# Teoria dos Grafos

## Árvores e Florestas

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2019/1

# Definições

**Definição (Grafo Acíclico)**

Um grafo $G$ é acíclico se $G$ não possui ciclos

**Definição (Floresta)**

Um grafo $G$ é uma floresta se $G$ é acíclico

# Definições

**Definição (Árvore)**

Um grafo $T$ é uma árvore se $T$ é conexo e acíclico

**Definição (Folha)**

Uma folha de uma árvore é um vértice $v$ tal que $d(v) = 1$

# Alguns Resultados

**Teorema**

*Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho*

# Alguns Resultados

**Prova:**

1. Suponha que existam caminhos distintos $P_1$ e $P_2$ em uma árvore $T$ conectando dois vértices
2. Seja uma aresta $xy \in P_1$ tal que $xy \notin P_2$
3. Seja $T' = T - \{xy\}$
4. Existe um caminho $P$ entre $x$ e $y$ em $T'$, que vai de $y$ por $P_1$ até o primeiro vértice comum a $P_2$ e depois segue por $P_2$ até $x$
5. Logo, $P$ acrescido de $xy$ é um ciclo em $T$, o que é um absurdo pois $T$ é uma árvore

# Alguns Resultados

**Teorema**

*Em uma árvore,* $m = n - 1$

# Alguns Resultados

**Prova (1/2):**

- Seja $T$ uma árvore
- Por indução em $n$
- **Base:** $n = 1 \Rightarrow m = 0$
- **Hipótese de Indução (HI):** Seja $n > 1$ e suponha que a proposição seja verdade para todas as árvores com menos que $n$ vértices

# Alguns Resultados

## Prova (2/2):

**Passo de Indução:**

- Seja $xy \in E(T)$
- Seja $T' = T - \{xy\}$
- Como o único caminho entre $x$ e $y$ é $P = x, y$, então não há caminho entre $x$ e $y$ em $T'$
- Logo, $T'$ é desconexo e sejam $T_1$ e $T_2$ as duas componentes conexas de $T'$
- Sejam $m_i = |E(T_i)|, n_i = |V(T_i)|$, para $i = 1, 2$
- Naturalmente, $T_1$ e $T_2$ são acíclicos e, portanto, árvores, e $n_1 < n$ e $n_2 < n$
- Pela HI, $m_1 = n_1 - 1$ e $m_2 = n_2 - 1$
- Logo,
  $m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$

# Alguns Resultados

**Teorema**

*Em uma árvore com $n \geq 2$, há pelo menos dois vértices de grau $1$*

# Alguns Resultados

**Prova:**

- Seja $T$ uma árvore
- Em um grafo geral, $\sum\{d(v) : v \in V(G)\} = 2m$
- Portanto, para $T$ e pelo teorema anterior, $\sum\{d(v) : v \in V(G)\} = 2(n-1)$
- Por absurdo, suponha que exista $X \subset V(T)$, com $n-1$ vértices todos possuindo grau maior que $1$
- Então: $\sum\{d(v) : v \in V(T)\} = \sum\{d(v) : v \in X\} + d(y)$, onde $y$ é o elemento em $V(T) - X$
- Assim,
$$\sum\{d(v) : v \in X\} + d(y) \geq 2(n-1) + 1,$$
o que é absurdo com a conclusão anterior

# Em resumo. . .

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $G$ *é uma árvore*
2. $G$ *é conexo e* $m$ *é mínimo*
3. $G$ *é conexo e* $m = n - 1$
4. $G$ *é acíclico e* $m = n - 1$
5. $G$ *é acíclico e, para todo* $v, w \in V$*, a adição da aresta* $vw$ *produz exatamente um ciclo*

# Pontes

**Definição (Ponte)**

Uma aresta $e \in E(G)$ é uma ponte se $\omega(G) < \omega(G - e)$

**Observação:**

Não estamos falando somente de árvores! Essa definição se aplica a qualquer grafo

# Pontes

**Teorema**

$e \in E(G)$ *é uma ponte se, e somente se,* $e$ *não pertence a nenhum ciclo*

# Pontes

**Prova (condição necessária):**

- Seja $e = xy \in E(G)$ uma ponte
- Como $xy$ é uma ponte, por definição, $\omega(G) < \omega(G - e)$
- Logo, existe um único caminho que conecta $x$ e $y$, que é a aresta $xy$
- Por contradição, suponha que $xy$ esteja num ciclo $C$
- Seja $P$ o caminho formado pela remoção de $xy$ de $C$
- Logo, $P$ é um caminho entre $x$ e $y$ em $G - \{xy\}$, um absurdo

# Pontes

**Prova (condição suficiente):**

- Seja $xy \in E(G)$ tal que $xy$ não pertence a nenhum ciclo
- Seja $P$ um caminho de $x$ a $y$ em $G$
- Ou $P = x, y$, ou $P$ é um caminho tal que $xy \notin P$
- Se $P$ é um caminho tal que $xy \notin P$, então $P$ acrescido de $xy$ é um ciclo, o que não é possível
- Logo, o único caminho $P$ de $x$ a $y$ possível é $P = x, y$
- Portanto, $x$ e $y$ estarão em componentes conexos distintos em $G - \{xy\}$, e estavam no mesmo componente conexo em $G$
- Consequentemente, $\omega(G) < \omega(G - \{xy\})$ e concluímos que $xy$ é uma ponte

# Pontes & Árvores

**Teorema**

*Um grafo $G$ é uma árvore se, e somente se, $G$ é conexo e toda aresta de $G$ é uma ponte*

# Pontes & Árvores

## Prova

Condição necessária:

- Seja $G$ uma árvore
- Por definição, $G$ é conexo e acíclico
- Portanto, não existe nenhuma aresta de $G$ em um ciclo
- Usando o Teorema anterior, toda aresta de $G$ é uma ponte

Condição suficiente:

- Seja $G$ um grafo conexo tal que toda aresta é uma ponte
- Usando o Teorema anterior, então toda aresta está fora de ciclos
- Logo, $G$ não possui ciclos
- Como $G$ é conexo e acíclico, $G$ é uma árvore

# Articulações

**Definição (Articulação)**

Um vértice $v \in V(G)$ é uma articulação se $\omega(G) < \omega(G - \{v\})$.

**Observação:**

Novamente não estamos falando somente de árvores: essa definição é válida para um grafo qualquer.

# Articulações

**Teorema**

*Se $v$ é uma articulação, então $d(v) > 1$*

# Articulações

**Prova:**

- Suponha que $v$ é uma articulação e $d(v) = 1$
  - Não é necessário considerar $d(v) < 1$, pois, assim, ele seria um vértice isolado
- Sejam dois vértices $u, w \in V(G)$ tais que $u \neq v$ e $w \neq v$
- Podemos afirmar que nenhum caminho entre $u$ e $w$ que contenha $v$ (pois $d(v) = 1$)
- Assim, existe um caminho entre $u$ e $w$ se, e somente se, existe caminho em $G - v$
- Logo, $\omega(G - v) = \omega(G)$ e, portanto, $v$ não é uma articulação. Contradição

# Articulações & Árvores

**Teorema**

*Todos os vértices internos (não folhas) de uma árvore são articulações.*

# Árvore Geradora

**Definição**

Uma árvore geradora de um grafo $G$ é uma subgrafo gerador $T$ de $G$ tal que $T$ é uma árvore

# Árvore Geradora

**Teorema**

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora*

# Árvore Geradora

**Prova:**

- Seja $G$ um grafo conexo
- Seja $T$ um subgrafo minimal que é gerador e conexo; vamos mostrar que $T$ é uma árvore
- Por absurdo, suponha que $T$ possua um ciclo $C$
- Seja $xy \in E(T)$ uma aresta de $C$
- Note que todo caminho em $T$ entre dois vértices que contenha $xy$ pode ser alterado para usar as outras arestas de $C$ que não seja $xy$
- Logo, $T - \{xy\}$ é conexo, o que é absurdo, pois $T$ é subgrafo gerador conexo minimal
- Portanto, $T$ não tem ciclos
- Como é conexo, $T$ é árvore

# Ciclo Fundamental

**Definição (Elo)**

Seja $G$ um grafo conexo e $T$ uma árvore geradora de $G$. Uma aresta $e \in E(G) - E(T)$ é denominada elo de $G$ em relação a $T$. O número total de elos é denominado posto do grafo $G$

**Pergunta**

Qual o número total de elos?

# Ciclo Fundamental

**Definição (Ciclo Fundamental)**

Seja $e$ um elo de $G$ em relação a $T$. A adição $e$ à árvore $T$ produz exatamente um ciclo simples, o qual contém $e$. Este ciclo é denominado ciclo fundamental de $G$ em relação a $T$. O conjunto de todos os ciclos fundamentais é chamado conjunto fundamental de ciclos

# Créditos

Parte deste material foi baseada nas notas de aula do Prof. Fabiano Oliveira.