Mario Leston

Métodos de Otimização

Sumário

1
Noções básicas

1.1 Grafos

Um grafo é um objeto constituído de três ingredientes: um conjunto de vértices, um conjunto de arestas, e uma função que leva cada aresta num par de vértices. Formalmente, um grafo é uma tripla (V, E, ι) em que

- V é um conjunto não vazio e finito cujos elementos são chamados de *vértices*;
- E é um conjunto finito cujos elementos são chamados de *arestas*;
- ι, a *função de incidência*, é uma função que leva cada aresta em subconjunto de V de tamanho 2, ou seja, em um conjunto da forma $\{u, v\}$ onde $u \neq v \in V$. [1] Assim, $\iota : E \to \binom{V}{2}$.

[1] Para um conjunto X e um inteiro não-negativo k, $\binom{X}{k}$ é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X de tamanho k, i.e.,

$$\binom{X}{k} = \{Y \subseteq X \mid |Y| = k\}.$$

Por exemplo,

$$\binom{\{1,2,3\}}{2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}.$$

Além disso, V e E são conjuntos disjuntos, ou seja, $V \cap E = \emptyset$. Vamos tecer alguns comentários sobre a notação que, às vezes, pode se tornar uma chateação por diversos motivos, inclusive o estético. Um grafo G é uma tripla. Logo, é conveniente definir uma notação para extrair cada componente da tripla. Escrevemos, assim, $V(G)$ para denotar o conjunto dos vértices de G. De forma similar, escrevemos $E(G)$ e $\iota(G)$ para denotar o conjunto das arestas de G e a função de incidência de G. Às vezes, por uma questão puramente estética, vamos alternativamente escrever V_G, E_G e ι_G em vez de $V(G), E(G)$ e $\iota(G)$, respectivamente. Esta convenção será utilizada com frequência para outras funções que vamos definir. Além disso, quando houver um único grafo no contexto da discussão, evidentemente vamos simplesmente escrever V, E e ι em vez de suas versões mais longas. Para cada aresta e, $\iota(e)$ é um objeto da forma $\{u, v\}$ em que u e v são vértices distintos de V. Por brevidade, escrevemos

$$uv$$

no lugar de $\{u, v\}$. Para pesar menos na notação, vamos adotar a seguinte convenção: escrevemos [2]

[2] Cuidado! Essa notação não é padrão!

$$e \simeq uv$$

quando $\iota(e) = \{u, v\}$.[3] Os vértices u e v são as *pontas* de e. Dizemos também que u e v *incidem*, ou são *incidentes*, em e e que u e v são *vizinhos*. Vamos abusar um pouco da notação e escrever

$$u \in e$$

em vez de $u \in \iota(e)$ quando o vértice u é uma das pontas da aresta e.

[3] É claro que tal convenção pode carregar uma certa ambiguidade quando uma mesma aresta estiver envolvida em mais de um grafo. Assim, tal notação só será utilizada quando não houver possibilidade de confusão.

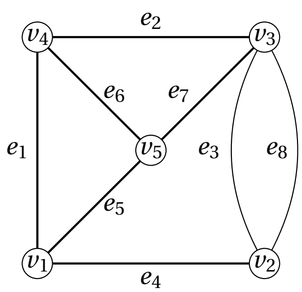


Figura 1.1: A figura exibe um desenho de um grafo cujo conjunto de vértices é $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, e cujo conjunto de arestas é $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, onde $e_1 \simeq v_1v_4, e_2 \simeq v_3v_4, e_3 \simeq v_2v_3,$ $e_4 \simeq v_1v_2, e_5 \simeq v_1v_5, e_6 \simeq v_4v_5,$ $e_7 \simeq v_3v_5, e_8 \simeq v_2v3$.
Observe que e_3 e e_8 têm as mesmas pontas. O corte de v_2, $\delta(v_2)$, é o conjunto $\{e_3, e_4, e_8\}$.

Alguns conceitos envolvendo grafos são extremamente intuitivos e formalizam relações corriqueiras envolvendo entidades da realidade. Essa é uma das motivações que tornam o conceito tão atraente e recheado de aplicações práticas.

Vamos fixar um grafo G na discussão que segue, cujo propósito é o de definir uma série de funções sobre o conjunto dos vértices de um grafo.

1.2 Corte e grau de um vértice

Seja u um vértice de G. O *corte* de u, denotado $\delta_G(u)$, é o conjunto das arestas de G que incidem em u. Formalmente,

$$\delta_G(u) := \{e \in E \mid u \in e\}.$$

A notação $\delta_G(u)$ é um tanto quanto pesada, por isso, quando não houver possibilidade de confusão e para simplificar, vamos escrever $\delta(u)$ ou ainda, mais simplesmente,

$$\delta u.$$

O tamanho (ou a cardinalidade) de δu, denotado $d(u)$, é chamado de *grau* de u.

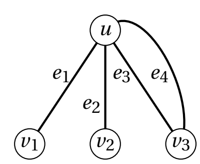


Figura 1.2: A figura ilustra o vértice u com $\delta u = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Assim, $d(u) = 4$.

1.3 Vizinhança de um vértice

Seja u um vértice de G. Um vértice v de G é *vizinho* de u se uma das arestas de G tem pontas u e v. Vamos coletar esses elementos em um conjunto, denotado por $\Gamma_G(u)$, e chamá-lo de *vizinhança* (ou de *conjunto dos vizinhos*) de u. Mais formalmente,

$$\Gamma_G(u) = \{v \in V \mid \exists e \in E : e \simeq uv\}.$$

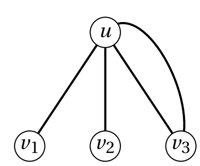


Figura 1.3: A figura ilustra o vértice u com $\Gamma u = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $\gamma(u) = 3$.

Reiterando, para tornar a notação mais leve vamos escrever

$$\Gamma u$$

sempre que possível e esteticamente agradável. A função Γ_G é chamada de *função de vizinhança* de G. O *número de vizinhos* de u, denotado por $\gamma(u)$, é o tamanho (ou a cardinalidade) do conjunto Γu. Assim, $\gamma u = |\Gamma u|$ para cada $u \in V$.[4] Convém observar que, em geral, $\gamma \neq d$.

[4] Note que aqui, mais uma vez, estamos fazendo uso da convenção implícita – agora não mais implícita – de omitir o nome do grafo e os parênteses na notação, convenção esta que permeará este texto sempre que não houver possibilidade de confusão.

1.4 Subgrafos

Sejam G e H grafos. Dizemos que H é um *subgrafo* de G, escrito $H \subseteq G$, se [5]

$$V_H \subseteq V_G, E_H \subseteq E_G \quad \text{e} \quad \iota_H \subseteq \iota_G.$$

[5] Uma função $f : X \to Y$ pode ser encarada como um conjunto de pares da forma $(x, f(x))$ para cada $x \in X$:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Desta forma, para funções f e g, estamos autorizados a escrever

$$f \subseteq g$$

uma vez que f e g são conjuntos. Para uma função

$$f : X \to Y$$

e uma parte Z de X,

$$f_{\restriction Z} : Z \to Y$$

é a restrição de f aos elementos de Z:

$$f_{\restriction Z} = \{(z, f(z)) \mid z \in Z\}.$$

Em palavras, um grafo H é subgrafo de um grafo G se as seguintes condições são satisfeitas:

- todo vértice de H é vértice de G, e
- se e é uma aresta de H com pontas x e y, então e é uma aresta de G e suas pontas são também x e y.

Um subgrafo H de G é dito *gerador* se $V(H) = V(G)$.

1.4.1 Subgrafo induzido

Seja G um grafo e $X \subseteq V$. Cada aresta que possui ambas as pontas em X é dita *induzida* por X. O *conjunto das arestas induzidas* por X é denotado por $E_G[X]$ (ou simplesmente $E[X]$), isto é,

$$E[X] = \{e \in E \mid \iota(e) \subseteq X\}.$$

O subgrafo de G *induzido* por X, denotado $G[X]$, é o grafo

$$(X, E[X], \iota_{\restriction E[X]}).$$

Seja, agora, $F \subseteq E$. O subgrafo de G *induzido* por F, denotado $G[F]$, é o grafo

$$\Big(\bigcup_{f \in F} \iota(f), F, \iota_{\restriction F}\Big),$$

ou seja, é o grafo cujo conjunto dos vértices é constituído dos vértices que incidem em alguma aresta de F, e cujo conjunto das arestas é F. Neste último caso, costuma ser conveniente *confundir o conjunto de arestas F com o grafo $G[F]$*, hábito este que será recorrente durante o texto sempre que não houver possibilidade de confusão.

1.4.2 Remoção de vértices e arestas

Para um conjunto de vértices $X \subseteq V$, denotamos por $G - X$ o grafo induzido por [6] X^c, isto é, $G[X^c]$, e dizemos que $G - X$ é o grafo obtido de G

[6] X^c é o conjunto $V - X$.

através da *remoção* dos vértices em X. Para um vértice v de G, escrevemos $G-v$ no lugar de $G-\{v\}$. De forma similar, para cada $F \subseteq E$, denotamos por $G-F$ o grafo $(V, E-F, \iota_{\restriction E-F})$ e dizemos que $G-F$ é o grafo obtido de G através da *remoção* das arestas em F. Para uma aresta e de G, escrevemos, por simplicidade, $G-e$ em vez de $G-\{e\}$.

1.5 Caminhos e outros animais

A noção de grafo e sua representação gráfica sugerem imediatamente a noção de caminho. Vamos lidar com diversas variantes desta noção. Seja G um grafo. Um caminho em G é uma sequência que alterna vértices e arestas de tal forma que as pontas de cada aresta na sequência são os vértices que imediatamente precedem e sucedem a aresta na sequência.

Formalmente, um *caminho* é uma sequência, digamos P,

$$\langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k \rangle$$

em que[7]

- $k \geqslant 0$,
- $v_0, \dots, v_k \in V$,
- $e_1, \dots, e_k \in E$, e
- $e_i \simeq v_{i-1} v_i$ para cada $i \in [k]$.

Vamos escrever $V(P)$ (ou V_P) para denotar o conjunto dos vértices de P, isto é, $\{v_0, \dots, v_k\}$, e $E(P)$ (ou E_P) para denotar o conjunto das arestas de P, isto é, $\{e_1, \dots, e_k\}$. Dizemos que P é um [8] (v_0, v_k)-caminho (ou um caminho de v_0 até v_k ou, ainda, um caminho que une v_0 e v_k[9]) e que v_0 é o *início* (ou a *ponta inicial*) de P e v_k é o *término* (ou a *ponta final*) de P. O *comprimento* de P, denotado por $\ell(P)$, é o número k.[10] É conveniente muitas vezes confundir um caminho P com o grafo $(V_P, E_P, \iota_{\restriction E_P})$. Assim, por exemplo, se $u \in V_P$, então $d_P(u)$ é o grau de u no grafo P. Às vezes, vamos nos interessar tão somente pelos vértices de um caminho quando, então, vamos enumerar tão somente os vértices.[11] De forma similar, quando o interesse residir somente nas arestas de um caminho, vamos, pois, tão somente enumerar as arestas. No primeiro caso dizemos que um tal caminho é um *caminho de vértices*; no segundo, um *caminho de arestas*. Muitas vezes vamos nos interessar por certos segmentos de P. Assim, para $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ escrevemos $P(v_i, v_j)$ para denotar a sequência $\langle v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j \rangle$ que constitui um caminho que une os vértices v_i e v_j.

Caminhos são sequências finitas e, portando, podem ser concatenadas. A *concatenação* dos caminhos

$$P_1 := \langle v_0, e_1, v_1, \dots e_k, v_k \rangle \text{ e } P_2 := \langle w_0, f_1, w_1, \dots f_l, w_l \rangle$$

tais que $v_k = w_0$, denotada $P_1 \cdot P_2$, é o caminho

$$\langle v_0, e_1, v_1, \dots e_k, v_k, f_1, w_1, \dots f_l, w_l \rangle.$$

P

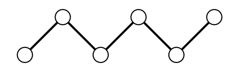


Figura 1.4: A figura ilustra um caminho simples.

[7] Para um inteiro não-negativo k,

$$[k] = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Além disso, para inteiros ℓ, k, escrevemos $[\ell : k]$ para denotar o conjunto

$$\{i \in \mathbb{Z} \mid \ell \leqslant i \leqslant k\}.$$

Observe que $[0] = \emptyset$.

[8] Com frequência, quando não houver possibilidade de confusão, vamos escrever $v_0 v_k$-caminho.

[9] Ou ainda outras variantes linguísticas equivalentes.

[10] Note que $\ell(P)$ é, em geral, diferente de $|E_P|$, salvo se P for uma trilha.

[11] Assim, por exemplo, vamos escrever $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ para destacar a sequência de vértices de um caminho de v_0 até v_k.

Trilhas e caminhos simples Dizemos que um caminho P é uma *trilha* se não repete arestas, ou seja, $|E_P| = k = \ell(P)$. Dizemos que P é um *caminho simples* se não repete vértices, ou seja, $|V_P| = k+1$. Naturalmente, se P é um caminho simples, então P é uma trilha, mas, evidentemente, a recíproca não é em geral verdadeira. A mesma nomenclatura usada para caminhos é estendida para trilhas e caminhos simples. É conveniente, como já fizemos anteriormente, identificar uma trilha P com o grafo $(V_P, E_P, \iota_{\upharpoonright E_P})$.

Circuitos e ciclos Uma trilha P é um *ciclo* se $\ell(P) \geqslant 2$ e o início e o fim de P coincidem. Um *circuito* é um ciclo no qual, exceto pelo início e pelo fim, nenhum outro vértice se repete na sequência. Assim, um ciclo

$$\langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k \rangle$$

(donde $k \geqslant 2$ e $v_0 = v_k$) é um *circuito* se $\langle v_0, e_1, \dots, e_{k-1}, v_{k-1} \rangle$ é um caminho simples.

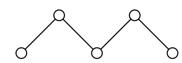


Figura 1.5: A figura ilustra um grafo que é um caminho simples.

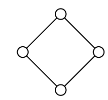


Figura 1.6: A figura ilustra um grafo que é um circuito.

Finalmente, dizemos que um grafo G é um *caminho simples* (um *ciclo*) se existe um caminho simples (um ciclo) P em G tal que $G = (V_P, E_P, \iota)$.

Um caminho simples *maximal* em um grafo G é um caminho simples P tal que todo vizinho de cada uma das pontas de P está em V_P. Note que um caminho simples de comprimento máximo é maximal, mas nem todo caminho maximal é máximo.

1.6 Componentes conexas

Um grafo G é *conexo* se para cada $u, v \in V$ existe um caminho que une u e v. Uma *componente conexa* (ou, simplesmente, *componente*) de um grafo G é uma parte maximal[12] $X \subseteq V$ tal que o grafo $G[X]$ é conexo, isto é, é uma parte $X \subseteq V$ tal que $G[X]$ é conexo e se $Y \subseteq V$ é tal que $Y \supseteq X$ e $G[Y]$ é conexo, então $Y = X$.[13] Observe que se X é uma componente de um grafo não-vazio G, então $X \neq \emptyset$ uma vez que $G[\{v\}]$ é obviamente conexo para cada vértice v de G. É conveniente, muitas vezes, confundir uma componente conexa X de um grafo G com o grafo $G[X]$. Como de costume, tal convenção será utilizada sempre que não houver possibilidade de confusão.

[12] Lembre-se que dada uma coleção não-vazia $\mathscr{X}$ de subconjuntos de um certo conjunto, dizemos que um elemento $X \in \mathscr{X}$ é *maximal* se

$$Y \supseteq X \Rightarrow Y = X$$

para cada $Y \in \mathscr{X}$.

[13] Ou, ainda, $G[Y]$ não é conexo sempre que $Y \subseteq V$ é tal que $Y \supset X$.

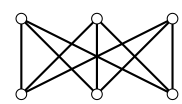


Figura 1.7: A figura ilustra um grafo conexo.

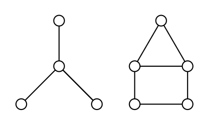


Figura 1.8: Um grafo que possui duas componentes conexas.

1.7 Corte de um conjunto de vértices

Seja G um grafo e $X \subseteq V$. O conjunto das arestas que têm uma ponta em X e a outra em X^c é denotado por $\delta_G(X)$ (ou, como de costume, δX). É evidente que $\delta X = \delta X^c$. Uma parte K de E é um *corte* se $K = \delta X$ para algum $X \subseteq V$ e, neste caso, X é uma [14] *margem* de K. Um corte é dito *trivial* se uma de suas margens é vazia. Para cada $X \subseteq V$, a cardinalidade de δX, $|\delta X|$, é denotada por $d_G(X)$ ou, como de hábito, simplesmente $d(X)$, ou ainda, dX.

[14] Note que X^c também é uma margem de K.

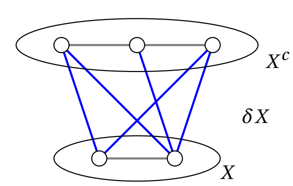


Figura 1.9: As arestas de cor azul constituem um corte δX. As margens do corte são os conjuntos X e X^c. É claro que $\delta X = \delta X^c$. Note que todo caminho de X até X^c usa uma aresta de δX.

Teorema 1.1. *Um grafo G é conexo se, e só se,*

$$\delta X \neq \emptyset$$

sempre que $\emptyset \subset X \subset V$. □

1.8 Grafos bipartidos

Um grafo G é *bipartido* se existe $X \subseteq V$ tal que toda aresta tem uma ponta em X e a outra em X^c; o par X, X^c é chamado de *bipartição* de G e X e X^c são os *lados* da bipartição.

Dizemos que um circuito C em um grafo D é *ímpar* se o seu comprimento, $\ell(C)$, é ímpar. O próximo teorema caracteriza grafos bipartidos.

