

Semestrální projekt IEL 2018/2019

Vypracoval: Jan Lorenc

Login: xloren15

Obsah

Příklad 1.....	3
Příklad 2.....	5
Příklad 3.....	7
Příklad 4.....	9
Příklad 5.....	11
Tabulka s výsledky:	13

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} .

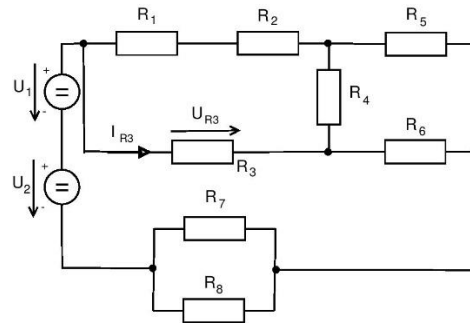
Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

Varianta: **D**

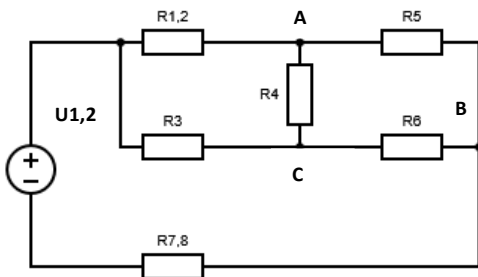
$U_1=105V$, $U_2=85V$

$R_1=420\Omega$, $R_2=980\Omega$, $R_3=330\Omega$, $R_4=280\Omega$

$R_5=310\Omega$, $R_6=710\Omega$, $R_7=240\Omega$, $R_8=200\Omega$



Začneme spojením R_1 a R_2 , neboť jsou v sérii, paralelním spojením odlehých R_7 a R_8 a spojením zdrojů:

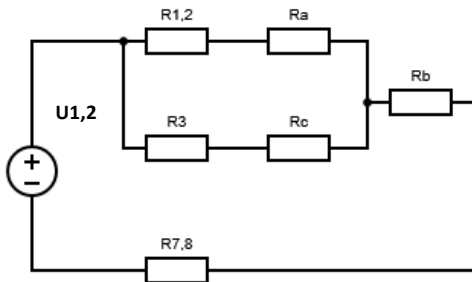


$$R_{1,2} = R_1 + R_2 = 420 + 980\Omega = 1400\Omega$$

$$R_{7,8} = \frac{R_7 * R_8}{R_7 + R_8} = \frac{240 * 200}{240 + 200}\Omega = 109,0909\Omega$$

$$U_{1,2} = U_1 + U_2 = 105 + 85V = 190V$$

Rezistory R_4 , R_5 , R_6 tvoří trojúhelník, vytvoříme z něho hvězdu

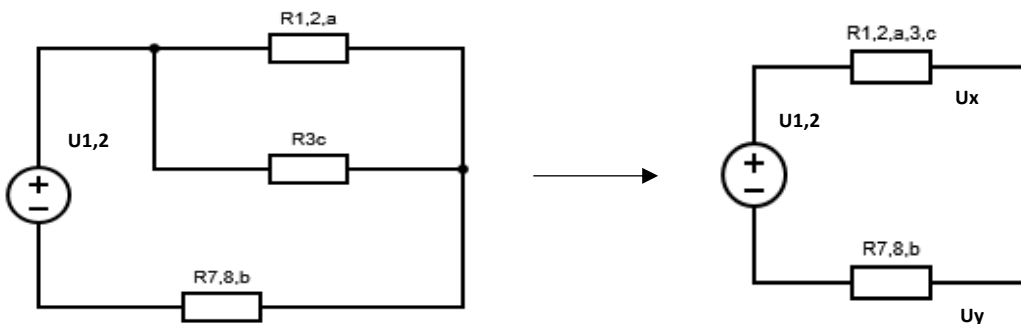


$$R_a = \frac{R_4 * R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{280 * 310}{280 + 310 + 710}\Omega = 66,7692\Omega$$

$$R_b = \frac{R_5 * R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{310 * 710}{280 + 310 + 710}\Omega = 169,3077\Omega$$

$$R_c = \frac{R_4 * R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{280 * 710}{280 + 310 + 710}\Omega = 152,9231\Omega$$

Spojíme odpory v sérii a dále i nově vzniklé paralelně:



$$R_{1,2,a} = R_{1,2} + R_a = 1400 + 66,7692\Omega = 1466,7692\Omega$$

$$R_{3,c} = R_3 + R_c = 330 + 152,9231\Omega = 482,9231\Omega$$

$$R_{7,8,b} = R_{7,8} + R_b = 109,0909 + 169,3077\Omega = 278,3986\Omega$$

$$R_{1,2,a,3,c} = \frac{R_{1,2,a} * R_{3,c}}{R_{1,2,a} + R_{3,c}} = \frac{1466,7692 * 482,9231}{1466,7692 + 482,9231} = 363,3069\Omega$$

Vypočteme celkový odpor:

$$R = R_{1,2,a,3,c} + R_{7,8,b} = 363,3069 + 278,3986 \, \Omega = 641,7055 \, \Omega$$

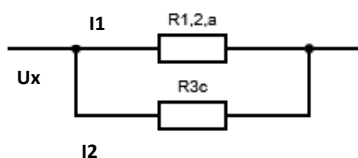
Pomocí něj vypočítáme napětí $U_x = U_{R_{1,2,a,3,c}}$:

$$U_x = U_{R_{1,2,a,3,c}} = U_{1,2} * \frac{R_{1,2,a,3,c}}{R_{1,2,a,3,c} + R_{7,8,b}} = 190 * \frac{363,3069}{363,3069 + 278,3986} \, V = 107,6471 \, V$$

Vypočítáme celkový proud obvodem:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{190}{641,7055} \, A = 0,2961 \, A$$

Rozdělíme si $R_{1,2,a,3,c}$ zpět na paralelní větve a vypočítáme proud na odporu $R_{3,c}$, z něj dále i napětí:



$$I_2 = I_{R_3} = I * \frac{R_{1,2,a}}{R_{1,2,a} + R_{3,c}} = 0,2961 * \frac{1466,7692}{1466,7692 + 482,9231} \, A = \mathbf{0,2228 \, A}$$

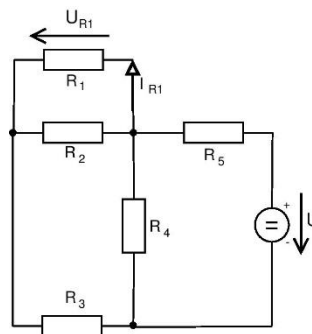
$$U_{R_3} = I_2 * R_3 = 0,2225 * 330 \, V = \mathbf{73,5240 \, V}$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Theveninovy věty.

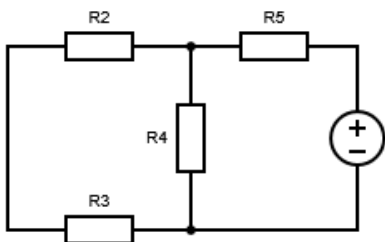
Varianta: **B**

$U=100V$, $R_1=50\Omega$, $R_2=310\Omega$, $R_3=610\Omega$, $R_4=220\Omega$, $R_5=570\Omega$

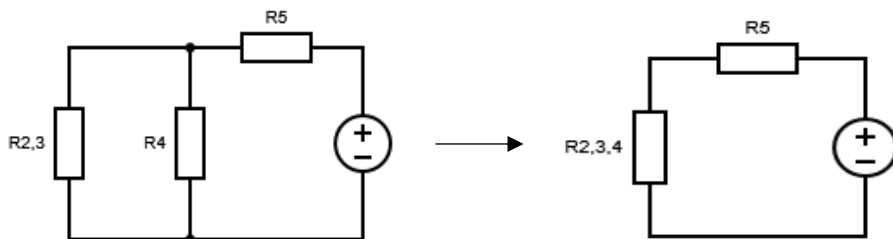


Napětí:

Napětí pomyslného zdroje se rovná U_{R2} v obvodu bez rezistoru R_1 .



Postupným zjednodušováním obvodu vypočítám toto napětí:



$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 310 + 610 \, \Omega = 920 \, \Omega$$

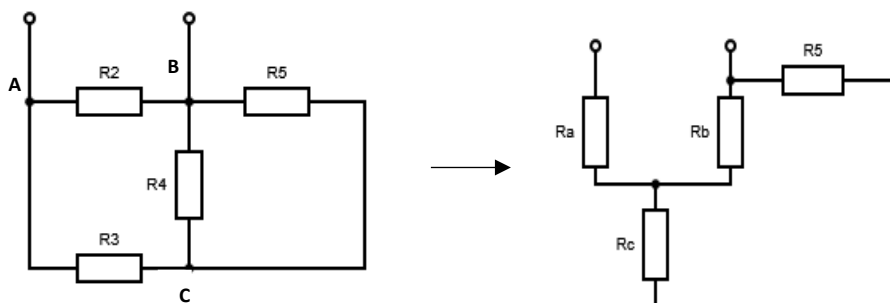
$$R_{2,3,4} = \frac{R_{2,3} * R_4}{R_{2,3} + R_4} = \frac{920 * 220}{920 + 220} = 177,5439 \, \Omega$$

$$U_{R_{2,3,4}} = U * \frac{R_{2,3,4}}{R_{2,3,4} + R_5} = 100 * \frac{177,5439}{177,5439 + 570} \, \Omega = 23,7503 \, V$$

$$U_{R2} = U_{R_{2,3,4}} * \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 23,7503 * \frac{310}{310 + 610} \, V = 8,0028 \, V$$

Vnitřní odpor:

Trojúhelník nejprve převedeme na hvězdu:

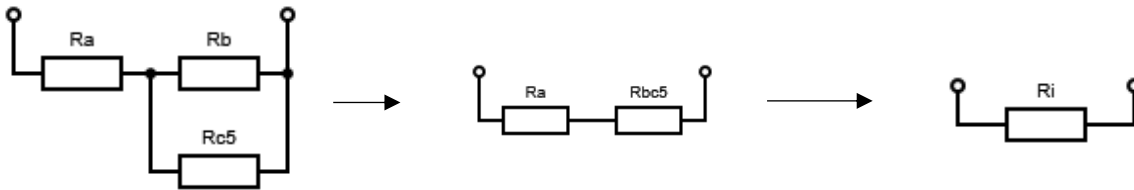


$$R_a = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{310 * 610}{310 + 610 + 220} \Omega = 165,8772 \Omega$$

$$R_b = \frac{R_2 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{310 * 220}{310 + 610 + 220} \Omega = 59,8246 \Omega$$

$$R_c = \frac{R_3 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{610 * 220}{310 + 610 + 220} \Omega = 117,7193 \Omega$$

Dále upravíme zjednodušováním:



$$R_{c,5} = R_c + R_5 = 117,7193 + 570 \Omega = 687,7193 \Omega$$

$$R_{b,c,5} = \frac{R_{c,5} * R_b}{R_{c,5} + R_b} = \frac{687,7193 * 59,8246}{687,7193 + 59,8246} \Omega = 55,0369 \Omega$$

$$R_i = R_a + R_{b,c,5} = 165,8772 + 55,0369 \Omega = 220,9141 \Omega$$

$$U_0 = U_{R_2} = 8,0028 V$$

Nyní zbývá už jen vypočítat I_{R_1} a U_{R_1} podle Ohmova zákona:

$$I_{R_1} = \frac{U_0}{R_i + R_1} = \frac{8,0028}{220,9141 + 50} A = \mathbf{0,0295 A}$$

$$U_{R_1} = I_{R_1} * R_1 = 0,0295 * 50 V = \mathbf{1,4750 V}$$

Příklad 3

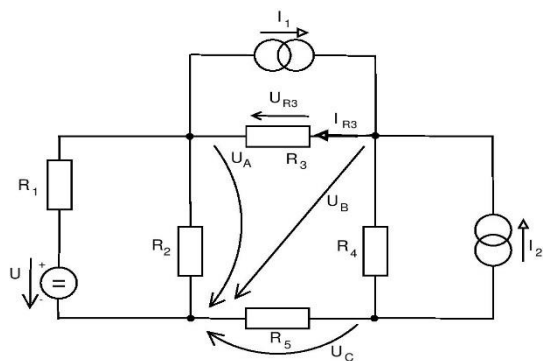
Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} .

Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

Varianta: F

$U=145V, I_1=0,75, I_2=0,85$

$R_1=48\Omega, R_2=44\Omega, R_3=53\Omega, R_4=36\Omega, R_5=25\Omega$



Vyjádření proudů na rezistorech pomocí uzlových napětí:

$$I_{R1} = \frac{U - U_A}{R1}, \quad I_{R2} = \frac{U_A}{R2}, \quad I_{R3} = \frac{U_B - U_A}{R3}, \quad I_{R4} = \frac{U_B - U_C}{R4}, \quad I_{R5} = \frac{U_C}{R5}$$

Vytvoření rovnice pro uzel A:

$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} - I_1 = 0$$

$$\frac{U - U_A}{R1} - \frac{U_A}{R2} + \frac{U_B - U_A}{R3} - I_1 = 0 \quad /*R1 \quad /*R2 \quad /*R3$$

$$R2 * R3 * (U - U_A) - R1 * R3 * U_A + R1 * R2 * (U_B - U_A) - R1 * R2 * R3 * I_1 = 0$$

$$338140 - 2332U_A - 2544U_A + 2112U_B - 2112U_A - 83952 = 0$$

$$6988U_A - 2112U_B = 254188 \quad /*\frac{1}{4}$$

$$1747U_A - 528U_B = 63547$$

Vytvoření rovnice pro uzel B:

$$I_1 + I_2 - I_{R3} - I_{R4} = 0$$

$$I_1 + I_2 - \frac{U_B - U_A}{R3} - \frac{U_B - U_C}{R4} = 0 \quad /*R3 \quad /*R4$$

$$R3 * R4 * I_1 + R3 * R4 * I_2 - R4 * (U_B - U_A) - R3 * (U_B - U_C) = 0$$

$$1431 + 1621,8 - 36U_B + 36U_A - 53U_B + 53U_C = 0$$

$$36U_A - 89U_B + 53U_C = -3052,8 \quad /*5$$

$$180U_A - 445U_B + 265U_C = -15264$$

Vytvoření rovnice pro uzel C:

$$I_{R4} - I_{R5} - I_2 = 0$$

$$\frac{U_B - U_C}{R4} - \frac{U_C}{R5} - I_2 = 0 \quad /*R4 \quad /*R5$$

$$R5 * (U_B - U_C) - R4 * U_C - R4 * R5 * I_2 = 0$$

$$25U_B - 25U_C - 36U_C - 765 = 0$$

$$25U_B - 61U_C = 765$$

Nyní máme 3 rovnice a 3 neznámých, řešíme maticí (Gaussova metoda):

$$\begin{pmatrix} 1747 & -528 & 0 & 63547 \\ 180 & -445 & 265 & -15264 \\ 0 & 25 & -61 & 765 \end{pmatrix} \begin{matrix} /*(-180) \\ /*1747 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1747 & -528 & 0 & 63547 \\ 0 & \frac{-682375}{1747} & 265 & \frac{-38104668}{1747} \\ 0 & 25 & -61 & 765 \end{pmatrix} \begin{matrix} /*27295 \\ /*1747 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1747 & -528 & 0 & 63547 \\ 0 & 25 & -61 & 765 \\ 0 & \frac{-682375}{1747} & 265 & \frac{-38104668}{1747} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1747 & -528 & 0 & 63547 \\ 0 & 25 & -61 & 765 \\ 0 & 0 & \frac{-1202040}{1747} & \frac{-17223993}{1747} \end{pmatrix}$$

Výpočet jednotlivých uzlových napětích:

$$U_C = \frac{-17223993}{-1202040} V = \mathbf{14,329 V}$$

$$U_B = \frac{765+61U_C}{25} = \frac{765+61 \cdot 14,329}{25} = \mathbf{65,5628 V}$$

$$U_A = \frac{63547+528 \cdot U_B}{1747} = \frac{63547+528 \cdot 65,5628}{1747} = \mathbf{56,1901 V}$$

Výpočet napětí a proudu na rezistoru R3:

$$U_{R3} = U_B - U_A = 65,5628 - 56,1901 V = \mathbf{9,3727 V}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R3} = \frac{9,3727}{53} A = \mathbf{0,1768 A}$$

Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C2} = U_{C2} \sin(2\pi ft + \varphi_{C2})$ určete jU_{C2} a φ_{C2} .

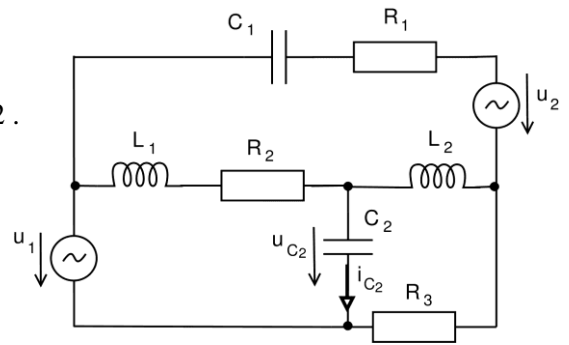
Použijte metodu smyčkových proudů.

Varianta: **D**

$U_1=45V$, $U_2=50V$, $R_1=13\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=13\Omega$

$L_1=180mH$, $L_2=90mH$, $C_1=210\mu F$, $C_2=75\mu F$, $f=85Hz$

$t = \frac{\pi}{2\omega}$, $\omega = 2\pi f$



Výpočet napětí zdrojů:

$$u_1 = U_1 \sin(\omega t) = U_1 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2\omega}\right) = U_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U_1 \cdot 1 = U_1 = 45V$$

$$u_2 = U_2 \sin(\omega t) = U_2 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2\omega}\right) = U_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U_2 \cdot 1 = U_2 = 50V$$

Výpočet impedancí prvků obvodu:

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 2\pi f \cdot L_1 = j \cdot 2\pi 85 \cdot 0,18 = 96,133j$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j \cdot 2\pi f \cdot L_2 = j \cdot 2\pi 85 \cdot 0,09 = 48,066j$$

$$Z_{C1} = \frac{-j}{\omega C_1} = \frac{-j}{2\pi f C_1} = \frac{-j}{2\pi 85 \cdot 0,00021} = -8,916j$$

$$Z_{C2} = \frac{-j}{\omega C_2} = \frac{-j}{2\pi f C_2} = \frac{-j}{2\pi 85 \cdot 0,000085} = -24,965j$$

Sestavení soustavy rovni pro jednotlivé smyčky:

$$A: u_2 + Z_{L2} \cdot I_A - Z_{L2} \cdot I_C + R_2 \cdot I_A - R_2 \cdot I_B + Z_{L1} \cdot I_A - Z_{L1} \cdot I_B + Z_{C1} \cdot I_A + R_1 \cdot I_A = 0$$

$$B: -u_1 + Z_{L1} \cdot I_B - Z_{L1} \cdot I_A + R_2 \cdot I_B - R_2 \cdot I_A + Z_{C2} \cdot I_B - Z_{C2} \cdot I_C = 0$$

$$C: -Z_{C2} \cdot I_C + Z_{C2} \cdot I_B + Z_{L2} \cdot I_C - Z_{L2} \cdot I_A + R_3 \cdot I_C = 0$$

$$A: I_A \cdot (Z_{L2} + R_2 + Z_{L1} + Z_{C1} + R_1) + I_B \cdot (-R_2 - Z_{L1}) + I_C \cdot (-Z_{L2}) = -u_2$$

$$B: I_A \cdot (-Z_{L1} - R_2) + I_B \cdot (Z_{L1} + R_2 + Z_{C2}) + I_C \cdot (-Z_{C2}) = u_1$$

$$C: I_A \cdot (-Z_{L2}) + I_B \cdot (Z_{C2}) + I_C \cdot (-Z_{C2} + Z_{L2} + R_3) = 0$$

Ze soustavy rovnic získáváme matici A, vektor smyčkových proudů X a vektor výsledků rovnic Y:

$$A = \begin{pmatrix} Z_{L2} + R_2 + Z_{L1} + Z_{C1} + R_1 & -R_2 - Z_{L1} & -Z_{L2} \\ -Z_{L1} - R_2 & Z_{L1} + R_2 + Z_{C2} & -Z_{C2} \\ -Z_{L2} & Z_{C2} & -Z_{C2} + Z_{L2} + R_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po dosazení získáme tyto matice (výpočty v MATLABu viz. příloha „Př. 4 – Matice.m“):

$$A = \begin{pmatrix} 28 + 135.283j & -15 - 96.133j & -48.066j \\ -15 - 96.133j & 15 + 71.168j & 24.965j \\ -48.066j & -24.965j & 13.000 + 73.031j \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -50 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Využijeme vzorce } XA = Y \quad \longrightarrow \quad X = Y \setminus A = A \setminus Y$$

Výjde nám vektor:

$$X = \begin{pmatrix} 0.51896 + 0.54833j \\ 0.65025 - 0.01863j \\ 0.48536 + 0.44092j \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} I_A &= 0.51896 + 0.54833j \\ I_B &= 0.65025 - 0.01863j \\ I_C &= 0.48536 + 0.44092j \end{aligned}$$

Výpočet proudu v kondenzátoru C_2 :

$$I_{C2} = I_C - I_B = 0.48536 + 0.44092j - 0.65025 + 0.01863j = -0,1648 + 0,4595j$$

Výpočet napětí na kondenzátoru C_2 :

$$u_{C2} = I_{C2} * Z_{C2} = (-0,1648 + 0,4595j) * (-24,965j) = 11,4714 + 4,1142j$$

Výpočet amplitudy:

$$U_{C2} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{11,4714^2 + 4,1142^2} = \mathbf{12,1869 V}$$

Výpočet fázového posunu:

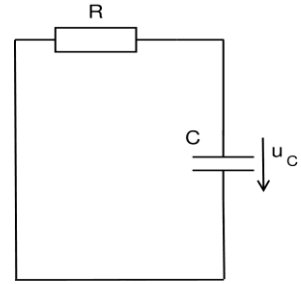
$$\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right) = \arctg\left(\frac{11,4714}{4,1142}\right) = \arctg(0,358648) = \mathbf{19^\circ 43' 48.97''}$$

Příklad 5

Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_c = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Varianta: **B**

$C=10\text{F}$, $R=20\Omega$, $u_c(0)=8\text{V}$



Sestavení diferenciální rovnice:

II. Kirchhoffův zákon: $u_R(t) + u_C(t) = 0$

Ohmův zákon: $U = R * I$

Proud v RC článku: $I(t) = C * \frac{du_C(t)}{dt}$

Dosadíme druhou rovnici do první:

$$R * I + u_C(t) = 0$$

Po dosazení třetí rovnice získáváme diferenciální rovnici 1. řádu:

$$RC * \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad \dots \text{s číselnými hodnotami: } 200 * \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

Výpočet analytického řešení:

Obecné řešení: $u_C = K(t) * e^{\lambda * t}$

Dosadíme do diferenciální rovnice: $RC * \frac{dK(t) * e^{\lambda * t}}{dt} + K(t) * e^{\lambda * t} = 0$

$$RC * \lambda * K(t) * e^{\lambda * t} + K(t) * e^{\lambda * t} = 0$$

$$RC * \lambda * e^{\lambda * t} + e^{\lambda * t} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

Dosadíme do obecného řešení: $u_C = K(t) * e^{-\frac{1}{RC} * t}$

$$u_C = K(t) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

Zbývá vypočítat neznámou $K(t)$, derivujeme tedy obecné řešení:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{dK(t)}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} + \left(-\frac{1}{RC}\right) K(t) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

Do diferenciální rovnice dosadíme obecné řešení za $u_C(t)$ a derivované obecné řešení za $\frac{du_C(t)}{dt}$:

$$RC * \left(\frac{dK(t)}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} + \left(-\frac{1}{RC}\right) K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} \right) + K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$RC \frac{dK(t)}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} + RC \left(-\frac{1}{RC}\right) K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} + K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$RC \frac{dK(t)}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} - K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} + K(t) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$RC \frac{dK(t)}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = 0$$

$$\int \frac{dK(t)}{dt} = \int 0$$

$$K(t) = k$$

Dosadíme do obecného řešení:

$$u_C = k * e^{-\frac{t}{RC}}$$

Z počáteční podmínky víme, že $u_C(0) = u_{C0}$, využijeme to tedy k dopočítání konstanty k :

$$\begin{array}{l} u_{C0} = k * e^{-\frac{0}{RC}} \\ u_{C0} = k \end{array} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u_C = u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Po dosazení číselných hodnot:

$$u_C = 8 * e^{-\frac{t}{200}}$$

Kontrola dosazením do diferenciální rovnice:

$$R * C * \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$R * C * \frac{du_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}}}{dt} + u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$R * C * \frac{-1}{RC} * u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} + u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$-u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} + u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}} = u_C(0) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$0 = 0$$

Tabulka s výsledky:

Příklad	Varianta	Výsledek
1	D	$I_{R3} = 0,2228A, U_{R3} = 73,5240V$
2	B	$I_{R1} = 0,0295A, U_{R1} = 1,4750V$
3	F	$I_{R3} = 0,1748A, U_{R3} = 9,3727V$
4	D	$U_C = 12,1869\text{ V}, \varphi = 19^\circ 43' 48.97''$
5	B	$u_C = 8 * e^{-\frac{t}{200}}$