Teoria dos Grafos

Percursos em Grafos

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2019/1

Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos

Definição (Passeio)

Um passeio em um grafo G é uma sequência $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para todo $1 \leq i \leq k$

- O comprimento deste passeio é $k - 1$

Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos

Definição (Trilha)

Uma trilha em um grafo simples G é um passeio $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $v_i v_{i+1}$ é distinta para todo $1 \leq i \leq k$

Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos

Definição (Caminho)

Um caminho em um grafo simples G é uma trilha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que v_i é distinto para todo $1 \leq i \leq k$

- Um grafo que consiste em caminho com n vértices é denotado por P_n

Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos

Definição (Passeio Fechado)

Um passeio $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ é fechado se $v_{k+1} = v_1$

Definição (Ciclo)

- Um ciclo (ou circuito) é uma trilha fechada
- Um ciclo é simples se é um caminho fechado

- Um grafo que consiste em um ciclo simples em n vértices é denotado por C_n

Em Resumo. . .

Tipo	Permite repetir...		Sempre Fechado?	
	vértices?	arestas?		
Passeio	✓	✓	-	
Trilha	✓	-	-	
Circuito/ Ciclo	✓	-	✓	
Caminho	-	-	-	
Ciclo Simples	-	-	✓	

Definição (Distância)

A distância entre $v, w \in V(G)$, denotado por $d(v, w)$, é o menor k para o qual existe um caminho $v, \ldots, w$ de comprimento $k - 1$

Grafos Conexos

Definição (Grafo Conexo)

Um grafo G é conexo se existe um caminho entre quaisquer $v, w \in V(G)$; caso contrário, é desconexo

Grafos Conexos

Definição (Componente Conexa)

- Seja $V \subseteq V(G)$ um conjunto maximal tal que $G[V]$ é conexo; chamamos $G[V]$ de componente conexo de G
- O número de componentes conexos de um grafo G é denotado por $\omega(G)$

Grafos Conexos

Observação

Um conjunto é dito maximal em relação a uma propriedade quando não existe outro conjunto com mais elementos que ele, em relação à mesma propriedade.

Um Primeiro Teorema

Teorema (König[1], 1931)

Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém um ciclo de comprimento ímpar.

[1] König, D. (1931), "Gráfok és mátrixok", Matematikai és Fizikai Lapok, 38: 116–119

Demonstração I

Condição necessária: G é bipartido, então G não contém ciclo de comprimento ímpar

- Seja G um grafo bipartido
- Sejam X e Y duas partições de $V(G)$ tais que $V(G) = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$
- Além disso, para todo $e \in E(G), e = xy$, onde $x \in X$ e $y \in Y$
- Se G não possui ciclos, vale a ida
- Considere, então, que exista (ao menos) um ciclo $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ em G de comprimento ímpar

Demonstração II

- Sem perda de generalidade, podemos definir que $v_1 \in X, v_2 \in Y, \ldots$

$$v_i \in \begin{cases} X, \text{ se } i \text{ é ímpar} \\ Y, \text{ se } i \text{ é par} \end{cases}$$

- Como C tem comprimento ímpar, então k é ímpar
- Disso, segue que $v_1, v_k \in X$ e, assim, $v_k v_1 \in E(G)$. Absurdo, pois o grafo é bipartido
- Portanto, G não tem ciclos de comprimento ímpar

Demonstração III

Condição suficiente: Se G não contém ciclos de comprimento ímpar, então G é bipartido

- Seja G um grafo conexo sem ciclos de comprimento ímpar
- Seja $v \in V(G)$ e sejam duas partições X e Y tais que:
  - $X = \{x \in V(G) \mid d(v, x) \text{ é par}\}$
  - $Y = \{y \in V(G) \mid d(v, y) \text{ é ímpar}\}$
- Naturalmente, $X \cup Y = V(H)$ e $X \cap Y = \varnothing$
- Precisamos mostrar que qualquer $e \in E(G)$ é da forma $e = xy, x \in X, y \in Y$
- Se $x, y \in X$, queremos demonstrar que $xy \notin X$
- Sejam
  - $P = v, \ldots, x$ o caminho mais curto entre v e x
  - $Q = v, \ldots, y$ o caminho mais curto entre v e y
- Como $x, y \in X$, então P e Q possuem a mesma paridade

Demonstração IV

- Seja w o último vértice comum de P e Q; assim, w divide cada caminho em duas partições:
  - $P = P_1P_2$ tal que $P_1 = v, \ldots w$, $P_2 = w, \ldots x$
  - $Q = Q_1Q_2$ tal que $Q_1 = v, \ldots, w$, $Q_2 = w, \ldots, y$
- Como P e Q são os caminhos mais curtos, segue que $|P_1| = |Q_1|$
- Então, P_2 e Q_2 possuem a mesma paridade
- Então, o caminho $x, \ldots, w, \ldots, y$ possui comprimento $|P_2| + |Q_2|$ que é par
- Agora, se $xy \in E(G)$, então o caminho $x, \ldots, w, \ldots, y, x$ possui comprimento ímpar. Absurdo, pois nossa suposição é que não existem ciclos de comprimento ímpar
- Logo, $xy \notin X$
- Portanto, G é bipartido
- A demonstração para $x, y \in Y$ segue o mesmo princípio

Observação

- Caso G seja desconexo, então todo ciclo de G está contido em um de seus componentes conexos
- Assim, é suficiente demonstrar o teorema para grafos conexos

Créditos

Parte deste material foi baseada nas notas de aula do Prof. Fabiano Oliveira.
A demonstração do Teorema de König foi desenvolvida com base na videoaula da Profa. Sarada Herke, disponível em `https://youtu.be/YiGFhWxtHjQ` (acesso em 02/04/2019).