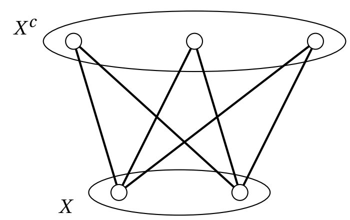


Figura 1.10: A figura ilustra um grafo bipartido G com bipartição X, X^c. Note que toda aresta tem exatamente uma das pontas no conjunto X, assim, não há arestas com ambas as pontas em X ou com ambas as pontas em X^c.

Teorema 1.2. *Um grafo G é bipartido se, e só se, G é livre de circuitos ímpares.*

Prova. Para a prova da necessidade, suponha que X, X^c é uma bipartição de G. Seja $P := \langle v_0, v_1, \ldots v_k \rangle$ uma trilha que começa e termina num mesmo lado da bipartição. Afirmamos que P tem comprimento par. De fato, observe que [15]

$$v_0 \in X \quad \equiv \quad v_k \in X. \tag{1.1}$$

[15] O símbolo ≡ é o mesmo que "se, só se".

Além disso, como G é bipartido, temos que

$$v_{i-1} \in X \quad \equiv \quad v_i \in X^c \tag{1.2}$$

para cada $i \in [k]$. A combinação de (1.1) e (1.2) permite concluir que k é par. Portanto, em particular, se C é um circuito de G, então C tem comprimento par.

Para a prova da suficiência, vamos mostrar por indução em $|E_G|$ que *se G é um grafo livre de circuitos ímpares, então G é bipartido*. O grafo com um único vértice é bipartido. Suponha, então, que G é um grafo livre de circuitos ímpares e que $|E_G| > 1$. Seja $e \simeq xy$ uma aresta de G, e considere o grafo $H := G - e$. É claro que H é livre de circuitos ímpares e $|E_H| < |E_G|$.

Assim, por hipótese de indução, H é bipartido. Seja X, X^c uma bipartição de H e suponha que $x \in X$. Se $y \in X^c$, então X é uma bipartição de G, e não há mais nada a provar. Suponha, então, que $y \in X$. Note que todo caminho simples cuja origem e destino está num mesmo lado da bipartição tem comprimento par. Isso, aliado a $e \in E$, implica que não existe um caminho de x até y em G. Seja C a componente de $G - e$ que contém x. Então $y \in C^c$. Considere o conjunto $Y := (C \cap X) \cup (C^c \cap X^c)$. Então $Y^c = (C \cap X^c) \cup (C^c \cap X)$. Vamos mostrar que Y é uma bipartição de G. Note primeiro que a ponta x de e está em $C \cap X$ e a ponta y de e está $C^c \cap X$, donde $x \in Y$ e $y \in Y^c$. Suponha que $f \in E - \{e\}$. Temos dois casos. Suponha, primeiro, que f é uma

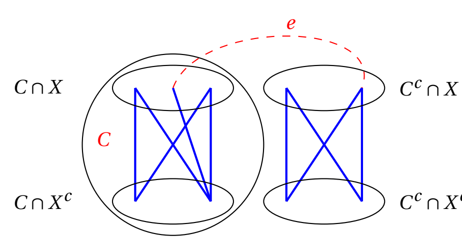


Figura 1.11: Toda aresta, exceto e, tem uma ponta em X e a outra em X^c. Assim. $Y := (C \cap X) \cup (C^c \cap X^c)$ é uma bipartição de G.

aresta de $G[C]$. Como X é uma bipartição de G, então f tem uma de suas pontas, digamos u, em X e, a outra, digamos v, em X^c. Mas, $u, v \in C$, donde $u \in C \cap X$ e $v \in C \cap X^c$ e, portanto, $u \in Y$ e $v \in Y^c$. Suponha que f é uma aresta de $G[C^c]$. Como X é bipartição de G, então f tem uma de suas pontas, digamos u, em X^c e, a outra, digamos v, em X. Mas, $u, v \in C^c$, donde $u \in C^c \cap X^c$ e $v \in C^c \cap X$ e, portanto, $u \in Y$ e $v \in Y^c$. Logo, Y é uma bipartição de G. □

1.9 Grafos simples

Um grafo G é *simples* se para cada $e, f \in E$ se $e \neq f$, então $\iota(e) \neq \iota(f)$, ou seja, não existem duas arestas com as mesmas pontas. Neste caso, por simplicidade, convém dispensar a função de incidência, e considerar um grafo simples como um par (V, E) tal que V é, como de costume, um conjunto finito e $E \subseteq \binom{V}{2}$. Assim, cada aresta é um par não-ordenado de vértices distintos.

1.10 Emparelhamentos

Vamos exibir alguns resultados fundamentais envolvendo emparelhamentos. Para este problema é irrelevante a presença de mais de uma aresta com um mesmo par de pontas. Por isso, daqui em diante, o termo "grafo" se refere a "grafo simples".

Seja G um grafo. Um emparelhamento de G é um subconjunto de arestas duas a duas disjuntas. Mais formalmente, $M \subseteq E$ é um *emparelhamento* de G se[16]

$$e \neq f \in M \Rightarrow e \cap f = \emptyset.$$

Para um emparelhamento M de G, dizemos que um vértice x de G é *M-saturado* (ou *saturado* por M) se x é ponta de uma das arestas em M, ou seja, se $x \in \bigcup M$,[17] caso contrário, dizemos que x é *M-exposto* (ou *exposto* por M). Dizemos, também, que uma parte S de V é *M-saturada* (ou, também, que M *cobre* S) se M satura (cobre) cada vértice de S.

[16] A notação $e \neq f \in M$ é uma abreviatura para $e \in M, f \in M, e \neq f$.

[17] Também dizemos, nesse caso, que M *cobre* x.

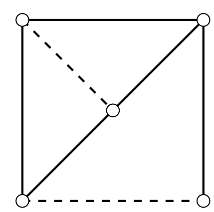


Figura 1.12: As linhas pontilhadas da figura ilustram um emparelhamento. Note que pares de arestas distintas do emparelhamento não compartilham pontas.

1.11 Teorema de Hall

O propósito desta seção é apresentar o Teorema de Hall. É conveniente retomar algumas definições. Para um grafo G e um conjunto de vértices $X \subseteq V$, a *vizinhança* de X,

$$\Gamma X,$$

é o conjunto dos vértices $y \in X^c$ que possuem pelo menos um vizinho em X; escrevemos γX para denotar o tamanho de ΓX.

Para um vértice $v \in V$, escrevemos Γv e γv nos lugares de $\Gamma\{v\}$ e $\gamma\{v\}$, respectivamente. Se G é bipartido e X está contido em um dos lados de

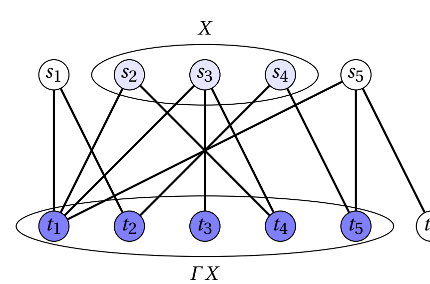


Figura 1.13: A figura ilustra um conjunto X e sua vizinhança, ΓX.

uma bipartição de G, então ΓX é o conjunto dos vértices y, que estão do outro lado da bipartição, que têm algum vizinho em X.

Condição de Hall Seja G um grafo e S uma parte de V. Dizemos que G satisfaz a *condição de Hall* em relação a S se

$$\gamma X \geqslant |X|$$

para cada $X \subseteq S$.

Um emparelhamento *satura* um conjunto S de vértices se cada vértice em S é saturado pelo emparelhamento.

Teorema 1.3 (Hall)**.** *Seja G um grafo bipartido com bipartição S, T. Então existe um emparelhamento que satura S se, e só se, G satisfaz a condição de Hall em relação a S.*

Prova. É evidente que se G possui um emparelhamento que satura S, então $\gamma X \geqslant |X|$ para cada $X \subseteq S$. Vamos, então, provar que se G satisfaz a condição de Hall em relação a S, então G possui um emparelhamento que satura S. A prova é por indução em $|S|$. Se $|S| \leqslant 1$, então o resultado é evidente. Suponha que $|S| \geqslant 2$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\gamma X > |X|$ para cada $\emptyset \neq X \subset S$.

Tome $s \in S$. Como $\gamma s > 0$, então escolha uma aresta e incidente em s e seja t a outra ponta de e. Seja $G' = G - \{s, t\}$ e ponha $\gamma' = \gamma_{G'}$ e $\Gamma' = \Gamma_{G'}$. Então G' tem bipartição $S' = S - \{s\}$, $T' = T - \{t\}$. Seja $\emptyset \neq X' \subseteq S'$. Observe que $\Gamma X' \subseteq \Gamma' X' \cup \{t\}$. Segue daí que $\gamma' X' + 1 \geqslant \gamma X' \geqslant |X'| + 1$, donde $\gamma' X' \geqslant |X'|$. Assim, G' satisfaz a condição de Hall em relação a S', e daí, por hipótese de indução, existe um emparelhamento M' de G' que satura S'. Logo, $M' \cup \{e\}$ é um emparelhamento de G que satura S.

Caso 2: $\gamma X = |X|$ para algum $\emptyset \neq X \subset S$.

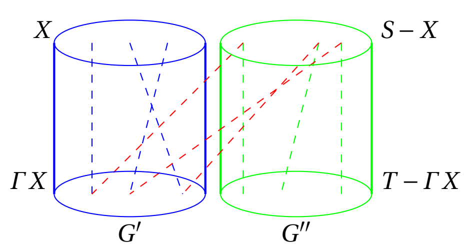


Figura 1.14: A figura ilustra o Caso 2. As linhas pontilhadas em azul são possíveis aresta de G'; em verde, de G''; e, finalmente, as arestas vermelhas são arestas de G que não são arestas de G' e nem de G''.

Seja $G' = G[X \cup \Gamma X]$ com bipartição $X, \Gamma X$ e ponha $\gamma' = \gamma_{G'}$ e $\Gamma' = \Gamma_{G'}$. Seja $G'' = G[(S - X) \cup (T - \Gamma X)]$ com bipartição $S - X, T - \Gamma X$ e ponha $\gamma'' = \gamma_{G''}$ e $\Gamma'' = \Gamma_{G''}$. Note que se $Y \subseteq X$, então $\Gamma' X = \Gamma X$. Portanto, G' satisfaz a condição de Hall em relação a X. Logo, por hipótese de indução, existe um emparelhamento M' que satura X em G'. Vamos verificar que G'' satisfaz a condição de Hall em relação a $S - X$. Ora, se $Y \subseteq S - X$, então

$\Gamma(X \cup Y) = \Gamma X \cup \Gamma'' Y$. Segue daí que

$$\begin{aligned} \gamma X + \gamma'' Y &= |\Gamma X \cup \Gamma'' Y| \\ &= |\Gamma(X \cup Y)| \\ &\geqslant |X \cup Y| \\ &= |X| + |Y|, \end{aligned}$$

donde $\gamma'' Y \geqslant |Y|$. Consequentemente, G'' satisfaz Hall em relação a $S - X$, donde, por hipótese de indução, G'' possui um emparelhamento M'' que satura $S - X$. Concluímos, assim, que $M' \cup M''$ é um emparelhamento de G que satura S, como queríamos.

□

Proposição 1.1. *Seja $G := (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição S, T e $R \subseteq V$. Então, existe um emparelhamento que satura R se, e só se, existe um emparelhamento que satura $R \cap S$ e existe um emparelhamento que satura $R \cap T$.*

Prova. A necessidade é óbvia. Para a prova da suficiência, suponha que M é um emparelhamento minimal que satura $R \cap S$ e N é um emparelhamento minimal que satura $R \cap T$.[18] Considere o subgrafo $H := (V, M \cup N)$ de G. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto das componentes conexas de H. Vamos definir um emparelhamento, denotado por J_C, para cada componente C de $\mathscr{C}$. Note que cada elemento de $\mathscr{C}$ é um circuito par ou um caminho. Seja C um componente de H. Suponha que C é um caminho de comprimento par. Ajuste a notação de tal forma que as pontas de C estejam em S. A minimalidade de M e N implica que uma das pontas,[19] digamos u, de C não está em R.[20] Seja e a aresta de C que incide em u. É claro que $e \in N$ e que $E(C) \setminus \{e\}$ contém um emparelhamento, denotado por J_C, que satura $R \cap V(C)$. Suponha C é um caminho de comprimento ímpar. Ajuste a notação de tal forma que $|E(C) \cap M| > |E(C) \cap N|$ e denote por J_C o conjunto $E(C) \cap M$. É claro que J_C satura $R \cap V(C)$. Finalmente, suponha que C é um circuito. Então, $J_C := E(C) \cap M$ satura $R \cap V(C)$. Seja

$$J := \bigcup \{J_C \mid C \in \mathscr{C}\}.$$

É fácil checar que J é um emparelhamento que satura R. □

[18] Assim, $M \setminus \{e\}$ não satura $R \cap S$ para cada $e \in M$.

[19] Um caminho é uma sequência que alterna vértices e arestas de tal forma que toda aresta da sequência une o vértice que a precede ao vértice que a sucede. O vértice inicial e final da sequência são as *pontas* do caminho.

[20] Caso contrário, u é um elemento de $R \cap S$ e, por hipótese, M cobre u, o que contraria o fato de que C é um componente de H.

1.12 Digrafos

Um *digrafo*[21] D é uma tripla (V, A, ι), em que V é um conjunto finito e não vazio de *vértices*, A é um conjunto finito de *arcos*, $V \cap A = \emptyset$, e $\iota : A \to V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$ é a *função de incidência* de D. Assim, $\iota(a)$ é um par ordenado, digamos (u, v) (ou, mais brevemente, uv), de vértices com $u \neq v$.

[21] Vamos utilizar uma notação similar a que foi usada para grafos. Assim, por exemplo, se D é um digrafo, então $V(D)$ (ou ainda V_D) é o conjunto dos vértices de D.

Os vértices u e v são as *pontas* de a; u é a *ponta inicial* de a e v é a *ponta final* de a. A ponta inicial de a é também denotada por $*a$, e a ponta final é denotada por $a*$. Por brevidade escrevemos $a \simeq uv$ em vez de $\iota a = uv$.

Seja D um digrafo. Um digrafo H é *subdigrafo* de D se $V(H) \subseteq V(D)$, $A(H) \subseteq A(D)$ e $\iota(H) = \iota(D)_{\upharpoonright A(H)}$. Seja $X \subseteq V(D)$. O subdigrafo de D *induzido* por X é o digrafo

$$(V, A[X], \iota(D)_{\upharpoonright A[X]}),$$

onde $A[X] := A_D[X] := \{a \in A(D) \mid \{*a, a*\} \subseteq X\}$.

Para cada $k \geqslant 0$, dizemos que uma sequência

$$P := \langle u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k \rangle,$$

é um *(u_0, u_k)-caminho* (ou um *caminho u_0 até u_k*) se

(i) $V(P) := \{u_0, u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$,

(ii) $A(P) := \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$, e

(iii) $a_i \simeq u_{i-1} u_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k$.

O *comprimento* de P, denotado $\ell(P)$, é o número k. Dizemos que P é uma *trilha* se P não repete arcos. Dizemos que P é *simples* se $\ell(P) = |V(P)| - 1$, ou seja, P não repete vértices (e, evidentemente, também não repete arcos). Para cada $i \leqslant j \in [0:k]$, a sequência $\langle u_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, u_j \rangle$, denotada por $P(u_i, u_j)$, é um (u_i, u_j)-caminho. Se $P := \langle u_0, e_1, \ldots, e_k, v_k \rangle$ é um (s,t)-caminho (ou seja, $s = u_0$ e $t = u_k$), e $Q = \langle w_0, f_1, \ldots f_j, w_j \rangle$ é um (t,u)-caminho, então a *concatenação* de P e Q, denotada $P \cdot Q$, é o (s,u)-caminho

$$\langle u_0, e_1, \ldots, e_k, v_k, f_1, \ldots e_j, w_j \rangle.$$

Corte de saída e de entrada. Seja D um digrafo e $U \subseteq V(D)$. O *corte de saída* (*corte de entrada*) de U, denotado $\delta^+_D(U)$ ($\delta^-_D(U)$) ou, mais simplesmente, $\delta^+ U$ ($\delta^- U$), [22] é o conjunto dos arcos $a \in A$ tais que $*a \in U$ ($a* \in U$) e $a* \in U^c$ ($*a \in U^c$); neste caso, dizemos que a *sai* (*entra*) de (em) U. É conveniente abreviar e escrever $\delta^+_D(u)$ ($\delta^-_D(u)$) em vez $\delta^+_D(\{u\})$ ($\delta^-(\{u\})$) para cada vértice u de D.

[22] Esta notação será utilizada quando não houver possibilidade de confusão. Tipicamente este será o caso quando houver somente um digrafo no contexto da discussão.

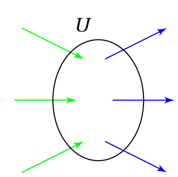


Figura 1.15: Os arcos azuis são os arcos de $\delta^+ U$ enquanto que, os verdes, são os arcos de $\delta^- U$.

Sucessores e antecessores. Seja x um vértice de D. Um vértice y é *sucessor* (*antecessor*) de x se existe um arco a em D tal que $a \simeq xy$ ($a \simeq yx$). O conjunto dos *sucessores* (*antecessores*) de x é denotado por $\Gamma^+(x)$ ($\Gamma^-(x)$), isto é,

$$\Gamma^+(x) := \{a* \mid a \in \delta^+ x\} \quad \text{e} \quad \Gamma^-(x) := \{*a \mid a \in \delta^- x\}.$$

Vamos estender a definição para partes de V. Seja $X \subseteq V$. O conjunto dos *sucessores* de X é o conjunto

$$\Gamma^+(X) := \Big(\bigcup_{x \in X} \Gamma^+(x) \Big) \setminus X = \{a* \mid a \in \delta^+ X, a* \notin X\}$$

ou seja, $y \in \Gamma^+(x)$ se, e só se, y é sucessor de algum vértice x em X, e y não é um dos habitantes de X. De forma similar, o conjunto dos *antecessores* de

X é o conjunto

$$\Gamma^-(X) := \Big(\bigcup_{x\in X}\Gamma^-(x)\Big) \setminus X = \{*a \mid a \in \delta^- X, *a \notin X\}.$$

1.13 *Matrizes*

Uma *matriz* sobre $M \times N$ é uma função $A : M \times N \to \mathbb{R}$, onde M e N são conjuntos finitos tais que $M \cup N \neq \emptyset$.

A *transposta* de uma matriz A sobre $M \times N$, denotada $A^\top$, é a matriz sobre $N \times M$ definida pondo-se:

$$A^\top(n,m) := A(m,n)$$

para cada $m \in M, n \in N$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ p \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1.16: A figura ilustra uma matriz, digamos A, em $\{m,n,p\} \times \{i,j,k\} \to \mathbb{R}$. Assim, por exemplo, $A(n,k) = 6$.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

Figura 1.17: A figura ilustra a multiplicação das matrizes A e B.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Figura 1.18: A matriz $A^\top$ é a transposta de A, obtida de A trocando-se linhas por colunas.

Operações sobre matrizes Sejam A e B matrizes sobre $M \times N$. A *soma* de A e B é uma matriz sobre $M \times N$, denotada $A + B$, tal que

$$(A+B)(m,n) := A(m,n) + B(m,n)$$

para todo $m \in M, n \in N$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. A multiplicação de α por A é uma matriz sobre $M \times N$, denotada αA, tal que

$$(\alpha A)(m,n) := \alpha A(m,n)$$

para todo $m \in M$ e $n \in N$.

Sejam agora A uma matriz sobre $M \times N$ e B uma matriz sobre $N \times P$. O *produto* de A e B é uma matriz sobre $M \times P$, denotada AB, tal que

$$(AB)(m,p) := \sum_{n\in N} A(m,n)B(n,p)$$

para todo $m \in M, p \in P$. Algumas propriedades das operações sobre matrizes são de trivial verificação. A menos óbvia, talvez, seja a associatividade do produto de matrizes.

Lema 1.1. *Se A é uma matriz sobre $M \times N$, B é uma matriz sobre $N \times P$ e C é uma matriz sobre $P \times Q$, então $(AB)C = A(BC)$.*

Prova. Seja $m \in M$ e $q \in Q$. Então

$$
\begin{aligned}
((AB)C)(m,q) &= \sum_{p\in P}(AB)(m,p)C(p,q) \\
&= \sum_{p\in P}\Big(\sum_{n\in N}A(m,n)B(n,p)\Big)C(p,q) \\
&= \sum_{p\in P}\sum_{n\in N}A(m,n)B(n,p)C(p,q) \\
&= \sum_{n\in N}\sum_{p\in P}A(m,n)B(n,p)C(p,q) \\
&= \sum_{n\in N}A(m,n)\sum_{p\in P}B(n,p)C(p,q) \\
&= \sum_{n\in N}A(m,n)(BC)(n,q) \\
&= (A(BC))(m,q).
\end{aligned}
$$

□

Uma outra propriedade útil envolve a operação de transposição.

Lema 1.2. *Se A é uma matriz sobre $M\times N$ e B é uma matriz sobre $N\times P$, então $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Prova. Seja $p\in P$ e $m\in M$. Então

$$
\begin{aligned}
(AB)^\top(p,m) &= (AB)(m,p) \\
&= \sum_{n\in N}A(m,n)B(n,p) \\
&= \sum_{n\in N}A^\top(n,m)B^\top(p,n) \\
&= \sum_{n\in N}B^\top(p,n)A^\top(n,m) \\
&= (B^\top A^\top)(p,m),
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Um *vetor* sobre M é uma matriz sobre $M\times N$ tal que $|N|=1$. Às vezes, um tal vetor é chamado de *vetor coluna*. De forma similar, um *vetor linha* sobre N é uma matriz sobre $M\times N$ tal que $|M|=1$. Assim, se u é um vetor sobre M, então $u^\top$ é um vetor linha sobre M.

É conveniente "identificar" os vetores com o mesmo conjunto índices de linhas, coisa que faremos durante este texto. Também vamos confundir uma função $x: M\to\mathbb{R}$ com um vetor sobre M. Para cada conjunto finito e não vazio M, seja $e^M : M\to M\to\{0,1\}$ tal que

$$
e^M(i)(k) := \begin{cases} 1, & \text{se } i=k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

para cada $i,k\in M$. A notação é carregada. Por isso, vamos escrever e^M_i no lugar de $e^M(i)$. Também vamos, com frequência, abreviar e escrever $e := e^M$.

$$
\begin{array}{cc}
 & i \\
\begin{array}{c} m \\ n \\ p \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 1.19: A figura ilustra um vetor (às vezes, chamado de *vetor coluna*), digamos u, em $\{m,n,p\}\times\{i\}\to\mathbb{R}$. Assim, por exemplo, $u(p,i)=3$, que, por brevidade, escrevemos $u(p)$.

Assim, para cada $i \in M$, e_i é o vetor sobre M cuja k-ésima coordenada é 1 quando $i = k$ e 0, caso contrário.

Seja A uma matriz sobre $M \times N$, $f := e^M$ e $e := e^N$. Então,[23]

$$(Ae_j)(i) = A(i,j) \quad \text{e} \quad (f_i^\top A)(j) = A(i,j)$$

para cada $i \in M, j \in N$.[24] Ademais,

$$(f_i)^\top A e_j^N = A(i,j)$$

para cada $i \in M, j \in N$.

É conveniente também introduzir a seguinte notação. Para cada conjunto finito e não vazio U e para cada subconjunto T de U, seja $\mathbb{1}_T^U : U \to \{0,1\}$ tal que

$$\mathbb{1}_T^U(u) := \begin{cases} 1, & \text{se } u \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $u \in U$. Assim, $e_i^M = \mathbb{1}_{\{i\}}^M$.

Formando novas matrizes. Seja A uma matriz sobre $M \times N_0$ e B uma matriz sobre $M \times N_1$. Faz sentido "juntar" essas duas matrizes em uma única matriz justapondo-se as colunas de B após as colunas de A. A *justaposição* das matrizes A e B, denotada

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

é uma matriz C sobre $M \times \big((\{0\} \times N_0) \cup (\{1\} \times N_1)\big)$ tal que

$$C(m,(0,n_0)) := A(m,n_0) \quad \text{e} \quad C(m,(1,n_1)) := B(m,n_1)$$

para cada $m \in M, n_0 \in N_0$ e $n_1 \in N_1$.

Para contornar a chateação de escrever $(\{0\} \times N_0) \cup (\{1\} \times N_1)$, vamos introduzir a seguinte notação. Para quaisquer conjuntos X e Y, $X \sqcup Y$ denota o conjunto $(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$.

De forma análoga, podemos definir a operação de justapor as matrizes A sobre $M_0 \times N$ e B sobre $M_1 \times N$, denotada

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Essas operações podem ser estendidas para mais de duas matrizes. Fica para o leitor a tarefa de formalização dessas operações.

Note que se A_i é uma matriz $M \times N_i$ para $i \in \{0,1\}$ e B_i é uma matriz $N_i \times P$ para $i \in \{0,1\}$, então[25]

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} = A_0 B_0 + A_1 B_1.$$

Combinações lineares Um vetor b sobre M é *combinação linear* das colunas de uma matriz A sobre $M \times N$ se existe um vetor x sobre N tal que $Ax = b$.

[23] De fato,

$$\begin{aligned}(Ae_j)(i) &= \sum_{n \in N} A(i,n) e_j(n) \\ &= A(i,j) e_j(j) + \sum_{n \in N \setminus \{j\}} A(i,n) e_j(n) \\ &= A(i,j).\end{aligned}$$

[24] Note que Ae_j é um vetor (coluna) enquanto que $f_i^\top A$ é um vetor linha.

[25] Prove!

Espaço coluna O *espaço coluna* de uma matriz A sobre $M \times N$, escrito $\mathrm{cs}(A)$, é o conjunto $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^N\}$, ou seja, os habitantes de $\mathrm{cs}(A)$ são as combinações lineares das colunas de A.

Lema 1.3. *Sejam $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ e $B \in \mathbb{R}^{M\times P}$ matrizes. Então, $Be_p^P \in \mathrm{cs}(A)$ para cada $p \in P$ se, e só se, $\mathrm{cs}(B) \subseteq \mathrm{cs}(A)$.*

Prova. Para a prova da necessidade, suponha que $Be_p^P \in \mathrm{cs}(A)$ para cada $p \in P$. Seja que $b \in \mathrm{cs}(B)$. Então existe um vetor x sobre P tal que $Bx = b$. Como para cada $p \in P$, Be_p^P está no espaço coluna de A, temos que existe uma matriz C sobre $N \times P$ tal que $B = AC$. Assim, $b = Bx = (AC)x = A(Cx)$ e, portanto, $b \in \mathrm{cs}(A)$.

A prova da suficiência é trivial. Suponha que $\mathrm{cs}(B) \subseteq \mathrm{cs}(A)$ e seja $p \in P$. É claro que $Be_p^P \in \mathrm{cs}(B)$. Como $\mathrm{cs}(B) \subseteq \mathrm{cs}(A)$, temos que $Be_p^P \in \mathrm{cs}(A)$, como queríamos. □

Dependência e independência linear. Dizemos que as colunas de uma matriz A sobre $M \times N$ são *dependentes* se existe um vetor x sobre N, denominado de *testemunha*, tal que

$$x \neq 0_N \quad \text{e} \quad Ax = 0_M.$$

Se este não é o caso, isto é, se

$$\forall x \in \mathbb{R}^N : Ax = 0 \implies x = 0,$$

então dizemos que as colunas de A são *independentes*. De forma similar, um conjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^M$ é *linearmente independente* se $\begin{bmatrix} a_1 \dots a_n \end{bmatrix}$ é linearmente independente.

Lema 1.4. *Se as colunas de uma matriz A sobre $M \times N$ são independentes, então*

$$Ax = Az \implies x = z.$$

para todo $x, z \in \mathbb{R}^N$.

Prova. Suponha que $Ax = Az$. Então $A(x - z) = 0$. A independência das colunas de A implica que $x - z = 0$, donde $x = z$. □

O lema acima garante que há no máximo um vetor coluna x que satisfaz $Ax = b$ quando as colunas de A são independentes.

Lema 1.5. *Seja A uma matriz sobre $M \times N$ cujas colunas são independentes. Então, para cada vetor b sobre M as colunas de $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ são dependentes se, e só se, $b \in \mathrm{cs}(A)$.*

Prova. Suponha que as colunas de $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ são dependentes. Então existe um vetor x sobre N e um real λ tal que $\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \neq 0$ e $Ax + \lambda b = 0$. Note que se

$\lambda = 0$, então $Ax = 0$ com $x \neq 0$, o que contraria a independência das colunas de A. Assim, $\lambda \neq 0$. Segue daí que $A(-\frac{1}{\lambda}x) = b$ e, portanto, $b \in \mathsf{cs}(A)$. Para a recíproca, suponha que $b \in \mathsf{cs}(A)$. Então existe um vetor x sobre N tal que $Ax = b$, donde $Ax - b = 0$ e, consequentemente, as colunas de $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ são dependentes. □

É conveniente destacar a seguinte reformulação do lema acima.

Corolário 1.1. *Seja A uma matriz sobre $M \times N$ cujas colunas são independentes. Então, para cada $b : M$ as colunas de $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ são independentes se, e só se, $b \notin \mathsf{cs}(A)$.* □

O próximo lema afirma que se as colunas de uma matriz são dependentes, então uma de suas colunas é combinação linear das outras colunas da matriz. Além disso, o espaço coluna da matriz não se altera se removermos tal coluna. Para o enunciado e prova do lema, vamos necessitar introduzir um pouco de notação e algumas definições.

Suporte de um vetor. O suporte de um vetor x sobre N, denotado $\underline{x}$, é o conjunto

$$\underline{x} := \{n \in N \mid x(n) \neq 0\}.$$

Submatriz de colunas e linhas. Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e J um subconjunto de N. Escrevemos A^J para denotar a submatriz de A que consiste das colunas que estão em J, ou seja, A^J é a matriz sobre $M \times J$ tal que

$$A^J e_j^J = A e_j^N$$

para cada $j \in J$. Para simplificar, vamos escrever A^j no lugar de $A^{\{j\}}$. Além disso, para cada $n \in N$, escrevemos A^{-n} em vez de $A^{N \setminus \{n\}}$. Seja I um subconjunto de M. De forma análoga, escrevemos A_I para denotar a submatriz de A que consiste das linhas que estão em I, ou seja,

$$(e_i^I)^\top A_I = (e_i^M)^\top A.$$

Note que $(A^\top)^I = A_I^\top$ para cada $I \subseteq M$. Finalmente, para um vetor (coluna) x sobre N e $J \subseteq N$, seja $x_J \in \mathbb{R}^J$ o vetor tal que $x_J(j) = x(j)$ para cada $j \in J$. Por simplicidade, para cada $n \in N$, vamos abreviar e escrever x_{-n} em vez de $x_{N \setminus \{n\}}$.

Lema 1.6. *Se um vetor x sobre N é uma testemunha da dependência das colunas de uma matriz A sobre $M \times N$, então $\mathsf{cs}(A) = \mathsf{cs}(A^{-n})$ para todo $n \in \underline{x}$.*

Prova. Suponha que um vetor x sobre N é uma testemunha da dependência das colunas de uma matriz A sobre $M \times N$. Seja $n \in \underline{x}$. Ora,

$$0 = Ax = A^n x(n) + A^{-n} x_{-n} = 0,$$

donde
$$A^n = A^{-n}\Big(-\frac{1}{x(n)}x_{-n}\Big),$$
o que estabelece $A^n \in \mathsf{cs}(A^{-n})$. É claro que $\mathsf{cs}(A^{-n}) \subseteq \mathsf{cs}(A)$. Resta, então, verificar que $\mathsf{cs}(A) \subseteq \mathsf{cs}(A^{-n})$. Suponha que $b \in \mathsf{cs}(A)$. Então existe um vetor u sobre N tal que $Au = b$, donde
$$\begin{aligned} b &= Au \\ &= A^{-n}u_{-n} + A^n u(n) \\ &= A^{-n}u_{-n} + A^{-n}\Big(-\frac{u(n)}{x(n)}x_{-n}\Big) \\ &= A^{-n}\Big(u_{-n} - \frac{u(n)}{x(n)}x_{-n}\Big), \end{aligned}$$
o que garante que b habita $\mathsf{cs}(A^{-n})$. Segue daí que $\mathsf{cs}(A) = \mathsf{cs}(A^{-n})$, como desejado. □

Lema 1.7. *Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e B uma matriz sobre $M \times P$. Se $\mathsf{cs}(B) \subseteq \mathsf{cs}(A)$, então $\mathsf{cs}(A) = \mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}\Big)$.*

O próximo teorema é de fundamental importância.

Teorema 1.4. *Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e B uma matriz sobre $M \times P$. Se as colunas de B são independentes e $\mathsf{cs}(B) \subseteq \mathsf{cs}(A)$, então existe $J \subseteq N$ tal que*
$$|J| = |P| \quad e \quad \mathsf{cs}(A) = \mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J} \end{bmatrix}\Big).$$
Em particular, $|P| \leqslant |N|$.

Prova. A prova é por indução em $|P|$. Se $|P| = 0$, não há nada a provar. Suponha $|P| > 0$. Tome $p \in P$ e considere a matriz B^{-p}. É claro que as colunas de B^{-p} são independentes e que $\mathsf{cs}(B^{-p}) \subseteq \mathsf{cs}(A)$. Assim, por hipótese de indução, existe $J' \subseteq N$ tal que $|J'| = |P \setminus \{p\}| = |P| - 1$ e
$$\mathsf{cs}(A) = \mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B^{-p} & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}\Big).$$
Como $B^p \in \mathsf{cs}(A)$, então $B^p \in \mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B^{-p} & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}\Big)$. Logo, existe um vetor x sobre $P \setminus \{p\}$ e um vetor y sobre $N \setminus J'$ tal que
$$B^p = B^{-p}x + A^{N\setminus J'}y,$$
ou, equivalentemente,
$$B^{-p}x - B^p + A^{N\setminus J'}y = 0.$$
A última igualdade afirma que as colunas de $\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}$ são dependentes. Ora, como as colunas de B são linearmente independentes, então $\underline{y} \neq \emptyset$. Seja $n \in \underline{y}$ e $J := J' \cup \{n\}$. Pelo Lema 1.6, temos que
$$\mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}\Big) = \mathsf{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J} \end{bmatrix}\Big).$$

Assim,

$$\mathrm{cs}(A) = \mathrm{cs}\Big(\begin{bmatrix} B^{-p} & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}\Big) \subseteq \mathrm{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J'} \end{bmatrix}\Big) = \mathrm{cs}\Big(\begin{bmatrix} B & A^{N\setminus J} \end{bmatrix}\Big) \subseteq \mathrm{cs}(A),$$

como queríamos. □

Corolário 1.2. *Se A é uma matriz sobre $M \times N$ cujas colunas são independentes, então $|N| \leqslant |M|$.*

Prova. Seja E a matriz sobre $M \times M$ tal que $Ee_k^M = e_k^M$ para cada $k \in M$. É claro que $\mathrm{cs}(E) = \mathbb{R}^M$ e as colunas de E são independentes.[26] Ademais, $\mathrm{cs}(A) \subseteq \mathrm{cs}(E) = \mathbb{R}^M$. Logo, pelo Teorema 1.4, $|N| \leqslant |M|$. □

[26] Verifique essa afirmação!

