Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos:
Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

26 de novembro de 2025

Sumário

O Problema

Encontrar uma r-Arborescência Geradora de Custo Mínimo

Dado um r-digrafo ponderado (D, w, r):

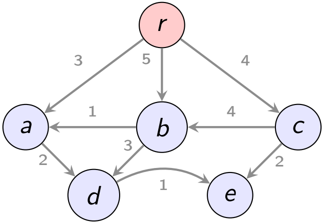
- Encontrar uma r-arborescência geradora de custo mínimo de D

Algoritmos estudados:

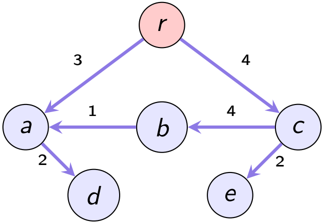
1. Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
2. András Frank (1981-2014)

UFABC

Exemplo: r-Arborescência Geradora Mínima

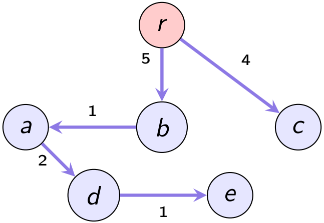


Digrafo Original



r-Arborescência Geradora

Custo: 16



Geradora Mínima

Custo: 13

Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu–liu–edmonds((D, w, r)):

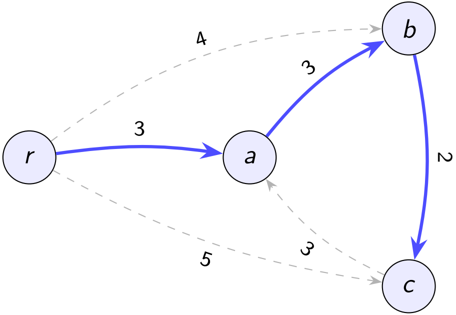
1. **Reduzir custos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
2. **Construir** D_0: escolhendo um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
3. **Verificar**: se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0
   Caso contrário:
4. **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair
5. **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r)
6. **Devolver**: expandir(T')

Escolha Gulosa

Definição:
Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de custo mínimo que entra em v:

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

Propriedade:
Se T é uma r-arborescência, então T tem custo mínimo.



Resultado

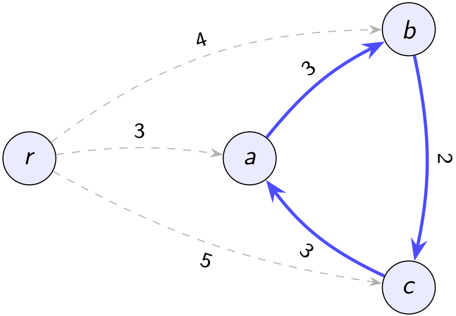
$T = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma r-arborescência de custo mínimo!

UFABC

E quando a escolha gulosa falha?

Problema:
A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r-arborescência.

Exemplo:
Os arcos de custo mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r.



Arcos azuis formam um **ciclo**!

Passo 1: Redução de Custos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

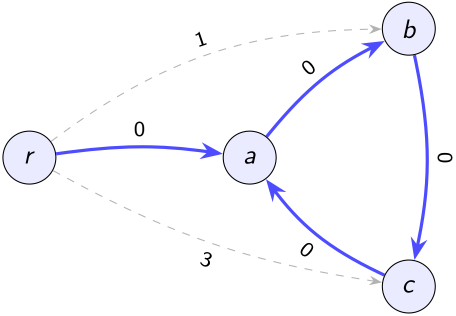
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custo λ-reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ:

- $\lambda(a) = 3$, $\lambda(b) = 3$, $\lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm custo zero!

Arcos com custo zero são candidatos para D_0

UFABC

Implementação: Redução de Custos

Função `reduce_weights`**:**

```
def reduce_weights(D: nx.DiGraph, v: int
  ):
    in_edges = D.in_edges(v, data=True)
    yv = min((data["w"]
               for _, _, data in in_edges
                 ))
    for u, _, _ in in_edges:
        D[u][v]["w"] -= yv
```

Descrição:

- Calcula $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^{-}(v)\}$
- Reduz o custo de cada arco que entra em v
- Complexidade: $O(k)$ onde k é o número de arcos entrando em v

Resultado

Após executar `reduce_weights(D, v)` para cada $v \neq r$, todos os vértices têm ao menos um arco de entrada com custo zero.

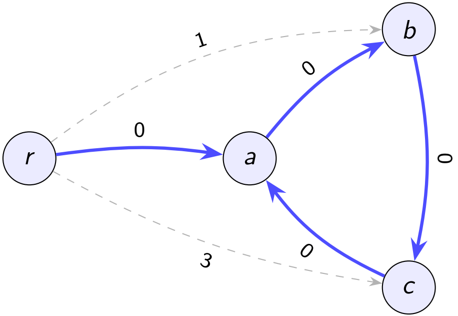
Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0: Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (r, a)
- (a, b), (c, a)



Passo 2: Implementação da Construção de D0 em Python

Função `get_Dzero`:

```
def get_Dzero(D: nx.DiGraph, r: int):
    D_zero = nx.DiGraph()
    for v in D.nodes():
        if v != r:
            in_edges = D.in_edges(v,
                                  data=True)
            u = next((u for u, _, data
                      in in_edges
                      if data["w"] == 0))
            D_zero.add_edge(u, v)
    return D_zero
```

Descrição:

- Para cada vértice $v \neq r$, seleciona um arco com custo zero
- Constrói subdigrafo gerador D_0
- Garantido existir arco de custo zero após redução

Observação

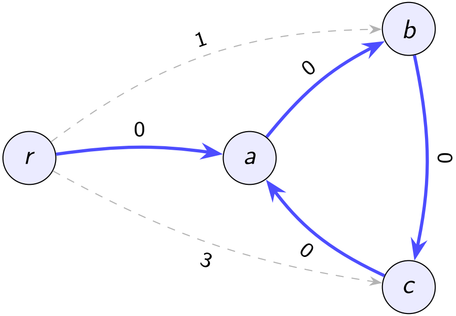
Se D_0 for uma arborescência, então D_0 é necessariamente uma r-arborescência ótima.

UFABC

Passo 3: Verificação de D_0

Verificar:
Se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0

Caso contrário:
D_0 contém algum ciclo C.
$\Rightarrow$ **prosseguir** para os passos 4 e 5.



D_0 não é uma r-arborescência!

Neste exemplo, $D_0 = \{(r, a), (a, b), (c, a)\}$ não forma uma r-arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a).

Passo 3: Implementação da Verificação de D0 em Python

Verificação e detecção de ciclo:

```
# Verificar se D_zero eh arborescencia
if nx.is_arborescence(D_zero):
    # Restaurar pesos originais
    for u, v in D_zero.edges:
        D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
    return D_zero

# Encontrar ciclo
def find_cycle(D_zero: nx.DiGraph):
    nodes_in_cycle = set()
    for u, v, _ in nx.find_cycle(
            D_zero, orientation="original"):
        nodes_in_cycle.update([u, v])
    return D_zero.subgraph(
                nodes_in_cycle)
```

Descrição:

- Usa função de biblioteca `is_arborescence`
- Se não for arborescência, encontra um ciclo
- `find_cycle` retorna os arcos do ciclo
- Constrói subdigrafo induzido pelos vértices do ciclo

Passo 4: Contração de Ciclos

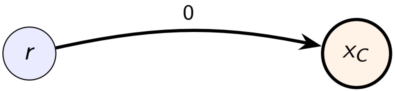
Operação:
Contrair ciclo C em supervértice x_C.

Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de D que entra em algum vértice de C

Podem ter arcos saindo de x_C em D'.



Digrafo contraído D'

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D.

Passo 4: Implementação da Contração de Ciclos em Python

Função `contract_cycle` (parte 1):

```
def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: int):
    cycle_nodes: set[int] = set(C.nodes())

    # Encontrar arcos essenciais que ENTRAM no ciclo
    in_to_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
    for u in D.nodes:
        if u not in cycle_nodes:
            min_edge = min(((v, data["w"])
                           for _, v, data in D.out_edges(u, data=True)
                           if v in cycle_nodes),
                          key=lambda x: x[1], default=None)
            if min_edge:
                in_to_cycle[u] = min_edge

    # Adicionar arcos de u para label (supervertice)
    for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
        D.add_edge(u, label, w=w)
```

Arcos **essenciais**: menor custo de cada vértice externo para o ciclo

UFABC

Passo 4: Implementação da Contração de Ciclos em Python (cont.)

Função `contract_cycle` (parte 2):

```python
    # Encontrar arcos essenciais que SAEM do ciclo
    out_from_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
    for v in D.nodes:
        if v not in cycle_nodes:
            min_edge = min(((u, data["w"])
                               for u, _, data in D.in_edges(v, data=True)
                               if u in cycle_nodes),
                              key=lambda x: x[1], default=None)
            if min_edge:
                out_from_cycle[v] = min_edge

    # Adicionar arcos de label para v
    for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
        D.add_edge(label, v, w=w)

    # Remover vertices do ciclo
    D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
    return in_to_cycle, out_from_cycle
```

Os dicionários retornados são usados na expansão. Complexidade: $O(m)$

UFABC

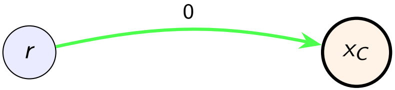
Passo 5: Chamada Recursiva

Novo problema: (D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu–liu–edmonds}(D', w', r)$$

Resultado: T' é uma r-arborescência de custo mínimo em (D', w')



r-arborescência ótima em D'

Passo 5: Implementação da Chamada Recursiva em Python

Estrutura recursiva do algoritmo:

```python
def chuliu_edmonds(D: nx.DiGraph,
                   r: int, label: int):
    D_copy = D.copy()

    # Reducao de custos
    for v in D_copy.nodes:
        if v != r:
            reduce_weights(D_copy, v)

    D_zero = get_Dzero(D_copy, r)

    if nx.is_arborescence(D_zero):
        # Restaurar pesos e devolver
        ...
        return D_zero

    # Contrair ciclo e chamar recursao
```

Observações:

- `label` identifica o supervértice
- Cada chamada recursiva incrementa `label`
- Caso base: D_0 é arborescência
- Caso recursivo: contrai ciclo e resolve subproblema

Passo 6: Reexpansão da Solução

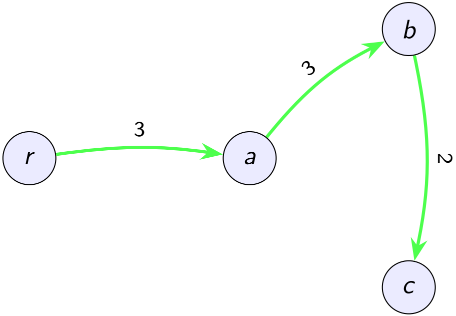
Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

1. Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
2. Incluir uv em T
3. Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v

Resultado: T é uma r-arborescência de custo mínimo



r-arborescência final no digrafo original

Passo 6: Implementação da Reexpansão da Solução em Python

Expansão após chamada recursiva:

```python
# F_prime eh solucao em D' (com supervertice)
# Encontrar arco que entra em label
in_edge = next(iter(
    F_prime.in_edges(label, data=True)))
u, _, _ = in_edge

# Arco correspondente em D original
v, _ = in_to_cycle[u]
F_prime.add_edge(u, v)

# Adicionar arcos do ciclo,
# exceto o que entra em v
for u_c, v_c in C.edges:
    if v != v_c:
        F_prime.add_edge(u_c, v_c)

# Arcos que saem do supervertice
for _, z, _ in list(
        F_prime.out_edges(label, data=True)):
    u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
    F_prime.add_edge(u_cycle, z)

# Remover supervertice
```

Passos da expansão:

1. Identificar arco que entra em `label`
2. Encontrar arco correspondente em D
3. Adicionar arcos do ciclo C (exceto um)
4. Transferir arcos que saem de `label`
5. Remover `label`
6. Restaurar pesos originais

UFABC

András Frank: Visão Geral

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos
Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

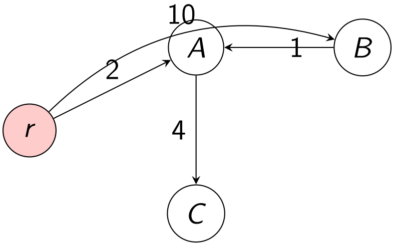
Complexidade:

- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$

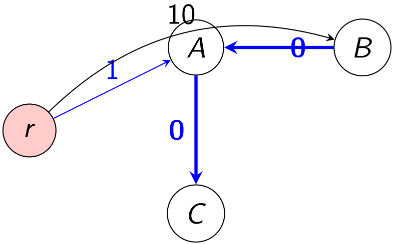
UFABC

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

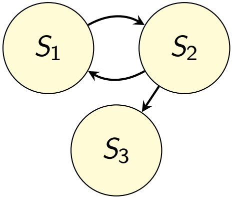
Arcos com custo **zero** formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Otimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^-(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

1. Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
2. Para cada v fora de R:
    - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
    - Adicionar v a R
3. Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	**Tempo Mediano**	**Tempo Médio**
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	**0,016 s**	**0,020 s**

Speedup Fase II

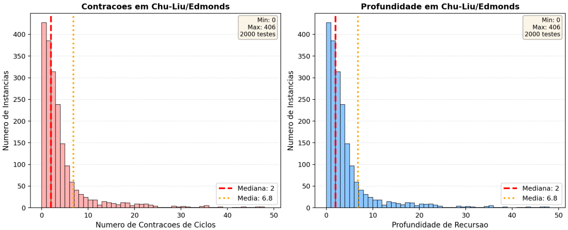
Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

UFABC

Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20



Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)

Motivação Didática

Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos** e **difíceis de visualizar**

Solução Proposta:

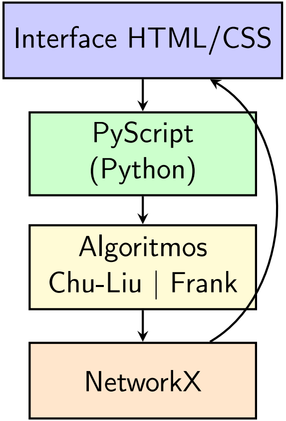
- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

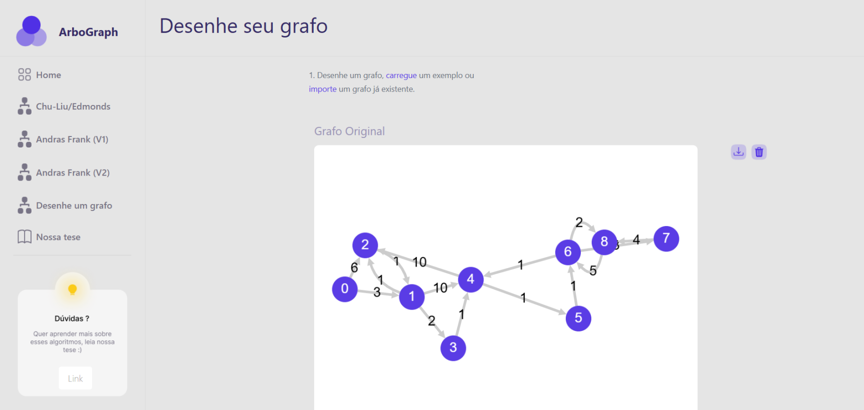
UFABC

Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

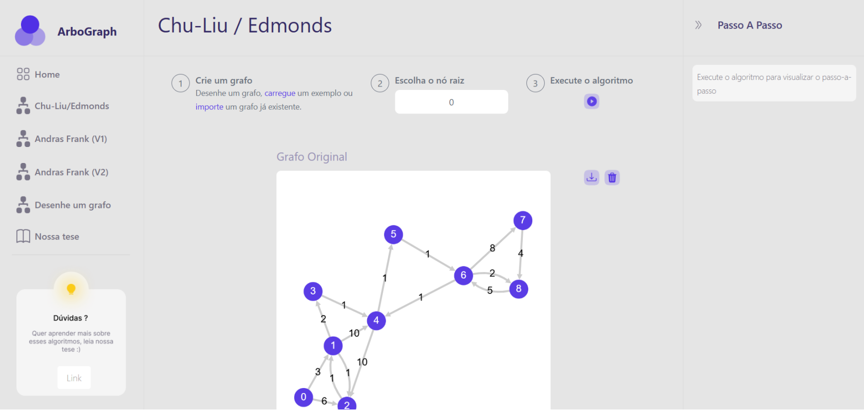
Interface: Desenho de Grafos



Funcionalidades:

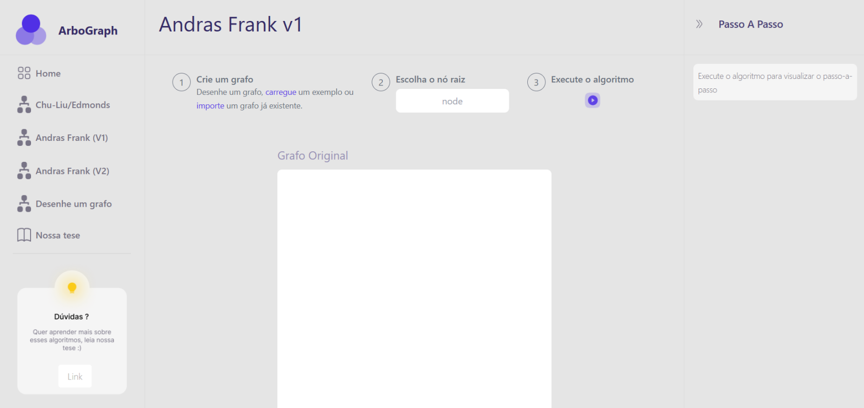
- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

Interface: Chu-Liu-Edmonds



- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank



- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Princípios de Design

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário

Contribuições do Trabalho

1. **Implementação completa** de dois algoritmos clássicos
   - Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
   - András Frank: duas fases com otimização heap
2. **Análise experimental** detalhada
   - 2000 instâncias aleatórias
   - Comparação de desempenho e características estruturais
3. **Aplicação web interativa**
   - Ferramenta didática para visualização
   - Execução passo a passo dos algoritmos
   - Design centrado no usuário

UFABC

Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58$\times$ (mediana), 61$\times$ (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
  - Memória modesta: 11,5 MB

UFABC

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

`https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer`