

Péndulo Doble

Física Computacional. Grupo A1

Pedro Jesús Lorente Molina

20 de junio de 2024



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Resumen

En el estudio de los sistemas dinámicos, los conceptos de coeficientes de Lyapunov y atractores son fundamentales para entender el comportamiento de sistemas caóticos y complejos. En esta memoria se va a estudiar y explicar estos conceptos, enfocándose particularmente en su aplicación en los mapas de Poincaré utilizando el caso de estudio de un péndulo doble resuelto mediante el algoritmo de Runge-Kutta.

Índice

1. Introducción y Fundamento Teórico	3
1.1. Coeficientes de Lyapunov	3
1.2. Atractores	3
1.3. Mapas de Poincaré	4
1.4. Relación entre Coeficientes de Lyapunov y Atractores en Mapas de Poincaré	5
2. Caso de Estudio: El Péndulo Doble. Resultados	5
2.1. Mapas de Poincaré para el Péndulo Doble	7
2.2. Coeficientes de Lyapunov para el Péndulo Doble	10
3. Optimización. Comparación de Rendimiento: PC vs Joel	13
4. Conclusiones	14
5. Anexo	15
6. Referencias	15

1. Introducción y Fundamento Teórico

1.1. Coeficientes de Lyapunov

Los coeficientes de Lyapunov son una medida cuantitativa de la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema dinámico. Estos coeficientes, nombrados en honor al matemático ruso Aleksandr Lyapunov, caracterizan la tasa de divergencia o convergencia de trayectorias cercanas en el espacio de fases. Un sistema con al menos un coeficiente de Lyapunov positivo es considerado caótico, lo cual implica que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden llevar a comportamientos divergentes en el sistema [1].

Para deducir el coeficiente de Lyapunov, se consideran dos trayectorias $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}'(t)$ en el espacio de fases, con una distancia inicial infinitesimal $d(0) = \|\mathbf{x}'(0) - \mathbf{x}(0)\|$. Bajo la evolución del sistema, la distancia entre estas trayectorias en el tiempo t es $d(t) = \|\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)\|$.

La relación de separación de las trayectorias en el tiempo puede ser expresada como:

$$d(t) = d(0)e^{\lambda_i t} \quad (1)$$

Al tomar el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\ln d(t) = \ln d(0) + \lambda_i t \quad (2)$$

Reordenando para resolver λ_i , se tiene:

$$\lambda_i = \frac{1}{t} (\ln d(t) - \ln d(0)) \quad (3)$$

Si se toma el límite cuando t tiende a infinito, se llega a la definición formal del coeficiente (o exponente) de Lyapunov:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right) \quad (4)$$

donde $d(t)$ representa la distancia entre dos trayectorias infinitesimalmente cercanas en el tiempo t , y se calcula en función de la dinámica del sistema y cómo las trayectorias divergen o convergen con el tiempo. Esta expresión mide la tasa exponencial promedio de separación de dos trayectorias inicialmente cercanas en el espacio de fases [2].

Por lo que, este coeficiente proporciona una medida cuantitativa del comportamiento caótico del sistema, indicando si pequeñas diferencias en las condiciones iniciales se amplifican exponencialmente con el tiempo.

1.2. Atractores

Un atractor es un conjunto hacia el cual un sistema dinámico evoluciona después de un largo período de tiempo. Los atractores pueden clasificarse en diferentes tipos, como puntos fijos, ciclos límites, toros y atractores extraños. En sistemas caóticos, los atractores extraños son comunes y exhiben una estructura fractal compleja [3].

Los atractores extraños se caracterizan por tener dimensiones fractales y por la presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que se manifiesta en la existencia de al menos un coeficiente de Lyapunov positivo. Esto significa que trayectorias que comienzan muy cerca una de la otra pueden divergir exponencialmente con el tiempo [1].

1.3. Mapas de Poincaré

Los mapas de Poincaré, nombrados en honor al matemático Henri Poincaré, consisten en el conjunto de puntos que se obtiene al intersectar un plano arbitrario con la trayectoria completa de un sistema dinámico [5]. Esta técnica permite reducir uno de los grados de libertad del sistema, lo que facilita el análisis del comportamiento caótico del sistema simplificado. Es particularmente útil cuando se estudia un sistema dinámico descrito por cuatro ecuaciones de movimiento (como en el caso del péndulo doble) y una restricción (energía constante en sistemas hamiltonianos), ya que el mapa de Poincaré resultante será bidimensional y, por lo tanto, más fácil de visualizar.

Este método implica tomar cortes transversales del espacio de fases, permitiendo observar las intersecciones de las trayectorias con estos cortes [2]. En la Figura 1 se presenta un esquema que ilustra este concepto de manera intuitiva:

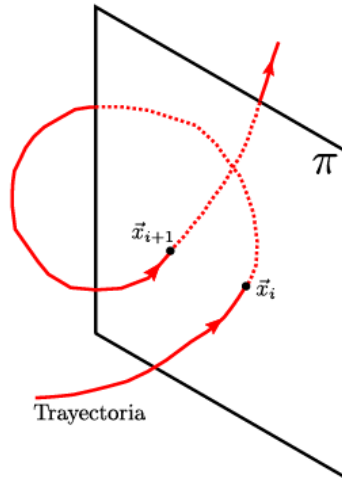


Figura 1: Esquema del cálculo del mapa de Poincaré para un sistema dinámico cualquiera. Fuente: [6]

Para un sistema continuo descrito por las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Un mapa de Poincaré se define tomando una superficie de sección Σ en el espacio de fases y registrando los puntos en los cuales las trayectorias intersectan esta superficie. Esto convierte un sistema continuo en un sistema discreto, permitiendo analizar el comportamiento dinámico mediante un conjunto de puntos discretos [3].

1.4. Relación entre Coeficientes de Lyapunov y Atractores en Mapas de Poincaré

En el contexto de los mapas de Poincaré, los coeficientes de Lyapunov se utilizan para caracterizar la estabilidad y el comportamiento caótico de los atractores. Un atractor extraño en un mapa de Poincaré exhibirá coeficientes de Lyapunov positivos, indicando la presencia de caos. Estos mapas permiten visualizar la estructura de los atractores y analizar la dinámica del sistema de una manera más manejable [4].

El estudio de los mapas de Poincaré facilita la identificación de estructuras periódicas y caóticas en el sistema. Por ejemplo, en un atractor extraño, la intersección de la trayectoria con la superficie de sección formará un conjunto fractal, lo cual es indicativo de la complejidad del sistema [3].

2. Caso de Estudio: El Péndulo Doble. Resultados

Para ilustrar estos conceptos, consideraremos el sistema del péndulo doble, el cual es un sistema compuesto por dos masas m_1 y m_2 unidas por dos alambres de longitud l_1 y l_2 . El Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\psi}^2 - (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\phi) - m_2gl_2(1 - \cos\psi). \quad (6)$$

El Hamiltoniano correspondiente al sistema es:

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\psi}^2 + m_2l_1l_2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos(\psi - \phi) + (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\phi) + m_2gl_2(1 - \cos\psi). \quad (7)$$

Para simplificar, utilizaremos los parámetros $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 1$, lo cual reduce el Hamiltoniano a:

$$H = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos(\psi - \phi) + 2g(1 - \cos\phi) + g(1 - \cos\psi). \quad (8)$$

Se estudiarán varios casos con diferentes energías ($E = 1, 3, 5, 10, 15$) fijando una velocidad angular ($\dot{\psi} = 0$) y obteniendo la velocidad angular restante al fijar los ángulos iniciales y la energía.

En las figuras 2, 3, 4 se representan algunos fotogramas de la simulación del movimiento del péndulo doble (10 millones de iteraciones y un paso de $H = 0,0001$), para valores de energía 1, 5, 15 respectivamente, realizada con el programa *pendulum.c* y visualizada con *animacion_pendulum.py* (ver 5).

De esta forma, se comprueba de forma inicial que el funcionamiento del programa es correcto. Además, es posible corroborar que es físicamente correcto mediante las representaciones del hamiltoniano, donde se puede ver en la figura 5 que para cualquier energía inicial definida se conserva esta energía. Para realizar estas representaciones se ha usado el programa *graf-H.py* (ver 5).

Simulación del péndulo doble para energía $E = 1$

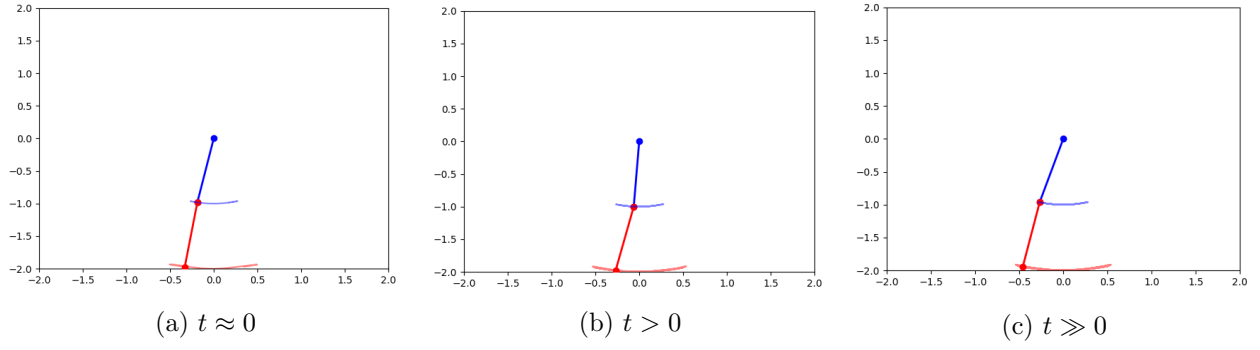


Figura 2: Fotogramas de la simulación para $E = 1$ en diferentes tiempos.

Simulación del péndulo doble para energía $E = 5$

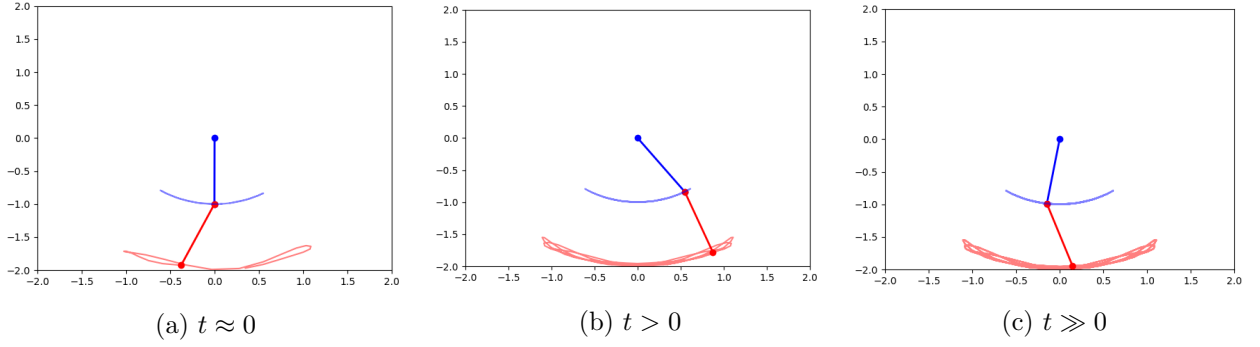


Figura 3: Fotogramas de la simulación para $E = 5$ en diferentes tiempos.

Simulación del péndulo doble para energía $E = 15$

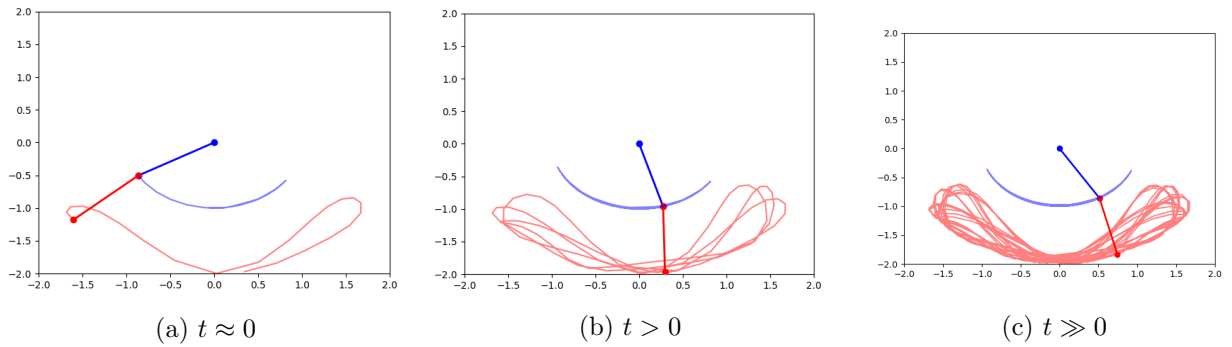


Figura 4: Fotogramas de la simulación para $E = 15$ en diferentes tiempos.

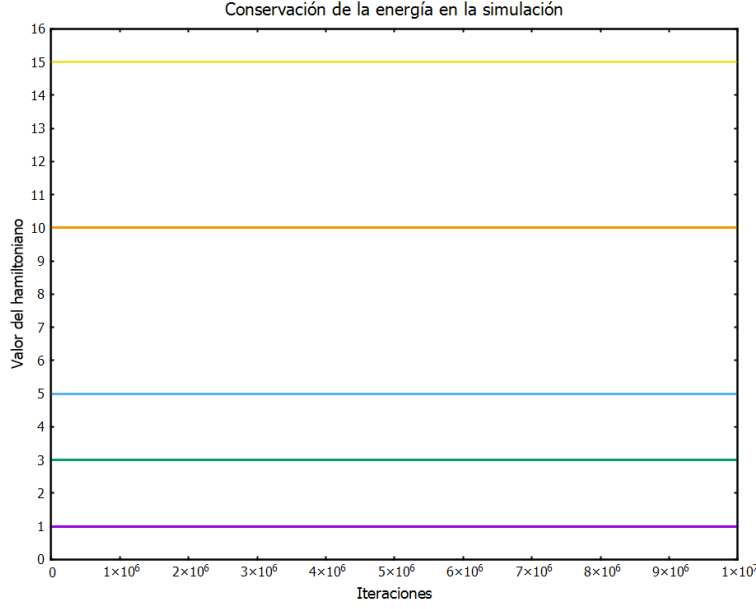


Figura 5: Conservación de la energía en todas las simulaciones realizadas. Se observa que la energía se mantiene constante en el tiempo para cualquier energía inicial, lo que indica que el algoritmo de simulación conserva correctamente la energía del sistema.

Por otro lado, se observa de manera cualitativa, cómo para valores de energía más bajos se tiene un sistema cuasi-estable, mientras que para valores energéticos mayores el sistema se vuelve aparentemente caótico. Para estudiar estos comportamientos de una forma más detallada y analítica, se realiza a continuación una serie de representaciones de los mapas de Poincaré para los distintos valores de energía que serán analizados junto a los coeficientes de Lyapunov.

2.1. Mapas de Poincaré para el Péndulo Doble

Se dibujan los mapas de Poincaré para ψ y ϕ para las distintas energías y condiciones iniciales (los parámetros de simulación son 10 millones de iteraciones y un paso de $H = 0,0001$), discutiendo el concepto de atractor. Además, se realiza el mismo análisis para los parámetros ψ y $\dot{\psi}$, así como ϕ y $\dot{\phi}$.

Mapas de Poincaré de ψ y ϕ para las distintas energías

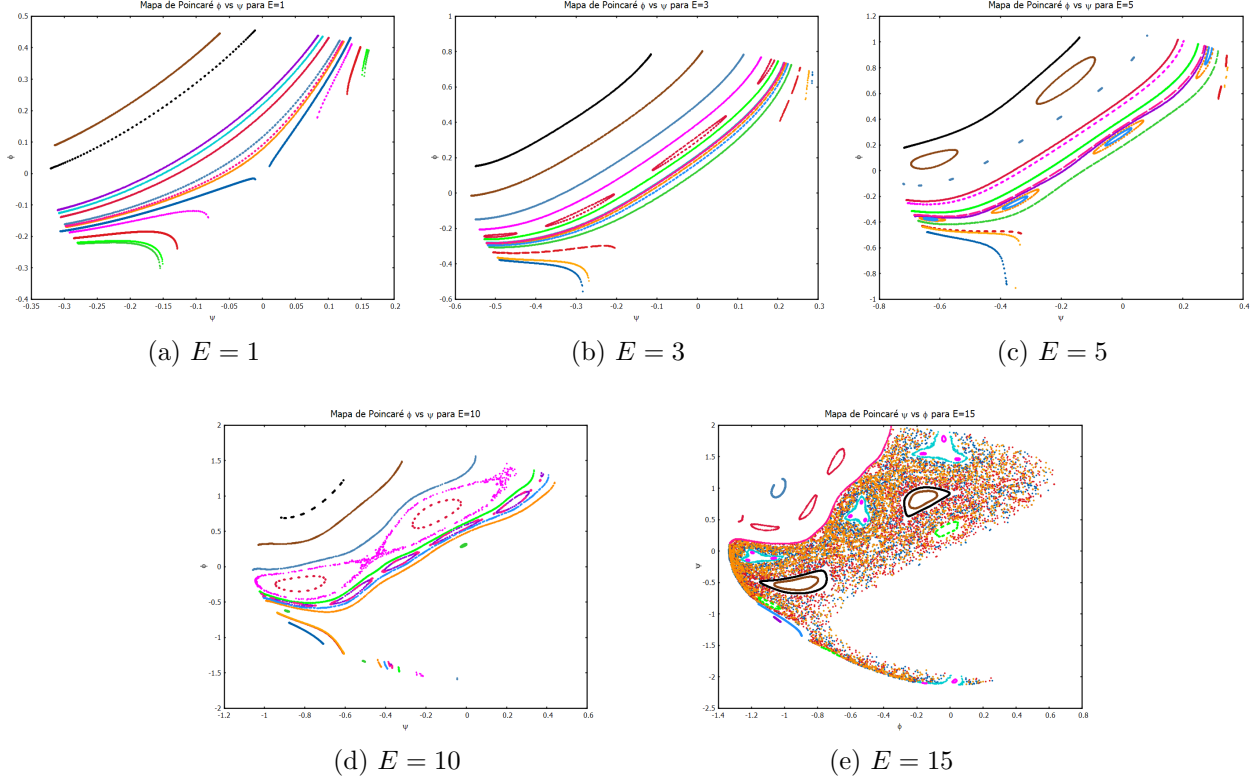


Figura 6: Mapas de Poincaré de ψ y ϕ para distintas energías. Condición para la sección: $\dot{\phi} = 0$

Para las diferentes energías, los mapas de Poincaré de ψ y ϕ muestran cómo las trayectorias del péndulo doble evolucionan en el espacio de fases. A medida que la energía aumenta, se observa una transición desde un comportamiento más regular y ordenado a un comportamiento más caótico. Con energías bajas, las trayectorias tienden a ser más periódicas y predecibles, formando estructuras cerradas en el mapa de Poincaré. Sin embargo, a medida que la energía aumenta, las trayectorias se vuelven más irregulares y dispersas, indicando la presencia de caos en el sistema.

Mapas de Poincaré de ψ y $\dot{\psi}$ para las distintas energías

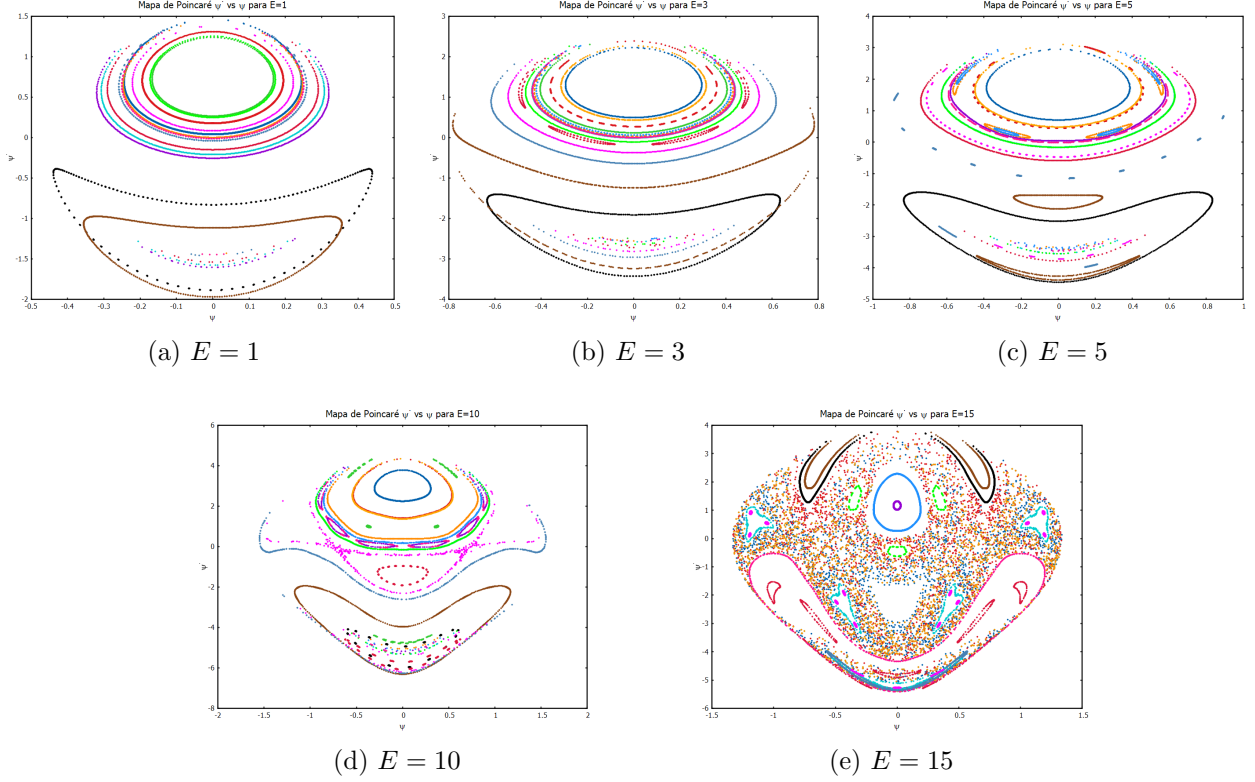


Figura 7: Mapas de Poincaré de ψ y $\dot{\psi}$ para distintas energías. Condición para la sección: $\phi = 0$

En los mapas de Poincaré de ψ y $\dot{\psi}$, se puede observar cómo la velocidad angular de la segunda masa del péndulo cambia en función del ángulo ψ . Para energías bajas, las trayectorias muestran un comportamiento más ordenado y menos disperso, mientras que con energías más altas, las trayectorias se vuelven más caóticas y difusas. Esto indica que con mayor energía, el sistema tiene una mayor sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que resulta en una dinámica más impredecible y compleja.

Mapas de Poincaré de ϕ y $\dot{\phi}$ para las distintas energías

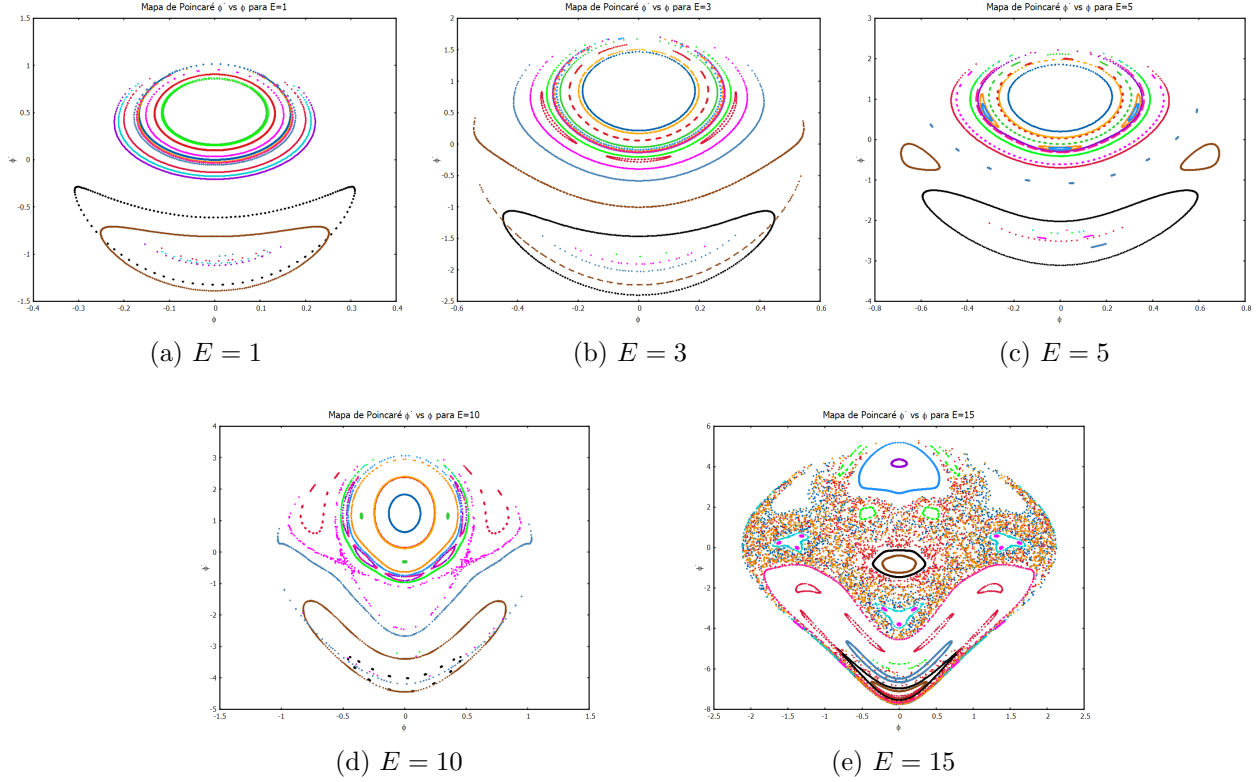


Figura 8: Mapas de Poincaré de ϕ y $\dot{\phi}$ para distintas energías. Condición para la sección: $\psi = 0$

Los mapas de Poincaré de ϕ y $\dot{\phi}$ muestran cómo la velocidad angular de la primera masa del péndulo varía con respecto al ángulo ϕ . En energías bajas, las trayectorias suelen ser más organizadas y menos dispersas, indicando un comportamiento más regular. Sin embargo, a medida que la energía aumenta, las trayectorias se dispersan más, mostrando un comportamiento caótico. Este fenómeno se debe a la creciente influencia de las fuerzas no lineales en el sistema, que provocan una mayor sensibilidad a las condiciones iniciales y resultan en una dinámica más compleja y difícil de predecir.

2.2. Coeficientes de Lyapunov para el Péndulo Doble

Se calculan los coeficientes de Lyapunov en función de las condiciones iniciales y se realiza un gráfico que muestre la estabilidad de las soluciones frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales para distintas energías (los parámetros de simulación son 10 millones de iteraciones y un paso de $H = 0,0001$).

Para observar la relación entre la energía y el exponente de Lyapunov, partimos de la definición realizada previamente de los exponentes de Lyapunov. Recordando la definición de los coeficientes λ_i :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right) \quad (9)$$

Para sistemas físicos, la energía E del sistema influye en la dinámica y, por lo tanto, en la tasa de separación de las trayectorias. Se supone que la distancia entre trayectorias $d(t)$ puede expresarse como una función de la energía del sistema:

$$d(t) \propto e^{\lambda_i(E)t} \quad (10)$$

Esto implica que el exponente de Lyapunov λ_i también depende de la energía E .

Para sistemas caóticos, se observa empíricamente en la figura 9 que el exponente de Lyapunov λ_i y la energía E a menudo tienen una relación de potencia.

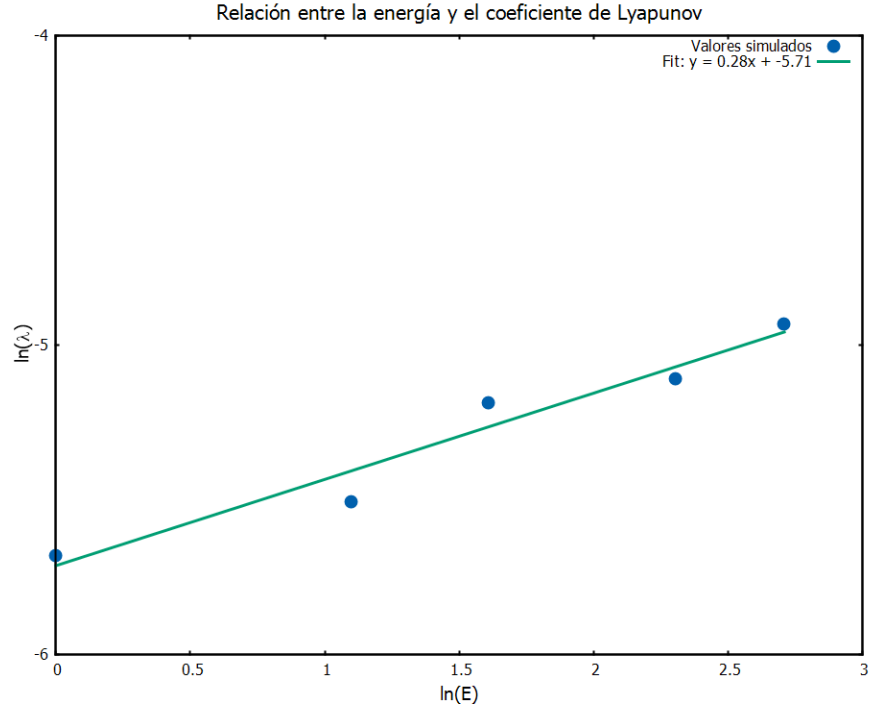


Figura 9: Coeficiente de Lyapunov en función de la energía para el sistema del péndulo doble.

Es decir, podemos escribir:

$$\lambda_i(E) \propto E^\alpha \quad (11)$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación, se obtiene:

$$\ln \lambda_i(E) = \alpha \ln E + \ln k \quad (12)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Esta última ecuación es de la forma:

$$y = mx + c \quad (13)$$

donde $y = \ln \lambda_i(E)$, $x = \ln E$, $m = \alpha$ y $c = \ln k$. Esto muestra que existe una relación lineal entre $\ln \lambda_i(E)$ y $\ln E$, donde este caso al ajustarse los datos, se tiene que:

$$\ln \lambda_i(E) = 0,28 \ln E - 5,71 \quad (14)$$

Ahora, se va a analizar cómo evoluciona la estabilidad de las soluciones frente a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Para ello, se simula de forma paralela un sistema con condiciones iniciales ligeramente perturbadas y se compara el resultado final, obteniéndose así diferentes valores del coeficiente de Lyapunov según estas pequeñas perturbaciones aplicadas que nos dará información sobre la estabilidad y estado del sistema.

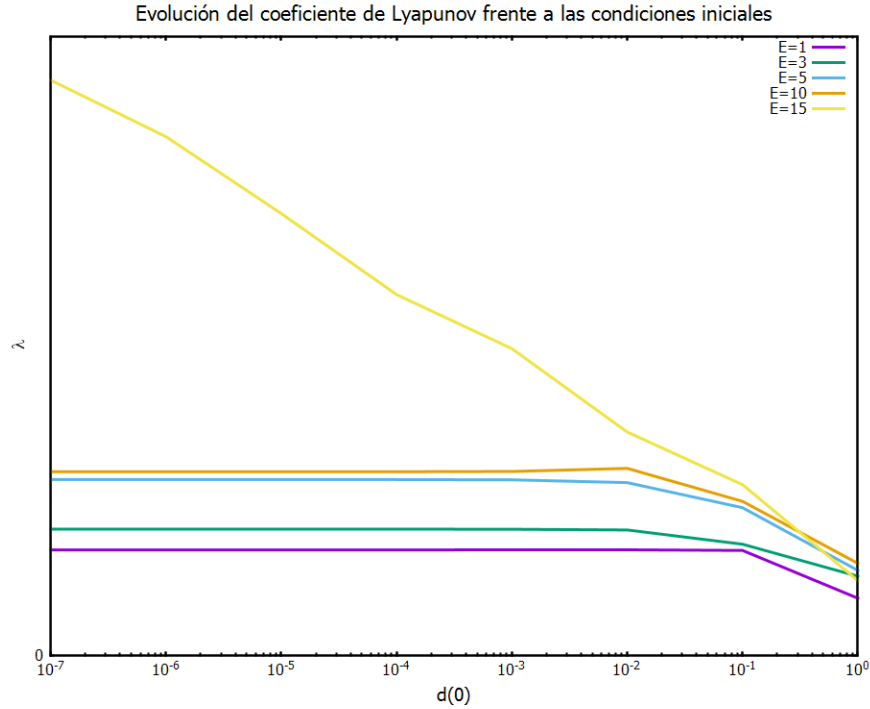


Figura 10: Coeficiente de Lyapunov en función de la variación en las condiciones iniciales para las distintas energías.

En la Figura 10, se observa que para energías bajas ($E = 1$), el coeficiente de Lyapunov es menor, indicando un sistema más estable y predecible. A medida que la energía aumenta ($E = 3, 5$), el coeficiente de Lyapunov también aumenta, sugiriendo un comportamiento más caótico. Para energías altas ($E = 10, 15$), el coeficiente de Lyapunov es significativamente mayor, indicando un sistema altamente caótico y extremadamente sensible a las condiciones iniciales.

Además, es notable apreciar que para el caso de mayor energía, el coeficiente de Lyapunov aumenta conforme menor es la diferencia aplicada en las condiciones iniciales. Este fenómeno se puede entender considerando la naturaleza del caos en sistemas de alta energía. A mayores energías, el sistema se encuentra en un régimen altamente caótico donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden provocar una rápida divergencia de las trayectorias en el espacio de fases. Esto se traduce en un coeficiente de Lyapunov elevado, que refleja la alta sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales. En otras palabras, cuanto más caótico es el sistema, más rápidamente divergen las trayectorias cercanas, lo que resulta en un aumento del coeficiente de Lyapunov para diferencias iniciales menores.

Por otro lado, para niveles de energía más bajos, el sistema no exhibe un comportamiento caótico tan pronunciado. En estos casos, las trayectorias en el espacio de fases tienden a ser más estables y predecibles. Como resultado, el coeficiente de Lyapunov se mantiene relativamente constante independientemente de la diferencia aplicada en las condiciones iniciales. Esto indica que el sistema tiene una menor sensibilidad a las condiciones iniciales y las trayectorias divergen a un ritmo más uniforme. La constancia del coeficiente de Lyapunov en estos casos refleja la estabilidad relativa del sistema en energías bajas, donde las fuerzas no lineales tienen un impacto menor en la dinámica global del sistema.

3. Optimización. Comparación de Rendimiento: PC vs Joel

En esta sección, se compara el rendimiento del mismo código ejecutado en un PC y en el superordenador Joel, sin utilizar hilos, para diferentes tamaños de problema. El objetivo es estudiar el límite en tamaño que cada ordenador puede manejar de manera eficiente y cómo la opción de optimización ‘-O3’ del compilador GCC afecta el tiempo de simulación.

Se ejecutaron múltiples simulaciones variando el tamaño del problema en ambos sistemas, utilizando la opción de optimización ‘-O3’ para maximizar la velocidad de ejecución. La opción ‘-O3’ activa todas las optimizaciones posibles que pueden aumentar la velocidad de ejecución del programa, aunque a costa de un mayor uso de memoria.

La Figura 11 muestra los tiempos de simulación comparando el rendimiento en el PC y Joel utilizando la opción de optimización ‘-O3’. En la gráfica, se observa que los tiempos de simulación en el PC son significativamente mayores en comparación con Joel, especialmente a medida que el tamaño del problema aumenta. Esto indica que el PC alcanza su límite de eficiencia rápidamente, mientras que Joel maneja tamaños de problema más grandes con tiempos de simulación menores debido a su mayor capacidad de procesamiento.

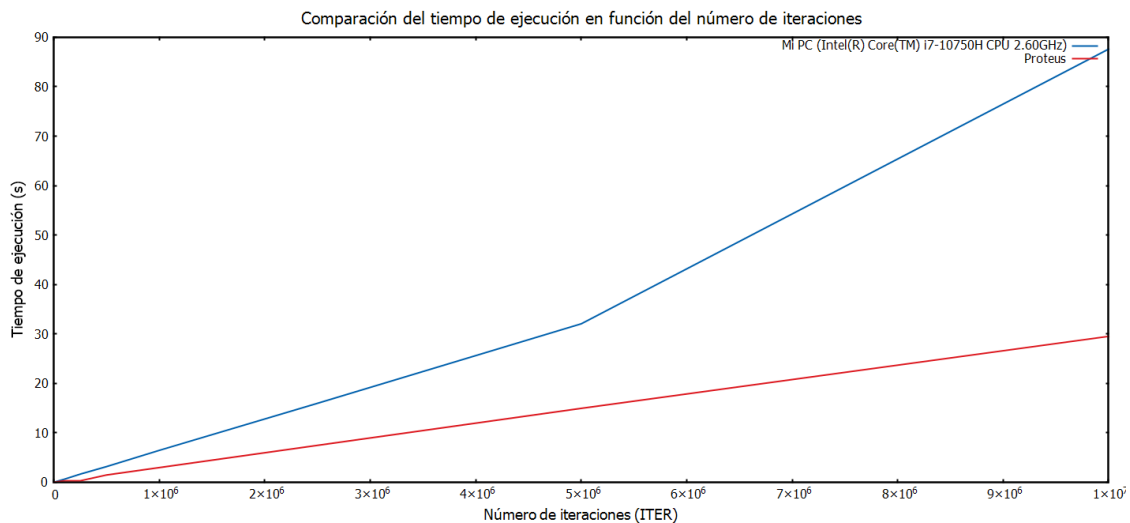


Figura 11: Comparación de tiempos de simulación en el PC y Joel utilizando la opción de optimización ‘-O3’. La gráfica ilustra cómo el tiempo de simulación varía con el tamaño del problema en ambos sistemas.

4. Conclusiones

En este estudio se ha analizado el comportamiento caótico del sistema del péndulo doble mediante la utilización de mapas de Poincaré y el cálculo de los coeficientes de Lyapunov, además de comparar el rendimiento del mismo código en un PC y en el superordenador Joel utilizando la opción de optimización `-O3` del compilador GCC.

Los mapas de Poincaré para diferentes energías han revelado cómo el sistema transita desde un comportamiento regular y predecible a uno caótico a medida que la energía aumenta. En energías bajas, las trayectorias forman estructuras cerradas y periódicas, mientras que en energías altas, las trayectorias se dispersan de manera irregular, indicando la presencia de caos. Esta transición ha sido cuantificada mediante los coeficientes de Lyapunov, donde se ha observado que a mayor energía, el coeficiente de Lyapunov también aumenta, reflejando una mayor sensibilidad a las condiciones iniciales y un comportamiento más caótico.

Específicamente, para energías bajas ($E = 1$), el coeficiente de Lyapunov es menor, indicando un sistema más estable y predecible. A medida que la energía aumenta ($E = 3, 5$), el coeficiente de Lyapunov también aumenta, sugiriendo un comportamiento más caótico. Para energías altas ($E = 10, 15$), el coeficiente de Lyapunov es significativamente mayor, indicando un sistema altamente caótico y extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Para el caso de mayor energía, se ha observado que el coeficiente de Lyapunov aumenta conforme menor es la diferencia aplicada en las condiciones iniciales, lo cual se debe a la naturaleza del caos en sistemas de alta energía, donde pequeñas variaciones pueden provocar una rápida divergencia de las trayectorias.

En cuanto a la comparación de rendimiento, los resultados han mostrado diferencias significativas en la capacidad de manejo y eficiencia entre el PC y Joel. La opción de optimización `-O3` mejora considerablemente los tiempos de simulación en ambos sistemas, pero la mejora es mucho más pronunciada en Joel debido a su capacidad superior de procesamiento. Esto permite a Joel manejar tamaños de problema más grandes con tiempos de simulación menores en comparación con el PC, que alcanza su límite de eficiencia rápidamente.

En conclusión, el estudio del péndulo doble utilizando mapas de Poincaré y coeficientes de Lyapunov ha proporcionado una comprensión detallada del comportamiento caótico del sistema. La comparación de rendimiento entre el PC y Joel ha resaltado la importancia de los recursos computacionales y las optimizaciones de compilación en la simulación de sistemas dinámicos complejos.

5. Anexo

A continuación, se muestra una serie de los diferentes programas utilizados a lo largo de la memoria ([Link Github](#)), ya sea para simular el péndulo doble o para mostrar sus resultados, etc.

- `pendulum.c`: Realiza la simulación numérica del movimiento del péndulo doble utilizando el método de Runge-Kutta. Calcula las posiciones y velocidades angulares de las masas en función del tiempo. Además, calcula los coeficientes de Lyapunov para el sistema del péndulo doble, proporcionando una medida cuantitativa de la sensibilidad a las condiciones iniciales y del comportamiento caótico del sistema.
- `animacion_pendulum.py`: Este programa genera una animación del movimiento del péndulo doble para diferentes valores de energía. Permite visualizar cómo evoluciona el sistema en función del tiempo.
- `graf_H.py`: Este programa grafica el Hamiltoniano del sistema, mostrando cómo se conserva la energía total durante la simulación. Es utilizado para verificar la correcta conservación de la energía en las simulaciones.
- `mapaspoincare.py`: Genera los mapas de Poincaré para diferentes pares de variables del sistema del péndulo doble. Permite visualizar la intersección de las trayectorias del sistema con una sección transversal del espacio de fases.

Para representaciones conjuntas de datos se ha utilizado gnuplot.

6. Referencias

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, 1994.
- [2] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1996.
- [4] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 16, no. 3, pp. 285-317, 1985.
- [5] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 2003. ISBN 0-387-00177-8.
- [6] A. Fernández Canosa, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio, Grado en Ingeniería Aeroespacial, Trabajo Fin de Grado, *Estudio y análisis numérico de sistemas hamiltonianos*, 2016.