Base Uma *base* do espaço coluna de uma matriz A sobre $M \times N$ é uma matriz B sobre $M \times P$ tal que as colunas de B são independentes e $\mathrm{cs}(A) = \mathrm{cs}(B)$. É claro que se B é uma base de $\mathrm{cs}(A)$, então as colunas de B são habitantes de $\mathrm{cs}(A)$.

O Lema 1.6 garante que colunas dependentes podem ser uma a uma dispensadas e, portanto, que toda matriz possui uma submatriz que é uma base de seu espaço coluna, como afirma o lema a seguir.

Lema 1.8. *Se A é uma matriz $M \times N$, então existe $J \subseteq N$ tal que A^J é uma base de A.* □

Lema 1.9. *Seja A uma matriz $M \times N$ e B uma matriz $M \times P$. Então, B é uma base de $\mathrm{cs}(A)$ se, e só se,*

(i) *as colunas de B são independentes e estão em $\mathrm{cs}(A)$, e*

(ii) *as colunas de $\begin{bmatrix} B & b \end{bmatrix}$ são dependentes para cada $b \in \mathrm{cs}(A)$.*

Prova. Suponha que B é uma base de $\mathrm{cs}(A)$. Por definição, as colunas de B são independentes e estão em $\mathrm{cs}(A)$. Logo, vale (i). Suponha que $b \in \mathrm{cs}(A)$. Como B é base, então $\mathrm{cs}(B) = \mathrm{cs}(A)$, donde $b \in \mathrm{cs}(B)$. O Lema 1.5 implica que $\begin{bmatrix} B & b \end{bmatrix}$ é dependente.

Suponha agora que valem (i) e (ii). Basta verificar que $\mathrm{cs}(B) = \mathrm{cs}(A)$. É evidente que $\mathrm{cs}(B) \subseteq \mathrm{cs}(A)$. Suponha que $b \in \mathrm{cs}(A)$. Como as colunas de B são independentes e $\begin{bmatrix} B & b \end{bmatrix}$ é dependente, então, pelo Lema 1.5, $b \in \mathrm{cs}(B)$. □

Teorema 1.5. *Sejam B_1 uma matriz $M \times N$ e B_2 uma matriz $M \times P$ cujas colunas são independentes. Se $\mathrm{cs}(B_1) = \mathrm{cs}(B_2)$, então $|N| = |P|$.*

Prova. Suponha que $\mathrm{cs}(B_1) = \mathrm{cs}(B_2)$. Como as colunas de B_2 são independentes e $\mathrm{cs}(B_2) \subseteq \mathrm{cs}(B_1)$, então, pelo Teorema 1.4, $|P| \leqslant |N|$. De forma similar, como as colunas de B_1 são independentes e $\mathrm{cs}(B_1) \subseteq \mathrm{cs}(B_2)$, então, pelo Teorema 1.4, $|N| \leqslant |P|$. Logo, $|N| = |P|$, como queríamos. □

Corolário 1.3. *Seja A uma matriz $M \times N$, B_1 uma matriz $M \times J$ e B_2 uma matriz $M \times K$. Se B_1 e B_2 são bases de $\mathrm{cs}(A)$, então $|J| = |K|$.* □

1.14 Coleções laminares

Seja V um conjunto finito. Uma coleção $\mathscr{L} \subseteq 2^V$ é dita *laminar* se

$$L_1, L_2 \in \mathscr{L} \quad \Longrightarrow \quad L_1 \subseteq L_2 \quad \text{ou} \quad L_2 \subseteq L_1 \quad \text{ou} \quad L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

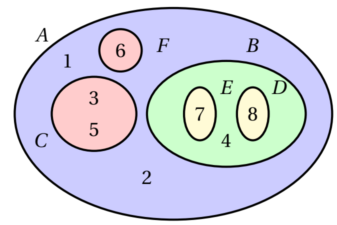


Figura 1.20: A figura ilustra uma coleção laminar $\{A, B, C, D, E, F\}$ de conjuntos, onde $A := \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B := \{4,7,8\}$, $C := \{3,5\}$, $D := \{8\}$, $E := \{7\}$, $F := \{6\}$.

Proposição 1.2. *Para todo conjunto finito e não vazio V e todo $\mathscr{L} \subseteq 2^V$, se $\mathscr{L}$ é laminar e $\emptyset \notin \mathscr{L}$, então $|\mathscr{L}| \leqslant 2|V| - 1$.*

Prova. A prova é por indução em $|V|$. Seja V um conjunto finito e não vazio e $\mathscr{L} \subseteq 2^V$ uma coleção laminar tal que $\emptyset \notin \mathscr{L}$. O resultado é imediato se $|V| = 1$. Suponha então que $|V| \geqslant 2$. Seja $\mathscr{M}$ o conjunto dos elementos maximais de $\mathscr{L}$ tais que $M \subset V$. Note que a maximalidade dos elementos de $\mathscr{M}$ aliado à laminaridade de $\mathscr{L}$ implica que $\mathscr{M}$ é uma coleção disjunta. Ademais, $|\mathscr{M}| \geqslant 2$. Considere um elemento $M \in \mathscr{M}$. Como $|M| < |V|$ e $\mathscr{L}_M := \{L \in \mathscr{L} \mid L \subset M\} \subseteq 2^M$ é uma coleção laminar tal que $\emptyset \notin \mathscr{L}_M$, temos, por hipótese de indução, que $|\mathscr{L}_M| \leqslant 2|M| - 1$. Note que

$$\mathscr{L} \subseteq \{V\} \cup \bigcup_{M \in \mathscr{M}} \mathscr{L}_M.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}| &\leqslant 1 + \sum_{M \in \mathscr{M}} |\mathscr{L}_M| \\
&\leqslant 1 + \sum_{M \in \mathscr{M}} (2|M| - 1) && \text{(hipótese de indução)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{M \in \mathscr{M}} 2|M| - \sum_{M \in \mathscr{M}} 1 \\
&\leqslant 1 + 2|V| - |\mathscr{M}| && \text{(pois } |\mathscr{M}| \geqslant 2\text{)} \\
&\leqslant 2|V| - 1
\end{aligned}$$

□

Sejam V e A conjuntos finitos e seja $\psi : 2^V \to 2^A$ uma função que leva cada subconjunto X de V em um subconjunto $\psi(X)$ (ou, simplesmente, ψX) de A. Lembre-se que $\mathscr{L} \subseteq 2^V$ é *laminar* se

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{ou} \quad L_2 \subseteq L_1 \quad \text{ou} \quad L_1 \cap L_2 = \emptyset$$

para cada $L_1, L_2 \in \mathscr{L}$. Por outro lado, dizemos que $X, Y \in 2^V$ são *propriamente intersectantes*, denotado $X \between Y$, se os conjuntos $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, e $X \cap Y$ são todos não vazios.

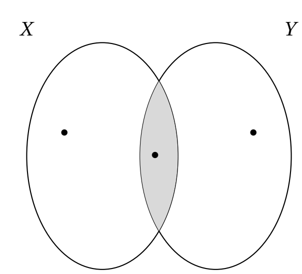


Figura 1.21: A figura ilustra conjuntos X e Y que são propriamente intersectantes: $X \cap Y, X \setminus Y, Y \setminus X \neq \emptyset$.

Lema 1.10. *Sejam V e A conjuntos finitos e seja $\psi : 2^V \to 2^A$. Suponha que $\mathscr{F} \subseteq 2^V$ é uma família de conjuntos tal que, para quaisquer conjuntos $X, Y \in \mathscr{F}$ com $X \cap Y \neq \emptyset$, valem:*

(i) $X \cup Y, X \cap Y \in \mathscr{F}$, *e*

(ii) $\mathbb{1}^A_{\psi X} + \mathbb{1}^A_{\psi Y} = \mathbb{1}^A_{\psi(X\cup Y)} + \mathbb{1}^A_{\psi(X\cap Y)}$.

Então, existe um subconjunto laminar $\mathscr{L}$ de $\mathscr{F}$ tal que

$$\mathsf{span}\{\mathbb{1}^A_{\psi L} \mid L \in \mathscr{L}\} = \mathsf{span}\{\mathbb{1}^A_{\psi F} \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Prova. Para simplificar, vamos escrever $\mathbb{1} := \mathbb{1}^A$. Para cada subconjunto $\mathscr{D}$ de $\mathscr{F}$, seja $[\mathscr{D}] := \mathsf{span}\{\mathbb{1}_{\psi D} \mid D \in \mathscr{D}\}$. Seja $\mathscr{L}$ um subconjunto laminar maximal de $\mathscr{F}$. Para cada $X \subseteq V$, seja $\#X$ o número de conjuntos de $\mathscr{L}$ que intersectam propriamente X, isto é, $\#X := |\{L \in \mathscr{L} \mid X \between L\}|$. Vamos mostrar que $\mathbb{1}_{\psi F} \in [\mathscr{L}]$ para cada $F \in \mathscr{F}$. A prova é por indução em $\#F$. Seja $F \in \mathscr{F}$. Se $\#F = 0$, então a maximalidade de $\mathscr{L}$ implica que $F \in \mathscr{L}$, donde $\mathbb{1}_{\psi F} \in [\mathscr{L}]$. Suponha então que $\#F > 0$ e seja $L \in \mathscr{L}$ tal que $F \between L$. Considere os conjuntos $F \cup L$ e $F \cap L$. Não é difícil mostrar[27] que

[27] Exercício!

$$\#(F \cup L) < \#F \quad \text{e} \quad \#(F \cap L) < \#F.$$

Agora, em virtude de (i), $F \cap L$ e $F \cup L$ estão ambos em $\mathscr{F}$. Logo, por hipótese de indução, $\mathbb{1}_{\psi(F\cup L)}, \mathbb{1}_{\psi(F\cap L)} \in [\mathscr{L}]$. Em virtude de (ii),

$$\mathbb{1}_{\psi F} + \mathbb{1}_{\psi L} = \mathbb{1}_{\psi(F\cup L)} + \mathbb{1}_{\psi(F\cap L)},$$

donde

$$\mathbb{1}_{\psi F} = \mathbb{1}_{\psi(F\cup L)} + \mathbb{1}_{\psi(F\cap L)} - \mathbb{1}_{\psi L},$$

e, portanto,[28] $\mathbb{1}_{\psi F} \in [\mathscr{L}]$. □

[28] Aqui, estamos usando o seguinte fato. Seja X um conjunto de vetores. Se $x_1, x_2 \in \mathsf{span}(X)$, então $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathsf{span}(X)$ para quaisquer λ e μ em $\mathbb{R}$.

1.15 Cadeias

Um certo tipo especial de coleção laminar merece destaque. Seja V um conjunto finito. Uma coleção $\mathscr{C} \subseteq 2^V$ é uma *cadeia* se

$$C_1, C_2 \in \mathscr{L} \quad \Longrightarrow \quad C_1 \subseteq C_2 \quad \text{ou} \quad C_2 \subseteq C_1$$

para cada $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$.

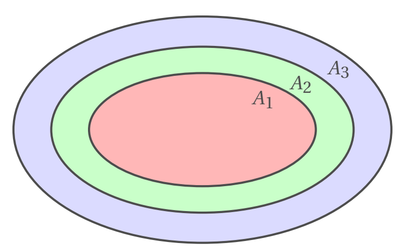


Figura 1.22: A figura ilustra uma cadeia.

Lema 1.11. *Sejam V e A conjuntos finitos e seja $\psi : 2^V \to 2^A$. Suponha que $\mathscr{F} \subseteq 2^V$ é uma família de conjuntos tal que, para quaisquer conjuntos $X, Y \in \mathscr{F}$, valem:*

(i) $X \cup Y, X \cap Y \in \mathscr{F}$, *e*

(ii) $\mathbb{1}^A_{\psi X} + \mathbb{1}^A_{\psi Y} = \mathbb{1}^A_{\psi(X\cup Y)} + \mathbb{1}^A_{\psi(X\cap Y)}$.

Então, existe uma cadeia $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$ tal que

$$\mathsf{span}\{\mathbb{1}^A_{\psi C} \mid C \in \mathscr{C}\} = \mathsf{span}\{\mathbb{1}^A_{\psi F} \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Prova. Pelo Lema 1.10, existe um subconjunto laminar maximal $\mathscr{L}$ de $\mathscr{F}$ tal que $[\mathscr{L}] = [\mathscr{F}]$. Seja $\mathscr{C}$ uma cadeia maximal cujos elementos estão em $\mathscr{L}$ tal que $[\mathscr{C}] \subseteq [\mathscr{F}]$. Seja $L \in \mathscr{L}$ e $\#L$ o número de elementos de C que são disjuntos de L, isto é, $\#L := |\{C \in \mathscr{C} \mid C \cap L = \emptyset\}$. Vamos mostrar, por indução em $\#L$, que $\mathbb{1}_{\psi L} \in [\mathscr{C}]$ para cada $L \in \mathscr{L}$, o que estabelece o lema. Seja $L \in \mathscr{L}$. Se $\#L = 0$, então $L \subseteq C$ ou $C \subseteq L$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Segue daí que $\mathscr{C} \cup \{L\}$ é uma cadeia. A maximalidade de $\mathscr{C}$ implica que $L \in \mathscr{C}$, donde $\mathbb{1}_{\psi L} \in [\mathscr{C}]$. Suponha agora que $\#L > 0$. Seja $C \in \mathscr{C}$ tal que $C \cap L = \emptyset$. Em virtude de (ii), $C \cup L, C \cap L \in \mathscr{F}$. Note que a maximalidade de $\mathscr{L}$ implica que $C \cup L \in \mathscr{L}$. Ademais, temos que $\#\emptyset < \#L$ e $\#(C \cup L) < \#L$.[29] Assim, por hipótese de indução $\mathbb{1}_{\psi\emptyset}, \mathbb{1}_{\psi(C\cup L)} \in [\mathscr{C}]$. Como $C \in \mathscr{C}$, temos que $\mathbb{1}_{\psi C} \in [\mathscr{C}]$. Agora, em virtude de (ii),

$$\mathbb{1}_{\psi L} = \mathbb{1}_{\psi(C\cup L)} + \mathbb{1}_{\psi\emptyset} - \mathbb{1}_{\psi C}$$

e, portanto, $\mathbb{1}_{\psi L} \in [\mathscr{C}]$, como queríamos. □

[29] Verifique!

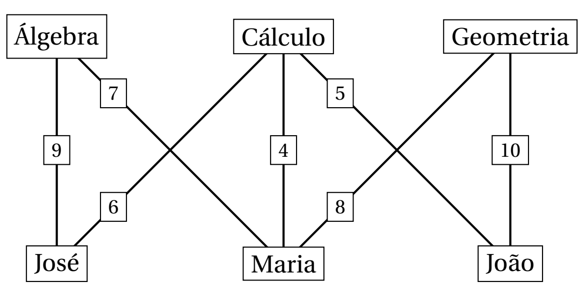
2

Introdução

O propósito deste capítulo é de exibir um exemplo ilustrativo, que dependa de pouquíssimos pré-requisitos, que destaque alguns dos problemas que estudaremos.

2.1 O Problema do Emparelhamento Perfeito de Custo Máximo em Grafos Bipartidos

Suponha que uma empresa realizou um processo de seleção de p candidatos para p vagas. Cada candidato recebe uma nota que indica a sua capacidade de trabalhar em uma vaga. Queremos alocar uma e somente uma vaga para cada candidato de tal forma a maximizar a soma das notas das alocações. Note que podemos representar este problema através de um grafo bipartido na qual uma das bipartições representa os candidatos e a outra, as vagas. Além disso, a cada aresta que une um candidato a uma vaga associamos a sua nota.



Agora vamos formalizar o problema. Para isso, vamos primeiro retomar algumas definições. Lembre-se que um grafo[1] $G = (V, E)$ é *bipartido* se existe um subconjunto S de V tal que toda aresta tem uma ponta em S e a outra em $S^c := V \setminus S$. Neste caso, S e S^c constituem uma *bipartição* de G.

Um *emparelhamento* em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto $M \subseteq E$ de arestas tal que nenhum par de arestas distintas de M tem pontas em comum. Ademais, dizemos que M é *perfeito* se todo vértice de G é ponta de uma aresta de M.

[1] Todos os grafos deste capítulo são simples, ou seja, não possuem arestas paralelas.

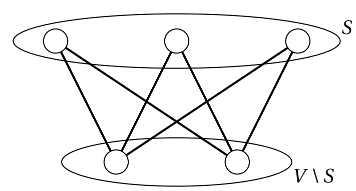


Figura 2.1: A figura ilustra um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição S e S^c.

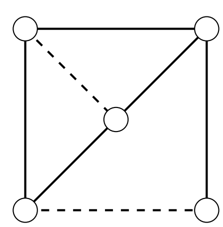


Figura 2.2: As linhas pontilhadas da figura ilustram um emparelhamento

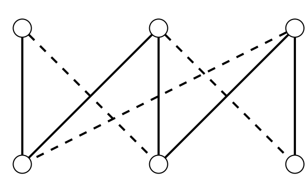


Figura 2.3: As linhas pontilhadas da figura ilustram um emparelhamento perfeito.

Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$ e uma função $w : E \to \mathbb{R}$ encontrar se existir um emparelhamento perfeito M tal que[2]

$$\widetilde{w}(M) := \sum_{e \in M} w(e)$$

é máximo, ou seja, $\widetilde{w}(M) \geqslant \widetilde{w}(N)$ para cada emparelhamento perfeito N de G. Um tal emparelhamento é dito de *custo máximo*.

[2] Para cada função $f : X \to \mathbb{R}$, definimos

$$\widetilde{f} : 2^X \to \mathbb{R}$$

pondo-se:

$$\widetilde{f}(Y) := \sum_{y \in Y} f(y)$$

para cada $Y \in 2^X$.

Formulação como um problema de programação linear inteira

Considere o seguinte problema de programação linear inteira. Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$ e uma função $w : E \to \mathbb{R}$, considere o conjunto das funções $x : E \to \{0, 1\}$ (ou $x \in \{0, 1\}^E$) tais que

$$\widetilde{x}(\delta(v)) = \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \tag{2.1}$$

para cada $v \in V$.

Seja F uma parte (subconjunto) de E. O *vetor de incidência* de F é uma função em $\{0, 1\}^E$, denotado $\mathbb{1}_F^E$ (ou simplesmente $\mathbb{1}_F$), tal que

$$\mathbb{1}_F(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in F \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.2}$$

para cada $e \in E$. Note que se M é um emparelhamento perfeito de G, então

$$\widetilde{\mathbb{1}_M}(\delta(v)) = \sum_{e \in \delta(v)} \mathbb{1}_M(e) = 1$$

para todo $v \in V$. Assim, $\mathbb{1}_M$ satisfaz (2.1). Por outro lado, suponha que $x \in \{0, 1\}^E$ satisfaz (2.1). Então, $M := \{e \in E \mid x(e) = 1\}$ é um emparelhamento perfeito de G. Logo, o problema do emparelhamento perfeito de custo máximo pode ser formulado como o seguinte problema, chamado de um *problema de programação linear inteira*:[3]

[3] $w^\top x := \sum_{e \in E} w(e) x(e)$.

$$\begin{array}{rl} \max & w^\top x \\ \text{sujeito a} & \widetilde{x}(\delta(v)) = 1 \text{ para cada } v \in V \\ & x \in \{0, 1\}^E. \end{array}$$

No que segue, vamos lidar com a relaxação linear do problema que consiste em trocar as restrições $x(e) \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$ pela restrição $x \in \mathbb{R}^E$ e $0 \leq x(e) \leq 1$ para cada $e \in E$. Um x que satisfaz as restrições da relaxação linear é chamado de *solução viável*.

Proposição 2.1. *Se x é uma solução viável para a relaxação linear, então existe solução viável para a relaxação linear $x^* \in \{0, 1\}^E$ tal que*

$$w^\top x^* \geqslant w^\top x.$$

Prova. Suponha que x é uma solução viável para a relaxação linear. A prova é por indução em $n := |\{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}|$. Se $n = 0$, não há nada a provar. Suponha $n > 0$. Escolha um caminho[4] simples e maximal P cujas arestas estão contidas no conjunto $\{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}$. Considere a última aresta, a, de P e denote por u o término de P. Como $\widetilde{x}(\delta(u)) = 1$ e $0 < x(a) < 1$, então existe uma aresta $f \neq a$ tal que $f \in \delta(u)$ e $0 < x(f) < 1$. Como P é maximal, então a ponta de f distinta de u está em P. Logo $\{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}$ contém as arestas de um circuito.[5] Seja C tal circuito, e suponha que arestas de C são $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Note que k é par, pois G é bipartido. Seja $J_0 := \{e_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}, i \text{ par}\}$ e $J_1 := \{e_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}, i \text{ ímpar}\}$. Considere os números $\widetilde{w}(J_0)$ e $\widetilde{w}(J_1)$. Ajuste a notação de tal forma que $\widetilde{w}(J_1) \geqslant \widetilde{w}(J_0)$. Seja

$$\varepsilon_e = \begin{cases} 1 - x(e), & \text{se } e \in J_1, \\ x(e), & \text{se } e \in J_0 \end{cases}$$

para cada $e \in C$. Tome $\varepsilon := \min\{\varepsilon_e \mid e \in C\}$. Considere agora o vetor $x' \in \mathbb{R}^E$ tal que

$$x'(e) := \begin{cases} x(e) + \varepsilon, & \text{se } e \in J_1, \\ x(e) - \varepsilon, & \text{se } e \in J_0, \text{ e} \\ x(e), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $e \in E$. Note que x' é uma solução viável[6] para a relaxação linear. A definição de ε implica que $x'(e) \in \{0,1\}$ para pelo menos uma aresta de C.[7] Note que

$$\begin{aligned} w^\top x' &= \sum_{e \in E} w(e)x'(e) \\ &= \sum_{e \in E \setminus C} w(e)x'(e) + \sum_{e \in J_1} w(e)x'(e) + \sum_{e \in J_0} w(e)x'(e) \\ &= \sum_{e \in E \setminus C} w(e)x(e) + \sum_{e \in J_1} w(e)(x(e)+\varepsilon) + \sum_{e \in J_0} w(e)(x(e)-\varepsilon) \\ &= \sum_{e \in E} w(e)x(e) + \sum_{e \in J_1} w(e)\varepsilon - \sum_{e \in J_0} w(e)\varepsilon \\ &= \sum_{e \in E} w(e)x(e) + \varepsilon\Big(\sum_{e \in J_1} w(e) - \sum_{e \in J_0} w(e)\Big) \\ &= \sum_{e \in E} w(e)x(e) + \varepsilon\big(\widetilde{w}(J_1) - \widetilde{w}(J_0)\big) \\ &\geqslant \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ &= w^\top x. \end{aligned}$$

Ora, $|\{e \in E \mid 0 < x'(e) < 1\}| < n$, donde, por hipótese de indução, existe $x^* \in \{0,1\}^E$ solução viável da relaxação linear tal que

$$w^\top x^* \geqslant w^\top x'.$$

No entanto, $w^\top x' \geqslant w^\top x$. Portanto, $w^\top x^* \geqslant w^\top x$, como queríamos. $\square$

[4] Um *caminho* P é uma sequência $\langle u_0, a_1, \ldots, a_k, u_k \rangle$ tal que $u_0, u_1, \ldots, u_k \in V$, $a_1, \ldots, a_k \in E$ e para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, as pontas da aresta a_i são u_{i-1} e u_i. O vértice u_0 é o *início* de P e u_k é o *término* de P. O caminho P é *simples* se $u_i \neq u_j$ para cada $0 \leqslant i < j \leqslant k$. O caminho simples P é *maximal* se para cada $a \in \delta(u_k)$ o caminho $\langle u_0, a_1, \ldots, a_k, u_k, a, u_{k+1} \rangle$, onde u_{k+1} é a ponta de a distinta de u_k, não é simples.

[5] Um caminho $\langle u_0, a_1, \ldots, a_k, u_k \rangle$ com $k \geqslant 2$ é um *ciclo* se $a_i \neq a_j$ para cada $1 \leqslant i < j \leqslant k$ e $u_0 = u_k$ e um *circuito* se $\langle u_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, u_{k-1} \rangle$ é um caminho simples e $u_k = u_0$.

[6] Prove! Onde é usada a hipótese de que G é bipartido?

[7] Prove!

2.2 Exercícios

Exercício 2.1. Seja G um grafo bipartido e $w \in \mathbb{R}^E$ uma função peso. O problema do emparelhamento de peso máximo em G pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \max \quad & w^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & \widetilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1 \text{ para cada } v \in V \\ & x \in \{0,1\}^E. \end{aligned}$$

A *relaxação linear* do problema consiste em trocar as restrições $x(e) \in \{0,1\}$ para cada $e \in E$ pela restrição $x \in \mathbb{R}^E$ e $0 \leq x(e) \leq 1$ para cada $e \in E$. Prove a versão da Proposição 2.1 para esta versão do problema, ou seja, mostre que se x é uma solução viável para a relaxação linear, então existe $x^* \in \{0,1\}^E$ tal que $w^\top x^* \geqslant w^\top x$.

3

Lema de Farkas

Um *sistema sobre $M \times N$* é um par (A, b) onde A é uma matriz sobre $M \times N$ e b é um vetor sobre M. É comum escrever $Ax \leqslant b$ para denotar o sistema (A, b) quando o interesse estiver no conjunto[1] $\{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax \leqslant b\}$, o qual, por preguiça denotaremos por $\{Ax \leqslant b\}$. Quando $M = \emptyset$, definimos

$$\{Ax \leqslant b\} = \mathbb{R}^N.$$

[1] Para vetores u e v sobre N, escrevemos $u \leqslant v$, sempre que $u(n) \leqslant v(n)$ para cada $n \in N$.

3.1 Eliminação de Fourier-Motzkin

Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$. Para cada $j \in N$, definimos

$$\begin{aligned} M_j^0 &:= \{i \in M \mid A(i,j) = 0\} \\ M_j^+ &:= \{i \in M \mid A(i,j) > 0\} \\ M_j^- &:= \{i \in M \mid A(i,j) < 0\} \end{aligned}$$

Teorema 3.1. *Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e $e := e^N$. Para cada $j \in N$ existe uma matriz B sobre $(M_j^0 \cup M_j^+ \times M_j^-) \times M$ tal que*

(3.1)
(i) $(BA)e_j = 0$.
(ii) Para cada vetor x sobre N, se $Ax \leqslant b$, então $BAx \leqslant Bb$.
(iii) Para cada vetor x sobre N, se $BAx \leqslant Bb$, então existe um real λ tal que $A(x + \lambda e_j) \leqslant b$.

Prova. Seja $j \in N$. Suponha primeiro que $Ae_j = 0$. É fácil ver que, nesse caso, $B := I$ satisfaz (i), (ii), e (iii). Suponha daqui em diante que $Ae_j \neq 0$. Seja $M' := M_j^0 \cup M_j^+ \times M_j^-$, $f := e^M$ e $g := e^{M'}$.[2] Seja B a matriz sobre $M' \times M$ tal que

$$\begin{aligned} g_i^\top B &:= f_i^\top \quad \text{para cada } i \in M_j^0 \\ g_{(i,k)}^\top B &:= \frac{1}{A(i,j)} f_i^\top - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top \quad \text{para cada } (i,k) \in M_j^+ \times M_j^- \end{aligned}$$

[2] Certifique-se de que o argumento está correto mesmo quando $M' = \emptyset$!.

Vamos provar (i). Suponha primeiro que $i \in M^0$. Então,

$$(BA)(i,j) = g_i^\top BAe_j = f_i^\top Ae_j = A(i,j) = 0.$$

Suponha agora que $(i,k) \in M_j^+ \times M_j^-$. Então,

$$\begin{aligned}(BA)(i,j) &= g_{(i,k)} BAe_j \\ &= \Big(\frac{1}{A(i,j)} f_i^\top - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top\Big) Ae_j \\ &= \frac{1}{A(i,j)} f_i^\top Ae_j - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top Ae_j \\ &= \frac{1}{A(i,j)} A(i,j) - \frac{1}{A(k,j)} A(k,j) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Isso prova (i).

A prova de (ii) segue imediatamente de $B \geqslant 0$.[3]

Para a prova de (iii), suponha que $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $BAx \leqslant Bb$. Vamos mostrar que existe um real λ tal que $A(x + \lambda e_j) \leqslant b$. Seja $(i,k) \in M_j^+ \times M_j^-$. Para cada $i \in M$, definimos $a_i := f_i^\top A$. Então,[4]

$$\begin{gathered} g_{(i,k)}^\top BAx \leqslant g_{(i,k)}^\top Bb \\ \equiv \\ \Big(\frac{1}{A(i,j)} f_i^\top - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top\Big) Ax \leqslant \Big(\frac{1}{A(i,j)} f_i^\top - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top\Big) b \\ \equiv \\ \frac{1}{A(i,j)} f_i^\top Ax - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top Ax \leqslant \frac{1}{A(i,j)} f_i^\top b - \frac{1}{A(k,j)} f_k^\top b \\ \equiv \\ \frac{a_i x}{A(i,j)} - \frac{a_k x}{A(k,j)} \leqslant \frac{b(i)}{A(i,j)} - \frac{b(k)}{A(k,j)} \\ \equiv \\ \frac{b(k) - a_k x}{A(k,j)} \leqslant \frac{b(i) - a_i x}{A(i,j)} \end{gathered}$$

Seja $\lambda_i := (b(i) - a_i x)/A(i,j)$ para cada $i \in M_j^+ \cup M_j^-$. Então,

$$\lambda^- := \sup\{\lambda_k \mid k \in M^-\} \leqslant \inf\{\lambda_i \mid i \in M^+\} =: \lambda^+.$$

Seja λ um número real[5] no intervalo[6] $[\lambda^-, \lambda^+]$. Vamos mostrar que

$$A(x + \lambda e_j) \leqslant b.$$

Considere primeiro um índice $i \in M^0$. Observe que

$$a_i x = f_i^\top Ax = (g_i^\top B)Ax \leqslant g_i^\top Bb = f_i^\top b = b(i).$$

[3] Suponha que u e v são vetores sobre J tais que $u \leqslant v$ e seja y um vetor sobre J tal que $y \geqslant 0$. Seja $j \in J$. De $u(j) \leqslant v(j)$ e $y(j) \geqslant 0$ vem que $y(j)u(j) \leqslant y(j)v(j)$ e, portanto,

$$y^\top u = \sum_{j \in J} y(j)u(j) \leqslant \sum_{j \in J} y(j)v(j) = y^\top v.$$

[4] O símbolo $\equiv$ abrevia "se, e somente se".

[5] Assim, $\lambda \notin \{-\infty, \infty\}$.

[6] Para números reais r_1 e r_2, $[r_1, r_2]$ denota o conjunto $\{r \in \mathbb{R} \mid r_1 \leqslant r \leqslant r_2\}$.

Considere agora um índice $i \in M^+ \cup M^-$. Note que se $i \in M^+$, então $\lambda \leqslant \lambda^+ \leqslant \lambda_i = (b(i) - a_i x)/A(i,j)$. Como $A(i,j) > 0$, então $\lambda A(i,j) \leqslant b(i) - a_i x$. Se $i \in M^-$, então $\lambda \geqslant \lambda^- \leqslant \lambda_i$. Como $A(i,j) < 0$, então $\lambda A(i,j) \leqslant b(i) - a_i x$. Agora,

$$a_i(x + \lambda e_j) = a_i x + \lambda a_i e_j = a_i x + \lambda A(i,j) \leqslant a_i x + b(i) - a_i x = b(i).$$

Isso completa a prova de (iii) e do teorema. □

Corolário 3.1. *Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e $e := e^N$. Para cada $j \in N$ existe uma matriz B sobre $(M_j^0 \cup M_j^+ \times M_j^-) \times M$ tal que*

(i) $(BA)e_j = 0$.

(ii) $\{Ax \leqslant b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \{BAx \leqslant Bb\} = \emptyset$.

□

3.2 O Lema de Farkas

Eis o célebre Lema de Farkas.

Teorema 3.2. *Para cada sistema $Ax \leqslant b$ sobre $M \times N$,*

$$\{Ax \leqslant b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \exists y \in \mathbb{R}^M : y \geqslant 0, y^\top A = 0, y^\top b < 0.$$

Prova. A prova da necessidade é por indução no número de colunas não nulas de A. Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e suponha que $\{Ax \leqslant b\} = \emptyset$.

Suponha primeiro que $A = 0$. Como $\{Ax \leqslant b\} = \emptyset$, então existe $i \in M$ tal que $b(i) < 0$. Seja $y := e_i^M$. Então, $y \geqslant 0$, $y^\top A = 0$ e $y^\top b = b(i) < 0$, como queríamos.

Suponha agora que $A \neq 0$. Seja $e := e^N$ e $j \in N$ tal que $Ae_j \neq 0$. Pelo Corolário 3.1 existe uma matriz B sobre $M' := (M_j^0 \cup M_j^+ \times M_j^-) \times M$ tal que

$$(BA)e_j = 0 \qquad \text{e} \qquad \{Ax \leqslant b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \{BAx \leqslant Bb\} = \emptyset.$$

Note que BA tem pelo menos uma coluna não nula a menos que A. Logo, por hipótese de indução, existe um vetor z sobre M' tal que $z \geqslant 0$, $z^\top(BA) = 0$ e $z^\top(Bb) < 0$. Seja $y^\top := z^\top B$. Então, $y \geqslant 0$ — pois $z \geqslant 0$ e $B \geqslant 0$ —, $y^\top A = (z^\top B)A = z^\top(BA) = 0$, e $y^\top b = (z^\top B)b = z^\top(Bb) < 0$. Isso completa a prova do teorema. □

Teorema 3.3. *Para cada sistema $Ax = b$ sobre $M \times N$,*

$$\{Ax = b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \exists y \in \mathbb{R}^M : y^\top A = 0, y^\top b < 0.$$

Prova. Para a prova da necessidade, seja (A, b) um sistema sobre $M \times N$. Suponha que $\{Ax = b\} = \emptyset$. Considere as matrizes

$$A' := \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b' := \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

e o sistema $A'x \leqslant b'$. Note que

$$\{Ax = b\} = \{A'x \leqslant b'\}.$$

Pelo Teorema 3.2, existem vetores y_1, y_2 sobre M tais que $y_1, y_2 \geqslant 0$, $y_1^\top A - y_2^\top A = 0$ e $y_1^\top b - y_2^\top b < 0$. Seja $y := y_1 - y_2$. Então $y^\top A = 0$ e $y^\top b < 0$, como queríamos. □

Teorema 3.4. *Para cada sistema $Ax = b$ sobre $M \times N$,*

$$\{x \geqslant 0, Ax = b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \exists y \in \mathbb{R}^M : y^\top A \geqslant 0, y^\top b < 0.$$

Prova. Para a prova da necessidade, seja $Ax = b$ um sistema sobre $M \times N$. Suponha que $\{x \geqslant 0, Ax = b\} = \emptyset$. Considere as matrizes[7]

$$A' := \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b' := \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o sistema $A'x \leqslant b'$. Note que

$$\{x \geqslant 0, Ax = b\} = \{A'x \leqslant b'\}.$$

Pelo Teorema 3.2, existem vetores y_1, y_2 sobre M e y_3 sobre N tais que
$y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$,
$y_1^\top A - y_2^\top A - y_3^\top \boldsymbol{I} = 0$, e
$y_1^\top b - y_2^\top b < 0$.
Seja $y := y_1 - y_2$. Então $y^\top A = y_3^\top \geqslant 0$ e $y^\top b < 0$, como queríamos. □

[7] Aqui, $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade sobre $N \times N$.

Teorema 3.5. *Para cada sistema $Ax \leqslant b$ sobre $M \times N$,*

$$\{x \geqslant 0, Ax \leqslant b\} = \emptyset \quad \equiv \quad \exists y \in \mathbb{R}^M : y \geqslant 0, y^\top A \geqslant 0, y^\top b < 0.$$

Prova. Para a prova da necessidade, seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$. Suponha que $\{x \geqslant 0, Ax \leqslant b\} = \emptyset$. Considere as matrizes[8]

$$A' := \begin{bmatrix} A \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b' := \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o sistema $A'x \leqslant b'$. Note que

$$\{x \geqslant 0, Ax \leqslant b\} = \{A'x \leqslant b'\}.$$

Pelo Teorema 3.2, existem vetores y_1 sobre M e y_2 sobre N tais que $y_1, y_2 \geqslant 0$, $y_1^\top A - y_2^\top \boldsymbol{I} = 0$ e $y_1^\top b < 0$. Seja $y := y_1$. Então $y^\top A = y_2^\top \geqslant 0$ e $y^\top b < 0$, como queríamos. □

[8] Aqui, $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade sobre $N \times N$ e 0 é o vetor coluna sobre N.

Desigualdades implicadas. Uma *desigualdade* sobre N é um par (c,δ), onde c é um vetor sobre N e $\delta \in \mathbb{R}$ é um número real. De forma similar ao que fizemos com sistemas, vamos escrever $c^\top x \leqslant \delta$ para denotar a desigualdade (c,δ). Também de forma similar, vamos abreviar e escrever $\{c^\top x \leqslant \delta\}$ em vez de $\{x \in \mathbb{R}^N \mid c^\top x \leqslant \delta\}$.

Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e $c^\top x \leqslant \delta$ uma desigualdade sobre N. Dizemos que $c^\top x \leqslant \delta$ é *implicada* por $Ax \leqslant b$ se

$$\{Ax \leqslant b\} \subseteq \{c^\top x \leqslant \delta\}. \tag{3.2}$$

Teorema 3.6. *Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e $c^\top x \leqslant \delta$ uma desigualdade sobre N. Se $\{Ax \leqslant b\} \neq \emptyset$, então*

$$c^\top x \leqslant \delta \text{ é implicada por } Ax \leqslant b$$

$$\equiv$$

$$\exists y \in \mathbb{R}^M_+ : y^\top A = c^\top,\ y^\top b \leqslant \delta.$$

Prova. Suponha que $\{Ax \leqslant b\} \neq \emptyset$.

Para a prova da necessidade, suponha que a desigualdade $c^\top x \leqslant \delta$ é implicada por $Ax \leqslant b$. Admita, por um momento, que

$$\{y \in \mathbb{R}^M_+ \mid y^\top A = c^\top,\ y^\top b \leqslant \delta\} = \emptyset.$$

Pelo Lema de Farkas, existe $z \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$Az + \lambda b \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad c^\top z + \lambda\delta < 0.$$

Suponha primeiro que $\lambda = 0$. Nesse caso, $A(-z) \leqslant 0$ e $c^\top(-z) > 0$. Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $Ax \leqslant b$ e $\mu > (c^\top x - \delta)/c^\top z$. Note que $\mu > 0$, pois $c^\top x - \delta \leqslant 0$ e $c^\top z < 0$. Ora, $A(x - \mu z) \leqslant b$ e

$$c^\top(x - \mu z) = c^\top x - \mu c^\top z > c^\top x - \frac{c^\top x - \delta}{c^\top z} c^\top z = \delta,$$

o que contraria $\{Ax \leqslant b\} \subseteq \{cx \leqslant \delta\}$ uma vez que $x - \mu z \in \{Ax \leqslant b\}$. Suponha agora que $\lambda > 0$. Nesse caso, $A(-z/\lambda) \leqslant b$ e $c^\top(-z/\lambda) > \delta$ o que mais uma vez contraria $\{Ax \leqslant b\} \subseteq \{cx \leqslant \delta\}$ uma vez que $-z/\lambda \in \{Ax \leqslant b\}$.

Para a prova da suficiência, suponha que $y \in \mathbb{R}^M_+$ é tal que $y^\top A = c^\top$ e $y^\top b \leqslant \delta$. Suponha que $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $Ax \leqslant b$. Então,

$$c^\top x = (y^\top A)x = y^\top(Ax) \leqslant y^\top b \leqslant \delta.$$

Assim, $\{Ax \leqslant b\} \subseteq \{cx \leqslant \delta\}$. □

3.3 Cadeias de Markov e matrizes estocásticas

Uma matriz P sobre $M \times M$ é *estocástica* se

- $P(i,j) \in [0,1]$ para cada $i,j \in M$, e
- $(e_i^M P)\mathbb{1}_M^M = \sum_{j \in M} P(i,j) = 1$ para cada $i \in M$,

ou seja, os elementos de P são números no intervalo $[0,1]$ e cada linha de P tem soma igual a 1.

Teorema 3.7. *Para toda matriz estocástica $P \in \mathbb{R}^{M \times M}$ existe um vetor π sobre M, que é uma distribuição de probabilidade, tal que $P^\top \pi = \pi$.*

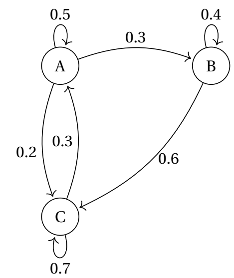


Figura 3.1: Cadeia de Markov com três estados (A, B, C).

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ B & 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ C & 0.3 & 0.0 & 0.7 \end{array}$$

Figura 3.2: Matriz estocástica correspondente à cadeia de Markov.

Prova. Seja $P \in \mathbb{R}^{M \times M}$ uma matriz estocástica. Vamos mostrar que existe $x \in \mathbb{R}_+^M$ tal que $x \neq 0$ e $(P^\top - I)x = 0$. Pelo Exercício 3.3, basta mostrar que não existe $y \in \mathbb{R}^M$ tal que $(P - I)y < 0$ ou, equivalentemente, $Py < y$. Seja $k \in M$ tal que $y(k) = \min\{y(i) \mid i \in M\}$. Ora,

$$y(k) > \sum_{j \in M} P(k,j)y(j) \geqslant \sum_{j \in M} P(k,j)y(k) = y(k) \sum_{j \in M} P(k,j) = y(k).$$

Essa contradição mostra que não existe $y \in \mathbb{R}^M$ tal que $Py < y$ e, consequentemente, existe $\pi \in \mathbb{R}^M$ tal que $P^\top \pi = \pi$. □

3.4 Jogos cooperativos

Um *jogo cooperativo* é um par (N, v), onde:

- N é um conjunto finito, cujos elementos são denominados de *jogadores*.
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$ é uma função que associa a cada $S \in 2^N$ — chamado de *coalizão* — um valor $v(S)$, que representa o ganho que a coalizão S pode obter por meio da cooperação.

O conjunto N é denominado de *grande coalizão*.

Exemplo 3.1. Considere o seguinte jogo cooperativo (N, v), onde $N := \{1,2,3\}$ é um conjunto de empresas que podem formar coalizões para reduzir custos, e a função v é dada por:

- ganhos individuais, $v(\{1\}) = 5$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{3\}) = 2$.
- ganhos de coalizões de dois jogadores, $v(\{1,2\}) = 10$, $v(\{1,3\}) = 8$, $v(\{2,3\}) = 7$.
- ganho da grande coalizão, $v(\{1,2,3\}) = 15$.

Núcleo

Seja $G := (N, v)$ um jogo cooperativo. O *núcleo* de G é o conjunto de vetores x sobre N, denominados de vetores de *pagamentos*, que satisfaz as seguintes condições:

1. Eficiência: A soma dos pagamentos de todos os jogadores é igual ao valor da grande coalizão:

$$\tilde{x}(N) = v(N).$$

2. Racionalidade coletiva: Para toda coalizão $S \in 2^N$, a soma dos pagamentos dos jogadores em S é pelo menos igual ao valor, $v(S)$, que S pode obter por conta própria:

$$\tilde{x}(S) \geqslant v(S) \quad \text{para todo } S \in 2^N.$$

Eis a forma fraca do Teorema de Bondareva-Shapley.

Teorema 3.8. *O núcleo de um jogo (N, v) é vazio se, e somente se, existe $z \in \mathbb{R}^{2^N}$ tal que*

(i) $z \geqslant 0$,

(ii) $\sum_{S \in 2^N} z(S) \mathbb{1}_S^N = \mathbb{1}_N^N$, *e*

(iii) $\sum_{S \in 2^N} z(S) v(S) > v(N)$.

Prova. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \tilde{x}(N) &= v(N) \\ \tilde{x}(S) &\geqslant v(S) \text{ para cada } S \in 2^N. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Farkas, o sistema é inviável se, e só se, existe um real λ e um vetor y sobre $\mathbb{R}^{2^N}$ tal que $y \geqslant 0$ e

$$\sum_{S \in 2^N} y(S) \mathbb{1}_S + \lambda \mathbb{1}_N = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{S \in 2^N} y(S) v(S) + \lambda v(N) > 0. \tag{3.4}$$

Afirmamos que $\lambda < 0$. De fato, suponha primeiro que $\lambda = 0$. Então, em virtude de (3.3), $\sum_{S \in 2^N} y(S) \mathbb{1}_S = 0$, donde $y = 0$. Mas, $y = 0$ implica que $\sum_{S \in 2^N} y(S) v(S) = 0$, o que contraria (3.4). Portanto, $\lambda \neq 0$. Como $y \geqslant 0$, temos que $\sum_{S \in 2^N} y(S) \mathbb{1}_S \geqslant 0$ o que, em virtude de (3.3), implica que $\lambda \mathbb{1}_N \leqslant 0$. Por conseguinte, $\lambda \leqslant 0$. No entanto, $\lambda \neq 0$ e, portanto, $\lambda < 0$.

Para completar a prova, defina $z := -y/\lambda$. Como $\lambda < 0$ e $y \geqslant 0$, então $z \geqslant 0$. Ademais, $\sum_{S \in 2^N} z(S) \mathbb{1}_S^N = \mathbb{1}_N^N$, e $\sum_{S \in 2^N} z(S) v(S) > v(N)$. □

3.5 *Caminhos em digrafos*

Um digrafo é uma tripla $D := (V, A, \psi)$, em que V é um conjunto finito e não-vazio de elementos chamados *vértices*, A é um conjunto finito de elementos chamados *arcos*, e $\psi : A \to V \times V$ é uma função, chamada de *função de incidência*, que leva cada arco a em um par, $\psi(a)$ de vértices distintos. Se $\psi(a) = (u, v)$, então dizemos que u é a *ponta inicial* (ou a *cauda*) de a e v é a *ponta final* (ou *cabeça*) de a. Note que podem haver dois arcos, digamos a e b, tais que $\psi(a) = \psi(b)$; tais arcos são ditos *paralelos*. A ponta inicial de um arco a é denotada por $*a$ enquanto que a ponta final é denotada por $a*$.

Seja $X \subseteq V$. Dizemos que um arco *entra* (*sai*) de X se sua ponta inicial (final) está em $V \setminus X$ e a ponta final (inicial) está em X. Assim, $\delta^-(X) := \{a \in$

$A \mid *a \in V \setminus X, a* \in X\}$. O conjunto dos arcos que entra em X é denotado por $\delta^-_D(X)$, ou simplesmente, quando o contexto permitir, $\delta^-(X)$. O conjunto dos arcos que sai de X é denotado por $\delta^+_D(S)$. Para simplificar, para cada vértice $v \in V$, vamos escrever $\delta^-(v)$ no lugar de $\delta^-(\{v\})$ e $\delta^+(v)$ no lugar de $\delta^+(\{v\})$.

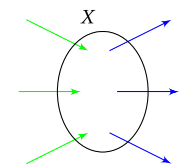


Figura 3.3: Os arcos azuis são os arcos de $\delta^+(X)$ enquanto que, os verdes, são os arcos de $\delta^-(X)$.

Suponha que s e t são vértices distintos de D. Dizemos que um subconjunto T de vértices é um *$\bar{s}t$-conjunto* se $t \in T$ e $s \notin T$.

Sejam s e t vértices de D. Um *st-caminho* é uma sequência

$$\langle v_0, a_1, \ldots, a_k, v_k \rangle,$$

onde $k \in \mathbb{N}$, tal que (i) $u_0 = s$ e $u_k = t$, (ii) $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$, (iii) $\{a_1 \ldots, a_k\} \subseteq A$ e (iv) $*a_i = v_{i-1}$ e $a_i* = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Proposição 3.1. *Seja D um digrafo e $s \neq t$ vértices de D. Então, não existe um st-caminho em D se, e somente se, existe um $\bar{s}t$-conjunto T de D tal que $\delta^-(T) = \emptyset$.*

Prova. Para a prova da necessidade, suponha que não existe um $\bar{s}t$-caminho em D. Seja T o conjunto dos vértices $v \in V$ tais que existe um vt-caminho em D. Note que $s \notin T$ e $t \notin T$, donde S é um $\bar{s}t$-conjunto de D. Seja $v \in T$ e $a \in \delta^-(v)$. Como $v \in V$, então existe um vt-caminho P em D. Agora, $a \in \delta^-(v)$ implica que existe um $*a, t$-caminho em D. Logo, $*a \in T$. Concluímos, assim, que $\delta^-(T) = \emptyset$.

Para a prova da suficiência, suponha que existe um $\bar{s}t$-conjunto T de D tal que $\delta^-(T) = \emptyset$. Suponha por um momento que existe um st-caminho

$$\langle u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k \rangle$$

em D. Seja i o menor inteiro em $\{0, \ldots, k\}$ tal que $u_i \in T$. Como $u_0 = s$ e $s \notin T$, temos que $i > 0$. A minimalidade de i implica que $u_{i-1} \notin T$, donde $a_i \in \delta^-(T)$. Essa contradição estabelece que um tal caminho não pode existir. □

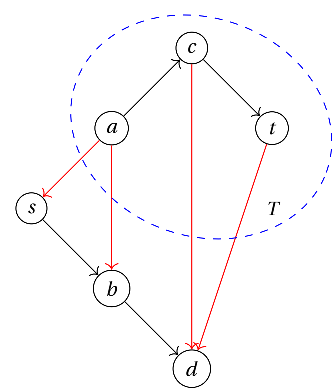


Figura 3.4: A figura ilustra um digrafo e um $(\bar{s}, t)$-conjunto T tal que $\delta^- T = \emptyset$ e, portanto, não há caminhos de s até t.

Vamos agora modelar o problema como um de determinar uma solução para um certo sistema de inequações e usar o Lema de Farkas para exibir, quando um tal sistema não possuir solução, um $\bar{s}t$-conjunto T tal que $\delta^-(T) = \emptyset$.

Seja $D := (V, A)$ um digrafo e $s \neq t$ vértices de D. Um *st-fluxo* em D é uma função $x : A \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\widetilde{x}(\delta^-(u)) - \widetilde{x}(\delta^+(u)) = 0 \text{ para cada } u \in V \setminus \{s, t\}.$$

O valor de um fluxo x, denotado $v(x)$, é o número

$$v(x) := \widetilde{x}(\delta^-(t)) - \widetilde{x}(\delta^+(t)).$$

O *suporte* de x, denotado $\underline{x}$, é o conjunto

$$\underline{x} := \{a \in A \mid x(a) \neq 0\}.$$

Lema 3.1. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo. Se x é um st-fluxo em D e T é um $\bar{s}t$-conjunto, então*

$$\widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)) = v(x).$$

Prova. Suponha que x é um *st*-fluxo em D e T é um $\bar{s}t$-conjunto. Então,[9]

$$v(x) = \sum_{v \in T} (\widetilde{x}(\delta^-(v)) - \widetilde{x}(\delta^+(v)) = \widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)).$$

□

[9] Verifique!

Corolário 3.2. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo. Se x é um st-fluxo e $v(x) > 0$ em D, então $\underline{x}$ contém um st-caminho, ou seja, D contém um st-caminho cujos arcos estão em $\underline{x}$.*

Prova. Suponha que x é um *st*-fluxo de valor $v(x) > 0$. Seja T um $\bar{s}t$-conjunto. Pelo Lema 3.1, $\widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)) > 0$. No entanto, $x \geqslant 0$ e, consequentemente, $\widetilde{x}(\delta^-(T)) > 0$ e, assim, $\underline{x} \cap \delta^-(T) \neq \emptyset$. Pela Proposição 3.1, o digrafo[10] $(V, \underline{x}, \psi_{\upharpoonright \underline{x}})$ contém um *st*-caminho. Portanto, $\underline{x}$ contém um *st*-caminho. □

[10] Para uma função $f : X \to Y$ e $X' \subseteq X$, escrevemos $f_{\upharpoonright X'}$ para denotar a restrição de f a X', ou seja, $f_{\upharpoonright X'} : X' \to Y$ é tal que $f_{\upharpoonright X'}(x) = f(x)$ para cada $x \in X'$.

Proposição 3.2. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo e $s \neq t$ vértices de D. Considere o conjunto P dos $x \in \mathbb{R}^A_+$ tal que*

(3.5) *(i)* $\widetilde{x}(\delta^-(s)) - \widetilde{x}(\delta^+(s)) = -1$,
(ii) $\widetilde{x}(\delta^-(t)) - \widetilde{x}(\delta^+(t)) = 1$,
(iii) $\widetilde{x}(\delta^-(u)) - \widetilde{x}(\delta^+(u)) = 0$ *para cada* $u \in V \setminus \{s, t\}$.

Então, $P = \emptyset$ se, e só se, existe um $\bar{s}t$-conjunto T tal que $\delta^-(T) = \emptyset$.

Prova. Note que P é o conjunto dos *st*-fluxos em D de valor 1. Observe que a equação $\widetilde{x}(\delta^-(s)) - \widetilde{x}(\delta^+(s)) = -1$ é redundante.[11] Se $P \neq \emptyset$, então o Corolário 3.2 implica que existe um *st*-caminho. Vamos agora mostrar que se $P = \emptyset$, então existe um $\bar{s}t$-conjunto T tal que $\delta^-(T) = \emptyset$. Suponha que $P = \emptyset$. Pelo Lema de Farkas, existe $y \in \mathbb{R}^V$ tal que

$$\sum_{v \in V} y(v)(\mathbb{1}_{\delta^-(v)} - \mathbb{1}_{\delta^+(v)}) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -y(s) + y(t) < 0.$$

[11] Prove isso!

Seja $e := e^A$. Para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \Big(\sum_{v \in V} y(v)(\mathbb{1}_{\delta^-(v)} - \mathbb{1}_{\delta^+(v)})\Big) e_a \\ &= \sum_{v \in V} y(v)(\mathbb{1}_{\delta^-(v)} e_a - \mathbb{1}_{\delta^+(v)} e_a) \\ &= y(a*) - y(*a) \end{aligned}$$

Seja $T := \{v \in V \mid y(v) < y(s)\}$. Como $y(t) < y(s)$, temos que $t \in T$. Evidentemente, $s \notin T$. Seja $v \in T$ e suponha que $a \in \delta^-(v)$. Então, $y(a*) - y(*a) \geqslant 0$, donde $y(*a) \leqslant y(a*) = y(v) < y(s)$. Logo, $y(*a) < y(s)$, donde $*a \in T$. Segue daí que $\delta^-(T) = \emptyset$, como desejado. □

3.6 Exercícios

Exercício 3.1. Considere a formulação (3.5).

(i) Prove que a equação (3.5)(ii) é redundante.

(ii) Considere a formulação obtida de (3.5) através da remoção da igualdade (3.5)(ii). Prove a Proposição 3.2 usando o Lema de Farkas para esta nova formulação.

Exercício 3.2. Mostre que o sistema

$$\begin{aligned} Px_0 + Ax_1 &= b_0 \\ Qx_0 + Bx_1 &\leq b_1 \\ x_1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

é inviável se, e somente se, existem vetores y e $z \geqslant 0$ tais que

$$\begin{aligned} y^\top P + z^\top Q &= 0 \\ y^\top Q + z^\top B &\geqslant 0 \\ y^\top b_0 + z^\top b_1 &< 0. \end{aligned}$$

Exercício 3.3. Para um vetor x sobre N, escrevemos $x \geq 0$ se $x \geqslant 0$ e $x \neq 0$. Seja A uma matriz sobre $M \times N$. Mostre que

$$\{Ax = 0, x \geq 0\} = \emptyset \quad \equiv \quad \exists y \in \mathbb{R}^M : y^\top A > 0.$$

Exercício 3.4. Seja $D := (V, A)$ um digrafo, $c \in \mathbb{R}_+^A$ e $s \neq t \in V$. Seja $\mathscr{P}$ o conjunto dos st-caminhos simples de D. Considere mais uma vez a formulação do problema do caminho como um problema de fluxo. Seja X o conjunto dos $x \in \{0,1\}_+^A$ tais que

$\widetilde{x}(\delta^-(s)) - \widetilde{x}(\delta^+(s)) = -1$,

$\widetilde{x}(\delta^-(t)) - \widetilde{x}(\delta^+(t)) = 1$, e

$\widetilde{x}(\delta^-(u)) - \widetilde{x}(\delta^+(u)) = 0$ para cada $u \in V \setminus \{s, t\}$.

Mostre que

(i) $\min\{c^\top x \mid x \in X\} = \min\{\widetilde{c}(Q) \mid Q \in \mathscr{P}\}$.

(ii) $\max\{c^\top x \mid x \in X\} \neq \max\{\widetilde{c}(Q) \mid Q \in \mathscr{P}\}$.

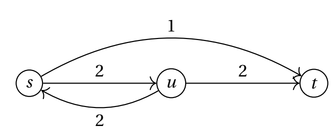


Figura 3.5: Sugestão para o item (ii)!

4
Dualidade

4.1 Preliminares

É conveniente estender as operações de supremo e ínfimo para quaisquer subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para isso, vamos considerar o conjunto

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

onde $-\infty$ e ∞ são símbolos que não ocorrem em $\mathbb{R}$. Ademais, admitimos que

$$-\infty < r < \infty$$

para cada $r \in \mathbb{R}$.

O *supremo* de um subconjunto X de $\mathbb{R}$, denotado $\sup X$, é o menor $u \in \mathbb{R}^*$ tal que $x \leqslant u$ para cada $x \in X$. O *ínfimo* de um subconjunto X de $\mathbb{R}$, , denotado $\inf X$, é o maior $\ell \in \mathbb{R}^*$ tal que $\ell \leqslant x$ para cada $x \in X$. Essas definições, em particular, implicam que:

$$\sup \emptyset = -\infty \quad \text{e} \quad \inf \emptyset = \infty.$$

Proposição 4.1. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Então,*

(i) $\sup X = \infty$ *se, e só se, para cada $r \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $r < x$.*

(ii) $\inf X = -\infty$ *se, e só se, para cada $r \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $x < r$.*

□

4.2 Teorema Forte da Dualidade

Um *problema de otimização* sobre $M \times N$ é uma tripla (A, b, c), onde A é uma matriz sobre $M \times N$, b é um vetor sobre M e c é um vetor sobre N. O *poliedro primal* é o conjunto $\{Ax \leqslant b\} =: P(A, b)$ enquanto que o *poliedro dual* é o conjunto $\{y^\top A = c^\top, y \geqslant 0\} =: D(A, c)$. Um vetor em $P(A, b)$ é dito uma *solução viável primal* e um vetor em $D(A, c)$ é uma *solução viável dual*. Às vezes, por preguiça, dizemos simplesmente que tais vetores são *soluções viáveis*. O *problema primal* consiste em determinar

$$\sup\{c^\top x \mid x \in P(A, b)\} =: c^*(P(A, b))$$

e o problema dual consiste em determinar

$$\inf\{y^\top b \mid y \in D(A,c)\} =: b^*(D(A,c)).$$

Um vetor x^* em $P(A,b)$ tal que $c^\top x^* = \sup\{c^\top x \mid x \in P(A,b)\}$ é uma *solução ótima primal* enquanto que um vetor ${}^*y$ em $D(A,c)$ tal que ${}^*y^\top b = \inf\{y^\top b \mid y \in D(A,c)$ é uma *solução ótima dual*.

Quando o contexto permitir, vamos escrever P em vez de $P(A,b)$ e D em vez de $D(A,c)$.

Teorema 4.1. *Seja (A,b,c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Se $x \in P(A,b)$ e $y \in D(A,c)$, então*

(i) $c^\top x \leqslant y^\top b$, *ou seja,* $c^*(P) \leqslant b^*(D)$.

(ii) $c^\top x = y^\top b \quad \equiv \quad \forall i \in M : y(i)(b-Ax)(i) = 0.$

Prova. Suponha que $x \in P(A,b)$ e $y \in D(A,c)$. Então,

$$\begin{aligned}
y^\top b - c^\top x &= y^\top b - (y^\top A)x \\
&= y^\top b - y^\top (Ax) \\
&= y^\top (b - Ax) \\
&= \sum_{i \in M} y(i)(b-Ax)(i) \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de $y \geqslant 0$ e $Ax \leqslant b$. Isso prova (i). Para a prova de (ii), note que

$$c^\top x = y^\top b \quad \equiv \quad \sum_{i \in M} y(i)(b-Ax)(i) = 0.$$

Como $y(i) \geqslant 0$ e $(b-Ax)(i) \geqslant 0$, então

$$\sum_{i \in M} y(i)(b-Ax)(i) = 0 \quad \equiv \quad y(i)(b-Ax)(i) = 0 \text{ para cada } i \in M.$$

□

O resultado do item (i), isto é, se $x \in P$ e $y \in D$, então $c^\top x \leqslant y^\top b$ é chamado de *Teorema Fraco da Dualidade*. O resultado do item (ii) é chamado de *condição de folgas complementares*. Observe que, de forma equivalente, (ii) pode ser escrito como:

$$y(i) > 0 \quad \Longrightarrow \quad (b-Ax)(i) = 0$$

para cada $i \in M$, ou ainda, mais brevemente como

$$y^\top (b - Ax) = 0.$$

Eis o Teorema Forte da Dualidade:

Teorema 4.2. *Seja (A,b,c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Se $P(A,b) \neq \emptyset$ ou $D(A,b) \neq \emptyset$, então $c^*(P(A,b)) = b^*(D(A,c))$.*

Prova. Suponha primeiro que $P \neq \emptyset$ e $D = \emptyset$. Seja $x \in P$ uma solução viável primal. Como $D = \emptyset$, então, pelo Lema de Farkas,[1] existe $d \in \mathbb{R}^N$ tal que $Ad \leqslant 0$ e $c^\top d > 0$. Ora, $x + \lambda d \in P$ para cada $\lambda \geqslant 0$. No entanto, $c^\top d > 0$ implica que $c^*(P) = \infty$.[2] Por definição, $\inf \emptyset = \infty$. Portanto, $c^*(P) = b^*(D)$.

Suponha agora que $P = \emptyset$ e $D \neq \emptyset$. Seja $y \in D$ uma solução viável dual. Como $P = \emptyset$, temos, pelo Lema de Farkas, que existe $f \in \mathbb{R}^M$ tal que $f \geqslant 0$, $f^\top A = 0$ e $f^\top b < 0$. Note que $y + \lambda f \in D(A,c)$ para cada $\lambda \geqslant 0$. No entanto, $f^\top b < 0$ implica que $b^*(D) = -\infty$. Por definição, $c^*(P) = \sup \emptyset = -\infty$. Portanto, $c^*(P) = b^*(D)$.

Suponha finalmente que $P(a,b) \neq \emptyset$ e $D(A,b) \neq \emptyset$. Seja $\bar{x} \in P$ uma solução viável primal e $\bar{y} \in D$ uma solução viável dual. Pelo Teorema Fraco da Dualidade, temos que $c^*(P) \in \mathbb{R}$ e $b^*(D) \in \mathbb{R}$. É suficiente então mostrar que existe $x \in P$ e $y \in D$ tais que $c^\top x = y^\top b$. Para isso, basta mostrar que existe $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^M$ tais que $Ax \leqslant b$, $y^\top A = c^\top$, $y \geqslant 0$ e $c^\top x \geqslant y^\top b$. Assim, vamos considerar o seguinte sistema[3]

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\top \\ 0 & -A^\top \\ 0 & -I \\ -c^\top & b^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b \\ c \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e provar que tal sistema admite uma solução. Suponha que este não é o caso. Então, de acordo com o Lema de Farkas, existem vetores $u \in \mathbb{R}^M_+$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N_+$ e $w \in \mathbb{R}^M_+$ e um real $\lambda \geqslant 0$ tais que

$$u^\top A - \lambda c^\top = 0, v_1^\top A^\top - v_2^\top A^\top - w^\top I + \lambda b^\top = 0, \text{ e } u^\top b + v_1^\top c - v_2^\top c < 0.$$

Definimos $v := v_2 - v_1$. Assim,

$$u^\top A = \lambda c^\top, v^\top A^\top + w^\top = \lambda b^\top \text{ e } u^\top b < v^\top c.$$

Como $w \geqslant 0$, então $v^\top A^\top \leqslant \lambda b^\top$ ou, equivalentemente, $Av \leqslant \lambda b$. O resto da prova é dividida em dois casos, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Caso 1: $\lambda = 0$.

Nesse caso, $Av \leqslant 0$ e $u^\top A = 0$. Suponha primeiro que $v^\top c = c^\top v > 0$. Então, $\bar{x} + \mu v \in P$ para todo $\mu \geqslant 0$. Mas, $c^\top v > 0$ implica que $c^*(P) = \infty$, o que contraria $c^*(P) \in \mathbb{R}$. Suponha agora que $c^\top v \leqslant 0$. Como $u^\top b < c^\top v$, então $u^\top b < 0$. De $u^\top A = 0$ e $\bar{y} \in D$ vem que $\bar{y} + \mu u \in D$ para todo $\mu \geqslant 0$. Mas, $u^\top b < 0$ implica que $b^*(D) = -\infty$ o que contraria $b^*(D) \in \mathbb{R}$.

Caso 2: $\lambda > 0$.

[1] Como $D = \emptyset$, então não existe $y \in \mathbb{R}^M_+$ tal que $A^\top y = c$. Pelo Teorema 3.4, existe $d \in \mathbb{R}^N$ tal que $Ad = d^\top A^\top \leqslant 0$ e $c^\top d > 0$.

[2] De fato, seja $r \in \mathbb{R}$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com

$$\lambda > (r - c^\top x)/c^\top d.$$

Assim,

$$c^\top (x + \lambda d) > c^\top x + \frac{r - c^\top x}{c^\top d} c^\top d > r.$$

Logo, pela Proposição 4.1,

$$\sup\{c^\top x \mid x \in P\} = \infty.$$

[3] Observe que

0 é sobre $M \times M$,
0 é sobre $N \times N$,
0 é sobre $N \times N$,
0 é sobre $M \times N$,
I é a matriz identidade sobre $M \times M$.

Nesse caso,
$$\frac{1}{\lambda}u^\top A = c^\top, A\frac{1}{\lambda}v \leqslant b, \text{ e} \frac{1}{\lambda}u^\top b < \frac{1}{\lambda}v^\top c.$$
donde $\hat{x} := v/\lambda$ e $\hat{y} := u/\lambda$ são soluções viáveis primais e duais. No entanto, $\hat{y}^\top b < c^\top \hat{x}$, o que contraria o Teorema Fraco da Dualidade.

Concluímos assim que existem $x \in P$ e $y \in D$ tais que $c^\top x = y^\top b$ e, portanto, $c^*(P) = b^*(D)$, como desejado. □

Corolário 4.1. *Seja (A,b,c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Se $c^*(P) \in \mathbb{R}$ ou $b^*(D) \in \mathbb{R}$, então $c^*(P) = b^*(D)$.* □

Considere um problema de otimização (A,b,c). Pelo Teorema Forte da Dualidade, estamos autorizados a escrever

$$\max\{c^\top x \mid x \in P(A,b)\} = \min\{y^\top b \mid y \in D(A,c)\}$$

sempre que $P(A,b) \neq \emptyset$ e $D(A,c) \neq \emptyset$ ou, equivalentemente, sempre que $c^*(P) \in \mathbb{R}$ ou $b^*(D) \in \mathbb{R}$.

Para o próximo teorema, vamos necessitar revisitar a seguinte definição. Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e J um subconjunto de N. Escrevemos A^J para denotar a submatriz de A que consiste das colunas que estão em J, ou seja, A^J é a matriz sobre $M \times J$ tal que

$$A^J f_j = Ae_j$$

para cada $j \in J$, onde $f := e^J$ e $e := e^N$. Seja I um subconjunto de M. De forma análoga, escrevemos A_I para denotar a submatriz de A que consiste das linhas eque estão em I, ou seja,

$$h_i^\top A_I = g_i^\top A,$$

onde $h := h^I$ e $g := e^M$. Note que $(A^\top)^I = A_I^\top$ para cada $I \subseteq M$.

Lembre-se que as colunas de uma matriz A sobre $M \times N$ são *linearmente dependentes* se existe $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $Ax = 0$ e $x \neq 0$.[4] As colunas de A são *linearmente independentes* se não são linearmente dependentes, ou seja, se para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$Ax = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

[4] Lembre-se que $x \neq 0$ quer dizer que $x(n) \neq 0$ para algum $n \in N$.

Lembre-se que o *suporte* de um vetor x sobre N, denotado $\underline{x}$, é o conjunto

$$\underline{x} := \{i \in N \mid x(i) \neq 0\}.$$

Teorema 4.3. *Seja $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $b \in \mathbb{R}^M$ e $x \in \mathbb{R}_+^N$. Se $Ax = b$, então existe $u \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $Au = b$ e $A^{\underline{u}}$ é linearmente independente (e, portanto, $|\underline{u}| \leqslant |M|$).*

Prova. Suponha que $Ax = b$. Seja $u \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $|\underline{u}|$ é mínimo em relação às propriedades:

$$\underline{u} \subseteq \underline{x} \quad \text{e} \quad Au = b.$$

Vamos mostrar que $A^{\underline{u}}$ é linearmente independente. Eis a prova. Suponha, por um momento, que $A^{\underline{u}}$ é linearmente dependente. Então, existe $d \in \mathbb{R}^N$ tal que $\underline{d} \subseteq \underline{u}$, $Ad = 0$ e $d \neq 0$. Podemos supor, tomando-se $-d$ no lugar de d, que existe $j \in \underline{u}$ tal que $d(j) < 0$. Seja $\lambda_j := -u(j)/d(j)$ para cada $j \in \underline{u}$ com $d(j) < 0$ e

$$\lambda := \min\{\lambda_j \mid j \in \underline{u}, d(j) < 0\}.$$

Note que $\lambda > 0$. Vamos mostrar que $z := u + \lambda d$ é tal que $Az = b$ e $z \geqslant 0$. Ora, $Az = A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad = b + 0 = b$. Seja $j \in \underline{u}$. Se $d(j) \geqslant 0$, então $z(j) = x(j) + \lambda d(j) \geqslant 0$, pois $x(j) \geqslant 0$, $\lambda > 0$ e $d(j) \geqslant 0$. Se $d(j) < 0$, então $z(j) = x(j) + \lambda d(j) \geqslant x(j) + \lambda_j d(j) = 0$. Ademais, seja $k \in \underline{u}$ tal que $\lambda = \lambda_k$. Então, $z(k) = x(k) + \lambda d(k) = 0$. Logo, $\underline{z} \subset \underline{u}$. Mas, isto contraria a escolha de u. Portanto, $A^{\underline{u}}$ é linearmente independente. □

O tipo de combinação linear, uma envolvendo coeficientes não-negativos, das colunas de uma matriz, como no Teorema 4.3, é chamado de *combinação cônica*, e merece destaque. Seja A uma matriz sobre $M \times N$. O *cone* de A, denotado $\mathsf{cone}(A)$, é o conjunto

$$\mathsf{cone}(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^N_+\}.$$

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^M$. Um vetor $b \in \mathbb{R}^M$ é combinação cônica de A se existe $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ tal que b é combinação cônica de $\left[a_1 \ldots a_n\right]$. O conjunto das combinações cônicas de A é denotado $\mathsf{cone}(A)$.

