Primeira Lista de Exercícios

1. Seja $G = (V,E)$ um grafo simples tal que $n = |V|$ e $m = |E|$. Mostre que: $m \leq \binom{n}{2}$.

2. É possível construir um grafo com 10 vértices e graus $\{9,7,6,4,3,3,3,1,1,1\}$? Justifique.

3. Considere um grafo G definido como:

   - $V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$
   - $E(G) = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}$

   (a) Construa uma representação geométrica para esse grafo.

   (b) Construa sua matriz de adjacência.

   (c) Construa sua matriz de incidência.

   (d) Forneça o complemento deste grafo.

4. Os amigos João, Pedro, Antônio, Marcelo e Francisco sempre se encontram para botar conversa fora e às vezes jogar dama, xadrez e dominó. As preferências de cada um são as seguintes: João só joga xadrez; Pedro não joga dominó; Antônio joga tudo; Marcelo não joga xadrez e dominó e Francisco não joga nada.

   (a) Represente através de um grafo bipartido $G = (V,E)$ todas as possibilidades de um amigo jogar com os demais. Defina $V(G)$ e $E(G)$.

   (b) Defina um subgrafo em que todos, menos Francisco, joguem ao mesmo tempo.

5. O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Quantos vértices tem o grafo? Quantas arestas?

6. Seja G um grafo com 14 vértices e 25 arestas. Se todo vértice de G tem grau 3 ou 5, quantos vértices de grau 3 o grafo G possui?

7. Considere os grafos I, II, III, IV e V, mostrados abaixo:

   São isomorfos:

   A. todos eles.

   B. apenas I e III.

   C. apenas II e V.

   D. apenas III e IV.

   E. apenas I, II e III.

   Forneça a bijeção que mostre o isomorfimo.

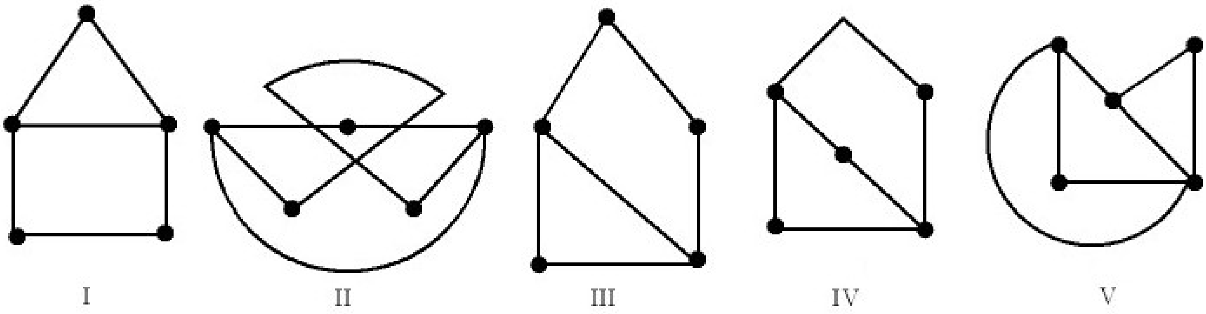

Figura 1: Grafos do exercício 7.

8. Construa representações geométricas de grafos regulares de grau r para os seguintes casos: $r = 1, r = 2, r = 3, r = 4$.

9. Considere, agora, o seguinte grafo G:
   - $V(G) = \{A,B,C,D\}$
   - $E(G) = \{AB,AC,BC,BD,CD\}$

   (a) Forneça uma representação geométrica para este grafo.

   (b) Construa a lista de adjacência deste grafo.

   (c) Construa a matriz de adjacência $\mathcal{A}$ deste grafo.

   (d) Construa a matriz de incidência $\mathcal{B}$ deste grafo.

   (e) Calcule o produto $\mathcal{AA}$. O que significam os números da diagonal principal? Explique porquê isso acontece.

   (f) Calcule o produto $\mathcal{BB}^{\sqcup}$. O que significam os números da diagonal principal? E os números fora da diagonal? Explique porquê isso acontece.

   (g) Calcule o produto $\mathcal{B}^{\sqcup}\mathcal{B}$. O que significam os números da diagonal principal? E os números fora da diagonal? Explique porquê isso acontece.

10. Mostre que todo grafo simples com n vértices é isomorfo a um subgrafo de K_n.

11. Um grafo k-cubo, denotado por Q_k, é um grafo bipartido cujos vértices são k-tuplas de 0s e 1s, sendo que os vértices adjacentes diferem em exatamente uma coordenada. Por exemplo, o grafo Q_2 é dado pelos seguinte conjuntos:
   - $V(Q_2) = \{00,01,10,11\}$
   - $E(Q_2) = \{(00,01),(00,10),(01,11),(10,11)\}$

   (a) Construa um grafo Q_3.

   (b) Qual o número de vértices e de arestas de um Q_k?

12. Em teoria dos grafos, um grafo roda (W_n) é um grafo formado por um único vértice ligado a todos os n vértices de um grafo ciclo. Determine o número de vértices e de arestas de um W_n.