

Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

26 de novembro de 2025



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Aplicação Web
- 6 Conclusões



O Problema

Encontrar uma r -Arborescência Geradora de Custo Mínimo

Dado um r -digafo ponderado (D, w, r) :

- Encontrar uma r -arborescência geradora de custo mínimo de D

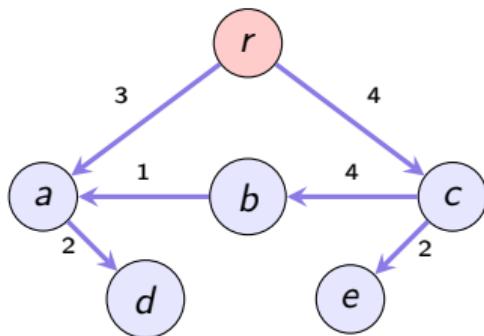
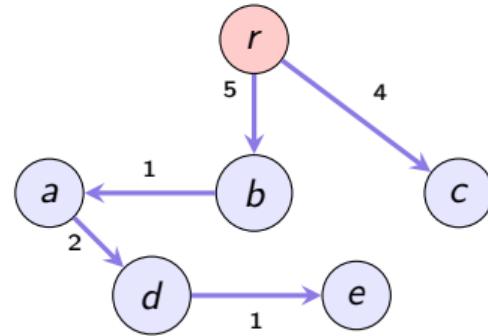
Algoritmos estudados:

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)

Exemplo: r -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 r -Arborescência Geradora

Geradora Mínima

Custo: 16

Custo: 13

Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu-liu-edmonds((D, w, r)):

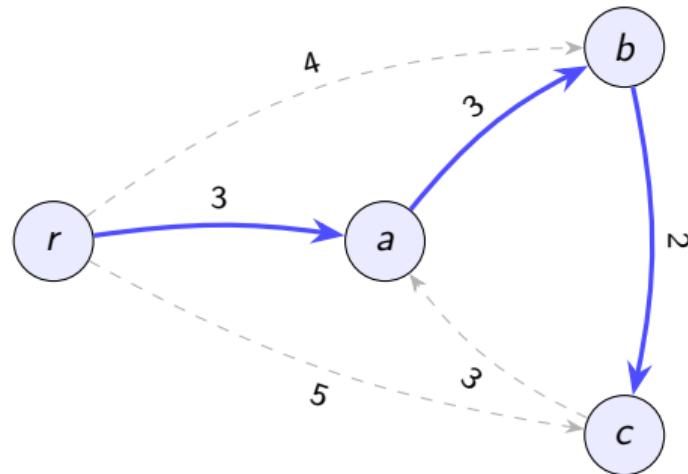
- ① **Reduzir custos:** para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- ② **Construir D_0 :** escolhendo um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
- ③ **Verificar:** se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver D_0**
Caso contrário:
- ④ **Contração:** encontrar ciclo C em D_0 e contrair
- ⑤ **Chamada recursiva:** Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r)
- ⑥ **Devolver:** expandir(T')

Escolha Gulosa

Definição:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de custo mínimo que entra em v :

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$



Propriedade:

Se T é uma r -arborescência, então T tem custo mínimo.

Resultado

$T = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma r -arborescência de custo mínimo!

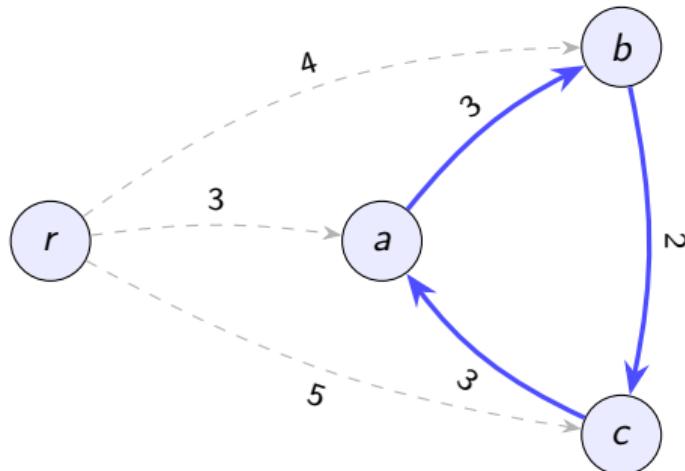
E quando a escolha gulosa falha?

