Dmitriy Zharkov

Blatt 1

4

1. $r_{xy} \in [-1, 1]$

Sei $A := (x_i - \bar{x})$ und

$B := (y_i - \bar{y})$ und für $\forall \lambda$

$f(\lambda) := \sum (A + \lambda B)^2 \quad (f(\lambda) \geq 0 \ *)$

$= \sum A^2 + 2\lambda \sum AB + \lambda^2 \sum B^2 \quad (1)$

Für Minimum von $f(\lambda)$ suchen wir

$f'(\lambda) = 0$

$f'(\lambda) = 2\sum AB + 2\lambda \sum B^2$

$f'(\lambda) = 0 : \quad 0 = 2\sum AB + 2\lambda \sum B^2$

$\Leftrightarrow \ -\cancel{2} \sum AB = \cancel{2} \lambda \sum B^2 \quad | :2 \ | : \sum B^2$

$-\frac{\sum AB}{\sum B^2} = \lambda_0$

$f(\lambda_0) \overset{*}{\geq} 0$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ \sum A^2 - 2\frac{(\sum AB)^2}{\sum B^2} + \frac{(\sum AB)^2}{(\sum B^2)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\sum B^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \ \sum A^2 - \frac{2(\sum AB)^2}{\sum B^2} + \frac{(\sum AB)^2}{\sum B^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \ \sum A^2 - \frac{(\sum AB)^2}{\sum B^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \ \sum A^2 \geq \frac{(\sum AB)^2}{\sum B^2} \Longleftrightarrow \sum A^2 \cdot \sum B^2 \geq (\sum AB)^2$

stimmt, weil $\sum B^2 \geq 0$

$$\sum A^2 \cdot \sum B^2 \geq \left(\sum AB\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum A^2 \cdot \sum B^2} \geq \left|\sum AB\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2 \cdot \sum (y_i-\bar{y})^2} \geq \left|\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right|$$

$$\Rightarrow |r_{xy}| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r_{xy} \in [-1,+1]$$

② Wenn $y_i = a \cdot x_i + b$, dann ist
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$

$$\Rightarrow r_{xy} = \frac{\sum (x_i-\bar{x})(a \cdot x_i + \cancel{b} - (a\bar{x} + \cancel{b}))}{\sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (a \cdot x_i + \cancel{b} - (a\bar{x}+\cancel{b}))^2}}$$

$$= \frac{\sum (x_i-\bar{x}) \cdot a(x_i-\bar{x})}{\sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2}\sqrt{a^2 \sum (x_i-\bar{x})}}$$

$$= \frac{a \sum (x_i-\bar{x})^2}{|a| \sum (x_i-\bar{x})^2} = \frac{a}{|a|}$$

$$\Rightarrow r_{xy} = 1 \Leftrightarrow a > 0, \; b \in \mathbb{R}$$
$$r_{xy} = -1 \Leftrightarrow a < 0, \; b \in \mathbb{R}$$