Teoria dos Grafos

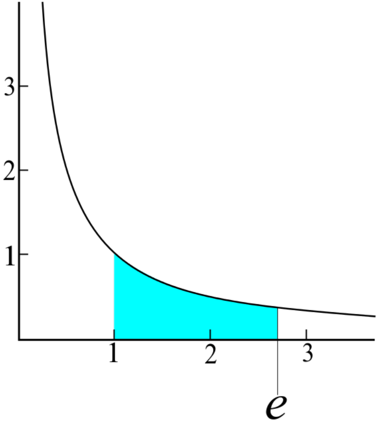
Visão Geral

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2018/2

Leonhard Euler (1707–1783)



Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783)

- Notação matemática: $f(x)$, π, $\sum$, i, e

Leonhard Euler (1707–1783)

- Notação matemática: $f(x)$, π, $\sum$, i, e
- Séries de potência:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler (1707–1783)

- Notação matemática: $f(x)$, π, $\sum$, i, e
- Séries de potência:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

- Funções trigonométricas e números complexos:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Leonhard Euler (1707–1783)

- Notação matemática: $f(x)$, π, $\sum$, i, e
- Séries de potência:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

- Funções trigonométricas e números complexos:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

- Identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Leonhard Euler (1707–1783)

- Notação matemática: $f(x)$, π, $\sum$, i, e
- Séries de potência:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

- Funções trigonométricas e números complexos:

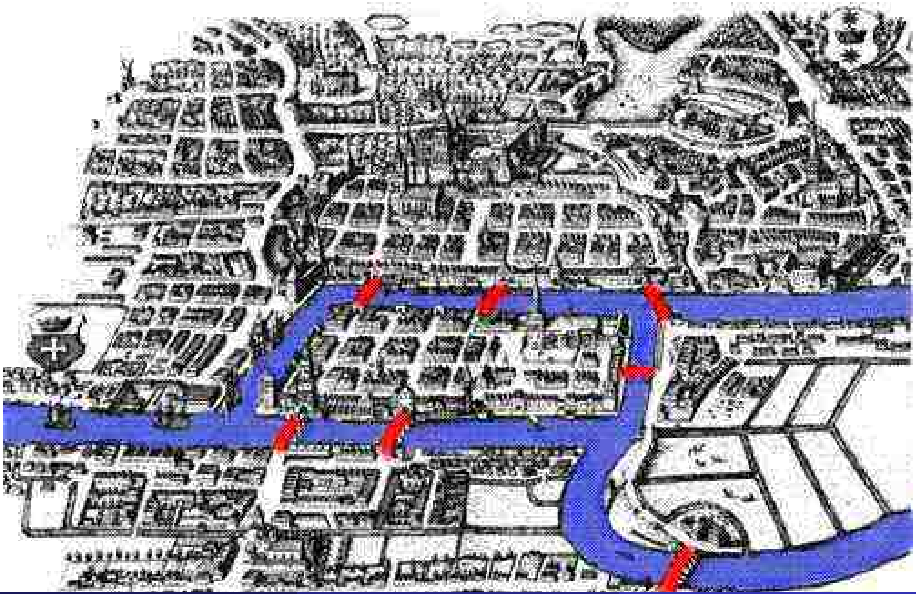
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

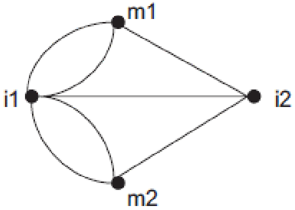
- Identidade de Euler:

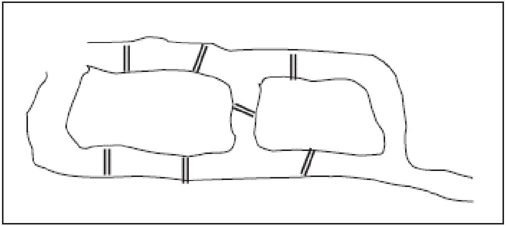
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Números primos: $2^{31} - 1$

