Teoria dos Grafos

Conectividade

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2019/2

Corte

Definição (Aresta de Corte)

$E \subseteq E(G)$ é um conjunto de arestas de corte se $\omega(G) < \omega(G - E)$. Nesse caso, E é um corte de arestas.

Exercícios

1. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de arestas de corte de um P_n?
2. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de arestas de corte de um C_n?
3. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de arestas de corte de um K_n?

Corte

Definição (Vértice de Corte)

$V \subseteq V(G)$ é um conjunto de vértices de corte se $\omega(G) < \omega(G - V)$. Nesse caso, V é um corte de vértices.

Exercícios

1. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de vértices de corte de um P_n?
2. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de vértices de corte de um C_n?
3. Qual o tamanho mínimo de um conjunto de vértices de corte de um K_n?

Conectividade

Definição (Conectividade)

A conectividade de um grafo G (denotado por $\kappa(G)$) é igual ao tamanho do corte de vértices mínimo ou, na inexistência de corte de vértices, definido como $n - 1$.

Conectividade

Definição (k-conexo)

Um grafo G é dito k-conexo se $\kappa(G) \geq k$.

Conectividade

Definição (Conectividade em Arestas)

A conectividade em arestas de um grafo G (denotado por $\kappa'(G)$) é definido como zero para grafos triviais ou, caso contrário, igual ao tamanho do corte de arestas mínimo.

Conectividade

Definição (k-conexo em arestas)

Um grafo G é dito k-conexo em arestas se $\kappa'(G) \geq k$.

Resultados

Teorema

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

Resultados

Prova (1/4)

Vamos demonstrar que $\kappa'(G) \leq \delta(G)$

- Se G é trivial, então $\kappa'(G) = 0 \leq \delta(G)$
- Caso contrário, se v é o vértice de menor grau de G, as arestas incidentes a v são um corte de arestas de G de tamanho $\delta(G)$ e, portanto, $\kappa'(G) \leq \delta(G)$

Resultados

Prova (2/4)

Agora, demostraremos que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$:

- Por indução em $\kappa'(G)$
- **Base:** Se $\kappa'(G) = 0$, então G é trivial ou desconexo. Em ambos os casos, $\kappa(G) = 0$
- **HI:** Suponha que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ se verifica para todo grafo com $\kappa'(G) < k$, com $k \geq 1$
- **Passo de Indução:** Seja $\kappa'(G) = k$ e seja xy uma aresta do corte de arestas mínimo C de G

Resultados

Prova (3/4)

- Seja $H = G - \{xy\}$
- $C - \{xy\}$ é um corte de arestas mínimo de H, e portanto, $\kappa'(H) = k - 1$
- Pela hipótese de indução, $\kappa(H) \leq k - 1$
- Seja S um corte de vértices mínimo de H. Logo, $|S| \leq k - 1$
- Se S é um corte de vértices para G, então $\kappa(G) \leq |S| \leq k - 1 < \kappa'(G)$
- Caso contrário, xy é uma ponte de $G - S$. Basta continuarmos analisando dois casos:

  (i) ou x ou y é articulação

  (ii) ou $|V(G - S)| = 2$

Resultados

Prova (4/4)

- Caso (i): Então $S \cup \{x\}$ ou $S \cup \{y\}$ é um corte de vértices de G de tamanho k
  - Logo, $\kappa(G) \leq k = \kappa'(G)$
- Caso (ii): Então $\kappa(G) \leq n - 1 = \kappa(H) + 1 \leq k = \kappa'(G)$

Resultados

Teorema

Um grafo G *com* $n \geq 3$ *é* 2*-conexo se, e somente se, quaisquer dois vértices de* G *estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos.*

Resultados

Prova: Condição suficiente

- Como quaisquer dois vértices de G estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos, então G não possui uma articulação
- Portanto, $\kappa(G) \geq 2$ e, portanto, o grafo é 2-conexo

Resultados

Prova: Condição necessária (1/2)

- Seja G um grafo 2-conexo
- Sejam $u, v \in V(G)$ distintos
- Por indução em $d(u, v)$, vamos mostrar que u e v estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos
- Se $d(u, v) = 1$, então $uv \in E(G)$ e uv não pode ser uma ponte
  - Caso contrário, ou x ou y seria uma articulação contradizendo o fato de G ser 2-conexo, ou $n = 2$ contradizendo $n \geq 3$
  - Logo, por Teorema anterior, xy está em um ciclo e portanto há dois caminhos de u a v (**Base**)
- Suponha que o resultado vale para todo par de vértices u e v com $d(u, v) < k$ (**HI**), e considere $d(u, v) = k$ (**Passo de Indução**)

Resultados

Prova: Condição necessária (2/2)

- Seja W o menor caminho de u até v e seja w o vértice que antecede v em W
- Como $d(u, w) = k - 1$, então por HI existem dois caminhos P e Q de u a w que não compartilham vértices internos
- Como G é 2-conexo, existe um caminho P' de u até v em $G - w$
- Seja x o último vértice comum a P' e a $P \cup Q$ e, sem perda de generalidade, considere que $x \in P$
- Logo, existem dois caminhos disjuntos internamente de u a v: aquele que começa em u, vai por P até x, depois segue até v por P', e Q acrescido de wv

Blocos

Definição (Grafo Bloco)

Um grafo é dito ser um bloco se não possui um vértice de corte.

Definição (Bloco)

Um bloco de um grafo é um subgrafo induzido maximal deste grafo que é um bloco.

Créditos

Parte deste material foi baseada nas notas de aula do Prof. Fabiano Oliveira.