Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos:
Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

25 de novembro de 2025

Sumário

UFABC

O Problema

Encontrar uma r-Arborescência Geradora de Custo Mínimo

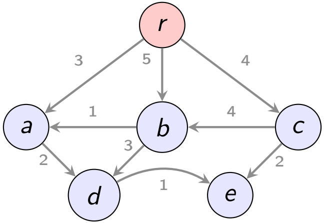
Dado um r-digrafo ponderado (D, w, r):

- Encontrar uma r-arborescência geradora de custo mínimo de D

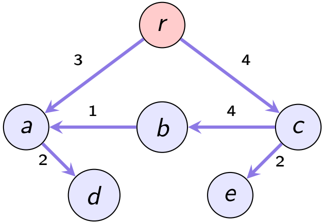
Algoritmos estudados:

1. Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
2. András Frank (1981-2014)

Exemplo: r-Arborescência Geradora Mínima

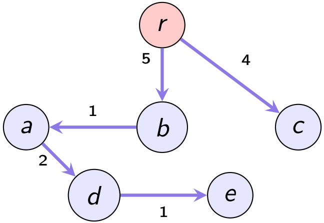


Digrafo Original



r-Arborescência Geradora

Custo: 16



Geradora Mínima

Custo: 13

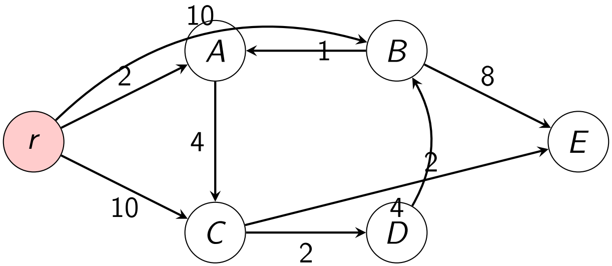
Chu-Liu-Edmonds: Ideia Principal

Algoritmo Recursivo

1. **Reduzir custos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
   Em outras palavras: tornar zero o custo do arco mais barato que entra em cada vértice
2. **Construir** D_0: escolher um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
3. **Verificar**: se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0
4. **Caso contrário**: encontrar ciclo C em D_0, contrair e resolver recursivamente

UFABC

Digrafo de Exemplo



Objetivo

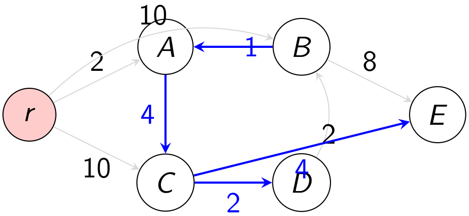
Encontrar a r-arborescência geradora de custo mínimo

UFABC

Passo 1: Redução de Custos e Construção de D_0

Redução de custos λ:

- $\lambda(A) = 1 \Rightarrow (B, A)$: $1 - 1 = 0$
- $\lambda(B) = 2 \Rightarrow (D, B)$: $2 - 2 = 0$
- $\lambda(C) = 4 \Rightarrow (A, C)$: $4 - 4 = 0$
- $\lambda(D) = 2 \Rightarrow (C, D)$: $2 - 2 = 0$
- $\lambda(E) = 4 \Rightarrow (C, E)$: $4 - 4 = 0$



Escolhemos arcos de custo zero para formar D_0

D_0 não é uma r-arborescência

Ciclo detectado: $A \to C \to D \to B \to A$

Em outras palavras: há vértices não alcançáveis a partir de r

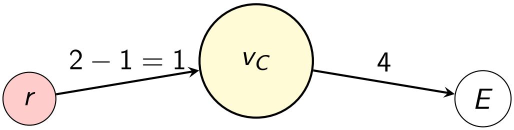
Passo 2: Contração do Ciclo

Ciclo C encontrado: $\{A, B, C, D\}$

Contraímos C em supervértice x_C
Em outras palavras: todos os vértices de C viram um único vértice

Custos já foram reduzidos por λ:

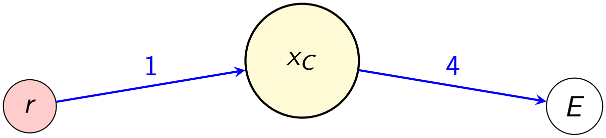
$$w_\lambda(r, A) = 2 - 1 = 1$$



Chamada Recursiva

Resolvemos chu-liu-edmonds($D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r$)
Em outras palavras: aplicamos o mesmo algoritmo no digrafo menor

Passo 3: Solução Recursiva no Digrafo Contraído



O algoritmo devolve $T' = \{(r, x_C), (x_C, E)\}$

Em outras palavras: encontramos a r-arborescência ótima no grafo contraído

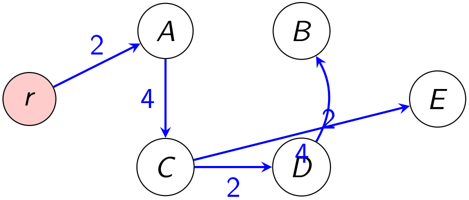
Próximo passo: expandir T' de volta para obter T no digrafo original

Passo 4: Expansão da Solução

Função expand(T')**:**
Arco (r, x_C) em T' corresponde a (r, A) em D

Em outras palavras:

- Incluir (r, A) que entra no ciclo
- Incluir todos os arcos do ciclo C **exceto** (B, A)
- Resultado: cada vértice tem grau de entrada 1



Solução Ótima

Custo total: $2 + 4 + 2 + 2 + 4 = 14$

UFABC

András Frank: Visão Geral

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

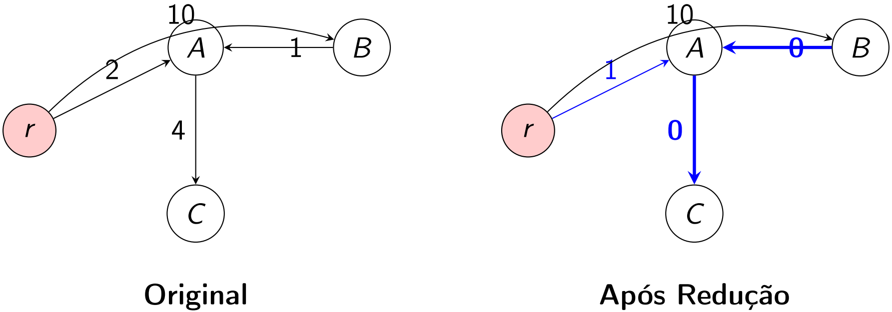
Complexidade:

- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$

UFABC

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



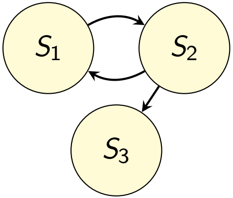
Arcos com custo **zero** formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Otimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^{-}(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

1. Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
2. Para cada v fora de R:
   - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
   - Adicionar v a R
3. Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

UFABC

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	**Tempo Mediano**	**Tempo Médio**
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	**0,016 s**	**0,020 s**

Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

UFABC

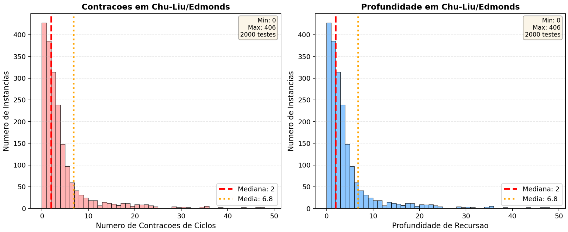
Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)



Motivação Didática

Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos** e **difíceis de visualizar**

Solução Proposta:

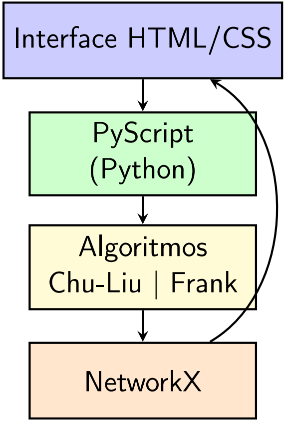
- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

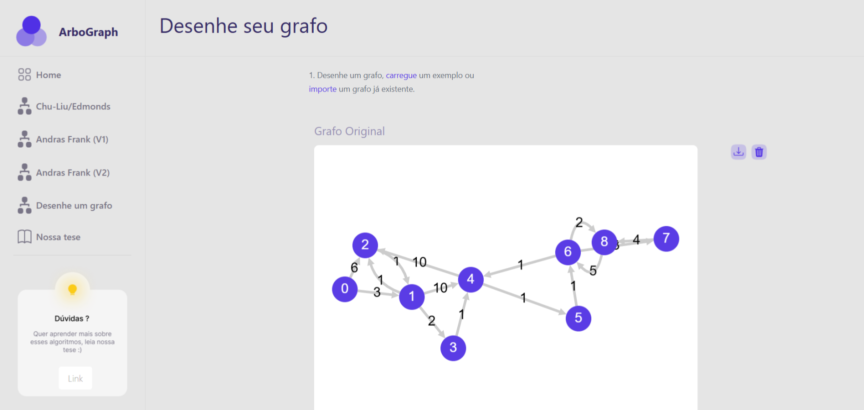
UFABC

Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

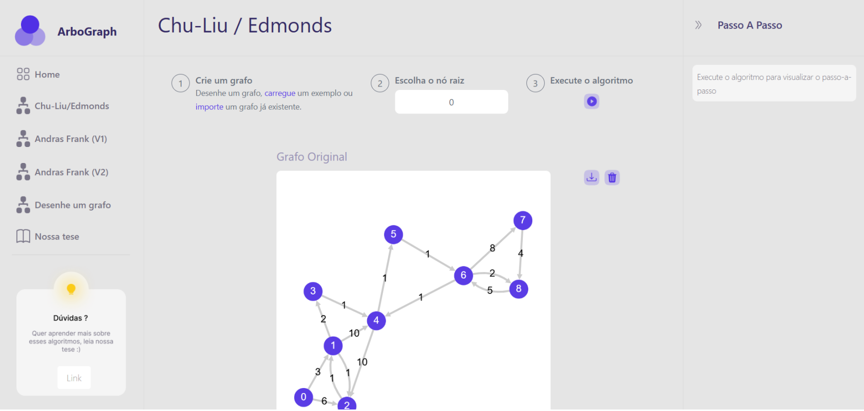
Interface: Desenho de Grafos



Funcionalidades:

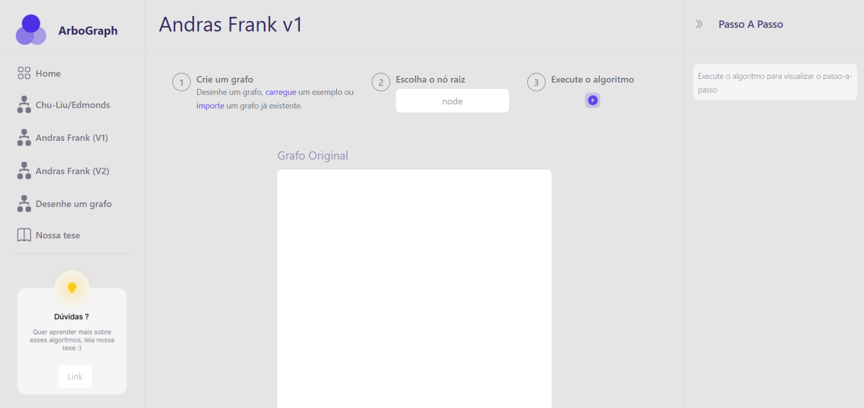
- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

Interface: Chu-Liu-Edmonds



- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank



- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Princípios de Design

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário

Contribuições do Trabalho

1. **Implementação completa** de dois algoritmos clássicos
    - Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
    - András Frank: duas fases com otimização heap
2. **Análise experimental** detalhada
    - 2000 instâncias aleatórias
    - Comparação de desempenho e características estruturais
3. **Aplicação web interativa**
    - Ferramenta didática para visualização
    - Execução passo a passo dos algoritmos
    - Design centrado no usuário

UFABC

Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58$\times$ (mediana), 61$\times$ (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
  - Memória modesta: 11,5 MB

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer