Teoria dos Grafos

Conceitos Fundamentais

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

2019/1

Conceitos Fundamentais

Definição (Grafo)

$G = (V, E)$ é um grafo se V é um conjunto de elementos (cada elemento é chamado vértice) e E é uma família de pares não-ordenados de vértices (cada par é chamado aresta)

- Se G é um grafo, denotamos o conjunto de vértices por $V(G)$ e o de arestas por $E(G)$
- Um par (v, w) não-ordenado pode ser denotado por vw se isso não trouxer ambiguidades

Conceitos Fundamentais

Definição

Exemplos

1. $G_1 = (V_1, E_1)$
   - $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$
   - $E_1 = \{aa, ab, bc, bd, cd, dc, ee, ce, cf, de, df, fd, fe\}$
2. $G_2 = (V_2, E_2)$
   - $V_2 = \mathbb{N}$
   - $E_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = bk \vee b = ak,$ para algum $k \in \mathbb{N}\}$

Definição (Grafo Finito)

Um grafo é finito se $V(G)$ e $E(G)$ são conjuntos finitos.

Definição

Exemplo

- G_1 é finito
- G_2 é infinito

Representação Geométrica

Uma representação usual de grafos finitos é através de uma figura onde um vértice $v \in V(G)$ é representado por um círculo rotulado e uma aresta $vw \in E(G)$ por um segmento de linha com extremidades nas representações dos vértices v e w

Conceitos Fundamentais

Definição (Grafo Simples)

$G = (V, E)$ é um grafo simples se não existem nem laços $(vv \in E(G))$, nem multiarestas $(vw, vw \in E(G))$

Observação

Exceto se for dito o contrário, admitiremos que todo grafo é simples

Conceitos Fundamentais

Observação

Se G é um grafo finito, e nada contrário for dito, n representa o número de vértices do grafo e m o seu número de arestas (ou seja, $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$)

Exercício

Existe uma relação geral entre n e m para grafos simples?

Conceitos Fundamentais

Ordem e Tamanho

- A ordem de um grafo é o número de vértices que ele possui.
- O tamanho de um grafo é o número de arestas que ele possui.

Arestas e Vértices

Definição (Aresta Incidente)

$vw \in E(G)$ é incidente a v e w (e somente a estes vértices)

Arestas e Vértices

Definição (Vértices Adjacentes)

$v, w \in V(G)$ são adjacentes se $vw \in E(G)$

Definição (Vértices Vizinhos)

O conjunto $N(v)$ de vizinhos de v é o conjunto
$N(v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$

Grau

Definição (Grau de um Vértice)

O grau de $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes sobre v.

Exercício

Quanto vale $\sum_{v \in V(G)} d(v)$?

Grau

Exercício

Lema do Aperto de Mão[1]. Mostre que para qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

> *"Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par."*

[1] Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 8, p. 128–140, 1736.

Grau

Definição (Grau Máximo)

O grau máximo de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é o grau do vértice de G que possui o maior valor, i.e., $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$

Definição (Grau Mínimo)

O grau mínimo de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o grau do vértice de G que possui o menor valor, i.e., $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$

- Por definição, $\delta(G) \leq \Delta(G)$

Grau

Definição (Grafo k-regular)

Um grafo G é k-regular se $d(v) = k$ para todo $v \in V(G)$

Grau

Exercícios

1. Quais são os grafos 0-regulares?
2. Quais são os grafos 1-regulares?
3. Quais são os grafos $(n-1)$-regulares?

Tipos Especiais de Grafos

Definição (Grafo Valorado)

Um grafo $G = (V, E)$ é valorado quando um valor numérico (chamado peso) é associado a cada aresta de G.

- Nesse caso, cada elemento de E é definido por uma tripla (v, w, p), sendo $v, w \in V$ e $p \in \mathbb{R}$
- Alguns autores chamam grafos valorados de redes

Tipos Especiais de Grafos

Definição (Grafo Completo)

Um grafo simples G é completo se $vw \in E(G)$ para todo $v, w \in V(G)$

- Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n

Tipos Especiais de Grafos

Definição (Grafo Vazio)

G é um grafo vazio se $E(G) = \varnothing$

Definição (Grafo Bipartido)

G é um grafo bipartido se $V(G) = X \cup Y$, com $X \cap Y = \varnothing$, tal que $vw \notin E(G)$ para todo $v, w \in X$ e $vw \notin E(G)$ para todo $v, w \in Y$

Grafo Bipartido: Aplicação

Problema da Designação

- Ana esperava as amigas Brenda, Clotilde, Daiane e Edite para um lanche em sua casa. Enquanto esperava, preparou os seguintes lanches: Bauru, Misto quente, Misto frio e X-salada
  - Brenda gosta de Misto frio e de X-salada
  - Clotilde de Bauru e X-salada
  - Daiane gosta de Misto quente e Misto frio
  - Edite gosta de de Bauru e Misto quente
- Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use-o para descobrir se é possível que cada amiga de Ana tenha o lanche que gosta
- Se possível, determine o número de soluções.