Problema:

A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r -arborescência.

Exemplo:

Os arcos de custo mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r .



Arcos azuis formam um **ciclo!**

Passo 1: Redução de Custos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

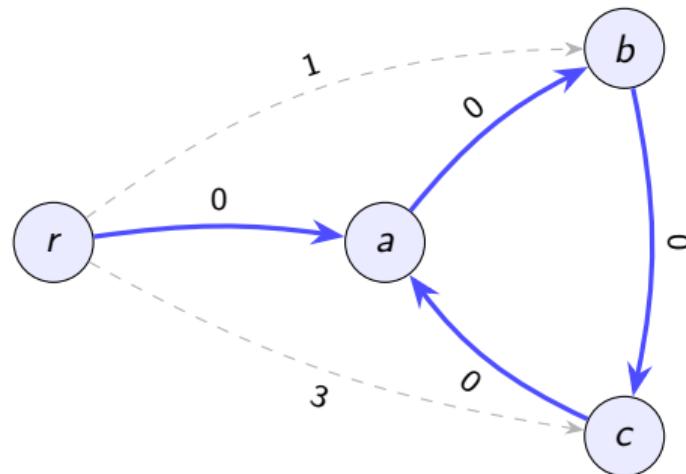
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custo λ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ :

- $\lambda(a) = 3, \lambda(b) = 3, \lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm custo zero!

Arcos com custo zero são candidatos para D_0

Implementação: Redução de Custos

Função `reduce_weights`:

```
def reduce_weights(D: nx.DiGraph, v: int):
    in_edges = D.in_edges(v, data=True)
    yv = min((data["w"])
              for _, _, data in in_edges
              )
    for u, _, _ in in_edges:
        D[u][v]["w"] -= yv
```

Descrição:

- Calcula $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- Reduz o custo de cada arco que entra em v
- Complexidade: $O(k)$ onde k é o número de arcos entrando em v

Resultado

Após executar `reduce_weights(D, v)` para cada $v \neq r$, todos os vértices têm ao menos um arco de entrada com custo zero.

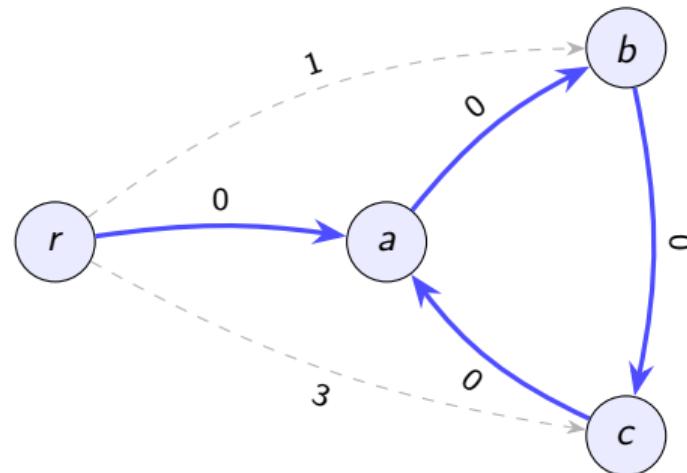
Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0 : Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (r, a)
- $(a, b), (c, a)$



Passo 2: Implementação da Construção de D_0 em Python

Função get_Dzero:

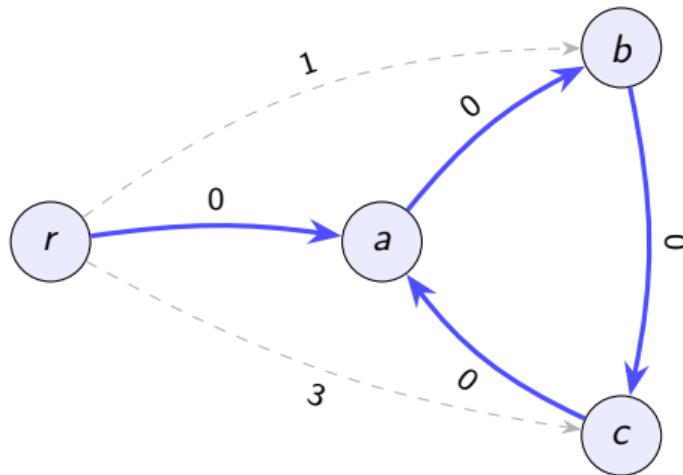
```
def get_Dzero(D: nx.DiGraph, r: int):
    D_zero = nx.DiGraph()
    for v in D.nodes():
        if v != r:
            in_edges = D.in_edges(v,
                                  data=True)
            u = next((u for u, _, data
                      in in_edges
                      if data["w"] == 0))
            D_zero.add_edge(u, v)
    return D_zero
```

Descrição:

- Para cada vértice $v \neq r$, seleciona um arco com custo zero
- Constrói subdigrafo gerador D_0
- Garantido existir arco de custo zero após redução

Observação

Se D_0 for uma arborescência, então D_0 é necessariamente uma r -arborescência ótima.

Passo 3: Verificação de D_0 **Verificar:**Se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0 **Caso contrário:** D_0 contém algum ciclo C . \Rightarrow **prosseguir** para os passos 4 e 5. D_0 não é uma r -arborescência!Neste exemplo, $D_0 = \{(r, a), (a, b), (c, a)\}$ não forma uma r -arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a) .

Passo 3: Implementação da Verificação de D0 (1/2)

Verificação se é arborescência:

```
# Verificar se D_zero eh arborescencia
if nx.is_arborescence(D_zero):
    # Restaurar pesos originais
    for u, v in D_zero.edges:
        D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
    return D_zero
```

Caso Base

Se D_0 é uma arborescência, então ela é a r -arborescência de custo mínimo. Restauramos os pesos originais e devolvemos.

Passo 3: Implementação da Verificação de D0 (2/2)

Detectão de ciclo:

```
def find_cycle(D_zero: nx.DiGraph):
    nodes_in_cycle = set()
    for u, v, _ in nx.find_cycle(
        D_zero, orientation="original"):
        nodes_in_cycle.update([u, v])
    return D_zero.subgraph(nodes_in_cycle).to_directed()
```

Descrição

- Usa `nx.find_cycle` para encontrar arcos do ciclo
- Coleta todos os vértices envolvidos
- Retorna subdigrafo induzido pelos vértices do ciclo

Passo 4: Contração de Ciclos

Operação:

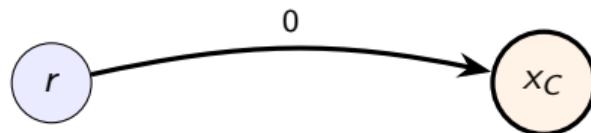
Contrair ciclo C em supervértice x_C .

Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de D que entra em algum vértice de C

Podem ter arcos saindo de x_C em D' .



Digrafo contraído D'

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D .

Passo 4: Implementação da Contração (1/2)

Arcos essenciais que entram no ciclo:

```
def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph,
                   label: int):
    cycle_nodes: set[int] = set(C.nodes())

    # Arcos essenciais ENTRANDO no ciclo
    in_to_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
    for u in D.nodes:
        if u not in cycle_nodes:
            min_edge = min(
                ((v, data["w"])
                 for _, v, data in D.out.edges(u, data=True)
                 if v in cycle_nodes),
                key=lambda x: x[1], default=None)
            if min_edge:
                in_to_cycle[u] = min_edge

    for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
        D.add_edge(u, label, w=w)
```

Arcos Essenciais de Entrada

Para cada vértice externo, encontra o arco de menor custo que entra no ciclo.

Passo 4: Implementação da Contração (2/2)

Arcos essenciais que saem do ciclo:

```
# Arcos essenciais SAINDO do ciclo
out_from_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
for v in D.nodes:
    if v not in cycle_nodes:
        min_edge = min(
            ((u, data["w"]))
            for u, _, data in D.in_edges(v, data=True)
            if u in cycle_nodes),
            key=lambda x: x[1], default=None)
        if min_edge:
            out_from_cycle[v] = min_edge

for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
    D.add_edge(label, v, w=w)

D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
return in_to_cycle, out_from_cycle
```

Arcos Essenciais de Saída

Os dicionários retornados são usados na expansão. Complexidade: $O(m)$

Passo 5: Chamada Recursiva

Novo problema: (D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$$



r-arborescência ótima em D'

Resultado: T' é uma r -arborescência de custo mínimo em (D', w')

Passo 5: Implementação da Chamada Recursiva

Estrutura recursiva:

```
def chuliu_edmonds(D: nx.DiGraph, r: int, label: int):
    D_copy = D.copy()

    # Reducao de custos
    for v in D_copy.nodes:
        if v != r:
            reduce_weights(D_copy, v)

    D_zero = get_Dzero(D_copy, r)

    if nx.is_arborescence(D_zero):
        # Restaurar pesos e devolver
        for u, v in D_zero.edges:
            D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
        return D_zero

    # Contrair ciclo e recursao
    C = find_cycle(D_zero)
    in_to_cycle, out_from_cycle = \
        contract_cycle(D_copy, C, label)
    F_prime = chuliu_edmonds(D_copy, r, label + 1)
    # ... expansao ...
```



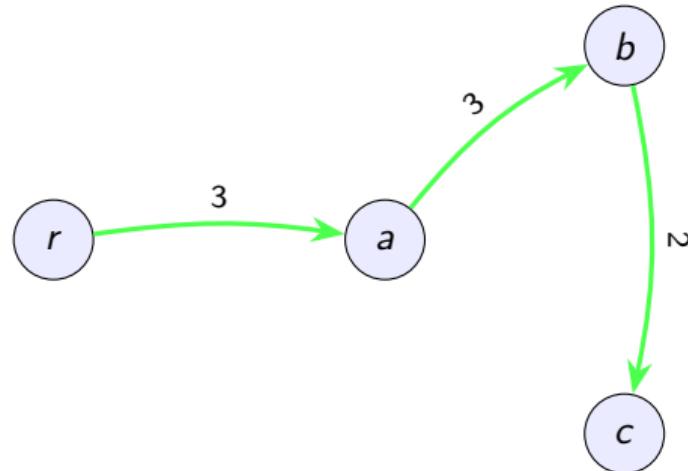
Passo 6: Reexpansão da Solução

Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

- ① Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
- ② Incluir uv em T
- ③ Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v



Resultado: T é uma r -arborescência de custo mínimo

r -arborescência final no digrafo original

Passo 6: Implementação da Reexpansão (1/2)

Encontrar e adicionar arco correspondente:

```
# F_prime: solução em D' (com supervertice)
# Encontrar arco que entra em label
in_edge = next(iter(
    F_prime.in_edges(label, data=True)))
u, _, _ = in_edge

# Arco correspondente em D original
v, _ = in_to_cycle[u]
F_prime.add_edge(u, v)

# Adicionar arcos do ciclo (exceto o que entra em v)
for u_c, v_c in C.edges:
    if v != v_c:
        F_prime.add_edge(u_c, v_c)
```

Observação: Identifica qual arco do ciclo não será incluído na solução final.



UFABC

Passo 6: Implementação da Reexpansão (2/2)

Transferir arcos externos e restaurar pesos:

```
# Arcos que saem do supervertice
for _, z, _ in list(
    F_prime.out.edges(label, data=True)):
    u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
    F_prime.add_edge(u_cycle, z)

# Remover supervertice
F_prime.remove_node(label)

# Restaurar pesos originais
for u, v in F_prime.edges:
    F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]

return F_prime
```

Correção: A expansão garante que T é uma r -arborescência ótima no digrafo original.



András Frank: Visão Geral

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

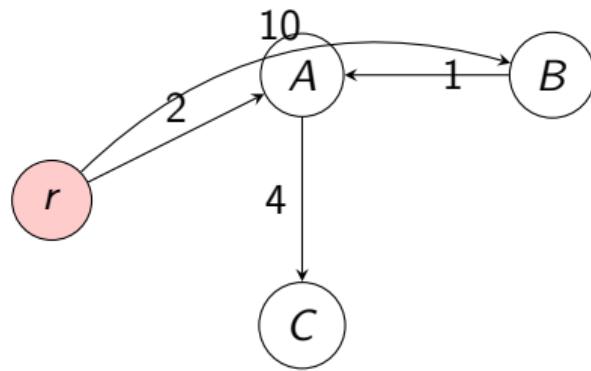
- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

Complexidade:

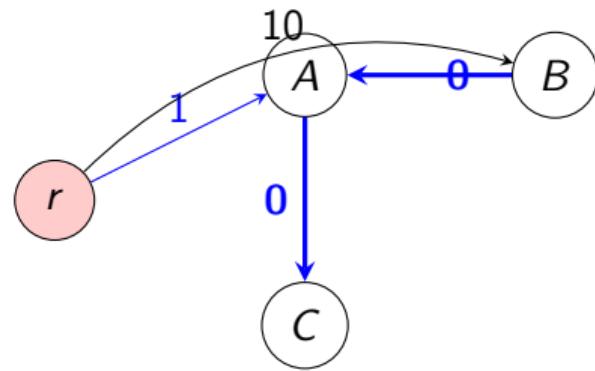
- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

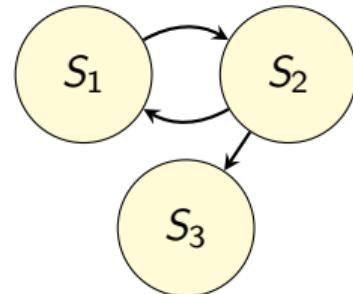
Arcos com custo zero formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Optimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^-(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

- ① Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
- ② Para cada v fora de R :
 - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
 - Adicionar v a R
- ③ Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

| Algoritmo | Tempo Mediano | Tempo Médio |
|-----------------------|----------------|----------------|
| Chu-Liu-Edmonds | 0,25 s | 0,58 s |
| Frank Fase I | 8,93 s | 12,40 s |
| Frank Fase II (lista) | 0,98 s | 1,34 s |
| Frank Fase II (heap) | 0,016 s | 0,020 s |

Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de 58,12 vezes (mediana)

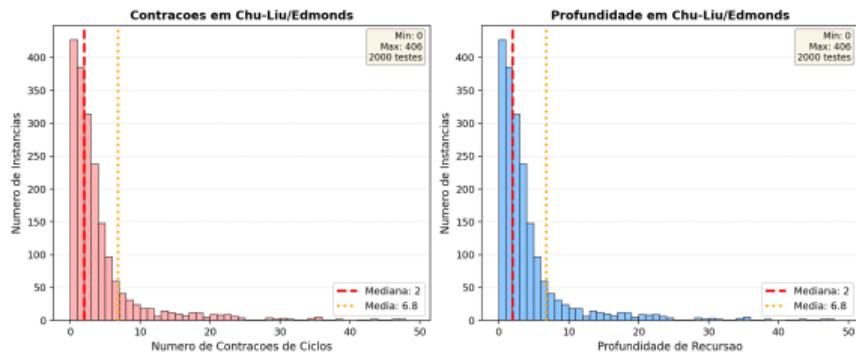
Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)



Motivação Didática

Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos e difíceis de visualizar**

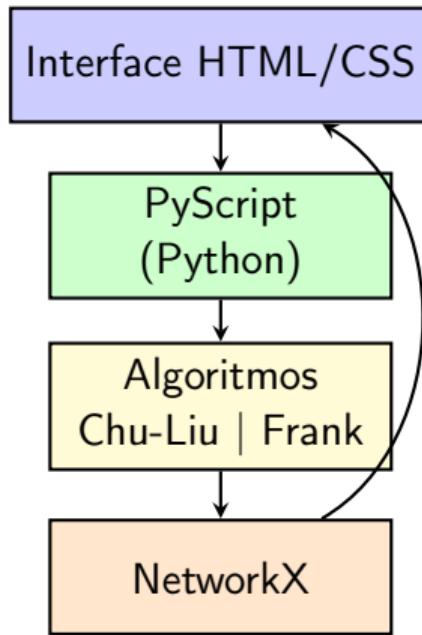
Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

 ArboGraph

Algoritmos para o problema da arborescência geradora mínima: uma aplicação didática interativa

- Home
- Chu-Liu-Edmonds
- András Frank (V1)
- András Frank (V2)
- Desenhe um digrafo
- Nossa dissertação

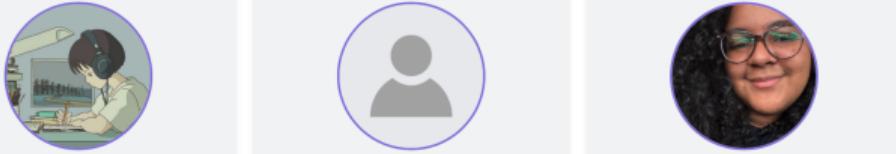
Dúvidas ?
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

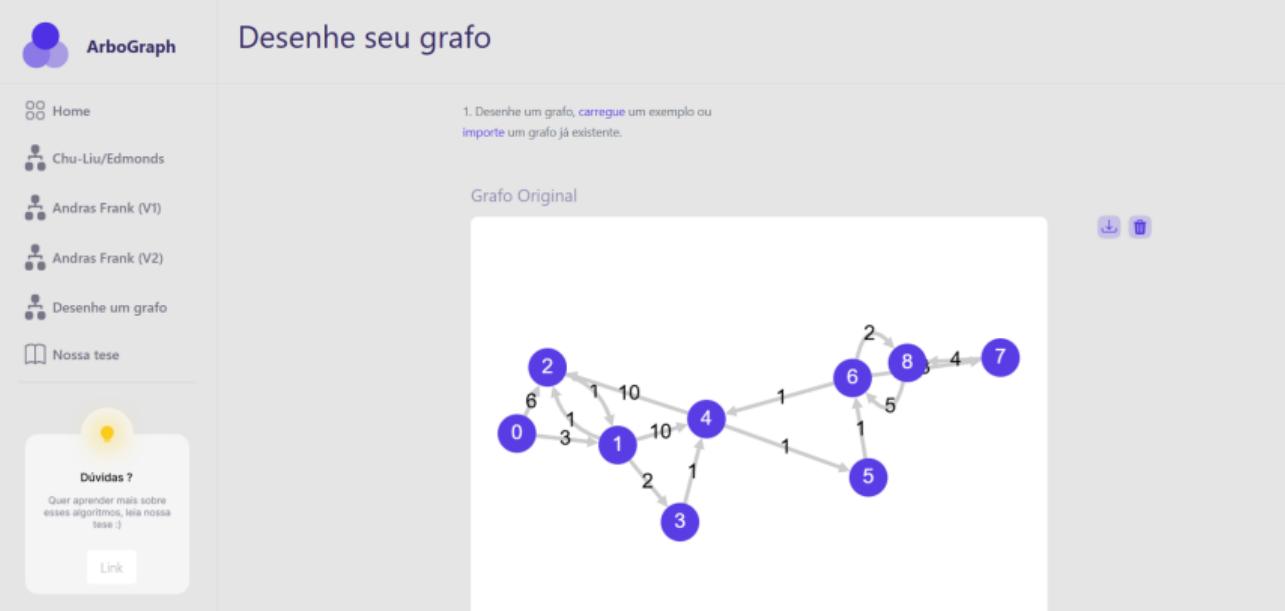
Resumo

Este trabalho investiga e implementa algoritmos de busca de uma r -arborescência geradora mínima em digrafos. A partir da formulação clássica e da literatura de Chu-Liu-Edmonds e também da formulação de András Frank, desenvolvemos uma aplicação web que permite: (i) desenhar ou importar um digrafo ponderado, (ii) escolher o nó raiz r , (iii) executar o algoritmo passo a passo com visualização das contrações, seleção de arcos de custo mínimo e reconstrução da arborescência, e (iv) exportar resultados e logs. A solução combina PyScript e NetworkX para a lógica algorítmica, Cytoscape para edição e visualização interativa, e Tailwind/Flowbite na interface. Como contribuição, o sistema oferece um ambiente didático que torna transparentes as decisões do algoritmo e facilita a análise e comparação de soluções em diferentes instâncias, apoiando ensino, experimentação e validação.

Integrantes do Projeto



Interface: Desenho de Grafos



The screenshot shows the ArboGraph web application interface. On the left, there is a sidebar with the following menu items:

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (V1)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

Below the menu is a yellow button labeled "Dúvidas ?" with a small icon, and a link button labeled "Link".

The main area is titled "Desenhe seu grafo" and contains the following instructions:

1. Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.

The main workspace is titled "Grafo Original" and displays a directed graph with 9 nodes (0-8) and edges with weights:

```

graph LR
    0((0)) -- 3 --> 1((1))
    0((0)) -- 6 --> 2((2))
    1((1)) -- 1 --> 0((0))
    1((1)) -- 10 --> 4((4))
    1((1)) -- 2 --> 3((3))
    2((2)) -- 1 --> 1((1))
    3((3)) -- 1 --> 4((4))
    4((4)) -- 10 --> 1((1))
    4((4)) -- 1 --> 5((5))
    4((4)) -- 1 --> 6((6))
    5((5)) -- 1 --> 4((4))
    5((5)) -- 1 --> 6((6))
    5((5)) -- 1 --> 7((7))
    6((6)) -- 2 --> 8((8))
    6((6)) -- 5 --> 5((5))
    6((6)) -- 4 --> 7((7))
    7((7)) -- 2 --> 6((6))
    8((8)) -- 4 --> 7((7))
  
```

On the right side of the workspace are two small icons: a downward arrow and a trash can.

Funcionalidades:

- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

Interface: Chu-Liu-Edmonds



ArboGraph

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- ▢▢ Andras Frank (V1)
- ▢▢ Andras Frank (V2)
- ▢▢ Desenhe um grafo
- ▢▢ Nossa tese

Dúvidas ?

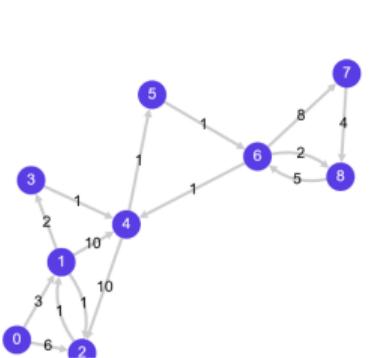
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

Chu-Liu / Edmonds

1 Crie um grafo
Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.
2 Escolha o nó raiz
3 Execute o algoritmo
[»](#)

Grafo Original



» Passo A Passo

Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank

ArboGraph

Andras Frank v1

Passo A Passo

1 Crie um grafo
Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.

2 Escolha o nó raiz
node

3 Execute o algoritmo

Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

Grafo Original

Dúvidas ?
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

Link

- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Princípios de Design

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário



Contribuições do Trabalho

① Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

② Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

③ Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário



Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
 - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
 - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Memória modesta: 11,5 MB



UFABC

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>