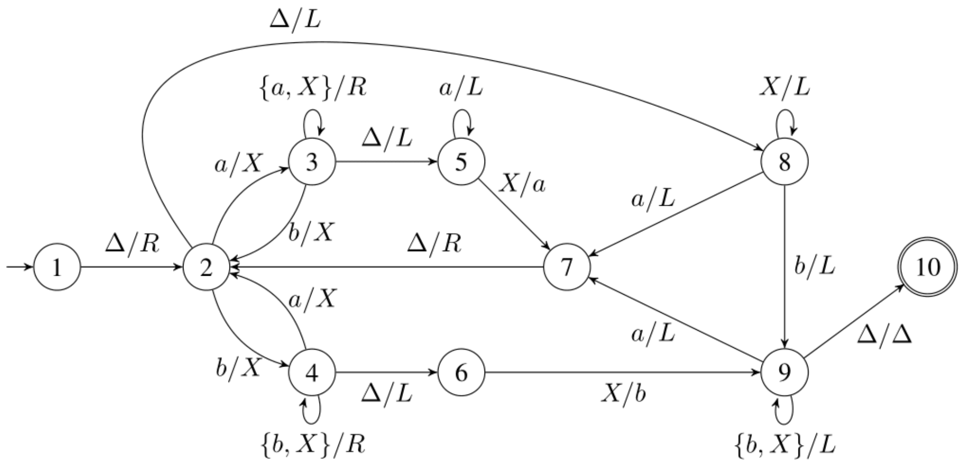
TIN - Teoretická informatika
2021/ 2022

2. Domácí úloha

Vypracoval: Jan Lorenc (xloren15) Datum: 5. 12. 2021

Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022
Úkol 2
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Doplňte 3 přechody do následujícího přechodového diagramu tak, aby výsledný Turingův stroj přijímal jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w)\}$, kde $\#_x(w)$ značí počet výskytů symbolu x v řetězci w. (Na přechodu můžete mít i množinu čtených symbolů, vizte třeba přechod $(3, \{a, X\}, R, 3)$ s očekávanou sémantikou.)



Demonstrujte běh výsledného TS na slově $abaabbbba$ (není potřeba vypisovat všechny konfigurace, stačí jen ty, kde se změnil stav TS nebo obsah pásky).

10 bodů

2. Operátor *vepsání* (tzv. *wedge*) $\lhd \colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2^{\Sigma^*}$ je definován pro slova $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ a w tak, že
$$u \lhd w = \{u_1 \ldots u_i w u_{i+1} \ldots u_n \mid 0 \leq i \leq n\}.$$
Operátor je rozšířen na jazyky následujícím způsobem: $L_1 \lhd L_2 = \bigcup\{w_1 \lhd w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$. Například $\{aa\} \lhd \{bb\} = \{bbaa, abba, aabb\}$. Dokažte, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na $\lhd$.

10 bodů

3. Je dána abeceda Σ a jazyky $S, L \subseteq \Sigma^*$. Turingův stroj M nad abecedou Σ *rozhoduje jazyk L modulo S*, pokud pro všechna slova $w \in \Sigma^* \setminus S$ (i) zastaví a (ii) přijímá w právě tehdy, když $w \in L$ (tj. chování na slovech z S nás nezajímá). Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:
   (a) Existuje nekonečný jazyk S takový, že *halting problem* (HP) je rozhodnutelný modulo S.
   (b) Pro všechny jazyky S je HP rozhodnutelný modulo S.
   (c) Existuje konečný jazyk S takový, že HP je rozhodnutelný modulo S.

   Nápověda: pro některý z důkazů je vhodné upravit důkaz nerozhodnutelnosti HP z přednášek.