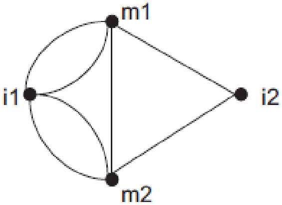
Sete pontes de Königsberg (1735)

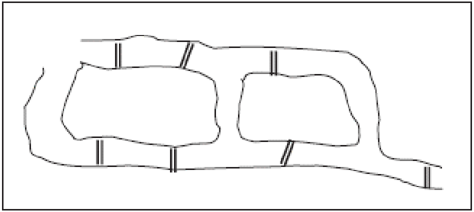



m1
i1
i2
m2

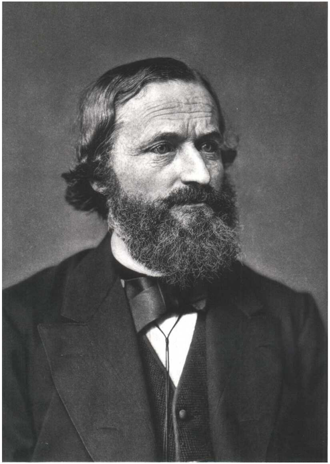


Exercício





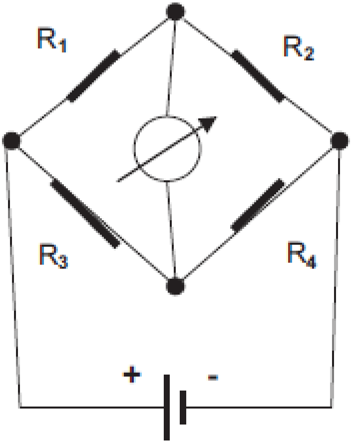
Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)



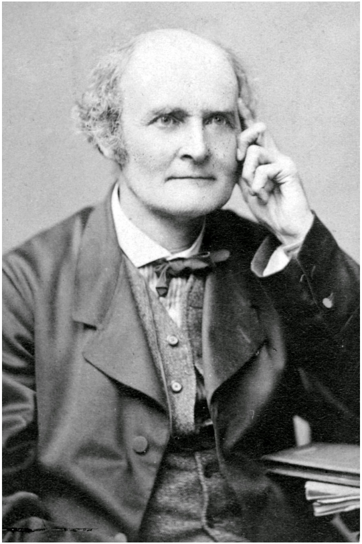
- Leis de Kirchhoff para circuitos elétricos:
    1. Em qualquer nó, a soma das correntes que o deixam é igual a soma das correntes que chegam até ele
    2. A soma algébrica das forças eletromotrizes em qualquer malha é igual a soma algébrica das quedas de potencial ou dos produtos iR contidos na malha.

Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)

- Ponte de Wheatstone (1847)
- Usada para medir resistêcia elétrica
- Modelos em grafos ajudaram no projeto
- Gerou resultados para Teoria dos Grafos



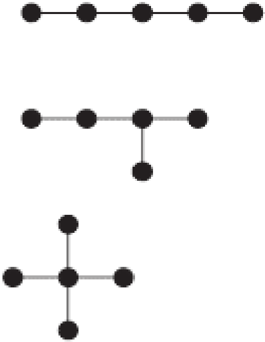
Arthur Cayley (1821–1895)



- Conceito de conjuntos numéricos
- Teoria dos grupos
- Teorema de Cayley–Hamilton

Arthur Cayley (1821–1895)

- Enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos
- Dois compostos diferentes são isômeros se possuem a mesma composição percentual
- Exemplo: C_5H_{12}

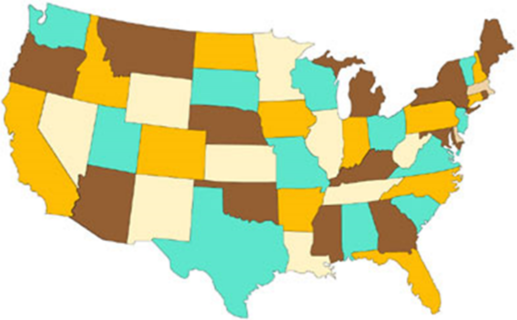


Francis Guthrie (1831–1899)

- Foi aluno de Augustus De Morgan (matemática)
- Foi aluno de John Lindley (botânica)

Francis Guthrie (1831–1899)

- Bastam quatro cores para colorir qualquer mapa?

