

Teoria dos Grafos

Árvore Geradora Mínima

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2019/1

Árvore geradora mínima

Definição

Árvore geradora mínima A **árvore geradora mínima** de um grafo G com peso nas arestas, onde $p(vw)$ é o peso da aresta vw , é uma árvore geradora T de G com o menor peso total possível, sendo:

$$\text{custo}(T) = \sum \{p(vw) \mid vw \in E(T)\}$$

Aplicações:

- Interconexão de todos os pontos de uma rede a custo mínimo
 - ▶ A rede, no caso, pode ser uma malha rodoviária, elétrica, ou mesmo uma rede de computadores
- Aproximação do problema difícil de computar um passeio de custo mínimo que passa por todos os vértices de um grafo

Algoritmo de Kruskal

- Utiliza uma abordagem gulosa
- Seja F uma **floresta** inicialmente com cada vértice como uma árvore
- Enquanto F não é uma árvore geradora, adicione em $E(F)$ a aresta de **menor peso** que mantém F uma floresta

Algoritmo de Kruskal

Entrada: Grafo G .

Saída: Floresta geradora F .

- 1 $E \leftarrow$ ordenar $E(G)$ em relação aos pesos;
- 2 **para** $vw \in E$ **faça**
- 3 **se** $E(F) \cup \{vw\}$ *mantém F floresta* **então**
- 4 $E(F) \leftarrow E(F) \cup \{vw\}$;
- 5 **retorna** F

Algoritmo 1: Função $kruskal(G)$.

Teorema

Se F é a floresta definida ao final de cada iteração do algoritmo de Kruskal, então existe um árvore geradora mínima que contém F .

Algoritmo de Prim

- Também utiliza uma abordagem gulosa
- Seja T uma árvore inicialmente com qualquer vértice
- Enquanto T não é uma árvore geradora, adicione em $E(F)$ a aresta de menor peso que mantém T uma árvore

Algoritmo de Prim

Entrada: Grafo G .

Saída: Árvore geradora T .

- 1 escolha um vértice $v \in V(G)$;
- 2 insira v em T ;
- 3 **para** cada aresta de G **faça**
- 4 $vw \leftarrow$ aresta de menor custo tal que $v \in T, w \notin T$;
- 5 $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{vw\}$;
- 6 **retorna** T

Algoritmo 2: Função $\text{prim}(G)$.

Teorema

Se T é a árvore definida ao final de cada iteração do algoritmo de Prim, então existe um árvore geradora mínima que contém T .

Parte deste material foi baseada nas notas de aula do Prof. Fabiano Oliveira.