15 bodů

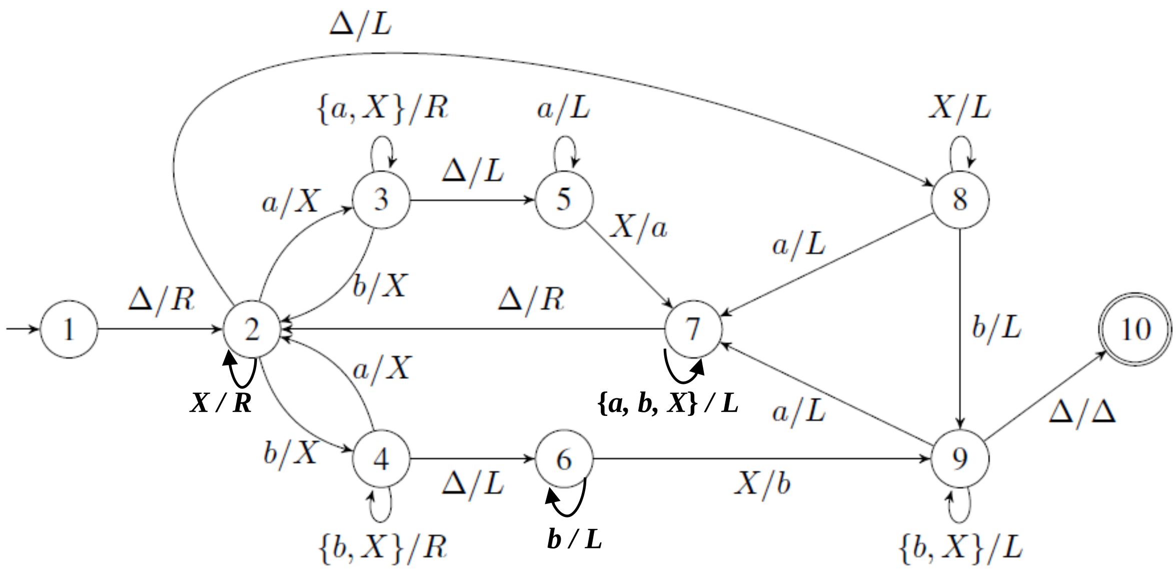
4. Uvažujte jazyk $L_{prime} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}\}$, kde $\langle M\rangle$ značí binární řetězec kódující TS M. Dokažte pomocí redukce, že jazyk L_{prime} není ani částečně rozhodnutelný. Pro redukci lze použít libovolný z následujících problémů (žádný z nich není ani částečně rozhodnutelný):
   - *co-HP*,
   - problém univerzality jazyka TS M („platí, že $L(M) = \Sigma^*$?“).

   Stačí slovně popsat princip redukce, není potřeba konstruovat TS.

15 bodů

Příklad 1

Doplněné přechody:



Demonstrace na slově *abaabbbba*:

$(q_1, \underline{\Delta}abaabbbba\Delta\Delta^\omega, 0) \vdash (q_2, \Delta\underline{a}baabbbba\Delta\Delta^\omega, 1) \vdash (q_3, \Delta\underline{X}baabbbba\Delta\Delta^\omega, 1) \vdash$

$(q_3, \Delta X\underline{b}aabbbba\Delta\Delta^\omega, 2) \vdash (q_2, \Delta X\underline{X}aabbbba\Delta\Delta^\omega, 2) \vdash (q_2, \Delta XX\underline{a}abbbba\Delta\Delta^\omega, 3) \vdash$

$(q_3, \Delta XX\underline{X}abbbba\Delta\Delta^\omega, 3) \vdash^2 (q_3, \Delta XXXa\underline{b}bbba\Delta\Delta^\omega, 5) \vdash (q_2, \Delta XXXa\underline{X}bbba\Delta\Delta^\omega, 5) \vdash$

$(q_2, \Delta XXXaX\underline{b}bba\Delta\Delta^\omega, 6) \vdash (q_4, \Delta XXXaX\underline{X}bba\Delta\Delta^\omega, 6) \vdash^3 (q_4, \Delta XXXaXXbb\underline{a}\Delta\Delta^\omega, 9) \vdash$

