Ejercicios función cuadrática

Lorenzo Girotti

Febrero 2024

1 Introducción teórica

Con el fin de graficar las parábolas que representan a las funciones cuadráticas, vamos a introducir los conceptos de *foco* y *directriz* de una parábola.

1.1 Fórmula canónica de una parábola

Introducimos primero el concepto de expresión canónica de una parábola ya que será de vital importancia a la hora de encontrar tanto el foco como la recta directriz.

La formulación canónica de una parábola requiere de conocer su **vértice**, con coordenadas $V(h,k)$ ó $V(x_v, y_v)$ determinadas. Con ello, la fórmula queda indicada por

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{1}$$
$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \tag{2}$$

Donde la ecuación (1) responde para parábolas cóncavas hacia arriba [1] y la (2) para las que son cóncavas hacia abajo[2]; y p es la distancia que separa al vértice tanto del foco como de la directriz.

1.1.1 Pasaje a forma polinómica a canónica

En este inciso vamos a dejar fórmulas útiles para pasar de forma polinómica a forma canónica de manera sencilla.

Forma polinómica:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

De ella, podremos conseguir las coordenadas del vértice a través de

$$x_v = h = \frac{-b}{2a} \tag{4}$$

$$y_v = k = c - \frac{b^2}{4a} \tag{5}$$

[1] Carita feliz
[2] Carita triste

Solo restaría conocer el parámetro p, el cual obtenemos con

$$p = \frac{1}{4a} \tag{6}$$

De esta manera contamos con todos los ingredientes necesarios para pasar de una forma polinómica a una canónica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Sea $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, expresarla en forma canónica.

1. Identificamos los coeficientes de la forma polinómica: $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$.

2. Hallamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = \frac{-(-3)}{2(4)} = \frac{3}{8}$$
$$y_v = 1 - \frac{(-3)^2}{4(4)} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

   quedando, $V = (\frac{3}{8}, \frac{7}{16})$.

3. Calculamos el parámetro p,

$$p = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

4. Reemplazamos en la fórmula (**??**).

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$
$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = 4\,\frac{1}{16}\left(y - \frac{7}{16}\right)$$

Con esta información (vértice y parámetro p) podemos determinar el foco y la recta directriz.

1.2 Foco y recta directriz

La parábola se define como la colección de puntos que *equidistan*[3] tanto del foco como de la recta directriz. Utilizando esto a nuestro favor, podremos encontrar tanto al foco y la recta directriz, a través del vértice y el parámetro p.

[3] están a la misma distancia

Fórmulas del foco y recta directriz: Teniendo en cuenta que el foco se encuentra sobre el eje de simetría (es decir está por encima o por debajo del vértice), sabemos que comparte coordenada en x con el vértice y dista a una distancia p de la coordenada en y del mismo (será hacia arriba si es cóncava hacia arriba, y hacia abajo si es cóncava hacia abajo).

$$F = (x_v, y_v \pm p) \tag{7}$$

Para la recta directriz, sabemos que estará por debajo (corresponde el signo $(-)$) si la parábola es cóncava hacia arriba; y por arriba (corresponde $(+)$) si es cóncava hacia abajo.

$$y = y_v \pm p \tag{8}$$

Ejemplo: Encontrar el foco y la recta directriz de la función cuadrática del ejemplo anterior.

1. Hallamos el foco, teniendo en cuenta que la parábola es cóncava hacia arriba (pues $a = 4 > 0$):

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{16} + \frac{1}{16}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Hallamos la recta directriz, considerando el signo negativo, puesto que debe quedar por debajo del vértice:

$$\begin{aligned} y &= \frac{7}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{6}{16} \\ y &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

3. Graficado, obtenemos la figura (**??**) donde podemos observar la equidistancia del punto que vive en la parábola con respecto al foco y la recta directriz.

2 Ejercitación

Con lo aprendido, resolver los siguientes ejercicios. Justificar las respuestas.

1. Hallar, de ser posible: concavidad, raíz/ces, ordenada al origen, vértice y eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas.

   (a) $f(x) = -3x^2 + 1$

(b) $g(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 1$

(c) $h(x) = x^2 + 1$

2. Del inciso anterior, elegir una función y luego

   (a) Pasarla a su forma canónica.

   (b) Hallar foco y directriz.

   (c) Graficarla utilizando tabla de valores y verificar que se cumpla la equidistancia con respecto al foco y directriz en algunos puntos.

3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justificar.

   (a) Todas las funciones cuadráticas tienen exactamente dos raíces.

   (b) Sólo puedo hallar raíces utilizando la fórmula resolvente.

   (c) Todas las parábolas se reflejan respecto al eje y

   (d) Todas las parábolas tienen vértice en el origen.

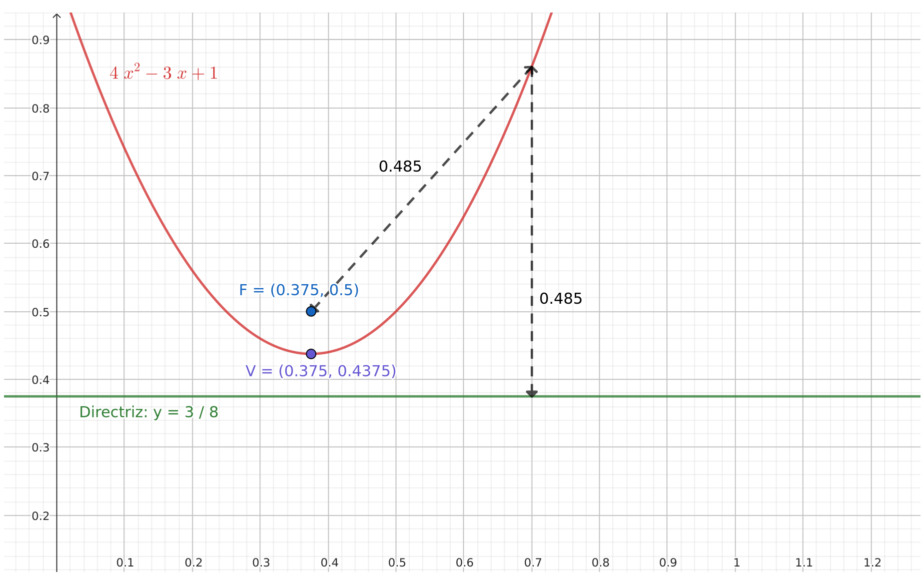

Figure 1: Gráfico de la función del ejemplo con sus elementos.