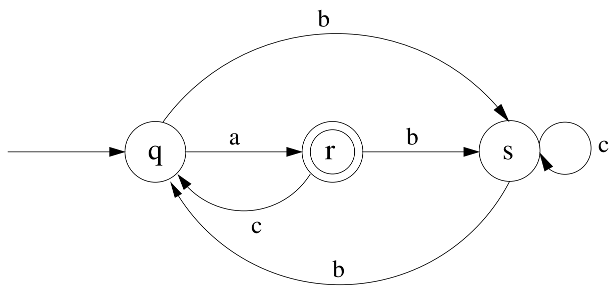
TIN - Teoretická informatika
2021 / 2022

1. Domácí úloha

Vypracoval: Jan Lorenc (xloren15) Datum: 30. 10. 2021

Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022
Úkol 1
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Uvažte NKA M_3 nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ z obrázku 1:



Obrázek 1: NKA M_3

Řešením rovnic nad regulárními výrazy sestavte k tomuto automatu ekvivalentní regulární výraz.

10 bodů

2. Mějme jazyk L_1 nad abecedou $\{a, b, c\}$ definovaný následovně:

$$L_1 = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w) \wedge \#_c(w) > 2\}$$

Dokažte, že jazyk L_1 není regulární. 10 bodů

3. S využitím Myhill-Nerodovy věty dokažte, že jazyk

$$L_2 = \{xw \mid x \in \{0, 1\}, w \in \{a, b\}^* \wedge (\#_a(w) \; mod \; 2 = x)\}$$

je regulární. Postupujte následovně: sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$ s konečným indexem a ukažte, že jazyk L_2 je sjednocením některých tříd rozkladu $\{0, 1, a, b\}^*/_\sim$.

10 bodů

4. Mějme jazyk L_3 nad abecedou $\{a, b, c, \#\}$ definovaný následovně:

$$L_3 = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b, c\}^* \wedge (\#_a(w_1) = \#_b(w_2) \vee (\#_a(w_1) = \#_c(w_2))\}$$

.

- Sestrojte bezkontextovou gramatiku G_3 takovou, že $L(G_3) = L_3$.
- Ke gramatice G_3 sestrojte RZA P_3 takový, že P_3 provádí syntaktickou analýzu L_3 shora dolů.

10 bodů

5. Mějme jazyk L_4 nad abecedou $\{a, b, 0, 1, \#\}$ definovaný následovně:

$$L_4 = \{w_1\#w_2x \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^* \wedge (w_1 = w_2^R \wedge x = 0) \vee (|w_1| < |w_2| \wedge x = 1)\}$$

Sestrojte deterministický zásobníkový automat P_4 takový, že $L(P_4) = L_4$. 10 bodů

Příklad 1:

Přiřadíme stavům automatu proměnné následovně:

$q \rightsquigarrow X \quad , r \rightsquigarrow Y \quad , s \rightsquigarrow Z$

Pak dostáváme soustavu rovnic:

(1) $X = aY + bZ$

(2) $Y = bZ + cX + \varepsilon$

(3) $Z = bX + cZ$

$Z = c^*bX$ ... dosadím do (2)

$Y = bc^*bX + cX + \varepsilon = (bc^*b + c)X + \varepsilon$ $\Big\}$ dosadím do (1)

$$\begin{aligned}X &= a((bc^*b + c)X + \varepsilon) + bc^*bX = \\ &= a(bc^*b + c)X + a + bc^*bX = \\ &= (a(bc^*b + c) + bc^*b)X + a = \\ &= (abc^*b + ac + bc^*b)X + a = \\ &= \underline{\underline{(abc^*b + ac + bc^*b)^*a}}\end{aligned}$$

Příklad 2:

Důkaz sporem:

Předpokládejme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3$.

Dle Pumping lemmatu $\exists k \geq 0 : \forall w \in L_1 : |w| \geq k \Rightarrow$
$(\exists x, y, z \in \{a, b, c\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1)$

Uvážíme libovolné $k > 0$, zvolíme $w = b^k a^{k+1} c^3$ ($w \in L_1 \wedge |b^k a^{k+1} c^3| = 2k + 4 \geq k$).

Pro libovolné rozdělení $w = xyz$, kde $x, y, z \in \{a, b, c\}^*$, $y \neq \varepsilon$ a $|xy| \leq k$ (viz. podmínky P.L.) musí platit následující:

$x = b^{\ell_1}$, kde $0 \leq \ell_1 < k$

$y = b^{\ell_2}$, kde $1 \leq \ell_2 \leq k \wedge \ell_1 + \ell_2 \leq k$

$z = b^{k-\ell_1-\ell_2} a^{k+1} c^3$

Zvolme např. $i = 2$ $\rightarrow$ $xy^iz = b^{\ell_1} b^{\ell_2} b^{\ell_2} b^{k-\ell_1-\ell_2} a^{k+1} c^3 = b^{k+\ell_2} a^{k+1} c^3$

$|b^{k+\ell_2}| = k + \ell_2$

$|a^{k+1}| = k + 1$

$\ell_2 \geq 1 \Rightarrow k + \ell_2 \geq k + 1$, tedy $\#_b(xy^2z) \geq \#_a(xy^2z)$, a proto $xy^2z \notin L_1$

Podle P.L. však $\forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1$ $\rightarrow$ SPOR ... L_1 tedy není regulárním jazykem

Příklad 3:

Uvažme relaci pravé kongruence $\sim$ definovanou následovně:

$$u \sim v \iff (\exists a \in \{0,1\} : \exists w_1, w_2 \in \{a,b\}^* : u = aw_1 \wedge v = aw_2 \wedge \#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2) \vee$$
$$(\forall a \in \{0,1\} : \forall w \in \{a,b\}^* : u \neq aw \wedge v \neq aw \wedge |u| > 0 \wedge |v| > 0) \vee |u| = |v| = 0$$

$\sim$ je ekvivalence: je zřejmé, že je reflexivní, symetrická i tranzitivní

reflexivita
$(\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(u) \bmod 2$, symetrie $\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2 \Rightarrow \#_a(v) \bmod 2 = \#_a(u) \bmod 2$,

$\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2 \wedge \#_a(v) \bmod 2 = \#_a(w) \bmod 2 \Rightarrow \#_a(u) \bmod 2 = \#_a(w) \bmod 2$ tranzitivita

pro u, v, w vyhovující výrazu $\{0,1\}\{a,b\}^*$ ... a stejně tak i

pro $\forall a \in \{0,1\} : \forall w \in \{a,b\}^*$ platí $u \neq aw \wedge u \neq aw = u \neq aw \wedge u \neq aw$, reflexivita

$u \neq aw \wedge v \neq aw \Rightarrow v \neq aw \wedge u \neq aw$, symetrie

$(u \neq aw \wedge v \neq aw) \wedge (v \neq aw \wedge z \neq aw) \Rightarrow u \neq aw \wedge z \neq aw$ tranzitivita

... pro $|u| = |v| = 0$ jsou pak vlastnosti ekvivalence zřejmé)

$\sim$ je pravá kongruence: nechť $u \sim v$, pak i $ux \sim vx$, neboť

pro $u = aw_1$ a $v = aw_2$ kde $a \in \{0,1\}$, $w_1, w_2 \in \{a,b\}^*$ a

pro $x \in \{0,1,b\}$: $\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(ux) \bmod 2 = \#_a(vx) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2$

pro $x \in \{a\}$: $\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2 \Rightarrow (\#_a(u) + 1) \bmod 2 = (\#_a(v) + 1) \bmod 2$

pro $\forall a \in \{0,1\}$ a $\forall w \in \{a,b\}^*$ a $x \in \{0,1,a,b\}$ platí:

$u \neq aw \wedge v \neq aw \Rightarrow ux \neq aw \wedge vx \neq aw$

pro ε pak: $u = v = \varepsilon \Rightarrow ux = vx = x$ pro $\forall x \in \{0,1,a,b\}$ a platí, že $x \sim x$

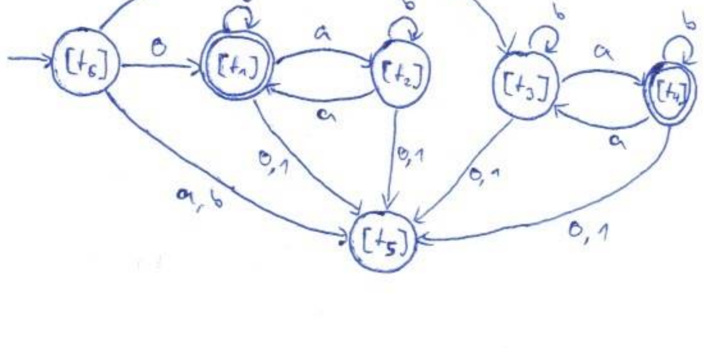
$\sim$ má konečný index: 6 tříd rozkladu

$[t_1] = \{w \mid \exists v \in \{a,b\}^* : w = 0v \wedge \#_a(v) \bmod 2 = 0\}$
$[t_2] = \{w \mid \exists v \in \{a,b\}^* : w = 0v \wedge \#_a(v) \bmod 2 = 1\}$
$[t_3] = \{w \mid \exists v \in \{a,b\}^* : w = 1v \wedge \#_a(v) \bmod 2 = 0\}$
$[t_4] = \{w \mid \exists v \in \{a,b\}^* : w = 1v \wedge \#_a(v) \bmod 2 = 1\}$
$[t_5] = \{w \mid \forall a \in \{0,1\} : \forall v \in \{a,b\}^* : w \neq av \wedge |w| > 0\}$
$[t_6] = \{\varepsilon\}$

$$L_2 = [t_1] \cup [t_4]$$

... je proto regulární

Odpovídající KA:



Příklad 4:

$G_3 = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b, c, \#\}, P, S)$

kde P je množina obsahující následující pravidla:

$S \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow \# \mid bS_1 \mid cS_1 \mid S_1a \mid S_1c \mid aS_1b$

$S_2 \rightarrow \# \mid bS_2 \mid cS_2 \mid S_2a \mid S_2b \mid aS_2c$

RZA $P_3 = (\{q\}, \{a, b, c, \#\}, \{S, S_1, S_2, a, b, c, \#\}, \delta, q, S, \phi\}$, kde:

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, S_1), (q, S_2)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_1) = \{(q, \#), (q, bS_1), (q, cS_1), (q, S_1a), (q, S_1c), (q, aS_1b)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_2) = \{(q, \#), (q, bS_2), (q, cS_2), (q, S_2a), (q, S_2b), (q, aS_2c)\}$

$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \#, \#) = \{(q, \varepsilon)\}$

Příklad 5: