

# Ejercicios función cuadrática

Lorenzo Girotti

Febrero 2024

## 1 Introducción teórica

Con el fin de graficar las parábolas que representan a las funciones cuadráticas, vamos a introducir los conceptos de *foco* y *directriz* de una parábola.

### 1.1 Fórmula canónica de una parábola

Introducimos primero el concepto de expresión canónica de una parábola ya que será de vital importancia a la hora de encontrar tanto el foco como la recta directriz.

La formulación canónica de una parábola requiere de conocer su **vértice**, con coordenadas  $V(h, k)$  ó  $V(x_v, y_v)$  determinadas. Con ello, la fórmula queda indicada por

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (1)$$

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \quad (2)$$

Donde la ecuación (1) responde para parábolas cóncavas hacia arriba <sup>1</sup> y la (2) para las que son cóncavas hacia abajo<sup>2</sup>; y  $p$  es la distancia que separa al vértice tanto del foco como de la directriz.

#### 1.1.1 Pasaje a forma polinómica a canónica

En este inciso vamos a dejar fórmulas útiles para pasar de forma polinómica a forma canónica de manera sencilla.

Forma polinómica:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

De ella, podremos conseguir las coordenadas del vértice a través de

$$x_v = h = \frac{-b}{2a} \quad (4)$$

$$y_v = k = c - \frac{b^2}{4a} \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Carita feliz

<sup>2</sup>Carita triste

Solo restaría conocer el parámetro  $p$ , el cual obtenemos con

$$p = \frac{1}{4a} \quad (6)$$

De esta manera contamos con todos los ingredientes necesarios para pasar de una forma polinómica a una canónica. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo:** Sea  $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ , expresarla en forma canónica.

1. Identificamos los coeficientes de la forma polinómica:  $a = 4$ ,  $b = -3$ ,  $c = 1$ .
2. Hallamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = \frac{-(-3)}{2(4)} = \frac{3}{8}$$

$$y_v = 1 - \frac{(-3)^2}{4(4)} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

quedando,  $V = (\frac{3}{8}, \frac{7}{16})$ .

3. Calculamos el parámetro  $p$ ,

$$p = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

4. Reemplazamos en la fórmula (??).

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = 4 \frac{1}{16} \left(y - \frac{7}{16}\right)$$

Con esta información (vértice y parámetro  $p$ ) podemos determinar el foco y la recta directriz.

## 1.2 Foco y recta directriz

La parábola se define como la colección de puntos que *equidistan*<sup>3</sup> tanto del foco como de la recta directriz. Utilizando esto a nuestro favor, podremos encontrar tanto al foco y la recta directriz, a través del vértice y el parámetro  $p$ .

---

<sup>3</sup>están a la misma distancia

**Fórmulas del foco y recta directriz:** Teniendo en cuenta que el foco se encuentra sobre el eje de simetría (es decir está por encima o por debajo del vértice), sabemos que comparte coordenada en  $x$  con el vértice y dista a una distancia  $p$  de la coordenada en  $y$  del mismo (será hacia arriba si es cóncava hacia arriba, y hacia abajo si es cóncava hacia abajo).

$$F = (x_v, y_v \pm p) \quad (7)$$

Para la recta directriz, sabemos que estará por debajo (corresponde el signo  $(-)$ ) si la parábola es cóncava hacia arriba; y por arriba (corresponde  $(+)$ ) si es cóncava hacia abajo.

$$y = y_v \pm p \quad (8)$$

**Ejemplo:** Encontrar el foco y la recta directriz de la función cuadrática del ejemplo anterior.

1. Hallamos el foco, teniendo en cuenta que la parábola es cóncava hacia arriba (pues  $a = 4 > 0$ ):

$$\begin{aligned} F &= \left( \frac{3}{8}, \frac{7}{16} + \frac{1}{16} \right) \\ &= \left( \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

2. Hallamos la recta directriz, considerando el signo negativo, puesto que debe quedar por debajo del vértice:

$$\begin{aligned} y &= \frac{7}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{6}{16} \\ y &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

3. Graficado, obtenemos la figura (??) donde podemos observar la equidistancia del punto que vive en la parábola con respecto al foco y la recta directriz.

## 2 Ejercitación

Con lo aprendido, resolver los siguientes ejercicios. Justificar las respuestas.

1. Hallar, de ser posible: concavidad, raíz/ces, ordenada al origen, vértice y eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas.

(a)  $f(x) = -3x^2 + 1$

- (b)  $g(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 1$   
 (c)  $h(x) = x^2 + 1$
2. Del inciso anterior, elegir una función y luego
- Pasarla a su forma canónica.
  - Hallar foco y directriz.
  - Graficarla utilizando tabla de valores y verificar que se cumpla la equidistancia con respecto al foco y directriz en algunos puntos.
3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justificar.
- Todas las funciones cuadráticas tienen exactamente dos raíces.
  - Sólo puedo hallar raíces utilizando la fórmula resolvente.
  - Todas las parábolas se reflejan respecto al eje  $y$
  - Todas las parábolas tienen vértice en el origen.

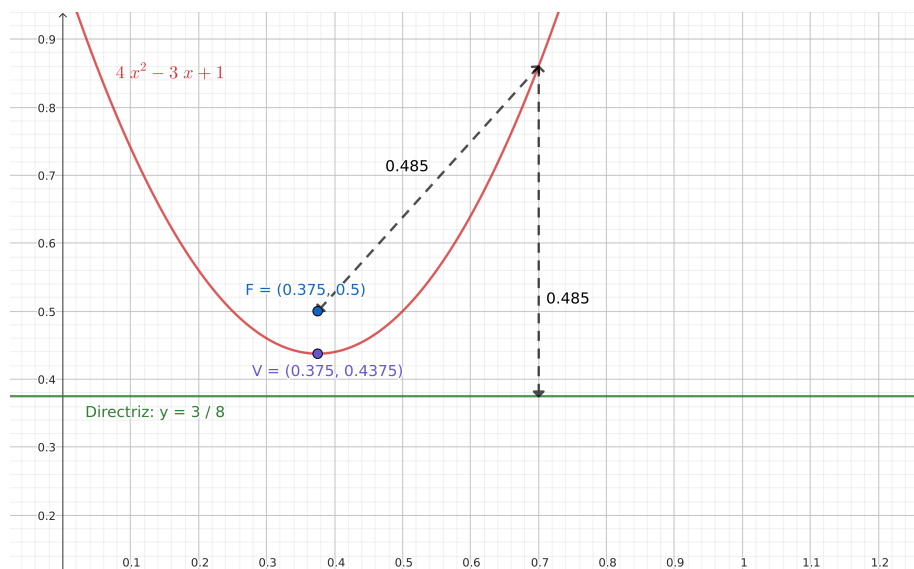


Figure 1: Gráfico de la función del ejemplo con sus elementos.