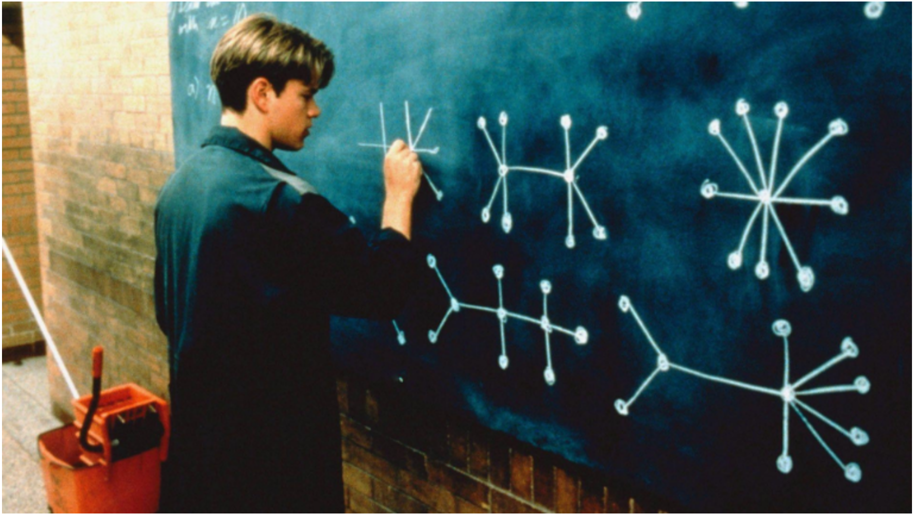


Four Color Map of the United States

Teorema das quatro cores

- Resolvido em 1976 por Appel e Haken, ambos da University of Illinois
- Uma das primeiras provas matemáticas a utilizar computadores
  - Debatida até os dias de hoje
  - `https://bit.ly/2PtM3JQ`

Gênio Indomável (1997)



- “Draw all the homeomorphically irreducible trees with $n = 10$”
- https://youtu.be/8l1LbompiPg

Conceito fundamental: O Modelo

- Uma simplificação da realidade, construída com um objetivo, é chamada de **modelo**
- Resolver um modelo é obter respostas para o problema a ele associado

Conceito fundamental: O Modelo

- Problema das sete pontes: quatro pontos, correspondentes às margens e ilhas, e sete linhas representando as pontes
- Circuitos elétricos: uma linha é associada a cada componente e um ponto ao local onde dois ou mais componentes são conectados
- Fórmulas químicas: pontos são os átomos de carbono e linhas são as ligações entre eles
- Colorindo mapas: cada região (país, estado, etc.) é um ponto e as linhas representam a existência de fronteiras entre tais regiões

Modelagem

- Podemos modelar esse problema de diversas formas
- Duas mais comuns:
  1. Por meio de uma figura (esquema gráfico)
  2. Por meio de um modelo matemático

Exemplo: Problema de transportes

Uma firma fabrica um determinado produto em três cidade P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1 , C_2, C_3 e C_4. O custo estimada de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro consumidor e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Modelagem: Figura

- Desenhamos as origens e os destinos
- Adicionamos as ligações
- Incluímos os valores de custo, ofeta e demanda

Modelagem

Seja x_{ij} a quantidade de produtos transportada da origem $i = 1, 2, 3, 4$ ao destino $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \min\ C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} + \\ 9x_{23} + 1x_{24} + 11x_{31} + 12x_{23} + 8x_{33} + 4x_{34} \end{aligned}$$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9 \quad (1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10 \quad (2)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9 \quad (3)$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7 \quad (4)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6 \quad (5)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \quad (6)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4 \quad (7)$$

Conceito fundamental: O Modelo

George E. P. Box[1]:

> *"Todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis"*

[1] Box, G. E. P. (1976), "Science and statistics", *Journal of the American Statistical Association*, 71: 791–799