Problemas

1. Obtenha a distribuição de $\hat{p}$ quando $p = 0,2$ e $n = 5$. Depois calcule $E(\hat{p})$ e $\text{Var}(\hat{p})$.
2. Encontre um limite superior para $\text{Var}(\hat{p})$ quando $n = 10$, 25, 100 e 400. Faça o gráfico em cada caso.
3. Suponha um experimento consistindo de n provas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p. Seja X o número de sucessos, e considere os estimadores

   (a) $\hat{p}_1 = X/n$; (b) $\hat{p}_2 = \begin{cases} 1, & \text{se a primeira prova resultar sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

   Determine a esperança e a variância de cada estimador. Por que $\hat{p}_2$ não é um "bom" estimador?
4. Verifique se $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ do Problema 3 são consistentes.
5. Tem-se duas fórmulas distintas para estimar um parâmetro populacional θ. Para ajudar a escolher a melhor, simulou-se uma situação em que $\theta = 100$. Dessa população retiraram-se 1.000 amostras de dez unidades cada uma, e aplicaram-se ambas as fórmulas às dez

unidades de cada amostra. Desse modo, obtêm-se 1.000 valores para a primeira fórmula t_1 e outros 1.000 valores para a segunda fórmula t_2, cujos estudos descritivos estão resumidos abaixo. Qual das duas fórmulas você acha mais conveniente para estimar θ. Por quê?

Fórmula 1	Fórmula 2
$\bar{t}_1 = 102$	$\bar{t}_2 = 100$
$Var(t_1) = 5$	$Var(t_2) = 10$
Mediana = 100	Mediana = 100
Moda = 98	Moda = 100

Problemas

6. Estamos estudando o modelo $y_t = \mu + \varepsilon_t$, para o qual uma amostra de cinco elementos produziu os seguintes valores para y_t: 3, 5, 6, 8, 16.

   (a) Calcule os valores de $S(\mu) = \sum_t (y_t - \mu)^2$, para $\mu = 6, 7, 8, 9, 10$, e faça o gráfico de $S(\mu)$ em relação a μ. Qual o valor de μ que parece tornar mínimo $S(\mu)$?

(b) Derivando $S(\mu)$ em relação a μ, e igualando o resultado a zero, você encontrará o EMQ de μ. Usando os dados acima, encontre a estimativa para μ e compare com o resultado do item anterior.

7. Os dados abaixo referem-se ao índice de inflação (y_t) de 1967 a 1979.

Ano (t)	1967	1969	1971	1973	1975	1977	1979
Inflação (y_t)	128	192	277	373	613	1.236	2.639

(a) Faça o gráfico de y_t contra t.

(b) Considere ajustar o modelo $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ aos dados. Encontre as estimativas de mínimos quadrados de α e β.

(c) Qual seria a inflação em 1981?

(d) Você teria alguma restrição em adotar o modelo linear nesse caso?

8. No Problema 7, determinamos os estimadores de mínimos quadrados para o modelo $y_t = f(t) + \varepsilon_t$, no qual $f(t) = \alpha + \beta t$. Suponha agora que

$$f(t) = \alpha + \beta x_t, \quad t = 1, \ \ldots, n,$$

ou seja, temos n valores fixos $x_1, \ \ldots, x_n$ de uma variável fixa (não aleatória) x. Obtenha os EMQ de α e β para esse modelo.

9. Aplique os resultados do Problema 8 para os dados a seguir:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	1,5	1,8	1,6	2,5	4,0	3,8	4,5	5,1	6,5	6,0
y_t	66,8	67,0	66,9	67,6	68,9	68,7	69,3	69,8	71,0	70,6

Problemas

10. Na função de verossimilhança $L(p)$ da binomial, suponha que $n = 5$ e $x = 3$. Construa o gráfico da função para os possíveis valores de $p = 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$, e verifique que o máximo ocorre realmente para $p = 3/5$.

11. Observa-se uma sequência de ensaios de Bernoulli, independentes, com parâmetro p, até a ocorrência do primeiro sucesso. Se X indicar o número de ensaios necessários:

(a) Mostre que $P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$ (distribuição geométrica).

(b) Repetiu-se esse experimento n vezes e, em cada um deles, o número de ensaios necessários foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Encontre o EMV para p.

(c) Usando uma moeda, repetiu-se esse experimento 5 vezes, e o número de ensaios necessários até a ocorrência da primeira coroa foi 2, 3, 1, 4, 1, respectivamente. Qual a estimativa de MV para p = probabilidade de ocorrência de coroa nessa moeda? Existiria outra maneira de estimar p?

12. Suponha que X seja uma v.a. com distribuição normal, com média μ e variância 1. Obtenha o EMV de μ, para uma amostra de tamanho n, $(x_1, \ldots, x_n)$.

13. Considere Y uma v.a. com distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$. Obtenha a EMV de λ, baseado numa amostra de tamanho n.