

# Algoritmos para $r$ -Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad  
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC  
Centro de Matemática, Computação e Cognição

25 de novembro de 2025

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Aplicação Web
- 6 Conclusões

# O Problema

Encontrar uma  $r$ -Arborescência Geradora de Custo Mínimo

Dado um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ :

- Encontrar uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$

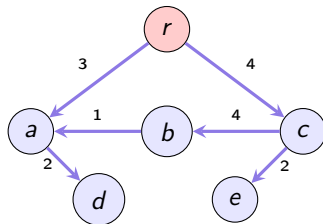
**Algoritmos estudados:**

- 1 Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- 2 András Frank (1981-2014)

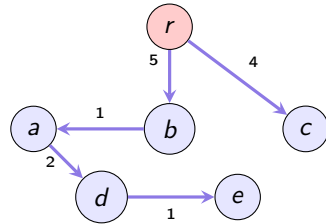
# Exemplo: $r$ -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 $r$ -Arborescência Geradora

Custo: 16



Geradora Mínima

Custo: 13

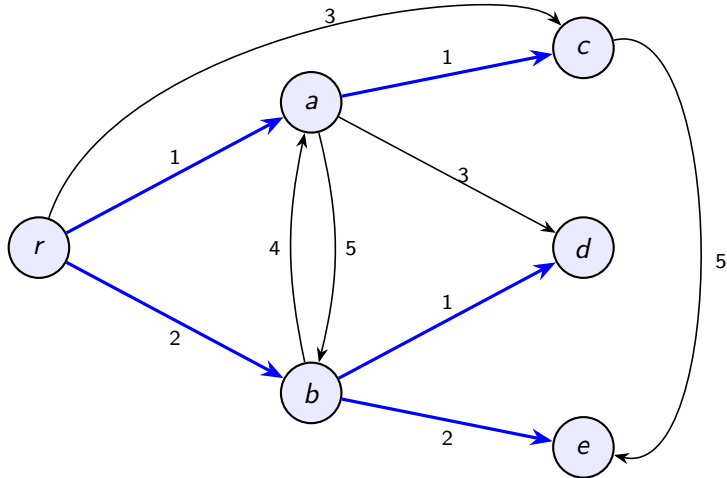
# Chu-Liu-Edmonds: Ideia Principal

Algoritmo Recursivo: dado um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$

$\text{chu-liu-edmonds}((D, w, r))$ :

- 1 **Reduzir custos**: para cada vértice  $v \neq r$ , subtrair  $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- 2 **Construir**  $D_0$ : escolhendo um arco  $a_v$  de custo reduzido zero para cada  $v \neq r$
- 3 **Verificar**: se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência  $\Rightarrow$  **devolver**  $D_0$   
Caso contrário:
- 4 **Contração**: encontrar ciclo  $C$  em  $D_0$  e contrair
- 5 **Chamada recursiva**: Seja  $D' = D/C$  e  $w' = w_\lambda/C$ . Calcular  $T' = \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$
- 6 **Devolver**: expandir( $T'$ )

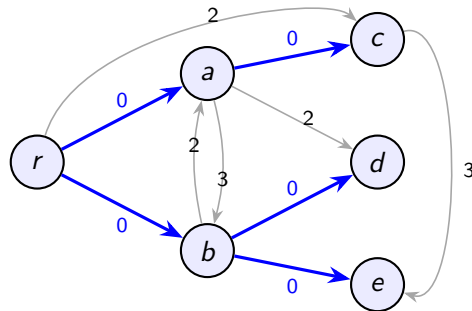
# Digrafo de Exemplo



# Passo 1: Redução de Custos e Construção de $D_0$

## Redução de custos $\lambda$ :

- $\lambda(a) = 1$  (arco  $(r, a)$ )
- $\lambda(b) = 2$  (arco  $(r, b)$ )
- $\lambda(c) = 1$  (arco  $(a, c)$ )
- $\lambda(d) = 1$  (arcos  $(b, d)$ )
- $\lambda(e) = 2$  (arco  $(b, e)$ )



*Escolhemos arcos de custo zero para formar  $D_0$*

$D_0$  é uma  $r$ -arborescência!

Neste exemplo,  $D_0 = \{(r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e)\}$  forma uma  $r$ -arborescência.

*Em outras palavras:* todos os vértices são alcançáveis a partir de  $r$  e cada vértice tem exatamente um arco entrando

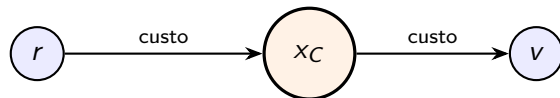
## Caso com Ciclo: Outro Exemplo

Quando  $D_0$  tem ciclo:

Se após redução de custos,  $D_0$  contém um ciclo  $C$ , contraímos  $C$  em supervértice  $x_C$

*Em outras palavras:* todos os vértices de  $C$  viram um único vértice

Custos são ajustados usando os custos  $\lambda$ -reduzidos



### Chamada Recursiva

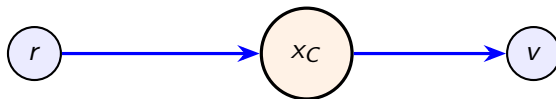
Resolvemos  $\text{chu-liu-edmonds}(D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r)$

*Em outras palavras:* aplicamos o mesmo algoritmo no digrafo menor

UFABC



## Passo 3: Solução Recursiva (quando há ciclo)



O algoritmo devolve  $T'$  (arborescência no digrafo contraído)

*Em outras palavras:* encontramos a  $r$ -arborescência ótima no grafo contraído

**Próximo passo:** expandir  $T'$  de volta para obter  $T$  no digrafo original

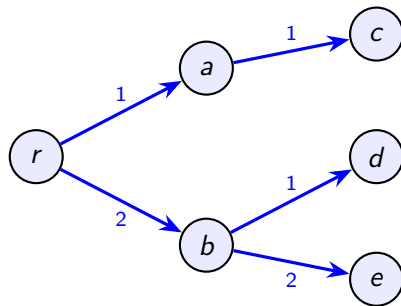
# Solução Final

## Para nosso exemplo:

Como  $D_0$  já é uma  $r$ -arborescência, o algoritmo termina diretamente!

*Em outras palavras:*

- Não há ciclo
- Todos vértices alcançáveis de  $r$
- Cada vértice tem grau de entrada 1
- Solução ótima encontrada!



## Solução Ótima

Custo total:  $1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7$

# András Frank: Visão Geral

## Abordagem em Duas Fases

**Fase I:** Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

**Fase II:** Extrair arborescência da cobertura

### Diferencial:

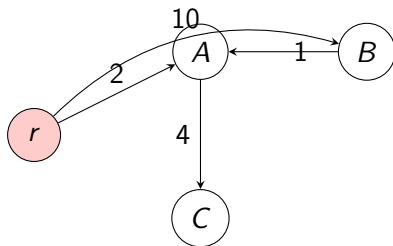
- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

### Complexidade:

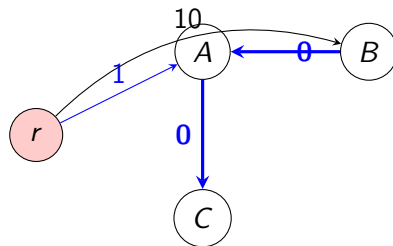
- Fase I:  $O(nm)$
- Fase II v1 (lista):  $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap):  $O(n \log n)$

# Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice  $v \neq r$ : subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

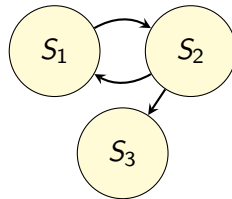
Arcos com custo **zero** formam o digrafo  $D_0$

# Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em  $D_0$

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



## Condição de Otimalidade

Sequência  $\lambda$  satisfaz:  $|\delta^-(X)| = 1$  para cada  $X$  em  $\lambda$

## Fase II: Construção da Arborescência

**Objetivo:** Extrair arborescência de  $D_0$  respeitando  $\lambda$

- 1 Iniciar com conjunto  $R = \{r\}$
- 2 Para cada  $v$  fora de  $R$ :
  - Selecionar arco  $(u, v)$  com  $u \in R$  e custo reduzido zero
  - Adicionar  $v$  a  $R$
- 3 Repetir até incluir todos os vértices

### Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

# Comparação de Desempenho

**Experimentos:** 2000 digrafos aleatórios,  $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	<b>0,016 s</b>	<b>0,020 s</b>

## Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

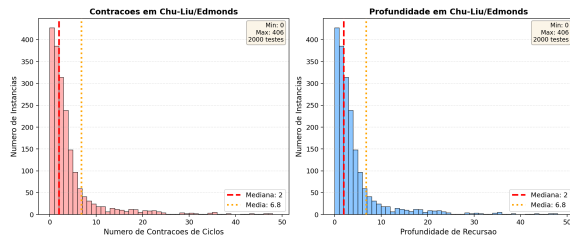
# Características Estruturais

## Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com  $< 20$

Muito abaixo do limite teórico  $O(n)$

**Consumo de memória:** mediana 11,5 MB (Fase I)





# Motivação Didática

## Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos** e **difíceis de visualizar**

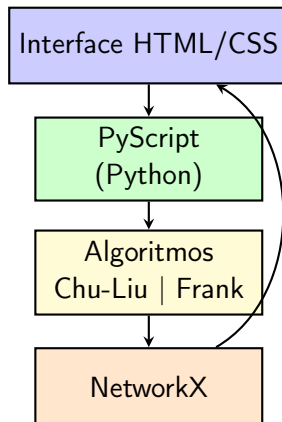
## Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

## Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

# Arquitetura da Aplicação



# Interface: Página Principal

**ArboGraph**

 Home

 Chu-Liu-Edmonds

 András Frank (V1)

 András Frank (V2)

 Desenhe um digrafo

 Nossa dissertação

**Dúvidas ?**

Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

## Algoritmos para o problema da arborescência geradora mínima: uma aplicação didática interativa

### Resumo

Este trabalho investiga e implementa algoritmos de busca de uma  $r$ -arborescência geradora mínima em digrafos. A partir da formulação clássica e da literatura de Chu-Liu-Edmonds e também da formulação de András Frank, desenvolvemos uma aplicação web que permite: (i) desenhar ou importar um digrafo ponderado, (ii) escolher o nó raiz  $r$ , (iii) executar o algoritmo passo a passo com visualização das contrações, seleção de arcos de custo mínimo e reconstrução da arborescência, e (iv) exportar resultados e logs. A solução combina PyScript e NetworkX para a lógica algorítmica, Cytoscape para edição e visualização interativa, e Tailwind/Flowbite na interface. Como contribuição, o sistema oferece um ambiente didático que torna transparentes as decisões do algoritmo e facilita a análise e comparação de soluções em diferentes instâncias, apoiando ensino, experimentação e validação.


### Integrantes do Projeto







# Interface: Desenho de Grafos


**ArboGraph**

Home

Chu-Liu/Edmonds

Andras Frank (V1)

Andras Frank (V2)

Desenhe um grafo

Nossa tese

**Dúvidas ?**

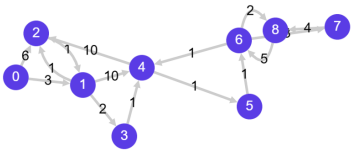
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

Link

## Desenhe seu grafo

1. Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.


Grafo Original



## Funcionalidades:

- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

# Interface: Chu-Liu-Edmonds


**ArboGraph**

Home

Chu-Liu/Edmonds

Andras Frank (V1)

Andras Frank (V2)

Desenhe um grafo

Nossa tese

**Dúvidas ?**

Quer aprender mais sobre esses algoritmos, veja nossa tese :)

Link

## Chu-Liu / Edmonds

1 Crie um grafo  
Desenhe um grafo, [carregue um exemplo](#) ou [importe um grafo](#) já existente.

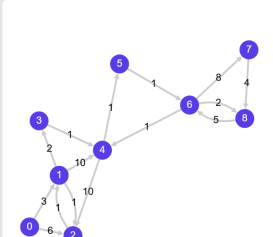
2 Escolha o nó raiz

3 Execute o algoritmo

Passo A Passo

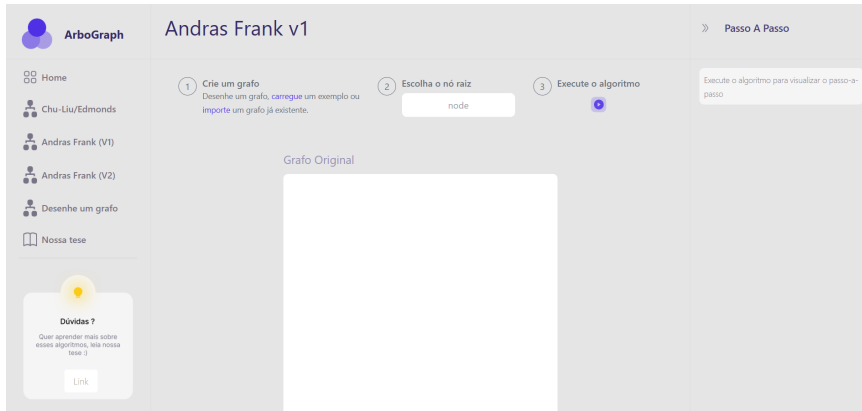
Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

Grafo Original



- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

# Interface: András Frank



- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

# Princípios de Design

## Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

## Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário

# Contribuições do Trabalho

## 1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

## 2 Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

## 3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário



# Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite  $O(n)$ )
  - Memória modesta: 11,5 MB

# Trabalhos Futuros

## Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

## Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

# Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>