Tipos Especiais de Grafos

Definição (Grafo Bipartido Completo)

G é um grafo bipartido completo ($K_{p,q}$) se G é bipartido, com partição $V(G) = X \cup Y$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$, e para todo $x \in X, y \in Y$, vale que $xy \in E(G)$

- Em outras palavras existem todas as possíveis arestas entre X e Y

Exercício

- $|V(K_{p,q})| =?$
- $|E(K_{p,q})| =?$

Subgrafos

Definição (Subgrafo)

- H é um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
- H é subgrafo próprio de G se $V(H) \subset V(G)$ **ou** $E(H) \subset E(G)$
- Se H é um subgrafo de G, então G é um supergrafo de H

Subgrafos

Definição (Subgrafo Gerador)

H é um subgrafo gerador de G se é um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$

- Usualmente, é também chamado de subgrafo *spanning*

Subgrafos

Definição (Subgrafo Induzido por Vértices)

Definição O subgrafo induzido de G por V, $V \subseteq V(G)$, denotado por $G[V]$, é o subgrafo H de G tal que $V(H) = V$ e para todo $v, w \in V$, $vw \in E(H)$ se, e somente se, $vw \in E(G)$

Definição (Subgrafo Induzido por Arestas)

O subgrafo induzido de G por E, $E \subseteq E(G)$, denotado por $G[E]$, é o subgrafo H de G tal que $E(H) = E$ e não existe vértice sem aresta incidente em H

Subgrafos

Definição (Clique)

$C \subseteq V(G)$ é uma clique de um grafo G se $G[C]$ é completo

Operações sobre Grafos

Definição (Grafos Disjuntos em Arestas)

G e H são disjuntos em arestas se $E(G) \cap E(H) = \varnothing$

Definição (Grafos Disjuntos em Vértices)

G e H são disjuntos em vértices se $V(G) \cap V(H) = \varnothing$

Operações sobre Grafos

Definição (União de Grafos)

A união $G \cup H$ de dois grafos é o grafo J tal que $V(J) = V(G) \cup V(H)$ e $E(J) = E(G) \cup E(H)$

Operações sobre Grafos

Definição (Complemento de um Grafo)

O complemento de um grafo G, denotado por $\bar{G}$, é tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e $E(\bar{G}) = \{vw : v, w \in V(G) \mid v \neq w, vw \notin E(G)\}$

Operações sobre Grafos

Definição (Diferença de Grafo por Vértices)

A diferença de um grafo G por V, $V \subseteq V(G)$, e denotada por $G - V$, é o grafo $G[V(G) - V]$

Definição (Diferença de Grafo por Arestas)

A diferença de um grafo G por E, $E \subseteq E(G)$, e denotada por $G - E$, é o grafo H, onde $V(H) = V(G)$ e $E(H) = E(G) - E$

Definição (Grafos Idênticos)

Dois grafos G e H são idênticos $(G = H)$ se $V(G) = V(H)$ e $E(G) = E(H)$

Grafos Iguais e Isomorfos

Definição (Grafos Isomorfos)

Dois grafos G e H são isomorfos ($G \cong H$) se existir uma bijeção $\theta : V(G) \to V(H)$ tal que

$$vw \in E(G) \iff \theta(v)\theta(w) \in E(H)$$

- Bijeção de um conjunto A para um conjunto B é uma correspondência **biunívoca** entre A e B, isto é, a cada elemento de A corresponde sempre um único elemento de B e reciprocamente[2]

[2] Amaral, V., Lopes, A., Ralha, E., Sousa, I., Taveira, C. (2014), Revista de Ciência Elementar, 2(1):0047

Isomorfismo

Condições necessárias para isomorfismo

1. G e H devem possuir o mesmo número de vértices
2. G e H devem possuir o mesmo número de arestas
3. G e H devem possuir o mesmo número de vértices com um determinado grau

Créditos

Parte deste material foi baseada nas notas de aula do Prof. Fabiano Oliveira.