

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca
de uma r -Arborescência Inversa de Custo Mínimo
em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática
Interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma
r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos
Dirigidos com Aplicação Didática Interativa**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre.

Universidade

Faculdade

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

Dedicatória (opcional).

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional).

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r -arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

Palavras-chave: Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r -arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

Keywords: Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais "mais baratas por vértice". Os arcos grossos (custo 1) entram em a, b, c e formam $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Os arcos tracejados partindo de r existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local.	11
Figura 2 – Bijecção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em D' escolhe exatamente um arco que entra em x_C ; ao expandir C , esse arco corresponde a um (u, w) que entra em algum $w \in C$ e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total.	12
Figura 3 – Reexpansão de C : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em x_C ; ao expandir, x_C é substituído por C e o arco selecionado entra em algum $w \in C$; remove-se exatamente um arco interno de C para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero).	13
Figura 4 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice v com três arestas de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar <code>normalize_incoming_edge_weights(D, v)</code> : o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. A aresta (u_2, v) (em vermelho) tem custo zero e será selecionada para F^*	20
Figura 5 – Exemplo de construção de F^* a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo D após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos uma aresta de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo F^* resultante contém apenas as arestas de custo zero selecionadas, uma por vértice. Note que F^* pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$) que serão tratados nas etapas subsequentes.	22
Figura 6 – Exemplo de detecção de ciclo em F^* . À esquerda, o subgrafo F^* contém um ciclo formado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar a aresta (v_4, v_2) , onde v_2 já está na pilha de recursão. À direita, a função retorna uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e as três arestas que formam o ciclo.	24

- Figura 7 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original D com ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ (em amarelo). Vértices externos r , v_1 e v_5 têm arestas conectando ao ciclo: r envia aresta para v_2 (peso 2) e v_4 (peso 5); v_4 envia aresta para v_5 (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice x_C (vermelho). As arestas de entrada são redirecionadas: (r, x_C) recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). A aresta de saída (x_C, v_5) mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão. 27
- Figura 8 – Remoção de aresta interna durante reexpansão. À esquerda, ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ após adicionar aresta externa (u, v_2) vindoura da arborescência T' : o vértice v_2 tem grau de entrada 2 (aresta externa vermelha de u e aresta interna do ciclo vinda de v_4), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover a aresta interna (v_4, v_2) : o vértice v_2 passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. A aresta removida é mostrada tracejada em cinza. 30
- Figura 9 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplas arestas com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arestas que entram na raiz, porém não há nenhuma neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo. 36
- Figura 10 – Normalização parcial das arestas de entrada para o vértice 1. As arestas de entrada são $(0 \rightarrow 1)$ com peso original 3 e $(2 \rightarrow 1)$ com peso original 1. Elegendo a aresta $(2 \rightarrow 1)$ como a de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todas as arestas de entrada: $(0 \rightarrow 1)$ passa de peso 3 para 2, e $(2 \rightarrow 1)$ passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices. 36
- Figura 11 – Grafo contraído após detecção do ciclo $C = \{1, 2\}$ em F^* . O ciclo foi contraído no supervértice $n*0$ (destacado em vermelho). As arestas que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionadas para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ para arestas de entrada e $c'(x_C, v) := c(w, v)$ para arestas de saída. . . 37

- Figura 12 – Arborescência ótima F' obtida no grafo contraído. Todas as arestas selecionadas têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o grafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente uma aresta de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como F' é acíclico, alcançamos o caso base da recursão. 37
- Figura 13 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice $n * 0$ foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com a aresta externa $(0, 1)$ escolhida pela solução recursiva conectando ao ciclo. A aresta interna $(2, 1)$ do ciclo original foi removida para manter a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arestas, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0. 38

Sumário

1	ALGORITMO DE CHU-LIU/EDMONDS	11
1.1	Descrição do algoritmo	12
1.1.1	Corretude	14
1.1.2	Complexidade	14
1.2	Implementação em Python	15
1.2.1	Representação de Digrafos: NetworkX	15
1.2.1.1	Estrutura Interna	15
1.2.1.2	Operações Fundamentais	16
1.2.1.3	Busca em Profundidade (DFS)	16
1.2.1.3.1	Funcionamento básico:	16
1.2.1.3.2	Deteção de ciclos em digrafos:	16
1.2.1.3.3	Complexidade:	17
1.2.1.3.4	Implementação em NetworkX:	17
1.2.2	Especificação do Algoritmo	18
1.2.3	Normalização por vértice	18
1.2.4	Construção de F^* :	20
1.2.5	Deteção de ciclo:	22
1.2.6	Contração de ciclo:	24
1.2.7	Remoção de arestas que entram na raiz:	28
1.2.8	Remoção de arco interno:	29
1.2.9	Procedimento principal (recursivo):	31
1.2.9.1	Exemplo de execução do algoritmo	36
1.2.10	Transição para a abordagem primal-dual	38
	REFERÊNCIAS	39
	ANEXOS	40
	ANEXO A – ANEXO A	41

1 Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

O algoritmo de Chu–Liu/Edmonds encontra uma r -arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. A estratégia funciona de forma gulosa ao escolher, para cada vértice $v \neq r$, o arco de entrada mais barato. No entanto, essa abordagem pode gerar ciclos dirigidos, incompatíveis com a estrutura de arborescência. O algoritmo resolve esse problema combinando normalização de custos, contração de ciclos em supervértices e expansão controlada para garantir otimalidade.

O algoritmo se baseia no fato que em uma r -arborescência, cada $v \neq r$ deve ter exatamente um arco de entrada e r tem grau de entrada zero. Se escolhermos para cada vértice o arco mais barato que nele entra, podemos formar um ciclo dirigido C onde todos os vértices recebem seu único arco de dentro do próprio C . Nesse caso, nenhum arco entraria em C a partir de $V \setminus C$ (o corte $\delta^-(C)$ ficaria vazio) e, como $r \notin C$, não existiria caminho de r para os vértices de C , contrariando a alcançabilidade exigida.

A Figura 1 ilustra com um microexemplo: três vértices a, b, c (todos fora de r) onde o arco mais barato que entra em b vem de a , o de c vem de b e o de a vem de c , formando o ciclo $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Embora existam arcos de r para cada vértice, eles são mais caros e não são escolhidos pelo critério local, deixando os vértices "presos" no ciclo sem conexão com a raiz.

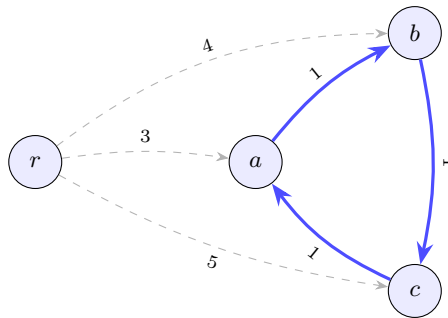


Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais "mais baratas por vértice". Os arcos grossos (custo 1) entram em a, b, c e formam $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Os arcos tracejados partindo de r existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local.

A solução consiste em *normalizar os custos por vértice*: para cada $v \neq r$, subtraímos de todo arco que entra em v o menor custo entre os arcos que chegam a v . Após esse ajuste (custos reduzidos), cada $v \neq r$ passa a ter ao menos um arco de custo reduzido zero. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a r -arborescência ótima. Se formarem um ciclo C , *contraímos* C em um **supervértice** x_C , ajustamos os custos dos arcos externos e resolvemos recursivamente no grafo menor. Ao final, *expandimos* as

contrações removendo exatamente um arco interno de cada ciclo para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global.

1.1 Descrição do algoritmo

A seguir apresentamos uma descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. Detalhes de implementação serão discutidos na próxima seção. Denotamos por A' o conjunto de arcos escolhidos na construção da r -arborescência.

Construa A' escolhendo, para cada $v \neq r$, um arco de menor custo que entra em v . Se (V, A') é acíclico, então A' já é uma r -arborescência ótima, pois realizamos o menor custo de entrada em cada vértice e nenhuma troca pode reduzir o custo mantendo as restrições (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Sec. 4.9).

Se A' contiver um ciclo dirigido C (que não inclui r), normalizamos os custos de entrada, contraímos C em um supervértice x_C ajustando arcos que entram em C por $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$, e resolvemos recursivamente no grafo contraído.

As arborescências do grafo contraído correspondem, em bijeção, às arborescências do grafo original com exatamente um arco entrando em C . Como os arcos internos de C têm custo reduzido zero, os custos são preservados na ida e na volta.

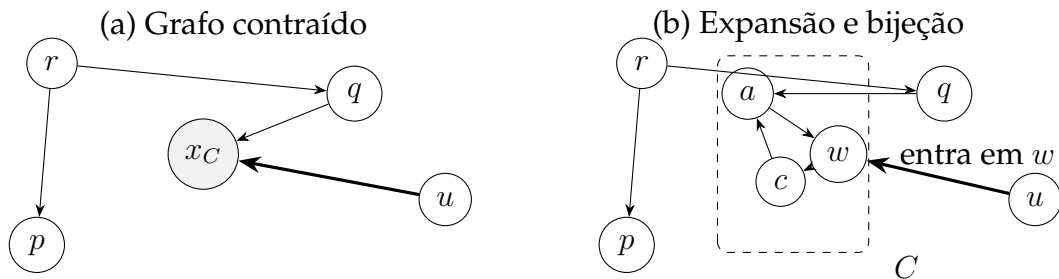


Figura 2 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em D' escolhe exatamente um arco que entra em x_C ; ao expandir C , esse arco corresponde a um (u, w) que entra em algum $w \in C$ e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total.

Na expansão, reintroduzimos C e removemos exatamente um arco interno para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global (SCHRIJVER, 2003; KLEINBERG; TARDOS, 2006).

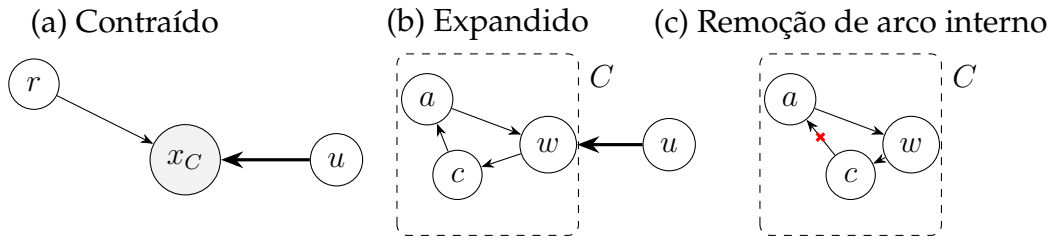


Figura 3 – Reexpansão de C : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em x_C ; ao expandir, x_C é substituído por C e o arco selecionado entra em algum $w \in C$; remove-se exatamente um arco interno de C para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero).

Abaixo, temos a descrição formal do algoritmo.

Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo $D = (V, A)$, custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, raiz r .^a

1. Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $F^* := \{a_v : v \neq r\}$.
2. Se (V, F^*) é acíclico, devolva F^* . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r -arborescência de custo mínimo.
3. Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de F^* (com $r \notin C$). **Contração:** contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

4. **Recursão:** compute uma r -arborescência ótima T' de D' com custos c' .
5. **Expansão:** seja $(u, x_C) \in T'$ o único arco que entra em x_C . No grafo original, ele corresponde a (u, w) com $w \in C$. Forme

$$T := (T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}) \cup \{(u, w)\} \cup ((F^* \cap A(C)) \setminus \{a_w\}).$$

Então T tem grau de entrada 1 em cada $v \neq r$, é acíclico e tem o mesmo custo de T' ; logo, é uma r -arborescência ótima de D (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

^a Se algum $v \neq r$ não possui arco de entrada, não existe r -arborescência.

1.1.1 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos*: para cada $v \neq r$, defina $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$ e $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$. Para qualquer r -arborescência T , vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de T entrando em cada $v \neq r$. O termo $\sum_{v \neq r} y(v)$ é constante (independe de T); assim, minimizar $\sum c$ equivale a minimizar $\sum c'$ (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos a_v de menor custo que entram em v têm custo reduzido zero e formam F^* .

2. *Caso acíclico*: se (V, F^*) é acíclico, então já é uma r -arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada $v \neq r$, é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).
3. *Caso com ciclo (contração/expansão)*: se F^* contém um ciclo dirigido C , todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

Contraia C em x_C e ajuste apenas arcos que *entram* em C : $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$.

Resolva o problema no grafo contraído D' , obtendo uma r -arborescência ótima T' sob c' . Na expansão, substitua o arco $(u, x_C) \in T'$ pelo correspondente (u, w) (com $w \in C$) e remova a_w de C .

Como os arcos de C têm custo reduzido zero e $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$, a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo, T' ótimo em D' mapeia para T ótimo em D para c' . Pela equivalência entre c e c' , T também é ótimo para c . Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

Em termos intuitivos, y funciona como um potencial nos vértices: torna “apertados” (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

1.1.2 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os a_v , detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa $O(m)$ por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo $O(n)$ níveis e tempo total $O(mn)$, com $n = |V|$, $m = |A|$.

O uso de memória é $O(m + n)$, incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão $O(mn)$ por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>).

1.2 Implementação em Python

Esta seção apresenta uma implementação em Python do algoritmo. A arquitetura segue os passos teóricos: recebe como entrada um digrafo ponderado, os custos das arestas e o vértice raiz. O procedimento seleciona, para cada vértice, o arco de menor custo de entrada, verifica se o grafo é acíclico e, se necessário, contrai ciclos e ajusta custos. Ao final, retorna como saída a r -arborescência ótima: um conjunto de arestas que conecta todos os vértices à raiz com custo mínimo.

1.2.1 Representação de Digrafos: NetworkX

A implementação utiliza a biblioteca NetworkX¹, que fornece estruturas de dados eficientes para grafos e digrafos. A classe `nx.DiGraph` representa grafos direcionados (directed graphs) e constitui a base para todas as operações do algoritmo.

1.2.1.1 Estrutura Interna

Internamente, `nx.DiGraph` armazena o grafo usando dicionários aninhados do Python. Para um digrafo $D = (V, A)$:

- **Vértices:** mantidos em um dicionário que mapeia cada vértice para seus atributos. O método `D.nodes()` retorna uma visão (`NodeView`) sobre o conjunto de vértices, permitindo iteração em tempo $O(n)$.
- **Arestas:** armazenadas em estruturas de adjacência bidirecionais. Para cada vértice u , mantém-se:
 - Um dicionário de *sucessores*: vértices v tais que $(u, v) \in A$, acessível via `D[u]`.
 - Um dicionário de *predecessores*: vértices w tais que $(w, u) \in A$, usado por `D.in_edges(u)`.
- **Atributos de arestas:** cada aresta pode ter atributos arbitrários armazenados como dicionários. A notação `D[u][v]["w"]` acessa o atributo "w" (peso) da aresta (u, v) .

¹ NetworkX é uma biblioteca Python para criação, manipulação e estudo de estruturas, dinâmicas e funções de redes complexas. Disponível em <https://networkx.org/>.

Esta representação garante acesso eficiente: adicionar ou remover uma aresta tem complexidade $O(1)$ em média, consultar os vizinhos de um vértice custa $O(\deg(v))$, e iterar sobre todas as arestas leva tempo $O(m)$.

1.2.1.2 Operações Fundamentais

As operações básicas usadas na implementação incluem:

- `D.nodes()`: retorna visão sobre os vértices, permitindo iteração e verificação de pertinência.
- `D.in_edges(v, data="w")`: retorna as arestas que entram em v , opcionalmente incluindo atributos. Com `data="w"`, produz tuplas (u, v, w) onde w é o peso.
- `D.out_edges(u, data="w")`: retorna as arestas que saem de u , análogo a `in_edges`.
- `D.add_edge(u, v, **attr)`: adiciona a aresta (u, v) com atributos opcionais. Se u ou v não existirem, são criados automaticamente.
- `D.remove_edges_from(edges)`: remove múltiplas arestas em lote, recebendo lista de tuplas (u, v) .
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: remove múltiplos vértices e todas as suas arestas incidentes.

1.2.1.3 Busca em Profundidade (DFS)

A busca em profundidade (Depth-First Search, DFS) é um algoritmo fundamental de travessia de grafos que explora sistematicamente cada ramo do grafo até sua máxima profundidade antes de retroceder. Em digrafos, a DFS é particularmente útil para detectar ciclos dirigidos, uma operação essencial no algoritmo de Chu–Liu/Edmonds.

1.2.1.3.1 Funcionamento básico:

A partir de um vértice inicial s , a DFS marca s como visitado e recursivamente visita cada vizinho não visitado. Quando todos os vizinhos de um vértice foram explorados, o algoritmo retrocede (backtrack) para o vértice anterior na pilha de recursão.

1.2.1.3.2 Detecção de ciclos em digrafos:

Para detectar ciclos, a DFS mantém três estados para cada vértice:

- **Não visitado**: vértice ainda não explorado.

- **Em processamento:** vértice na pilha de recursão atual (ancestral no caminho DFS).
- **Concluído:** vértice totalmente processado (todos os descendentes explorados).

Um ciclo é detectado quando a DFS encontra uma aresta (u, v) onde v está *em processamento*: isso significa que existe um caminho de v até u na árvore DFS atual, e a aresta (u, v) fecha um ciclo.

1.2.1.3.3 Complexidade:

A DFS visita cada vértice exatamente uma vez e examina cada aresta no máximo uma vez (ao explorar os vizinhos). Portanto, a complexidade é $O(n + m)$, onde $n = |V|$ e $m = |A|$.

1.2.1.3.4 Implementação em NetworkX:

A biblioteca NetworkX fornece a função `nx.find_cycle(G, orientation="original")` que implementa detecção de ciclos baseada em DFS. Esta função aceita dois parâmetros principais: o grafo G a ser analisado e o parâmetro opcional `orientation` que controla o formato de saída das arestas encontradas.

Quando invocada, a função percorre o grafo executando DFS a partir de cada vértice não visitado. Durante a travessia, mantém o estado de cada vértice (não visitado, em processamento, ou concluído) e, ao detectar uma aresta de retorno — isto é, uma aresta (u, v) onde v está atualmente na pilha de recursão —, identifica a presença de um ciclo.

O retorno da função é um *iterador* (não uma lista materializada) sobre as arestas que compõem o ciclo detectado. Cada elemento do iterador é uma tupla (u, v, key) quando `orientation="original"`, onde u e v são os vértices da aresta e `key` contém metadados de orientação (que tipicamente ignoramos usando desempacotamento com `_`). A escolha de retornar um iterador em vez de uma lista reduz o uso de memória, permitindo processamento sob demanda das arestas do ciclo.

Um aspecto crucial do design desta função é seu comportamento em grafos acíclicos: em vez de retornar um valor especial como `None` ou uma lista vazia, a função lança a exceção `NetworkXNoCycle`. Esta decisão de design segue o princípio EAFP (*Easier to Ask for Forgiveness than Permission*) do Python, onde operações excepcionais são sinalizadas por exceções em vez de valores de sentinela. Isso força o código cliente a tratar explicitamente o caso acíclico com um bloco `try-except`, resultando em código mais robusto e com intenção clara.

A complexidade da função é $O(n + m)$, onde $n = |V|$ e $m = |A|$, pois no pior caso (grafo acíclico) a DFS visita todos os vértices e examina todas as arestas exatamente uma vez antes de concluir que não há ciclos.

1.2.2 Especificação do Algoritmo

Com a representação estabelecida, especificamos formalmente o algoritmo implementado:

- **Entrada:** digrafo ponderado $D = (V, A)$ (objeto `nx.DiGraph`), custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ armazenados no atributo "w" das arestas, raiz $r \in V$.
- **Hipóteses:**
 - D é conexo a partir de r : (i) todo $v \neq r$ é alcançável a partir de r (caso contrário, não há r -arborescência); (ii) para todo subconjunto não vazio $X \subseteq V \setminus \{r\}$, existe ao menos um arco que entra em X ($\delta^-(X) \neq \emptyset$; condições clássicas de existência à la Edmonds ([SCHRIJVER, 2003](#))).
 - Os custos são não negativos: $c(a) \geq 0$ para todo $a \in A$.
- **Saída:** subgrafo T (objeto `nx.DiGraph`) com $|A_T| = |V| - 1$ arestas, tal que cada $v \neq r$ tem grau de entrada 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de r e $\sum_{a \in A_T} c(a)$ é mínimo.
- **Convenções:** arcos paralelos (múltiplos arcos entre o mesmo par de vértices) são permitidos após contrações; laços (self-loops) são descartados.

Criamos funções auxiliares para traduzir cada passo do algoritmo teórico em operações concretas sobre o objeto `nx.DiGraph` e uma função principal chama essas auxiliares na ordem correta, gerenciando contrações e expansões e todo o fluxo descrito formalmente na seção anterior.

A seguir, detalhamos as implementações das funções auxiliares, apresentamos como elas correspondem aos passos do algoritmo teórico, apresentamos exemplos de uso e por fim discutiremos a função principal que orquestra a execução do algoritmo. Cada função é explicada em termos de sua lógica, parâmetros, retornos e complexidade, começando pela normalização dos custos por vértice.

1.2.3 Normalização por vértice

Esta função implementa a normalização de custos reduzidos: calcula $y(v) = \min\{w(u, v)\}$ e substitui cada peso $w(u, v)$ por $w(u, v) - y(v)$, garantindo que ao menos uma aresta de entrada tenha custo zero. Como cada r -arborescência possui exatamente

uma aresta entrando em cada vértice não-raiz, a soma total dos valores $y(v)$ subtraídos é constante para qualquer solução, preservando assim a ordem de otimalidade entre diferentes arborescências.

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo `node` do vértice a ser normalizado. A implementação coleta todas as arestas de entrada de `node` com seus pesos usando o método `D.in_edges(node, data="w")`, que retorna uma lista de tuplas $(u, node, w)$ (linha 2). Em seguida, verifica se a lista está vazia e se estiver retorna imediatamente sem fazer alterações (linhas 3–4). Caso contrário, calcula o peso mínimo y_v através de uma compreensão de gerador que extrai o terceiro elemento de cada tupla (linha 5) e, para cada predecessor u , subtrai y_v do peso armazenado em `D[u][node]["w"]` (linha 6).

Não retorna nenhum valor (retorno implícito `None`), pois a operação é realizada in-place: o grafo D passado como parâmetro é modificado diretamente, e ao menos uma aresta de entrada de `node` terá custo reduzido zero após a execução. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, pois cada operação percorre as arestas de entrada uma única vez.

Normalização por vértice: custos reduzidos

Normaliza os pesos das arestas que entram em `node`, subtraindo de cada uma o menor peso de entrada. Modifica o grafo D in-place.

```
1 def normalize_incoming_edge_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
2     predecessors = list(D.in_edges(node, data="w"))
3     if not predecessors:
4         return
5     yv = min((w for _, _, w in predecessors))
6     D[u][node]["w"] -= yv
```

A Figura 4 ilustra o funcionamento da normalização:

Antes: $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$ **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

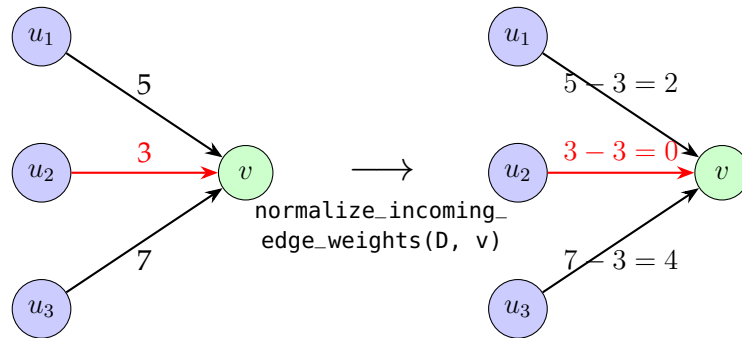


Figura 4 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice v com três arestas de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar `normalize_incoming_edge_weights(D, v)`: o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. A aresta (u_2, v) (em vermelho) tem custo zero e será selecionada para F^* .

Observe que as diferenças relativas são preservadas: a aresta mais cara permanece 4 unidades acima da mais barata, e a intermediária mantém sua posição relativa. Como cada r -arborescência contém exatamente uma aresta entrando em cada vértice não-raiz, a soma $\sum_{w \neq r} y(w)$ é constante para qualquer solução, garantindo que a ordem de otimalidade seja preservada.

1.2.4 Construção de F^* :

Esta função constrói o subdigrafo F^* selecionando, para cada vértice $v \neq r_0$, uma única aresta de custo reduzido zero que entra em v .

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo `r0` da raiz. A implementação cria um novo digrafo vazio `F_star` (linha 2) em vez de modificar D diretamente; essa escolha de criar uma estrutura separada é fundamental porque F^* é um subgrafo conceitual usado para detecção de ciclos, e preservar D inalterado permite que as operações subsequentes (como contração) trabalhem com o grafo original completo, evitando perda de informação sobre arestas não selecionadas que podem ser necessárias após reexpansões.

Em seguida, para cada vértice v diferente de `r0` (linhas 3–4), utilizando o método `D.nodes()`, coleta todas as arestas de entrada de v com seus pesos em uma lista e armazena na variável `in_edges` (linha 5); a materialização em lista é necessária porque a subsequente iteração sobre as arestas para encontrar aquela de peso zero poderia causar problemas se trabalhássemos diretamente com a visão retornada por `in_edges`, especialmente em cenários de modificação concorrente. Se não houver arestas de entrada, prossegue para o próximo vértice (linhas 6–7) usando `continue`, pois um vértice isolado

ou inacessível não contribui para F^* e sua ausência será detectada posteriormente como violação das hipóteses de conectividade.

Caso contrário, utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o primeiro predecessor u cuja aresta (u, v) tem peso zero (linha 8); a escolha de `next` com gerador em vez de uma busca exaustiva é eficiente porque interrompe a iteração assim que encontra a primeira aresta de custo zero, evitando processamento desnecessário das arestas restantes (embora teoricamente todas as arestas de custo zero sejam equivalentes, na prática apenas uma é necessária para F^*). A função `next` retorna `None` se nenhuma aresta de peso zero existir, o que teoricamente não deveria ocorrer após a normalização correta (que garante ao menos uma aresta de custo zero por vértice), mas o tratamento defensivo evita erros em casos degenerados. Se tal aresta existir, adiciona-a a F_{star} com peso zero usando o método `add_edge` (linhas 9–10); a especificação explícita de $w=0$ garante que F^* contenha apenas arestas de custo reduzido zero, propriedade fundamental para a corretude do algoritmo.

Retorna o digrafo F_{star} contendo exatamente uma aresta entrando em cada $v \neq r_0$, todas com custo reduzido zero. O grafo original D não é modificado, preservando o estado para operações futuras. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arestas, pois cada aresta é considerada no máximo uma vez durante a iteração sobre todos os vértices: para cada um dos $n - 1$ vértices não-raiz, examina-se suas arestas de entrada (totalizando no máximo m arestas ao longo de todas as iterações), e para cada vértice a busca por aresta de peso zero é interrompida no primeiro match, resultando em tempo linear no tamanho do grafo.

Construção de F_{star}

Constrói o subdigrafo F^ a partir do digrafo D , selecionando para cada vértice (exceto a raiz r_0) uma aresta de custo reduzido zero que entra nele.*

```

1 def get_Fstar(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     F_star = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r0:
5             in_edges = list(D.in_edges(v, data="w"))
6             if not in_edges:
7                 continue
8             u = next((u for u, _, w in in_edges if w == 0), None)
9             if u:
10                 F_star.add_edge(u, v, w=0)
11     return F_star

```

A Figura 5 ilustra a construção de F^* :

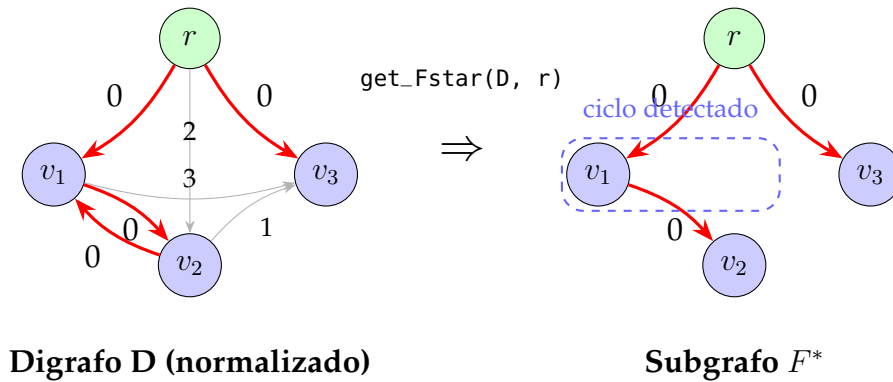


Figura 5 – Exemplo de construção de F^* a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo D após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos uma aresta de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo F^* resultante contém apenas as arestas de custo zero selecionadas, uma por vértice. Note que F^* pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$) que serão tratados nas etapas subsequentes.

A detecção de ciclos é crucial, pois a presença de um ciclo em F^* indica que a escolha de arestas de custo reduzido zero não formou uma arborescência válida. Esses ciclos precisam ser tratados nas etapas subsequentes do algoritmo.

As funções de normalização por vértice e construção de F^* juntas implementam o passo 1 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passo 1 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 1: Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $F^* := \{a_v : v \neq r\}$.

1.2.5 Detecção de ciclo:

Esta função detecta a presença de um ciclo dirigido em F^* e retorna um subgrafo que o contém; se F^* for acíclico, retorna None.

Recebe como entrada um digrafo `F_star` (objeto `nx.DiGraph`). A implementação utiliza um bloco `try` (linha 2) para capturar exceções caso não haja ciclo; esta escolha de tratamento por exceção é necessária porque a API do NetworkX adota o padrão EAFP (*Easier to Ask for Forgiveness than Permission*), onde `nx.find_cycle` não retorna um valor especial (como None) quando o grafo é acíclico, mas sim lança a exceção `NetworkXNoCycle` para sinalizar a ausência de ciclos.

Em seguida a função inicializa um conjunto vazio `nodes_in_cycle` (linha 3) e emprega a função `nx.find_cycle` do NetworkX (linha 4), que realiza uma busca em

profundidade (DFS) para detectar ciclos (ver Seção 1.2.1.3). A função `nx.find_cycle` percorre o grafo visitando vértices e arestas: ao encontrar uma aresta (u, v) onde v já está na pilha de recursão da DFS, identifica um ciclo e retorna um iterador sobre todas as arestas que compõem esse ciclo. O laço na linha 4 itera sobre essas arestas retornadas, desempacotando cada uma na forma $(u, v, _)$ (ignorando o terceiro elemento com `_`, que contém metadados de orientação), e para cada aresta (u, v) adiciona ambos os vértices ao conjunto `nodes_in_cycle` (linha 5); a escolha de usar conjunto em vez de lista garante que cada vértice seja adicionado apenas uma vez mesmo que o ciclo tenha múltiplas arestas incidentes, e a operação de adição tem complexidade $O(1)$ amortizada.

Após coletar todos os vértices do ciclo, constrói e retorna uma cópia do subgrafo induzido por eles (linha 7); a cópia é necessária porque o método `subgraph` retorna apenas uma visão dinâmica sobre o grafo original.

Se nenhum ciclo existir, a exceção `nx.NetworkXNoCycle` é capturada no bloco `except` (linha 8) e a função retorna `None` (linha 9);

No final, um subgrafo contendo os vértices e arestas do ciclo detectado é retornado, ou `None` se não houver ciclo. O grafo original `F_star` não é modificado. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arestas, pois a DFS visita cada aresta no máximo uma vez.

Detecção de ciclo dirigido em F^*

Detecta um ciclo dirigido em F^ e retorna um subgrafo contendo seus vértices e arestas, ou `None` se for acíclico.*

```

1 def find_cycle(F_star: nx.DiGraph):
2     try:
3         nodes_in_cycle = set()
4         for u, v, _ in nx.find_cycle(F_star, orientation="original"):
5             nodes_in_cycle.update([u, v])
6         return F_star.subgraph(nodes_in_cycle).copy()
7     except nx.NetworkXNoCycle:
8         return None

```

A Figura 6 ilustra o processo de detecção de ciclo:

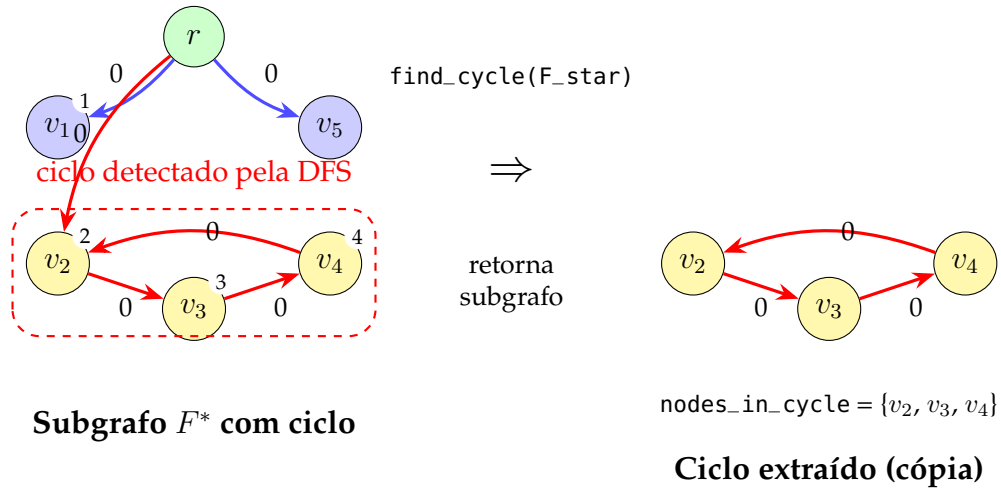


Figura 6 – Exemplo de detecção de ciclo em F^* . À esquerda, o subgrafo F^* contém um ciclo formado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar a aresta (v_4, v_2) , onde v_2 já está na pilha de recursão. À direita, a função retorna uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e as três arestas que formam o ciclo.

Ao detectar um ciclo, a função permite que o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds prossiga para a etapa de contração, onde o ciclo será reduzido a um supervértice, facilitando a resolução do problema no grafo modificado.

1.2.6 Contração de ciclo:

Esta função contrai um ciclo dirigido C em um supervértice x_C , redirecionando arcos incidentes e ajustando custos segundo a regra de custos reduzidos. Retorna dicionários auxiliares para reexpansão.

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`), o ciclo C a ser contraído e o rótulo `label` do novo supervértice. A implementação coleta os vértices de C em um conjunto (linha 2) para permitir verificações de pertinência em tempo $O(1)$, essencial dado que essa operação é realizada repetidamente nos laços seguintes. Inicializa `in_to_cycle` (linha 3), um dicionário que tem como chave vértices externos ao ciclo e como valor tuplas (v, w) , onde v é o vértice do ciclo conectado a u e w é o peso da aresta (u, v) ; essa estrutura preserva não apenas o peso mínimo, mas também o ponto exato de entrada no ciclo, informação crucial para a reexpansão posterior.

Para cada vértice u no digrafo D (linha 4), se u não pertence ao ciclo (linha 5), identifica a aresta de menor peso que sai de u e entra em C (linhas 6–9) usando uma compreensão de gerador: a expressão `((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in cycle_nodes)` itera sobre todas as arestas que saem de u , desempacota cada aresta na forma $(_, v, w)$ (ignorando a origem com `_`, capturando o destino

v e o peso w), filtra apenas aquelas cujo destino v pertence ao ciclo, e produz tuplas (v, w) ; a função `min` (linha 6) então seleciona a tupla de menor peso usando `key=lambda x: x[1]` (linha 7) para comparar pelo segundo elemento (o peso), e retorna `None` se não houver arestas (linha 8). A escolha de selecionar apenas a aresta de *menor peso* reflete a propriedade fundamental do algoritmo: qualquer solução ótima que conecta um vértice externo ao ciclo contraído usará necessariamente a aresta de custo mínimo, pois todas as outras seriam subótimas. Se tal aresta existir, armazena em `in_to_cycle` (linhas 9–10).

Em seguida, a implementação itera sobre `in_to_cycle` usando o método `items()`, desempacotando cada entrada na forma $(u, (v, w))$, onde u é o vértice externo e (v, w) é a tupla com o vértice do ciclo e o peso (linhas 11–12). Para cada par, cria uma aresta de `u` para `label` com peso w , efetivamente redirecionando as arestas de entrada para o supervértice. A separação entre coleta (linhas 4–10) e criação (linhas 11–12) é necessária porque modificar o grafo durante a iteração sobre seus vértices causaria comportamento indefinido; ao coletar primeiro todos os dados em estruturas auxiliares, garantimos que as modificações posteriores sejam seguras.

De forma análoga, constrói o dicionário `out_from_cycle` (linha 13) para mapear arestas que saem do ciclo. Para cada vértice v em D (linha 14), se v não pertence ao ciclo (linha 15), identifica a aresta de menor peso que sai de C e entra em v (linhas 16–17) usando uma compreensão de gerador análoga: a expressão `((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in cycle_nodes)` itera sobre todas as arestas que entram em v , desempacota cada aresta na forma $(u, _, w)$ (capturando a origem u , ignorando o destino com `_`, e capturando o peso w), filtra apenas aquelas cuja origem u pertence ao ciclo, e produz tuplas (u, w) ; a função `min` seleciona a de menor peso pela mesma razão de otimalidade. Se existir, armazena em `out_from_cycle` (linhas 18–19). Depois, itera sobre `out_from_cycle` e cria arestas de `label` para cada vértice v com os respectivos pesos (linhas 20–21). Por fim, remove todos os vértices de C do grafo (linha 22); essa remoção é realizada por último para garantir que todas as operações de consulta (linhas 4–21) tenham acesso aos dados originais antes da modificação estrutural.

Retorna dois dicionários: `in_to_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de entrada no ciclo original, e `out_from_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de saída. Esses dicionários são essenciais para a fase de reexpansão, onde será necessário determinar exatamente qual aresta interna do ciclo deve ser removida para restaurar a propriedade de arborescência. O digrafo D é modificado in-place: os vértices de C são removidos e substituídos por `label`. A escolha de modificação in-place (em vez de criar uma cópia) reduz significativamente o uso de memória e o tempo de execução, especialmente em grafos grandes ou com múltiplos níveis de recursão, embora exija atenção cuidadosa ao gerenciamento de referências. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arestas, pois cada aresta incidente ao ciclo é processada uma vez: os laços

nas linhas 4–10 e 14–19 examinam cada aresta no máximo uma vez, e as operações de adição (linhas 11–12, 20–21) e remoção (linha 22) têm custo proporcional ao número de arestas afetadas.

Contração de ciclo

Contraí o ciclo C em um supervértice $label$, redirecionando arcos incidentes e ajustando custos. Modifica D in-place e retorna dicionários para reexpansão.

```

1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str):
2     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
4     for u in D.nodes:
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in
8                     cycle_nodes),
9                 key=lambda x: x[1],
10                default=None,)
11             if min_weight_edge_to_cycle:
12                 in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
13     for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
14         D.add_edge(u, label, w=w)
15     out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
16     for v in D.nodes:
17         if v not in cycle_nodes:
18             min_weight_edge_from_cycle = min(
19                 ((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in
20                     cycle_nodes), key=lambda x: x[1], default=None,)
21             if min_weight_edge_from_cycle:
22                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
23     for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
24         D.add_edge(label, v, w=w)
25     D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
26     return in_to_cycle, out_from_cycle

```

A Figura 7 ilustra o processo de contração de ciclo:

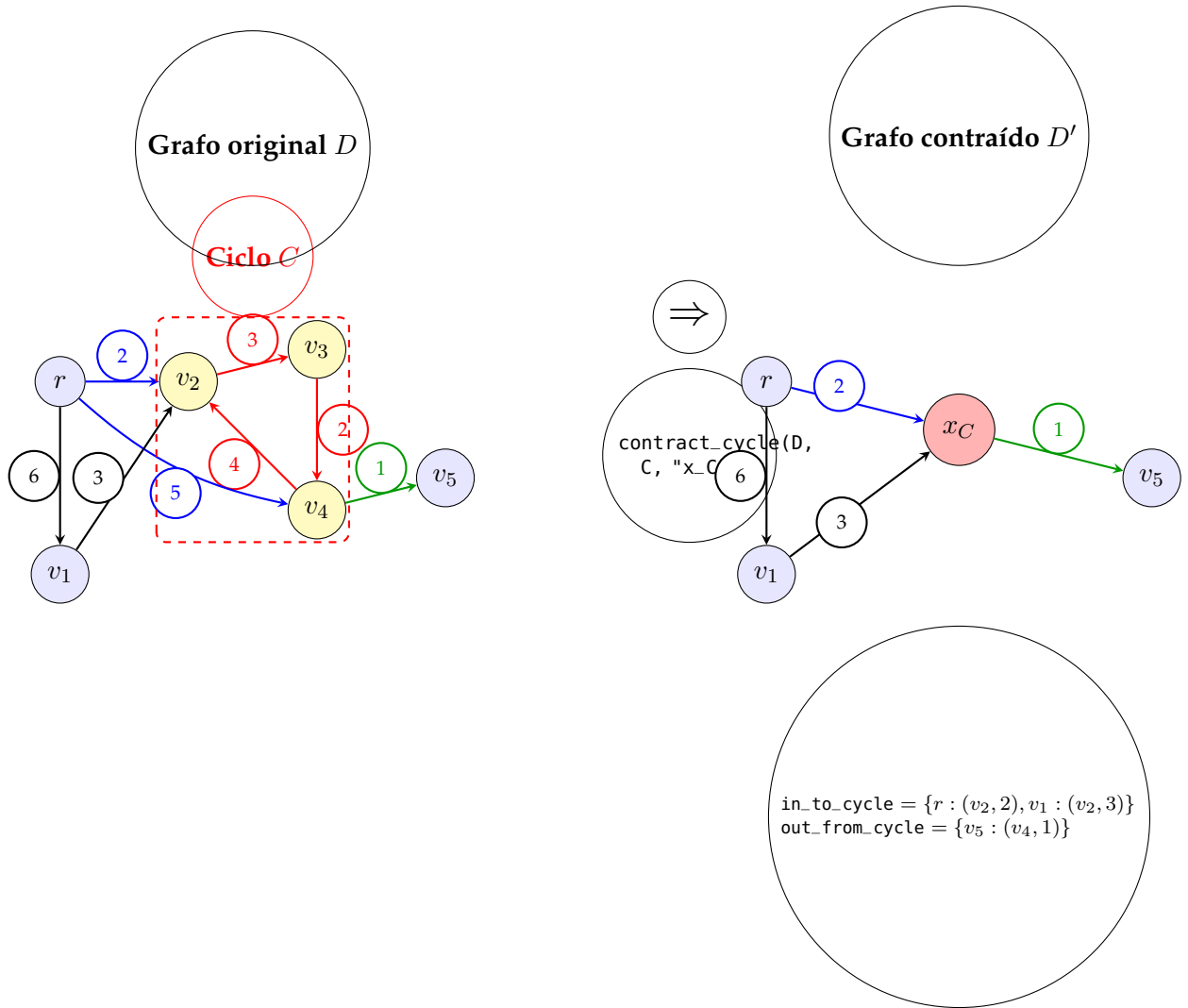


Figura 7 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original D com ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ (em amarelo). Vértices externos r , v_1 e v_5 têm arestas conectando ao ciclo: r envia aresta para v_2 (peso 2) e v_4 (peso 5); v_4 envia aresta para v_5 (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice x_C (vermelho). As arestas de entrada são redirecionadas: (r, x_C) recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). A aresta de saída (x_C, v_5) mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão.

A função de detecção de ciclo e a de contração juntas implementam os passos 2 e 3 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passos 2 e 3 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 2: Se (V, F^*) é acíclico, devolva F^* . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r -arborescência de custo mínimo.

Passo 3: Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de F^* (com $r \notin C$). **Contração:**

contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

1.2.7 Remoção de arestas que entram na raiz:

Esta função remove todas as arestas que entram no vértice raiz r_0 , garantindo que a raiz não tenha predecessores. A remoção é necessária porque, por definição, uma r -arborescência é uma arborescência enraizada em r_0 onde todo vértice $v \neq r_0$ deve ser alcançável a partir de r_0 , mas a própria raiz não pode ter predecessores (grau de entrada zero). Se o grafo original contiver arestas entrando em r_0 , essas arestas violariam a definição de arborescência enraizada e poderiam criar ciclos envolvendo a raiz, o que tornaria impossível obter uma estrutura válida. Além disso, a presença de arestas entrando na raiz interfere na normalização: ao tentar normalizar custos de entrada para r_0 , criaríamos custos reduzidos artificiais que não fazem sentido no contexto do problema, já que nenhuma solução válida pode incluir tais arestas. Portanto, esta função atua como um passo de pré-processamento essencial que prepara o grafo para os passos subsequentes do algoritmo.

A escolha de implementar esta operação como uma função auxiliar separada (em vez de incluí-la apenas inline na função principal) segue princípios de design de software: (1) *modularidade*, encapsulando uma responsabilidade específica e bem definida (remover entradas na raiz) em uma unidade testável independente; (2) *reutilização*, permitindo que outras partes do código ou implementações alternativas possam chamar esta operação quando necessário sem duplicar lógica; (3) *clareza semântica*, dando um nome descritivo (`remove_edges_to_r0`) que documenta a intenção da operação no ponto de chamada, tornando a função principal mais legível ao abstrair detalhes de implementação; e (4) *facilidade de teste*, possibilitando escrever testes unitários focados exclusivamente nesta operação de pré-processamento, verificando casos extremos (como grafos onde a raiz já não tem predecessores ou onde todas as arestas entram na raiz) sem precisar testar toda a complexidade do algoritmo recursivo.

Em detalhes, ela recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo r_0 da raiz. A implementação armazena em uma lista todas as arestas que entram em r_0 usando o método `in_edges` (linha 2). Se a lista não estiver vazia (linha 3), remove todas essas arestas usando o método `remove_edges_from` (linha 4). Este método da biblioteca NetworkX recebe como parâmetro uma lista de tuplas representando arestas na forma

(u, v) e remove cada uma delas do grafo. A operação é realizada em lote: `NetworkX` itera sobre a lista fornecida e, para cada tupla (u, v) , remove a aresta correspondente da estrutura interna de adjacência. Se alguma aresta especificada não existir no grafo, ela é silenciosamente ignorada sem gerar erro. A complexidade de `remove_edges_from` é $O(k)$, onde k é o número de arestas na lista de entrada, pois cada remoção individual tem custo $O(1)$ em média devido ao uso de dicionários aninhados para armazenar arestas.

Por fim, a função retorna o grafo D atualizado in-place com todas as arestas de entrada em `r0` são removidas (linha 5). A complexidade total da função é $O(\deg^-(r_0))$, pois a operação coleta e remove cada aresta de entrada uma única vez.

Remoção de arestas que entram na raiz

Remove todas as arestas que entram na raiz r_0 , modificando D in-place e retornando o grafo atualizado.

```
1 def remove_edges_to_r0(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     in_edges = list(D.in_edges(r0))
3     if in_edges:
4         D.remove_edges_from(in_edges)
5     return D
```

1.2.8 Remoção de arco interno:

Esta função é invocada durante a fase de reexpansão do ciclo contraído, após a chamada recursiva retornar com a arborescência ótima T' do grafo contraído. Quando o supervértice x_C é expandido de volta para o ciclo original C , uma aresta externa (u, v) é adicionada conectando um vértice externo u a um vértice v dentro do ciclo. Como o ciclo C originalmente continha exatamente uma aresta entrando em cada um de seus vértices (formando um ciclo fechado), e agora v recebe uma aresta adicional vinda do exterior, esse vértice teria grau de entrada 2, violando a propriedade fundamental de arborescência (cada vértice não-raiz deve ter exatamente uma entrada). Para restaurar essa propriedade, a função remove a aresta interna que anteriormente entrava em v , mantendo apenas a nova aresta externa. Essa remoção "quebra" o ciclo no ponto de entrada, transformando-o em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore.

A função recebe como entrada o subgrafo do ciclo C (objeto `nx.DiGraph`) e o vértice de entrada v . A implementação utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o predecessor de v dentro do ciclo (linha 2): a expressão `(u for u, _ in C.in_edges(v))` itera sobre as arestas de entrada de v , extraíndo apenas o

vértice origem u (ignorando metadados com $_$), e `next` retorna o primeiro (e teoricamente único) predecessor. Em seguida, remove a aresta (`predecessor`, v) do ciclo usando o método `remove_edge` (linha 3).

A função modifica o subgrafo C in-place e não retorna valor. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, dominada pela operação de busca das arestas de entrada, embora em ciclos simples isso seja tipicamente $O(1)$ pois cada vértice tem exatamente um predecessor.

Remover arco interno na reexpansão

Remove a aresta interna que entra no vértice de entrada v do ciclo C durante a reexpansão, pois v passa a receber uma aresta externa, e manter ambas violaria a propriedade de arborescência.

```
1 def remove_internal_edge_to_cycle_entry(C: nx.DiGraph, v):
2     predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)), None)
3     C.remove_edge(predecessor, v)
```

A Figura 8 ilustra o objetivo da função:

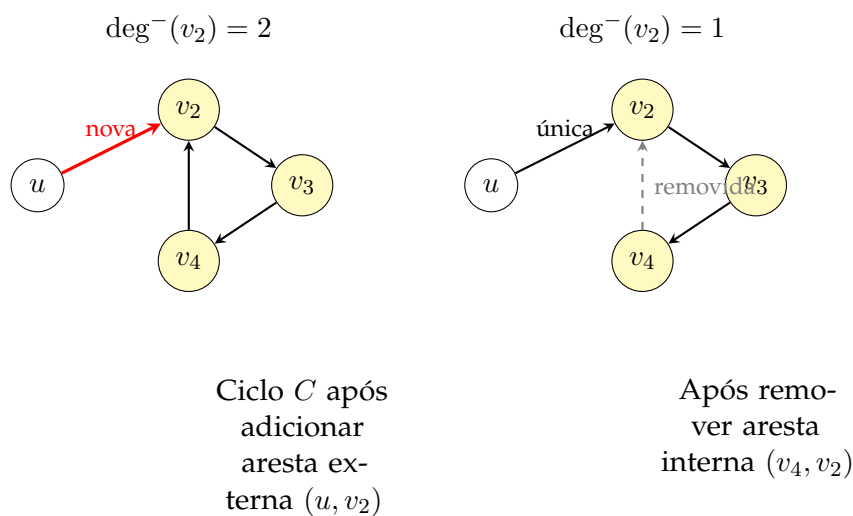


Figura 8 – Remoção de aresta interna durante reexpansão. À esquerda, ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ após adicionar aresta externa (u, v_2) vindoura da arborescência T' : o vértice v_2 tem grau de entrada 2 (aresta externa vermelha de u e aresta interna do ciclo vinda de v_4), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover a aresta interna (v_4, v_2) : o vértice v_2 passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. A aresta removida é mostrada tracejada em cinza.

1.2.9 Procedimento principal (recursivo):

Esta função implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva, orquestrando todas as fases do método descritas anteriormente. Recebe como entrada um digrafo ponderado D (objeto `nx.DiGraph`), o vértice raiz r_0 , e um parâmetro `level` (padrão 0) usado para rotular supervértices em níveis recursivos distintos. A implementação segue diretamente os cinco passos da descrição teórica, cada um apresentado a seguir com sua correspondência código-teoria:

Passo 1: Cópia do grafo original

Descrição teórica: Antes de iniciar o algoritmo, preserve o grafo original $D = (V, A)$ com sua função de custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, pois as transformações subsequentes modificarão custos in-place.

Implementação (linha 2): Cria uma cópia do grafo original `D_copy = D.copy()` para preservar os pesos originais.

Justificativa: A cópia é essencial porque os passos de normalização e contração modificam os pesos das arestas in-place. Sem preservar os valores originais, seria impossível restaurar os custos corretos na arborescência final (passo 5), violando a correção do algoritmo. A biblioteca NetworkX cria uma cópia profunda da estrutura do grafo, incluindo todos os atributos de arestas e vértices, com complexidade $O(m + n)$.

Passo 2: Normalização e construção de F^*

Descrição teórica: Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina o potencial dual $y(v) := c(a_v)$ e construa $F^* := \{a_v : v \neq r\}$ contendo exatamente uma aresta de entrada por vértice não-raiz.

Implementação (linhas 3–6): Normaliza os custos de todas as arestas que entram em cada vértice $v \neq r_0$ (linhas 3–5): para cada vértice, itera sobre todos os vértices do grafo, excluindo a raiz, e chama `normalize_incoming_edge_weights(D_copy, v)`, que implementa a definição de potencial $y(v) := c(a_v)$ onde $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$. A função subtrai $y(v)$ de cada aresta de entrada (u, v) , criando custos reduzidos $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$. Após a normalização completa, constrói o grafo funcional F^* (linha 6) chamando `get_Fstar(D_copy, r0)`, que implementa exatamente $F^* := \{a_v : v \neq r\}$, selecionando uma aresta de custo reduzido zero entrando em cada vértice não-raiz.

Justificativa: A normalização garante que cada vértice tenha pelo menos uma entrada de custo zero, propriedade fundamental que permite construir F^* selecionando arestas de custo reduzido zero sem perder otimalidade (pela teoria de dualidade e

complementaridade primal-dual). Selecionar apenas arestas de custo reduzido zero (ao invés de simplesmente o mínimo) é crucial porque garante que a solução seja ótima em relação aos custos normalizados, e a normalização preserva a estrutura de otimalidade do problema original.

Passo 3: Verificação de aciclicidade (caso base)

Descrição teórica: Se (V, F^*) é acíclico, então F^* é uma r -arborescência. Por Observação 4.36 de (KLEINBERG; TARDOS, 2006), trata-se de uma r -arborescência de custo mínimo. Devolva F^* com custos originais restaurados.

Implementação (linhas 7–10): Verifica se F^* é uma arborescência válida usando `nx.is_arborescence(F_star)` (linha 7), que testa se o grafo é conexo, acíclico e possui exatamente uma entrada por vértice (exceto a raiz). Se a verificação retorna `True`, o algoritmo alcançou o caso base da recursão. A implementação restaura os pesos originais de D para cada aresta de F^* (linhas 8–9): itera sobre todas as arestas (u, v) em `F_star.edges` e copia o atributo de peso `'weight'` do grafo original D para a aresta correspondente em `F_star`. Retorna `F_star` como a r -arborescência de custo mínimo (linha 10).

Justificativa: O uso de `nx.is_arborescence` (ao invés de apenas verificar aciclicidade com `nx.is_directed_acyclic_graph`) garante não apenas ausência de ciclos, mas também conectividade e grau de entrada correto ($\deg^-(v) = 1$ para todo $v \neq r$), todas propriedades necessárias para certificar que F^* é uma r -arborescência válida. A restauração dos pesos originais é obrigatória porque o algoritmo trabalha com custos reduzidos internamente, mas deve retornar uma solução expressa nos custos do problema original; a Observação 4.36 de Kleinberg garante que a estrutura ótima encontrada com custos reduzidos corresponde à solução ótima nos custos originais.

Passo 4: Contração e resolução recursiva (caso recursivo)

Descrição teórica: Caso contrário, existe um ciclo dirigido C em F^* (com $r \notin C$). Contração: contraia C em um supervértice x_C e defina custos reduzidos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo arestas paralelas. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$. Resolva recursivamente em D' obtendo arborescência ótima F' .

Implementação (linhas 11–16): Caso F^* contenha um ciclo, entra no caso recursivo (linha 11: `else`). Detecta um ciclo C chamando `C = find_cycle(F_star)` (linha 12), que utiliza `nx.find_cycle` para encontrar um ciclo dirigido em F^* . Cria um rótulo único `contracted_label = f"contracted_{level}"` para o supervértice x_C usando o nível de recursão (linha 13), e contrai o ciclo chamando `in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(D_copy, C, contracted_label)` (linhas 14–15). Esta função implementa a operação "contraia C em x_C " e os ajustes de custos especificados nas fórmulas acima: para cada aresta externa entrando no ciclo, calcula $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$; para arestas saindo, define $c'(x_C, v) := c(w, v)$. A função modifica `D_copy` in-place criando o digrafo contraído $D' = (V', A')$ e retorna os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` que armazenam os mapeamentos necessários para a reexpansão. Chama-se recursivamente (linha 16) com `F_prime = find_optimum_arborescence_chuliu(D_copy, r0, level+1)`, obtendo a arborescência ótima F' da instância reduzida D' .

Justificativa: O rótulo baseado em `level` garante que supervértices em diferentes níveis de recursão tenham identificadores únicos, evitando colisões de nomes. A contração reduz o problema a uma instância menor preservando a estrutura de otimalidade (provado pela teoria de dualidade e potenciais), permitindo resolver recursivamente. A modificação in-place (ao invés de criar nova cópia) reduz significativamente o uso de memória em grafos grandes ou com múltiplos níveis recursivos. Os dicionários são essenciais para a reexpansão correta, pois armazenam qual vértice do ciclo original deve receber cada conexão externa identificada pela solução recursiva.

Passo 5: Reexpansão do ciclo contraído

Descrição teórica: Dada a arborescência ótima F' em D' , expanda x_C de volta para o ciclo original C . Se $(u, x_C) \in F'$, adicione (u, v) onde v é o vértice do ciclo original mapeado por u , remova a aresta interna que entrava em v para manter $\deg^-(v) = 1$, e reintegre as demais arestas de C e suas saídas. Restaure custos originais e devolva a arborescência final.

Implementação (linhas 17–30): Na fase de reexpansão, a implementação desfaz a substituição do supervértice pelo ciclo original. Identifica a aresta externa que entra no supervértice em F' : `external_edge = list(F_prime.in_edges(contract_label))[0]` (linha 17). Extrai o vértice externo u , `u = external_edge[0]` dessa aresta (linha 18). Consulta `v = in_to_cycle[u]` para determinar o vértice v dentro do ciclo original que deve receber essa conexão (linha 19), implementando o mapeamento in-

verso da contração. Remove a aresta interna que entrava em v chamando `remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)` (linha 20), "quebrando" o ciclo C no ponto de entrada v e garantindo que cada vértice mantenha exatamente uma entrada. Adiciona a aresta externa `F_prime.add_edge(u, v)` a F' (linha 21). Reintegra todas as arestas restantes do ciclo C usando `F_prime.add_edges_from(C.edges)` (linhas 22–23). Processa as arestas de saída do supervértice (linhas 24–26): para cada aresta `(contracted_label, w)` em F' , consulta o vértice origem real `v_out = out_from_cycle[w]` e adiciona `F_prime.add_edge(v_out, w)`. Remove o supervértice `F_prime.remove_node(contract_label)` de F' (linha 27), completando a substituição de x_C pelo ciclo modificado. Por fim, restaura os pesos originais de D para todas as arestas de F' (linhas 28–29): itera sobre `F_prime.edges` e copia os atributos `'weight'` do grafo original, desfazendo os custos reduzidos. Retorna `F_prime` como a r -arborescência de custo mínimo (linha 30).

Justificativa: A remoção da aresta interna é obrigatória porque o vértice v recebe uma nova entrada vinda do exterior; manter ambas violaria a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$ para todo $v \neq r$). A escolha de qual aresta remover é determinada univocamente pela solução recursiva em D' : a aresta externa escolhida em F' determina o ponto de entrada no ciclo, e a aresta interna correspondente deve ser removida. A reintegração do ciclo (menos uma aresta) combina a solução recursiva no grafo contraído com a estrutura cíclica original, preservando otimalidade: o ciclo reduzido contribui com $|C| - 1$ arestas, e a aresta externa estabelece a conexão correta com o resto da arborescência. Como no caso base (Passo 3), a restauração é necessária para que a solução retornada reflita os custos originais do problema, não os custos reduzidos usados internamente pelo algoritmo.

A função retorna um digrafo contendo exatamente $|V| - 1$ arestas onde cada vértice $v \neq r_0$ tem grau de entrada 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de r_0 , e o custo total é mínimo. O grafo original D não é modificado devido à cópia no Passo 1 (linha 2). A complexidade é $O(mn)$ no pior caso, onde cada nível de recursão (até $O(n)$ níveis) processa $O(m)$ arestas durante normalização, detecção de ciclos e contração/expansão.

Essa decomposição em cinco passos explícitos demonstra como o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds se traduz em operações concretas: o Passo 1 preserva o grafo original (linha 2), o Passo 2 normaliza e constrói F^* (linhas 3–6), o Passo 3 verifica aciclicidade e retorna no caso base (linhas 7–10), o Passo 4 contrai e resolve recursivamente (linhas 11–16), e o Passo 5 reexpande e restaura custos (linhas 17–30). A estratégia primal do método — induzir custos reduzidos zero, extrair estrutura funcional, e resolver ciclos por contração/expansão — emerge naturalmente dessa correspondência entre formulação teórica e código, com cada escolha de implementação fundamentada em necessidades de correção, eficiência ou clareza algorítmica.

Procedimento principal (recursivo)

Implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva para encontrar a *r*-arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado D com raiz r_0 . Normaliza custos, constrói F^* , detecta ciclos e, se houver, contrai em supervértice, resolve recursivamente no grafo reduzido e reexpande, restaurando a arborescência ótima no grafo original. Retorna um `nx.DiGraph` contendo exatamente $|V| - 1$ arestas com grau de entrada 1 para cada vértice exceto a raiz.

```

1 def find_optimum_arborescence_chuliu(D: nx.DiGraph, r0: str, level=0,):
2     D_copy = D.copy()
3     for v in D_copy.nodes:
4         if v != r0:
5             normalize_incoming_edge_weights(D_copy, v)
6     F_star = get_Fstar(D_copy, r0)
7     if nx.is_arborescence(F_star):
8         for u, v in F_star.edges:
9             F_star[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
10    return F_star
11    else:
12        C: nx.DiGraph = find_cycle(F_star)
13        contracted_label = f"\n n*{level}"
14        in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(
15            D_copy, C, contracted_label)
16        F_prime = find_optimum_arborescence_chuliu(D_copy, r0, level + 1)
17        in_edge = next(iter(F_prime.in_edges(contracted_label, data="w")),
18                          None)
19        u, _, _ = in_edge
20        v, _ = in_to_cycle[u]
21        remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)
22        F_prime.add_edge(u, v)
23        for u_c, v_c in C.edges:
24            F_prime.add_edge(u_c, v_c)
25        for _, z, _ in F_prime.out_edges(contracted_label, data=True):
26            u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
27            F_prime.add_edge(u_cycle, z)
28        F_prime.remove_node(contracted_label)
29        for u, v in F_prime.edges:
30            F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
31    return F_prime

```

A seguir, ilustramos o funcionamento do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo de teste. Mostramos o grafo original, os principais passos do algoritmo e a arborescência final encontrada.

1.2.9.1 Exemplo de execução do algoritmo

A seguir, demonstramos a execução completa do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo exemplo, ilustrando cada fase do processo: normalização, construção de F^* , detecção de ciclos, contração, resolução recursiva e reexpansão.

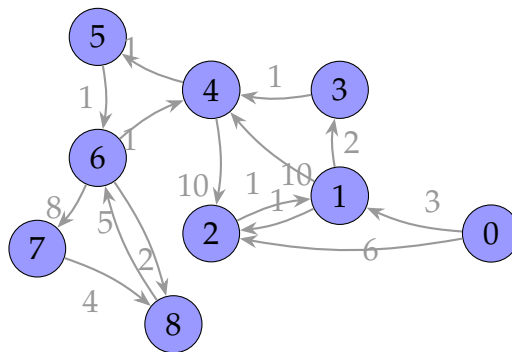


Figura 9 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplas arestas com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arestas que entram na raiz, porém não há nenhuma neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo.

O próximo passo é normalizar os pesos das arestas de entrada para cada vértice. Nessa etapa, para cada vértice v (exceto a raiz), o algoritmo encontra a aresta de menor peso que entra em v e subtrai esse menor peso de todas as arestas que entram em v (isso serve para zerar o peso da aresta mínima de entrada em cada vértice).

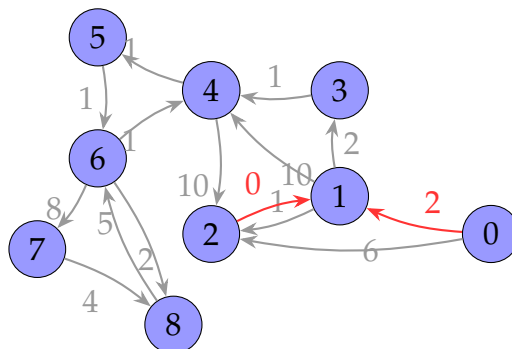


Figura 10 – Normalização parcial das arestas de entrada para o vértice 1. As arestas de entrada são $(0 \rightarrow 1)$ com peso original 3 e $(2 \rightarrow 1)$ com peso original 1. Elegendo a aresta $(2 \rightarrow 1)$ como a de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todas as arestas de entrada: $(0 \rightarrow 1)$ passa de peso 3 para 2, e $(2 \rightarrow 1)$ passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices.

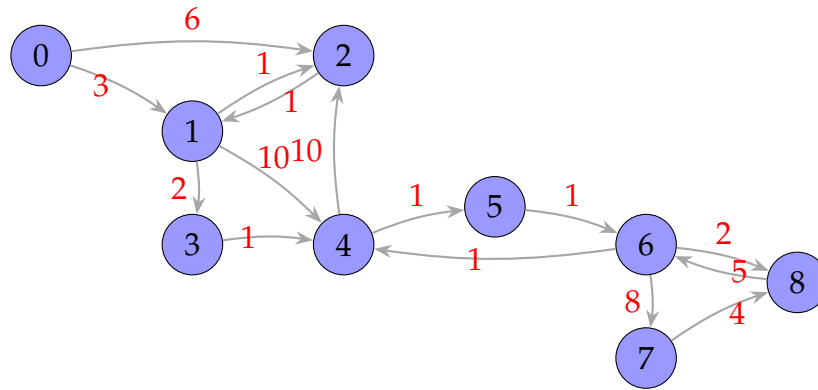


Figura 13 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice $n * 0$ foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com a aresta externa $(0, 1)$ escolhida pela solução recursiva conectando ao ciclo. A aresta interna $(2, 1)$ do ciclo original foi removida para manter a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arestas, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0.

1.2.10 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode parecer um conjunto de heurísticas bem-sucedidas sem uma justificativa teórica unificadora aparente. Por que escolher a melhor entrada para cada vértice garante otimalidade global após o tratamento de ciclos? A resposta reside na *dualidade em programação linear*.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica primal–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais² $y(\cdot)$, explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma mecânica operacional (normalizar \rightarrow contrair \rightarrow expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

² No contexto primal–dual, “potenciais” são valores escalares $y(v)$ atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$. Ajustar y desloca uniformemente os custos das arestas que entram em v , sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna “apertadas” (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de corretude via cortes apertados.

Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 5 vezes nas páginas [12](#), [13](#), [14](#), [27](#) e [32](#).

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 4 vezes nas páginas [12](#), [13](#), [14](#) e [18](#).

Anexos

ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.