Решение матричной игры

1. Условие задачи

Дана матричная игра с матрицей выигрышей игрока A:

	B1	**B2**	**B3**	**B4**
A1	8	7	1	7
A2	3	9	-1	1
A3	2	3	-4	1
A4	6	5	7	6

Игрок A стремится максимизировать выигрыш, игрок B — минимизировать.

---

2. Нижняя и верхняя цена игры

Нижняя цена (максимин)

Для каждой стратегии игрока A находим минимальный выигрыш:

- A1: min(8, 7, 1, 7) = 1
- A2: min(3, 9, -1, 1) = -1
- A3: min(2, 3, -4, 1) = -4
- A4: min(6, 5, 7, 6) = 5

Нижняя цена игры:

```
underline{v} = max(1, -1, -4, 5) = 5
```

Верхняя цена (минимакс)

Для каждой стратегии игрока B находим максимальный выигрыш:

- B1: max(8, 3, 2, 6) = 8
- B2: max(7, 9, 3, 5) = 9
- B3: max(1, -1, -4, 7) = 7
- B4: max(7, 1, 1, 6) = 7

Верхняя цена игры:

```
overline{v} = min(8, 9, 7, 7) = 7
```

Вывод

Так как

```
underline{v} != overline{v},
```

седловая точка отсутствует, и игра не имеет решения в чистых стратегиях.

---

3. Доминирование стратегий

Доминирование по строкам (игрок A)

Стратегия A3 = (2, 3, -4, 1) доминируется стратегией A2 = (3, 9, -1, 1),
так как элементы A2 не меньше соответствующих элементов A3 и хотя бы один строго больше.

Стратегия A3 удаляется.

Доминирование по столбцам (игрок B)

Стратегия B1 = (8, 3, 6) доминируется стратегией B4 = (7, 1, 6),
так как B4 ≤ B1 по всем компонентам.

Стратегия B1 удаляется.

---

4. Упрощённая матрица игры

После исключения доминируемых стратегий получаем матрицу:

	B2	B3	B4
A1	7	1	7
A2	9	-1	1
A4	5	7	6

---

5. Приведение к задаче линейного программирования

Для игрока A

Пусть
p_1, p_2, p_3 — вероятности выбора стратегий **A1, A2, A4** соответственно.

Тогда задача линейного программирования для игрока A имеет вид:

Максимизировать:
v

При условиях:

- $7 \cdot p_1 + 9 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 \ge v$
- $1 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 + 7 \cdot p_3 \ge v$
- $7 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 6 \cdot p_3 \ge v$
- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- $p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0,\ p_3 \ge 0$

---

6. Решение в смешанных стратегиях

(аналитически, симплекс-метод)

В оптимальной точке активные ограничения выполняются как равенства.
Решение соответствующей системы уравнений даёт следующие оптимальные стратегии.

Оптимальная стратегия игрока A

$p = (1/2, 1/4, 1/4)$

Оптимальная стратегия игрока B

$q = (1/4, 1/2, 1/4)$

---

7. Цена игры

Подставляя найденные вероятности, получаем цену игры:

[v = 6]

---

8. Решение с использованием программирования

При решении соответствующей задачи линейного программирования с помощью стандартных алгоритмов (симплекс-метод) получаем те же результаты:

- цена игры: **6**;
- оптимальные смешанные стратегии совпадают с аналитическим решением.

---

9. Итог

- Нижняя цена игры: **5**
- Верхняя цена игры: **7**
- Седловая точка отсутствует
- Цена игры в смешанных стратегиях: **6**

- Оптимальная стратегия игрока A: [(0.5,; 0.25,; 0.25)]
- Оптимальная стратегия игрока B: [(0.25,; 0.5,; 0.25)]