

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca
de uma r -Arborescência Inversa de Custo Mínimo
em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática
Interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma
r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos
Dirigidos com Aplicação Didática Interativa**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre.

Universidade

Faculdade

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

Dedicatória (opcional).

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional).

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r -arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

Palavras-chave: Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r -arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

Keywords: Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais "mais baratas por vértice". Os arcos grossos (custo 1) entram em a, b, c e formam $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Os arcos tracejados partindo de r existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local. 9
- Figura 2 – Ajuste de custo reduzido para um arco entrando em um ciclo contraído: o arco (u, w) com $w \in C$ torna-se (u, x_C) com custo reduzido $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, onde a_w é o arco de menor custo que entra em w 10
- Figura 3 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em D' escolhe exatamente um arco que entra em x_C ; ao expandir C , esse arco corresponde a um (u, w) que entra em algum $w \in C$ e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total. 11
- Figura 4 – Reexpansão de C : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em x_C ; ao expandir, x_C é substituído por C e o arco selecionado entra em algum $w \in C$; remove-se exatamente um arco interno de C para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero). 11

Sumário

1	ALGORITMO DE CHU-LIU/EDMONDS	9
1.1	O problema dos ciclos e a solução por contração	9
1.1.1	Supervértices e contração de ciclos	10
1.2	Descrição do algoritmo	10
1.2.1	Exemplo prático: Chu-Liu/Edmonds	12
1.2.2	Corretude	14
1.2.3	Complexidade	15
1.3	Implementação em Python	15
1.3.1	Normalização por vértice	16
1.3.2	Construção de F^* :	17
1.3.2.1	Detecção de ciclo:	18
1.3.2.2	Contração de ciclo:	19
1.3.2.3	Remoção de arestas que entram na raiz:	21
1.3.2.4	Remoção de arco interno:	21
1.3.2.5	Procedimento principal (recursivo):	22
1.3.2.6	Notas finais sobre a implementação	25
1.3.2.7	Decisões de projeto e implicações práticas	26
1.3.2.8	Transição para a abordagem primal-dual	26
	REFERÊNCIAS	28
	ANEXOS	29
	ANEXO A – ANEXO A	30

1 Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

O algoritmo de Chu–Liu/Edmonds encontra uma r -arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. A estratégia funciona de forma gulosa ao escolher, para cada vértice $v \neq r$, o arco de entrada mais barato. No entanto, essa abordagem pode gerar ciclos dirigidos, incompatíveis com a estrutura de arborescência. O algoritmo resolve esse problema combinando normalização de custos, contração de ciclos em supervértices e expansão controlada para garantir otimalidade.

1.1 O problema dos ciclos e a solução por contração

Em uma r -arborescência, cada $v \neq r$ deve ter exatamente um arco de entrada e r tem grau de entrada zero. Se escolhermos para cada vértice o arco mais barato que nele entra, podemos formar um ciclo dirigido C onde todos os vértices recebem seu único arco de dentro do próprio C . Nesse caso, nenhum arco entraria em C a partir de $V \setminus C$ (o corte $\delta^-(C)$ ficaria vazio) e, como $r \notin C$, não existiria caminho de r para os vértices de C , contrariando a alcançabilidade exigida.

A Figura 1 ilustra com um microexemplo: três vértices a, b, c (todos fora de r) onde o arco mais barato que entra em b vem de a , o de c vem de b e o de a vem de c , formando o ciclo $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Embora existam arcos de r para cada vértice, eles são mais caros e não são escolhidos pelo critério local, deixando os vértices "presos" no ciclo sem conexão com a raiz.



Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais "mais baratas por vértice". Os arcos grossos (custo 1) entram em a, b, c e formam $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Os arcos tracejados partindo de r existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local.

A solução consiste em *normalizar os custos por vértice*: para cada $v \neq r$, subtraímos de todo arco que entra em v o menor custo entre os arcos que chegam a v . Após esse ajuste (custos reduzidos), cada $v \neq r$ passa a ter ao menos um arco de custo reduzido

zero. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a r -arborescência ótima. Se formarem um ciclo C , *contraímos* C em um **supervértice** x_C , ajustamos os custos dos arcos externos e resolvemos recursivamente no grafo menor. Ao final, *expandimos* as contrações removendo exatamente um arco interno de cada ciclo para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global.

1.1.1 Supervértices e contração de ciclos

Dado um subconjunto $C \subseteq V$ que forma um ciclo dirigido, a *contração de C* substitui todos os vértices de C por um único vértice x_C — o supervértice. Todo arco com exatamente uma ponta em C passa a ser incidente a x_C : arcos (u, w) com $u \notin C$, $w \in C$ tornam-se (u, x_C) ; arcos (w, v) com $w \in C$, $v \notin C$ tornam-se (x_C, v) ; e arcos com ambas as pontas em C são descartados.

Para preservar a comparação relativa dos custos, ajustamos os arcos que *entram* em C : para um arco (u, w) com $w \in C$, definimos $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, onde a_w é o arco mais barato que entra em w . Essa normalização garante que decisões ótimas no grafo contraído podem ser traduzidas de volta na expansão.

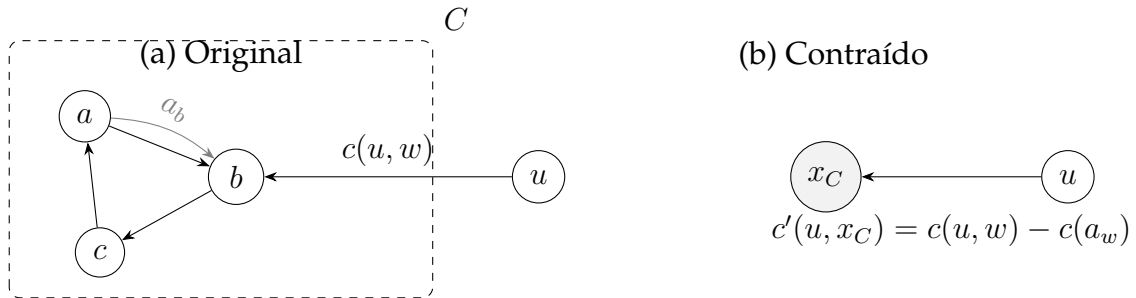


Figura 2 – Ajuste de custo reduzido para um arco entrando em um ciclo contraído: o arco (u, w) com $w \in C$ torna-se (u, x_C) com custo reduzido $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, onde a_w é o arco de menor custo que entra em w .

A Figura 2 mostra o ajuste: o arco (u, b) com custo 7 torna-se (u, x_C) com custo reduzido $7 - 5 = 2$, já que $a_b = (a \rightarrow b)$ tem custo 5.

1.2 Descrição do algoritmo

Apresentamos o algoritmo em visão operacional de alto nível, focando na lógica e nos passos principais. Detalhes de implementação serão discutidos na próxima seção. Denotamos por A' o conjunto de arcos escolhidos na construção da r -arborescência.

Construa A' escolhendo, para cada $v \neq r$, um arco de menor custo que entra em v . Se (V, A') é acíclico, então A' já é uma r -arborescência ótima, pois realizamos o menor

custo de entrada em cada vértice e nenhuma troca pode reduzir o custo mantendo as restrições (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Sec. 4.9).

Se A' contiver um ciclo dirigido C (que não inclui r), normalizamos os custos de entrada, contraímos C em um supervértice x_C ajustando arcos que entram em C por $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, e resolvemos recursivamente no grafo contraído.

As arborescências do grafo contraído correspondem, em bijeção, às arborescências do grafo original com exatamente um arco entrando em C . Como os arcos internos de C têm custo reduzido zero, os custos são preservados na ida e na volta.



Figura 3 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em D' escolhe exatamente um arco que entra em x_C ; ao expandir C , esse arco corresponde a um (u, w) que entra em algum $w \in C$ e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total.

Na expansão, reintroduzimos C e removemos exatamente um arco interno para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global (SCHRIJVER, 2003; KLEINBERG; TARDOS, 2006).



Figura 4 – Reexpansão de C : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em x_C ; ao expandir, x_C é substituído por C e o arco selecionado entra em algum $w \in C$; remove-se exatamente um arco interno de C para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero).

Abaixo, a descrição formal do algoritmo.

Abaixo, temos a descrição formal do algoritmo.

Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo $D = (V, A)$, custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, raiz r .^a

1. Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $F^* := \{a_v : v \neq r\}$.
2. Se (V, F^*) é acíclico, devolva F^* . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.
3. Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de F^* (com $r \notin C$). **Contração:** contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

4. **Recursão:** compute uma r-arborescência ótima T' de D' com custos c' .
5. **Expansão:** seja $(u, x_C) \in T'$ o único arco que entra em x_C . No grafo original, ele corresponde a (u, w) com $w \in C$. Forme

$$T := (T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}) \cup \{(u, w)\} \cup ((F^* \cap A(C)) \setminus \{a_w\}).$$

Então T tem grau de entrada 1 em cada $v \neq r$, é acíclico e tem o mesmo custo de T' ; logo, é uma r-arborescência ótima de D (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

^a Se algum $v \neq r$ não possui arco de entrada, não existe r-arborescência.

1.2.1 Exemplo prático: Chu–Liu/Edmonds

A seguir, ilustramos o funcionamento do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo de teste. Mostramos o grafo original, os principais passos do algoritmo e a arborescência final encontrada. A Figura abaixo apresenta o grafo original com os pesos das arestas



O primeiro passo do nosso algoritmo seria remover as arestas que entram na raiz (vértice 0), porém não há nenhuma nesse caso, logo não existe a necessidade de alterar o grafo.

Dessa forma, o próximo passo é normalizar os pesos das arestas de entrada para cada vértice, nessa etapa, Para cada vértice X (exceto a raiz), o algoritmo encontra a aresta de menor peso que entra em X e subtrai esse menor peso de todas as arestas que entram em X (relembrando que isso serve para zerar o peso da aresta mínima de entrada em cada vértice)

Normalizando pesos de arestas de entrada para '1': Nesse processo notamos que as únicas arestas de entrada são 0 e 2 onde $(0 \rightarrow 1)$ tem peso 3.0 e $(2 \rightarrow 1)$ tem peso 1.0, elegendo a aresta 2 como a de menor peso podemos subtrair o peso das arestas restantes (no caso, o peso da aresta 0) pelo valor do peso da aresta 2, resultando em um novo peso de '2' para a aresta 0

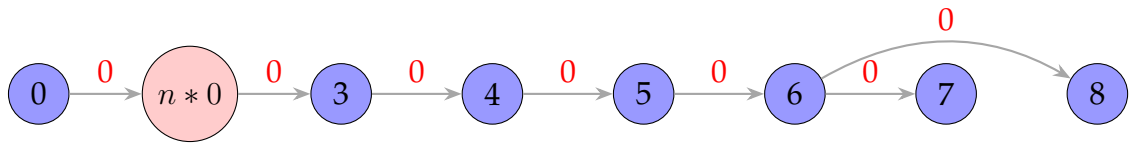


Repetiremos o passo anterior para todas as outras arestas

Com os pesos normalizados, o próximo passo é construir F^* , para isso, selecionamos para cada vértice, a aresta de menor custo de entrada. Além disso, detectamos um ciclo em F^* , formado pelos vértices $\{1$ e $2\}$. Portanto, precisamos contrair esse ciclo em um supervértice $n * 0$. O resultado é o seguinte:



Agora, repetimos o processo recursivamente no grafo contraído até obter uma arborescência.



Após validarmos que a F^* não possui mais ciclos e notarmos que F^* forma uma arborescência iremos começar o processo de expansão do ciclo contraído para obter a arborescência final no grafo original. Dessa forma, Adicionamos a aresta de entrada ao ciclo: $(0, 1)$, $(1, 2)$ e a aresta externa de saída: $(1, 3)$, chegando em uma arborescência válida.



1.2.2 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos*: para cada $v \neq r$, defina $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$ e $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$. Para qualquer r -arborescência T , vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de T entrando em cada $v \neq r$. O termo $\sum_{v \neq r} y(v)$ é constante (independe de T); assim, minimizar $\sum c$ equivale a minimizar $\sum c'$

(KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos a_v de menor custo que entram em v têm custo reduzido zero e formam F^* .

2. *Caso acíclico*: se (V, F^*) é acíclico, então já é uma r -arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada $v \neq r$, é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).
3. *Caso com ciclo (contração/expansão)*: se F^* contém um ciclo dirigido C , todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

Contraia C em x_C e ajuste apenas arcos que *entram* em C : $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$.

Resolva o problema no grafo contraído D' , obtendo uma r -arborescência ótima T' sob c' . Na expansão, substitua o arco $(u, x_C) \in T'$ pelo correspondente (u, w) (com $w \in C$) e remova a_w de C .

Como os arcos de C têm custo reduzido zero e $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$, a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo, T' ótimo em D' mapeia para T ótimo em D para c' . Pela equivalência entre c e c' , T também é ótimo para c . Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

Em termos intuitivos, y funciona como um potencial nos vértices: torna “apertados” (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

1.2.3 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os a_v , detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa $O(m)$ por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo $O(n)$ níveis e tempo total $O(mn)$, com $n = |V|$, $m = |A|$.

O uso de memória é $O(m + n)$, incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão $O(mn)$ por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>).

1.3 Implementação em Python

Esta seção apresenta uma implementação em Python do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. A arquitetura segue os passos teóricos: recebe como entrada um digrafo ponderado, os custos das arestas e o vértice raiz. O procedimento seleciona, para cada vértice, o arco de menor custo de entrada, verifica se o grafo é acíclico e, se necessário, contrai ciclos

e ajusta custos. Ao final, retorna como saída a r-arborescência ótima: um conjunto de arestas que conecta todos os vértices à raiz com custo mínimo.

- **Entrada:** digrafo ponderado $D = (V, A)$, custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, raiz $r \in V$.
- **Hipóteses:**
 - D é representado como um objeto `networkx.DiGraph`, com pesos armazenados no atributo de arestas `'w'`.
 - D é conexo a partir de r :
 - (i) todo $v \neq r$ é alcançável a partir de r (caso contrário, não há r-arborescência);
 - (ii) para todo subconjunto não vazio $X \subseteq V \setminus \{r\}$, existe ao menos um arco que entra em X ($\delta^-(X) \neq \emptyset$; condições clássicas de existência à la Edmonds ([SCHRIJVER, 2003](#))).
 - Os custos são não negativos: $c(a) \geq 0$ para todo $a \in A$.
- **Saída:** conjunto $A^* \subseteq A$ com $|A^*| = |V| - 1$, tal que cada $v \neq r$ tem grau de entrada 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de r e $\sum_{a \in A^*} c(a)$ é mínimo.
- **Convenções:** arcos paralelos (múltiplos arcos entre o mesmo par de vértices) são permitidos após contrações; laços (self-loops) são descartados.

A seguir, detalhamos as implementações das funções principais e auxiliares, começando pela normalização dos custos por vértice.

1.3.1 Normalização por vértice

Esta função normaliza¹ os custos das arestas que entram em um vértice v : calcula $y(v) = \min\{w(u, v)\}$ e substitui cada peso $w(u, v)$ por $w(u, v) - y(v)$.

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`²) e o rótulo `node` do vértice cujas arestas de entrada devem ser normalizadas. A implementação coleta todas as arestas de entrada de `node` com seus pesos (linha 2) e, se a lista estiver vazia, retorna imediatamente sem fazer alterações (linhas 3–4). Caso contrário, calcula o peso mínimo y_v usando uma compreensão de gerador³ que extrai o terceiro elemento de cada tupla

¹ Aqui, "normalizar" significa subtrair do peso de cada aresta que entra em v o menor peso de entrada (custos reduzidos), preservando a ordem relativa; assim, ao menos uma entrada em v passa a ter custo 0, sem afetar a comparação entre soluções.

² `nx.DiGraph` é a classe da biblioteca `NetworkX` que representa grafos dirigidos (directed graphs). Ela armazena vértices e arestas direcionadas, permitindo associar atributos arbitrários (como pesos) às arestas através de dicionários. A notação `D[u][v]["w"]` acessa o peso da aresta (u, v) .

³ Em Python, uma *compreensão de gerador* (generator comprehension) é uma expressão da forma `(expr for item in iterable)` que produz valores sob demanda, sem criar uma lista completa na memória. Aqui, `(w for _, _, w in predecessors)` extrai apenas os pesos das tuplas, permitindo calcular o mínimo de forma eficiente.

(linha 5) e, para cada predecessor u , subtrai y_v do peso armazenado em $D[u][node][\text{"w"}]$ (linha 6).

Não retorna nenhum valor (retorno implícito `None`), pois a operação é realizada *in-place*⁴: o grafo D passado como parâmetro é modificado diretamente, e ao menos uma aresta de entrada de $node$ terá custo reduzido zero após a execução. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, pois cada operação percorre as arestas de entrada uma única vez.

Normalização por vértice: custos reduzidos

Normaliza os pesos das arestas que entram em $node$, subtraindo de cada uma o menor peso de entrada. Modifica o grafo D in-place.

```
1 def normalize_incoming_edge_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
2     predecessors = list(D.in_edges(node, data="w"))
3     if not predecessors:
4         return
5     yv = min((w for _, _, w in predecessors))
6     D[u][node][\text{"w"}] -= yv
```

1.3.2 Construção de F^* :

Esta função constrói o subdigrafo F^* selecionando, para cada vértice $v \neq r_0$, uma única aresta de custo reduzido zero que entra em v .

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo r_0 da raiz. A implementação cria um novo digrafo vazio `F_star` (linha 2). Em seguida, para cada vértice v diferente de r_0 (linhas 3–4), coleta todas as arestas de entrada de v com seus pesos em uma lista e armazena na variável `in_edges` (linha 5). Se não houver arestas de entrada, prossegue para o próximo vértice (linhas 6–7). Caso contrário, utiliza uma compreensão de gerador para encontrar o primeiro predecessor u cuja aresta (u, v) tem peso zero (linha 8) e, se existir, adiciona essa aresta a `F_star` com peso zero (linhas 9–10).

Retorna o digrafo `F_star` contendo exatamente uma aresta entrando em cada $v \neq r_0$, todas com custo reduzido zero. O grafo original D não é modificado. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arestas, pois cada aresta é considerada no máximo uma vez durante a iteração sobre todos os vértices.

⁴ No jargão de programação, "in-place" significa que a estrutura original é alterada diretamente, sem criar uma cópia. Isso economiza memória e tempo, mas introduz efeitos colaterais.

Construção de F star

Constrói o subdigrafo F^ a partir do digrafo D , selecionando para cada vértice (exceto a raiz r_0) uma aresta de custo reduzido zero que entra nele.*

```

1 def get_Fstar(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     F_star = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r0:
5             in_edges = list(D.in_edges(v, data="w"))
6             if not in_edges:
7                 continue
8             u = next((u for u, _, w in in_edges if w == 0), None)
9             if u:
10                F_star.add_edge(u, v, w=0)
11     return F_star

```

1.3.2.1 Detecção de ciclo:

a função detecta um ciclo dirigido em F^* (se existir) e retorna um subgrafo contendo o ciclo. Caso contrário, retorna None. A função utiliza a função `find_cycle` do NetworkX, que implementa um algoritmo eficiente de detecção de ciclos.

A função executa em $O(m)$. Isso ocorre porque a função `find_cycle` do NetworkX utiliza uma abordagem baseada em busca em profundidade (DFS) para detectar ciclos em grafos direcionados.

A complexidade dessa abordagem é linear em relação ao número de vértices e arestas do grafo, ou seja, $O(m)$, onde m é o número de arestas. A função não modifica o grafo original, mas cria um subgrafo contendo apenas os vértices e arestas que fazem parte do ciclo detectado.

Detecção de ciclo dirigido em F^*

Encontra um ciclo dirigido no grafo. Por fim, retorna um subgrafo contendo o ciclo, ou None caso não exista.

```

1 % def find_cycle(F_star: nx.DiGraph):
2 %     try:
3 %         nodes_in_cycle = set()
4 %         # Extract nodes involved in the cycle
5 %         for u, v, _ in nx.find_cycle(F_star, orientation="original"):

```

```

6 %         nodes_in_cycle.update([u, v])
7 %         # Create a subgraph containing only the cycle
8 %         return F_star.subgraph(nodes_in_cycle).copy()
9
10 %    except nx.NetworkXNoCycle:
11 %        return None

```

1.3.2.2 Contração de ciclo:

a função contrai um ciclo dirigido simples C em um **supervértice** x_C , redirecionando arcos incidentes a C e ajustando custos de acordo com a regra de *custos reduzidos*. O grafo é modificado *in-place* e a rotina devolve dicionários auxiliares para permitir a *reexpansão* correta do ciclo.

Em alto nível, o procedimento de contração de ciclo recebe como entrada um ciclo dirigido C em D , a raiz r_0 (que não pertence a C), e um rótulo novo para o supervértice x_C . Para cada arco que entra em C , cria um arco para x_C com custo ajustado; para cada arco que sai de C , redireciona a saída para partir de x_C ; laços internos são descartados. O procedimento devolve dicionários que permitem reexpansão correta do ciclo ao final. Como efeito colateral, remove os vértices de C e insere x_C no grafo. Se não houver arco entrando em C , não existe r -arborescência; se não houver arco saindo, x_C pode isolar componentes. O custo total é preservado e o procedimento é linear no número de arestas.

Essas escolhas garantem a *equivalência de custo* entre soluções ótimas no grafo contraído e no original após a reexpansão: os arcos internos de C têm custo reduzido zero e apenas as entradas em C recebem o desconto $y(w)$, mantendo a bijeção entre arborescências descrita anteriormente.

A expressão “no próprio lugar (inplace)” no docstring abaixo⁵ indica que o grafo D é modificado diretamente.

Contração de ciclo

Contraí um ciclo C no grafo D , substituindo-o por um supervértice rotulado ‘label’. Nesse processo, modifica o grafo D no próprio lugar (in-place) e por fim, devolve dicionários auxiliares para a reexpansão.

⁵ “Inplace” significa que a função altera diretamente a estrutura de dados existente, sem criar uma cópia. Assim, após a chamada, o grafo D já refletirá as remoções, inserções e ajustes feitos. Isso reduz alocações e pode ser mais eficiente, mas exige cuidado com aliasing/referências ativas, pois o estado anterior não é preservado a menos que seja salvo explicitamente.

```

1 % def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str):
2
3
4 %     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes())
5
6 %     # Stores the vertex u outside the cycle and the vertex v inside the
7 %     cycle that receives the minimum weight edge
8
9 %     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
10
11 %     for u in D.nodes:
12 %         if u not in cycle_nodes:
13 %             # Find the minimum weight edge that u has to any vertex in C
14 %             min_weight_edge_to_cycle = min(
15 %                 ((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in
16 %                 cycle_nodes),
17 %                 key=lambda x: x[1],
18 %                 default=None,
19 %             )
20 %             if min_weight_edge_to_cycle:
21 %                 in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
22
23 %     # Stores the vertex v outside the cycle that receives the minimum
24 %     weight edge from a vertex u inside the cycle
25
26 %     out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
27
28 %     for v in D.nodes:
29 %         if v not in cycle_nodes:
30 %             # Find the minimum weight edge that v receives from any vertex
31 %             in C
32 %             min_weight_edge_from_cycle = min(
33 %                 ((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in
34 %                 cycle_nodes),
35 %                 key=lambda x: x[1],
36 %                 default=None,
37 %             )
38 %             if min_weight_edge_from_cycle:
39 %                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle

```

```

36
37 %     for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
38 %         D.add_edge(label, v, w=w)
39
40 %     # Remove all nodes in the cycle from G
41 %     D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
42
43 %     return in_to_cycle, out_from_cycle
44 %

```

1.3.2.3 Remoção de arestas que entram na raiz:

a função remove todas as arestas que entram no vértice raiz r_0 do grafo G . A função modifica o grafo *in-place* e executa em $O(\deg^-(r_0))$.

Isso ocorre porque a função obtém todas as arestas que entram em r_0 usando o método `in_edges` do NetworkX, que tem complexidade $O(\deg^-(r_0))$.

Em seguida, a função remove essas arestas usando o método `remove_edges_from`, que também opera em tempo linear em relação ao número de arestas sendo removidas. Portanto, o tempo total de execução da função é $O(\deg^-(r_0))$. A função não cria uma cópia do grafo original, mas altera diretamente a estrutura de dados do grafo fornecido.

Remoção de arestas que entram na raiz

Remove todas as arestas que entram no vértice raiz r_0 no grafo D . Por fim, retorna o grafo atualizado.

```

1 % def remove_edges_to_r0(
2 %     D: nx.DiGraph, r0: str
3 % ):
4 %     # Remove all edges entering r0
5 %     in_edges = list(D.in_edges(r0))
6 %     if in_edges:
7 %         D.remove_edges_from(in_edges)
8 %     return D

```

1.3.2.4 Remoção de arco interno:

ao expandir o ciclo C , a função remove o arco interno que entra no vértice de entrada v do ciclo, já que v agora recebe um arco externo do grafo. A função modifica o subgrafo do ciclo *in-place* e executa em $O(\deg^-(v))$.

Remover arco interno na reexpansão

Remove a aresta interna que entra no vértice de entrada 'v' do ciclo C, pois 'v' passa a receber uma aresta externa do grafo.

```

1 % def remove_internal_edge_to_cycle_entry(C: nx.DiGraph, v):
2
3 %     predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)), None)
4
5 %     C.remove_edge(predecessor, v)

```

1.3.2.5 Procedimento principal (recursivo):

A função principal implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva e atua como um orquestrador das fases do método. Em alto nível, ela mantém a seguinte lógica:

O procedimento principal do algoritmo segue estes passos: prepara a instância removendo entradas na raiz, normaliza os custos das arestas que entram em cada vértice (exceto a raiz) para garantir pelo menos uma entrada de custo reduzido zero, constrói o grafo funcional F^* escolhendo para cada vértice a entrada de menor custo reduzido, verifica se F^* é acíclico (se for, retorna como r-arborescência ótima), e, caso haja ciclo, contrai o ciclo em um supervértice, ajusta os custos das entradas e resolve recursivamente; ao retornar, expande o ciclo e remove uma aresta interna para garantir aciclicidade e grau de entrada igual a 1.

Mais especificamente, o procedimento garante as seguintes propriedades e passos:

- **Função (entradas/saídas):** Entrada: digrafo ponderado $D = (V, A)$, raiz r_0 , e, opcionalmente, funções `draw_fn` e `log` para visualização e registro. Saída: um subdigrafo dirigido T de D com $|V| - 1$ arcos em que todo $v \neq r_0$ tem grau de entrada 1, todos os vértices alcançam r_0 e o custo total $\sum_{a \in T} c(a)$ é mínimo.
- **Invariantes:** Após a normalização por vértice, cada $v \neq r_0$ tem pelo menos uma entrada de custo reduzido zero; o conjunto F^* contém exatamente uma entrada por vértice distinto de r_0 ; em toda contração, apenas arcos que *entram* no componente têm seus custos reduzidos ajustados por $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, preservando comparações relativas.
- **Deteção de ciclo e contração:** Se F^* contém um ciclo C , todos os seus arcos têm custo reduzido zero. O procedimento forma o supervértice x_C , reescreve arcos

incidentes (descarta laços internos) e prossegue na instância menor. Essa etapa pode manter arcos paralelos e ignora laços.

- **Recursão e expansão:** Ao obter T' ótimo no grafo contraído, o método mapeia T' de volta para D : substitui o arco (u, x_C) por um (u, w) apropriado (com $w \in C$) e remove uma única aresta interna de C , restaurando a propriedade “uma entrada por vértice” e a aciclicidade.
- **Empates e robustez:** Empates de custo são resolvidos de modo determinístico/local, sem afetar a otimalidade. Arcos paralelos podem surgir após contrações e são tratados normalmente; laços são descartados por construção.
- **Logs e desenho (opcionais):** Na implementação disponibilizada no repositório do projeto integramos o solver com a interface do projeto de forma que se fornecidos, log recebe mensagens estruturadas por nível de recursão, e draw_fn e draw_step pode ser chamado para ilustrar passos relevantes (normalização, detecção/contração de ciclos, retorno da recursão e expansão).
- **Casos-limite:** Se algum $v \neq r_0$ não possui arco de entrada na instância corrente, detecta-se inviabilidade (não existe r-arborescência). Se F^* já é acíclico, retorna imediatamente (base da recursão).
- **Complexidade:** Em uma implementação direta, cada nível de recursão executa seleção/checagem/ajustes em tempo proporcional a $O(m)$, e há no máximo $O(n)$ níveis devido às contrações, totalizando $O(mn)$ e memória $O(m + n)$.

Essa rotina encapsula, portanto, a estratégia primal do método: induzir arestas de custo reduzido zero por normalização local, extrair uma estrutura funcional F^* de uma entrada por vértice, e resolver conflitos cíclicos por contração/expansão, preservando custos e correção em todas as etapas.

Procedimento principal (recursivo)

Função recursiva que encontra a arborescência ótima em um digrafo D com raiz r_0 usando o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds.

```

1 % def find_optimum_arborescence_chuliu(
2 %     D: nx.DiGraph,
3 %     r0: str,
4 %     level=0,
5 % ):
6
7 %     D_copy = D.copy()
8

```



```

9 %     for v in D_copy.nodes:
10 %         if v != r0:
11 %             normalize_incoming_edge_weights(D_copy, v)
12
13 %     # Build F_star
14 %     F_star = get_Fstar(D_copy, r0)
15
16 %     if nx.is_arborescence(F_star):
17 %         for u, v in F_star.edges:
18 %             F_star[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
19 %         return F_star
20
21 %     else:
22 %         C: nx.DiGraph = find_cycle(F_star)
23
24 %         contracted_label = f"\n n*{level}"
25 %         in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(
26 %             D_copy, C, contracted_label
27 %         )
28
29 %         # Recursive call
30 %         F_prime = find_optimum_arborescence_chuliu(
31 %             D_copy,
32 %             r0,
33 %             level + 1
34 %         )
35
36 %         # Identify the vertex in the cycle that received the only incoming
37 %         # edge from the arborescence
38 %         in_edge = next(iter(F_prime.in_edges(contracted_label, data="w")),
39 %             None)
40
41 %         u, _, _ = in_edge
42
43 %         v, _ = in_to_cycle[u]
44
45 %         # Remove the internal edge entering vertex 'v' from cycle C
46 %         remove_internal_edge_to_cycle_entry(
47 %             C, v
48 %         ) # Note: w is coming from F_prime, not from G

```

```

47
48 %         # Add the external edge entering the cycle (identified by in_edge)
         , the weight will be corrected at the end using G
49 %         F_prime.add_edge(u, v)
50
51 %         # Add the remaining edges of the modified cycle C
52 %         for u_c, v_c in C.edges:
53 %             F_prime.add_edge(u_c, v_c)
54
55 %         # Add the external edges leaving the cycle
56 %         for _, z, _ in F_prime.out_edges(contracted_label, data=True):
57
58 %             u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
59 %             F_prime.add_edge(u_cycle, z)
60
61 %         F_prime.remove_node(contract_label)
62
63 %         # Update the edge weights with the original weights from G
64 %         for u, v in F_prime.edges:
65 %             F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
66
67 %         return F_prime

```

1.3.2.6 Notas finais sobre a implementação

A implementação acima segue diretamente a descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds, enfatizando clareza e correção. Para aplicações práticas, otimizações podem ser introduzidas, como estruturas de dados eficientes para seleção de mínimos, detecção rápida de ciclos e manipulação de grafos dinâmicos. Além disso, a função pode ser adaptada para lidar com casos especiais, como grafos desconexos ou múltiplas raízes, conforme necessário.

A complexidade da implementação direta é $O(mn)$ no pior caso, onde m é o número de arestas e n o número de vértices, devido à potencial profundidade de recursão e ao processamento linear em cada nível. Implementações mais sofisticadas podem reduzir isso para $O(m \log n)$ usando estruturas avançadas, como heaps e union-find, mas a versão apresentada prioriza a compreensão do algoritmo fundamental.

SAMIRA

1.3.2.7 Decisões de projeto e implicações práticas

Antes de prosseguir para uma visão alternativa do mesmo problema, vale destacar algumas decisões de projeto e implicações práticas da implementação de Chu–Liu/Edmonds:

- **Estruturas e efeitos colaterais:** Optamos por modificar grafos *in-place* (por exemplo, durante a normalização e a contração de ciclos) para reduzir alocações e facilitar a visualização incremental. Isso exige invariantes explícitos e cuidado com referências ativas ao grafo original.
- **Empates, paralelos e laços:** Empates são resolvidos de forma determinística/local sem afetar a otimalidade. A contração pode induzir *arcos paralelos*; preservamos apenas o de menor custo. Laços (self-loops) são descartados por construção.
- **Validação e testes:** O repositório inclui artefatos úteis para experimentação (por exemplo, `tests.py`, `test_results.csv`, `test_log.txt`). Onde um volume de grafos é gerado aleatoriamente, a função é executada e os resultados são validados são comparados com soluções de força bruta.
- **Integração com visualização e logs:** A função `draw_fn` permite registrar *snapshots* (normalização, formação de F^* , contração/expansão). O log facilita auditoria e depuração em execuções recursivas.
- **Extensões:** Variantes com múltiplas raízes, restrições adicionais (p.ex., proibições por partição) e empacotamento de arborescências exigem ajustes na fase de extração/expansão ou formulações via matroides.

1.3.2.8 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode parecer um conjunto de heurísticas bem-sucedidas sem uma justificativa teórica unificadora aparente. Por que escolher a melhor entrada para cada vértice garante otimalidade global após o tratamento de ciclos? A resposta reside na *dualidade em programação linear*.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica primal–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais⁶ $y(\cdot)$, explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma

⁶ No contexto primal–dual, “potenciais” são valores escalares $y(v)$ atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$. Ajustar y desloca uniformemente os custos das arestas que entram em v , sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna “apertadas” (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de correteza via cortes apertados.

mecânica operacional (normalizar \rightarrow contrair \rightarrow expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [12](#) e [15](#).

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 4 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [15](#) e [16](#).

Anexos

ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.