

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Algoritmos para o problema da arborescência  
geradora mínima: uma aplicação didática  
interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Algoritmos para o problema da arborescência geradora  
mínima: uma aplicação didática interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Universidade Federal do ABC

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Brasil

2025

*Eu, Samira Haddad dedico esse projeto de graduação à minha mãe, que sempre me apoiou em todas as minhas decisões e me incentivou a seguir meus sonhos. Foi o amor e suporte incondicional dela que me fizeram, mesmo sob todas as dificuldades chegar até esse momento. Agradeço por seu amor incondicional, paciência e sabedoria que foram fundamentais para minha jornada acadêmica e pessoal. Sem o seu suporte constante, este trabalho não teria sido possível.*

*Eu, Lorena Sampaio dedico esse trabalho ao meu camarada, amigo e companheiro de vida, Ricardo Nantes Liang por todo seu suporte incondicional, paciência e perseverança ao longo dessa jornada acadêmica. Sua presença foi o meu alicerce de crescimento moral e intelectual e sou imensamente grata e honrada por tê-lo ao meu lado em todos os momentos. As palavras não são suficientes para expressar o significado de sua contribuição para minha vida e para a realização deste trabalho.*

# Agradecimentos

Eu, Samira Haddad, agradeço ao meu parceiro Vitor Roberto Kogawa de Moraes e à minha amiga Lorena Sampaio por estarem ao meu lado em todos os momentos zelando por minha sanidade mental e me ajudando a superar os desafios dessa jornada. Agradeço por estar finalizando uma etapa e iniciando outra com meu companheiro de vida ao meu lado. Agradeço também ao meu pai por sua dedicação em me fornecer uma educação de qualidade e por acreditar no meu potencial desde o início da minha trajetória acadêmica.

Eu, Lorena Sampaio, agradeço aos meus amigos e camaradas Ricardo Nantes Liang e Samira Haddad por sua companhia na saúde e principalmente na doença ao longo dessa caminhada acadêmica. A presença de ambos proporcionou a minha sobrevivência até o final dessa experiência desafiadora. Agradeço à minha mãe Solange Sampaio que esteve cuidando de mim em um dos períodos mais difíceis desse período acadêmico, onde graças a ela conseguiu me dar a vida pela segunda vez. Agradeço ao meu terapeuta Pedro Scuciato que não desistiu de mim, mesmo quando eu já não acreditava mais e me auxiliou a chegar com vida até esse momento. Agradeço pelos amigos que permaneceram depois de todos os cancelamentos de encontros sociais graças à agenda quadrimestral. E por fim, agradeço pelos familiares que pararam de me pressionar por uma data de formatura. Brincadeiras à parte, sou muito grata por ter chegado até aqui e a todos que me ajudaram nesse percurso.

E nós agradecemos conjuntamente ao nosso professor Mário Leston Rey por toda a orientação, paciência, empatia e ensinamentos ao longo desse projeto.

Seu papel de orientação foi fundamental não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas também para o nosso crescimento pessoal, acadêmico e humano. Sua dedicação e paixão pelo ensino foram inspiradoras e somos gratas por ter tido a sua companhia durante a finalização dessa trajetória.

*“Epígrafe (opcional).”*

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

## **Algoritmos para o problema da arborescência geradora mínima: uma aplicação didática interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Trabalho aprovado. Brasil, 25 de novembro de 2025:

---

**Prof. Dr. Mário Leston Rey**  
Orientador

---

**Profa. Dra. Cristiane Maria Sato**  
Convidada

---

**Prof. Dr. Aritanan Borges Garcia Gruber**  
Convidado

Brasil  
2025

# Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r-arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

**Palavras-chave:** Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

# Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r-arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

**Keywords:** Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – A figura ilustra um digrafo $D$ cujo conjunto dos vértices é $\{a, b, c, d, e\}$	14
e cujo conjunto dos arcos é $\{ab, bc, cd, de, ea, be\}$ . . . . .	14
Figura 2 – Os arcos em azul entram em um subconjunto $X \subseteq V(D)$ . . . . .	15
Figura 3 – Exemplo de digrafo ponderado $(D, w)$ : cada arco recebe um custo real	15
$w(a)$ . . . . .	15
Figura 4 – A figura ilustra um caminho simples $(u_0, u_1, u_2, u_3)$ em um digrafo. . .	15
Figura 5 – A figura ilustra um ciclo $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$ em um digrafo. . . . .	16
Figura 6 – A figura ilustra uma $r$ -arborescência. . . . .	16
Figura 7 – O subdigrafo $T$ (em azul) é uma arborescência geradora do digrafo	16
$D$ , que inclui tanto os arcos azuis quanto os arcos cinza. . . . .	16
Figura 8 – A figura ilustra um subconjunto $B$ (de arcos azuis) de custo $w(B) =$	17
$2 + 1 + 3 + 4 = 10$ visto como uma arborescência geradora de $D$ . . . . .	17
Figura 9 – Contração de um digrafo $D$ pela partição $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ , em que	19
$X := \{a, b\}$ , $Y := \{c\}$ e $Z := \{d, e\}$ . . . . .	19
Figura 10 – Contração de um subconjunto $X \subseteq V(D)$ em um digrafo $D$ . À es-	19
querda, o subconjunto $X = \{b, c\}$ é destacado; à direita, os vértices de	19
$X$ foram identificados em um único vértice $v$ , obtendo-se o digrafo	19
$D/X \rightarrow v$ . . . . .	19
Figura 11 – Contração de um digrafo ponderado $(D, w)$ pela partição $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ ,	19
em que $X := \{a, b\}$ , $Y := \{c\}$ e $Z := \{d, e\}$ . O peso de cada arco $XY$	19
em $D/\mathcal{P}$ é o mínimo dos pesos dos arcos de $D$ que vão de um vértice	19
de $X$ para um vértice de $Y$ . . . . .	19
Figura 12 – Contração ponderada de um subconjunto $X \subseteq V(D)$ . À esquerda, o	20
digrafo $(D, w)$ com $X = \{b, c\}$ destacado. À direita, o digrafo $(D/X \rightarrow$	20
$v, w/X)$ , em que os vértices de $X$ foram identificados em um único	20
vértice $v$ e cada peso $w/X$ é o mínimo dos pesos dos arcos de $D$ entre	20
$X$ e os demais vértices. . . . .	20
Figura 13 – Componentes fortes $S_1, S_2, S_3$ de um digrafo $D$ e sua condensação	20
$D/\mathcal{C}(D)$ , um digrafo acíclico em que $S_1$ é fonte. . . . .	20
Figura 14 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma $r$ -arborescência.	22
Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do	22
digrafo. . . . .	22
Figura 15 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	22
Figura 16 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	23
Figura 17 – Os arcos azuis são os arcos de $D_0$ . . . . .	24

Figura 18 – O caminho simples maximal $P$ inicia em $u$ e termina em $v$ . A porção $S$ de $P$ entre $u$ e $t$ é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo. . . . .	25
Figura 19 – Contração de um ciclo $C$ em um vértice $x_C$ . . . . .	25
Figura 20 – À esquerda, vértice $v$ com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar <code>reduce_weights(D, v)</code> : o menor peso 3 é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco $(u_2, v)$ (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para $D_0$ . . . . .	32
Figura 21 – A figura ilustra uma coleção laminar $\{A, B, C, D, E, F\}$ de conjuntos, onde $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , $B := \{4, 7, 8\}$ , $C := \{3, 5\}$ , $D := \{8\}$ , $E := \{7\}$ , $F := \{6\}$ . . . . .	38
Figura 22 – Um arco $a$ de peso 5 que entra nos $r$ -conjuntos $R_1$ , $R_2$ e $R_3$ com multiplididades 2, 1, e 1, respectivamente. . . . .	39
Figura 23 – Digrafo $D$ com raiz $r$ : arcos pretos em $A(D) \setminus F$ e arcos verdes em $F$ . As caixas tracejadas destacam os componentes fortemente conexos de $D[F]$ ; $C_1$ e $C_2$ são fontes na condensação. . . . .	43
Figura 24 – Distribuição de tempos: Fase I apresenta maior mediana (8,93s) e variabilidade que Chu–Liu/Edmonds (0,25s). . . . .	51
Figura 25 – Escalonamento temporal em função de $ A $ : crescimento aproximadamente linear. . . . .	51
Figura 26 – Comparação de desempenho entre implementações da Fase II. À esquerda, o gráfico de boxplot mostra a distribuição de tempo da v1 do algoritmo com mediana de 0,98s enquanto v2 reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração ( <i>speedup</i> ) mostra a distribuição concentrada entre 40 e 80 vezes, com mediana de 58,12 vezes (linha tracejada vermelha) e média de 61,30 vezes (linha pontilhada laranja). . . . .	52
Figura 27 – Métricas estruturais de Chu–Liu/Edmonds. À esquerda, o histograma vermelho mostra que o número de contrações (eixo horizontal) é concentrado em valores baixos — a maioria das 2000 instâncias (eixo vertical) requer menos de 20 contrações, com mediana 2 (linha tracejada) e média 6,82 (linha pontilhada). À direita, o histograma azul da profundidade de recursão exibe padrão similar. . . . .	52
Figura 28 – Pico de memória na Fase I: mediana 11,5 MB. . . . .	53
Figura 29 – Tamanho de $D_0$ versus $ V $ : relação linear confirma $ A_0  = O( V )$ . . . . .	53
Figura 30 – Captura de tela de <code>home.html</code> : visão geral com resumo e integrantes. . . . .	67
Figura 31 – Captura de tela de <code>draw_graph.html</code> : editor livre de grafos. . . . .	67
Figura 32 – Captura de tela de <code>tese.html</code> : visão geral com resumo e integrantes. . . . .	68
Figura 33 – Captura de tela de <code>chuliu.html</code> : criação de grafo, seleção de raiz e execução do algoritmo. . . . .	68

Figura 34 – Tripartição funcional (navegação, conteúdo interativo, guia de passos). A presença do passo a passo auxilia na compreensão sequencial do algoritmo. ....	69
Figura 35 – Captura de tela de <code>andrasfrank_v1.html</code> : interface para o procedimento em duas fases, a tela da página <code>andrasfrank_v2.html</code> tem aparência similar. ....	69
Figura 36 – A barra lateral injeta navegação consistente; páginas de algoritmo formam trilha exploratória. ....	70

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	Estrutura do Trabalho . . . . .	13
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1	Digrafos . . . . .	14
2.2	Caminhos . . . . .	15
2.3	Arborescências . . . . .	16
2.4	Problema da arborescência de custo mínimo . . . . .	17
2.5	Contração . . . . .	18
2.6	Componentes fortes . . . . .	20
<b>3</b>	<b>ALGORITMO DE CHU–LIU–EDMONDS . . . . .</b>	<b>21</b>
3.1	O algoritmo . . . . .	21
3.2	Custos reduzidos . . . . .	23
3.3	Implementação em Python . . . . .	29
3.3.1	Redução de custos . . . . .	31
3.3.2	Construção de $D_0$ . . . . .	32
3.3.3	Detecção de ciclo . . . . .	33
3.3.4	Contração de um ciclo . . . . .	33
3.3.5	Procedimento principal . . . . .	35
<b>4</b>	<b>ALGORITMO DE ANDRÁS FRANK . . . . .</b>	<b>38</b>
4.1	Preliminares . . . . .	38
4.2	Fase 1 do algoritmo de Frank . . . . .	40
4.3	Implementação da fase 1 . . . . .	44
4.4	Fase 2 do Algoritmo de Frank . . . . .	45
4.5	Implementação da fase 2 . . . . .	47
4.6	Versão alternativa da fase 2 . . . . .	47
4.7	O algoritmo de Frank . . . . .	49
<b>5</b>	<b>CHU–LIU–EDMONDS VS. FRANK . . . . .</b>	<b>50</b>
5.1	Análise comparativa dos algoritmos . . . . .	50
5.2	Conclusões . . . . .	53
<b>6</b>	<b>A DIDÁTICA DO ABSTRATO . . . . .</b>	<b>55</b>
6.0.1	Fundamentos cognitivos e didáticos . . . . .	55
6.0.2	Lidando com grafos e digrafos . . . . .	56
6.0.3	Visualização e interação: princípios em uso . . . . .	57

6.1	O ecossistema de ferramentas .....	58
7	A INTERAÇÃO HUMANO–COMPUTACIONAL EM AÇÃO: UMA APLICAÇÃO WEB INTERATIVA .....	62
7.1	Descrição da aplicação .....	62
7.1.1	Estrutura e Funcionalidades .....	62
7.1.2	Fluxo de interação .....	63
7.1.3	Arquitetura do Sistema .....	63
7.2	Princípios de interação humano-computador .....	64
7.3	Detalhes de Implementação .....	66
7.3.1	Estrutura de arquivos .....	66
7.3.2	Páginas da Aplicação web .....	66
7.3.3	Página do Andrasfrank (v1) e Andrasfrank (v2): .....	69
7.3.4	Estrutura das páginas .....	69
7.4	Considerações Finais e Trabalhos Futuros .....	70
8	CONCLUSÃO .....	72
8.1	Contribuições .....	73
8.2	Limitações .....	73
8.3	Trabalhos Futuros .....	74
	REFERÊNCIAS .....	75
	ANEXOS .....	77
	ANEXO A – ANEXO A .....	78

# 1 Introdução

Encontrar uma *r-arborescência geradora mínima* em digrafos é um problema clássico em Ciência da Computação estudado desde os anos 1960, com formulações fundamentais apresentadas por Jack Edmonds em 1967 ([EDMONDS, 1967](#)).

Neste trabalho implementamos dois métodos para esse problema: o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds ([CHU; LIU, 1965](#); [EDMONDS, 1967](#)) e o procedimento em duas fases de András Frank ([FRANK, 2011](#); [FRANK, 1979](#)).

Além disso, desenvolvemos uma aplicação *web* interativa que permite a visualização passo a passo dessas metodologias, facilitando a compreensão de suas operações e estruturas subjacentes.

## 1.1 Estrutura do Trabalho

Resumidamente, esta dissertação abrange as seguintes frentes:

O capítulo [2](#) introduz definições e conceitos básicos sobre digrafos, arborescências etc, estabelecendo a notação empregada ao longo do texto.

O capítulo [3](#) detalha o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds e sua implementação em Python.

O capítulo [4](#) apresenta o procedimento em duas fases de András Frank e sua respectiva implementação computacional.

O capítulo [5](#) discute os resultados experimentais comparativos entre as duas abordagens, avaliando desempenho temporal, consumo de memória e características estruturais dos digrafos processados.

O capítulo [6](#) explora fundamentos teóricos da didática de assuntos abstratos, destacando a importância de visualizações interativas para o aprendizado de algoritmos complexos.

O capítulo [7](#) descreve a construção da aplicação *web*, incluindo arquitetura, tecnologias empregadas e aspectos de design centrado no usuário com base em princípios de interação humano-computacional.

Finalmente, o capítulo [8](#) sintetiza as conclusões da pesquisa, suas contribuições, limitações e direções para trabalhos futuros.

## 2 Preliminares

Neste capítulo, reunimos as noções básicas necessárias para compreensão completa do texto.

### 2.1 Digrafos

Começamos por introduzir a noção de digrafo. Um **digrafo**  $D$  é um par  $(V, A)$ , em que  $V$  é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** e  $A$ , chamado de conjunto dos **arcos**, é um subconjunto de

$$\{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}.$$

Escrevemos  $V(D)$  e  $A(D)$  para denotar, respectivamente, o conjunto dos vértices e o conjunto dos arcos de  $D$ .

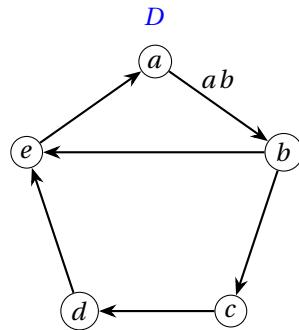


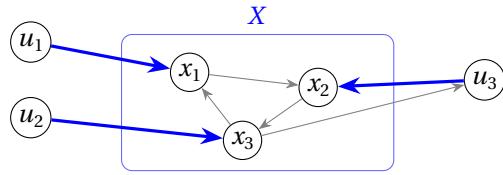
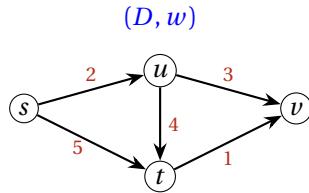
Figura 1 – A figura ilustra um digrafo  $D$  cujo conjunto dos vértices é  $\{a, b, c, d, e\}$  e cujo conjunto dos arcos é  $\{ab, bc, cd, de, ea, be\}$ .

Para um arco  $a := (u, v)$  de  $D$  — o que costumamos abreviar como  $uv$  — dizemos que  $u$  é a **cauda** (ou **ponta inicial**) de  $a$  e  $v$  é a **cabeça** (ou **ponta final**) de  $a$ .

Seja  $X$  um subconjunto de  $V(D)$ . Dizemos que um arco  $a$  **entra** em  $X$  se a ponta final de  $a$  está fora de  $X$  e a inicial está em  $X$ . Por outro lado, um arco  $a$  sai de  $X$  se a ponta inicial de  $a$  está em  $X$  e a final está fora de  $X$ . De forma análoga, dizemos que um subconjunto  $B$  de  $A(D)$  **entra** em  $X$  se existe um arco de  $B$  que entra em  $X$ . O conjunto dos arcos de  $D$  que entram em  $X$  é denotado por  $\delta_D^-(X)$  (ou  $\delta^-(X)$  quando o contexto permitir). De forma similar, o conjuntos dos arcos que saem de  $X$  é denotado por  $\delta_D^+(X)$ . Por brevidade, para cada vértice  $v \in V(D)$ , escrevemos  $\delta_D^-(v)$  no lugar de  $\delta_D^-(\{v\})$ . A mesma convenção é usada para  $\delta_D^+$ .

Um **digrafo ponderado** é um par  $(D, w)$ , em que  $D$  é um digrafo e  $w : A(D) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que associa a cada arco  $a \in A(D)$  um **custo** (ou **peso**) real  $w(a)$ .

Um digrafo  $H$  é um **subdigrafo** de um digrafo  $D$  se  $V(H) \subseteq V(D)$  e  $A(H) \subseteq A(D)$ .

Figura 2 – Os arcos em azul entram em um subconjunto  $X \subseteq V(D)$ .Figura 3 – Exemplo de digrafo ponderado  $(D, w)$ : cada arco recebe um custo real  $w(a)$ .

Seja  $D$  um digrafo e seja  $B \subseteq A(D)$ . O subdigrafo de  $D$  gerado por  $B$ , denotado  $D[B]$ , é o par  $(W, B)$ , em que  $W$  é o conjunto dos vértices que são pontas de arcos de  $B$ , isto é,

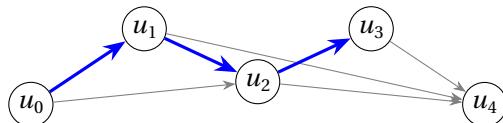
$$W = \{v \in V(D) : \text{existe } u \in V \text{ tal que } uv \in A(D) \text{ ou } vu \in A(D)\}.$$

## 2.2 Caminhos

Um **caminho**  $P$  em um digrafo  $D$  é uma sequência de vértices de  $D$

$$(u_0, u_1, \dots, u_k),$$

em que  $k \geq 0$  e, para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $u_i u_{i+1}$  é um arco de  $D$ . Dizemos que  $P$  é um caminho de  $u_0$  até  $u_k$  para destacar a **origem**  $u_0$  de  $P$  e o **destino**  $u_k$  de  $P$ . Um caminho  $P$  é dito **simples** se seus vértices são dois a dois distintos. Um caminho é **fechado** se sua origem e seu destino coincidem. Finalmente, um caminho fechado  $P := (u_0, u_1, \dots, u_k)$  é um **ciclo** se  $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$  é um caminho simples.

Figura 4 – A figura ilustra um caminho simples  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  em um digrafo.

A noção de caminho permite definir o território de um vértice em um digrafo. Seja  $D$  um digrafo e seja  $r \in V(D)$ . O **território** de  $r$  em  $D$  é o conjunto dos vértices  $v \in V(D)$  tais que existe um caminho de  $r$  até  $v$  em  $D$ . O seguinte fato é bem conhecido. Para enunciá-lo é conveniente introduzir a seguinte definição. Um  $r$ -conjunto de  $D$  é um subconjunto não vazio  $X$  de  $V(D)$  tal que  $r \notin V(D)$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $D$  um digrafo e  $r \in V(D)$ . O território de  $r$  em  $D$  é igual a  $V(D)$  se, e somente se, para cada  $r$ -conjunto  $X$  existe ao menos um arco de  $D$  que entra em  $X$ .  $\square$*

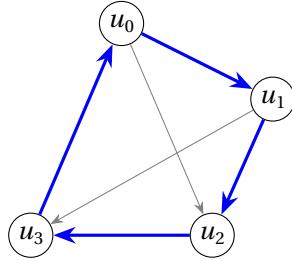


Figura 5 – A figura ilustra um ciclo  $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$  em um digrafo.

### 2.3 Arborescências

Podemos agora introduzir um dos objetos fundamentais deste trabalho: as arborescências. Dizemos que um digrafo  $D$  é uma **arborescência** se existe um vértice  $r \in V(D)$  tal que, para cada vértice  $v \in V(D)$ , existe um único caminho em  $D$  de  $r$  até  $v$ . Nesse caso, chamamos  $r$  de **raiz** de  $D$ . Para destacar o papel de  $r$  nesta definição, dizemos que  $D$  é uma  $r$ -**arborescência**.

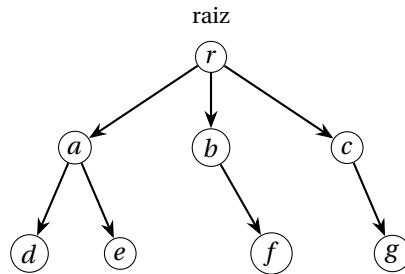


Figura 6 – A figura ilustra uma  $r$ -arborescência.

Um subdigrafo  $T$  de um digrafo  $D$  é uma **arborescência** se  $T$  é uma arborescência. Dizemos que  $T$  é uma arborescência **geradora** de  $D$  se, além disso,  $V(T) = V(D)$ .

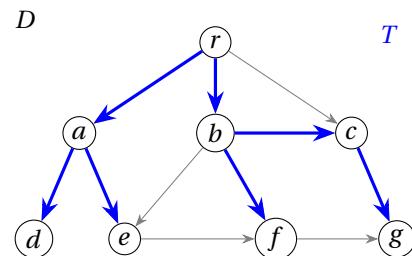


Figura 7 – O subdigrafo  $T$  (em azul) é uma arborescência geradora do digrafo  $D$ , que inclui tanto os arcos azuis quanto os arcos cinza.

Seja  $(D, w)$  um digrafo ponderado. Para todo subconjunto  $B \subseteq A(D)$ , definimos

$$w(B) := \sum_{b \in B} w(b).$$

Quando  $H$  é um subdigrafo de  $D$ , escrevemos  $w(H)$  para abreviar  $w(A(H))$ .

No contexto de arborescências de um digrafo  $D$ , é comum identificarmos um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  com o subdigrafo  $D[B]$ . Assim, dizemos que  $B \subseteq A(D)$  é uma **arborescência** se  $D[B]$  é uma arborescência de  $D$ .

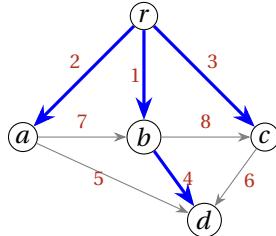


Figura 8 – A figura ilustra um subconjunto  $B$  (de arcos azuis) de custo  $w(B) = 2+1+3+4 = 10$  visto como uma arborescência geradora de  $D$ .

Seja  $D$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $D$ . Uma **cobertura de  $r$ -conjuntos** é um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  tal que  $B$  entra em todo  $r$ -conjunto de  $D$ . É claro que uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos. A próxima proposição afirma que  $B \subseteq A(D)$  é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  se, e somente se,  $B$  é uma cobertura *minimal* de  $r$ -conjuntos de  $D$ . Isto significa que: (i)  $B$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos e (ii) para cada  $a \in B$ , o conjunto  $B \setminus \{a\}$  não é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $D$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $D$ . Um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  se, e somente se,  $B$  é uma cobertura minimal de  $r$ -conjuntos de  $D$ .*  $\square$

## 2.4 Problema da arborescência de custo mínimo

Finalmente, podemos enunciar o problema que constitui o objeto de estudo deste trabalho.

### Problema da $r$ -arborescência geradora de custo mínimo

Dado um digrafo ponderado  $(D, w)$  e um vértice  $r \in V(D)$ , deseja-se encontrar, se existir, uma  $r$ -arborescência geradora  $T$  de  $D$  tal que

$$w(T) \leq w(F)$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F$  de  $D$ .

É uma chateação lidar com a possibilidade de que uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  pode não existir. Além disso, decidir se uma  $r$ -arborescência existe é tarefa simples: basta determinar o território do vértice  $r$  em  $D$ , o que pode ser feito por meio de qualquer algoritmo de busca. Assim, o problema só se coloca quando existe ao menos uma  $r$ -arborescência. Nesse caso, há ainda uma hipótese que pode ser adotada sem

perda de generalidade: podemos supor que nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ , uma vez que nenhuma  $r$ -arborescência contém um arco entrando em  $r$ . Para evitar essas repetições, introduzimos a seguinte definição. Dizemos que uma tripla  $(D, w, r)$  é um  **$r$ -digrafo ponderado** se

- $(D, w)$  é um digrafo ponderado;
- $r$  é um vértice de  $D$ ;
- $\delta^-(r) = \emptyset$ ; e
- $D$  possui uma  $r$ -arborescência.

Para um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ , dizemos que uma  $r$ -arborescência geradora é de **custo mínimo** em  $(D, w)$  se

$$w(T) \leq w(F)$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F$  de  $D$ .

## 2.5 Contração

A operação de contração de um conjunto de vértices é fundamental para o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds e é o assunto que passaremos a tratar agora.

Seja  $D$  um digrafo e seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(D)$ . Definimos o digrafo obtido de  $D$  pela **contração** de  $\mathcal{P}$ , denotado por  $D/\mathcal{P}$ , como segue. Seu conjunto de vértices é

$$V(D/\mathcal{P}) := \mathcal{P},$$

e seu conjunto de arcos é

$$A(D/\mathcal{P}) := \{XY \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : X \neq Y \text{ e existem } x \in X, y \in Y \text{ tais que } xy \in A(D)\}.$$

Em outras palavras,  $D/\mathcal{P}$  é o digrafo cujo conjunto de vértices é  $\mathcal{P}$  e em que há um arco de  $X$  para  $Y$ , com  $X, Y \in \mathcal{P}$  e  $X \neq Y$ , se, e somente se, existe um arco  $xy \in A(D)$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

Definimos agora em que consiste contrair um conjunto não vazio de vértices de um digrafo. Seja  $D$  um digrafo e seja  $\emptyset \neq X \subseteq V(D)$ . A **contração** de  $X$  em  $D$ , denotada por  $D/X$ , é o digrafo  $D/\mathcal{P}$ , em que

$$\mathcal{P} := \{\{u\} : u \in V(D) \setminus X\} \cup \{X\}.$$

Informalmente, em  $D/X$  todos os vértices de  $X$  são identificados em um único vértice, enquanto os vértices fora de  $X$  permanecem inalterados.

Nesse caso, no contexto do digrafo  $D/X$ , vamos identificar o conjunto  $\{u\}$  com o próprio elemento  $u$ , para cada  $u \in V(D) \setminus X$ . Também vamos identificar o conjunto  $X$

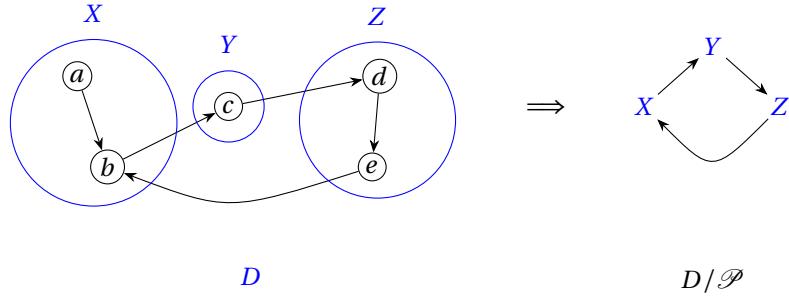


Figura 9 – Contração de um digrafo  $D$  pela partição  $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ , em que  $X := \{a, b\}$ ,  $Y := \{c\}$  e  $Z := \{d, e\}$ .

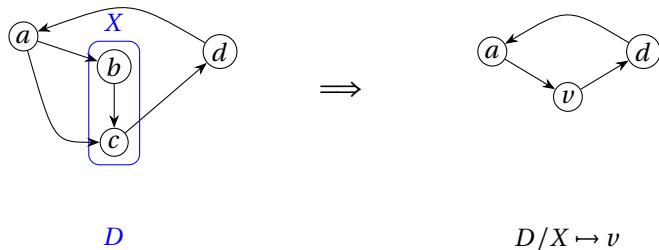


Figura 10 – Contração de um subconjunto  $X \subseteq V(D)$  em um digrafo  $D$ . À esquerda, o subconjunto  $X = \{b, c\}$  é destacado; à direita, os vértices de  $X$  foram identificados em um único vértice  $\nu$ , obtendo-se o digrafo  $D/X \rightarrow \nu$ .

com um vértice  $v \notin V(D)$ . Para explicitar essa identificação, escreveremos  $D/X \mapsto v$  em vez de simplesmente  $D/X$ .

Considere agora um digrafo ponderado  $(D, w)$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $V(D)$ . Definimos o digrafo ponderado  $(D/\mathcal{P}, w/\mathcal{P})$  pondo

$$(w/\mathcal{P})(X Y) := \min\{ w(x y) : x \in X, y \in Y \}$$

para cada  $XY \in A(D/\mathcal{P})$ . Ou seja, o custo de cada arco  $XY$  de  $D/\mathcal{P}$  é o menor dos custos dos arcos  $xy \in A(D)$  tais que  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

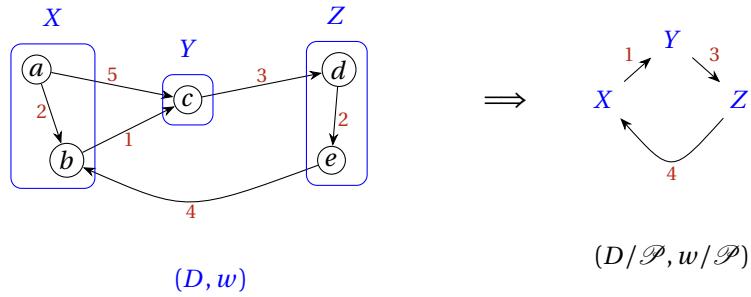


Figura 11 – Contração de um digrafo ponderado  $(D, w)$  pela partição  $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ , em que  $X := \{a, b\}$ ,  $Y := \{c\}$  e  $Z := \{d, e\}$ . O peso de cada arco  $XY$  em  $D/\mathcal{P}$  é o mínimo dos pesos dos arcos de  $D$  que vão de um vértice de  $X$  para um vértice de  $Y$ .

Quando  $X$  é um subconjunto não vazio de vértices de  $D$ , escrevemos  $(D/X \mapsto v, w/X \mapsto v)$  para denotar a contração de  $X$  na qual o conjunto  $X$  é identificado com o vértice  $v \notin V(D)$ .

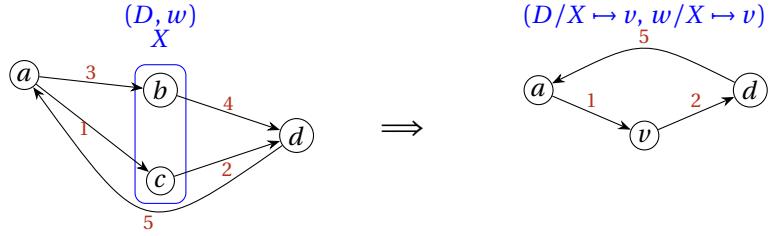


Figura 12 – Contração ponderada de um subconjunto  $X \subseteq V(D)$ . À esquerda, o digrafo  $(D, w)$  com  $X = \{b, c\}$  destacado. À direita, o digrafo  $(D/X \mapsto v, w/X \mapsto v)$ , em que os vértices de  $X$  foram identificados em um único vértice  $v$  e cada peso  $w/X$  é o mínimo dos pesos dos arcos de  $D$  entre  $X$  e os demais vértices.

## 2.6 Componentes fortes

Seja  $D$  um digrafo. Uma **componente forte** de  $D$  é um subconjunto maximal  $S \subseteq V(D)$  tal que, para cada  $s, t \in S$ , existe um caminho de  $s$  até  $t$  em  $D$  e um caminho de  $t$  até  $s$  em  $D$ . Nesse caso, qualquer caminho de  $s$  até  $t$  (por  $s, t \in S$ ) tem todos os seus vértices contidos em  $S$ .

O conjunto das componentes fortes de  $D$  é denotado por  $\mathcal{C}(D)$ , ou simplesmente por  $\mathcal{C}$  quando não houver risco de ambiguidade. A **condensação** de  $D$  é o digrafo  $D/\mathcal{C}$ , cujos vértices são as componentes fortes de  $D$  e em que há um arco do vértice  $S$  para o vértice  $T$  de  $D/\mathcal{C}$  se, e somente se, existe um arco de  $D$  que sai de um vértice de  $S$  e entra em um vértice de  $T$ .

Dizemos que  $S \in \mathcal{C}$  é uma **fonte** de  $\mathcal{C}$  se nenhum arco de  $D/\mathcal{C}$  entra em  $S$ . É bem sabido que  $D/\mathcal{C}$  é um digrafo livre de ciclos (isto é, um digrafo acíclico).

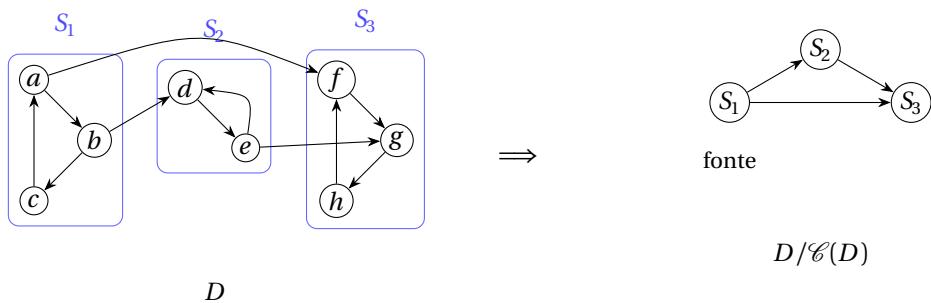


Figura 13 – Componentes fortes  $S_1, S_2, S_3$  de um digrafo  $D$  e sua condensação  $D/\mathcal{C}(D)$ , um digrafo acíclico em que  $S_1$  é fonte.

# 3 Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds ([CHU; LIU, 1965](#)) ([EDMONDS, 1967](#)), que determina uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em duas operações fundamentais: (i) a redução gulosa dos custos dos arcos e (ii) a contração de ciclos. Essas operações permitem resolver recursivamente uma instância menor do problema e, em seguida, estender a solução obtida para o problema original.

O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

## 3.1 O algoritmo

O problema que nos interessa consiste em, dado um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$  (veja a página [17](#)), encontrar uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$  e devolve uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

Vamos primeiro fornecer uma visão geral do algoritmo. O algoritmo é recursivo. Inicialmente, ele faz uma escolha gulosa de um certo conjunto de arcos. Se esse conjunto forma uma arborescência, o algoritmo pára e devolve esse conjunto. Caso contrário, identifica um ciclo especial no digrafo e o contrai, produzindo um novo digrafo. Esse novo digrafo é então submetido recursivamente ao algoritmo, que devolve uma arborescência de custo mínimo. Por fim, utilizamos o ciclo contraído para construir uma arborescência de custo mínimo no digrafo original. Essa construção é detalhada a seguir.

### Escolha gulosa

Suponha doravante que  $(D, w, r)$  é um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo tem um caráter guloso. Note que, se  $T$  é uma  $r$ -arborescência de  $D$ , então, para cada vértice  $v \neq r$ , existe exatamente um arco de  $T$  que entra em  $v$ . Isso sugere a seguinte escolha gulosa: para cada vértice  $v \neq r$ , selecione um arco  $a_v$  de custo mínimo dentre aqueles que entram em  $v$  e forme o conjunto  $T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$ .

Suponha que  $T$  é uma  $r$ -arborescência. Não é difícil verificar que  $T$  tem custo mínimo. De fato, seja  $F$  uma  $r$ -arborescência de  $D$ . Para cada vértice  $v \neq r$ , escreva  $b_v$

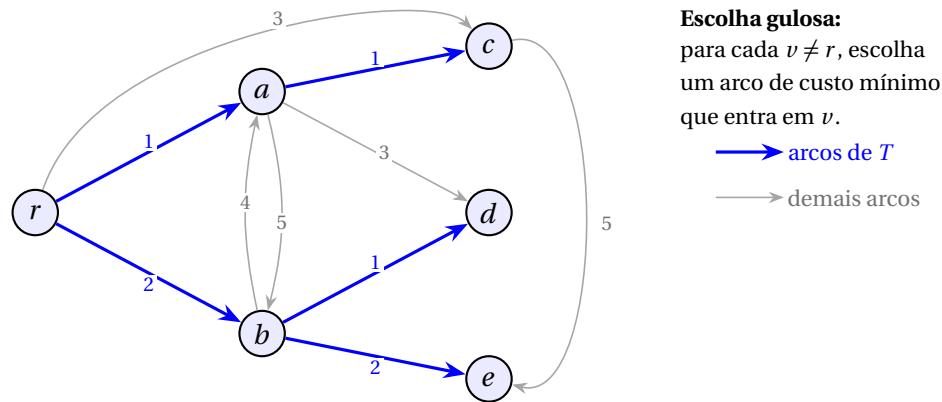


Figura 14 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma  $r$ -arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo.

para o *único* arco de  $F$  que entra em  $v$ . Pela escolha gulosa,

$$w(a_v) \leq w(b_v) \quad \text{para todo } v \neq r.$$

Logo,

$$w(F) = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} w(b_v) \geq \sum_{v \in V \setminus \{r\}} w(a_v) = w(T).$$

Portanto,  $T$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo.

A Figura 15 ilustra que podemos não ter tanta sorte com  $T$ .

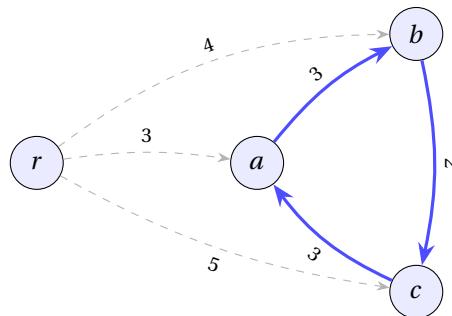


Figura 15 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Ora, se no lugar do arco  $(c, a)$  tivessemos escolhido o arco  $(r, a)$ , então  $r$ -arborescência resultante seria de custo mínimo.

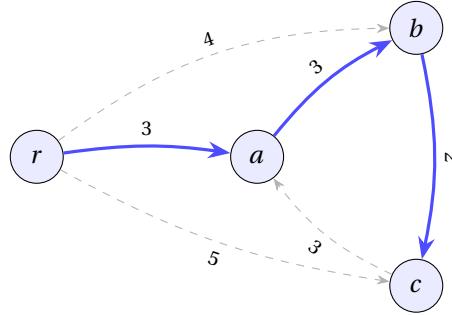


Figura 16 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

### 3.2 Custos reduzidos

Vamos introduzir agora a noção de custo reduzido. Essa noção permite fazer uma transformação nos custos que preserva a otimalidade.

Seja  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos o **custo  $q$ -reduzido**  $w_q : A \rightarrow \mathbb{R}$  por<sup>1</sup>

$$w_q(uv) := w(uv) - q(v), \quad uv \in A.$$

Para um conjunto  $X \subseteq V$ , escrevemos  $q(X) := \sum_{u \in X} q(u)$ .

A próxima proposição mostra que a transformação por custo  $q$ -reduzido preserva a otimalidade.

**Proposição 3.1.** *Para toda função  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma  $r$ -arborescência  $T$  é de custo mínimo em  $(D, w)$  se, e somente se,  $T$  é de custo mínimo em  $(D, w_q)$ .*

*Prova.* Seja  $F$  uma  $r$ -arborescência. Para cada  $u \in V \setminus \{r\}$ , seja  $a_u$  o único arco de  $F$  que entra em  $u$ . Então

$$\begin{aligned} w_q(F) &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} w_q(a_u) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} (w(a_u) - q(u)) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} w(a_u) - \sum_{u \in V \setminus \{r\}} q(u) \\ &= w(F) - q(V \setminus \{r\}). \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer  $r$ -arborescências  $T$  e  $F$ ,

$$w(T) \leq w(F) \iff w_q(T) = w(T) - q(V \setminus \{r\}) \leq w(F) - q(V \setminus \{r\}) = w_q(F),$$

o que prova a proposição. □

<sup>1</sup> Recorde que nenhum arco entra em  $r$ ; logo, a função  $w_q$  está bem definida.

O custo reduzido de interesse é o dado pela função  $\lambda$  definida a seguir. Para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , definimos

$$\lambda(v) := \lambda_w(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}.$$

Note que  $\lambda$  está bem definida, uma vez que  $D$  possui uma  $r$ -arborescência e, portanto, existe ao menos um arco que entra em cada vértice diferente de  $r$ . Consequentemente, para todo  $v \in V \setminus \{r\}$ ,

$$\min\{w_\lambda(a) : a \in \delta^-(v)\} = 0,$$

isto é, precisamente os arcos de custo mínimo que entram em  $v$  passam a ter custo zero, e os demais ficam com custo positivo.

Definimos o subdigrafo gerador  $D_0$  de  $D$  escolhendo, para cada  $v \neq r$ , exatamente um arco  $a_v$  que entra em  $v$  e satisfaz  $w_\lambda(a_v) = 0$ . Assim,

$$V(D_0) := V(D) \quad \text{e} \quad A(D_0) := \{a_v : v \in V(D) \setminus \{r\}\}.$$

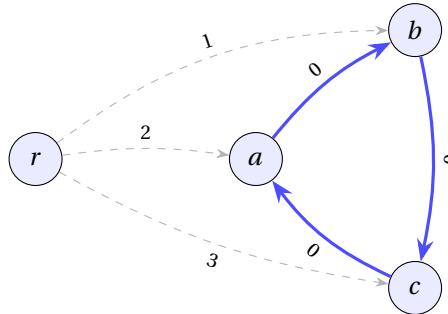


Figura 17 – Os arcos azuis são os arcos de  $D_0$ .

Como vimos, se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência, então  $D_0$  tem custo mínimo. Podemos então supor que  $D_0$  não é uma  $r$ -arborescência. Vamos mostrar que, nesse caso,  $D_0$  possui um ciclo.

Seja  $v \neq r$  um vértice de  $V$  que *não* é alcançável a partir de  $r$  em  $D_0$ ; um tal vértice existe uma vez que estamos admitindo que  $D_0$  não possui uma  $r$ -arborescência. Observe que, por construção, para cada vértice  $s$  de  $D_0$  existe exatamente um arco de  $D_0$  que entra em  $s$ . Considere um caminho simples maximal<sup>2</sup> de  $D_0$  que termina em  $v$ . Seja  $u$  o início de  $P$ . Como  $v$  não é atingível a partir de  $r$ , temos que  $u \neq r$ . Logo, existe exatamente um arco, digamos  $t u$ , de  $D_0$  que entra em  $u$ . Pela maximalidade de  $P$ , o vértice  $t$  é um dos vértices de  $P$  (caso contrário,<sup>3</sup>  $t \cdot P$  é um caminho simples, o que contradiz a escolha de  $P$ ). Como  $P$  é um caminho simples que começa em  $u$ , o vértice  $t$  aparece em  $P$  *após*  $u$ ; portanto,  $P$  contém um subcaminho  $S$  de  $u$  até  $t$ . Consequentemente,  $S \cdot u$  é um ciclo de  $D_0$ . Isso prova que  $D_0$  contém um ciclo.

<sup>2</sup> Maximal aqui tem o seguinte sentido. Para cada vértice  $u$  de  $D_0$ , as sequências  $P \cdot u$  e  $u \cdot P$  não são caminhos simples.

<sup>3</sup> Para sequências  $\alpha$  e  $\beta$ , escrevemos  $\alpha \cdot \beta$  para denotar a concatenação de  $\alpha$  e  $\beta$ . Para simplificar a notação, uma sequência de comprimento 1 é identificada com o seu único elemento.

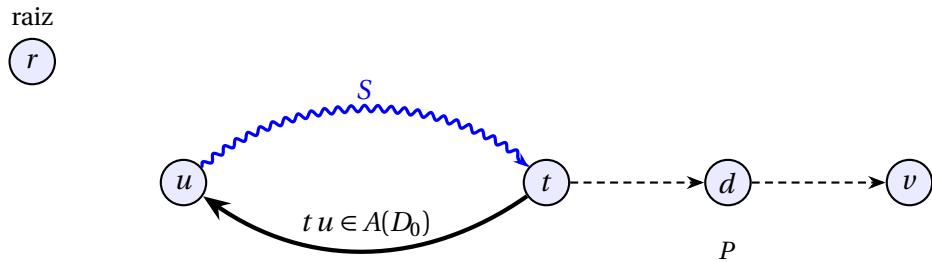


Figura 18 – O caminho simples maximal  $P$  inicia em  $u$  e termina em  $v$ . A porção  $S$  de  $P$  entre  $u$  e  $t$  é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho  $S \cdot u$  é um ciclo.

Devemos agora mostrar o que fazer com um desses ciclos de  $D_0$ .

### Contração de ciclos

A próxima operação do algoritmo é a contração de ciclos (veja a Seção 2.5). É conveniente identificar um ciclo com o conjunto de seus vértices. Suponha que o digrafo  $D_0$  possua um ciclo, digamos  $C$ . Observe que  $r \notin V(C)$ . Recorde que, ao *contrair* o ciclo  $C$  em  $D$  e obter o digrafo  $D/C \mapsto x_C$ , identificamos todos os vértices de  $C$  em um único vértice, denotado por  $x_C$  e visto como um supervértice, e redirecionamos os arcos incidentes: arcos da forma  $uv$ , em que  $v \in C$  (isto é, que entravam em  $C$ ), passam a ser da forma  $ux_C$  em  $D/C \mapsto x_C$ , e arcos da forma  $vu$ , em que  $v \in C$  (isto é, que saíram de  $C$ ), passam a ser da forma  $x_C u$  em  $D/C \mapsto x_C$ . Assim, em  $D/C \mapsto x_C$ , o ciclo  $C$  é tratado como um único vértice.

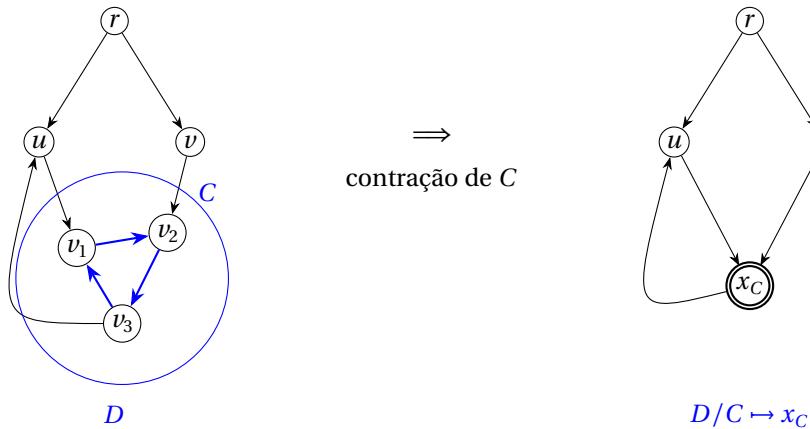
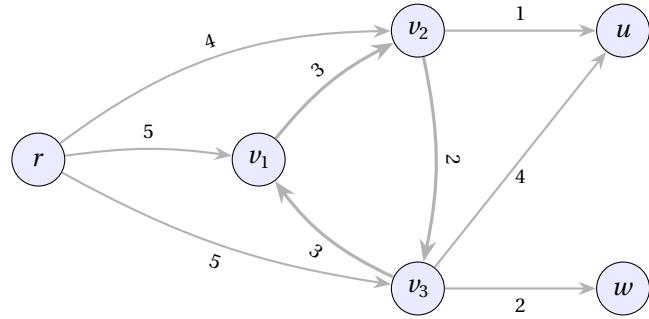


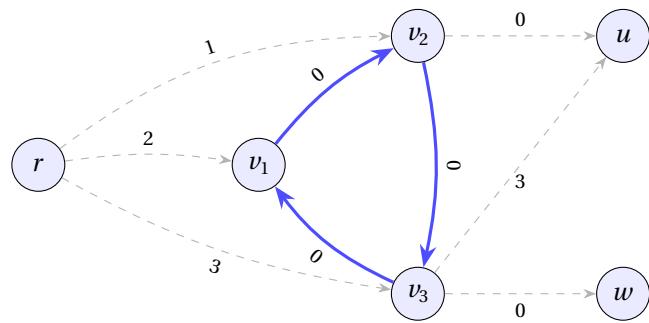
Figura 19 – Contração de um ciclo  $C$  em um vértice  $x_C$ .

Precisamos agora definir um novo  $r$ -digrafo ponderado. Ei-lo:  $(D', w', r)$ , onde  $D' := D/C \mapsto x_C$  e  $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$ . Note que  $r$  é um vértice de  $D'$  e que, além disso,  $D'$  possui uma  $r$ -arborescência.

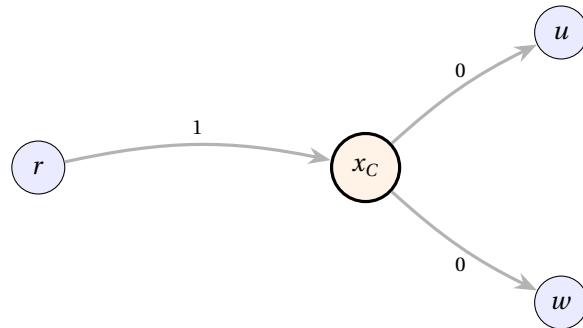
Agora vamos ilustrar um exemplo de como essa contração é feita e os custos são ajustados. Considere o digrafo a seguir.



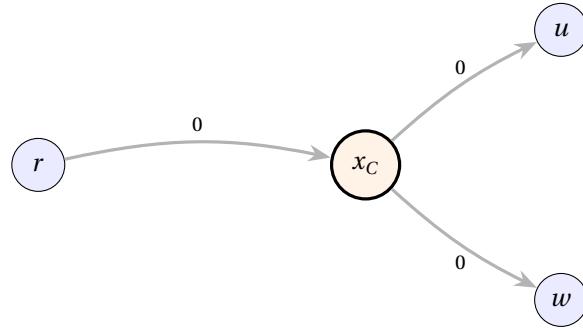
Após a redução dos custos, obtemos um ciclo  $C := (v_1, v_2, v_3, v_1)$  cujos arcos têm custo reduzido igual a zero.



Após a contração do ciclo  $C$ , obtemos o digrafo abaixo com o supervértice  $x_C$ .



O digrafo contraído é submetido recursivamente ao algoritmo. Assim, o próximo passo consiste em reduzir os custos dos arcos dessa nova intância, obtendo assim o seguinte  $r$ -digrafo ponderado.

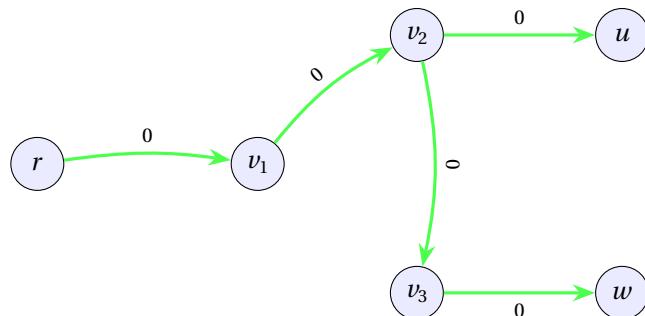


O subdigrafo gerador obtido a partir desse digrafo, usando apenas os arcos de custo reduzido igual a zero, possui uma  $r$ -arborescência. O algoritmo devolve essa  $r$ -arborescência, que agora deverá passar por um processo de expansão.

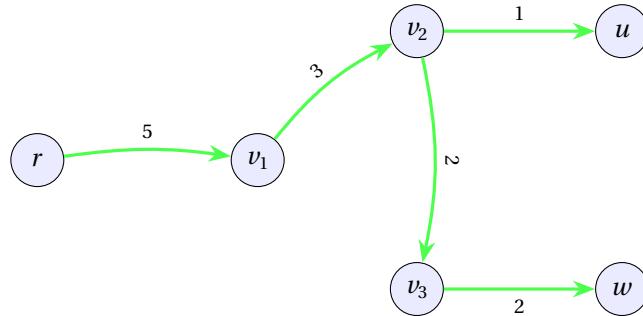
### Reexpansão de arborescências

Após resolver o problema no digrafo contraído  $D'$ , obtemos uma  $r$ -arborescência geradora  $T'$  de custo mínimo em  $(D', w')$ . Observe que tão somente um arco de  $T'$  entra em  $x_C$ . Para reexpandir  $T'$  em uma  $r$ -arborescência  $T$  em  $D$ , substituímos o supervértice  $x_C$  pelo ciclo  $C$  e adicionamos os arcos do ciclo que formam a arborescência dentro de  $C$ . Especificamente, o arco  $ux_C$  de  $T'$  corresponde a um arco  $uv$  de  $D$ , onde  $v \in C$ . Esse arco  $uv$  é incluído em  $T$ . Em seguida, adicionamos os arcos do ciclo  $C$  que conectam os vértices de  $C$  de forma a manter a estrutura de arborescência. Note que, devemos escolher todos os arcos do ciclo  $C$  exceto aquele que entra em  $v$ , garantindo que cada vértice de  $C$  tenha grau de entrada igual a 1 em  $T$ .

Retomemos o exemplo para ilustrar a expansão da  $r$ -arborescência geradora do digrafo contraído. Primeiro, adicionamos os vértices do ciclo  $C$  e, em seguida, incluímos os arcos apropriados para formar a  $r$ -arborescência geradora do digrafo original:



No  $r$ -digrafo ponderado original, temos a seguinte configuração.



Vamos agora verificar que a  $r$ -arborescência geradora  $T$ , obtida da construção descrita, é de custo mínimo em  $(D, w)$ . Por hipótese,  $T'$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D', w')$ , isto é,

$$w'(T') \leq w'(F')$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F'$  de  $D'$ . Pela construção de  $T$ , temos que  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora tal que  $w_\lambda(T) = w'(T')$ , uma vez que todo arco  $a$  de  $C$  satisfaz  $w_\lambda(a) = 0$ .

Suponha agora que  $F$  seja uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w_\lambda)$ . Então  $w_\lambda(F) \leq w_\lambda(T)$ . Seja  $F' := F/C \rightarrow x_C$ . Note que  $F'$  pode não ser uma  $r$ -arborescência de  $D'$ . No entanto,  $F'$  contém uma  $r$ -arborescência de  $D'$ ; logo, existe  $F'' \subseteq F'$  tal que  $F''$  é uma  $r$ -arborescência de  $D'$ . Temos, então,  $w'(F'') \leq w'(F')$  pois  $w'(a) \geq 0$  para cada  $a \in A(D')$ . Por hipótese,  $w'(T') \leq w'(F'')$  o que, combinado com  $w_\lambda(T) = w'(T')$ , permite inferir que

$$w_\lambda(T) \leq w'(F'') \leq w'(F') = w_\lambda(F).$$

Portanto,  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w_\lambda)$ . Agora, pela Proposição 3.1,  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w)$ , como queríamos. Isso completa a prova de que a  $r$ -arborescência devolvida pelo algoritmo é de custo mínimo em  $(D, w)$ .

Convém agora sumarizar e exibir uma descrição em pseudocódigo do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. O mapeamento desse pseudocódigo para código Python será discutido na próxima seção.

### Algoritmo 3.1: Chu–Liu/Edmonds

```

1 def chu-liu-edmonds( $D$ ,  $w$ ,  $r$ ):
2      $\lambda := \{(v, \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}) : v \in V \setminus \{r\}\}$ 
3     para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , seja  $a_v \in \delta^-(v)$  tal que  $w_\lambda(a_v) = 0$ 
4     seja  $D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$ 
5     if  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência: return  $D_0$ 
  
```

```

6     seja  $C$  um ciclo em  $D_0$ 
7      $T' := \text{chu-liu-edmonds}(D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r)$ 
8      $T := \text{expand}(T')$ 
9     return  $T$ 

```

## Complexidade

Não é difícil ver que as operações envolvidas nas linhas 2 a 6 e na linha 8 podem ser implementadas de forma a serem executadas em tempo  $O(|A|)$ . Como cada chamada recursiva contrai ao menos um vértice, o número total de chamadas é limitado por  $O(|V|)$ . Portanto, o consumo de tempo do algoritmo está em  $O(|V||A|)$ .

Quanto ao consumo de memória, é possível realizar as operações de contração de modo que o uso total de memória adicional permaneça em  $O(|V||A|)$ . A implementação descrita a seguir, disponível em <<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>>, apresenta consumo de tempo e memória em  $O(|V||A|)$ .

## 3.3 Implementação em Python

Esta seção descreve a implementação do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em Python, estruturada para refletir com precisão as etapas discutidas anteriormente. Cada operação fundamental — redução dos custos, construção do subdigrafo gerador de arcos de custo reduzido iguais a zero, contração de ciclos e reexpansão — é implementada utilizando como suporte a biblioteca networkx.

### Representação de digrafos e detecção de ciclos

A implementação utiliza a biblioteca NetworkX<sup>4</sup>. Digrafos ponderados são representados por instâncias da classe `DiGraph`. Internamente, essa classe usa dicionários do Python para armazenar vértices, arcos e atributos, o que garante operações eficientes na prática. Por exemplo, adicionar ou remover um arco tem consumo amortizado de tempo em  $O(1)$ ; iterar sobre os sucessores de um vértice  $u$  tem consumo de tempo em  $O(|\delta^+(u)|)$ ; e iterar sobre todos os arcos tem consumo de tempo em  $O(m)$ , em que  $m$  é o número de arcos do digrafo.

### Métodos da API NetworkX

Elencamos a seguir alguns métodos da API NetworkX utilizados na implementação. Para uma instância  $D$  de `DiGraph`:

<sup>4</sup> Disponível em <<https://networkx.org/>>.

### Consulta de estrutura

- `D.nodes()`: devolve um iterável sobre o conjunto dos vértices de D.
- `D.in_edges(v, data="w")`: devolve um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $uv$  é um arco de D com peso  $w$ .
- `D.out_edges(u, data="w")`: devolve um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $uv$  é um arco de D com peso  $w$ .
- `D[u][v]["w"]`: devolve o peso do arco  $uv$  de D, isto é, o valor armazenado no atributo " $w$ " associado a esse arco.

### Modificação de estrutura

- `D.add_edge(u, v, w=p)`: adiciona o arco  $uv$  a D com peso  $p$  armazenado no atributo " $w$ ". Os vértices  $u$  e/ou  $v$  são criados automaticamente se ainda não existirem em D.
- `D.remove_edges_from(edges)`: recebe um iterável edges de arcos e remove de D cada arco  $(u, v)$  em edges.
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: recebe um iterável nodes de vértices e remove de D cada vértice  $v$  em nodes (bem como todos os arcos incidentes em  $v$ ).

### Remoção de arcos que entram na raiz

Recorde que o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe um  $r$ -digafo ponderado e que, por definição, em um  $r$ -digafo ponderado nenhum arco entra em  $r$ . Escrevemos esta função como uma etapa de pré-processamento justamente para garantir que a raiz  $r$  não possua arcos de entrada antes de iniciar o algoritmo principal.

Em detalhes, essa função recebe como entrada uma instância D de `DiGraph` e um vértice  $r$  de D. A função modifica D removendo todos os arcos que entram em  $r$  e tem consumo amortizado de tempo em  $O(k)$ , em que  $k$  é o número de arcos que entram em  $r$ . Destacamos que é necessário armazenar, em uma lista, todos esses arcos usando o método `in_edges` (linha 2), pois esse método devolve um iterador que é invalidado assim que alguma operação modifica a estrutura de dados que o produziu.

Remoção de arcos que entram na raiz
<i>Entrada:</i> D: Digraph e r.
<i>Pré-condição:</i> r vértice de D.
<i>Modifica:</i> D.
<i>Pós-condição:</i> D não possui nenhum arco que entra em r.

```

1 def remove_edges_to(D: nx.DiGraph, r: int):
2     in_edges = list(D.in_edges(r))
3     D.remove_edges_from(in_edges)

```

### 3.3.1 Redução de custos

A função `reduce_weights` tem como propósito realizar a redução de custos por vértice. Em outras palavras, é nessa função que, para um vértice  $v$ , calculamos  $\lambda(v)$  e obtemos os custos  $\lambda$ -reduzidos dos arcos que entram em  $v$ . A função recebe  $D: \text{DiGraph}$  e um vértice  $v$ . A variável `in_edges` é um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $(u, v)$  é um arco de  $D$  e  $w$  é o seu peso, obtidas por meio do método  $D.in_edges(node, data="w")$ . A variável  $yv$  é o peso mínimo entre esses arcos. Em seguida, os pesos dos arcos que entram em  $v$  são decrementados de  $yv$ . O consumo de tempo está em  $O(k)$ , em que  $k$  é o número de arcos que entram em  $node$ .

#### Redução de custos por vértice (normalização)

*Entrada:*  $D: \text{DiGraph}, v: \text{int}$ .

*Pré-condição:*  $v$  é vértice de  $D$  e possui ao menos um arco de entrada.

*Modifica:*  $D$ .

*Pós-condição:*  $D[u][v]["w"]$  é o custo  $\lambda$ -reduzido do arco  $(u, v)$  para cada  $u$  que é predecessor de  $v$ .

```

1 def reduce_weights(D: nx.DiGraph, v: int):
2     in_edges = D.in_edges(v, data=True)
3     yv = min((data["w"] for _, _, data in in_edges))
4     for u, _, _ in in_edges:
5         D[u][v]["w"] -= yv

```

A Figura 20 ilustra o funcionamento da redução:

**Antes:**  $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$       **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

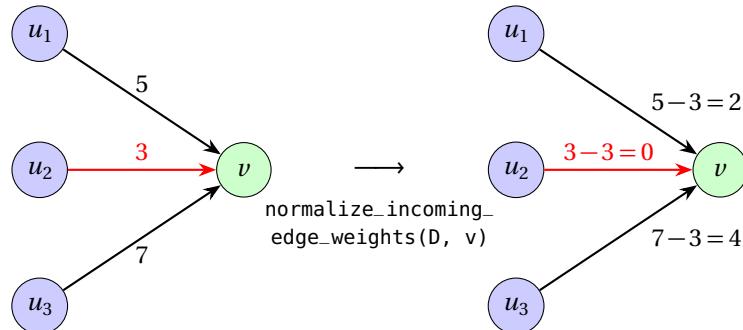


Figura 20 – À esquerda, vértice  $v$  com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar  $\text{reduce\_weights}(D, v)$ : o menor peso 3 é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco  $(u_2, v)$  (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para  $D_0$ .

### 3.3.2 Construção de $D_0$

Vamos mostrar agora como construir o subdigrafo  $D_0$  de  $D$ . Lembre-se de que  $D_0$  é o subdigrafo gerador de  $D$  em que, para cada vértice  $v \neq r$ , selecionamos um arco que entra em  $v$  com peso zero.

A função é bastante simples. Ela recebe um  $D: \text{DiGraph}$  e um vértice  $r$  de  $D$  tais que, em cada vértice  $v$  diferente de  $r$ , entra ao menos um arco de peso zero. A função devolve um subdigrafo gerador  $D0: \text{DiGraph}$ , construído ao se iterar sobre o conjunto dos vértices  $v$  de  $D$  distintos de  $r$  e selecionar exatamente um arco de peso zero que entra em  $v$ .

#### Construção de $D_0$

*Entrada:*  $D: \text{DiGraph}$ ,  $r: \text{int}$ .

*Pré-condição:*  $r$  é vértice de  $D$  e para cada vértice distinto de  $r$  existe um arco de peso zero (atributo "w") que nele entra.

*Saída:*  $D0: \text{DiGraph}$  subdigrafo gerador de  $D$  tal que em cada vértice diferente de  $r$  entra exatamente um arco de custo reduzido igual a zero.

```

1 def get_Dzero(D: nx.DiGraph, r: int):
2     D_zero = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r:
5             in_edges = D.in_edges(v, data=True)
6             u = next((u for u, _, data in in_edges
7                       if data["w"] == 0))
8             D_zero.add_edge(u, v)
9     return D_zero

```

As funções de redução de custo e construção de  $D_0$  juntas implementam os passos das linhas 2, 3, e 4 do Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds.

### 3.3.3 Detecção de ciclo

O próximo passo consiste em mostrar como decidir se o digrafo  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência e, caso isso não ocorra, como encontrar um ciclo para futura contração. A decisão sobre se  $D_0$  é uma arborescência é delegada a uma função de biblioteca, chamada `is_arborescence`. Note que, em virtude da forma como  $D_0$  é construído, se  $D_0$  é uma arborescência, então  $D_0$  é necessariamente uma  $r$ -arborescência. No que segue, vamos assumir que  $D_0$  não é uma arborescência.

A função recebe `D_zero`: `DiGraph` e supõe que (i) `D_zero` não é uma arborescência; (ii) existe exatamente um vértice de `D_zero` no qual não entra nenhum arco; e (iii) em cada um dos demais vértices, entra ao menos um arco. A função devolve um subdigrafo `C`: `DiGraph` de `D_zero` que é um ciclo.

Uma função de biblioteca, `find_cycle`, é usada para encontrar um ciclo em `D_zero`. Os arcos desse ciclo — resultado da chamada

```
find_cycle(D_zero, orientation="original")
```

— determinam o subconjunto de vértices do ciclo. A função devolve o subdigrafo de `D_zero` induzido por esse subconjunto vértices.

#### Detecção de ciclo dirigido em $D_0$

*Entrada:* `D_zero`: `DiGraph`.

*Pré-condição:* `D_zero` não é uma arborescência, e existe exatamente um vértice de `D_zero` no qual não entra nenhum arco e nos demais vértices entra ao menos um arco.

*Saída:* `C`: `DiGraph` subdigrafo de `D_zero` que é um ciclo.

```
1 def find_cycle(D_zero: nx.DiGraph):
2     nodes_in_cycle = set()
3     for u, v, _ in nx.find_cycle(D_zero, orientation="original"):
4         nodes_in_cycle.update([u, v])
5     return D_zero.subgraph(nodes_in_cycle)
```

### 3.3.4 Contração de um ciclo

Vamos agora mostrar como implementar a contração de um ciclo  $C$  de  $D_0$ . A função `contract_cycle` recebe um digrafo `D`, um<sup>5</sup> subdigrafo `C` de `D` e um nome `label`

<sup>5</sup> Isso é irrelevante: `C` poderia ser qualquer subdigrafo não vazio de `D`.

para o supervértice do digrafo contraído. A função modifica  $D$  de tal forma que, após a chamada,  $D$  representa o digrafo  $D/C \rightarrow \text{label}$  e devolve dois dicionários

```
in_to_cycle, out_from_cycle:dict[int, tuple[int, float]],
```

cuja formação é explicada a seguir.

Considere um vértice  $u$  de  $D$  que está fora de  $C$  e que possui ao menos um sucessor em  $C$ . Dizemos que um arco  $uv$  de  $D$  é **essencial de  $u$  para  $C$**  se  $v$  é vértice de  $C$  e o custo de  $uv$  é mínimo entre os custos dos arcos que saem de  $u$  e entram em  $C$ . De forma similar, considere um vértice  $v$  de  $D$  que está fora de  $C$  e que possui ao menos um antecessor em  $C$ . Dizemos que um arco  $uv$  de  $D$  é **essencial de  $C$  para  $v$**  se  $u$  é vértice de  $C$  e o custo de  $uv$  é mínimo entre os custos dos arcos que saem de  $C$  e entram em  $v$ .

A função constrói os dicionários com os arcos essenciais e seus pesos. Assim, para cada  $u$  que é antecessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $u$  para  $C$ , de custo  $w$ . De forma similar, para cada  $v$  que é sucessor de  $C$ ,  $\text{out\_from\_cycle}[v] = (u, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $C$  para  $v$ , de custo  $w$ .

É fácil ver que o consumo de tempo da função está em  $O(m)$ , em que  $m$  é o número de arcos de  $D$ .

### Contração de ciclo

*Entrada:*  $D$ : DiGraph,  $C$ : DiGraph,  $\text{label}$ : int.

*Pré-condição:*  $C$  subdigrafo de  $D$  e  $\text{label}$  não é um vértice de  $D$ .

*Modifica:*  $D$ .

*Pós-condição:*  $D$  é o digrafo  $D/C \rightarrow \text{label}$ .

*Saída:*  $\text{in\_to\_cycle}, \text{out\_from\_cycle}: \text{dict[int, tuple[int, float]]}$ .

Para cada  $u$  que é antecessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $u$  para  $C$  de custo  $w$ .

Para cada  $u$  que é sucessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $vu$  é um arco é um arco essencial de  $C$  para  $u$  de custo  $w$ .

```

1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: int):
2     cycle_nodes: set[int] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
4     for u in D.nodes():
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, data["w"]),
8                  for _, v, data in D.out_edges(u, data=True)
9                  if v in cycle_nodes),
10                key=lambda x: x[1],

```

```

11             default=None, )
12         if min_weight_edge_to_cycle:
13             in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
14         for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
15             D.add_edge(u, label, w=w)
16         out_from_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
17         for v in D.nodes:
18             if v not in cycle_nodes:
19                 min_weight_edge_from_cycle = min(
20                     ((u, data["w"]))
21                     for u, _, data in D.in_edges(v, data=True)
22                     if u in cycle_nodes),
23                 key=lambda x: x[1],
24                 default=None, )
25             if min_weight_edge_from_cycle:
26                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
27         for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
28             D.add_edge(label, v, w=w)
29         D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
30     return in_to_cycle, out_from_cycle

```

### 3.3.5 Procedimento principal

Vamos agora apresentar a função principal, que orquestra todas as funções auxiliares descritas anteriormente e completa a implementação do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds. A função recebe um digrafo ponderado  $D$ , um vértice raiz  $r$  e um inteiro  $label$  que satisfazem:

- os vértices de  $D$  são inteiros no conjunto  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ , para algum  $n \geq 1$ ;
- $r$  é um vértice de  $D$ ;
- $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência;
- nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ ; e
- $label$  é um inteiro maior ou igual a  $n$ .

A função devolve um digrafo ponderado que é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

A seguir, comentamos brevemente o papel de cada bloco de instruções do código.

Na linha 2,  $D\_copy$  é uma cópia de  $D$ . As linhas 3 a 5 são responsáveis por calcular o custo reduzido de cada arco do digrafo  $D\_copy$  (as modificações dos custos são feitas

em  $D_{\text{copy}}$ ). A linha 6 determina o digrafo  $D_{\text{zero}}$ , que contém exatamente um arco de custo reduzido igual a zero entrando em cada vértice distinto de  $r$ . A linha 7 determina se  $D_{\text{zero}}$  é uma arborescência. Se esse for o caso, a função restaura os pesos originais nos arcos de  $D_{\text{zero}}$  e devolve  $D_{\text{zero}}$ .

Suponha que  $D_{\text{zero}}$  não seja uma arborescência. A linha 11 determina um ciclo em  $D_{\text{zero}}$ , armazenando-o em  $C$ . A linha 12 contrai o ciclo  $C$  em  $D_{\text{copy}}$ ; o digrafo  $D_{\text{copy}}$  é modificado de tal forma que corresponda ao digrafo contraído. A linha 13 determina em  $F_{\text{prime}}$  uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo do digrafo  $D_{\text{copy}}$ . As demais linhas são responsáveis pelo processo de expansão de  $F_{\text{prime}}$ : elas modificam  $F_{\text{prime}}$  de tal forma que  $F_{\text{prime}}$  se torne uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

O código completo da função principal é apresentado a seguir:

#### Procedimento principal (recursivo)

*Entrada:*  $D: \text{DiGraph}$ ,  $r: \text{int}$ ,  $\text{label}: \text{int}$ .

*Pré-condição:*  $D$  é um digrafo ponderado; os vértices de  $D$  são inteiros no conjunto  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  para algum  $n \geq 0$ ;  $r$  é um vértice de  $D$ ;  $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência; nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ ; e  $\text{label}$  é maior ou igual a  $n$ .

*Saída:*  $T: \text{DiGraph}$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo de  $D$ .

```

1 def chuliu_edmonds( $D: \text{nx.DiGraph}$ ,  $r: \text{int}$ ,  $\text{label}: \text{int}$ ):
2      $D_{\text{copy}} = \text{cast}(\text{nx.DiGraph}, D.\text{copy}())$ 
3     for  $v$  in  $D_{\text{copy}}.\text{nodes}$ :
4         if  $v \neq r$ :
5              $\text{reduce\_weights}(D_{\text{copy}}, v)$ 
6      $D_{\text{zero}} = \text{get\_Dzero}(D_{\text{copy}}, r)$ 
7     if  $\text{nx.is_arborescence}(D_{\text{zero}})$ :
8         for  $u, v$  in  $D_{\text{zero}}.\text{edges}$ :
9              $D_{\text{zero}}[u][v][\text{"w"}] = D[u][v][\text{"w"}]$ 
10    return  $D_{\text{zero}}$ 
11     $C = \text{find_cycle}(D_{\text{zero}})$ 
12     $\text{in\_to\_cycle}, \text{out\_from\_cycle} = \text{contract_cycle}(D_{\text{copy}}, C, \text{label})$ 
13     $F_{\text{prime}} = \text{chuliu_edmonds}(D_{\text{copy}}, r, \text{label} + 1)$ 
14     $\text{in\_edge} = \text{next}(\text{iter}(F_{\text{prime}}.\text{in\_edges}(\text{label}, \text{data=True})))$ 
15     $u, \_, \_ = \text{cast}(\text{tuple}, \text{in\_edge})$ 
16     $v, \_ = \text{in\_to\_cycle}[u]$ 
17     $F_{\text{prime}}.\text{add\_edge}(u, v)$ 
18    for  $u_c, v_c$  in  $C.\text{edges}$ :
19        if  $v_c \neq v_c$ :  $F_{\text{prime}}.\text{add\_edge}(u_c, v_c)$ 
20        for  $\_, z, \_ \text{ in list}(F_{\text{prime}}.\text{out\_edges}(\text{label}, \text{data=True}))$ :
21             $u_{\text{cycle}}, \_ = \text{out\_from\_cycle}[z]$ 
22             $F_{\text{prime}}.\text{add\_edge}(u_{\text{cycle}}, z)$ 
```

```
23     F_prime.remove_node(label)
24     for u, v in F_prime.edges:
25         F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
26     return F_prime
```

# 4 Algoritmo de András Frank

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo de András Frank, que determina uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo é composto por duas fases. Na primeira, devida a Fulkerson (FULKERSON, 1974), constrói-se de maneira gulosa uma cobertura de  $r$ -conjuntos. Na segunda, devida a Frank (FRANK, 1979; FRANK, 2011), extrai-se dessa cobertura, também por meio de um procedimento guloso, uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo. A apresentação é baseada em (LESTON-REY, 2025).

O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

## 4.1 Preliminares

Começamos por definir a noção de uma coleção<sup>1</sup> laminar de conjuntos. Seja  $U$  um conjunto e denotemos por  $2^U$  a coleção cujos elementos são os subconjuntos de  $U$ . Uma subcoleção  $\mathcal{L} \subseteq 2^U$  é dita **laminar** se, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{L}$ , vale uma das alternativas:

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

Não é difícil verificar que, se  $U$  é um conjunto finito e  $\emptyset \notin \mathcal{L} \subseteq 2^U$  é uma coleção laminar de subconjuntos de  $U$ , então

$$|\mathcal{L}| \leq 2|U| - 1.$$

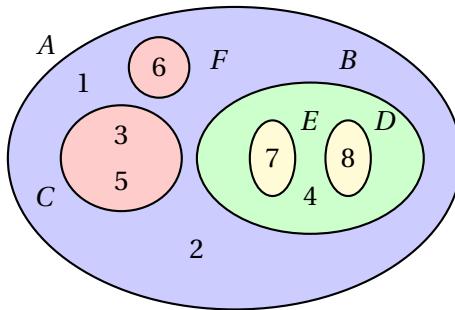


Figura 21 – A figura ilustra uma coleção laminar  $\{A, B, C, D, E, F\}$  de conjuntos, onde  $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $B := \{4, 7, 8\}$ ,  $C := \{3, 5\}$ ,  $D := \{8\}$ ,  $E := \{7\}$ ,  $F := \{6\}$ .

Seja  $(D, w \geq 0, r)$  um  $r$ -digrafo ponderado. Para cada subconjunto  $X \subseteq V$  e cada  $F \subseteq A(D)$ , seja

$$\varrho_F(X) := |F \cap \delta^-(X)|,$$

<sup>1</sup> Ao longo deste texto, usamos “coleção” como sinônimo de “conjunto”.

isto é,  $\varrho_F(X)$  é o número de arcos de  $F$  que *entram* em  $X$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja

$$[k] := \{i \in \mathbb{N} : i < k\}.$$

Assim, por exemplo,  $[4] = \{0, 1, 2, 3\}$ . Uma sequência

$$\left((R_i, \lambda_i)\right)_{i \in [k]},$$

em que, para cada  $i \in [k]$ , o conjunto  $R_i$  é um  $r$ -conjunto<sup>2</sup> e  $\lambda_i$  é um real não negativo, é dita  **$w$ -disjunta** se

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \leq w(a)$$

para cada  $a \in A(D)$ , em que  $[P]$  denota a função indicadora da proposição  $P$ , isto é,  $[P]=1$  se  $P$  é verdadeira e  $[P]=0$  caso contrário. O número  $\sum_{i \in [k]} \lambda_i$  é chamado de **valor** da sequência  $w$ -disjunta  $\left((R_i, \lambda_i)\right)_{i \in [k]}$ .

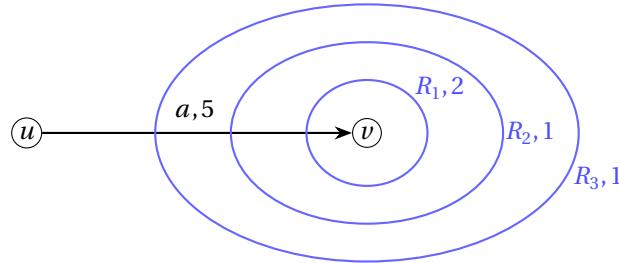


Figura 22 – Um arco  $a$  de peso 5 que entra nos  $r$ -conjuntos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  com multiplicidades 2, 1, e 1, respectivamente.

Podemos pensar nos valores  $\lambda_i$  como uma multiplicidade, no seguinte sentido. Para cada  $r$ -conjunto  $R_i$ , o valor  $\lambda_i$  representa a multiplicidade de  $R_i$ , isto é, o “número de cópias” de  $R_i$  que queremos incluir. Além disso, fixado um arco  $a$ , o número total de vezes que  $a$  é coberto pelos  $\lambda_i$ , isto é, o valor

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)],$$

não excede  $w(a)$ .

Suponha que  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos – assim, para cada  $r$ -conjunto

<sup>2</sup> Recorde que um  $r$ -conjunto é um subconjunto não vazio de  $V$  que *não* contém  $r$ .

$R$ , vale  $\varrho_F(R) \geq 1 - \text{de } D$  e que a sequência  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é  $w$ -disjunta. Então

$$\begin{aligned} w(F) &= \sum_{a \in F} w(a) \\ &\geq \sum_{a \in F} \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \\ &= \sum_{i \in [k]} \lambda_i \sum_{a \in F} [a \in \delta^-(R_i)] \\ &= \sum_{i \in [k]} \lambda_i \varrho_F(R_i) \\ &\geq \sum_{i \in [k]} \lambda_i. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos que  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos, de modo que, para cada  $i \in [k]$ , vale  $\varrho_F(R_i) \geq 1$ .

Note que  $w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$  se, e somente se, há igualdade em todas as desigualdades na cadeia acima. Logo,

$$w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$$

se, e somente se, as seguintes **condições de otimalidade** valem:

$$\forall a \in F : w(a) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)], \quad (4.1a)$$

$$\forall i \in [k] : \varrho_F(R_i) = 1. \quad (4.1b)$$

Assim, se  $F$  é uma  $r$ -arborescência geradora e  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma sequência  $w$ -disjunta que satisfaz as condições de otimalidade (4.1), então  $F$  é uma  $r$ -arborescência de peso mínimo e  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma sequência  $w$  - disjunta de valor máximo.<sup>3</sup>

## 4.2 Fase 1 do algoritmo de Frank

Antes de iniciarmos a descrição da fase 1, vale destacar que, embora ela seja referida como a fase 1 do algoritmo de Frank, ela é, na verdade, essencialmente devida a Fulkerson (FULKERSON, 1974).

É conveniente introduzir a seguinte definição para simplificar a notação. Seja  $U$  um conjunto e seja  $X \subseteq U$ . Definimos  $\mathbf{1}_X^U : U \rightarrow \{0, 1\}$  pondo

$$\mathbf{1}_X^U(u) := \begin{cases} 1, & \text{se } u \in X, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada  $u \in U$ . Quando o contexto permitir, escrevemos  $\mathbf{1}_X$  no lugar de  $\mathbf{1}_X^U$ . Além disso, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é definida pondo

$$(\lambda f)(u) := \lambda f(u)$$

---

<sup>3</sup> Isto é,  $\sum_{i \in [k]} \lambda_i$  é máximo entre todas as sequências  $w$ -disjuntas.

para cada  $u \in U$ . Finalmente, como de costume, se  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f - g : U \rightarrow \mathbb{R}$  é definida pondo

$$(f - g)(u) := f(u) - g(u)$$

para cada  $u \in U$ .

Voltemos à descrição da primeira fase. A apresentação dessa fase, bem como dos demais algoritmos deste capítulo, segue de perto a exposição informal, porém rigorosa, de (FEOFILOFF, 2005).

Seja  $(D, w \geq 0, r)$  um  $r$ -digráfo ponderado. A primeira fase do algoritmo constrói uma sequência

$$\left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$\{f_i : i \in [k]\} \text{ é uma cobertura de } r\text{-conjuntos de } D, \quad (4.2a)$$

$$\left( (R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]} \text{ é uma sequência } w\text{-disjunta,} \quad (4.2b)$$

$$\forall j \in [k] : \sum_{i \in [k]} \lambda_i [f_j \in \delta^-(R_i)] = w(f_j). \quad (4.2c)$$

Note que (4.2c) é a condição (4.1a).

Cada iteração da primeira fase começa com uma função  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  e uma sequência  $\left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$  tais que

$$c = w - \sum_{i \in [k]} \lambda_i \mathbf{1}_{\delta^-(R_i)} \quad (4.3a)$$

$$\forall i \in [k] : f_i \text{ entra em } R_i, \quad (4.3b)$$

$$\forall i \in [k], \forall j \in [i] : f_j \text{ não entra em } R_i, \quad (4.3c)$$

$$\forall i \in [k], \forall \emptyset \subset R \subset R_i, \exists h \in [i] : f_h \text{ entra em } R, \quad (4.3d)$$

$$\left( (R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]} \text{ é uma sequência } w\text{-disjunta,} \quad (4.3e)$$

$$\{R_i : i \in [k]\} \text{ é uma coleção laminar de } r\text{-conjuntos,} \quad (4.3f)$$

$$\forall i \in [k] : c(f_i) = 0 \quad (4.3g)$$

Note que a condição (4.3g) é equivalente a

$$\forall i \in [k] : \sum_{j \in [k]} \lambda_j [f_i \in \delta^-(R_j)] = w(f_i).$$

A primeira iteração começa com  $c = w$  e com a sequência vazia. Cada iteração consiste no seguinte. Suponha que  $\sigma := \left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$  satisfaz (4.3). Se  $F := \{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ , então o algoritmo pára e devolve  $\sigma$ . Suponha que esse não seja o caso. O algoritmo então seleciona um  $r$ -conjunto *minimal*  $R_k$  que não é

coberto por  $F$ . Como  $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência, então existe ao menos um arco que entra em  $R_k$ . A próxima iteração começa com  $\sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$  no lugar de  $\sigma$  e  $c - \lambda_k \mathbf{1}_{\delta^-(R_k)}$  no lugar de  $c$ , em que

- $\lambda_k := \min \{ c(a) | a \in \delta^-(R_k) \}$ , e
- $f_k$  é um arco em  $\delta^-(R_k)$  tal que  $c(f_k) = \lambda_k$ .

Precisamos verificar que  $\sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$  satisfaz (4.3). A única propriedade em (4.3) que não segue diretamente das escolhas de  $f_k$ ,  $R_k$  e  $\lambda_k$  é a laminaridade da coleção  $\{R_i : i \in [k+1]\}$ . Suponha que esse não seja o caso. Então existe  $i \in [k]$  tal que

$$R_i \cap R_k \neq \emptyset, \quad R_i \setminus R_k \neq \emptyset, \quad R_k \setminus R_i \neq \emptyset.$$

Em virtude de (4.3d), existe  $h \in [i]$  tal que  $f_h =: uv$  entra em  $R_i \cap R_k$ . Assim,  $u \notin R_i \cap R_k$  e  $v \in R_i \cap R_k$ . Ora,  $u \notin R_i \cap R_k$  implica que  $u \in V \setminus R_i$  ou  $u \in V \setminus R_k$ . Mas  $u \in V \setminus R_i$  implica que  $uv$  entra em  $R_i$ , o que contradiz (4.3c). Por outro lado,  $u \in V \setminus R_k$  implica que  $uv$  entra em  $R_k$ , o que novamente é uma contradição, pois  $F$  não entra em  $R_k$ . Logo, a coleção  $\{R_i : i \in [k+1]\}$  é laminar.

Para completar a descrição da primeira fase, basta mostrar como encontrar um  $r$ -conjunto minimal que não é coberto por  $F$ . Para isso, considere o digrafo  $D_0 := (V, F)$ . Como  $F$  não é uma cobertura de  $r$ -conjuntos,  $D_0$  não contém uma  $r$ -arborescência. Logo, pela Proposição 2.2, existe um  $r$ -conjunto  $X \subseteq V$  tal que nenhum arco de  $F$  entra em  $X$ . Logo, existe pelo menos uma fonte, digamos  $S$ , em  $\mathcal{C}(D_0)$ . Proposição 4.1,  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $F$ .

**Proposição 4.1.** *Seja  $H$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $H$ . Para toda fonte  $S$  de  $\mathcal{C}(H)$ , se  $r \notin S$ , então  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $A(H)$ .*

*Prova.* Suponha que  $S$  seja uma fonte de  $\mathcal{C}(H)$  que satisfaz  $r \notin S$ . Como  $S$  é uma fonte de  $\mathcal{C}(H)$ , nenhum arco de  $H$  entra em  $S$ . Além disso,  $r \notin S$ , donde  $S$  é um  $r$ -conjunto não coberto por  $A(H)$ . Resta mostrar que  $S$  é minimal.

Ora,  $S$  é uma componente fortemente conexa de  $H$ , de modo que  $H[S]$  é fortemente conexo. Seja agora  $\emptyset \neq R \subset S$  um subconjunto próprio e não vazio de  $S$ . Como  $H[S]$  é fortemente conexo, existe ao menos um arco de  $H[S]$  que entra em  $R$ . Como  $A(H[S]) \subseteq A(H)$ , esse arco pertence a  $A(H)$  e entra em  $R$ . Logo,  $A(H)$  entra em todo subconjunto próprio e não vazio de  $S$ .

Portanto,  $S$  não é coberto por  $A(H)$ , mas todo subconjunto próprio não vazio de  $S$  é coberto por  $A(H)$ , isto é,  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $A(H)$ .  $\square$

Para sumarizar o processo algoritmo recém descrito, eis um pseudo-código da fase 1 do algoritmo de Frank.

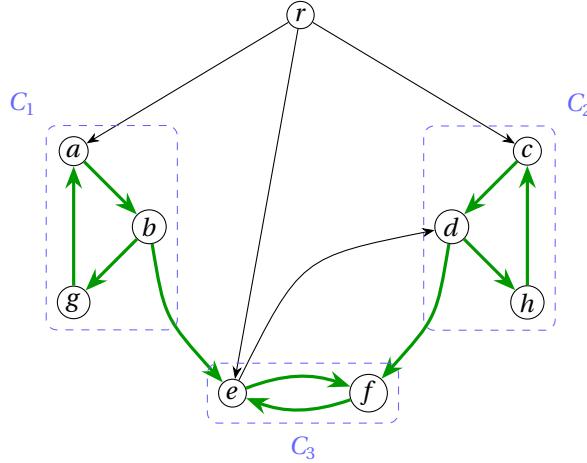


Figura 23 – Digráfo  $D$  com raiz  $r$ : arcos pretos em  $A(D) \setminus F$  e arcos verdes em  $F$ . As caixas tracejadas destacam os componentes fortemente conexos de  $D[F]$ ;  $C_1$  e  $C_2$  são fontes na condensação.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank (algoritmo de Fulkerson)

Recebe um  $r$ -digráfo ponderado  $(D, w, r)$  e devolve uma sequência  $\sigma$  que satisfaz (4.2).

```

1 def phase1( $D, w, r$ ):
2    $c, \sigma := w, \epsilon$ 
3   loop:
4      $(f_i, R_i, \lambda_i)_{i \in [k]} := \sigma$ 
5      $F := \{f_i \mid i \in [k]\}$ 
6      $D_0 := (V, F)$ 
7     if  $\mathcal{C}(D_0)$  não possui fontes: return  $\sigma$ 
8     seja  $R_k$  uma fonte em  $\mathcal{C}(D_0)$ 
9      $\lambda_k := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R_k)\}$ 
10    seja  $f_k \in \delta^-(R_k)$  tal que  $c(f_k) = \lambda_k$ 
11     $\sigma := \sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$ 
12     $c := c - \lambda_k \mathbf{1}_{\delta^-(R_k)}$ 
```

#### Complexidade

A cada iteração, o algoritmo determina um componente fonte de  $\mathcal{C}(D_0)$ , o que pode ser realizado em tempo  $O(|A|)$ , usando, por exemplo, o algortimo de Kosaraju (COR-MEN et al., 2009). O conjunto obtido da sequência de  $r$ -conjunto devolvida pelo algoritmo é laminar (e a sequência não possui repetições). Logo, seu tamanho é limitado por  $2|V| - 1$ . Consequentemente, é possível implementar a fase 1 em tempo  $O(|V||A|)$ .

### 4.3 Implementação da fase 1

A função `phase1` recebe  $D$ : `DiGraph`, ponderado pelo atributo "w" associado a cada arco, e  $r$ : `int`, que é um vértice de  $D$ . Além disso,  $D$  deve possuir uma  $r$ -arborescência. A função devolve uma lista `sigma` de triplas que corresponde à sequência  $\lambda$  satisfazendo (4.2).

Na linha 3, é definido `D_zero`, que, durante a execução da função, armazena os arcos da lista `sigma` — mais precisamente, o primeiro componente de cada tripla em `sigma`. Assim, em cada iteração, temos  $D\_zero = (V, F)$ , onde  $F = \{f_i\}$  é a família de arcos já selecionados.

A função usa `condensation`, da biblioteca `NetworkX`, que recebe um `DiGraph` e devolve um `DiGraph` que é a sua condensação. Assim, após a execução da linha 5,  $C$  é a condensação de `D_zero`. Na linha 6, as fontes de  $C$ , isto é, os vértices nos quais nenhum arco entra, são coletadas na lista `sources`.

Pela hipótese de que  $(D, w, r)$  admite uma  $r$ -arborescência, sabemos que toda fonte de  $\mathcal{C}(D_0)$  que não contém  $r$  corresponde a um  $r$ -conjunto minimal não coberto. Logo, quando `sources` contém apenas uma fonte, todos os  $r$ -conjuntos já estão cobertos e a função termina.

Caso contrário, para cada fonte de  $C$ , os vértices do componente forte correspondente em `D_zero` são coletados em `X` (linha 9); um tal `X` é de interesse desde que  $r$  não pertença a `X`. Nesse caso, os arcos de `D_copy` que entram em `X` são armazenados em `arcs` (linha 12). O peso de um arco de custo mínimo em `arcs` é determinado na linha 15 e armazenado em `min_weight`.

A função `update_weights` decremente de `min_weight` o peso de cada arco em `arcs` e devolve um arco de menor peso em `arcs`, que é armazenado em `a` (linha 16). O arco `a` é adicionado ao digrafo `D_zero` (linha 17). Finalmente, na linha 18, a tripla  $(a, X, min\_weight)$  é adicionada à lista `sigma`.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank

*Entrada:*  $D$ : `DiGraph`,  $r$ : `int`

*Pré-condição:*  $D$  é ponderado,  $r$  é um vértice de  $D$ , e  $D$  possui uma  $r$ -arborescência.

*Saída:* uma lista `sigma` que corresponde à uma sequência que satisfaz 4.2.

```

1 def phase1(D: nx.DiGraph, r: int):
2     D_copy = D.copy()
3     sigma = []
4     D_zero = nx.DiGraph(); D_zero.add_nodes_from(D_copy.nodes())
5     while True:
6         C = nx.condensation(D_zero)
7         sources = [x for x in C.nodes() if C.in_degree(x) == 0]
8         if len(sources) == 1: break

```

```

9   for s in sources:
10      X = C.nodes[s]["members"]
11      if r in X:
12         continue
13      arcs = [(u, v, data)
14              for u, v, data in D_copy.edges(data=True)
15              if u not in X and v in X]
16      min_weight = min(data["w"] for _, _, data in arcs)
17      a = update_weights(D_copy, arcs, min_weight)
18      D_zero.add_edge(a[0], a[1])
19      sigma.append((a, X, min_weight))
20
21  return sigma

```

A função `update_weights` é muito simples e segue abaixo.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank

*Entrada:* `D: DiGraph, arcs: list[tuple[int, int, dict]], min_weight: float.`

*Pré-condição:* `D` é ponderado, `arcs` é uma lista de arcos, `min_weight` é o peso de um arco de menor peso em `arcs`.

*Pós-condição:* Decrementa de `min_weight` o peso de cada arco em `arcs`, modificando esse atributo em `D`.

```

1 def update_weights(D: nx.DiGraph,
2                     arcs: list[tuple[int, int, dict]],
3                     min_weight: float):
4     for u, v, _ in arcs:
5         D[u][v]["w"] -= min_weight
6         if D[u][v]["w"] == 0:
7             a = (u, v)
8
8     return a

```

## 4.4 Fase 2 do Algoritmo de Frank

A fase 2 do algoritmo de Frank recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w \geq 0, r)$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  extraída da sequência  $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ , obtida na fase 1 do algoritmo de Frank, a qual satisfaz (4.2). A fase 2 devolve um subconjunto  $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$ , satisfazendo (4.1a), ou seja,<sup>4</sup>

$$\forall i \in [k]: \quad \varrho_J(R_i) = 1.$$

A combinação da sequência  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  com esse conjunto  $J$  prova que  $J$  é uma  $r$ -arborescência geradora de peso mínimo de  $(D, w)$ .

Cada iteração da fase 2 começa com um conjunto  $J$  de arcos tal que  $J$  é uma  $r$ -arborescência.<sup>5</sup> A primeira iteração começa com  $J := \emptyset$ . Cada iteração consiste no

<sup>4</sup> Se preferir em palavras, isto quer dizer que, em cada  $r$ -conjunto  $R_i$ , entra exatamente um arco de  $J$ .

<sup>5</sup> Assuma, por simplicidade, que quando  $J = \emptyset$  o digrafo  $J$  é uma  $r$ -arborescência.

seguinte. Se  $J$  é uma  $r$ -arborescência geradora, então o algoritmo pára e devolve  $J$ . Suponha que esse não seja o caso. O algoritmo então considera a sequência

$$(f_i)_{i \in [k]}$$

e seleciona o menor  $i \in [k]$  tal que  $f_i$  é um arco que sai de  $V(J)$ . Note que tal arco deve existir, pois  $\{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos. A próxima iteração começa com  $J \cup \{f_i\}$  no lugar de  $J$ .

Afirmamos que no início de cada iteração, o conjunto  $J$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_J(R_i) \leq 1.$$

Isso é óbvio no início da primeira iteração. Considere uma iteração arbitrária e suponha que  $J$  não é uma  $r$ -arborescência. Vamos mostrar que  $J \cup \{f_i\}$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_{J \cup \{f_i\}}(R_i) \leq 1.$$

Por construção, dentre os arcos de  $(f_i)_{i \in [k]}$  que saem de  $V(J)$ , o arco  $f_i$  é o de menor índice. Além disso,  $f_i$  entra em  $R_i$ . Suponha, por um momento, que algum arco de  $J$  entre em  $R_i$ ; então  $V(J) \cap R_i \neq \emptyset$ , donde  $R_i \setminus V(J) \subset R_i$ . Além disso, como  $f_i$  sai de  $V(J)$  e entra em  $R_i$ , concluímos que  $R_i \setminus V(J) \neq \emptyset$ . Logo,  $\emptyset \subset R_i \setminus V(J) \subset R_i$ .

Sabemos que, para cada  $\emptyset \subset R \subset R_i$ , existe um arco de  $F := \{f_j : j \in [k]\}$  que entra em  $R$  e cujo índice é menor que  $i$ . Em particular, tomando  $R := R_i \setminus V(J)$ , existe  $f_k =: uv \in F$  tal que  $f_k$  entra em  $R_i \setminus V(J)$  e, portanto,  $k < i$  e  $v \in R_i \setminus V(J)$ . Como  $f_k$  não entra em  $R_i$  e a ponta final  $v$  pertence a  $R_i$ , segue que  $u \in R_i$ .

Ora,  $R_i = (R_i \cap V(J)) \cup (R_i \setminus V(J))$ , e, como  $u \in R_i$  e  $u \notin R_i \setminus V(J)$ , obtemos  $u \in V(J)$ . Logo,  $f_k$  é um arco de  $F$  que sai de  $V(J)$ , o que contradiz a escolha de  $i$ , pois  $k < i$ . Essa contradição mostra que  $J \cup \{f_i\}$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_{J \cup \{f_i\}}(R_i) \leq 1,$$

como queríamos.

O pseudo-código do algoritmo da fase 2, em uma versão ingênua, é muito simples.

#### Fase 2: Construção da $r$ -arborescência geradora

*Recebe um digrafo  $D$ , um vértice  $r$  de  $D$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  de arcos tal que  $\{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura dos  $r$ -conjuntos de  $D$ , e devolve um subdigrafo que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$ .*

```

1 def phase2( $D$ ,  $r$ ,  $(f_i)_{i \in [k]}$ ):
2      $U, J := \{r\}, \emptyset$ 
```

```

3   for  $t := 1$  to  $|V(D)| - 1$ :
4     for  $i \in [k]$ :
5        $(u_i, v_i) := f_i$ 
6       if  $u_i \in U$  e  $v_i \notin U$ :
7          $U, J := U \cup \{v_i\}, J \cup \{f_i\}$ 
8         break
9   return  $(U, J)$ 

```

## Complexidade

Observe que o algoritmo realiza  $O(|V(D)|)$  iterações e que cada iteração pode ser implementada de modo a consumir tempo em  $O(|F|)$ . Logo, o consumo de tempo está em  $O(|V||F|)$ .

## 4.5 Implementação da fase 2

A implementação da fase 2 é muito simples e segue bem de perto a versão do pseudo-código.

### Fase 2: Construção da arborescência

*Entrada:*  $D: nx.DiGraph, r: int, F: list[tuple[int, int]]$

*Pré-condição:*  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ .

*Saída:* Um  $DiGraph$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  cujos arcos estão contidos em  $F$ .

```

1 def phase2( $D: nx.DiGraph, r: int, F: list[tuple[int, int]]$ ):
2   Arb =  $nx.DiGraph()$ 
3   Arb.add_node(r)
4   n = len(D.nodes())
5   for _ in range(n - 1):
6     for u, v in F:
7       if u in Arb.nodes() and v not in Arb.nodes():
8         edge_data = D.get_edge_data(u, v)
9         Arb.add_edge(u, v, **edge_data)
10        break
11   return Arb

```

## 4.6 Versão alternativa da fase 2

Vamos agora exibir uma versão alternativa e mais eficiente da fase 2, como sugerido em (REY, 2025), que fornece um algoritmo que pode ser implementado em

tempo  $O(|A| + |V|\log|V|)$ . No contexto do nosso problema isso se reduz a  $O(|V|\lg|V|)$ . A ideia é simples e nada mais é do que uma variante do algoritmo de Dijkstra (CORMEN et al., 2009).

A versão alternativa recebe um  $r$ -dиграфo ponderado  $(D, w \geq 0, r)$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  extraída da sequência  $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ , obtida na fase 1 do algoritmo de Frank, a qual satisfaz (4.2). Ela devolve um subconjunto  $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  e satisfaz (4.1a).

Forme o subdigrafo gerador

$$H := (V, \{f_i : i \in [k]\})$$

de  $D$  e a função *prioridade*

$$p : \{f_i : i \in [k]\} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad p(f_i) := i \text{ para cada } i \in [k].$$

Cada iteração do algoritmo começa com um subconjunto  $J$  de arcos de  $H$  e com um subconjunto  $Q$  também de arcos de  $H$ . A primeira iteração começa com

$$J := \emptyset \quad \text{e} \quad Q := \delta_H^+(r).$$

Cada iteração consiste no seguinte.

- Se  $Q = \emptyset$ , então o algoritmo pára e devolve  $J$ .
- Caso contrário, o algoritmo seleciona um arco  $(u, v) \in Q$  tal que  $p(u, v)$  é mínimo.
  - Se  $v \in V(J)$ , então o algoritmo inicia uma nova iteração com  $J$  e  $Q \setminus \{(u, v)\}$  nos papéis de  $J$  e  $Q$ , respectivamente.
  - Se  $v \notin V(J)$ , então o algoritmo inicia uma nova iteração com

$$J' := J \cup \{(u, v)\} \quad \text{e} \quad Q' := (Q \setminus \{(u, v)\}) \cup \delta_H^+(v)$$

nos papéis de  $J$  e  $Q$ , respectivamente.

A implementação dessa versão segue abaixo.

#### Versão alternativa da fase 2

*Entrada:*  $D : nx.DiGraph, r : int, F : list[tuple[int, int]]$

*Pré-condição:*  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ .

*Saída:* Um  $DiGraph$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$

```

1 def phase2_v2(D, r, F):
2     Arb = nx.DiGraph()

```

```

3   for i, (u, v) in enumerate(F):
4       Arb.add_edge(u, v, w=i)
5   V = {r}
6   q = []
7   for u, v, data in Arb.out_edges(r, data=True):
8       heapq.heappush(q, (data["w"], u, v))
9   J = nx.DiGraph()
10  while q:
11      _, u, v = heapq.heappop(q)
12      if v in V:
13          continue
14      J.add_edge(u, v, w=D[u][v]["w"])
15      V.add(v)
16      for x, y, data in Arb.out_edges(v, data=True):
17          heapq.heappush(q, (data["w"], x, y))
18  return J

```

## 4.7 O algoritmo de Frank

O algoritmo de Frank é obtido compondo-se as duas fases. Há duas versões à disposição. Para obter a segunda, basta trocar a chamada da função `phase2_v2` pela chamada da função `phase2`.

### Fase 2: Construção da $r$ -arborescência geradora

*Recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ , e devolve um par  $(J, (R_i, \lambda_i)_{i \in [k]})$  satisfazendo as condições de optimilidade (4.1).*

```

1 def frankv1(D, w, r):
2     (f_i, R_i, lambda_i)_{i \in [k]} := phase1(D, w, r)
3     J := phase2_v2(D, r, {f_i : i \in [k]})
4     return (J, (R_i, lambda_i)_{i \in [k]})
```

## Complexidade

O algoritmo `phase1` tem consumo de tempo em  $O(|V||A|)$ . A sequência devolvida tem comprimento  $k \leq 2|V| - 1$ . Assim, o consumo de tempo de `phase2_v2` está em  $O(|V|\lg|V|)$ . Logo, o consumo de tempo de `frankv1` está em  $O(|V|(\lg|V| + |A|))$ .

# 5 Chu–Liu–Edmonds vs. Frank

Neste capítulo, apresentamos uma análise comparativa entre os algoritmos de Chu–Liu–Edmonds e András Frank para o problema da arborescência geradora de peso mínimo. Ambas metodologias são equivalentes e resolvem o mesmo problema, mas adotam estratégias distintas na redução de pesos e na construção da solução.

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds ([CHU; LIU, 1965](#); [EDMONDS, 1967](#)) opera recursivamente selecionando para cada vértice  $v \neq r$  um arco de entrada de peso mínimo, contraindo ciclos detectados e ajustando pesos, até eliminar todos os ciclos.

O algoritmo de Frank ([FRANK, 1981](#); [FRANK; HAJDU, 2014](#)) também reduz pesos subtraindo o mínimo de entrada, mas identifica *subconjuntos minimais* via componentes fortemente conexas, processando múltiplos vértices simultaneamente. Opera em duas fases: (i) redução até criar arcos de peso reduzido zero e (ii) construção da arborescência a partir desses arcos.

A seguir, apresentamos os experimentos empíricos que avaliam o comportamento prático dessas metodologias em termos de tempo de execução, consumo de memória e características estruturais dos digrafos processados. Vale salientar que este trabalho não tem como objetivo explorar otimizações específicas, mas sim o comportamento dos algoritmos em sua forma clássica.

## 5.1 Análise comparativa dos algoritmos

Conduzimos 2000 experimentos em digrafos aleatórios construídos a partir de uma raiz  $r$  com quantidade de vértices  $|V| \in [101, 4996]$  (mediana 2464), número de arestas  $|A|$  proporcional ao número de vértices com densidade média de  $1,98|V|$  arcos e pesos inteiros associados  $\in [1, 50]$ . Para cada instância, executamos Chu–Liu/Edmonds e as duas fases de András Frank com duas versões v1 e v2 para a Fase II, sendo a v2 uma versão otimizada utilizando fila de prioridade - *heap*.

Os 2000 testes confirmaram que todos os métodos retornam sempre o mesmo peso, validando a corretude das implementações e a equivalência teórica entre Chu–Liu/Edmonds e Frank. Além disso, as verificações da condição de optimalidade dual foram bem-sucedidas em todos os casos para ambas as variantes de Frank.

Quanto ao desempenho temporal, a Fase I de Frank apresenta tempo mediano de 8,93 s (média 12,40s), significativamente superior ao tempo mediano de Chu–Liu/Edmonds (0,25s, média 0,58s). A Fase I, responsável pela identificação de subconjuntos minimais via componentes fortemente conexas, domina o tempo total de execução do método de Frank. A Fase II, em contrapartida, representa uma fração residual do

processamento com mediana de 0,98s para versão 1 do algoritmo e 0,016s para a versão 2.

As Figuras 24–29 apresentam os resultados experimentais.

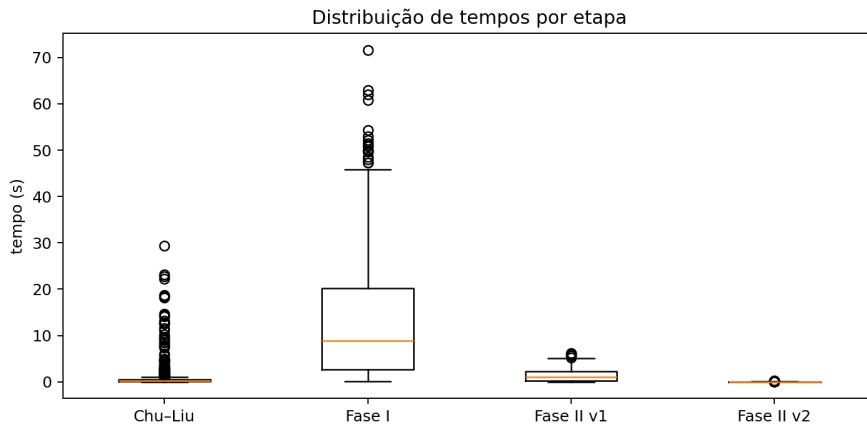


Figura 24 – Distribuição de tempos: Fase I apresenta maior mediana (8,93s) e variabilidade que Chu–Liu/Edmonds (0,25s).

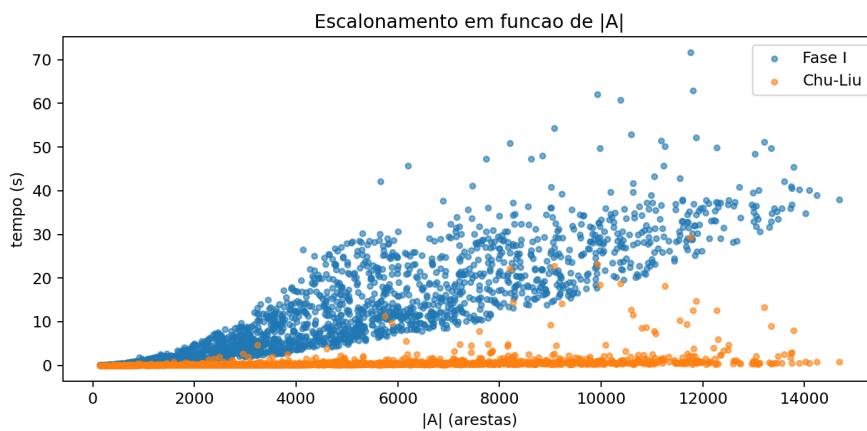


Figura 25 – Escalonamento temporal em função de  $|A|$ : crescimento aproximadamente linear.

A comparação entre as duas variantes da Fase II revela ganho expressivo com o uso de *heap*. A Figura 26 apresenta essa comparação em dois painéis: à esquerda, o boxplot evidencia a diferença de magnitude entre os tempos de execução — enquanto v1 (lista) apresenta mediana de 0,98s, a versão v2 (heap) reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração (*speedup*) mostra distribuição com mediana de 58,12 vezes e média de 61,30 vezes, com metade das instâncias apresentando aceleração entre 28 e 91 vezes (intervalo interquartil). Esses resultados confirmam empiricamente a vantagem da estrutura de dados com complexidade  $O(\log n)$  versus  $O(n)$  por operação de seleção de mínimo.

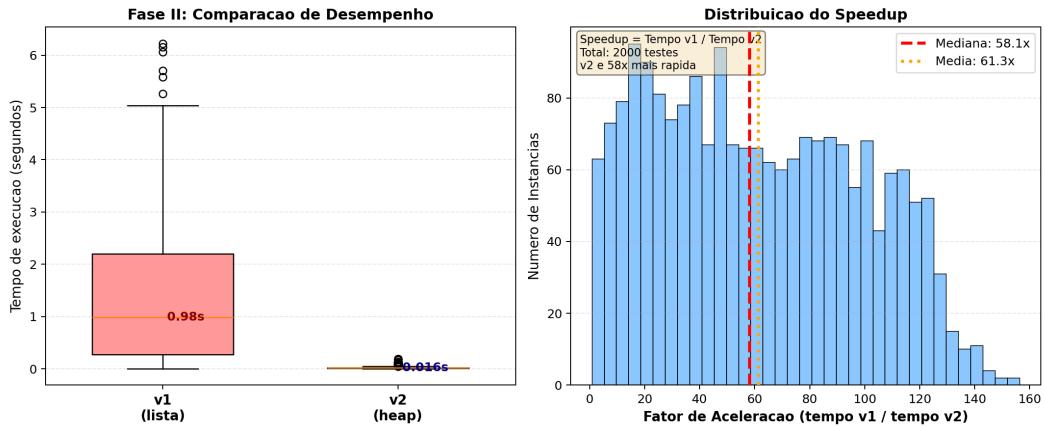


Figura 26 – Comparação de desempenho entre implementações da Fase II. À esquerda, o gráfico de boxplot mostra a distribuição de tempo da *v1* do algoritmo com mediana de 0,98s enquanto *v2* reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração (*speedup*) mostra a distribuição concentrada entre 40 e 80 vezes, com mediana de 58,12 vezes (linha tracejada vermelha) e média de 61,30 vezes (linha pontilhada laranja).

As métricas estruturais do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds são apresentadas na Figura 27 em dois histogramas. O painel esquerdo mostra que o número de contrações é pequeno (mediana 2, média 6,82, máximo 406), com a grande maioria das instâncias requerendo menos de 20 contrações. O painel direito exibe a profundidade de recursão, que acompanha o número de contrações.

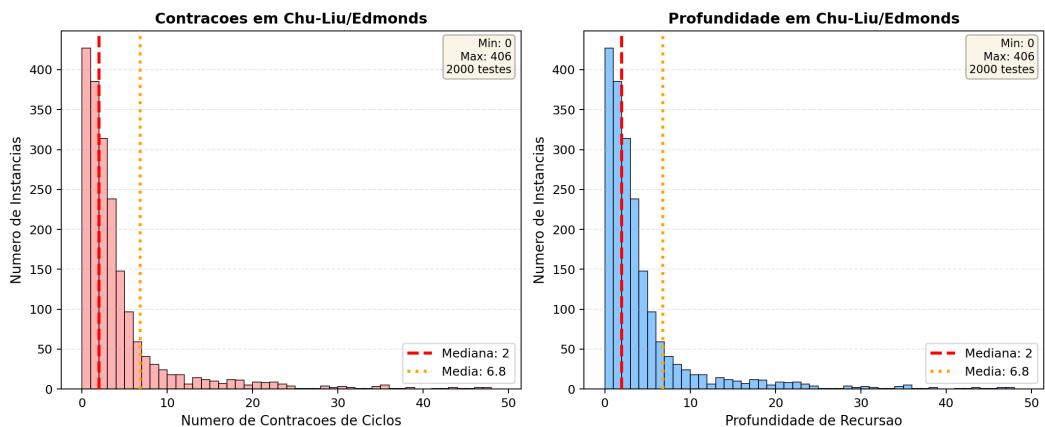


Figura 27 – Métricas estruturais de Chu–Liu/Edmonds. À esquerda, o histograma vermelho mostra que o número de contrações (eixo horizontal) é concentrado em valores baixos — a maioria das 2000 instâncias (eixo vertical) requer menos de 20 contrações, com mediana 2 (linha tracejada) e média 6,82 (linha pontilhada). À direita, o histograma azul da profundidade de recursão exibe padrão similar.

O consumo de memória na Fase I mantém-se modesto (mediana 11,5 MB, média 14,8 MB), viabilizando a aplicação dos algoritmos mesmo em ambientes com recursos

limitados.

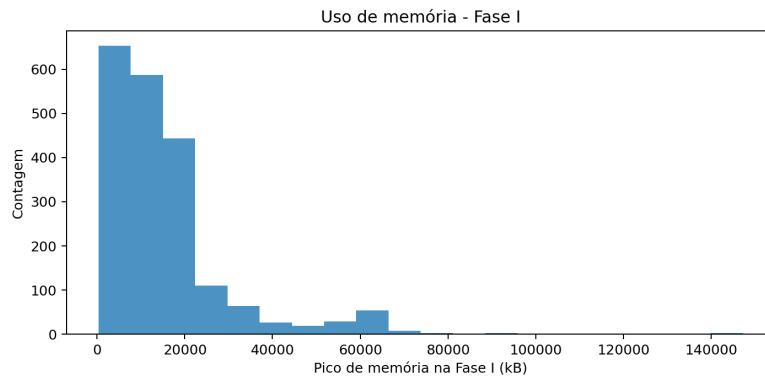


Figura 28 – Pico de memória na Fase I: mediana 11,5 MB.

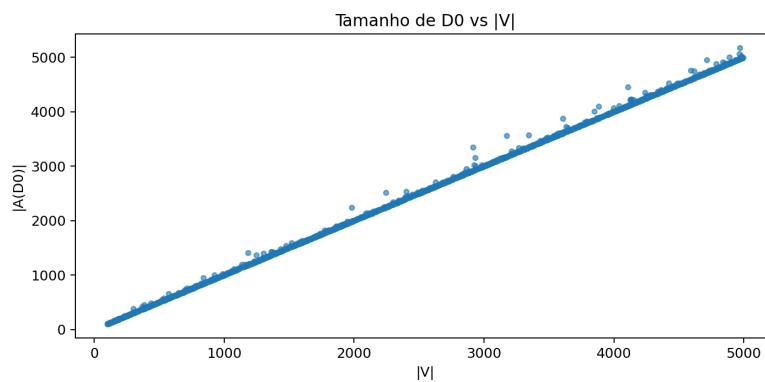


Figura 29 – Tamanho de  $D_0$  versus  $|V|$ : relação linear confirma  $|A_0| = O(|V|)$ .

## 5.2 Conclusões

Os experimentos validam empiricamente as previsões teóricas e revelam características importantes do comportamento prático dos algoritmos. A equivalência de pesos é verificada em todas as 2000 instâncias, somada à verificação bem-sucedida das condições de otimalidade dual.

Chu–Liu/Edmonds demonstra-se mais eficiente para construção direta de arborescências nas instâncias aleatórias testadas (mediana 0,25s, média 0,58s), enquanto o método de Frank apresenta tempo adicional significativo na Fase I (mediana 8,93s, média 12,40s) devido ao processamento de subconjuntos minimais via componentes fortemente conexas. A versão heap da Fase II valida os ganhos assintóticos esperados, com aceleração de 58,12 vezes (mediana) sobre a versão linear, demonstrando que melhorias algorítmicas fundamentais se traduzem em benefícios práticos mensuráveis.

Observamos também que o comportamento em digrafos aleatórios mostra que o número de contrações observado tem mediana 2 e média 6,82 e o subgrafo  $D_0$

mantém razão  $|A_0|/|V_0| \approx 1,00$ . O consumo modesto de memória (mediana 11,5 MB) e a escalabilidade observada viabilizam a aplicação prática de ambos os métodos em contextos com recursos computacionais limitados.

Compreender os algoritmos teoricamente e validá-los empiricamente é fundamental, mas como transformar esse conhecimento em aprendizagem efetiva? Desenvolvemos uma aplicação *web* que permite acompanhar passo a passo o funcionamento de ambos os algoritmos de forma visual e interativa. O próximo capítulo discute os fundamentos didáticos que orientaram esse design.

# 6 A Didática do Abstrato

Thomás de Aquino, em sua obra *De veritate*, argumenta que o conhecimento humano começa com a percepção sensorial do mundo concreto, mas alcança sua plenitude ao transcender o particular e abraçar o universal através da abstração. Esse processo de abstração é fundamental para a matemática e a ciência da computação, onde conceitos complexos são frequentemente representados por meio de símbolos e estruturas que vão além da experiência direta.

Grafos e digrafos são simultaneamente concretos (nós e arestas) e abstratos (propriedades globais como cortes e conectividade). Essas noções exigem transitar entre níveis de representação (intuitivo, visual, simbólico, formal) (TALL, 1991), o que pode ser desafiador. A abstração é poderosa, mas também pode ser uma barreira: conceitos como “complementaridade primal–dual” podem ser difíceis de visualizar e internalizar sem apoio didático adequado.

Então, como ensinar e aprender conceitos abstratos de forma eficaz? O ensino de matemática no ensino superior, especialmente em áreas como teoria dos grafos parecem sofrer com dificuldades específicas. A seguir, discutimos essas dificuldades e como o uso de ferramentas visuais e interativas pode ajudar a superá-las.

## 6.0.1 Fundamentos cognitivos e didáticos

O ensino de matemática no ensino superior exige transitar entre registros de representação (intuitivo, visual, simbólico, formal) com intencionalidade didática (TALL, 1991). À luz da teoria da carga cognitiva, é útil distinguir: (i) a *carga intrínseca*, determinada pela complexidade dos esquemas a construir e pelos pré-requisitos ativados; (ii) a *carga extrínseca*, criada pela forma de apresentação; e (iii) a *carga pertinente (germane)*, isto é, o esforço dedicado à organização e automatização de esquemas (SWELLER, 1988). Em cursos avançados, a extrínseca cresce quando definições, símbolos e figuras não são co-referenciados no tempo e no espaço, dificultando a coordenação entre o que se lê, o que se vê e o que se infere.

Aprender conteúdos de alta abstração envolve lidar com sobrecarga cognitiva intrínseca e extrínseca (SWELLER, 1988). Diretrizes de aprendizagem multimídia indicam que combinar representações verbais e visuais pode reduzir carga desnecessária e favorecer integração semântica (MAYER, 2009; PAIVIO, 1990). Em matemática avançada, a transição entre níveis de representação (intuitivo, formal, simbólico) exige mediação cuidadosa (TALL, 1991) e atenção a como exemplos, contraexemplos e invariantes são apresentados.

No caso específico de algoritmos com provas baseadas em teorias mais comple-

xas, é frequente que estudantes compreendam os passos operacionais sem internalizar a estrutura teórica que garante correção e otimalidade.

### 6.0.2 Lidando com grafos e digrafos

Na prática, o principal obstáculo para o ensino de digrafos não está na definição de vértices e arcos, mas na articulação entre as operações realizadas nessas estruturas, os algoritmos que as exploram e as provas de correção que os fundamentam. No contexto desta dissertação, isso inclui compreender as arborescências de custo mínimo e os métodos clássicos de Chu–Liu/Edmonds e de Frank. Quando essa articulação não é explicitada, observa-se um aumento simultâneo da *carga intrínseca* (intrínseca devido às múltiplas dependências conceituais) e da *carga extrínseca* (decorrente do esforço de coordenar texto, fórmulas e representações gráficas)

A partir de uma análise reflexiva sobre o próprio processo de aprendizado das autoras, foi possível mapear onde a compreensão falha ou se torna nebulosa. Essas impressões pessoais permitiram sistematizar as dificuldades em três eixos didáticos principais, discutidos a seguir.

(1) Articulação entre decisões locais e coerência global. A articulação entre decisões locais e a integridade global da solução é um ponto crítico em ambos os métodos. Isso fica evidente na seleção da menor aresta de entrada para cada vértice: uma estratégia que parece intuitiva, mas que é enganosa. Escolhas localmente ótimas podem introduzir ciclos, violando a coerência global necessária para uma arborescência. O obstáculo principal está na crença equivocada de que regras de decisão simples e locais resultam automaticamente em uma solução global válida

(2) Acompanhamento dos efeitos de contração e expansão. Um segundo obstáculo central é o gerenciamento das mudanças estruturais e numéricas durante o algoritmo. Métodos de contração de ciclos exigem que o estudante transite mentalmente entre três estados distintos: o grafo original, a versão condensada (onde ciclos tornam-se super-vértices) e a reexpansão final. O desafio não é apenas visual; cada contração altera os custos reduzidos das arestas e redefine quais cortes permanecem ativos. A dificuldade típica ocorre quando se perde a "rastreabilidade" entre essas visões: o aprendiz esquece que uma aresta escolhida no grafo condensado corresponde a uma aresta específica no original, mas com um custo modificado. Sem explicitar o que muda e o que se mantém invariante, o processo torna-se uma "caixa preta", onde o aluno segue passos mecanicamente sem compreender a conexão entre a solução do grafo menor e a do grafo maior.

(3) Relação entre a execução do algoritmo e a formulação primal–dual. Aqui o desafio reside na interpretação teórica das ações mecânicas. Passos operacionais, como contrair ciclos, possuem significados precisos na análise Primal-Dual, que é o motor que garante a otimalidade da solução. No entanto, essa correspondência raramente é

óbvia para o aprendiz. A dificuldade emerge quando o estudante executa o algoritmo como uma "receita de bolo", sem perceber que cada ação está, na verdade, manipulando variáveis duais para tornar restrições "justas" (tight). Explicitar esses vínculos é fundamental: o aluno precisa entender que modificar um custo no desenho do grafo não é apenas um truque aritmético, mas a atualização de um certificado de otimalidade que valida a resposta final.

### 6.0.3 Visualização e interação: princípios em uso

Há evidências de que diagramas e animações, quando bem projetados, podem acelerar a compreensão de relações topológicas e causais ([LARKIN; SIMON, 1987](#); [WARE, 2012](#)).

A teoria da carga cognitiva sugere que combinar representações verbais e visuais pode reduzir *carga extrínseca* e favorecer integração semântica ([MAYER, 2009](#); [PAIVIO, 1990](#)). Diretrizes de aprendizagem multimídia recomendam evitar excesso de elementos visuais que não contribuam para o entendimento (reduzindo carga extrínseca) e alinhar texto e imagens no tempo e no espaço (reduzindo esforço de coordenação) ([MAYER, 2009](#)).

No campo específico de matemática avançada, Tall enfatiza a coordenação entre registros — intuitivo, visual, simbólico e formal — como motor da passagem do pensamento predominantemente procedural para o conceitual ([TALL, 1991](#)). Diagramas não são meros adornos: estruturam inferências espaciais e relacionais de modo mais eficiente que sentenças lineares ([LARKIN; SIMON, 1987](#)).

De modo convergente, pesquisas em educação em ciência da computação apontam que visualizações de algoritmos só se traduzem em melhora de aprendizagem quando ativam processos mentais do estudante, promovendo previsão, manipulação e explicação, em vez de mera observação passiva ([HUNDHAUSEN et al., 2002](#); [NAPS et al., 2003](#)). Assim, tanto na matemática quanto na computação, o poder das visualizações reside menos no formato gráfico em si e mais na forma como elas integram e articulam o raciocínio.

Esses princípios orientaram o desenvolvimento do sistema interativo criado neste trabalho. A ferramenta permite visualizar e manipular digrafos, acompanhar a execução passo a passo dos métodos de Chu-Liu/Edmonds e de Frank e alternar entre representações essenciais ao entendimento dos algoritmos: o grafo original, as contrações de ciclos, os custos reduzidos e as reexpansões. Ao concentrar em um único ambiente a estrutura gráfica, as operações do algoritmo e sua justificativa conceitual, a ferramenta busca reduzir a carga extrínseca e facilitar a construção de esquemas mentais integrados.

## 6.1 O ecossistema de ferramentas

Materiais que articulam teoria, evidências empíricas e interatividade tendem a favorecer transferência e retenção. Com base nesses fundamentos, realizamos um levantamento de ferramentas digitais relevantes para o ensino de grafos e digrafos, buscando mapear soluções existentes, suas finalidades e limitações. Esse mapeamento permitiu identificar tanto o espaço de possibilidades quanto lacunas específicas que motivaram o desenvolvimento da aplicação proposta neste trabalho.

De modo geral, ferramentas digitais podem reduzir carga extrínseca e facilitar a integração entre registros visual, simbólico e formal quando a interação é projetada para promover engajamento ativo ([MAYER, 2009](#); [SWELLER, 1988](#); [HUNDHAUSEN et al., 2002](#); [NAPS et al., 2003](#)). No entanto, as abordagens disponíveis atualmente distribuem-se em diferentes categorias, cada qual cobrindo apenas parte das necessidades envolvidas no ensino de algoritmos para arborescências.

A seguir, descrevemos quatro categorias de ferramentas digitais que podem apoiar o ensino de grafos e digrafos, indicando para cada uma suas forças, limitações e exemplos representativos: (i) diagramas programáveis e tipografia matemática; (ii) exploração e edição de grafos; (iii) visualização de algoritmos; e (iv) ambientes programáveis e reproduzibilidade.

As ferramentas da primeira categoria permitem criar diagramas de grafos com semântica visual consistente, integrando-os a textos matemáticos. Essas ferramentas são úteis para ilustrar conceitos, definições e provas em materiais didáticos. Existem uma série de benefícios didáticos como semântica visual estável (mesmo conceito, apresentado da mesma forma), autoria próxima ao símbolo e ao texto (co-referência) e manutenção e versionamento fáceis. Podemos levantar como limitações o fato de que as interações costumam ser offline (figuras estáticas) e a curva de aprendizado de sintaxe pode ser um obstáculo inicial. Em contextos de prova e definição, esses recursos ancoram a narrativa formal com diagramas que obedecem às diretrizes de ([LARKIN; SIMON, 1987](#); [WARE, 2012](#)).

Já ferramentas de exploração e edição de grafos permitem que os usuários interajam com representações gráficas de dados, facilitando a manipulação e a análise de estruturas complexas. Essas ferramentas são essenciais para atividades que exigem uma compreensão profunda das relações entre os elementos de um grafo. Elas são adequadas para: reconhecer padrões estruturais (componentes, comunidades), discutir implicações de layouts para percepção de estruturas, atividades de descoberta assistida (“*overview → filter → details*”) ([SHNEIDERMAN, 1996](#)). Porém existem algumas limitações, como o fato dessas ferramentas serem focadas para análise exploratória de dados, não em algoritmos específicos, alta carga extrínseca ao alternar entre interface gráfica e conceitos teóricos, além falta de controle fino sobre estados intermediários de

algoritmos.

Sobre as ferramentas de visualização de algoritmos, elas são projetadas para ilustrar o funcionamento interno de algoritmos através de animações e representações gráficas. Essas ferramentas são particularmente eficazes para demonstrar processos dinâmicos e mudanças de estado ao longo do tempo. Evidências sugerem ganhos quando o estudante prevê, manipula e explica o que vê, ao invés de consumir animações passivamente. ([HALIM et al., ; HUNDHAUSEN et al., 2002; NAPS et al., 2003](#))

Ainda temos ferramentas em ambientes programáveis, elas são valiosas para criar exemplos reprodutíveis e explorar algoritmos de forma prática. Contudo, requerem familiaridade com programação e podem introduzir carga extrínseca se o foco se desviar para detalhes de implementação. A curadoria do conteúdo é essencial para manter o foco didático e evitar dispersão.

A Tabela 1 sumariza as categorias discutidas, com suas forças, limitações e exemplos representativos.

Categoría	Forças	Limitações	Exemplos
Diagramas programáveis e tipografia matemática	Semântica visual estável; co-referência entre texto e diagrama; manutenção e versionamento fáceis; layouts consistentes.	Interação offline; curva de aprendizado de sintaxe; pouco adequadas para representar dinâmica de algoritmos.	<i>Graphviz/dot;</i> <i>TikZ/PGF</i>
Exploração e edição de grafos	Layouts automáticos; suporte a filtros e métricas; adequadas para investigar padrões estruturais e relações complexas.	Foco maior em análise do que em algoritmos; alternância entre interface gráfica e conceitos teóricos aumenta carga extrínseca; pouco controle sobre estados intermediários.	<i>Gephi;</i> <i>yEd;</i> <i>Cytoscape</i>
Visualização de algoritmos	Explica transformações dinâmicas; eficaz para raciocínio procedural; ganhos quando o estudante prevê, manipula e explica o que vê.	Pode induzir consumo passivo; limita personalização e integração com código.	<i>VisuAlgo;</i> repositórios de animações de algoritmos
Ambientes programáveis e reprodutilidade	Alta flexibilidade; integra código, texto e visualizações; ideal para exploração prática e criação de exemplos reprodutíveis.	Exige familiaridade com programação; risco de dispersão em detalhes técnicos; requer curadoria didática.	<i>Jupyter Notebooks;</i> <i>NetworkX</i>

Tabela 1 – Síntese das categorias de ferramentas digitais para o ensino de grafos e digrafos.

Esse levantamento mostra que, embora existam soluções robustas em cada categoria, nenhuma delas integra de forma unificada a visualização de algoritmos, a manipulação direta do grafo com acesso aos estados intermediários (como contrações, custos reduzidos e reexpansões) e a coordenação entre a representação visual e a explicação conceitual subjacente. Diante dessas lacunas, desenvolvemos uma aplicação web interativa que combina visualização algorítmica e manipulação gráfica, com foco específico nos procedimentos que compõem a construção de arborescências de custo mínimo.

Na seção seguinte, apresentamos os princípios de interação humano–computador que orientaram esse design e detalhamos como a aplicação se posiciona no ecossistema identificado.

# 7 A interação humano–computacional em ação: uma aplicação *web* interativa

Discutimos até aqui fundamentos teóricos dos algoritmos, análises de complexidade, resultados empíricos e princípios pedagógicos que justificam o uso de ferramentas interativas. Estabelecemos *o quê* ensinar (Chu–Liu/Edmonds e Frank), *por quê* usar visualizações (redução de carga cognitiva, engajamento ativo).

O passo seguinte consiste em transformar essas diretrizes em uma solução concreta. A aplicação *web* desenvolvida busca materializar os princípios apresentados, integrando escolhas didáticas e heurísticas de IHC em uma interface que favorece exploração gradual, leitura orientada e compreensão progressiva. Assim, passamos do plano conceitual para o plano operacional: *como* traduzir teoria e princípios pedagógicos em decisões de design.

Mas antes de fundamentar os conceitos de design utilizados iremos apresentar o objetivo da aplicação, sua estrutura e principais funcionalidades, bem como o fluxo de interação proposto para os usuários.

## 7.1 Descrição da aplicação

A aplicação *web* foi concebida como uma ferramenta educacional interativa para auxiliar na compreensão dos algoritmos de Chu–Liu–Edmonds e András Frank para a construção de  $r$ -arborescências dirigidas de custo mínimo. Seu principal objetivo é permitir que estudantes e pesquisadores explorem visualmente o funcionamento desses algoritmos, acompanhando passo a passo suas operações em grafos dirigidos.

### 7.1.1 Estrutura e Funcionalidades

A aplicação organiza-se em módulos funcionais projetados para atender aos objetivos didáticos do projeto, distribuídos em três eixos principais de navegação. O primeiro eixo, dedicado à visualização algorítmica, reúne três páginas focadas na execução passo a passo dos métodos estudados. Uma delas apresenta o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds, enquanto as outras duas exploram diferentes implementações do algoritmo de Frank. Nessas páginas, o sistema mostra as iterações de forma sequencial, evidencia as alterações visuais no grafo e exibe o resultado final da  $r$ -arborescência.

O segundo eixo corresponde à modelagem livre, disponibilizando uma interface

de edição em formato de sandbox na qual o usuário pode desenhar grafos arbitrariamente. Esse espaço oferece liberdade para experimentar diferentes topologias e estruturas, permitindo testar hipóteses além dos exemplos previamente definidos.

Por fim, o terceiro eixo concentra-se na disseminação científica, reunindo uma página informativa dedicada à divulgação da dissertação e do projeto. Seu propósito é contextualizar a ferramenta, esclarecer as motivações de seu desenvolvimento e servir como canal de difusão do conhecimento teórico acerca dos algoritmos implementados.

### 7.1.2 Fluxo de interação

O fluxo de interação foi projetado para ser linear e intuitivo, guiando o usuário desde a criação do grafo até a visualização dos resultados do algoritmo. O fluxo típico é o seguinte: primeiro o usuário monta ou carrega um grafo de teste; em seguida, define (ou confirma) o vértice raiz  $r_0$ ; depois, executa o algoritmo, aplicando normalizações e seleção de arestas conforme implementado; então, observa os estados sequenciais gerados, onde cada snapshot reforça invariantes como arestas escolhidas, pesos e estrutura alcançada; por fim, o usuário pode optar por exportar o grafo resultante para replicação em notebooks ou comparação com a abordagem dual futura.

Além disso, o log textual funciona como uma *trilha de auditoria didática*. Cada ação do usuário (adição de aresta, definição de raiz, execução de passo) atualiza o grafo e o log, permitindo rastrear a evolução do estado. A exportação em JSON facilita a reimportação e análise posterior.

### 7.1.3 Arquitetura do Sistema

A arquitetura da aplicação foi projetada para operar integralmente no lado do cliente (*client-side*), utilizando o navegador como ambiente de execução para o código Python via WebAssembly. O sistema estrutura-se em três camadas lógicas principais:

- **Camada de Apresentação:** Responsável pela interface com o usuário, estruturada em HTML5, estilizada com o *framework* utilitário Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript. Esta camada gerencia a entrada de dados, a interatividade dos elementos e a exibição dos resultados, mantendo a responsividade em diferentes dispositivos.
- **Núcleo de Processamento (PyScript):** Atua como a ponte entre a interface *web* e as bibliotecas científicas. O PyScript permite a importação e execução de módulos Python diretamente no DOM. O processamento dos grafos é realizado pela biblioteca NetworkX, enquanto a geração das representações visuais estáticas (snapshots) é delegada ao Matplotlib.

- **Camada de Dados e Persistência:** A troca de informações entre o editor livre e os algoritmos utiliza o formato JSON (*JavaScript Object Notation*). Os grafos são serializados no padrão `node_link`, permitindo a representação leve de nós, arestas e atributos (pesos e custos) para armazenamento local ou transferência entre módulos.

Esta organização modular assegura que cada página carregue apenas os *scripts* necessários para sua função específica, otimizando o tempo de carregamento e o consumo de recursos do navegador.

## 7.2 Princípios de interação humano-computador

A Interação Humano-Computador (IHC) orienta o design de sistemas para que sejam, simultaneamente, eficientes, eficazes e agradáveis ao usuário. Nesse contexto, promovemos uma síntese entre heurísticas clássicas de usabilidade (NIELSEN, 1994; SHNEIDERMAN et al., 2016) e teorias de aprendizagem e carga cognitiva (ROGERS et al., 2011; MAYER, 2009; SWELLER, 1988; NAPS et al., 2003), resultando em oito princípios norteadores: (i) usabilidade, (ii) eficiência cognitiva, (iii) feedback imediato, (iv) engajamento ativo, (v) visão geral com detalhe sob demanda (o mantra overview → filter → details de (SHNEIDERMAN, 1996)), (vi) consistência semântica, (vii) múltiplos registros de representação e (viii) prevenção e recuperação de erros. A seguir, detalhamos cada princípio e sua operacionalização na ferramenta.

Começamos pela usabilidade, que refere-se à facilidade com que os usuários podem aprender a usar um sistema, realizar tarefas e alcançar seus objetivos. Na nossa aplicação, priorizamos uma interface limpa e intuitiva, com controles claros para navegar pelos passos dos algoritmos, selecionar arestas, visualizar cortes ativos e entender a evolução dos custos reduzidos.

Essa clareza se conecta diretamente à eficiência cognitiva, que envolve minimizar a carga cognitiva dos usuários, facilitando a compreensão e o processamento de informações. Implementamos visualizações que destacam mudanças importantes (como contrações e expansões) e fornecem explicações textuais concisas para cada passo, ajudando os usuários a conectar ações com conceitos teóricos.

A medida que o usuário interage com o sistema, o feedback imediato garante que os usuários informados sobre o estado do sistema e as consequências de suas ações. Nossa ferramenta oferece feedback visual e textual em tempo real, mostrando como cada ação afeta o grafo e os custos associados, reforçando a compreensão causal.

Esses elementos favorecem o engajamento ativo, que refere-se à participação dos usuários no processo de aprendizagem, incentivando-os a explorar, experimentar e interagir com o sistema. Nossa aplicação promove o engajamento ativo ao permitir que

os usuários manipulem o grafo, testem diferentes abordagens e visualizem os resultados de suas ações em tempo real, além de acessar descrições passo a passo da execução dos algoritmos.

Para orientar essa exploração sem sobrecarregar o usuário, aplicamos o princípio de visão geral com detalhe sob demanda que permite que os usuários obtenham uma compreensão ampla do sistema, enquanto ainda têm acesso a informações detalhadas quando necessário. Implementamos essa abordagem ao fornecer uma visualização geral do grafo, com a opção de expandir informações sobre arestas e nós específicos conforme o interesse do usuário.

A navegação entre essas diferentes camadas da interface é apoiada pela consistência semântica, que garante que os elementos da interface e suas interações sejam comprehensíveis e previsíveis. Nossa ferramenta mantém a consistência semântica ao usar terminologia e representações visuais padronizadas em toda a aplicação, facilitando a compreensão dos usuários.

Além disso, adotamos o conceito de múltiplos registros de representação, que referem-se à capacidade de apresentar informações de diferentes maneiras, atendendo às preferências e estilos de aprendizagem dos usuários. Na nossa aplicação oferecemos várias representações do grafo (visual, textual, interativa), permitindo que os usuários escolham a forma que melhor se adapta às suas necessidades.

Por fim, implementamos conceitos de prevenção de erros, que envolve projetar o sistema de forma a minimizar a probabilidade de erros dos usuários. Em nosso sistema garantimos feedback em tempo real, para ajudar os usuários a evitar ações indesejadas e compreender melhor as consequências de suas escolhas.

Esses princípios de interação humano-computador foram fundamentais para o desenvolvimento da nossa aplicação *web* interativa, garantindo que ela seja não apenas funcional, mas também acessível e eficaz como ferramenta de aprendizagem. A seguir, detalhamos a implementação técnica da aplicação e como ela se posiciona no ecossistema de ferramentas didáticas para o ensino de grafos.

Princípio	Exemplo Geral	Materialização na Aplicação
Usabilidade	Botões claros para avançar/- voltar etapas	Barra de controles com rótulos diretos (Adicionar Aresta, Executar, Reset); agrupamento visual consistente via Tailwind; nenhum menu profundo aninhado.
Eficiência cognitiva	Reducir elementos irrelevantes no estado atual	Layout estável entre passos; apenas arestas relevantes destacadas; eliminação de ornamentação visual; custos e rótulos legíveis sem rotação.
Feedback imediato	Mostrar efeito de uma ação logo após o clique	Cada ação dispara: (i) atualização do desenho do grafo, (ii) entrada no log textual explicando a mudança (ex.: contração, seleção de aresta).
Engajamento ativo	Usuário prediz antes de revelar próximo passo	Controles passo a passo permitem explorar sequencialmente; usuário insere/edita pesos e escolhe raiz antes de rodar o algoritmo.
Visão geral→ Detalhes	Visão global com acesso a informação pontual	Visão completa do grafo em todos os passos + possibilidade de inspecionar pesos e arestas específicas no log sequencial; estados anteriores preservados para comparação mental.
Consistência semântica	Mesmo conceito, mesma cor/ forma	Raiz destacada de forma fixa; arestas selecionadas mantêm estilo; semântica cromática não muda entre passos (evita remapeamento mental).
Múltiplos registros	Texto + grafo + (futuro) estrutura derivada	Combinação de: descrição textual no log, representação visual do grafo, parâmetros simbólicos (pesos); prepara expansão futura para mostrar custos reduzidos.
Prevenção / recuperação de erros	Impedir entrada inválida / ação reversível	Validação de pesos (numéricos); bloqueio de execução sem raiz definida; botão Reset para recompor estado limpo sem recarregar página.

Tabela 2 – Síntese dos princípios de interação humano-computador aplicados e sua realização concreta na ferramenta interativa.

### 7.3 Detalhes de Implementação

A aplicação foi implementada utilizando tecnologias *web* modernas, com foco em simplicidade, modularidade e reprodutibilidade. A seguir, detalhamos os principais aspectos técnicos da implementação.

#### 7.3.1 Estrutura de arquivos

A estrutura de arquivos da aplicação é organizada em diretórios e componentes bem definidos. O diretório `scripts/` reúne os scripts Python e JavaScript responsáveis pela lógica da aplicação. O diretório `assets/` armazena imagens, ícones e demais recursos estáticos utilizados pela interface. As páginas HTML encontram-se no diretório `pages/`, estruturadas de forma modular para facilitar manutenção e extensão futura. Por fim, o arquivo `pyscript.json` contém as configurações necessárias ao funcionamento do PyScript no ambiente da aplicação.

#### 7.3.2 Páginas da Aplicação *web*

A seguir, apresentamos as páginas que compõem a ferramente desenvolvida.

### Home:

o arquivo `home.html` serve como a página inicial da aplicação, oferecendo uma visão geral do projeto, incluindo um resumo do trabalho e informações sobre os integrantes. A estrutura da página é projetada para ser acolhedora e informativa, utilizando Tailwind CSS para garantir uma aparência moderna e responsiva. Abaixo, apresentamos um exemplo de captura de tela da página.



Figura 30 – Captura de tela de `home.html`: visão geral com resumo e integrantes.

### Draw graph:

Editor de grafos livre com funcionalidades de criação, edição, importação e exportação. Ele constitui o segundo módulo que definimos na seção de [7.1.1 Utiliza Cytoscape.js para visualização interativa e PyScript para lógica algorítmica](#). Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

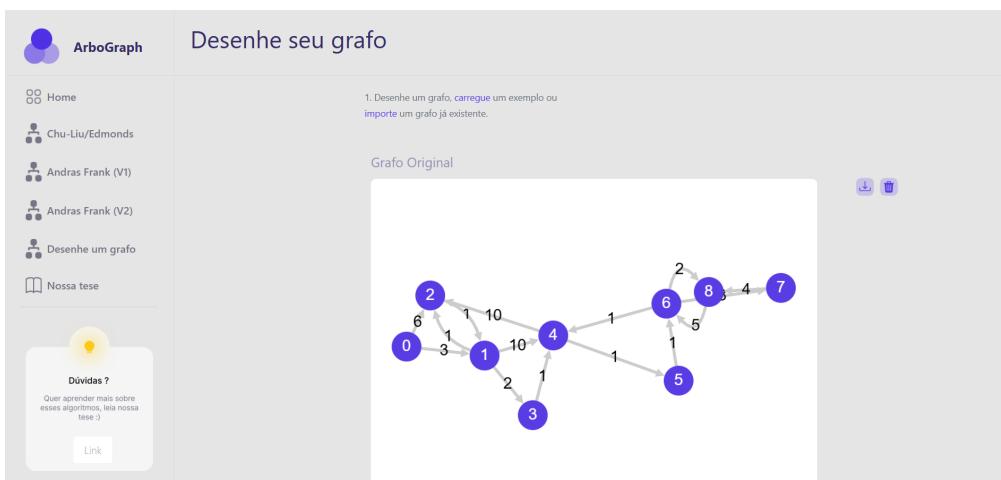


Figura 31 – Captura de tela de `draw_graph.html`: editor livre de grafos.

### Tese:

Essa página compõem o módulo 3 apresentado na seção 7.1.1, nela apresentamos nossa tese bem como permitimos o download da mesma, o intuito é permitir com que o usuário possa ter um entendimento maior tanto dos algoritmos quanto do nosso sistema.



Figura 32 – Captura de tela de `tese.html`: visão geral com resumo e integrantes.

### Chu-Liu-Edmonds:

página dedicada ao visualizador do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds. Inclui um passo a passo guiado para criar um grafo, selecionar o nó raiz e executar o algoritmo, com feedback visual e textual. Ela faz parte do primeiro módulo destacado na seção 7.1.1. Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

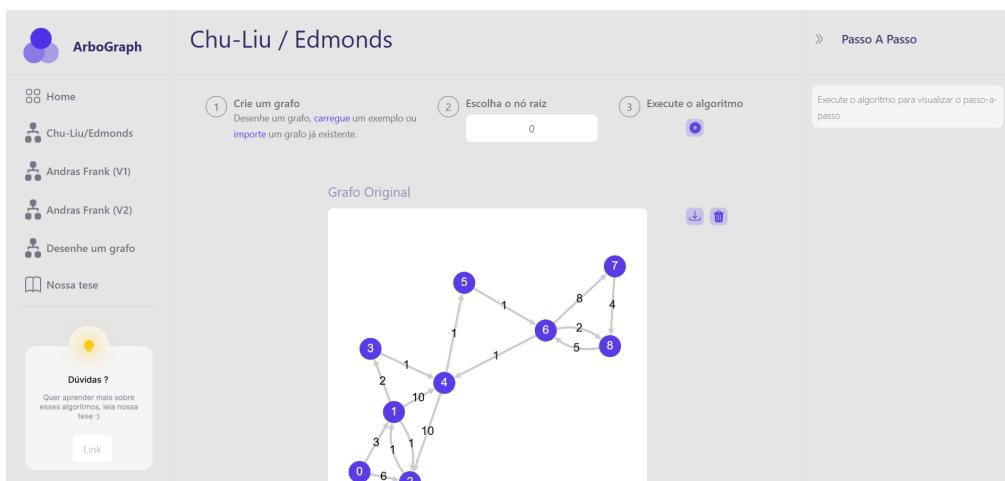


Figura 33 – Captura de tela de `chuliu.html`: criação de grafo, seleção de raiz e execução do algoritmo.

A figura a seguir destaca a tripartição funcional da página: navegação lateral,

conteúdo interativo central e guia de passos à direita.

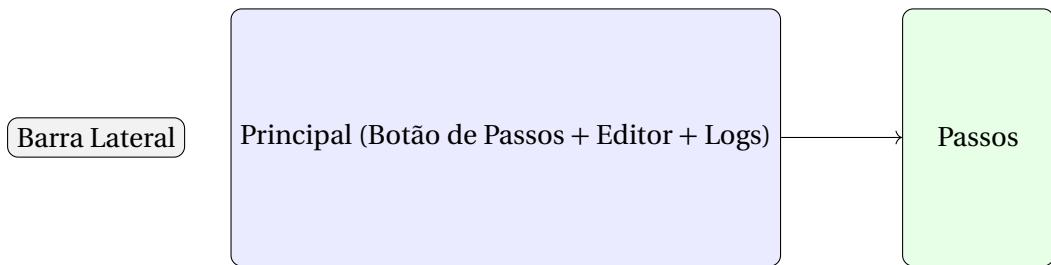


Figura 34 – Tripartição funcional (navegação, conteúdo interativo, guia de passos). A presença do passo a passo auxilia na compreensão sequencial do algoritmo.

### 7.3.3 Página do Andrasfrank (v1) e Andrasfrank (v2):

Ambas as páginas são dedicadas ao visualizador do algoritmo de Andras Frank (em suas diferentes implementações elucidadas em capítulos anteriores). Assim como na página dedicada ao algoritmo de Chu-Liu/Edmonds, essa página também faz parte do módulo 1 definido na seção 7.1.1 Além disso, ele inclui um passo a passo guiado para criar um grafo, selecionar o vértice raiz e executar o algoritmo, com feedback visual e textual. Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

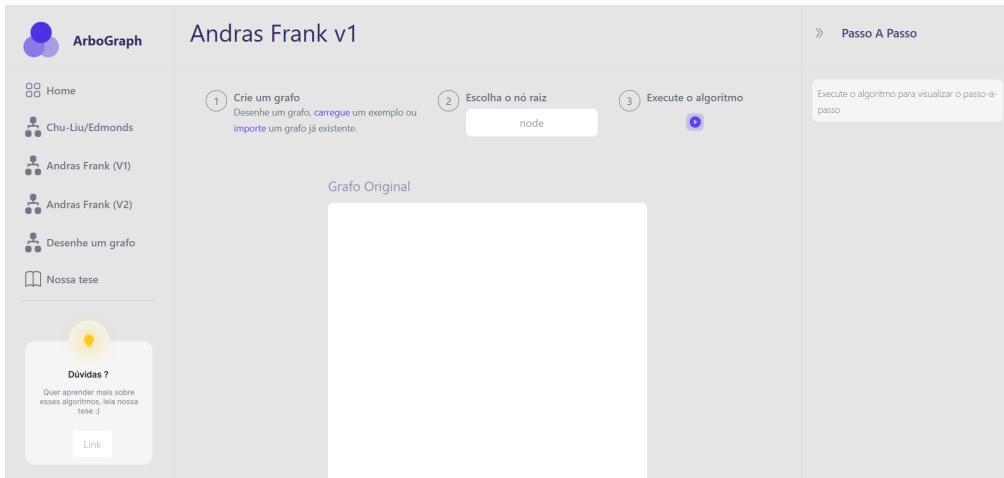


Figura 35 – Captura de tela de `andrasfrank_v1.html`: interface para o procedimento em duas fases, a tela da página `andrasfrank_v2.html` tem aparência similar.

Assim como na página do algoritmo de Chu-Liu/Edmonds (fig. 34) a página dedicadas às implementações do algoritmo do Andras Frank também utilização o padrão de tripartição funcional para manter consistência cognitiva entre páginas.

### 7.3.4 Estrutura das páginas

A estrutura das páginas da aplicação segue um padrão modular e reutilizável, facilitando a manutenção e extensão futura. Cada página é composta por três seções

principais: uma barra lateral de navegação, um conteúdo interativo central e um painel de passos à direita. Essa organização promove consistência cognitiva e facilita a navegação do usuário entre diferentes funcionalidades.

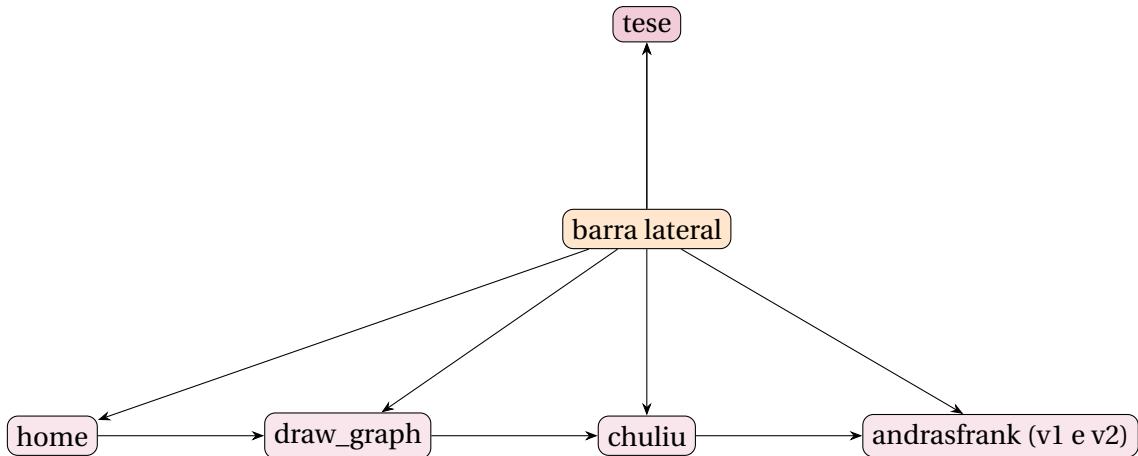


Figura 36 – A barra lateral injeta navegação consistente; páginas de algoritmo formam trilha exploratória.

A arquitetura modular e reutilizável das páginas *web* facilita manutenção, extensão e consistência. A barra lateral comum reduz esforço cognitivo ao navegar, enquanto o padrão tripartido de conteúdo interativo reforça familiaridade. A sequência lógica de páginas guia o usuário do contexto à experimentação e formalização, alinhando-se a princípios pedagógicos. Essa estrutura coesa apoia o aprendizado eficaz des conceitos de arborescências dirigidas e algoritmos associados.

## 7.4 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Este capítulo detalhou a implementação técnica do visualizador interativo de arborescências dirigidas, cobrindo desde a arquitetura *web* até a integração de algoritmos complexos. A escolha de tecnologias modernas como HTML5, CSS3, JavaScript e PyScript permitiu criar uma interface intuitiva e responsiva, facilitando a experimentação e a compreensão dos algoritmos de Chu–Liu/Edmonds e Andras Frank. A reutilização de padrões arquiteturais promoveu consistência cognitiva, enquanto a estrutura modular assegura a manutenção e a extensibilidade do projeto. Não obstante os resultados alcançados, a aplicação apresenta oportunidades de evolução para aprofundar a experiência didática. Atualmente, a ausência de uma visualização explícita da contração de ciclos e a falta de uma comparação lado a lado entre as abordagens de Chu–Liu e Frank limitam a clareza de certos processos. Para endereçar essas questões, planeja-se incorporar animações de contração com agrupamentos colapsáveis e desenvolver um módulo comparativo dedicado, incluindo uma extensão paralela para a abordagem primal–dual de Frank. No aspecto visual, o layout planar simples impõe restrições em instâncias den-

sas. A mitigação desse problema prevê a adoção de layouts adaptativos (como *spring* ou *dagre-like*) e a implementação de uma camada de sinalização cromática para custos reduzidos e arcos críticos ( $c' = 0$ ). Por fim, a funcionalidade de exportação será expandida para gerar relatórios automáticos (PDF/ZIP) que contemplem estados intermediários e métricas de desempenho, superando a limitação atual de exportar apenas os grafos inicial e final. No próximo capítulo, discutiremos as conclusões gerais da dissertação.

## 8 Conclusão

Ao final desta tese, refletimos sobre o ponto de chegada: o visualizador interativo de arborescências dirigidas. Este projeto foi concebido com o propósito de apresentar de forma didática os algoritmos envolvidos no problema da  $r$ -arborescência de custo mínimo.

Nessa trajetória, os fins não justificam os meios; pelo contrário, os meios pelos quais buscamos a solução, os algoritmos de Chu—Liu—Edmonds e o de Andras Frank, constituem o ponto central de discussão e a essência deste trabalho.

O algoritmo de Chu—Liu—Edmonds é um clássico da teoria dos grafos, com diversas aplicações práticas. Já o algoritmo de Andras Frank, embora menos conhecido, oferece uma abordagem elegante e eficiente para o mesmo problema, utilizando conceitos avançados de otimização combinatória. Ambos os algoritmos possuem complexidades e sutilezas que podem ser desafiadoras para estudantes e profissionais que buscam compreendê-los profundamente. Nesse contexto ressaltamos invariantes, cortes e custos reduzidos, e mostrando como escolhas locais se conectam a garantias globais de otimalidade. Procuramos menos descrever “o que o algoritmo faz” e mais explicitar “por que” cada passo se justifica, aproximando a mecânica operacional da linguagem primal–dual e de suas condições de complementaridade.

Os algoritmos foram implementados em Python, aproveitando bibliotecas como NetworkX para manipulação de grafos e Matplotlib para visualização. A escolha do Python se deve à sua sintaxe clara e à vasta gama de bibliotecas científicas disponíveis, facilitando tanto a implementação quanto a compreensão dos algoritmos. A integração com PyScript permitiu que esses algoritmos fossem executados diretamente no navegador, eliminando a necessidade de instalações complexas e tornando a ferramenta acessível a um público mais amplo. Os resultados foram validados através de testes com grafos de diferentes tamanhos e estruturas, garantindo a correção e eficiência das implementações.

A interface *web* foi projetada com foco na usabilidade e na experiência do usuário, utilizando HTML5, CSS3 e JavaScript para criar uma plataforma interativa e intuitiva obedecendo a princípios de design centrados no usuário orientados por princípios de interação humano-computacional. A estrutura modular da página permite fácil navegação entre diferentes seções, como a criação de grafos, a execução dos algoritmos e a visualização dos resultados. Elementos interativos, como botões, menus suspensos e áreas de desenho, foram incorporados para facilitar a interação do usuário com a ferramenta. A reutilização de padrões arquiteturais entre as páginas promoveu consistência cognitiva, enquanto a sequência lógica de páginas guia o usuário do contexto à

experimentação e formalização, alinhando-se a princípios pedagógicos orientados pela teoria da aprendizagem.

A partir desse desenvolvimento, o visualizador interativo de arborescências dirigidas se apresenta como uma ferramenta valiosa para estudantes, educadores e profissionais interessados em teoria dos grafos e algoritmos de otimização. A seguir destacamos algumas contribuições.

## 8.1 Contribuições

Este trabalho contribui para a interseção entre teoria dos grafos e design pedagógico, culminando no desenvolvimento de um visualizador interativo de arborescências dirigidas que promove a compreensão de algoritmos cruciais para o problema da  $r$ -arborescência de custo-mínimo.

A primeira e principal contribuição reside na integração detalhada de algoritmos complexos, como os de Chu–Liu–Edmonds e Andras Frank. A ferramenta não apenas implementa esses métodos, mas também destaca suas bases teóricas e operacionais, demonstrando como decisões locais se traduzem em garantias globais de otimalidade.

Este rigor teórico é complementado pelo design pedagógico da aplicação. Mediante a aplicação de princípios de Interação Humano-Computador (IHC) e de aprendizagem multimídia, o sistema foi desenhado para criar uma interface que facilita a compreensão de conceitos complexos, atuandoativamente na redução da carga cognitiva e promovendo o engajamento do usuário.

Tecnicamente, a contribuição se manifesta em uma arquitetura modular e reutilizável. O desenvolvimento utilizou tecnologias modernas como PyScript, NetworkX e Matplotlib, resultando em uma estrutura web que assegura fácil manutenção e consistência cognitiva entre as diferentes páginas. Essa escolha técnica culmina na criação de uma ferramenta acessível e reproduzível, que pode ser acessada diretamente no navegador, eliminando barreiras de adoção e permitindo que usuários experimentem e aprendam de forma autônoma.

Em suma, estas contribuições avançam o estado da arte na visualização e ensino de algoritmos de grafos, oferecendo uma plataforma que combina rigor teórico com práticas de design centradas no usuário.

## 8.2 Limitações

Apesar dos avanços alcançados, a implementação apresenta algumas limitações que devem ser consideradas. A complexidade dos algoritmos pode levar a tempos de execução elevados para grafos muito grandes, o que pode impactar a experiência do usuário. Além disso, a interface, embora intuitiva, pode beneficiar-se de melhorias

adicionais em termos de acessibilidade e usabilidade, especialmente para usuários com menos experiência em manipulação de grafos (descrevemos essas melhorias na seção 6.4 do capítulo anterior). Outro ponto de atenção está relacionado a dependência de bibliotecas externas, como Cytoscape.js e PyScript, que podem introduzir desafios de compatibilidade e manutenção a longo prazo.

### 8.3 Trabalhos Futuros

Para aprimorar a ferramenta, futuras iterações podem focar em otimizações de desempenho para lidar com grafos maiores de forma mais eficiente. A interface pode ser refinada com base em testes de usabilidade, incorporando feedback de uma base de usuários diversificada. A adição de funcionalidades avançadas, como suporte a diferentes tipos de grafos e algoritmos adicionais, pode expandir o escopo da ferramenta. A integração de análises de aprendizado, como rastreamento do progresso do usuário e sugestões personalizadas, também pode enriquecer a experiência educacional. Finalmente, a realização de estudos formais para avaliar o impacto pedagógico da ferramenta em ambientes educacionais contribuirá para validar sua eficácia e orientar futuras melhorias.

# Referências

- CHU, Y. J.; LIU, T. H. On the shortest arborescence of a directed graph. *Scientia Sinica*, v. 14, p. 1396–1400, 1965. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [21](#) e [50](#).
- CORMEN, T. H. et al. *Introduction to Algorithms*. 3rd. ed. [S.l.]: MIT Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [43](#) e [48](#).
- EDMONDS, J. Optimum branchings. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 71B, p. 233–240, 1967. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [21](#) e [50](#).
- FEOFILOFF, P. *Algoritmos de Programação Linear: Programação Linear Concreta*. [s.n.], 2005. Notas de curso, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/prog-lin>>. Citado na página [41](#).
- FRANK, A. Kernel systems of directed graphs. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, v. 41, n. 1-2, p. 63–76, 1979. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [38](#).
- FRANK, A. A weighted matroid intersection approach to R-arborescences and related problems. In: FRANK, A. et al. (Ed.). *Paths, Flows, and VLSI-Layout*. [S.l.]: Springer, 1981. Two-phase primal–dual method for minimum-cost arborescences; placeholder citation. Citado na página [50](#).
- FRANK, A. *Connections in Combinatorial Optimization*. Oxford: Oxford University Press, 2011. (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications). ISBN 978-0-19-920527-1. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [38](#).
- FRANK, A.; HAJDU, G. A simple algorithm and min–max formula for the inverse arborescence problem. *Algorithms*, v. 7, n. 4, p. 637–647, 2014. Citado na página [50](#).
- FULKERSON, D. R. Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph. *Mathematical Programming*, v. 6, p. 1–13, 1974. Citado 2 vezes nas páginas [38](#) e [40](#).
- HALIM, S. et al. *VisuAlgo*. <<https://visualgo.net/>>. Acesso didático a visualizações interativas de algoritmos, acessado em 2025. Citado na página [59](#).
- HUNDHAUSEN, C. D.; DOUGLAS, S. A.; STASKO, J. T. A meta-study of algorithm visualization effectiveness. *Journal of Visual Languages & Computing*, v. 13, n. 3, p. 259–290, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [57](#), [58](#) e [59](#).
- LARKIN, J. H.; SIMON, H. A. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, v. 11, n. 1, p. 65–100, 1987. Citado 2 vezes nas páginas [57](#) e [58](#).
- LESTON-REY, M. Notas de aula de métodos de otimização. 2025. Citado na página [38](#).
- MAYER, R. E. *Multimedia Learning*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 4 vezes nas páginas [55](#), [57](#), [58](#) e [64](#).
- NAPS, T. L. et al. Exploring the role of visualization and engagement in computer science education. In: *Proceedings of the 34th SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education*. [S.l.]: ACM, 2003. p. 131–152. Citado 4 vezes nas páginas [57](#), [58](#), [59](#) e [64](#).

- NIELSEN, J. *Usability Engineering*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1994. Fonte das heurísticas clássicas de usabilidade. ISBN 978-0125184069. Citado na página [64](#).
- PAIVIO, A. *Mental Representations: A Dual Coding Approach*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990. Citado 2 vezes nas páginas [55](#) e [57](#).
- REY, P. S. L. Comunicação oral. 2025. Citado na página [47](#).
- ROGERS, Y.; SHARP, H.; PREECE, J. *Interaction Design: Beyond Human-Computer Interaction*. 3rd. ed. [S.l.]: Wiley, 2011. ISBN 978-0470665763. Citado na página [64](#).
- SHNEIDERMAN, B. The eyes have it: A task by data type taxonomy for information visualizations. In: *Proceedings 1996 IEEE Symposium on Visual Languages*. [S.l.]: IEEE, 1996. p. 336–343. Citado 2 vezes nas páginas [58](#) e [64](#).
- SHNEIDERMAN, B. et al. *Designing the User Interface: Strategies for Effective Human-Computer Interaction*. 6th. ed. [S.l.]: Pearson, 2016. ISBN 978-0134380384. Citado na página [64](#).
- SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, v. 12, n. 2, p. 257–285, 1988. Citado 3 vezes nas páginas [55](#), [58](#) e [64](#).
- TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1991. Citado 2 vezes nas páginas [55](#) e [57](#).
- WARE, C. *Information Visualization: Perception for Design*. 3rd. ed. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [57](#) e [58](#).

## Anexos

## ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.