$(q_2, \Delta XXXaXXbb\underline{X}\Delta\Delta^\omega, 9) \vdash (q_2, \Delta XXXaXXbbX\underline{\Delta}\Delta^\omega, 10) \vdash (q_8, \Delta XXXaXXbb\underline{X}\Delta\Delta^\omega, 9) \vdash$

$(q_8, \Delta XXXaXXb\underline{b}X\Delta\Delta^\omega, 8) \vdash^3 (q_9, \Delta XXXaXX\underline{b}bX\Delta\Delta^\omega, 7) \vdash^3 (q_9, \Delta XXX\underline{a}XXbbX\Delta\Delta^\omega, 4) \vdash$

$(q_7, \Delta XX\underline{X}aXXbbX\Delta\Delta^\omega, 3) \vdash^3 (q_7, \underline{\Delta}XXXaXXbbX\Delta\Delta^\omega, 0) \vdash (q_2, \Delta\underline{X}XXaXXbbX\Delta\Delta^\omega, 1) \vdash^3$

$(q_2, \Delta XXX\underline{a}XXbbX\Delta\Delta^\omega, 4) \vdash (q_3, \Delta XXX\underline{X}XXbbX\Delta\Delta^\omega, 4) \vdash^3 (q_3, \Delta XXXXXX\underline{b}bX\Delta\Delta^\omega, 7) \vdash$

$(q_2, \Delta XXXXXX\underline{X}bX\Delta\Delta^\omega, 7) \vdash (q_2, \Delta XXXXXXX\underline{b}X\Delta\Delta^\omega, 8) \vdash (q_4, \Delta XXXXXXX\underline{X}X\Delta\Delta^\omega, 8) \vdash^2$

$(q_4, \Delta XXXXXXXXX\underline{\Delta}\Delta^\omega, 10) \vdash (q_6, \Delta XXXXXXXX\underline{X}\Delta\Delta^\omega, 9) \vdash (q_9, \Delta XXXXXXXX\underline{b}\Delta\Delta^\omega, 9) \vdash^9$

$(q_9, \underline{\Delta}XXXXXXXXb\Delta\Delta^\omega, 0) \vdash (q_{10}, \underline{\Delta}XXXXXXXXb\Delta\Delta^\omega, 0)$

Příklad 2

Důkaz, že množina RE jazyků je uzavřena na $\lhd$:

Pro všechny rekurzivně vyčíslitelné jazyky L_1 a L_2 existují TS M_1 a M_2, které je přijímají. M_1 a M_2 lze dále zakódovat do nějakého jiného TS. Pokud je množina RE jazyků uzavřena na $\lhd$, poté musí existovat takový Turingův stroj, který jazyk $L_1 \lhd L_2$ přijme.

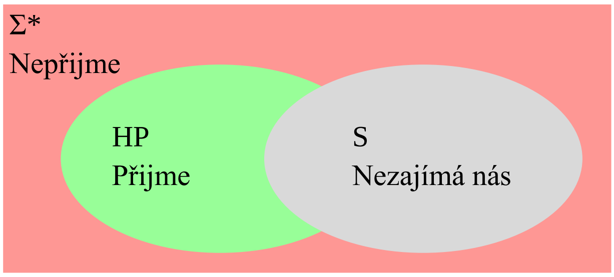
Uvažme třípáskový nedeterministický TS M, do jehož stavového řízení zakódujeme M_1 a M_2. TS M pak pracuje následovně:

1. M nedeterministicky rozdělí svůj vstup na první pásce na sekvence u_1wu_2, kde u_1 je 1. část slova u z L_1, w je vložené slovo w z L_2 a u_2 je zbytek slova u z L_1.
2. M zkopíruje u_1u_2, tedy slovo u z L_1 na svou 2. pásku.
3. M simuluje běh TS M_1 na 2. pásce. Pokud M_1 přijme, pokračuje, jinak odmítne nebo cyklí.
4. M zkopíruje w na svou 3. pásku.
5. M simuluje běh TS M_2 na 3. pásce. Pokud M_2 přijme, M taktéž přijme, jinak odmítne nebo cyklí.

TS M přijímá $L_1 \lhd L_2$, tedy $L(M) = L_1 \lhd L_2$. Z toho vyplývá, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na operaci $\lhd$.

Příklad 3

Intuice:



a) <u>Platí</u>

Nechť $S = \Sigma^*$. S je zřejmě nekonečný jazyk. TS M poté rozhoduje *HP modulo S*, pokud pro všechna slova $w \in \Sigma^* \setminus \Sigma^* = \emptyset$ zastaví a w přijme, pokud $w \in HP$. Toto platí, neboť skutečně neexistuje žádné $w \in \emptyset$, pro které by nezastavil nebo které by nepatřilo do *HP* (neboť žádná w nejsou – prázdná množina). Takový TS M lze skutečně sestrojit, uvažme takový TS M, který pro každý svůj vstup cyklí (neboť má zastavit jen pro $w \in \emptyset$, tedy pro žádné slovo).

(Zjednodušeně lze také říci, že když nás chování na slovech S nezajímá a všechna slova jsou z S, neboť $S = \Sigma^*$, tak lze všechny vstupy ignorovat - problém je rozhodnutelný).

b) <u>Neplatí</u>

Nechť $S = \emptyset$, pak by zřejmě *HP* modulo S muselo odpovídat *HP* (S zde totiž vůbec nic neovlivní). O *HP* však víme, že je nerozhodnutelný, tedy TS M jistě nezastaví pro nějaké slovo z Σ^*, tedy *HP modulo S* pro $S = \emptyset$ není rozhodnutelné. Z toho vyplývá, že neplatí, že by *HP modulo S* byl rozhodnutelný pro všechny možné jazyky S.

c) <u>Neplatí</u>

Takový jazyk S by musel obsahovat všechna slova ze Σ^*, jež *HP* dělají nerozhodnutelným. Těch je však nekonečně mnoho a tedy jazyk S nemůže být konečný. Provedeme důkaz sporem diagonalizací podobně jako u důkazu nerozhodnutelnosti *HP* z přednášky.

1) Předpokládejme, že existuje nějaký takový konečný jazyk S.
2) Pro $x \in \{0, 1\}^*$, nechť M_x je TS s kódem x, je-li x legální kód TS. Jinak ztotožníme M_x s pevně zvoleným TS, např. TS, který pro libovolný vstup okamžitě zastaví.
3) Můžeme nyní sestavit posloupnost $M_\varepsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$ zahrnující všechny TS nad $\Sigma = \{0, 1\}$ indexované z $\{0, 1\}^*$.
4) Uvažme nekonečnou matici

	ε	0	1	00	01	10	…
M_ε	$H_{M\varepsilon, \varepsilon}$	$H_{M\varepsilon, 0}$	$H_{M\varepsilon, 1}$	$H_{M\varepsilon, 00}$	$H_{M\varepsilon, 01}$	…	
M_0	$H_{M0, \varepsilon}$	$H_{M0, 0}$	$H_{M0, 1}$	$H_{M0, 00}$	$H_{M0, 01}$	…	
M_1	$H_{M1, \varepsilon}$	$H_{M1\varepsilon, 0}$	$H_{M1, 1}$	$H_{M1, 00}$	$H_{M1, 01}$	…	
M_{00}	$H_{M00, \varepsilon}$	$H_{M00, 0}$	$H_{M00, 1}$	$H_{M00, 00}$	$H_{M00, 01}$	…	
M_{01}	$H_{M01, \varepsilon}$	$H_{M01, 0}$	$H_{M01, 1}$	$H_{M01, 00}$	$H_{M01, 01}$	…	
…							

kde $H_{Mx, y} = \begin{cases} \text{C, pokud } M_x \text{ na } y \text{ cyklí} \\ \text{Z, pokud } M_x \text{ na } y \text{ zastaví} \end{cases}$

5) Předpokládejme, že existuje úplný TS K přijímající jazyk *HP modulo S*, tj. K pro vstup $<M>\#<w>$

- Zastaví normálně (přijme) právě tehdy, když M zastaví na w a w nenáleží do S.
- Zastaví abnormálně (odmítne) jinak, tedy pokud M cyklí na w a w nenáleží do S nebo i pokud w do S náleží.

6) Sestavíme TS N, který pro vstup $x \in \{0, 1\}^*$:

- Sestaví M_x z x a zapíše $<M_x>\#x$ na svou pásku.
- Simuluje K na $<M_x>\#x$, přijme, pokud K odmítne, a přejde do nekonečného cyklu, pokud K přijme.

Všimněme si, že N v podstatě komplementuje diagonálu matice uvedené v bodu 4.

7) Dostáváme, že N zastaví na x $\Leftrightarrow$ K odmítne $<M_x>\#x$ (definice N)
$\Leftrightarrow$ M_x cyklí na x nebo $<M_x>\#x \in S$ (předpoklad o K)

8) To ale znamená, že N se liší od každého M_x alespoň na jednom řetězci – konkrétně x. Což je ovšem spor s tím, že posloupnost $M_\varepsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$ zahrnuje všechny TS nad $\Sigma = \{0, 1\}$. Tento spor plyne z předpokladu, že existuje TS K, který pro daný vstup x určí (rozhodne), zda M zastaví na x, či nikoliv. Aby takový TS K existoval, musel by jazyk S obsahovat všechny řetězce $<M_x>\#x$, pro které platí, že M nad x cyklí. Těchto řetězců je však nekonečně mnoho, a proto S nemůže být konečný.

Příklad 4

<u>Idea důkazu:</u>

Použijeme redukci z doplňku problému zastavení TS, který je charakterizován jazykem *co-HP* = {<*M*>#<*w*> | TS *M* nezastaví na *w*}.

Požadovaná redukce je funkce σ: {0, 1, #}* ⟶ {0, 1}* definovaná takto:

$$\sigma(<M>\#<w>) = <M'>.$$

Pokud vstup <*M*>#<*w*> není korektní instance *co-HP*, tak funkce σ vrací kód TS *M'* takového, že $L(M') = \Sigma^*$ (tj. $<M'> \notin L_{prime}$). Jinak σ vrací kód TS *M'*, který pracuje následovně:

- *M'* nejdříve zkontroluje svůj vstup *w'*.
- Pokud $w' \in \{a^p \mid p$ je prvočíslo$\}$, tak *M'* akceptuje (poté $\{a^p \mid p$ je prvočíslo$\} \subseteq L(M')$).
- Jinak *M'* smaže svůj vstup *w'* a zapíše na svou pásku řetězec <*M*>#<*w*>, který je uložen v jeho stavovém řízení.
- *M'* spustí simulaci stroje *M* na vstupu *w*.
- Pokud simulace cyklí, tak *M'* taktéž cyklí (pak $L(M') = \{a^p \mid p$ je prvočíslo$\}$).
- Pokud simulace skončí, tak *M'* akceptuje (tedy $L(M') = \Sigma^*$).

Tudíž pro *M'* platí:

$$<M>\#<w> \in co\text{-}HP \Rightarrow L(M') = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\} \Rightarrow <M'> \in L_{prime} \text{ a}$$

$$<M>\#<w> \notin co\text{-}HP \Rightarrow L(M') = \Sigma^* \Rightarrow <M'> \notin L_{prime},$$

$$\text{neboli } <M>\#<w> \in co\text{-}HP \Leftrightarrow \sigma(<M>\#<w>) \in L_{prime}.$$

Je vidět, že výše popsanou konstrukci stroje *M'* lze implementovat pomocí úplného TS a tudíž funkce σ je totální, rekurzivně vyčíslitelná funkce.