

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca  
de uma  $r$ -Arborescência Inversa de Custo Mínimo  
em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática  
Interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma  
r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos  
Dirigidos com Aplicação Didática Interativa**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre.

Universidade

Faculdade

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

*Dedicatória (opcional).*

# Agradecimientos

Agradecimientos (opcional).



# Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma  $r$ -arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

**Palavras-chave:** Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

# Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse  $r$ -arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

**Keywords:** Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais “mais baratas por vértice”. Os arcos grossos (custo 1) entram em  $a, b, c$  e formam  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ . Os arcos tracejados partindo de  $r$  existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local. . . . . 9
- Figura 2 – Ajuste de custo reduzido para um arco *entrando*: ao contrair um ciclo  $C$ , o arco  $(u, w)$  com  $w \in C$  passa a  $(u, x_C)$  com custo reduzido  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , onde  $a_w$  é o arco de menor custo que entra em  $w$ . . . . . 10
- Figura 3 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: (a) toda arborescência em  $D'$  escolhe exatamente um arco que entra em  $x_C$ ; (b) ao expandir  $C$ , esse arco corresponde a um  $(u, w)$  que entra em algum  $w \in C$  e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos. O custo total é preservado. . . . . 11
- Figura 4 – Reexpansão de  $C$ : (a) no grafo contraído seleciona-se um único arco que entra em  $x_C$ ; (b) ao expandir,  $x_C$  é substituído por  $C$  e o arco selecionado passa a entrar em algum  $w \in C$ ; (c) remove-se exatamente um arco interno de  $C$  para eliminar o ciclo, preservando conectividade a partir de  $r$  e o custo total (os arcos internos têm custo reduzido zero). 12



# Sumário

<b>1</b>	<b>ALGORITMO DE CHU-LIU/EDMONDS</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Supervértices e contração de ciclos</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Descrição do algoritmo</b>	<b>11</b>
1.2.1	Exemplo prático: Chu-Liu/Edmonds	13
1.2.2	Corretude	15
1.2.3	Complexidade	16
<b>1.3</b>	<b>Implementação em Python</b>	<b>16</b>
1.3.1	Especificação da interface (entradas, saídas e hipóteses)	16
1.3.2	Funções principais	17
1.3.2.1	Normalização por vértice:	17
1.3.2.2	Construção de $F^*$ :	18
1.3.2.3	Detecção de ciclo:	19
1.3.2.4	Contração de ciclo:	19
1.3.2.5	Remoção de arestas que entram na raiz:	21
1.3.2.6	Remoção de arco interno:	22
1.3.2.7	Procedimento principal (recursivo):	22
1.3.2.8	Notas finais sobre a implementação	26
1.3.2.9	Decisões de projeto e implicações práticas	26
1.3.2.10	Transição para a abordagem primal-dual	27
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>28</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>29</b>
	<b>ANEXO A – ANEXO A</b>	<b>30</b>

# 1 Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

O algoritmo de Chu–Liu/Edmonds é um método clássico para encontrar uma  $r$ -arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. Ele combina estratégias gulosas com técnicas de normalização de custos e contração de ciclos para garantir a otimalidade da solução.

Se tentarmos copiar a receita das MSTs — dar a cada vértice  $v \neq r$  o arco de entrada mais barato — corremos o risco de fechar um *ciclo dirigido* que não chega à raiz  $r$ .

Por que isso é proibido? Em uma  $r$ -arborescência cada  $v \neq r$  deve ter exatamente um arco de entrada e  $r$  tem grau de entrada zero. Se houvesse um ciclo dirigido  $C$ , todos os vértices de  $C$  já receberiam seu único arco de entrada de dentro do próprio  $C$ , logo nenhum arco entraria em  $C$  a partir de  $V \setminus C$  (o corte  $\delta^-(C)$  ficaria vazio). Como  $r \notin C$ , não existe caminho de  $r$  para os vértices de  $C$ , contrariando a alcançabilidade exigida. Portanto, ciclos dirigidos são incompatíveis com a estrutura de  $r$ -arborescência.

Dessa forma, o desafio é duplo: preservar a informação local de “mais barato por vértice” (que é valiosa) e, ao mesmo tempo, impedir que essas escolhas locais se combinem em ciclos.

Uma maneira direta de enxergar isso é com um microexemplo: tome três vértices  $a, b, c$  (todos fora de  $r$ ). Se o arco mais barato que entra em  $b$  vem de  $a$ , o de  $c$  vem de  $b$  e o de  $a$  vem de  $c$ , então as escolhas “mais baratas” formam o ciclo  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ . Note que, entre essas escolhas locais, nenhum deles recebe o arco vindo de  $r$  (mesmo que existam  $r \rightarrow a, r \rightarrow b, r \rightarrow c$  mais caros); ficamos presos dentro do ciclo e não alcançamos a raiz. É exatamente esse impasse que o algoritmo resolve ao zerar custos por vértice e contrair ciclos, deixando para decidir qual arco interno remover apenas na expansão.

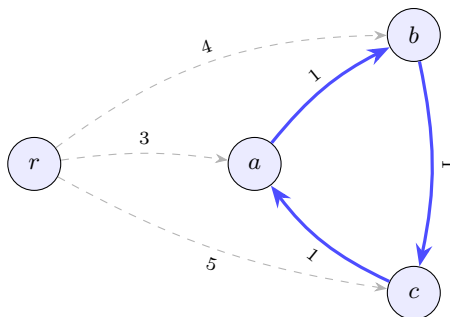


Figura 1 – Ciclo gerado pelas escolhas locais “mais baratas por vértice”. Os arcos grossos (custo 1) entram em  $a, b, c$  e formam  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ . Os arcos tracejados partindo de  $r$  existem, mas são mais caros e por isso não são escolhidos pelo critério local.

Partindo desse cenário, a ideia é *normalizar os custos por vértice*: para cada  $v \neq r$ , "descontamos" de todo arco que entra em  $v$  o menor custo que chega a  $v$ . Após esse ajuste (custos reduzidos), cada  $v \neq r$  passa a ter ao menos um arco de custo reduzido zero entrando. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a  $r$ -arborescência. Se formarem um ciclo  $C$ , isso indica que, dentro de  $C$ , todos os vértices atingiram seus mínimos locais; então *contraímos*  $C$  em um **supervértice**  $x_C$  e repetimos o processo no grafo menor. Ao final, *expandimos* as contrações e, em cada ciclo expandido, removemos exatamente um arco para manter grau de entrada 1 e a aciclicidade global.

## 1.1 Supervértices e contração de ciclos

Dado um subconjunto  $C \subseteq V$  que forma um ciclo dirigido, a *contração de  $C$*  substitui todos os vértices de  $C$  por um único vértice  $x_C$  - o **supervértice**. Todo arco com exatamente uma ponta em  $C$  passa a ser incidente a  $x_C$ : arcos  $(u, w)$  com  $u \notin C, w \in C$  tornam-se  $(u, x_C)$ ; arcos  $(w, v)$  com  $w \in C, v \notin C$  tornam-se  $(x_C, v)$ ; e arcos com as duas pontas em  $C$  tornam-se laços em  $x_C$  e são descartados. Quando trabalhamos com *custos reduzidos*, ajustamos em particular os arcos que *entram* em  $C$  para preservar a comparação relativa: para um arco  $(u, w)$  com  $w \in C$ , definimos  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , onde  $a_w$  é o arco mais barato que entra em  $w$ . Essa normalização garante que, ao resolver no grafo contraído, decisões ótimas podem ser traduzidas de volta na etapa de expansão.

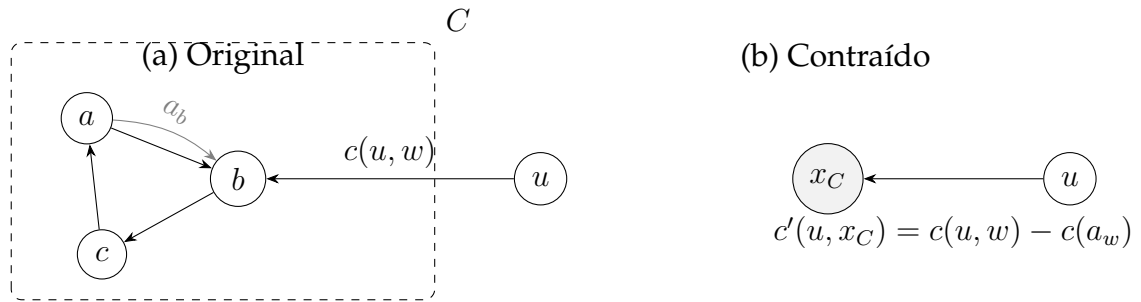


Figura 2 – Ajuste de custo reduzido para um arco *entrando*: ao contrair um ciclo  $C$ , o arco  $(u, w)$  com  $w \in C$  passa a  $(u, x_C)$  com custo reduzido  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , onde  $a_w$  é o arco de menor custo que entra em  $w$ .

Para cada arco  $(u, w)$  com  $w \in C$ , ajustamos o custo reduzido para  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , onde  $a_w$  é o arco mais barato que entra em  $w$ . No exemplo da Figura 2, o arco  $(u, b)$  com custo 7 torna-se  $(u, x_C)$  com custo reduzido  $7 - 5 = 2$ , já que  $a_b = (a \rightarrow b)$  tem custo 5. Arcos que saem de  $C$  ou laços internos não são ajustados.

## 1.2 Descrição do algoritmo

Em computação falamos em linguagem de alto nível quando uma linguagem de programação é próxima da linguagem humana, com abstrações que facilitam o entendimento. Em contraste, linguagens de baixo nível são mais próximas do código de máquina, exigindo detalhes explícitos.

Podemos falar também em visão operacional de alto nível quando descrevemos um algoritmo focando na lógica e nos passos principais, sem entrar em detalhes de implementação específicos.

Aqui, apresentamos o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em uma visão operacional de alto nível, focando na lógica e nos passos principais, sem entrar em detalhes de implementação específicos. E dedicaremos a próxima subseção apenas para discutir detalhes práticos de implementação.

Denotamos por  $A'$  o conjunto de arcos escolhidos na construção da  $r$ -arborescência.

Construa  $A'$  escolhendo, para cada  $v \neq r$ , um arco de menor custo que *entra* em  $v$ . Se  $(V, A')$  é acíclico, então, pela caracterização de arborescências (grau de entrada 1 para todo  $v \neq r$  e ausência de ciclos),  $A'$  já é uma  $r$ -arborescência; e é *ótima*, pois realizamos o menor custo de entrada em cada vértice e nenhuma troca pode reduzir o custo mantendo as restrições (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Sec. 4.9).

Se  $A'$  contiver um ciclo dirigido  $C$  (que não inclui  $r$ ), normalizamos os custos de entrada (custos reduzidos) e *contraímos*  $C$  em um supervértice  $x_C$ , ajustando apenas arcos que *entram* em  $C$  por  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ .

Resolvemos recursivamente no grafo contraído. As arborescências do grafo contraído correspondem, em bijeção, às arborescências do grafo original com exatamente um arco entrando em  $C$ ; como os arcos de  $C$  têm custo reduzido zero, os custos são preservados na ida e na volta.

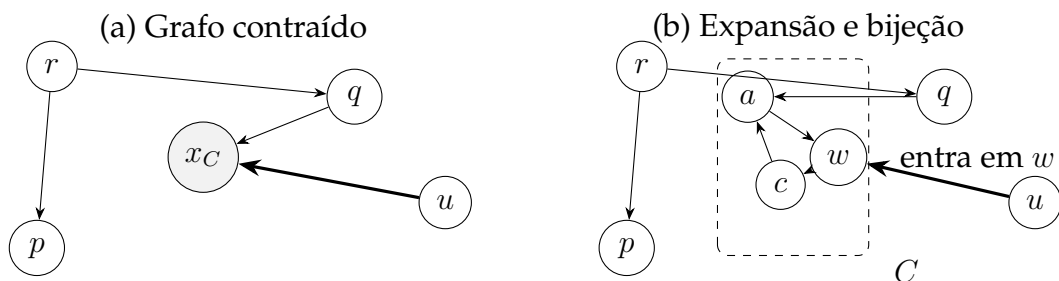


Figura 3 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: (a) toda arborescência em  $D'$  escolhe exatamente um arco que entra em  $x_C$ ; (b) ao expandir  $C$ , esse arco corresponde a um  $(u, w)$  que entra em algum  $w \in C$  e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos. O custo total é preservado.

A Figura 3 ilustra a bijeção entre arborescências no grafo contraído e no grafo original, destacando a preservação de custos e a manutenção das propriedades estruturais necessárias.

Na expansão, reintroduzimos  $C$  e removemos exatamente um arco interno para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global (SCHRIJVER, 2003; KLEINBERG; TARDOS, 2006).

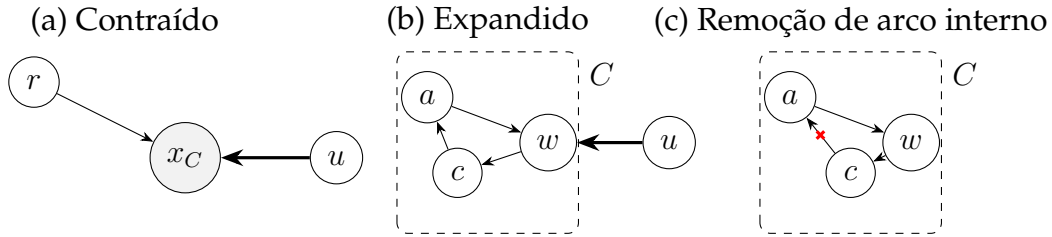


Figura 4 – Reexpansão de  $C$ : (a) no grafo contraído seleciona-se um único arco que entra em  $x_C$ ; (b) ao expandir,  $x_C$  é substituído por  $C$  e o arco selecionado passa a entrar em algum  $w \in C$ ; (c) remove-se exatamente um arco interno de  $C$  para eliminar o ciclo, preservando conectividade a partir de  $r$  e o custo total (os arcos internos têm custo reduzido zero).

A Figura 4 detalha o processo de expansão e remoção de um arco interno para quebrar o ciclo, garantindo que a estrutura de r-arborescência seja mantida.

Abaixo, temos a descrição formal do algoritmo.

#### Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo  $D = (V, A)$ , custos  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , raiz  $r$ .<sup>a</sup>

1. Para cada  $v \neq r$ , escolha  $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$ . Defina  $y(v) := c(a_v)$  e  $F^* := \{a_v : v \neq r\}$ .
2. Se  $(V, F^*)$  é acíclico, devolva  $F^*$ . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.
3. Caso contrário, seja  $C$  um ciclo dirigido de  $F^*$  (com  $r \notin C$ ). **Contração:** contraia  $C$  em um supervértice  $x_C$  e defina custos  $c'$  por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em  $x_C$  e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por  $D' = (V', A')$ .

4. **Recursão:** compute uma r-arborescência ótima  $T'$  de  $D'$  com custos  $c'$ .

5. **Expansão:** seja  $(u, x_C) \in T'$  o único arco que entra em  $x_C$ . No grafo original, ele corresponde a  $(u, w)$  com  $w \in C$ . Forme

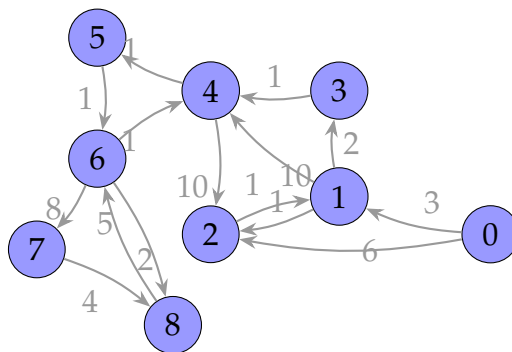
$$T := (T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}) \cup \{(u, w)\} \cup ((F^* \cap A(C)) \setminus \{a_w\}).$$

Então  $T$  tem grau de entrada 1 em cada  $v \neq r$ , é acíclico e tem o mesmo custo de  $T'$ ; logo, é uma  $r$ -arborescência ótima de  $D$  (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

<sup>a</sup> Se algum  $v \neq r$  não possui arco de entrada, não existe  $r$ -arborescência.

### 1.2.1 Exemplo prático: Chu–Liu/Edmonds

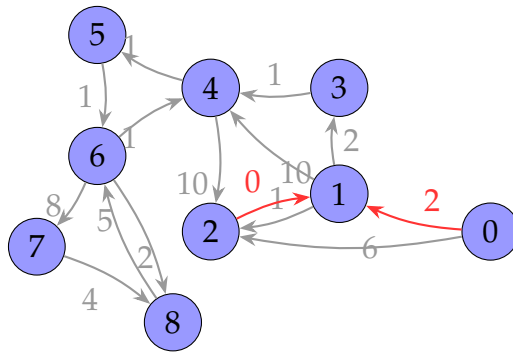
A seguir, ilustramos o funcionamento do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo de teste. Mostramos o grafo original, os principais passos do algoritmo e a arborescência final encontrada. A Figura abaixo apresenta o grafo original com os pesos das arestas



O primeiro passo do nosso algoritmo seria remover as arestas que entram na raiz (vértice 0), porém não há nenhuma nesse caso, logo não existe a necessidade de alterar o grafo.

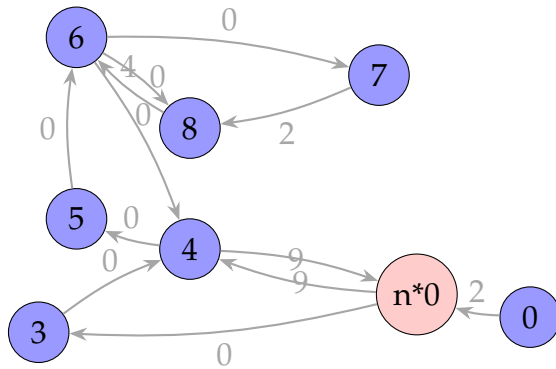
Dessa forma, o próximo passo é normalizar os pesos das arestas de entrada para cada vértice, nessa etapa, Para cada vértice  $X$  (exceto a raiz), o algoritmo encontra a aresta de menor peso que entra em  $X$  e subtrai esse menor peso de todas as arestas que entram em  $X$  (relembrando que isso serve para zerar o peso da aresta mínima de entrada em cada vértice)

Normalizando pesos de arestas de entrada para '1': Nesse processo notamos que as únicas arestas de entrada são 0 e 2 onde  $(0 \rightarrow 1)$  tem peso 3.0 e  $(2 \rightarrow 1)$  tem peso 1.0, elegendo a aresta 2 como a de menor peso podemos subtrair o peso das arestas restantes (no caso, o peso da aresta 0) pelo valor do peso da aresta 2, resultando em um novo peso de '2' para a aresta 0

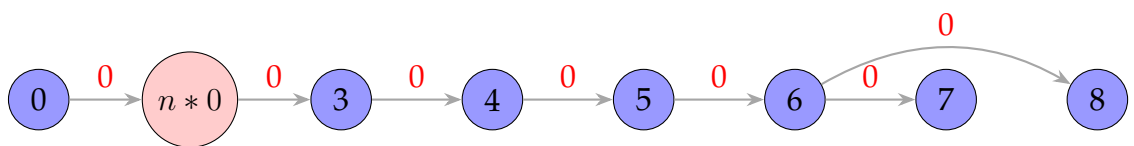


Repetiremos o passo anterior para todas as outras arestas

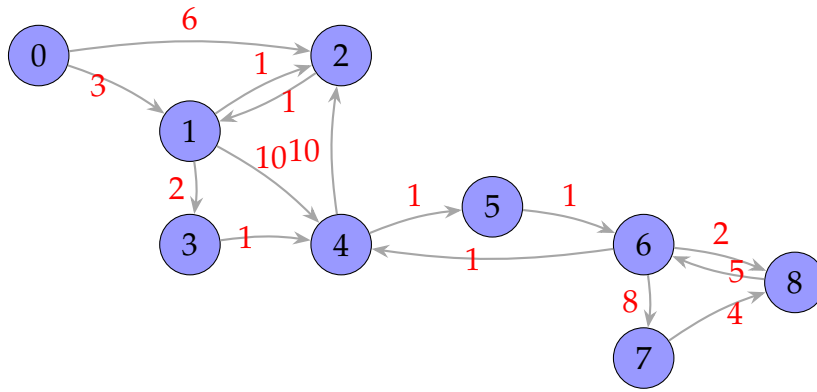
Com os pesos normalizados, o próximo passo é construir  $F^*$ , para isso, selecionamos para cada vértice, a aresta de menor custo de entrada. Além disso, detectamos um ciclo em  $F^*$ , formado pelos vértices  $\{1$  e  $2\}$ . Portanto, precisamos contrair esse ciclo em um supervértice  $n * 0$ . O resultado é o seguinte:



Agora, repetimos o processo recursivamente no grafo contraído até obter uma arborescência.



Após validarmos que a  $F^*$  não possui mais ciclos e notarmos que  $F^*$  forma uma arborescência iremos começar o processo de expansão do ciclo contraído para obter a arborescência final no grafo original. Dessa forma, Adicionamos a aresta de entrada ao ciclo:  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  e a aresta externa de saída:  $(1, 3)$ , chegando em uma arborescência válida.



### 1.2.2 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos*: para cada  $v \neq r$ , defina  $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$  e  $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$ . Para qualquer  $r$ -arborescência  $T$ , vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de  $T$  entrando em cada  $v \neq r$ . O termo  $\sum_{v \neq r} y(v)$  é constante (independe de  $T$ ); assim, minimizar  $\sum c$  equivale a minimizar  $\sum c'$  (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos  $a_v$  de menor custo que entram em  $v$  têm custo reduzido zero e formam  $F^*$ .

2. *Caso acíclico*: se  $(V, F^*)$  é acíclico, então já é uma  $r$ -arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada  $v \neq r$ , é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).
3. *Caso com ciclo (contração/expansão)*: se  $F^*$  contém um ciclo dirigido  $C$ , todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

Contraia  $C$  em  $x_C$  e ajuste apenas arcos que *entram* em  $C$ :  $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$ .

Resolva o problema no grafo contraído  $D'$ , obtendo uma  $r$ -arborescência ótima  $T'$  sob  $c'$ . Na expansão, substitua o arco  $(u, x_C) \in T'$  pelo correspondente  $(u, w)$  (com  $w \in C$ ) e remova  $a_w$  de  $C$ .

Como os arcos de  $C$  têm custo reduzido zero e  $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$ , a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo,  $T'$  ótimo em  $D'$  mapeia para  $T$  ótimo em  $D$  para  $c'$ . Pela equivalência entre  $c$  e  $c'$ ,  $T$  também é ótimo para  $c$ . Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).



Em termos intuitivos,  $y$  funciona como um potencial nos vértices: torna “apertados” (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

### 1.2.3 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os  $a_v$ , detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa  $O(m)$  por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo  $O(n)$  níveis e tempo total  $O(mn)$ , com  $n = |V|$ ,  $m = |A|$ .

O uso de memória é  $O(m + n)$ , incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão  $O(mn)$  por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>).

## 1.3 Implementação em Python

Esta seção apresenta uma implementação em Python do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. A arquitetura segue os passos teóricos: recebe como entrada um digrafo ponderado, os custos das arestas e o vértice raiz. O procedimento seleciona, para cada vértice, o arco de menor custo de entrada, verifica se o grafo é acíclico e, se necessário, contrai ciclos e ajusta custos. Ao final, retorna como saída a r-arborescência ótima: um conjunto de arestas que conecta todos os vértices à raiz com custo mínimo.

### 1.3.1 Especificação da interface (entradas, saídas e hipóteses)

- **Entrada:** digrafo ponderado  $D = (V, A)$ , custos  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ , raiz  $r \in V$ .
- **Hipóteses:**
  - $D$  é representado como um objeto `networkx.DiGraph`, com pesos armazenados no atributo de arestas `'w'`.
  - $D$  é conexo a partir de  $r$ :
  - (i) todo  $v \neq r$  é alcançável a partir de  $r$  (caso contrário, não há r-arborescência);
  - (ii) para todo subconjunto não vazio  $X \subseteq V \setminus \{r\}$ , existe ao menos um arco que entra em  $X$  ( $\delta^-(X) \neq \emptyset$ ; condições clássicas de existência à la Edmonds (SCHRIJVER, 2003)).
  - Os custos são não negativos:  $c(a) \geq 0$  para todo  $a \in A$ .
- **Saída:** conjunto  $A^* \subseteq A$  com  $|A^*| = |V| - 1$ , tal que cada  $v \neq r$  tem grau de entrada 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de  $r$  e  $\sum_{a \in A^*} c(a)$  é mínimo.

- **Convenções:** arcos paralelos (múltiplos arcos entre o mesmo par de vértices) são permitidos após contrações; laços (self-loops) são descartados.

### 1.3.2 Funções principais

O código a seguir implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em Python, utilizando a biblioteca NetworkX para manipulação de grafos. A implementação segue a estrutura descrita na seção anterior, com funções auxiliares para cada etapa do algoritmo.

A seguir, detalhamos as implementações das funções auxiliares e as principais, começando pela normalização dos custos por vértice.

#### 1.3.2.1 Normalização por vértice:

para um vértice alvo  $v$ , a função normaliza<sup>1</sup> os custos das arestas que *entram* em  $v$ : calcula  $y(v) = \min\{w(u, v)\}$  e substitui cada peso  $w(u, v)$  por  $w(u, v) - y(v)$ .

Com isso, ao menos uma entrada em  $v$  passa a ter custo reduzido zero e a ordem relativa entre as entradas é preservada. A função modifica o grafo *in-place*<sup>2</sup>, ou seja, sem criar uma cópia.

A função executa em  $O(\deg^-(v))$ . Pois, dado o vértice  $v$ , obtemos suas arestas de entrada em  $O(\deg^-(v))$ ; calcular o mínimo e ajustar os pesos também leva  $O(\deg^-(v))$ .

#### Normalização por vértice: custos reduzidos

*Altera os pesos das arestas que entram em 'node' subtraindo de cada uma o menor peso de entrada no grafo  $D$ .*

```
1 % def normalize_incoming_edge_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
2
3 %     # Get the incoming edges of the node with their weights
4 %     predecessors = list(D.in_edges(node, data="w"))
5
6 %     if not predecessors:
7 %         return
8
9 %     # Calculate the minimum weight among the incoming edges
10 %     yv = min((w for _, _, w in predecessors))
```

<sup>1</sup> Aqui, “normalizar” significa subtrair do peso de cada aresta que entra em  $v$  o menor peso de entrada de  $v$  (custos reduzidos), preservando a ordem relativa entre as entradas; assim, ao menos uma entrada em  $v$  passa a ter custo 0, sem afetar a comparação entre soluções.

<sup>2</sup> No jargão de programação, significa “no próprio lugar”: a estrutura de dados original é alterada diretamente, sem criar uma cópia. Isso economiza memória e tempo, mas introduz efeitos colaterais — outras referências ao mesmo objeto verão as mudanças.

```

11
12 %      # Subtract  $Y_v$  from each incoming edge
13 %      for u, _, _ in predecessors:
14 %          D[u][node]["w"] -= yv

```

### 1.3.2.2 Construção de $F^*$ :

a função constrói o subgrafo  $F^*$  selecionando, para cada vértice  $v \neq r_0$ , uma única aresta de menor custo que entra em  $v$  (isto é, um  $\operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} w(u,v)$ ).

Se os custos já foram normalizados por vértice, o arco escolhido tem custo reduzido zero; caso contrário, ele devolve None. O resultado é um digrafo com exatamente uma aresta entrando em cada  $v \neq r_0$  e nenhuma aresta entrando em  $r_0$ . A função executa em  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de arestas.

Isso ocorre porque a função itera sobre todos os vértices do grafo e, para cada vértice, verifica suas arestas de entrada para encontrar a de menor peso. Como cada aresta é considerada no máximo uma vez durante essa iteração, o tempo total é proporcional ao número de arestas, ou seja,  $O(m)$ . A função não modifica o grafo original, mas cria um novo grafo direcionado  $F^*$ .

#### Construção de F star

*Constrói o subgrafo funcional F star a partir do grafo D e da raiz r0 entrando em r0.*

```

1 % def get_Fstar(D: nx.DiGraph, r0: str):
2
3 %      # Create an empty directed graph for F_star
4 %      F_star = nx.DiGraph()
5
6 %      for v in D.nodes():
7 %          if v != r0:
8 %              in_edges = list(D.in_edges(v, data="w"))
9 %              if not in_edges:
10 %                  continue # No edges entering v
11 %                  u = next((u for u, _, w in in_edges if w \neq 0), None)
12 %                  if u:
13 %                      F_star.add_edge(u, v, w\eq0)
14 %      return F_star

```

### 1.3.2.3 Detecção de ciclo:

a função detecta um ciclo dirigido em  $F^*$  (se existir) e retorna um subgrafo contendo o ciclo. Caso contrário, retorna None. A função utiliza a função `find_cycle` do NetworkX, que implementa um algoritmo eficiente de detecção de ciclos.

A função executa em  $O(m)$ . Isso ocorre porque a função `find_cycle` do NetworkX utiliza uma abordagem baseada em busca em profundidade (DFS) para detectar ciclos em grafos direcionados.

A complexidade dessa abordagem é linear em relação ao número de vértices e arestas do grafo, ou seja,  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de arestas. A função não modifica o grafo original, mas cria um subgrafo contendo apenas os vértices e arestas que fazem parte do ciclo detectado.

Detecção de ciclo dirigido em $F^*$
<i>Encontra um ciclo dirigido no grafo. Por fim, retorna um subgrafo contendo o ciclo, ou None caso não exista.</i>
<pre> 1 % def find_cycle(F_star: nx.DiGraph): 2 %     try: 3 %         nodes_in_cycle = set() 4 %         # Extract nodes involved in the cycle 5 %         for u, v, _ in nx.find_cycle(F_star, orientation="original"): 6 %             nodes_in_cycle.update([u, v]) 7 %         # Create a subgraph containing only the cycle 8 %         return F_star.subgraph(nodes_in_cycle).copy() 9 10 %     except nx.NetworkXNoCycle: 11 %         return None </pre>

### 1.3.2.4 Contração de ciclo:

a função contrai um ciclo dirigido simples  $C$  em um **supervértice**  $x_C$ , redirecionando arcos incidentes a  $C$  e ajustando custos de acordo com a regra de *custos reduzidos*. O grafo é modificado *in-place* e a rotina devolve dicionários auxiliares para permitir a *reexpansão* correta do ciclo.

Em alto nível, o procedimento de contração de ciclo recebe como entrada um ciclo dirigido  $C$  em  $D$ , a raiz  $r_0$  (que não pertence a  $C$ ), e um rótulo novo para o supervértice  $x_C$ . Para cada arco que entra em  $C$ , cria um arco para  $x_C$  com custo ajustado; para cada arco que sai de  $C$ , redireciona a saída para partir de  $x_C$ ; laços internos são descartados. O procedimento devolve dicionários que permitem reexpansão correta do ciclo ao final.

Como efeito colateral, remove os vértices de  $C$  e insere  $x_C$  no grafo. Se não houver arco entrando em  $C$ , não existe  $r$ -arborescência; se não houver arco saindo,  $x_C$  pode isolar componentes. O custo total é preservado e o procedimento é linear no número de arestas.

Essas escolhas garantem a *equivalência de custo* entre soluções ótimas no grafo contraído e no original após a reexpansão: os arcos internos de  $C$  têm custo reduzido zero e apenas as entradas em  $C$  recebem o desconto  $y(w)$ , mantendo a bijeção entre arborescências descrita anteriormente.

A expressão “no próprio lugar (inplace)” no docstring abaixo<sup>3</sup> indica que o grafo  $D$  é modificado diretamente.

Contração de ciclo
<p><i>Contraí um ciclo <math>C</math> no grafo <math>D</math>, substituindo-o por um supervértice rotulado 'label'. Nesse processo, modifica o grafo <math>D</math> no próprio lugar (in-place) e por fim, devolve dicionários auxiliares para a reexpansão.</i></p> <hr/> <pre> 1 % def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str): 2 3 4 %     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes()) 5 6 %     # Stores the vertex u outside the cycle and the vertex v inside the 7 %     # cycle that receives the minimum weight edge 8 9 %     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {} 10 11 %     for u in D.nodes: 12 %         if u not in cycle_nodes: 13 %             # Find the minimum weight edge that u has to any vertex in C 14 %             min_weight_edge_to_cycle = min( 15 %                 ((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in 16 %                 cycle_nodes), 17 %                 key=lambda x: x[1], 18 %                 default=None, 19 %             ) 20 %             if min_weight_edge_to_cycle: 21 %                 in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle </pre>

<sup>3</sup> “Inplace” significa que a função altera diretamente a estrutura de dados existente, sem criar uma cópia. Assim, após a chamada, o grafo  $D$  já refletirá as remoções, inserções e ajustes feitos. Isso reduz alocações e pode ser mais eficiente, mas exige cuidado com aliasing/referências ativas, pois o estado anterior não é preservado a menos que seja salvo explicitamente.

```

19
20 %     for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
21 %         D.add_edge(u, label, w=w)
22
23 %     # Stores the vertex v outside the cycle that receives the minimum
24 %     # weight edge from a vertex u inside the cycle
25
26 %     out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
27
28 %     for v in D.nodes:
29 %         if v not in cycle_nodes:
30 %             # Find the minimum weight edge that v receives from any vertex
31 %             # in C
32 %             min_weight_edge_from_cycle = min(
33 %                 ((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in
34 %                 cycle_nodes),
35 %                 key=lambda x: x[1],
36 %                 default=None,
37 %             )
38 %             if min_weight_edge_from_cycle:
39 %                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
40
41 %     for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
42 %         D.add_edge(label, v, w=w)
43
44 %     # Remove all nodes in the cycle from G
45 %     D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
46
47 %     return in_to_cycle, out_from_cycle
48 %

```

### 1.3.2.5 Remoção de arestas que entram na raiz:

a função remove todas as arestas que entram no vértice raiz  $r_0$  do grafo  $G$ . A função modifica o grafo *in-place* e executa em  $O(\deg^-(r_0))$ .

Isso ocorre porque a função obtém todas as arestas que entram em  $r_0$  usando o método `in_edges` do NetworkX, que tem complexidade  $O(\deg^-(r_0))$ .

Em seguida, a função remove essas arestas usando o método `remove_edges_from`, que também opera em tempo linear em relação ao número de arestas sendo removidas. Portanto, o tempo total de execução da função é  $O(\deg^-(r_0))$ . A função não cria uma cópia do grafo original, mas altera diretamente a estrutura de dados do grafo fornecido.

#### Remoção de arestas que entram na raiz

*Remove todas as arestas que entram no vértice raiz  $r_0$  no grafo  $D$ . Por fim, retorna o grafo atualizado.*

```

1 % def remove_edges_to_r0(
2 %     D: nx.DiGraph, r0: str
3 % ):
4 %     # Remove all edges entering r0
5 %     in_edges = list(D.in_edges(r0))
6 %     if in_edges:
7 %         D.remove_edges_from(in_edges)
8 %     return D

```

#### 1.3.2.6 Remoção de arco interno:

ao expandir o ciclo  $C$ , a função remove o arco interno que entra no vértice de entrada  $v$  do ciclo, já que  $v$  agora recebe um arco externo do grafo. A função modifica o subgrafo do ciclo *in-place* e executa em  $O(\deg^-(v))$ .

#### Remover arco interno na reexpansão

*Remove a aresta interna que entra no vértice de entrada ' $v$ ' do ciclo  $C$ , pois ' $v$ ' passa a receber uma aresta externa do grafo.*

```

1 % def remove_internal_edge_to_cycle_entry(C: nx.DiGraph, v):
2 %
3 %     predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)), None)
4 %
5 %     C.remove_edge(predecessor, v)

```

#### 1.3.2.7 Procedimento principal (recursivo):

A função principal implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva e atua como um orquestrador das fases do método. Em alto nível, ela mantém a seguinte lógica:

O procedimento principal do algoritmo segue estes passos: prepara a instância removendo entradas na raiz, normaliza os custos das arestas que entram em cada vértice (exceto a raiz) para garantir pelo menos uma entrada de custo reduzido zero, constrói o grafo funcional  $F^*$  escolhendo para cada vértice a entrada de menor custo reduzido, verifica se  $F^*$  é acíclico (se for, retorna como r-arborescência ótima), e, caso

haja ciclo, contrai o ciclo em um supervértice, ajusta os custos das entradas e resolve recursivamente; ao retornar, expande o ciclo e remove uma aresta interna para garantir aciclicidade e grau de entrada igual a 1.

Mais especificamente, o procedimento garante as seguintes propriedades e passos:

- **Função (entradas/saídas):** Entrada: digrafo ponderado  $D = (V, A)$ , raiz  $r_0$ , e, opcionalmente, funções `draw_fn` e `log` para visualização e registro. Saída: um subdigrafo dirigido  $T$  de  $D$  com  $|V| - 1$  arcos em que todo  $v \neq r_0$  tem grau de entrada 1, todos os vértices alcançam  $r_0$  e o custo total  $\sum_{a \in T} c(a)$  é mínimo.
- **Invariantes:** Após a normalização por vértice, cada  $v \neq r_0$  tem pelo menos uma entrada de custo reduzido zero; o conjunto  $F^*$  contém exatamente uma entrada por vértice distinto de  $r_0$ ; em toda contração, apenas arcos que *entram* no componente têm seus custos reduzidos ajustados por  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , preservando comparações relativas.
- **Deteção de ciclo e contração:** Se  $F^*$  contém um ciclo  $C$ , todos os seus arcos têm custo reduzido zero. O procedimento forma o supervértice  $x_C$ , reescreve arcos incidentes (descarta laços internos) e prossegue na instância menor. Essa etapa pode manter arcos paralelos e ignora laços.
- **Recursão e expansão:** Ao obter  $T'$  ótimo no grafo contraído, o método mapeia  $T'$  de volta para  $D$ : substitui o arco  $(u, x_C)$  por um  $(u, w)$  apropriado (com  $w \in C$ ) e remove uma única aresta interna de  $C$ , restaurando a propriedade “uma entrada por vértice” e a aciclicidade.
- **Empates e robustez:** Empates de custo são resolvidos de modo determinístico/local, sem afetar a otimalidade. Arcos paralelos podem surgir após contrações e são tratados normalmente; laços são descartados por construção.
- **Logs e desenho (opcionais):** Na implementação disponibilizada no repositório do projeto integramos o solver com a interface do projeto de forma que se fornecidos, `log` recebe mensagens estruturadas por nível de recursão, e `draw_fn` e `draw_step` pode ser chamado para ilustrar passos relevantes (normalização, detecção/contração de ciclos, retorno da recursão e expansão).
- **Casos-limite:** Se algum  $v \neq r_0$  não possui arco de entrada na instância corrente, detecta-se inviabilidade (não existe r-arborescência). Se  $F^*$  já é acíclico, retorna imediatamente (base da recursão).
- **Complexidade:** Em uma implementação direta, cada nível de recursão executa seleção/checagem/ajustes em tempo proporcional a  $O(m)$ , e há no máximo  $O(n)$  níveis devido às contrações, totalizando  $O(mn)$  e memória  $O(m + n)$ .



Essa rotina encapsula, portanto, a estratégia primal do método: induzir arestas de custo reduzido zero por normalização local, extrair uma estrutura funcional  $F^*$  de uma entrada por vértice, e resolver conflitos cíclicos por contração/expansão, preservando custos e correção em todas as etapas.

#### Procedimento principal (recursivo)

*Função recursiva que encontra a arborescência ótima em um digrafo  $D$  com raiz  $r_0$  usando o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds.*

```

1 % def find_optimum_arborescence_chuliu(
2 %     D: nx.DiGraph,
3 %     r0: str,
4 %     level=0,
5 % ):
6
7 %     D_copy = D.copy()
8
9 %     for v in D_copy.nodes:
10 %         if v != r0:
11 %             normalize_incoming_edge_weights(D_copy, v)
12
13 %     # Build F_star
14 %     F_star = get_Fstar(D_copy, r0)
15
16 %     if nx.is_arborescence(F_star):
17 %         for u, v in F_star.edges:
18 %             F_star[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
19 %         return F_star
20
21 %     else:
22 %         C: nx.DiGraph = find_cycle(F_star)
23
24 %         contracted_label = f"\n n*{level}"
25 %         in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(
26 %             D_copy, C, contracted_label
27 %         )
28
29 %         # Recursive call
30 %         F_prime = find_optimum_arborescence_chuliu(
31 %             D_copy,
```

```

32 %         r0,
33 %         level + 1
34 %     )
35
36 %     # Identify the vertex in the cycle that received the only incoming
edge from the arborescence
37 %     in_edge = next(iter(F_prime.in_edges(contracted_label, data="w")),
None)
38
39 %     u, _, _ = in_edge
40
41 %     v, _ = in_to_cycle[u]
42
43 %     # Remove the internal edge entering vertex 'v' from cycle C
44 %     remove_internal_edge_to_cycle_entry(
45 %         C, v
46 %     ) # Note: w is coming from F_prime, not from G
47
48 %     # Add the external edge entering the cycle (identified by in_edge)
, the weight will be corrected at the end using G
49 %     F_prime.add_edge(u, v)
50
51 %     # Add the remaining edges of the modified cycle C
52 %     for u_c, v_c in C.edges:
53 %         F_prime.add_edge(u_c, v_c)
54
55 %     # Add the external edges leaving the cycle
56 %     for _, z, _ in F_prime.out_edges(contract_label, data=True):
57
58 %         u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
59 %         F_prime.add_edge(u_cycle, z)
60
61 %     F_prime.remove_node(contract_label)
62
63 %     # Update the edge weights with the original weights from G
64 %     for u, v in F_prime.edges:
65 %         F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
66
67 %     return F_prime

```

### 1.3.2.8 Notas finais sobre a implementação

A implementação acima segue diretamente a descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds, enfatizando clareza e correção. Para aplicações práticas, otimizações podem ser introduzidas, como estruturas de dados eficientes para seleção de mínimos, detecção rápida de ciclos e manipulação de grafos dinâmicos. Além disso, a função pode ser adaptada para lidar com casos especiais, como grafos desconexos ou múltiplas raízes, conforme necessário.

A complexidade da implementação direta é  $O(mn)$  no pior caso, onde  $m$  é o número de arestas e  $n$  o número de vértices, devido à potencial profundidade de recursão e ao processamento linear em cada nível. Implementações mais sofisticadas podem reduzir isso para  $O(m \log n)$  usando estruturas avançadas, como heaps e union-find, mas a versão apresentada prioriza a compreensão do algoritmo fundamental.

SAMIRA

### 1.3.2.9 Decisões de projeto e implicações práticas

Antes de prosseguir para uma visão alternativa do mesmo problema, vale destacar algumas decisões de projeto e implicações práticas da implementação de Chu–Liu/Edmonds:

- **Estruturas e efeitos colaterais:** Optamos por modificar grafos *in-place* (por exemplo, durante a normalização e a contração de ciclos) para reduzir alocações e facilitar a visualização incremental. Isso exige invariantes explícitos e cuidado com referências ativas ao grafo original.
- **Empates, paralelos e laços:** Empates são resolvidos de forma determinística/local sem afetar a otimalidade. A contração pode induzir *arcos paralelos*; preservamos apenas o de menor custo. Laços (self-loops) são descartados por construção.
- **Validação e testes:** O repositório inclui artefatos úteis para experimentação (por exemplo, `tests.py`, `test_results.csv`, `test_log.txt`). Onde um volume de grafos é gerado aleatoriamente, a função é executada e os resultados são validados são comparados com soluções de força bruta.
- **Integração com visualização e logs:** A função `draw_fn` permite registrar *snapshots* (normalização, formação de  $F^*$ , contração/expansão). O log facilita auditoria e depuração em execuções recursivas.
- **Extensões:** Variantes com múltiplas raízes, restrições adicionais (p.ex., proibições por partição) e empacotamento de arborescências exigem ajustes na fase de extração/expansão ou formulações via matroides.

### 1.3.2.10 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode parecer um conjunto de heurísticas bem-sucedidas sem uma justificativa teórica unificadora aparente. Por que escolher a melhor entrada para cada vértice garante otimalidade global após o tratamento de ciclos? A resposta reside na *dualidade em programação linear*.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica primal–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais<sup>4</sup>  $y(\cdot)$ , explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma mecânica operacional (normalizar  $\rightarrow$  contrair  $\rightarrow$  expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

---

<sup>4</sup> No contexto primal–dual, “potenciais” são valores escalares  $y(v)$  atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos  $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$ . Ajustar  $y$  desloca uniformemente os custos das arestas que entram em  $v$ , sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna “apertadas” (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de corretude via cortes apertados.

## Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 4 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [13](#) e [15](#).

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 4 vezes nas páginas [12](#), [13](#), [15](#) e [16](#).

# Anexos

# ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.