Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos:

Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

27 de novembro de 2025

Sumário

O Problema

UFABC

Encontrar uma r-Arborescência Geradora de Custo Mínimo

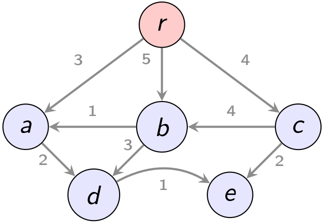
Dado um r-digrafo ponderado (D, w, r):

- Encontrar uma r-arborescência geradora de custo mínimo de D

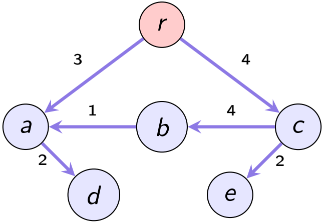
Algoritmos estudados:

1. Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
2. András Frank (1981-2014)

Exemplo: r-Arborescência Geradora Mínima

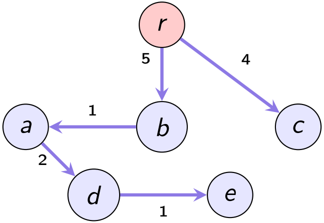


Digrafo Original



r-Arborescência Geradora

Custo: 16



Geradora Mínima

Custo: 13

Intermissão

Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

Chu-Liu-Edmonds

UFABC

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu–liu–edmonds((D, w, r)):

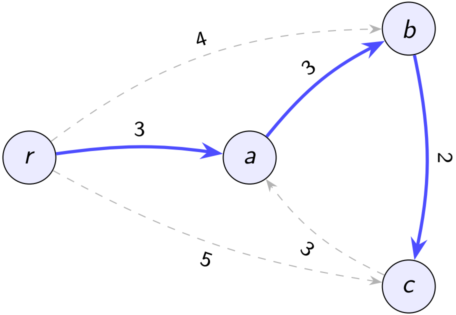
1. **Reduzir custos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
2. **Construir** D_0: escolhendo um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
3. **Verificar**: se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0
   Caso contrário:
4. **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair
5. **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r)
6. **Devolver**: expandir(T')

Exemplo: Escolha Gulosa

Definição:
Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de custo mínimo que entra em v:

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

Propriedade:
Se T é uma r-arborescência, então T tem custo mínimo.



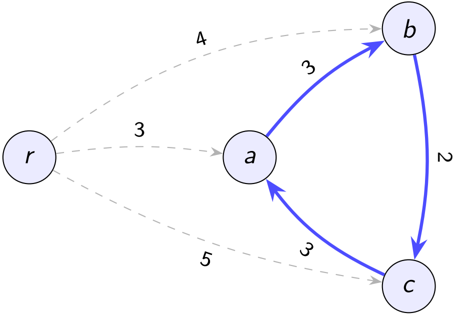
Resultado

$T = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma r-arborescência de custo mínimo!

E quando a escolha gulosa falha?

Problema:
A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r-arborescência.

Exemplo:
Os arcos de custo mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r.



Arcos azuis formam um **ciclo**!

Passo 1: Redução de Custos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

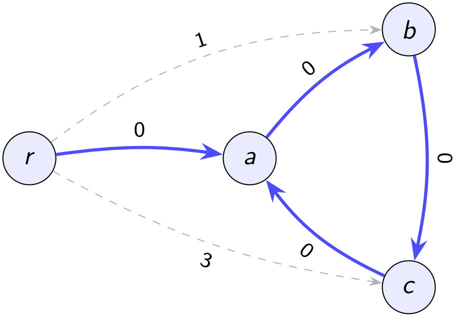
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^{-}(v)\}$$

Custo λ-reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ:

- $\lambda(a) = 3,\ \lambda(b) = 3,\ \lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm custo zero!

Arcos com custo zero são candidatos para D_0

Passo 1: Implementação - Redução de Custos

Função `reduce_weights`**:**

```
def reduce_weights(D: nx.DiGraph, v: int
  ):
    in_edges = D.in_edges(v, data=True)
    yv = min((data["w"]
               for _, _, data in in_edges
                 ))
    for u, _, _ in in_edges:
        D[u][v]["w"] -= yv
```

Descrição:

- Calcula $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- Reduz o custo de cada arco que entra em v
- Complexidade: $O(k)$ onde k é o número de arcos entrando em v

Resultado

Após executar `reduce_weights(D, v)` para cada $v \neq r$, todos os vértices têm ao menos um arco de entrada com custo zero.

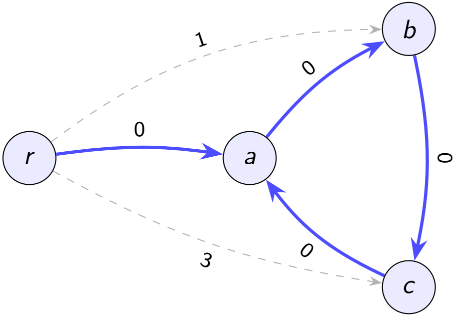
Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0: Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (r, a)
- (a, b), (c, a)



Passo 2: Implementação - Construção de D_0

Função `get_Dzero`:

```
def get_Dzero(D: nx.DiGraph, r: int):
    D_zero = nx.DiGraph()
    for v in D.nodes():
        if v != r:
            in_edges = D.in_edges(v,
                                  data=True)
            u = next((u for u, _, data
                      in in_edges
                      if data["w"] == 0))
            D_zero.add_edge(u, v)
    return D_zero
```

Descrição:

- Para cada vértice $v \neq r$, seleciona um arco com custo zero
- Constrói subdigrafo gerador D_0
- Garantido existir arco de custo zero após redução

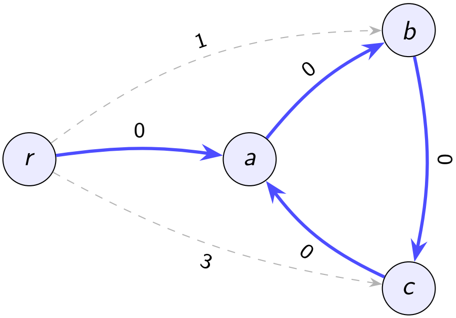
Observação

Se D_0 for uma arborescência, então D_0 é necessariamente uma r-arborescência ótima.

Passo 3: Verificação de D_0

Verificar:
Se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0

Caso contrário:
D_0 contém algum ciclo C.
$\Rightarrow$ **prosseguir** para os passos 4 e 5.



D_0 não é uma r-arborescência!

Neste exemplo, $D_0 = \{(r, a), (a, b), (c, a)\}$ não forma uma r-arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a).

Passo 3: Implementação - Verificação de D_0

UFABC

Verificação se é arborescência:

```
# Verificar se D_zero eh arborescencia
if nx.is_arborescence(D_zero):
    # Restaurar pesos originais
    for u, v in D_zero.edges:
        D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
    return D_zero
```

Esse trecho faz parte do caso base da função recursiva principal.

Caso Base

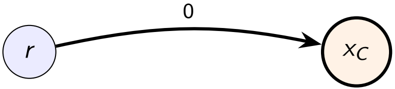
Se D_0 é uma arborescência, então ela é a r-arborescência de custo mínimo. Restauramos os pesos originais e devolvemos.

Passo 4: Contração de Ciclos

Operação:
Contrair ciclo C em supervértice x_C.
Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de D que entra em algum vértice de C



Digrafo contraído D' - *podem ter arcos saindo de x_C em D'.*

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D.

Passo 4: Implementação - Contração de Ciclos (1/3)

UFABC

Detecção de ciclo:

```
def find_cycle(D_zero: nx.DiGraph):
    nodes_in_cycle = set()
    for u, v, _ in nx.find_cycle(
            D_zero, orientation="original"):
        nodes_in_cycle.update([u, v])
    return D_zero.subgraph(nodes_in_cycle).to_directed()
```

Descrição

- Usa `nx.find_cycle` para encontrar arcos do ciclo
- Coleta todos os vértices envolvidos
- Retorna subdigrafo induzido pelos vértices do ciclo

Passo 4: Implementação - Contração de Ciclos (2/3)

UFABC

Arcos essenciais que entram no ciclo:

```
def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph,
                   label: int):
    cycle_nodes: set[int] = set(C.nodes())
    # Arcos essenciais entrando no ciclo
    in_to_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
    for u in D.nodes:
        if u not in cycle_nodes:
            min_weight_edge_to_cycle = min(
                ((v, data["w"])
                 for _, v, data in D.out_edges(u, data=True)
                 if v in cycle_nodes),
                key=lambda x: x[1], default=None)
            if min_weight_edge_to_cycle:
                in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
    for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
        D.add_edge(u, label, w=w)
```

Para cada vértice externo, encontra o arco de menor custo que entra no ciclo.

Passo 4: Implementação - Contração de Ciclos (3/3)

Arcos essenciais que saem do ciclo:

```
    # Arcos essenciais saindo do ciclo
    out_from_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
    for v in D.nodes:
        if v not in cycle_nodes:
            min_weight_edge_from_cycle = min(
                ((u, data["w"])
                 for u, _, data in D.in_edges(v, data=True)
                 if u in cycle_nodes),
                key=lambda x: x[1], default=None)
            if min_weight_edge_from_cycle:
                out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
    for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
        D.add_edge(label, v, w=w)
    D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
    return in_to_cycle, out_from_cycle
```

Encontra o arco de menor custo que sai do ciclo para cada vértice externo. Os dicionários retornados serão usados na expansão.

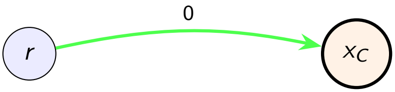
Passo 5: Chamada Recursiva

Novo problema: (D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu–liu–edmonds}(D', w', r)$$

Resultado: T' é uma r-arborescência de custo mínimo em (D', w')



r-arborescência ótima em D'

Passo 5: Implementação - Chamada Recursiva

Estrutura recursiva:

```
def chuliu_edmonds(D: nx.DiGraph, r: int, label: int):
    D_copy = cast(nx.DiGraph, D.copy())
    # Reducao de custos
    for v in D_copy.nodes:
        if v != r:
            reduce_weights(D_copy, v)
    D_zero = get_Dzero(D_copy, r)
    if nx.is_arborescence(D_zero):
        # Restaurar pesos e devolver
        for u, v in D_zero.edges:
            D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
        return D_zero
    # Contrair ciclo e recursao
    C = find_cycle(D_zero)
    in_to_cycle, out_from_cycle =
        contract_cycle(D_copy, C, label)
    F_prime = chuliu_edmonds(D_copy, r, label + 1)
    # ... expansao ...
```

Passo 6: Reexpansão da Solução

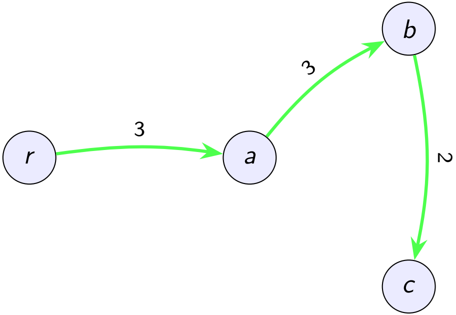
Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

1. Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
2. Incluir uv em T
3. Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v

Resultado: T é uma r-arborescência de custo mínimo



r-arborescência final no digrafo original

Passo 6: Implementação - Reexpansão (1/2)

UFABC

Encontrar e adicionar arco correspondente:

```
# F_prime: solucao em D' (com supervertice)
# Encontrar arco que entra em label
in_edge = next(iter(
    F_prime.in_edges(label, data=True)))
u, _, _ = cast(tuple, in_edge)

# Arco correspondente em D original
v, _ = in_to_cycle[u]
F_prime.add_edge(u, v)

# Adicionar arcos do ciclo (exceto o que entra em v)
for u_c, v_c in C.edges:
    if v != v_c:
        F_prime.add_edge(u_c, v_c)
```

Observação: Identifica qual arco do ciclo não será incluído na solução final.

Passo 6: Implementação - Reexpansão (2/2)

Transferir arcos externos e restaurar pesos:

```
# Arcos que saem do supervertice
for _, z, _ in list(
        F_prime.out_edges(label, data=True)):
    u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
    F_prime.add_edge(u_cycle, z)

# Remover supervertice
F_prime.remove_node(label)

# Restaurar pesos originais
for u, v in F_prime.edges:
    F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]

return F_prime
```

Correção: A expansão garante que T é uma r-arborescência ótima no digrafo original.

Complexidade do Algoritmo

Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até $O(n)$ chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de custos, construção de D_0, detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade $O(m)$

Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde n é o número de vértices e m é o número de arcos no digrafo original.

Intermissão

Algoritmo de András Frank

Algoritmo de András Frank

Abordagem em Duas Fases

Fase I (Fulkerson): Construir cobertura de r-conjuntos via redução de custos
Fase II (Frank): Extrair r-arborescência geradora da cobertura

Objetivo da Fase I:
Construir uma sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k)}$ tal que:

- $F := \{f_i : i \in [k)\}$ é uma **cobertura de r-conjuntos**
- A sequência $(R_i, \lambda_i)_{i \in [k)}$ é w-**disjunta**

Objetivo da Fase II:
Extrair r-arborescência geradora mínima usando F e a propriedade w-disjunta.

Fase I: Conceitos Fundamentais

Definições:

r-conjunto minimal

Um r-conjunto R é **minimal não coberto por** F se:

- F não entra em R (i.e., $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$)
- Para todo $\emptyset \subset R' \subset R$, existe arco de F que entra em R'

Sequência w-disjunta

Uma sequência $((R_i, \lambda_i))_{i\in[k)}$ é w-**disjunta** se:

$$\sum_{i\in[k)} \lambda_i \,[a \in \delta^-(R_i)] \;\leq\; w(a) \quad \text{para cada } a \in A(D)$$

A soma dos λ_i sobre os conjuntos que a entra não excede o peso de a.

Fase I: Algoritmo de Fulkerson

Processo iterativo

Dado: um r-digrafo ponderado (D, w, r)

1. **Inicializar**:
   - $c := w$ (custos correntes)
   - $\sigma := \epsilon$ (sequência vazia)
   - $F := \emptyset$ (conjunto de arcos selecionados)
2. **Enquanto** existir fonte R_k em $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin R_k$:
   - Calcular $\lambda_k := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R_k)\}$
   - Selecionar $f_k \in \delta^-(R_k)$ com $c(f_k) = \lambda_k$
   - $\sigma := \sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$
   - $F := F \cup \{f_k\}$
   - $c := c - \lambda_k 1_{\delta^-(R_k)}$ (reduzir custos)
   - $D_0 := (V, F)$ (atualizar digrafo auxiliar)
3. **Devolver**: σ

Fase I: Encontrando r-conjuntos Minimais

UFABC

Como encontrar um r-conjunto minimal não coberto?

Seja $D_0 := (V, F)$ onde $F = \{f_i : i \in [k)\}$.

1. Calcular a condensação $\mathcal{C}(D_0)$
2. Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
3. Encontrar uma fonte S em $\mathcal{C}(D_0)$ tal que $r \notin S$

Proposição

Toda fonte S de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$ é um r-conjunto minimal não coberto por F.

Complexidade: identificação de CFCs em $O(|A|)$ usando Kosaraju.

Fase I: Implementação - Encontrar r-conjunto Minimal (1/3)

UFABC

Função `phase1`**:**

```
def phase1(D: nx.DiGraph, r: int):
    D_copy = D.copy()
    sigma = []
    D_zero = nx.DiGraph()
    D_zero.add_nodes_from(D_copy.nodes())

    while True:
        C = nx.condensation(D_zero)
        sources = [x for x in C.nodes()
                   if C.in_degree(x) == 0]
        if len(sources) == 1:
            break

        for s in sources:
            X = C.nodes[s]["members"]
            if r in X:
                continue
            # ... (continua no proximo slide)
```

Observação: Loop principal até todos r-conjuntos estarem cobertos

Fase I: Implementação - Seleção de Arcos (2/3)

Continuação da função `phase1`:

```
        # ... (continuacao do loop)
        arcs = [(u, v, data)
                for u, v, data in D_copy.edges(data=True)
                if u not in X and v in X]

        min_weight = min(data["w"] for _, _, data in arcs)
        a = update_weights(D_copy, arcs, min_weight)

        D_zero.add_edge(a[0], a[1])
        sigma.append((a, X, min_weight))

    return sigma
```

Complexidade: $O(|V||A|)$ - limitado por $2|V| - 1$ iterações

Fase I: Implementação - Atualização de Pesos (3/3)

UFABC

Função `update_weights`:

```
def update_weights(D: nx.DiGraph,
                   arcs: list[tuple[int, int, dict]],
                   min_weight: float):
    for u, v, _ in arcs:
        D[u][v]["w"] -= min_weight
        if D[u][v]["w"] == 0:
            a = (u, v)
    return a
```

Descrição

- Reduz peso de todos arcos que entram no *r*-conjunto
- Devolve arco com peso zero (custo reduzido mínimo)
- Atualiza o digrafo in-place

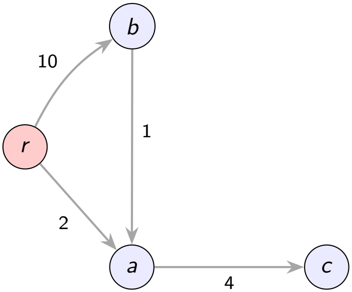
Exemplo: Digrafo Inicial

Digrafo ponderado (D, w, r)**:**

- Vértices: $\{r, a, b, c\}$
- Raiz: r

Pesos dos arcos:

- $(r, a) : 2$, $(r, b) : 10$
- $(b, a) : 1$, $(a, c) : 4$



Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a r-arborescência geradora de custo mínimo.

Fase I: Iteração 1 - Encontrar r-conjunto Minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$ (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$ tem 4 fontes

Fontes que são r-conjuntos:

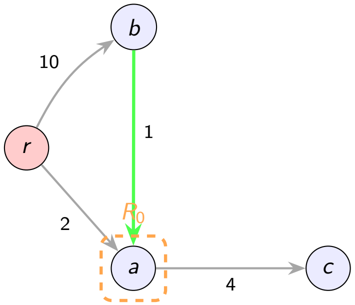
- $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

Escolha:

$R_0 = \{a\}$ (minimal)

Arcos que entram em $\{a\}$:

- $(r, a) : 2$
- $(b, a) : 1 \leftarrow$ **mínimo**



$\lambda_0 = 1,\ f_0 = (b, a)$

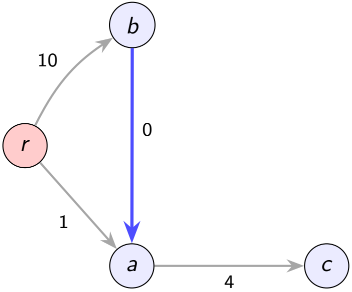
Fase I: Iteração 2 - Redução de Custos

Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(b, a)\}$
- $D_0 = (V, \{(b, a)\})$

Redução de custos:

- $c(r, a) = 2 - 1 = 1$
- $c(b, a) = 1 - 1 = 0$ ✓



Arcos azuis têm custo zero

Observação

Custos são reduzidos para garantir que σ seja w-disjunta.

Fase I: Iteração 3 - Redução de Custos

Atualização:

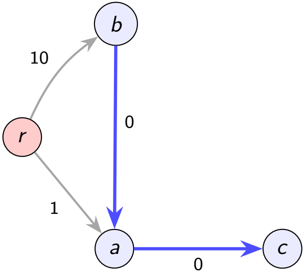
- $F = \{(b,a),(a,c)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Redução:

- $c(a,c) = 4 - 4 = 0$ ✓

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(b,a),(a,c)\}$:

- CFCs: $\{r\}, \{b\}, \{a\}, \{c\}$
- Fontes em D_0: $\{r\}, \{b\}$



Arcos com custo zero em azul

Fase I: Iteração 4 - Redução de Custos

Estado: $F = \{(b, a), (a, c)\}$

$\mathcal{C}(D_0)$ ainda tem:

- Fonte $\{b\}$ não contém r

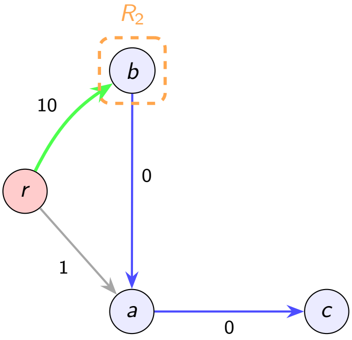
Escolha: $R_2 = \{b\}$

Arcos que entram em $\{b\}$:

- $(r, b) : 10 \leftarrow$ único arco

Seleção:

- $\lambda_2 = 10$
- $f_2 = (r, b)$



Fase I: Iteração 5 - Estado Final

Atualização:

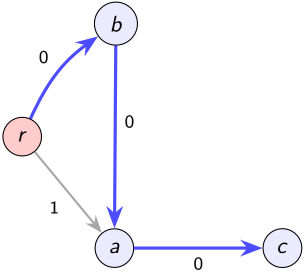
- $F = \{(b,a),(a,c),(r,b)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Redução:

- $c(r,b) = 10 - 10 = 0$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(b,a),(a,c),(r,b)\}$:

Condição de parada satisfeita!



Todos arcos de F têm custo zero!

Sequência devolvida

$\sigma = [(f_0 = (b,a), R_0 = \{a\}, \lambda_0 = 1), (f_1 = (a,c), R_1 = \{c\}, \lambda_1 = 4), (f_2 = (r,b), R_2 = \{b\}, \lambda_2 = 10)]$

Intermissão

Fase II: Duas Abordagens

Fase II: Construção da Arborescência

UFABC

Entrada: Sequência $(f_i)_{i\in[k)}$ da Fase I
Objetivo: Extrair $J \subseteq \{f_i : i \in [k)\}$ que é uma r-arborescência geradora
Algoritmo guloso:

1. Iniciar com $U := \{r\}$ e $J := \emptyset$
2. Para $t = 1$ até $|V| - 1$:
   - Para cada $f_i = (u_i, v_i)$ na sequência:
   - Se $u_i \in U$ e $v_i \notin U$:
     - $U := U \cup \{v_i\}$
     - $J := J \cup \{f_i\}$
     - Passar para próxima iteração

Invariante

Em cada iteração, $\varrho_J(R_i) \leq 1$ para todo $i \in [k)$

Fase II: Implementação - Versão Lista

UFABC

Versão 1: Iteração sobre lista

```
def phase2(D: nx.DiGraph, r: int,
           F: list[tuple[int, int]]):
    Arb = nx.DiGraph()
    Arb.add_node(r)
    n = len(D.nodes())

    for _ in range(n - 1):
        for u, v in F:
            if u in Arb.nodes() and v not in Arb.nodes():
                edge_data = D.get_edge_data(u, v)
                Arb.add_edge(u, v, **edge_data)
                break

    return Arb
```

Complexidade: $O(|V||F|) = O(|V|^2)$ pois $|F| \leq 2|V| - 1$

Fase II: Implementação - Versão Heap

Versão 2: Usando fila de prioridade (estilo Dijkstra)

```
def phase2_v2(D, r, F):
    Arb = nx.DiGraph()
    for i, (u, v) in enumerate(F):
        Arb.add_edge(u, v, w=i)  # prioridade = indice

    V = {r}
    q = []
    for u, v, data in Arb.out_edges(r, data=True):
        heapq.heappush(q, (data["w"], u, v))

    J = nx.DiGraph()
    while q:
        _, u, v = heapq.heappop(q)
        if v in V: continue
        J.add_edge(u, v, w=D[u][v]["w"])
        V.add(v)
        for x, y, data in Arb.out_edges(v, data=True):
            heapq.heappush(q, (data["w"], x, y))
    return J
```

Complexidade: $O(|V| \log |V|)$ usando heap binário

Algoritmo Completo de Frank

Composição das duas fases:

```python
def andras_frank(D: nx.DiGraph, r: int):
    # Fase I: construir cobertura
    sigma = phase1(D, r)
    F = [f for f, _, _ in sigma]
    # Fase II: extrair arborescencia
    J = phase2_v2(D, r, F)
    return J
```

Complexidade Total

- Fase I: $O(|V||A|)$
- Fase II: $O(|V|\log|V|)$ (heap)
- **Total**: $O(|V|(|A|+\log|V|))$

A Fase II é significativamente mais rápida usando heap do que lista!

Fase II: Exemplo - Extração da Arborescência

Entrada da Fase II:

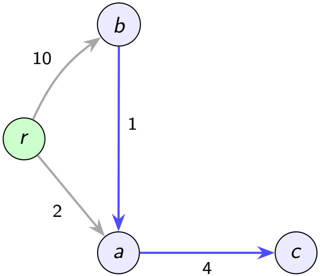
- $F = [f_0, f_1, f_2] = [(b, a), (a, c), (r, b)]$

Estado inicial:

- $U = \{r\}$ (alcançados)
- $J = \emptyset$ (arborescência)

Objetivo:

- Selecionar $|V| - 1 = 3$ arcos
- Manter propriedade de arborescência



Verde = vértices em U

Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D, não apenas F.

Fase II: Iteração 1

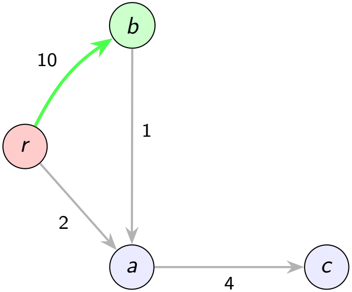
Estado: $U = \{r\}$, $J = \emptyset$

Procurar em F:

- $f_0 = (b, a)$: $b \notin U$ $\times$
- $f_1 = (a, c)$: $a \notin U$ $\times$
- $f_2 = (r, b)$: $r \in U$, $b \notin U$ $\checkmark$

Ação:

- Adicionar (r, b) a J
- $U := U \cup \{b\} = \{r, b\}$



$J = \{(r, b)\}$, custo $= 10$

Fase II: Iteração 2

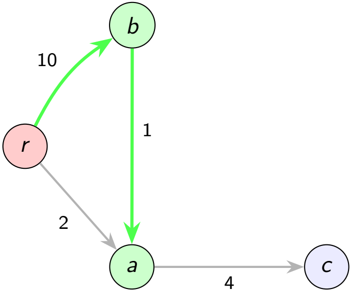
Estado: $U = \{r, b\}$, $J = \{(r, b)\}$

Procurar em F**:**

- $f_0 = (b, a)$: $b \in U$, $a \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (b, a) a J
- $U := U \cup \{a\} = \{r, b, a\}$



$J = \{(r, b), (b, a)\}$, custo $= 11$

Fase II: Iteração 3 - Estado Final

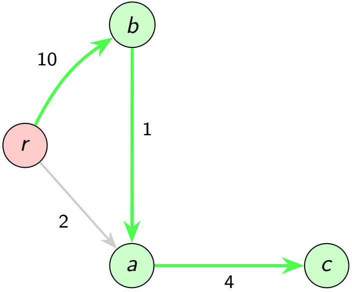
Estado: $U = \{r, b, a\}$, $|J| = 2$

Procurar em F:

- $f_1 = (a, c)$: $a \in U$, $c \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (a, c) a J
- $U := U \cup \{c\} = V$
- $|J| = 3 = |V| - 1$ ✓



$J = r$-arborescência geradora!

Resultado Final

$J = \{(r, b), (b, a), (a, c)\}$ com custo $w(J) = 10 + 1 + 4 = 15$ (custo mínimo!)

Intermissão

Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	**Tempo Mediano**	**Tempo Médio**
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	**0,016 s**	**0,020 s**

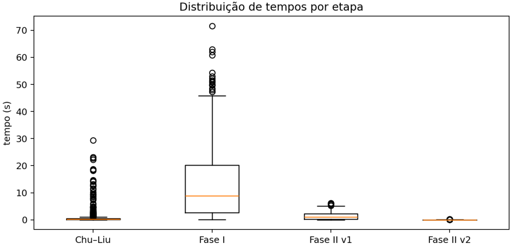
Speedup Fase II

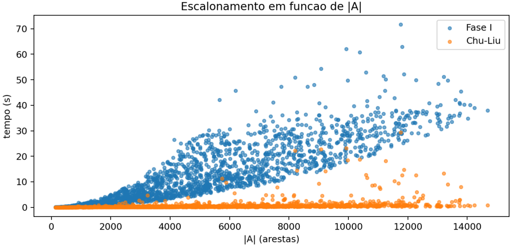
Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

Escalonamento e Consumo de Memória

Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arestas
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida





Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58$\times$ (mediana), 61$\times$ (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
  - Memória modesta: 11,5 MB

Conclusões dos Experimentos

- Equivalência teórica e prática dos algoritmos confirmada
- Chu-Liu/Edmonds é mais eficiente
- Fase I de Frank é o gargalo computacional
- Heap na Fase II traz ganhos práticos expressivos
- Algoritmos são escaláveis e viáveis para grandes digrafos