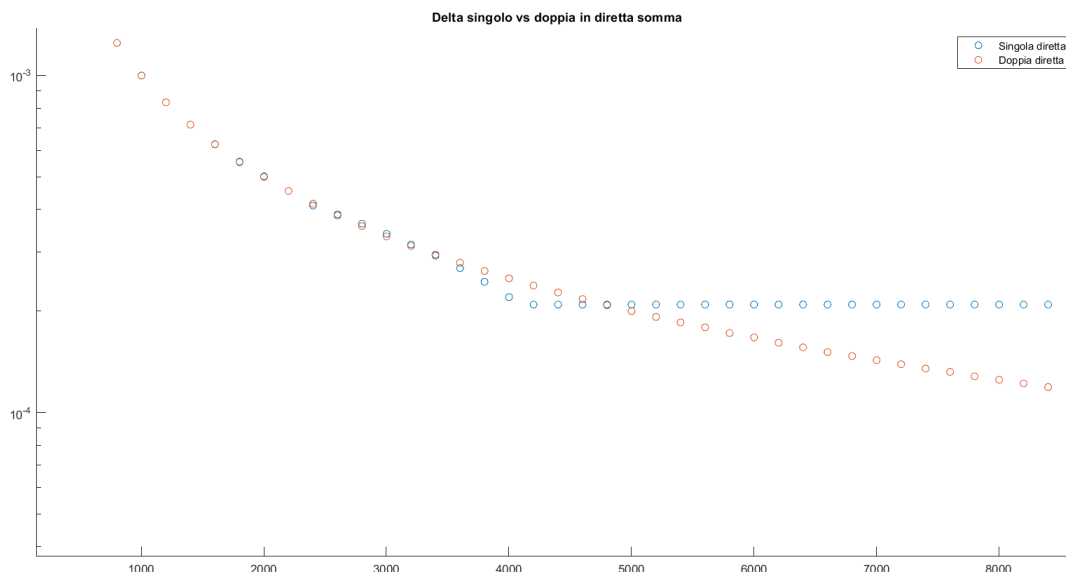


Figura 5: Confronto tra Δ con singola diretta e doppia diretta

Inoltre si è plottato un confronto tra la delta con diretta float e diretta double.

2.2 Conclusioni

Si nota che con la somma inversa si ha una minor perdita di cifre significative. Infatti all'interno della macchina la somma tra due numeri avviene adattando il numero più piccolo al numero più grande, pertanto la perdita di informazione è maggiore tanto più è la differenza tra i due numeri. Nel caso di somma diretta questa differenza è notevole, motivo per cui nei grafici della somma diretta la discesa avviene in modo meno regolare. Nel caso della somma inversa, i numeri confrontati sono sempre simili e pertanto la perdita di informazione è minore, mentre nel caso della somma diretta la macchina si ritrova ad operare un confronto con 1 già dalla prima iterazione del for.

Con un rapido calcolo è possibile trovare l'iterazione a cui le varie precisioni raggiungono il limite delle cifre significative. Ad esempio per il float, sapendo che è in grado di mantenere la propria sensibilità fino a 10^{-7} cifre, mi chiedo quando $10^{-7} = \frac{1}{N^2}$ e ottengo che il *plateau* lo raggiunge a $N = 3162$, mentre per il double con 10^{-15} a $N = 31622776$.

Il fatto che il float perde informazione più velocemente del double emerge anche nel secondo grafico, nel momento in cui, raggiunta l'iterazione in cui il float arriva al massimo della precisione, si trova sotto il double per poi continuare in modo costante, mentre il double continua a decrescere, mostrando i limiti della precisione singola.

3 Esercizio 2

Il secondo esercizio riguarda una relazione di ricorrenza che presenta due soluzioni differenti, di cui una instabile. Si andrà a studiare gli effetti dell'errore di troncamento a diverse precisioni, ovvero singola, doppia e quadrupla.

3.1 Svolgimento

A partire da $\Phi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ si vuole calcolare Φ_1^n tenendo conto della relazione di ricorrenza $\Phi^{n+1} = \Phi^{n-1} - \Phi^n$ la quale è risolta sia da Φ_1 che da $\Phi_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Iniziando da $\chi_0 = 1$ e $\chi_1 = \Phi_1$, si può continuare fino a $\chi_{n+1} = \Phi_1^{n+1}$. Tuttavia va considerata anche la seconda soluzione, la quale essendo instabile introduce nella ricorsione un errore di troncamento che dipende dalla precisione della variabile con cui viene trattato il numero all'interno della macchina, in particolare si ha che

$$\chi_1 = \Phi_1 + \varepsilon \Phi_2 \quad (2)$$

che si propaga nella ricorsione come

$$\chi_n \sim \Phi_1^n + \varepsilon \Phi_2^n \quad (3)$$

E' importante notare che poiché $|\Phi_1| = e^{n \log(|\Phi_1|)} < 1$ quest'ultimo decresce in modo esponenziale con n , mentre $|\Phi_2| = e^{n \log(|\Phi_2|)} < 1$ cresce esponenzialmente, pertanto l'errore di troncamento nella discrepanza cresce in modo esponenziale.

$$\Delta_n = |\chi_n - \Phi_1^n| \cong \varepsilon e^{n \log(|\Phi_2|)} \quad (4)$$

Allora si è eseguito il calcolo di Δ_n in precisione *float*, *double* e *long double* e si sono plottati $\chi_n(n)$ e $\Delta_n(n)$ in scala logaritmica.

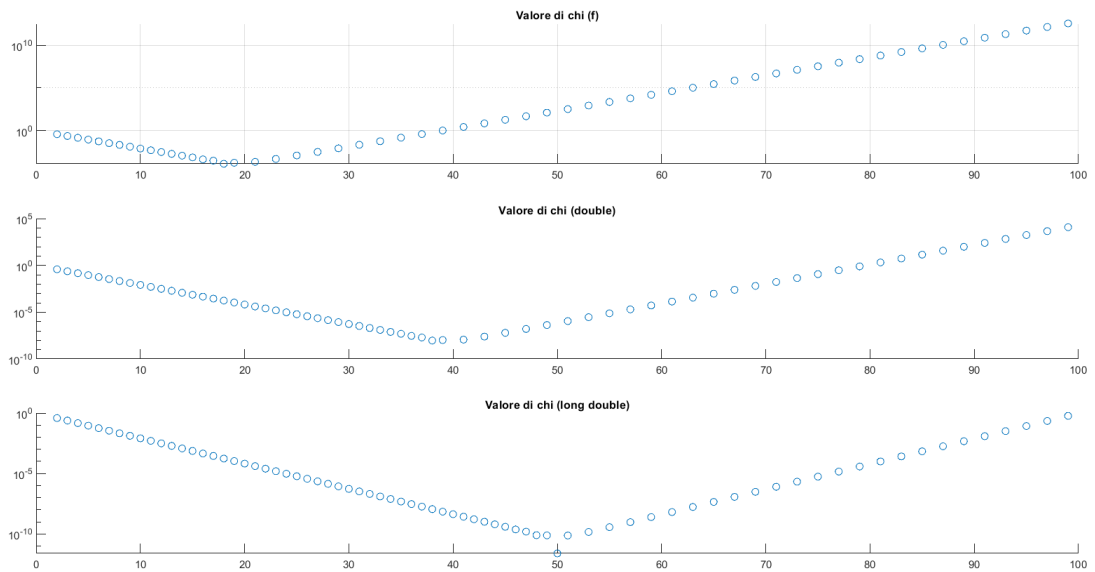


Figura 6: $\chi_n(n)$ nelle diverse precisioni

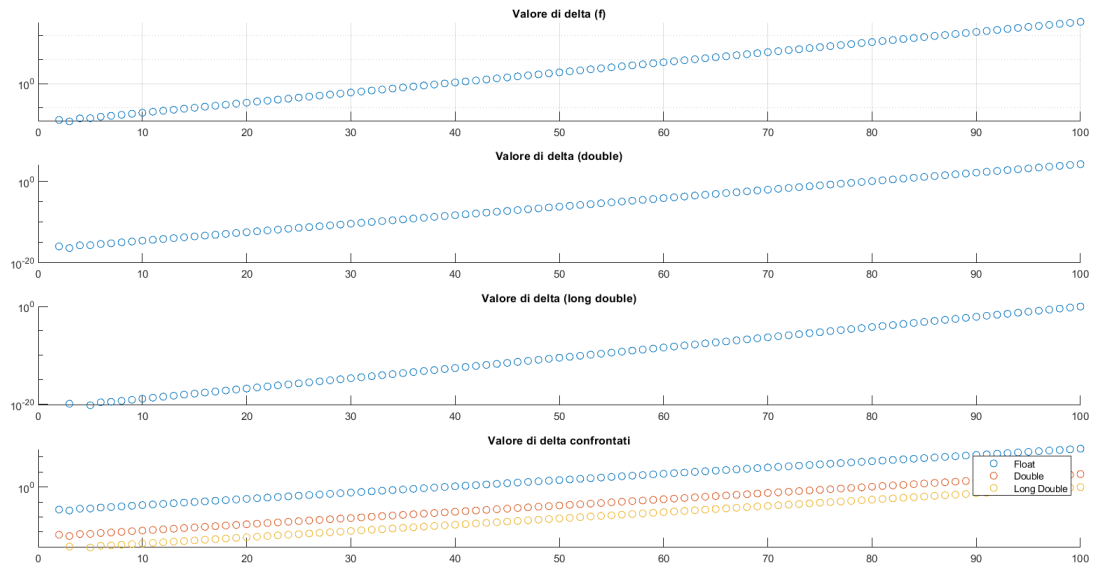


Figura 7: $\Delta_n(n)$ nelle diverse precisioni

Inoltre si è fatta un altro confronto, ovvero tra una ε fissata come $\varepsilon = 10^{-8}$ in precisione *long double* e il risultato con ε non fissato in singola precisione

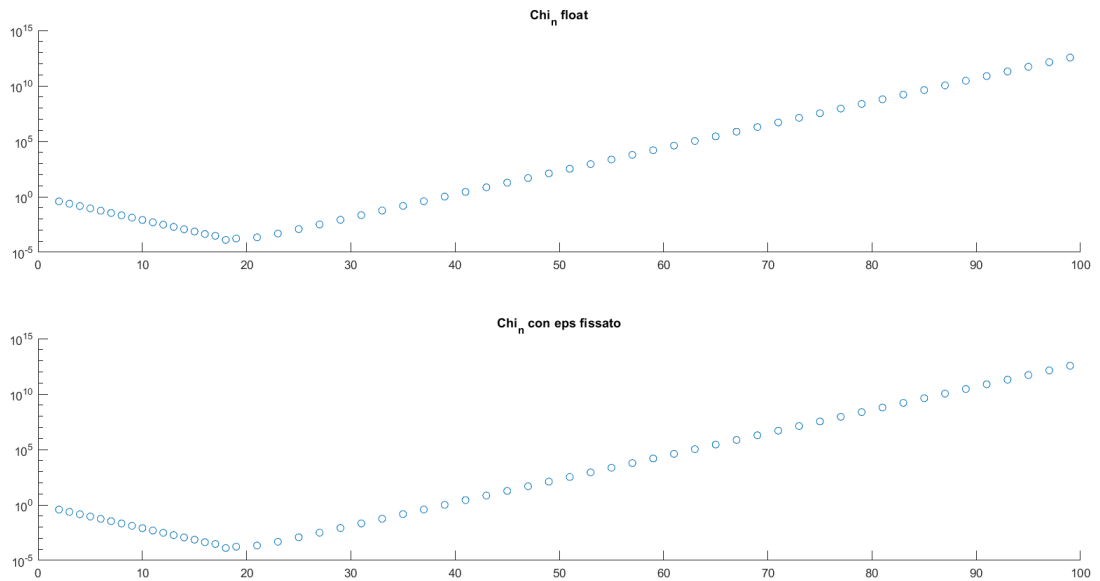


Figura 8: Confronto con $\varepsilon = 10^{-8}$ in *long double* e in singola precisione a ε non fissato

3.2 Conclusioni

Nella figura (11) emerge il valore di n a cui la seconda soluzione instabile, che cresce esponenzialmente, diviene dominante nel valore, dimostrato dall'andamento lineare in scala logaritmica. E' importante notare che questo valore n è differente per i differenti tipi di variabile, mettendo in luce che ε è governato dalla precisione di quest'ultime.

Tale comportamento emerge chiaramente nella figura (7) in cui si vede che l'errore di troncamento sulla seconda soluzione governa l'andamento. Nel grafico in questione il valore di ε e dunque della precisione è legato all'intercetta della retta come $q = \log(\varepsilon)$ ed emerge che l'intercetta è inversamente proporzionale alla precisione della variabile, motivo per cui il long double ha la retta con l'intercetta più bassa in valore.

Dalla seconda parte dell'esercizio si può notare che l'andamento dei due grafici è lo stesso, mettendo ancora una volta in luce che la dominanza dell'errore è legato ai limiti computazionali della variabile, difatti l' ε che è stato fissato per il calcolo in long double è lo stesso del float, e pertanto hanno stesso andamento.

4 Esercizi 3-7: Metodi di integrazione deterministici

Questi quattro esercizi riguardano l'integrazione di diverse funzioni in vari intervalli utilizzando diversi metodi di integrazione, ovvero il metodo del trapezio, di Simpson, di Romberg e di Gauss, quest'ultimo utilizzando diversi polinomi tra cui Legendre, Laguerre ed Hermitte. Pertanto si è creato un codice che implementasse i vari metodi e che potesse funzionare da base per tutti gli esercizi.

4.1 Esercizio 3

Nell'esercizio in questione si richiedeva di calcolare

$$\int_0^5 x^7 e^{-x} dx \quad (5)$$

usando trapezio, Simpson, Romberg e Gauss con Legendre (2,4,8) e Laguerre (2,4,8). Per quanto riguarda i primi tre metodi con $N = 20$ iterazioni si ottiene che

Metodo	Delta valore esatto - computato (10^{-9})
Trapezio	1,599005
Simpson	8,149073
Romberg	0,0031832

Tabella 1: Es 3. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 20$

Dopodiché si sono plottate le deviazioni per il metodo del trapezio e di Simpson in funzione di $1/N$ su 20 iterazioni.

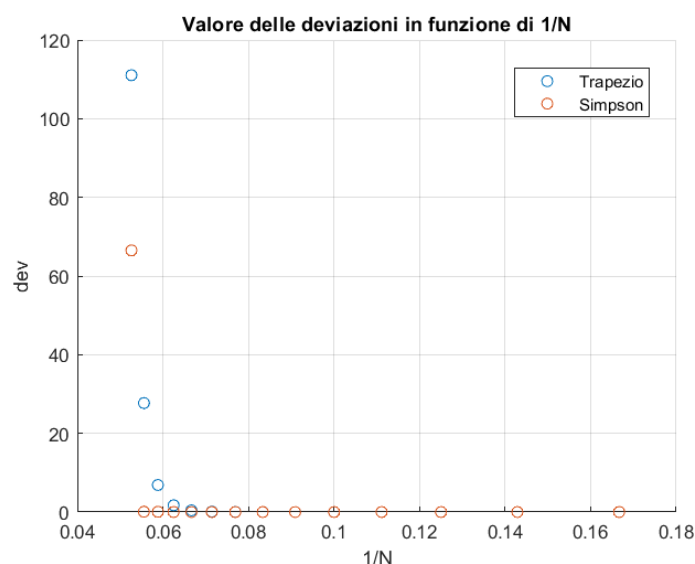


Figura 9: Es 3. Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$

Dalla figura emerge che il metodo di Simpson va a zero più velocemente del metodo del trapezio, in particolare il trapezio va come $1/n^2$ e Simpson come $1/n^4$.

Per quanto riguarda il metodo di Gauss l'integrale è stato maneggiato per ottenere intervalli consoni ai polinomi utilizzati per l'integrazione.

Per Legendre si è ricondotto ad un integrale tra $[-1,1]$. Il rescaling su quest'intervallo è integrabile in modo computazionale a partire dai valori di a e b .

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{n=0}^N f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)w_i \quad (6)$$

Per Laguerre si è ricondotto ad un integrale tra $[0, +\infty]$. Questo procedimento non è immediato pertanto richiede di maneggiare l'integrale singolarmente.

$$\int_0^5 x^7 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^7 e^{-x} dx - \int_5^{+\infty} x^7 e^{-x} dx \quad (7)$$

passando a $x' = x - 5$

$$\int_0^{+\infty} x^7 e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} (x' + 5)^7 e^{-5} e^{-x'} dx' \approx \sum_{n=0}^N x_i^7 w_i - e^{-5} \sum_{n=0}^N (x_i + 5)^7 w_i \quad (8)$$

Polinomi	N	Value
Legendre	2	719,785
Legendre	4	672,689
Legendre	8	672,193
Laguerre	2	-3130,239
Laguerre	4	672,193
Laguerre	8	672,193

Tabella 2: Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Tra Laguerre 4 e Laguerre 8 la differenza è dell'ordine del 10^{-11}

La quadratura di Gauss si dimostra un metodo particolarmente efficiente che converge al risultato in modo ottimale già con 4 iterazioni.

4.2 Esercizio 4

Si è calcolato

$$\int_3^8 Ch(x)dx \quad (9)$$

con trapezio, Simpson e Romberg. Come prima si è plottata la deviazione per trapezio e Simpson in funzione di $\frac{1}{N}$. Si è utilizzato per il calcolo anche il metodo di Gauss con Legendre (2,4,8) e Laguerre (2,4)

In questo caso il metodo di Simpson si rivela essere il meno efficiente poiché la funzione integranda è asintoticamente esponenziale, mentre il metodo di Simpson funziona in modo più accurato per funzioni che crescono come polinomi fino al terzo grado, poiché il suo errore è proporzionale a $(b-a)^4$.

Metodo	Delta valore esatto - computato (10^{-9})
Trapezio	2,80784
Simpson	13362,1
Romberg	0,00182

Tabella 3: Es 4. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 21$

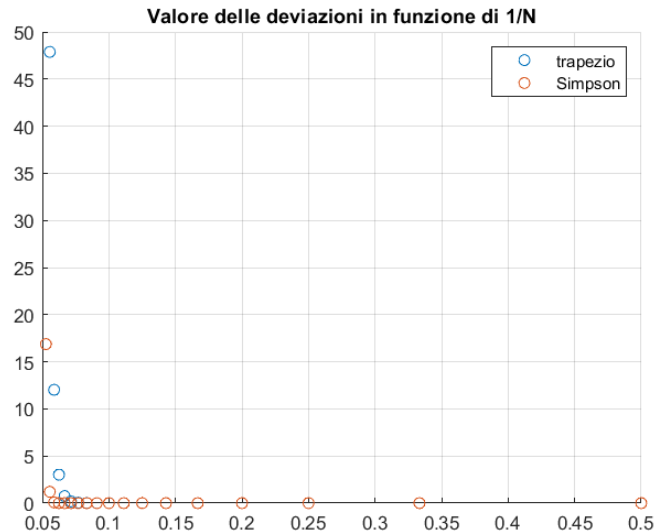


Figura 10: Es.4 Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$

Per quanto riguarda Gauss con i polinomi di Laguerre, l'integrale è stato così rimaneggiato

$$\int_3^8 Ch(x)dx = \frac{1}{2} \left[\int_3^8 e^x dx + \int_3^8 e^{-x} dx \right] \quad (10)$$

passando a $p = x - 3$

$$\frac{1}{2} \left[e^3 \int_0^5 e^p dp + e^{-3} \int_0^5 e^{-p} dp \right] \quad (11)$$

A questo punto riscrivendo le due parti da $[0, +\infty]$ e posto $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ si ottiene che

$$\int_3^8 Ch(x)dx = \frac{1}{2} [-e^{-8}I - e^3I + e^{-3}I - e^{-8}I] \quad (12)$$

Polinomi	N	Value
Legendre	2	1367,5745143
Legendre	4	1480.30431860
Legendre	8	1480,46095086
Laguerre	2	1480,46095086
Laguerre	4	1480,46095086

Tabella 4: Es 4. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 1480,46095086

4.3 Esercizio 5

L'esercizio 5 richiedeva di calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^8 (x^2 + x \sin(4x)) dx \quad (13)$$

usando trapezio, Simpson, Romberg e Gauss con polinomi di Legendre (2,4,8,16,48).

Metodo	Delta valore esatto - computato (10^{-9})
Trapezio	0,2548
Simpson	3762,2
Romberg	0,0036

Tabella 5: Es 5. Confronto tra i delta col valore esatto dei tre metodi a $N = 21$

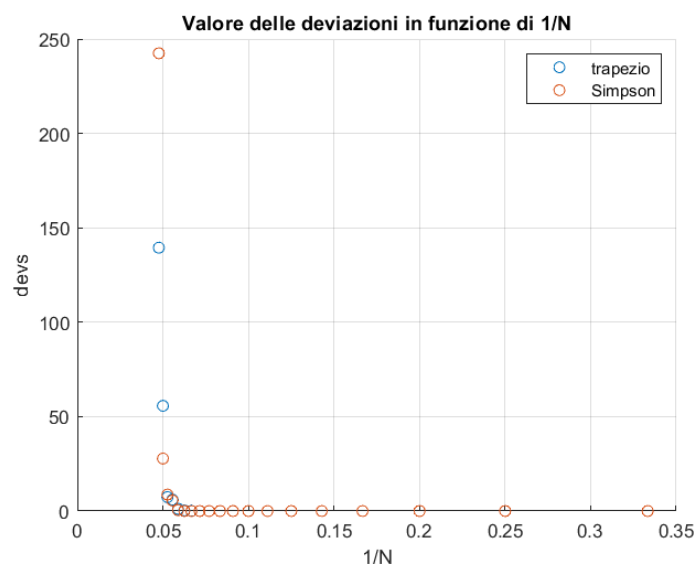


Figura 11: Es.5 Deviazioni per trapezio e Simpson in funzione di $1/N$

Polinomi	N	Value
Legendre	2	150.663799995
Legendre	4	180.598374045
Legendre	8	148.999398916
Legendre	16	169.482088992
Legendre	48	169.482128196

Tabella 6: Es 5. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 169,48212819

A differenza dei precedenti integrali, quest'ultimo richiede almeno 16 punti per una buona approssimazione del risultato a causa dell'oscillazione della funzione integranda, che richiede un maggior numero di punti per essere approssimata da polinomi ortogonali.

4.4 Esercizio 6

Si richiede di calcolare

$$\int_3^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx \quad (14)$$

usando trapezio, Simpson, Romberg e Gauss con Hermite (2,4,8,100) e Laguerre (2,4,8).

Per lavorare con la funzione si utilizza la sostituzione $z = e^{-x^2}$ che mi riconduce all'integrale

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_a^{e^{-9}} [-\ln(z)]^2 dz \quad (15)$$

Per utilizzare i metodi di integrazione deterministici in questo caso è necessario implementare un metodo di integrazione aperto che possa operare su un piccolo intervallo che contiene $z = 0$, ovvero il punto in cui la funzione integranda esplode. A quel punto si possono utilizzare i metodi chiusi sul resto dell'intervallo.

Si è implementato nel codice il metodo aperto del *midpoint* per operare in un intervallo che va da zero ad un estremo superiore preso in funzione di N_{Max} ovvero $open_b = \frac{e^{-9}}{N_{Max}}$.

Con questo metodo si ottengono i risultati

Metodo	Delta valore esatto - computato (10^{-9})
Trapezio	0,00645501
Simpson	0,00615792
Romberg	0,00620744

Tabella 7: Es 6. Somma dell'integrale con metodo midpoint attorno a 0 + metodo di integrazione chiuso. Il risultato esatto è 0,00623219

Per il metodo di quadratura di Gauss con i polinomi di Hermite si è riscritto l'integrale come un integrale tra $[-\infty, +\infty]$, riconducendolo a

$$\int_3^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx = \frac{e^{-9}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|x| + 3)^5 e^{-6|x|} e^{-x^2} dx \quad (16)$$

per Laguerre

$$\int_3^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx = e^{-9} \int_0^{+\infty} (x + 3)^5 e^{-(x^2+5x)} e^{-x} dx \quad (17)$$

Polinomi	N	Value
Hermite	2	0,00110031
Hermite	4	0.00232152
Hermite	8	0.00369270
Hermite	100	0.00597055
Laguerre	2	0.00236841
Laguerre	4	0.00541518
Laguerre	8	0.00627551

Tabella 8: Es 6. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 0,00623219

In questo caso notiamo che la quadratura con polinomi di Hermite anche con $N = 100$ non riesce a raggiungere un risultato che approssima a pieno il risultato analitico. L'efficienza della quadratura in quel caso dipende da quanto la funzione integranda è smooth rispetto ad una densità gaussiana, indicata dal termine e^{-x^2} che approssima bene polinomi di grado basso. In particolar modo se m è l'ordine della quadratura con Hermite, questa approssima in modo efficiente funzioni che possono essere approssimate da polinomi fino al grado $2m + 1$.

4.5 Esercizio 7

L'esercizio 7 richiede di calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^{14} e^{-x^2} dx \quad (18)$$

usando Gauss con Hermite (2,4,8) e Laguerre (2,4,8,24,64).

Per Laguerre riscriviamo

$$\int_0^{+\infty} x^{14} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{14} e^{-x^2}}{e^{-x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{14} e^{x(-x+1)} e^{-x} dx \quad (19)$$

Per Hermite poiché x^{14} è una funzione pari basta riscrivere come

$$\int_0^{+\infty} x^{14} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{14} e^{-x^2} dx \quad (20)$$

Polinomi	N	Value
Hermite	2	0,0069236
Hermite	4	90,6651686
Hermite	8	935,6271528
Laguerre	2	1127,2383449
Laguerre	4	243,9847052
Laguerre	8	922,0433723
Laguerre	24	914,1345487
Laguerre	64	935,641028

Tabella 9: Es 7. Tabella dei valori con il metodo di Gauss con diversi polinomi e punti. Il valore vero è 935.6271529

Come riferito nell'esercizio 6, la quadratura con i polinomi di Hermite all'ordine m approssima l'integrale se la funzione integranda è approssimabile da un polinomio di grado fino a $2m + 1$, motivo per il quale in tabella l'approssimazione risulta accettabile con $N = 8$. Per quanto riguarda Laguerre un discorso analogo riguarda polinomi fino al grado $2m - 1$, motivo per cui il risultato, influenzato dalla regolarità della funzione $f(x) = x^{14} e^{x(-x+1)}$ rispetto a e^{-x} , inizia a divenire accettabile per $N = 8$, per poi divenire molto preciso per $N = 64$.

5 Esercizio 8

L'esercizio 8 richiede il calcolo della sfera unitaria in M dimensioni, chiedendo di effettuare il calcolo utilizzando un metodo di integrazione deterministico e con un metodo Monte Carlo con 10^5 punti, confrontando i tempi di calcolo.

5.1 Svolgimento

Si è sfruttato per il calcolo una relazione analitica che lega S_M ovvero il volume della sfera unitaria m -dimensionale ad M come

$$S_M(M) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{M}{2}}}{\frac{M}{2}!} & \text{se } M = 2n \\ \frac{2^{\frac{M+1}{2}} \pi^{\frac{M-1}{2}}}{M!!} & \text{se } M = 2n + 1 \end{cases} \quad (21)$$

Per l'implementazione si generalizza il fatto che una sfera tagliata in un piano è parametrizzabile come $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Per il calcolo deterministico si va ad implementare il metodo di midpoint con un ciclo che copre le varie dimensioni in cui si effettua l'integrazione e ricavando il volume come

$$S_M = \frac{2^M}{npt} \sum_{i=0}^{npt} f(x_i) \quad (22)$$

con npt numero di punti per asse, considerando che nel codice in questione andiamo a generare 10 punti per ogni dimensione.

Per l'implementazione del Monte Carlo si è implementata una funzione che genera numeri pseudorandomici con distribuzione uniforme in $(0,1)$ e iterando nuovamente su $M - 1$ dimensioni. Il calcolo a quel punto è simile a quello dell'equazione (22).

Nel codice si sono inserite delle variabili di tipo *clock t* per tenere conto del tempo di computazione delle chiamate delle funzioni di integrazione.

Si è così ottenuta la seguente tabella

M	Valore esatto	Metodo midpoint	t (s)	Metodo Monte Carlo	t (s)
1	2,000000	2,000000	$< 10^{-6}$	2,000000	0,003000
2	3,141593	3,152411	$< 10^{-6}$	3,137807	0,021000
3	4,188790	4,198236	$< 10^{-6}$	4,183933	0,057000
4	4,934802	4,943566	0,002000	4,951751	0,067000
5	5,263789	5,270266	0,006000	5,247049	0,079000
6	5,167713	5,174743	0,125000	5,148023	0,086000
7	4,724766	4,732589	0,739000	4,653227	0,093000
8	4,058712	4,062986	7,453000	4,158446	0,080000
9	3,298509	3,279507	101,608000	3,344033	0,107000

Tabella 10: Tabella che confronta i valori dell'integrale dell'ipersfera unitaria M -dimensionale con il metodo midpoint deterministico e il metodo Monte Carlo tenendo conto dei tempi di computazione.

5.2 Conclusioni

Ciò che emerge è che il metodo Monte Carlo con numeri pseudorandomici è molto più efficiente dal punto di vista di tempo di computazione rispetto al metodo deterministico che invece già a 9 dimensioni impiega $t = 101s$. Tuttavia emerge anche che il metodo midpoint si avvicina di più al valore esatto rispetto al metodo Monte Carlo.

Graficamente emerge che con il metodo Monte Carlo fino a $M = 9$ il tempo di computazione è lineare con le dimensioni, mentre quello per il metodo midpoint è esponenziale.

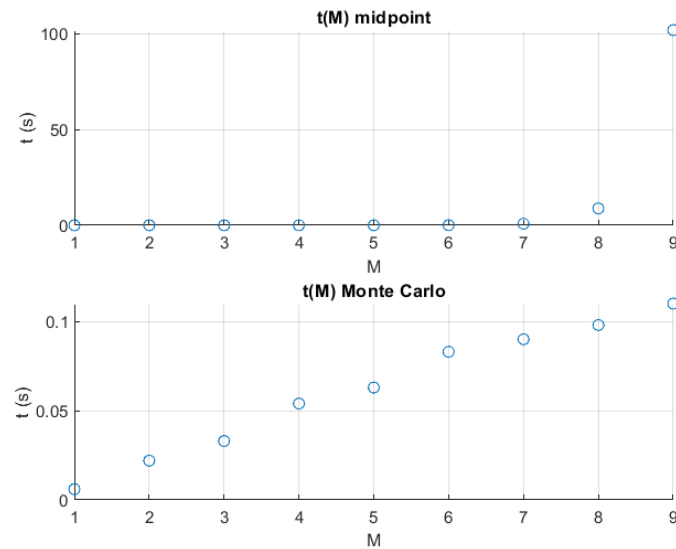


Figura 12: Comparazione grafica di $t(M)$ per i due metodi di integrazione

6 Esercizio 9

Il nono esercizio chiede di utilizzare i numeri pseudorandomici per mettere in luce che le distribuzioni si approssimano a distribuzioni gaussiane confrontandone i momenti con due tipologie di distribuzione. La prima distribuzione è uniforme in $(-1,1)$ e la seconda è discreta con uguale probabilità di restituire 1 o -1.

6.1 Svolgimento

Per l'esercizio si è implementata una funzione che calcolasse i momenti di un campione di numeri generati pseudo-randomicamente secondo una funzione densità di probabilità. Questo campione viene creato sulla media di $NMAX$ numeri che faccio variare cambiando il numero con cui viene generato il pacchetto mediato che ha una grandezza M fissa. Pertanto avrò pacchetti di 10^5 numeri ottenuti dalla media di N numeri pseudo-randomici, con N che varia tra 1 e $NMAX$. Allora teniamo conto dei momenti di primo, secondo e terzo grado, rispettivamente $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle$ al variare dell'intervallo su cui si effettua la media, ovvero N . Per confrontarla con la gaussiana ricordiamo che per una *pdf* gaussiana vale che

$$\begin{cases} \langle x^4 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 = 0 \\ \langle x^6 \rangle - 15 \langle x^2 \rangle^3 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

pertanto al variare di N si sono plottate le relazioni previste dalle equazioni in (23) e nell'ipotesi prevista il grafico dovrebbe andare a zero, mostrando che la pdf mediata approssima una gaussiana in concordanza col *teorema centrale del limite*.

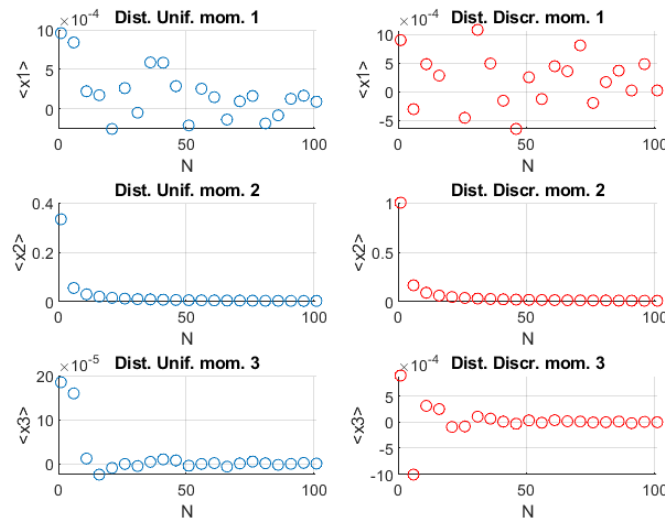


Figura 13: Andamento dei primi tre momenti delle due distribuzioni in funzione di N taglia del pacchetto mediato

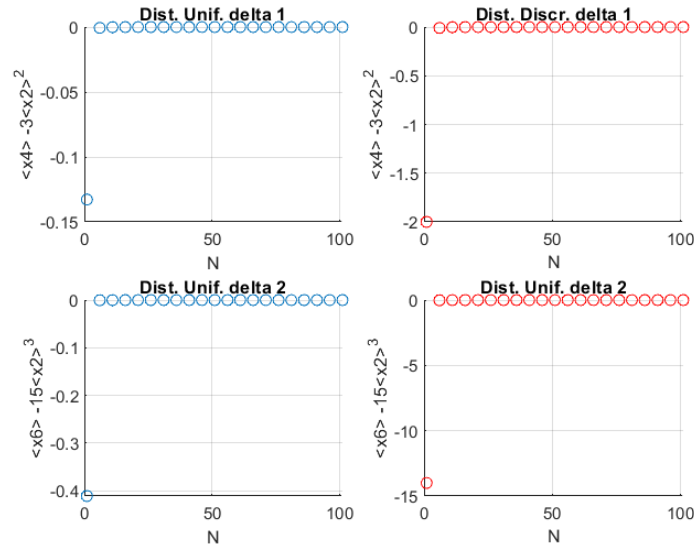


Figura 14: Andamento delle differenze proposte dall'equazione (23)

6.2 Conclusioni

Gli andamenti grafici plottati realizzano l'ipotesi considerata ovvero che data una distribuzione di numeri pseudo-randomici generati secondo una *pdf*, la funzione densità di probabilità della media di tali numeri tende con il crescere della taglia del pacchetto ad approssimare una gaussiana, in accordo con il teorema centrale del limite. Difatti le due differenze che legano i momenti rispettivamente 4,2 e 6,2 tendono a zero, proprietà caratteristica di una pdf gaussiana. Anche la media, ovvero il momento di ordine 1 tende a zero in entrambe le distribuzioni.

7 Esercizio 10

L'esercizio 10 riprende gli integrali degli esercizi 3, 4, 5 e chiede di calcolarli con il Metodo Monte Carlo sampling e il metodo hit&miss.

7.1 Svolgimento

Si implementeranno i due algoritmi nel codice e si studieranno le deviazioni dal valore esatto in funzione del numero di punti pseudo-randomici utilizzati.

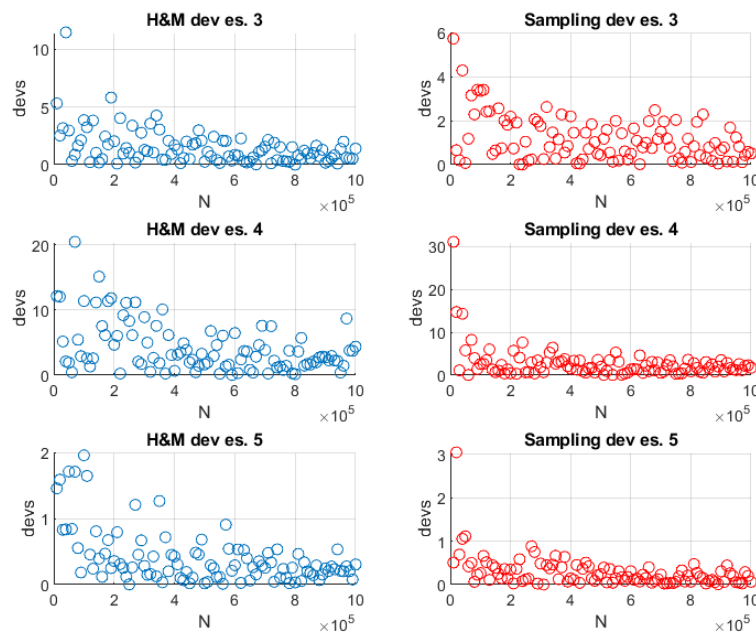


Figura 15: Andamento delle deviazioni con entrambi i metodi per i tre integrali fino a $N = 1000001$

7.2 Conclusioni

I metodi Monte Carlo permettono di ottenere risultati accettabili anche per integrali in una dimensione computabili anche con metodi deterministici, a patto di generare un numero elevato di numeri pseudo randomici, in particolare fino ad $N = 10^6$ le deviazioni presentano comunque delle fluttuazioni lontane dallo zero. Con i metodi deterministici utilizzati l'approssimazione era accettabile già a $N = 20$.

8 Esercizio 11

L'undicesimo esercizio si basa sulla generazione di numeri random secondo tre differenti distribuzioni

$$\begin{cases} e^{-x} \text{ in } (0, 2) \\ e^{-x} \text{ in } (1, +\infty) \\ xe^{-x^2} \text{ in } (0, +\infty) \end{cases} \quad (24)$$

8.1 Svolgimento

Per generare numeri random seguendo queste distribuzioni si è utilizzato il metodo dell'importance sampling, ovvero la ricerca di una $g(x)$ tale che $\frac{f(x)}{g(x)}$ sia più piatta e che i punti vengano pesati al fine di adattare la distribuzione di partenza, ovvero una distribuzione uniforme in $(0,1)$, alla distribuzione target. Per fare ciò si ricerca la $G(x) = \int_a^x g(y)dy$ normalizzata tale che

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dG(x) = \int_{G(a)}^{G(b)} \frac{f(G^{-1}(z))}{g(G^{-1}(z))}dz \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(G^{-1}(z))}{g(G^{-1}(z))} \quad (25)$$

con z in $(0,1)$.

Per la generazione di numeri random dunque si cercherà la $G(x)$ normalizzata e si riscriverà $x = G^{-1}(y)$ con y in $(0,1)$, dunque le x saranno distribuite random secondo $f(x)$.

Pertanto si cercano le funzioni che andranno applicate ai numeri random unif. in $(0,1)$

Per la prima distribuzione si ottiene che $G(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-2}} = y$ dunque $x = -\log(1-y(1-e^{-2}))$.

Per la seconda si ottiene che $G(x) = e(-e^{-x} + e^{-1}) = y$ da cui $x = 1 - \ln(-y + 1)$.

Per la terza si ottiene che $G(x) = -e^{-x^2} + 1 = y$ da cui $x = \sqrt{-\ln(-y + 1)}$.

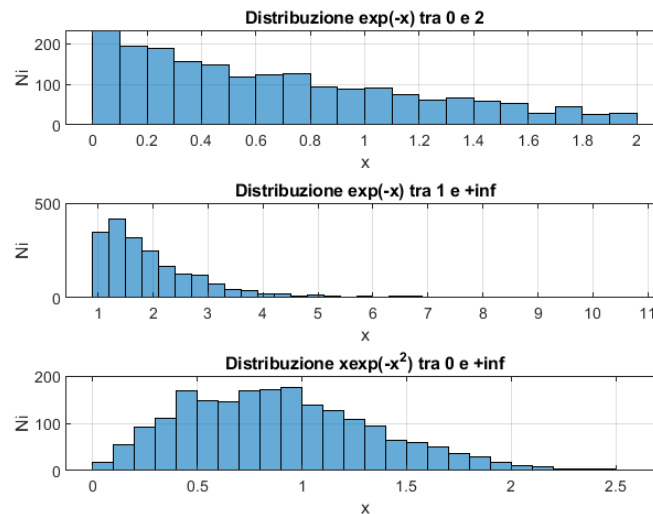


Figura 16: Numeri pseudorandomici generati secondo le tre distribuzioni

8.2 Conclusioni

Il metodo dell'importance sampling può essere utilizzato per la generazione di numeri pseudorandomici secondo una distribuzione $f(x)$ data a patto di trovarne la cumulativa opportunamente normalizzata. La rappresentazione in istogrammi mostra graficamente che i numeri pseudo randomici sono generati secondo le tre $f(x)$ richieste dal problema.

9 Esercizio 12

L'esercizio 12 riguarda il confronto tra due metodi di generazione di numeri random di una $f(x)$ voluta.

9.1 Svolgimento

Si richiede di generare numeri random secondo la distribuzione gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \text{ in } (-\infty, +\infty) \quad (26)$$

utilizzando il metodo dell'importance sampling e quello dell'accept/reject con la funzione

$$g(x) = \begin{cases} A & x \text{ in } (0, 1) \\ Axe^{1-x^2} & x \text{ in } (1, +\infty) \end{cases} \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (27)$$

per il metodo esatto si passa in coordinate polari ottenendo che $z = G(r) = 1 - e^{-r^2}$ da cui si ottiene che

$$\begin{cases} r = \sqrt{-\log(z')}, & z' \text{ in } (0, 1) \\ x = r \cos(2\pi\alpha), & \alpha \text{ in } (0, 1) \end{cases} \quad (28)$$

Il metodo A/R è applicabile utilizzando la $g(x)$ fornita dal problema poiché quest'ultima è una funzione maggiorante di $f(x)$ in tutto \mathbb{R} .

Per proseguire si è prima di tutto specchiata la $g(x)$ per coprire anche il semiasse negativo. Tuttavia si vuole giungere ad una cumulativa inversa $H^{-1}(y)$ con cui generare le x rv (random value), pertanto la $g(x)$ va normalizzata ad 1 per renderla una pdf.

Si definisce allora $h(x) = Ng(x)$ t.c

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} Ng(x) dx = 1 \quad (29)$$

si trova che $N = \frac{1}{3A}$. A questo punto $h(x)$ è una pdf definita a tratti, allora si può calcolare la cumulativa di $h(x)$, $H(x)$ t.c.

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt \quad (30)$$

si ottiene che

$$H(x) = \begin{cases} \frac{e^{1-x^2}}{6} & x \text{ in } (-\infty, -1) \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{2} & x \text{ in } (-1, +1) \\ -\frac{e^{1-x^2}}{6} + 1 & x \text{ in } (+1, +\infty) \end{cases} \quad (31)$$

Così facendo si ottiene una cumulativa invertibile per ottenere $H^{-1}(y)$, ovvero

$$H^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{1 - \log(6y)} & x \text{ in } (0, \frac{1}{6}) \\ 3y - \frac{3}{2} & x \text{ in } (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) \\ \sqrt{1 - \log(6 - 6y)} & x \text{ in } (\frac{5}{6}, +1) \end{cases} \quad (32)$$

A questo punto si prosegue con la seguente logica

- Si genera U_1 r.v. uniforme in $(0,1)$;
- Si genera $W = H^{-1}(U_1)$ r.v. secondo l'inversa della cumulativa;
- Si genera U_2 r.v. uniforme in $(0,1)$;
- Se $\frac{f(W)}{3A \cdot h(W)} \geq U_2$ si accetta W , sennò si torna allo step 1.

La costante $c = 3A$ è tale che $h(x) \geq f(x)$ per ogni x .

9.2 Conclusioni

Si ottengono così le due distribuzioni

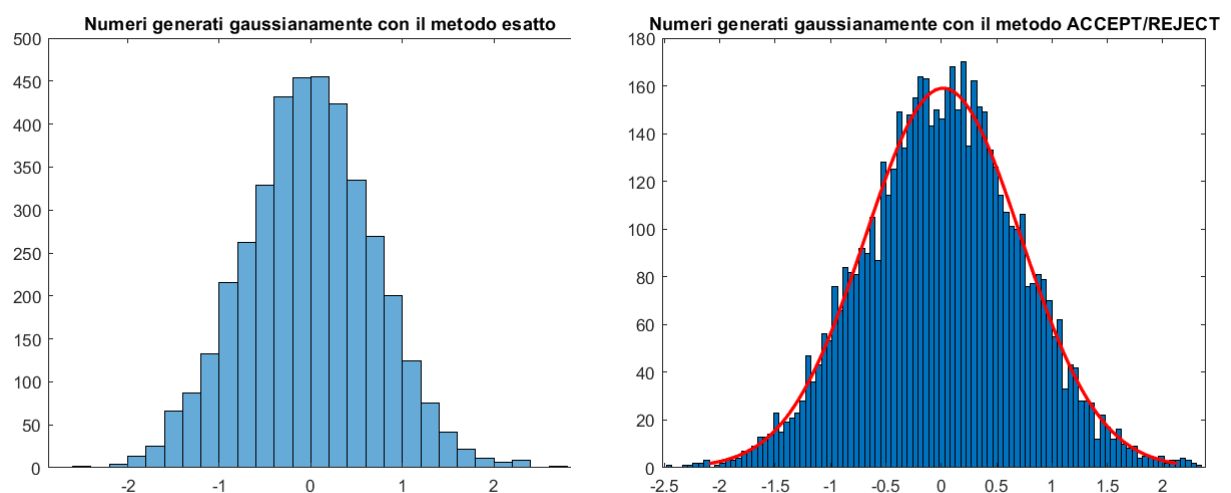


Figura 17: A sinistra l'istogramma di r.v. generati con il metodo esatto, a destra generati con il metodo A/R usando $g(x)$ con plottata la distribuzione gaussiana corrispondente

Emerge che i due metodi sono congrui ed equivalenti. La potenza del metodo A/R emerge principalmente nei casi in cui sulla funzione di distribuzione $f(x)$ non è facilmente applicabile l'importance sampling e pertanto basta partire da una $g(x)$ maggiorante di $f(x)$ tramite una costante di "boundary" c . Si cerca di minimizzare questo numero poiché è legato al numero di interazioni previste affinché ritrovi un W valido per il conto. Si dimostra analiticamente che infatti il numero di int. previste è proprio $\frac{1}{c}$. Andando a verificare il numero di interazioni che intercorre tra un W accettato e l'altro emerge che per valori diversi di c che avverano la relazione si hanno distribuzioni geometriche, come in figura

Tuttavia il metodo Accept/Reject presenta un problema a livello di efficienza computazionale con il crescere delle dimensioni, poiché cresce il numero di sample scartati dal controllo e dunque numeri che vengono generati per non essere utilizzati.

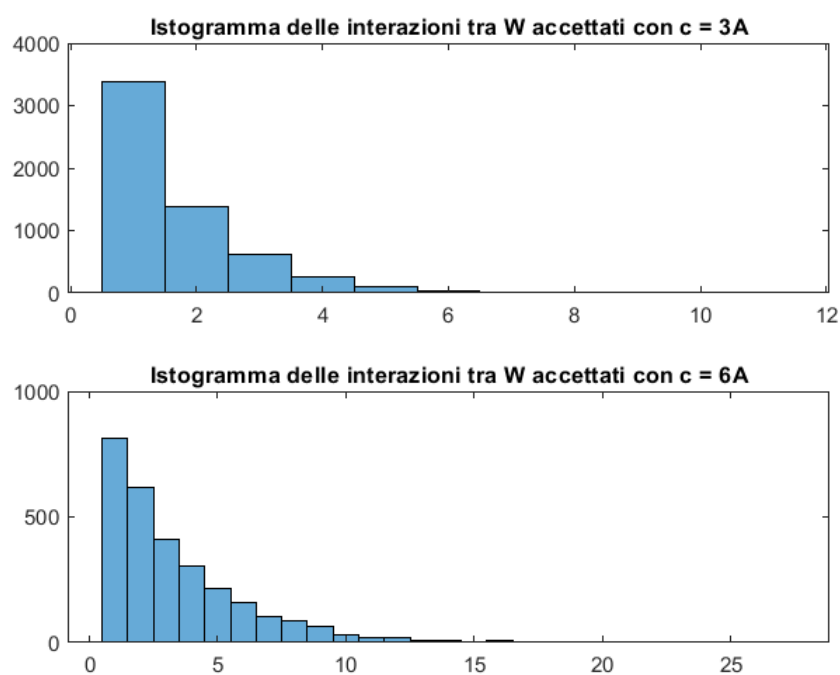


Figura 18: Distribuzione delle interazioni minime aspettate tra un W e l'altro

10 Esercizio 13

L'esercizio 13 richiede di utilizzare il metodo dell'importance sampling esposto negli esercizi precedenti per dare una stima numerica di due integrali usando due distribuzioni date dal testo.

10.1 Svolgimento

I due integrali da svolgere sono

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx \\ \int_0^{\pi} x \sin(x) dx \end{cases} \quad (33)$$

utilizzando le distribuzioni rispettivamente $\cos(x)$ e $\sin(x)$.

Per il primo integrale $f(x) = x \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$. La $g(x)$ è già normalizzata, allora $G(x) = \int_0^x \cos(x) dx = \sin(x)$ da cui $x = G^{-1}(y) = \arcsin(y)$, allora

$$I = \int_0^1 \arcsin(y) dy \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \arcsin(y_i) \quad (34)$$

con y unif. pseudorandom in $(0,1)$.

Per il secondo integrale normalizziamo $h(x) = b \sin(x)$ da cui $h(x) = \frac{\sin(x)}{2}$.
 $H(x) = \int_0^x \frac{\sin(x)}{2} dx = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$, $x = \arccos(1 - 2y)$ con y in $(0,1)$.

$$I = \int_0^1 2 \arccos(1 - 2y) dy \quad (35)$$

Plottate le deviazioni in funzione del numero di punti

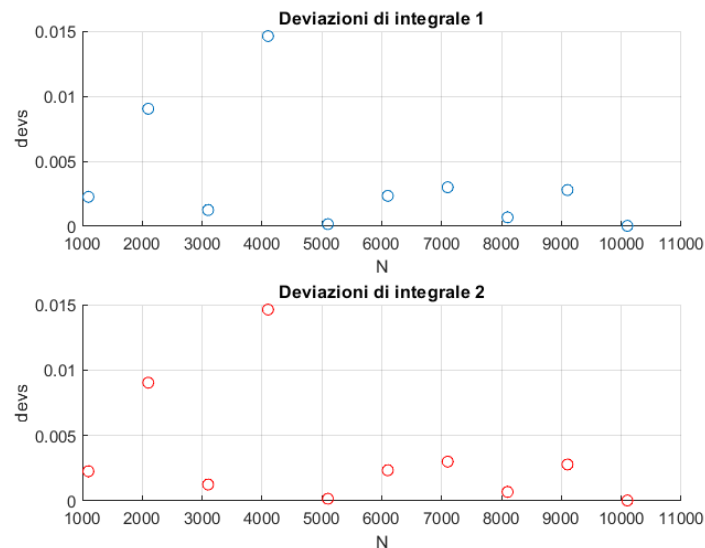


Figura 19: Deviazioni dei due integrali dal valore analitico in funzione del numero di punti

10.2 Conclusione

Il metodo dell'importance sampling può essere utilizzato per l'integrazione numerica e raggiunge una deviazione dal valore analitico minore di 0,015 già con 1000 punti. L'andamento della deviazione non è riconducibile ad un andamento analitico tuttavia con 10^5 punti la deviazione è 0,000003.

11 Esercizio 14

L'esercizio 14 riguarda la risoluzione dell'equazione differenziale della molla con i seguenti tre metodi: Eulero, Runge-Kutta2 e Runge-Kutta4.

11.1 Svolgimento

Il problema di Cauchy da risolvere numericamente è il seguente

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\theta \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases} \quad (36)$$

Per la soluzione si va a definire un T_Steps come passo di integrazione e un intervallo temporale di 2 unità temporali in cui far evolvere la soluzione. Il passo di integrazione varierà tra 20 e 2000 al fine di vedere l'andamento del confronto tra i valori numerici e la soluzione analitica al variare del passo di integrazione. La discrepanza andrà calcolata come la differenza tra il valore numerico e la soluzione analitica a $t = 0$.

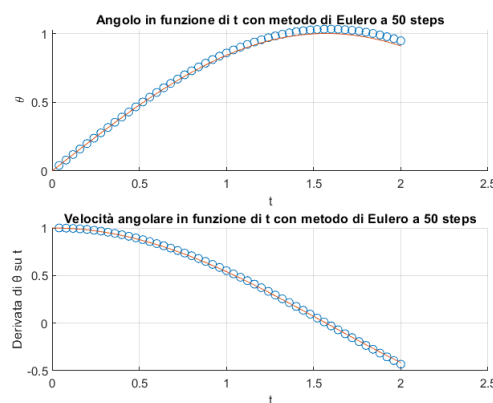


Figura 20: Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con Eulero con 50 passi

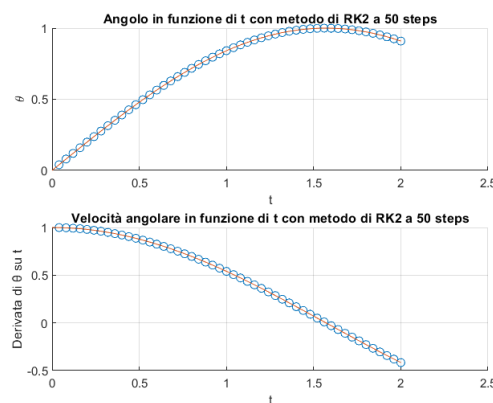


Figura 21: Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con RK2 con 50 passi

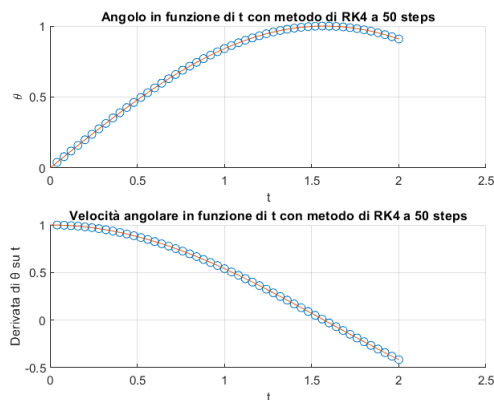


Figura 22: Confronto grafico tra soluzione analitica e soluzione numerica con RK4 con 50 passi

Mentre l'andamento della discrepanza

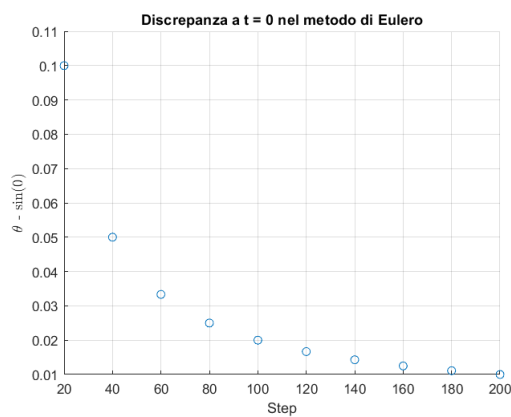


Figura 23: Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con Eulero

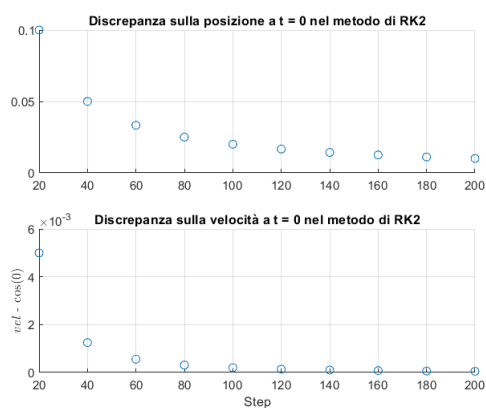


Figura 24: Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con RK2

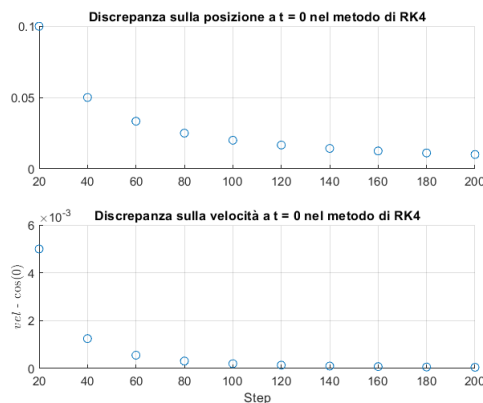


Figura 25: Discrepanza analitico-numerico a variare del passo di integrazione con RK4

11.2 Conclusione

Sebbene l'equazione differenziale in questione permettesse una soluzione analitica facilmente ricavabile, i metodi di risoluzione numerici hanno risolto il problema con una discrepanza di circa 0,1 già con 20 passi fino ad arrivare all'ordine del 0,01 con 200 passi.

L'andamento della discrepanza emerge decrescente. L'andamento riguarda l'errore che si introduce nel metodo tra $y(t)$ e $y(t+h)$, che per RK2 è $O(h^3)$ e per RK4 $O(h^5)$. L'implementazione può essere meglio raffinata andando a creare uno step size che sia adattivo dell'andamento della funzione, laddove per intervalli in cui la funzione cresce poco è possibile allentare lo step ed evitare che la macchina lavori con step troppo piccoli dove non è necessario, viceversa per intervalli in cui la crescita della funzione è notevole ed uno step troppo grande porterebbe ad un errore grande.

12 Esercizio 15

L'esercizio 15 si basa sulla risoluzione numerica di un problema di Cauchy che riguarda l'equazione differenziale di un pendolo senza l'approssimazione delle piccole oscillazioni a cui viene aggiunto prima un attrito e poi una forzante.

12.1 Svolgimento

Il sistema viene risolto con i tre metodi di Eulero, RK2 e RK4, con la decomposizione in sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. In particolare si sono risolte le tre seguenti equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \\ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) - \gamma \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) - \gamma \frac{d\theta(t)}{dt} + A \sin\left(\frac{2}{3}t\right) \quad A, \gamma \in (0, 2) \end{array} \right. \quad (37)$$

si sono plottate le dipendenze di $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ e $\dot{\theta}(\theta)$ per i vari metodi e per le tre equazioni.

12.2 Conclusione

I plot ottenuti per l'equazione del pendolo senza approssimazione di piccoli angoli

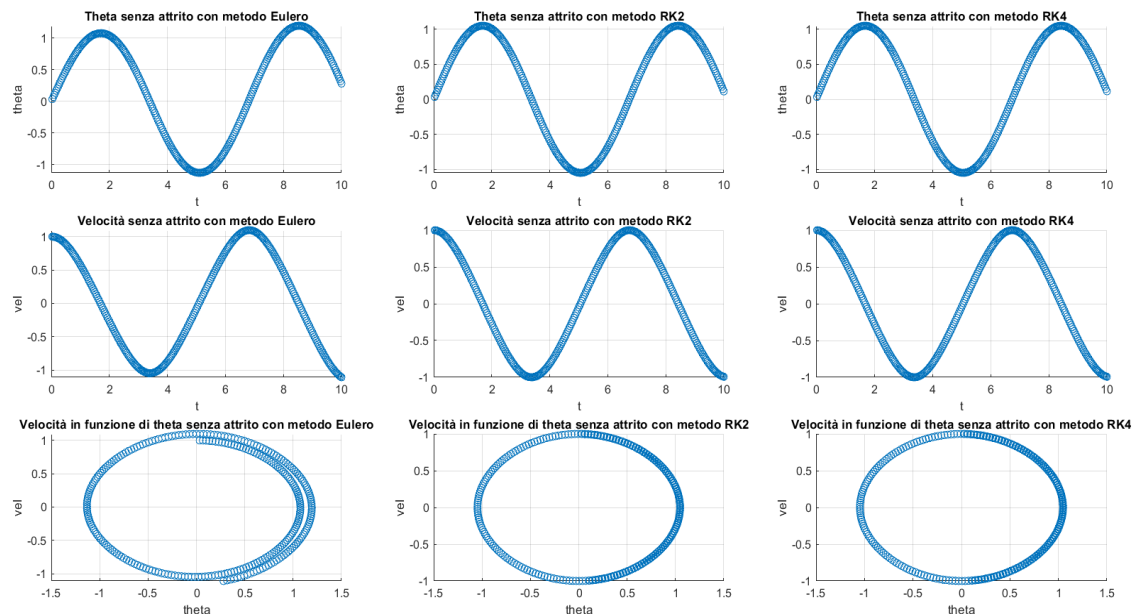


Figura 26: Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito

La prima cosa che emerge graficamente è che il metodo di Eulero presenta una soluzione numerica differente dai metodi di RK. In primis nel grafico $\theta(t)$ in cui si raggiunge un θ maggiore

di 1. ciò emerge chiaramente anche nel grafico nello spazio delle fasi $\dot{\theta}(\theta)$ in cui l'orbita del pendolo non è chiusa e dunque non periodica, a differenza di RK in cui l'orbita si richiude mostrando un moto periodico.

Per quanto riguarda il pendolo con l'attrito

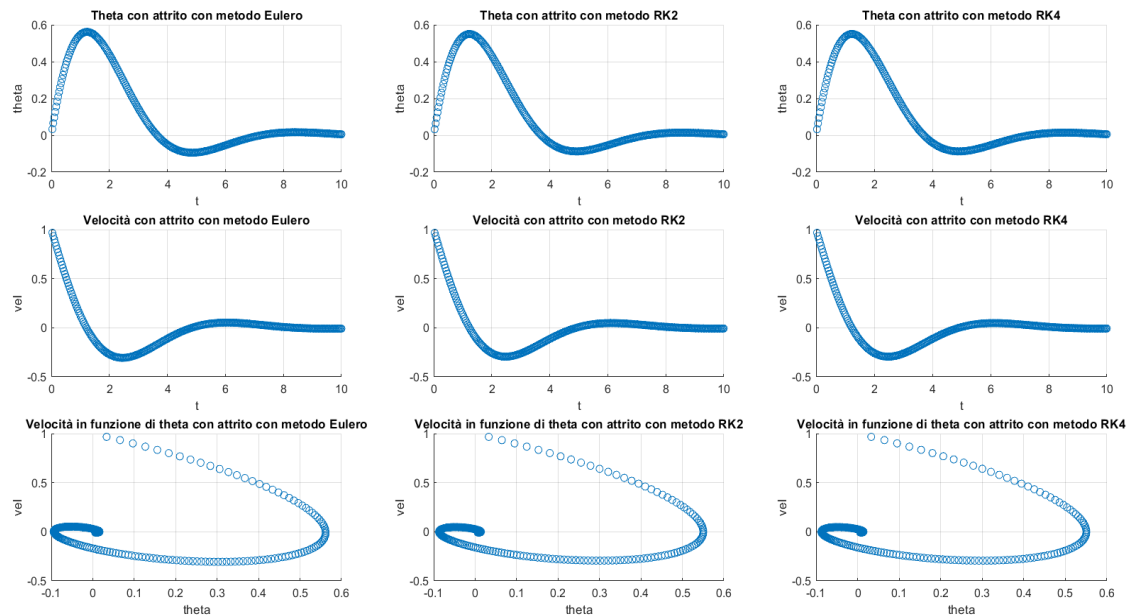


Figura 27: Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito

Per il pendolo con la forzante

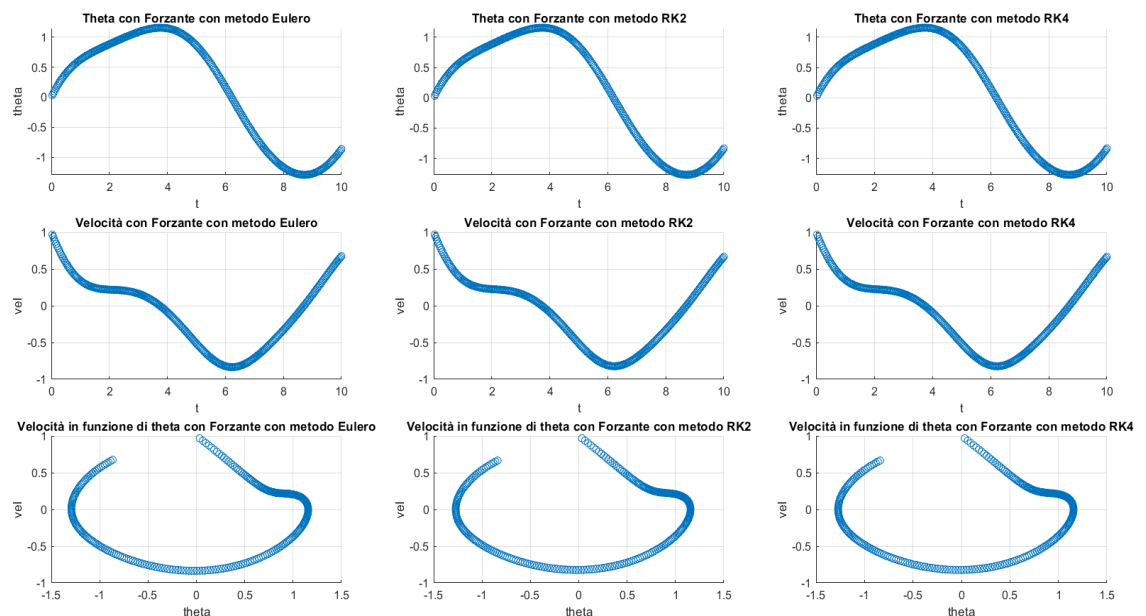


Figura 28: Tre metodi di risoluzione numerica per il pendolo senza attrito

I metodi numerici emergono come efficienti metodi per ricavare dati e comportamenti da problemi fisici modellizzati da equazioni differenziali che non sono analiticamente risolvibili con

gli strumenti matematici. I dati sono effetti da errori di computazione e di approssimazione tuttavia permettono comunque di ricavare dei comportamenti di fenomeni complessi, ad esempio il problema dei tre corpi che verrà affrontato successivamente.

13 Esercizio 16

L'esercizio 16 utilizza nuovamente i metodi di integrazione di Eulero, RK2 e RK4 per risolvere un problema di Cauchy.

13.1 Svolgimento

Il problema di Cauchy in questione è il seguente

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta(t)}{dt} + (\alpha - \beta \cos(t)) \sin(\theta) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0.1 \end{cases} \quad (38)$$

Ed è da risolvere in tre configurazioni distinte ovvero

$$\begin{cases} \alpha = 0.5; \beta = 0.5; \gamma = 0.03 \\ \alpha = 0.5; \beta = 0.63; \gamma = 0.03 \\ \alpha = 0.5; \beta = 0.70; \gamma = 0.03 \end{cases}$$

Si è decomposto il problema in un sistema di equazioni del primo ordine e si è risolto numericamente con i metodi di integrazione.

13.2 Conclusione

Grazie ai metodi numerici si sono potute plottare le evoluzioni temporali delle grandezze in gioco.

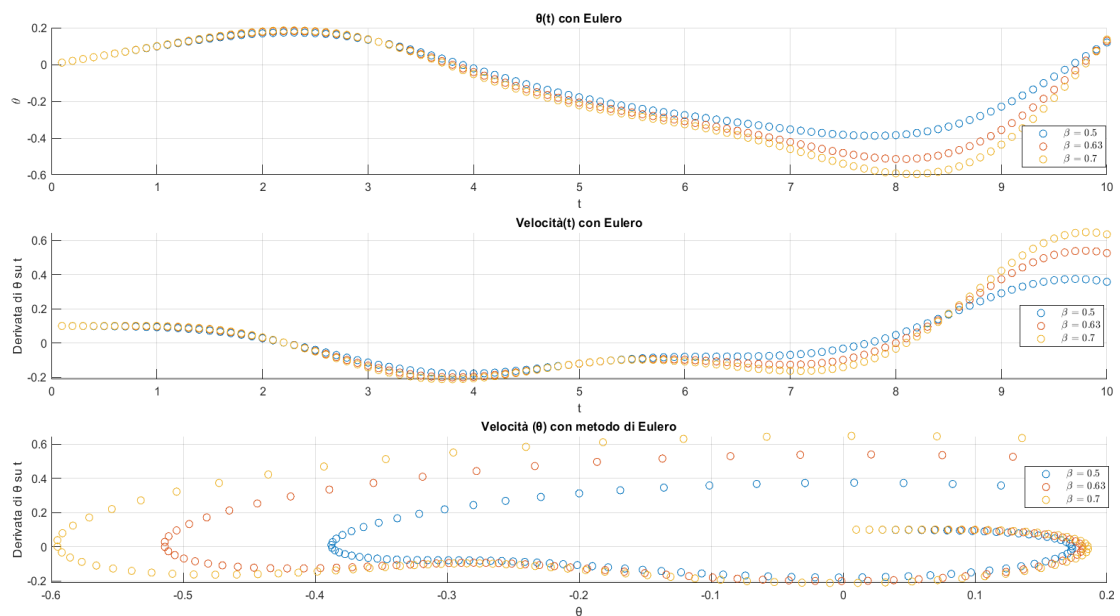


Figura 29: Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo Eulero

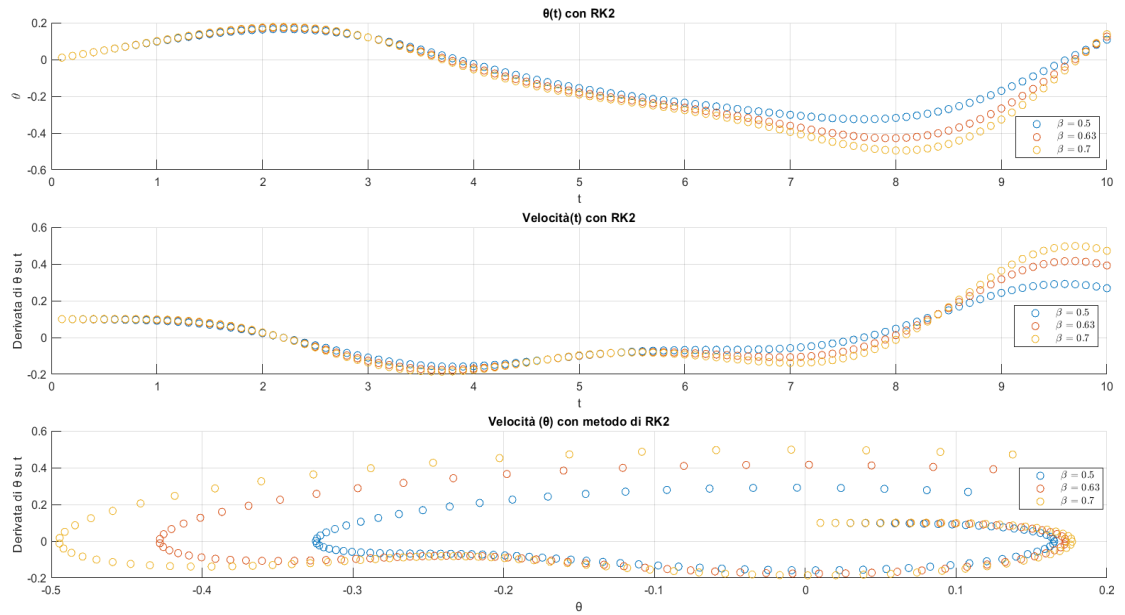


Figura 30: Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo RK2

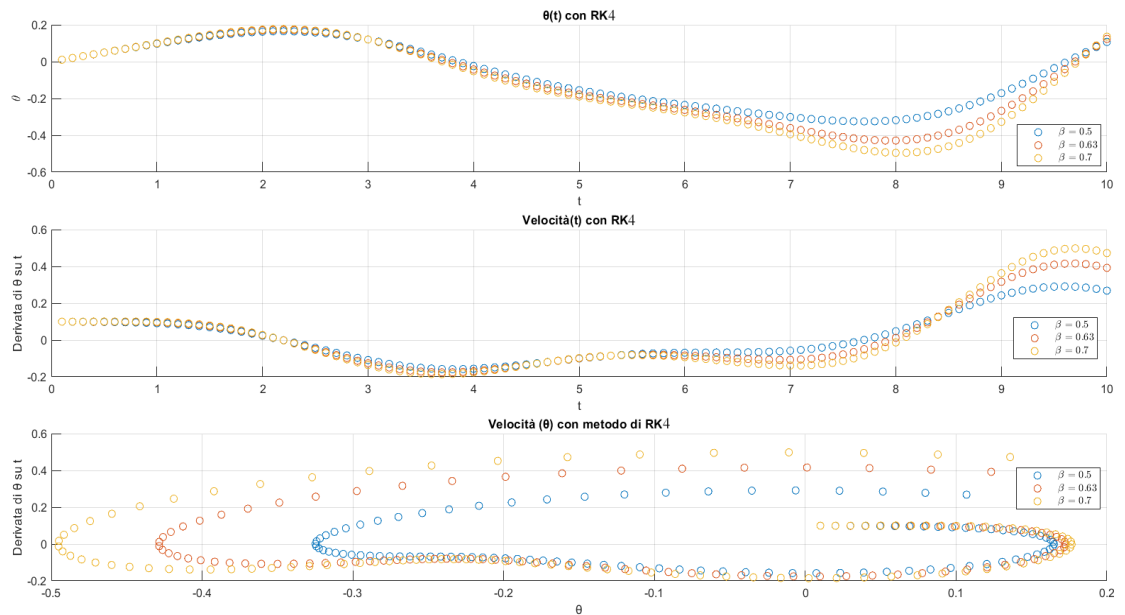


Figura 31: Risoluzione dei tre problemi di Cauchy con metodo RK4

Emerge dal grafico che il metodo di Eulero in particolar modo si discosta in alcuni punti dell'evoluzione dai metodi RK, ciò si nota particolarmente nel grafico $\dot{\theta}(\theta)$ in cui il metodo di Eulero arriva a superare un valore di velocità $\dot{\theta} = 0.6$, a differenza degli altri due metodi che rimangono limitati sotto tale valore. Similmente all'esercizio precedente dunque il metodo di Eulero si dimostra meno accurato dei metodi RK aumentando la complessità del sistema.

14 Esercizio 17

Questa volta l'esercizio richiede di utilizzare i metodi di risoluzione numerici per risolvere un problema di Cauchy in 3 dimensioni (x, y, z) .

14.1 Svolgimento

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è il seguente

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -10(x - y) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -xz + 28x - y \\ \frac{dz(t)}{dt} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases} \quad (39)$$

L'esercizio non specifica le condizioni iniziali dunque poiché per avere un'evoluzione in tal caso è necessario che almeno una delle tre coordinate non sia zero all'inizio, si è posto nella risoluzione che

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

14.2 Conclusione

Dalla risoluzione si è potuto plottare le dipendenze (x, y) , (x, z) , (y, z) ed inoltre si è tracciato un grafico della traiettoria nello spazio (x, y, z) .

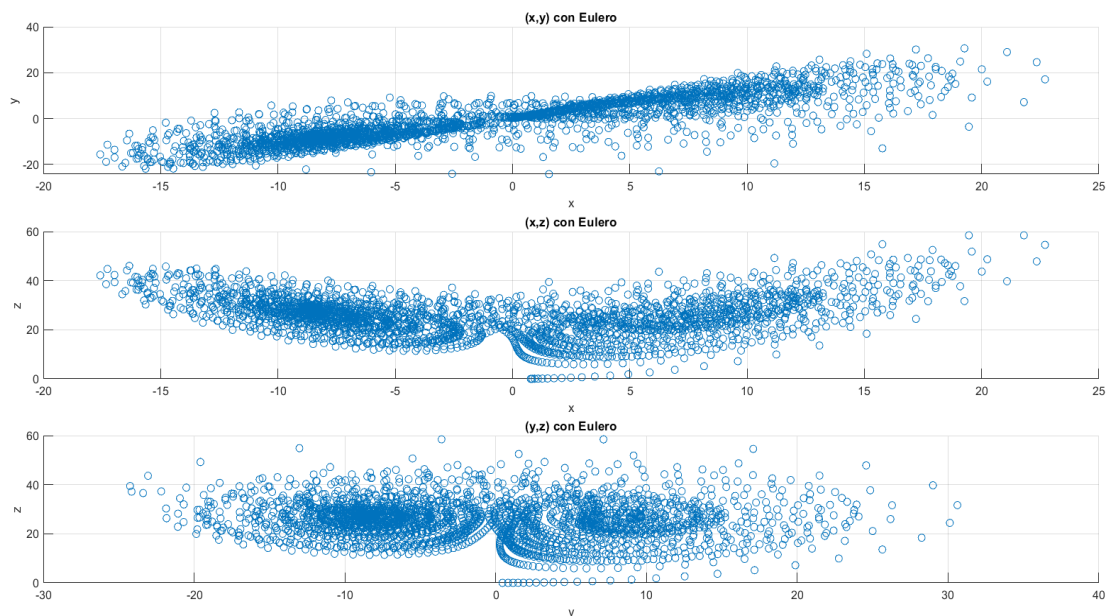


Figura 32: Tre plot delle coppie di coordinate con Eulero

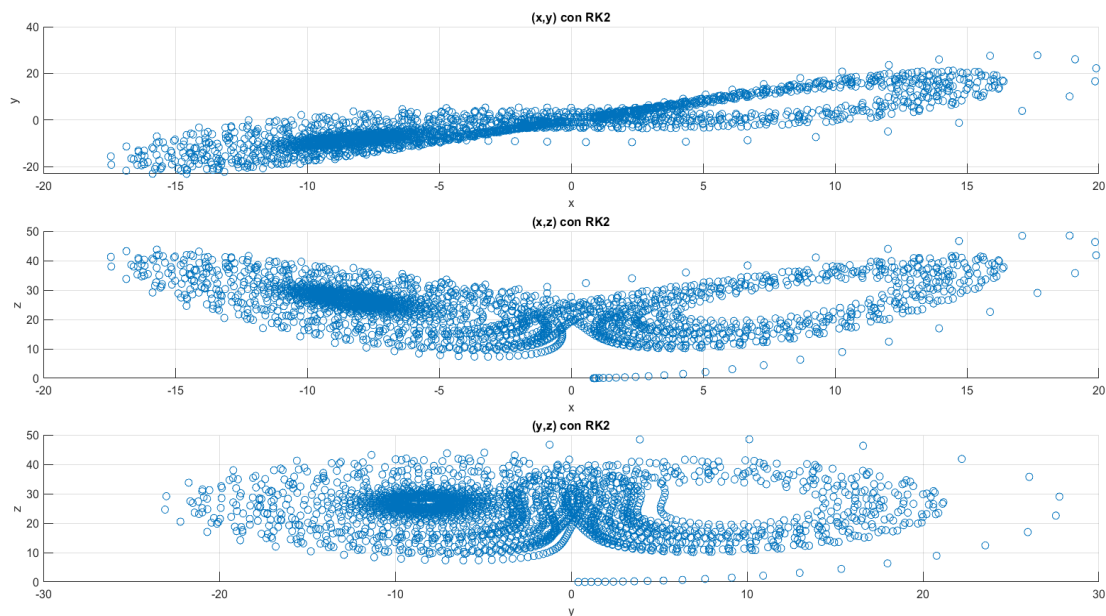


Figura 33: Tre plot delle coppie di coordinate con RK2

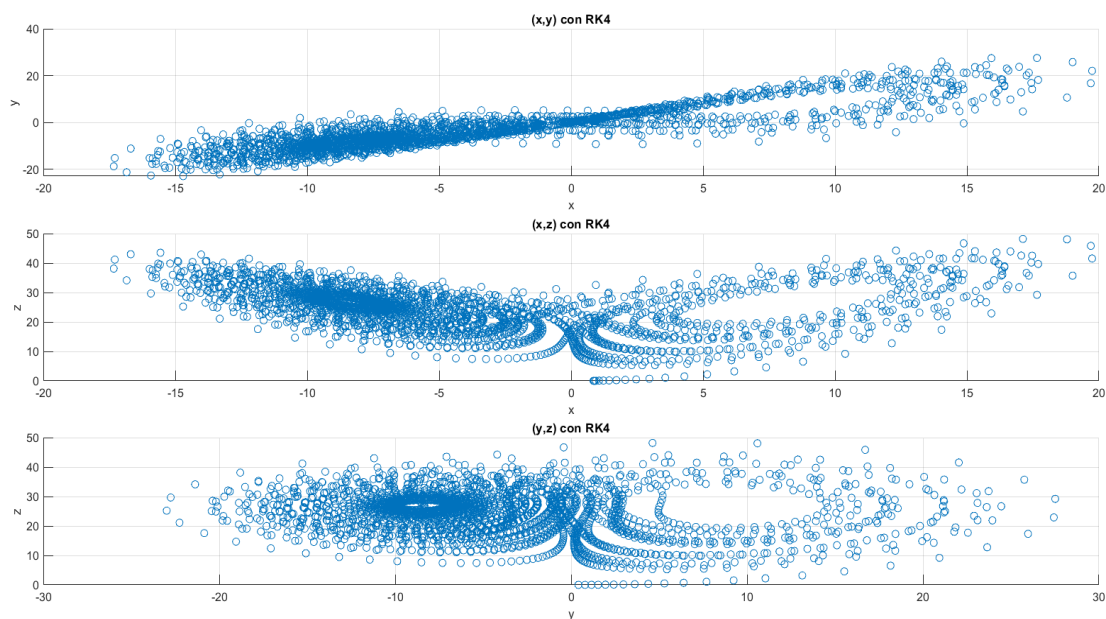


Figura 34: Tre plot delle coppie di coordinate con RK4

In questo problema emerge particolarmente il fatto che i tre metodi restituiscono orbite diverse tra loro, in relazione al fatto che in questo caso si è lasciato evolvere il sistema per più tempo, ovvero 40 unità temporali.

Per il metodo RK4 si è plottato un grafico (x,y,z) che mostra il moto del corpo in questione nello spazio.

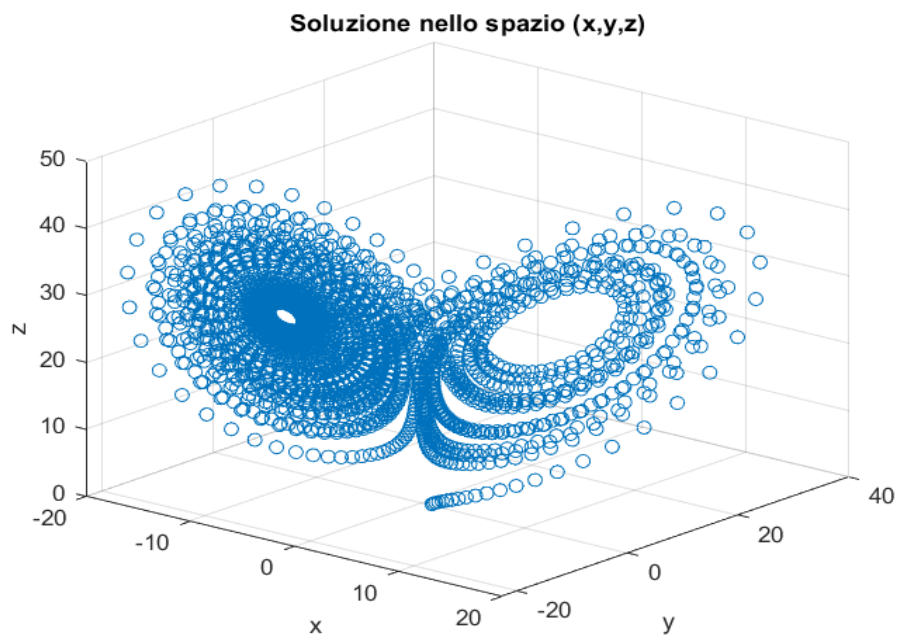


Figura 35: Plot della traiettoria nello spazio tridimensionale RK4

15 Esercizio 18

L'esercizio 18 si prefissa di studiare un sistema composto dall'interazione gravitazionale tra tre corpi con il metodo di RK4.

15.1 Svolgimento

Il sistema a tre corpi è descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = - \sum_{i \neq j} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad (40)$$

e verrà studiato in due configurazioni di valori iniziali ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 = m_3 = 0.3 \\ \vec{r}_1 = (1, 0, 0); \vec{v}_1 = (0, 0.15, -0.15); \\ \vec{r}_2 = (-1, 0, 0); \vec{v}_2 = (0, -0.15, 0.15); \\ \vec{r}_3 = (0, 0, 0); \vec{v}_3 = (0, 0, 0); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 1.6; m_2 = m_3 = 0.4 \\ \vec{r}_1 = (1, 0, 0); \vec{v}_1 = (0, 0.4, 0); \\ \vec{r}_2 = (-1, 0, 0); \vec{v}_2 = (0, -0.8, 0.7); \\ \vec{r}_3 = (0, 0, 0); \vec{v}_3 = (0, -0.8, -0.7); \end{array} \right. \quad (41)$$

Per risolvere numericamente il problema si è decomposto il problema di Cauchy in un sistema di 18 equazioni del primo ordine, ciascuno che descrivesse l'evoluzione di una componente della velocità o della posizione del singolo corpo.

Dopodiché si sono plottate le orbite dei tre corpi in 3D e la scrittura dell'energia totale in funzione del tempo, scritta come somma delle reciproche energie potenziali d'interazione e l'energia cinetica dei tre corpi.

15.2 Conclusione

Una prima osservazione sul comportamento dei corpi può avvenire da un grafico delle traiettorie nello spazio (x,y,z).

Difatti nel primo caso si osserva che i corpi interagiscono brevemente all'inizio, avvicinandosi, ma dopo poco tutti e tre instaurano un'orbita aperta che li porta ad allontanarsi reciprocamente.

Nel secondo caso invece si nota che le traiettorie dei tre corpi formano delle orbite chiuse e quest'ultimi continuano ad interagire in modo gravitazionale tra di loro con un comportamento complesso, mostrando quanto varia il comportamento del fenomeno cambiando leggermente i dati iniziali.

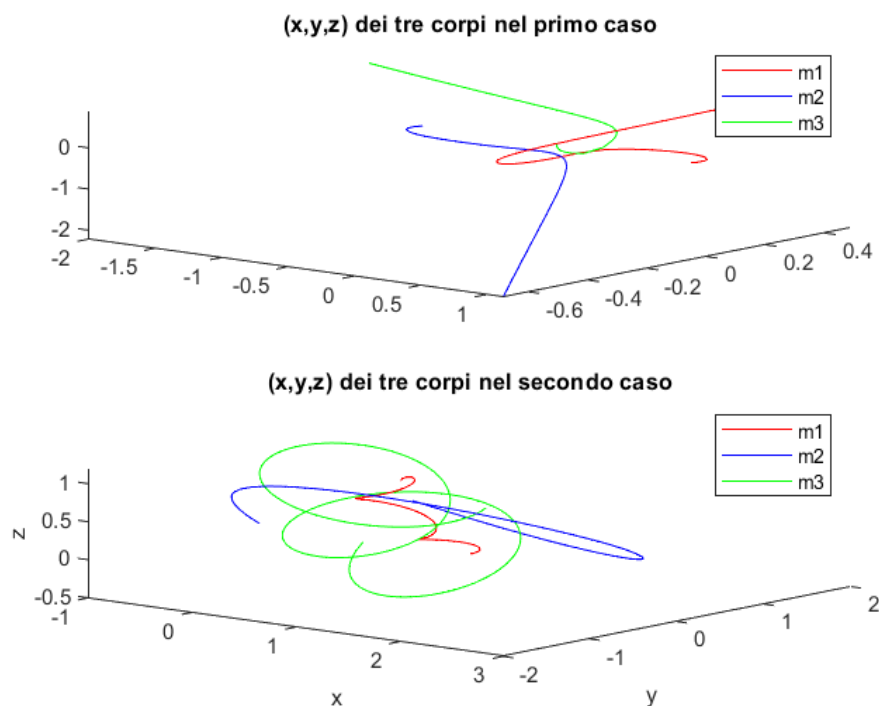


Figura 36: Plot delle traiettorie nello spazio tridimensionale del problema a tre corpi nelle due configurazioni

Maggiore conferma di quanto detto emerge da un'analisi energetica totale del sistema. L'energia totale della prima configurazione è negativa per un breve intervallo temporale, ovvero quello dell'interazione ma ben presto diviene positiva, facendo emergere così il comportamento di orbita aperta, tant'è che dopo l'allontanamento dei corpi quest'ultimo rimane pressoché costante. L'interazione potenziale diviene rapidamente influente sul sistema. Nel secondo caso l'energia rimane negativa per tutta l'evoluzione del sistema, confermando il fatto che i corpi instaurino delle orbite chiuse.

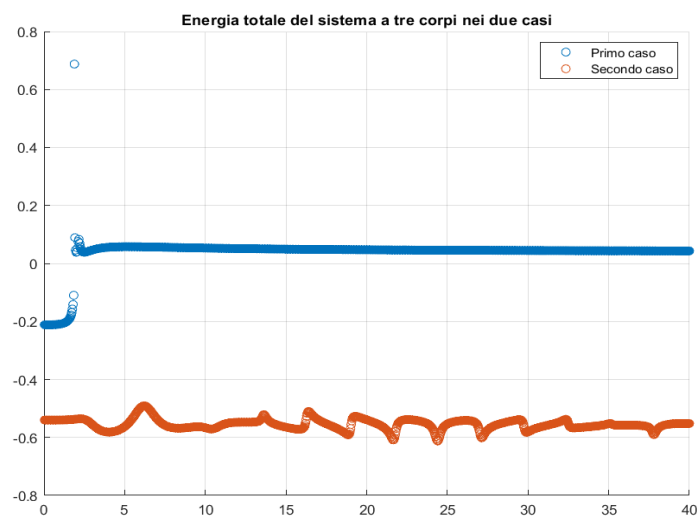


Figura 37: Plot dell'energia totale del problema dei tre corpi nelle due configurazioni

Una problematica che emerge è che il plot dell'energia non è costante, a differenza di come dovrebbe essere dal problema fisico in esame. Poiché fisicamente il sistema è conservativo, ci si aspetta che l'energia totale sia costante per tutto l'intervallo.

Il risultato è imputabile ad un errore di fluttuazione dell'integratore che chiaramente presenta un errore. Per verificarlo si può affinare il passo del sistema e verificare che l'andamento tendi a divenire costante. Proviamo a plottare con un passo più fine nel secondo caso, da $T_{Steps} = 1000$ a $T_{Steps} = 10000$.

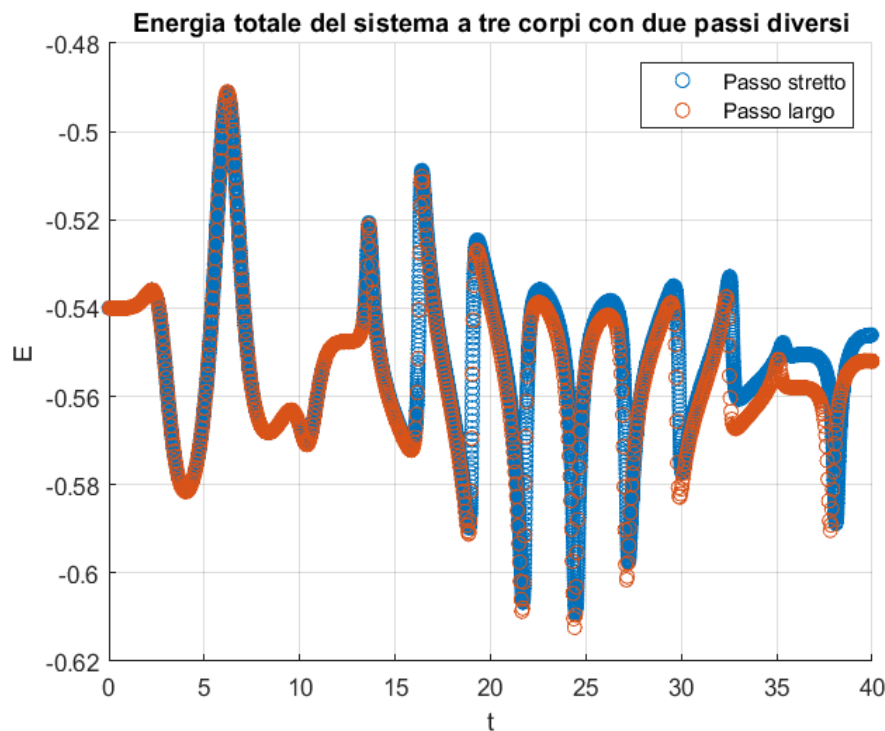


Figura 38: Plot dell'energia totale a confronto con i due passi

L'energia non è divenuta costante, ma presenta ancora delle fluttuazioni fino ad un massimo di $\Delta = 0,06$. Tuttavia affinando il passo la fluttuazione massima si è comunque ridotta. L'errore intrinseco dell'integrazione numerica non può essere eliminato del tutto.

16 Esercizio 19

L'esercizio 19 si basa su algoritmi di ricerca degli zeri di funzione.

16.1 Svolgimento

La richiesta dell'esercizio è di calcolare numericamente gli zeri di funzione con l'algoritmo di bracketing+bisezione (B) e di Newton-Raphson (NR) della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Inoltre è richiesto di scrivere il codice in maniera tale che sia possibile scegliere tra due approcci. Un primo approccio che permette di valutare numericamente che zeri vi sono all'interno di un intervallo definito dall'utente ed un secondo approccio che dato un range valuta tutti gli intervalli in cui è presente uno zero.

Alla luce di ciò è richiesto di trovare tutti gli zeri della funzione del polinomio di Legendre del decimo ordine, ovvero $f(x) = \frac{46189x^{10} + 109395x^8 + 90090x^6 + 30030x^4 + 3465x^2 + 63}{256}$

16.2 Conclusione

L'approccio per entrambe le funzioni è stato quello di cercare approssimativamente gli intervalli contenenti uno zero con la seconda modalità del codice e poi cercare individualmente gli zeri nei vari intervalli.

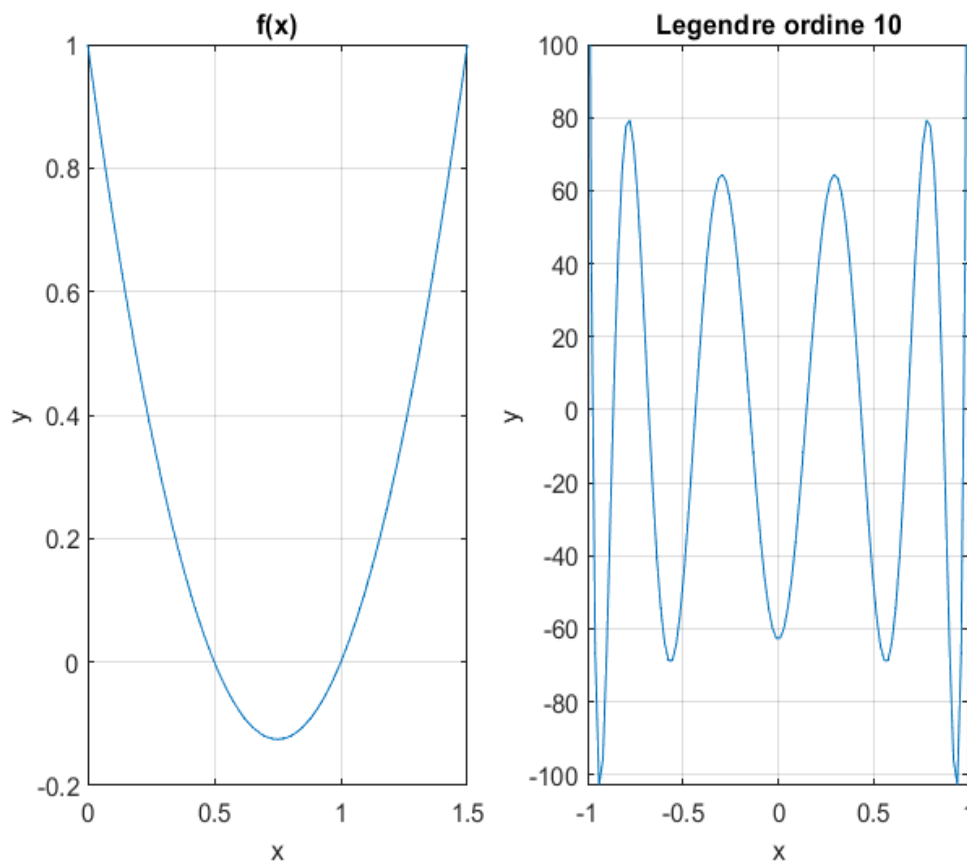


Figura 39: Grafici delle due funzioni

Pertanto si è ottenuto per le due funzioni che

Polinomio del secondo ordine L'algoritmo ritrova degli zeri nei seguenti intervalli

$$\begin{cases} [0.498, 0.501] \\ [0.999, 1.002] \end{cases}$$

Allora andando ad utilizzare gli algoritmi B e NR attorno a quegli intervalli si ottiene che

intervallo	x0 (B)	x0 (NR)
1°	0,500	0,500
2°	1,000	1,000

Tabella 11: Valore degli zeri del polinomio $f(x)$ con entrambi i metodi. L'errore è approssimato alla terza cifra decimale, ma non si hanno discostamenti fino a 10^{-16}

Polinomio di Legendre Si trovano degli zeri nei seguenti intervalli

$$\begin{cases} [-0.9739, -0.9738] \\ [-0.86508, -0.865202] \\ [-0.6794, -0.6793] \\ [-0.4334, -0.4333] \\ [-0.1489, -0.1488] \\ [0.6793, 0.6794] \\ [0.86501, 0.86507] \\ [0.9738, 0.9739] \end{cases}$$

Pertanto si ottiene che

intervallo	x0 (B)	x0 (NR)
1°	-0.9739065285165721	-0.9739065285171730
2°	-0.8650633666892583	-0.8650633666889829
3°	-0.6794095682983537	-0.6794095682990239
4°	-0.4333953941290790	-0.4333953941292472
5°	-0.1488743389820584	-0.1488743389816312
6°	0.1488743389809598	0.1488743389816312
7°	0.4333953941294705	0.4333953941292472
8°	0.6794095682987452	0.6794095682990253
9°	0.8650633666896498	0.8650633666889853
10°	0.9739065285169636	0.9739065285171711

Tabella 12: Valore degli zeri del polinomio di Legendre di grado 10 con entrambi i metodi.

17 Esercizio 20

L'esercizio 20 si basa sull'utilizzo del metodo di ricerca di zeri di Newton applicato nel piano complesso

17.1 Svolgimento

Il testo richiede di creare una griglia $[-2,2] \times [-2,2]$ nel piano complesso e dato il polinomio $P(z) = z^3 - 1$, caratterizzare ogni numero complesso della griglia in base al numero di step che si impiega a raggiungere uno dei tre zeri a partire da quel numero utilizzando una certa soglia di precisione ε .

Per implementare il metodo di Newton si è utilizzato il fatto che

$$z_{j+1} = z_j - \frac{z_j^3 - 1}{3z_j^2} \quad (42)$$

17.2 Conclusione

Così facendo si è ottenuta la griglia con una colormap che rispetta il numero di step d'arresto. Il grafico ottenuto è anche detto *Frattale di Newton*.

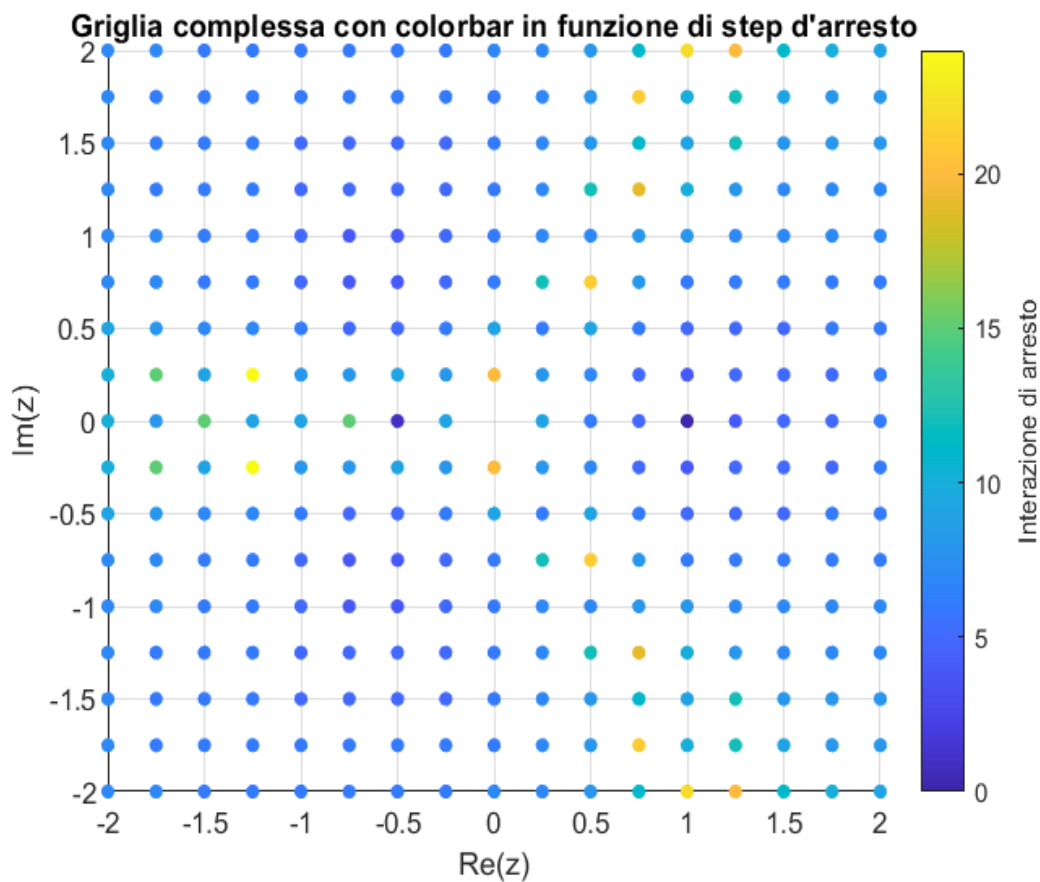


Figura 40: Griglia complessa con colore in funzione di j , passo d'arresto.

Ciascun punto è legato ad un'orbita che compie nel piano di Gauss la cui lunghezza è legata al numero di step che si compie dal punto di partenza fino ad avvicinarsi ad una delle tre radici

di $P(z)$. Utilizzando un punto di partenza che ha $j = 24$, ovvero il punto $(-1.25, 0.25)$ si può ottenere una grafica della curva che si compie.

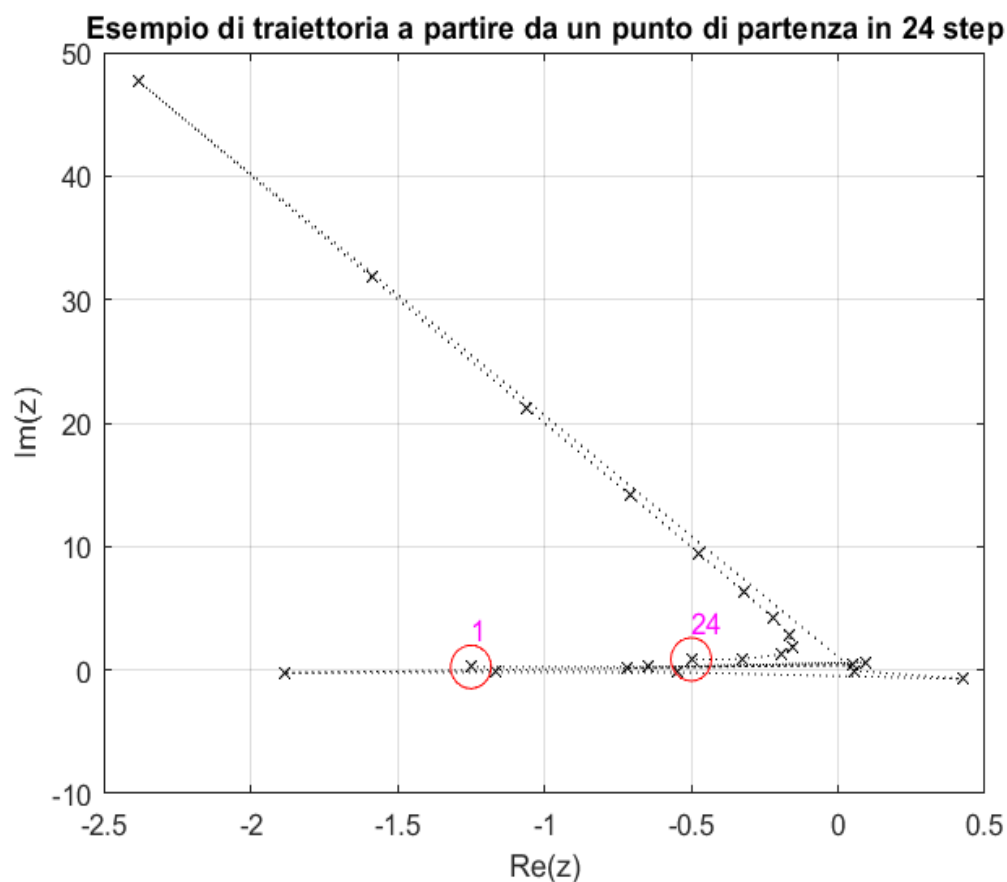


Figura 41: Curva nel Piano di Gauss a partire da $(-1.25, 0.25)$.

Questo utilizzo del metodo di Newton mette in luce quanto quest'ultimo sia sensibile al punto di partenza, mostrando quanto il risultato e il peso computazionali vari all'interno di una griglia con uno step di 0.25.