Assim, o Teorema 4.3 pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 4.4. *Seja A um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^M$. Se $b \in \mathsf{cone}(A)$, então existe um subconjunto linearmente independente B de A tal que $b \in \mathsf{cone}(B)$ (e, portanto, $|B| \leqslant |M|$).* □

Teorema 4.5. *Seja (A, b, c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Se $c^*(P) \in \mathbb{R}$, então existe $y \in D$ tal que $z^\top b = c^*(P)$ (ou seja, z é ótimo para o dual) e $A^{\underline{z}}$ é linearmente independente.*

Prova. Suponha que $c^*(P) \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Forte da Dualidade, existem $x \in P$ e $y \in D$ tais que $c^\top x = y^\top b$. Como $y \in D$, então $y \in \mathbb{R}^M_+$ e $A^\top y = c$. Pelo Teorema 4.3, existe $z \in \mathbb{R}^M_+$ tal que $\underline{z} \subseteq \underline{y}$, $A^\top z = c$ e $A^{\underline{z}}$ é linearmente independente. Ora, a condição de folgas complementares aliada a otimalidade de x e y implica que

$$y(i) > 0 \Longrightarrow (b - Ax)(i) = 0$$

para cada $i \in M$. Seja $i \in M$. Suponha que $z(i) > 0$. Como $\underline{z} \subseteq \underline{y}$, então $y(i) > 0$ e, portanto, $(b - Ax)(i) = 0$. Logo, o par x, z satisfaz folgas complementares e, consequentemente, $z^\top b = c^*(P)$. □

Corolário 4.2. *Seja A uma matriz $M \times N$, b um vetor sobre M, c um vetor sobre N e δ um número real. Se $\emptyset \neq \{Ax \leqslant b\} \subseteq \{c^\top x \leqslant \delta\}$, então existe $y \in \mathbb{R}^M_+$ tal que $y^\top A = c^\top$ e $y^\top b \leqslant \delta$.*

Prova. Considere o problema de otimização (A, b, c). Note que $\emptyset \neq \{Ax \leqslant b\}$ implica que $c^*(P) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\{Ax \leqslant b\} \subseteq \{c^\top x \leqslant \delta\}$ implica que $c^*(P) \leqslant \delta$. Portanto, $c^*(P) \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Forte da Dualidade, $c^*(P) = b^*(D) \leqslant \delta$ e, portanto, existe $y \in \mathbb{R}^M_+$ tal que $y^\top A = c^\top$ e $y^\top b = b^*(D) \leqslant \delta$. □

Seja $Ax \leqslant b$ e $c^\top x \leqslant \delta$ como no corolário acima. Se

$$\emptyset \neq \{Ax \leqslant b\} \subseteq \{c^\top x \leqslant \delta\},$$

então dizemos que $c^\top x \leqslant \delta$ é *implicada* por $Ax \leqslant b$.

Convenção. Seja (A, b, c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Sempre que não houver possibilidade de confusão, para cada $i \in M$, vamos denotar por a_i a i-ésima linha de A, isto é,

$$a_i := e_i^M A.$$

Proposição 4.2. *Seja (A, b, c) um problema de otimização sobre $M \times N$. Suponha que $c^*(P) \in \mathbb{R}$. Para cada $i \in M$,*

não existe uma solução ótima primal $x \in P$ tal que $a_i x < b(i)$

se, e somente se,

existe uma solução ótima dual $z \in D$ tal que $z(i) > 0$.

Prova. Seja $\delta := c^*(P)$. Para a necessidade, seja $i \in M$ e suponha que não existe uma solução ótima primal $x \in P$ tal que $a_i x < b(i)$. Então, $a_i x \geqslant b(i)$ para toda solução ótima primal $x \in P$. Isso implica que

$$\{Ax \leqslant b, c^\top x \geqslant \delta\} \subseteq \{a_i x \geqslant b(i)\}.$$

Note que $c^*(P) \in \mathbb{R}$ implica que $\{Ax \leqslant b, c^\top x \geqslant \delta\} \neq \emptyset$. Pelo Corolário 4.2, existe $y \in \mathbb{R}^M_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$y^\top A - \lambda c^\top = -a_i \quad \text{e} \quad y^\top b - \lambda\delta \leqslant -b(i).$$

Seja

$$d := y + e_i^M.$$

Observe que $d(i) > 0$, $d^\top A = \lambda c^\top$ e $d^\top b \leqslant \lambda\delta$. Temos os seguintes casos:

Caso 1: $\lambda = 0$.

Nesse caso, $d^\top A = 0$ e $d^\top b \leqslant 0$. Seja $\bar{y} \in D$ uma solução ótima para o dual e considere o vetor $z := \bar{y} + d$. É claro que $z \in D$ — pois $z^\top A = (\bar{y} + d)^\top A = \bar{y}^\top A + d^\top A = c$ e $z \geqslant 0$, uma vez que $\bar{y} \geqslant 0$ e $d \geqslant 0$. Além disso, $z^\top b = (\bar{y} + d)^b = \bar{y}^\top b + d^\top b \leqslant \delta$ e, consequentemente, z é uma solução ótima dual. Finalmente, $z(i) > 0$, pois $\bar{y} \geqslant 0$ e $d(i) > 0$. Logo, z é uma solução ótima dual tal que $z(i) > 0$.

Caso 2: $\lambda > 0$.

Nesse caso, seja $z := d/\lambda$. Então, $z^\top A = c^\top$ e $z^\top b \leqslant \delta$. Como $z \geqslant 0$, temos que z é uma solução ótima dual tal que $z(i) > 0$.

Isso completa a prova da necessidade.

Para a suficiência, seja $i \in M$ e suponha que existe uma solução ótima dual $y \in D$ tal que $y(i) > 0$. Seja $x \in P$ uma solução ótima primal. Por folgas complementares, $a_i x = b(i)$. □

4.3 Fluxo máximo

Seja $D := (V, A)$ um digrafo, $s \neq t$ vértices de D e $c \in \mathbb{R}^A_+$ uma função *capacidade*. Um (s,t)-fluxo[5] é c-viável se $x \leqslant c$. O *problema do fluxo máximo* consiste em encontrar um (s,t)-fluxo c-viável de D cujo *valor*, $\nu(x) = \widetilde{x}(\delta^-(t)) - \widetilde{x}(\delta^+(t))$ é máximo, isto é, $\nu(x) \geqslant \nu(z)$ para todo st-fluxo c-viável z de D.

[5] Lembre-se que $x \in \mathbb{R}^A_+$ é um (s,t)-fluxo se $\widetilde{x}(\delta^- v) = \widetilde{x}(\delta^+ v)$ para cada $v \in V \setminus \{s,t\}$.

Um *$(\bar{s}, t)$-corte* de D é um subconjunto K de A tal que $K = \delta^- T$ para algum $(\bar{s}, t)$-conjunto T. A *capacidade* de K é o número $\widetilde{c}(K)$. Um $(\bar{s}, t)$-corte K de D é de capacidade *mínima* se $\widetilde{c}(K) \leqslant \widetilde{c}(J)$ para todo $(\bar{s}, t)$-corte J de D.

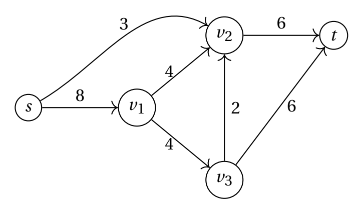


Figura 4.1: A figura ilustra uma instância do Problema do Fluxo Máximo. O número que rotula os arcos do digrafo da figura é a capacidade do arco.

A próxima proposição relaciona os valores de um (s,t)-fluxo c-viável e de um $(\bar{s}, t)$-corte de D (Teorema Fraco da Dualidade):

Proposição 4.3. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo, $s \neq t$ vértices de D e $c \in \mathbb{R}^A_+$. Se x é um (s,t)-fluxo c-viável e T é $(\bar{s}, t)$-conjunto de D, então*

(i) $\nu(x) \leqslant \widetilde{c}(\delta^-(T))$.

(ii) $\nu(x) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$ *se, e somente se, para cada arco $a \in A$,*

$$a \in \delta^-(T) \Longrightarrow x(a) = c(a) \qquad e \qquad a \in \delta^+(T) \Longrightarrow x(a) = 0.$$

(iii) *se $\nu(x) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$, então x é um st-fluxo c-viável de valor máximo e $\delta^-(T)$ é um st-corte de capacidade mínima.*

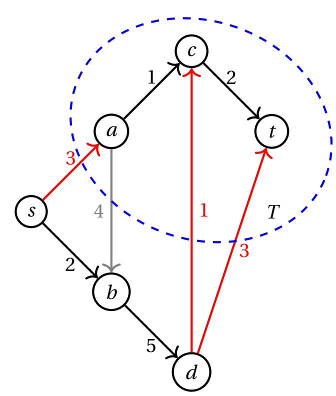


Figura 4.2: A figura ilustra um $(\bar{s}, t)$-corte composto dos arcos vermelhos cuja capacidade vale 7.

Prova. Suponha que x é um st-fluxo c-viável e T é $s\bar{t}$-conjunto de D. Pelo Lema 3.1,

$$\nu(x) = \widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)) \leqslant \widetilde{x}(\delta^-(T)) \leqslant \widetilde{c}(\delta^-(T)). \tag{4.1}$$

Isso prova (i).

Para a prova de (ii), suponha que $v(x) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$ e, assim, vale igualdade em todas as passagens de (4.1). Então, $\widetilde{x}(\delta^-(T)) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$, donde $x(a) = c(a)$ para cada $a \in \delta^-(T)$ e $\widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)) = \widetilde{x}(\delta^-(T))$, donde $x(a) = 0$ para cada $a \in \delta^+(T)$. Finalmente, suponha que

$(*)$ $x(a) = c(a)$ para cada $a \in \delta^-(T)$, e

$(**)$ $x(a) = 0$ para cada $a \in \delta^+(T)$.

Ora, $(*)$ implica que $\widetilde{x}(\delta^-(T)) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$ e $(**)$ implica que

$$\widetilde{x}(\delta^-(T)) - \widetilde{x}(\delta^+(T)) = \widetilde{x}(\delta^-(T)),$$

donde $v(x) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$.

Para a prova de (iii), suponha que $v(x) = \widetilde{c}(\delta^-(T))$. Seja z um st-fluxo c-viável, K um st-corte e U um $\bar{s}t$-conjunto U tal que $K = \delta^-(U)$. Então,

$$v(z) \leqslant \widetilde{c}(\delta^-(T)) = v(x) \leqslant \widetilde{c}(\delta^-(U)),$$

onde a primeira desigualdade segue do item (i); a primeira igualdade, por hipótese; e, a segunda desigualdade, por (i). Isso prova que x tem valor máximo e $\delta^-(T)$ tem capacidade mínima. □

Proposição 4.4. *Seja D um digrafo, $s \neq t \in V$ e $c \in \mathbb{R}^A_+$. Considere o seguinte problema primal:*

$$\begin{aligned}
&\max && \lambda \\
&\text{sujeito a} && \widetilde{x}(\delta^-(s)) - \widetilde{x}(\delta^+(s)) + \lambda = 0, \\
&&& \widetilde{x}(\delta^-(t)) - \widetilde{x}(\delta^+(t)) - \lambda = 0, \\
&&& \widetilde{x}(\delta^-(v) - \widetilde{x}(\delta^+(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}, \\
&&& x \leqslant c, \\
&&& x \in \mathbb{R}^A_+, \\
&&& \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

cujo problema dual é:

$$\begin{aligned}
&\min && c^\top z \\
&\text{sujeito a} && y(a*) - y(*a) + z(a) \geqslant 0 \quad \forall a \in A, \\
&&& y(s) - y(t) = 1, \\
&&& y \in \mathbb{R}^V, \\
&&& z \in \mathbb{R}^A_+
\end{aligned} \tag{4.3}$$

(i) Existe uma solução ótima primal x^*, λ^* e uma solução ótima dual, digamos y^*, z^*, tais que $\lambda^* = c^\top z^*$.

(ii) Existe um (s,t)-fluxo c-viável de valor máximo em D.

Prova. Note que (ii) é uma consequência imediata de (i). Para a prova de (i), observe que $x = 0$ e $\lambda = 0$ constituem uma solução viável primal. Além disso, seja T um $\bar{s}t$-conjunto. Defina $y \in \mathbb{R}^V$ pondo-se $y := \mathbb{1}^V_{T^c}$ (ou seja, $y(v) = 0$ se $v \in T$ e $y(v) = 1$ se $v \in T^c$) e $z \in \mathbb{R}^A$ pondo-se $z := \mathbb{1}^A_{\delta^-(T)}$ (ou seja, $z(a) = 1$ se $a \in \delta^-(T)$ e $z(a) = 0$ se $a \notin \delta^-(T)$). Não é difícil checar[6] que o par y, z é uma solução viável dual. Segue daí, em virtude do Teorema Forte da Dualidade, que existe uma solução ótima primal x^*, λ^* e uma solução ótima dual, digamos y^*, z^* tais que $\lambda^* = c^\top z^*$. Concluímos, assim, que existe um (s,t)-fluxo c-viável de valor máximo em D. □

[6] De fato, como $y(s) = 1$ e $y(t) = 0$, então $y(s) - y(t) = 1$. Se $a \in A$ tem as duas pontas em T ou em T^c, então $y(a*) = y(*a)$ e $z(a) = 0$, donde $y(a*) - y(*a) + z(a) = 0$. Se $a \in \delta^- T$, então $y(a*) = 0, y(*a) = 1$ e $z(a) = 1$, donde $y(a*) - y(*a) + z(a) = 0$. Se $a \in \delta^+ T$, então $y(a*) = 1, y(*a) = 0$ e $z(a) = 0$, donde $y(a*) - y(*a) + z(a) = 1$.

Eis o célebre Teorema do Fluxo Máximo e do Corte Mínimo:

Teorema 4.6. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo, $s \neq t$ vértices de D, $c \in \mathbb{R}^A_+$, $\mathscr{X}$ o conjunto dos (s,t)-fluxos c-viáveis e $\mathscr{C}$ o conjunto dos $(\bar{s}, t)$-conjuntos de D. Então,*

$$\max\{v(x) \mid x \in \mathscr{X}\} = \min\{\tilde{c}(\delta^-(T) \mid T \in \mathscr{C}\}.$$

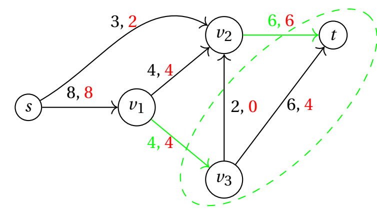


Figura 4.3: A figura ilustra o Teorema 4.6. O par de números k, f indica que k é a capacidade do arco e f é o valor do fluxo no arco. O fluxo da figura tem valor 10. O st-corte $\delta^-(\{v_3, t\})$, cujos arcos têm cor vermelha, tem capacidade 10.

Prova. Considere os problemas primal (4.2) e dual (4.3).[7] A Proposição 4.4(i) garante a existência de uma solução ótima primal x^*, λ^* e uma solução ótima dual, digamos y^*, z^*, tais que $\lambda^* = c^\top z^*$. Observe que, por folgas complementares, temos que

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad z^*(a) > 0 \Longrightarrow x^*(a) = c(a),\\
&\text{(ii)} \quad x^*(a) > 0 \Longrightarrow y^*(a*) - y^*(*a) + z^*(a) = 0.
\end{aligned}$$

para cada $a \in A$. Seja $T := \{v \in V \mid y^*(v) < y^*(s)\}$. Note que T é um $\bar{s}t$-conjunto. Suponha que $a \in \delta^-(T)$. Então, $z^*(a) \geqslant y^*(*a) - y^*(a*) > 0$, pois $*a \notin T$ e $a* \in T$. Como $z^*(a) > 0$, temos, por (i), que $x^*(a) = c(a)$. Suponha que $a \in \delta^+(T)$. Então, $y^*(a*) - y^*(*a) + z^*(a) \geqslant y^*(a*) - y^*(*a) > 0$, donde, em virtude de (ii), temos que $x^*(a) = 0$. Pela Proposição 4.3(ii), $v(x^*) = \tilde{c}(\delta^- T)$. Finalmente, a Proposição 4.3(iii) implica que x tem valor máximo e $\delta^- T$ tem capacidade mínima. □

[7] Ei-los:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda\\
\text{suj. a} \quad & \tilde{x}(\delta^-(s)) - \tilde{x}(\delta^+(s)) + \lambda = 0,\\
& \tilde{x}(\delta^-(t)) - \tilde{x}(\delta^+(t)) - \lambda = 0,\\
& \tilde{x}(\delta^-(v) - \tilde{x}(\delta^+(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\},\\
& x \leqslant c,\\
& x \in \mathbb{R}^A_+,\\
& \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^\top z\\
\text{suj. a} \quad & y(a*) - y(*a) + z(a) \geqslant 0 \quad \forall a \in A,\\
& y(s) - y(t) = 1,\\
& y \in \mathbb{R}^V,\\
& z \in \mathbb{R}^A_+.
\end{aligned}$$

4.4 *Caminhos aumentadores*

Vamos agora fornecer uma prova alternativa do Teorema do Fluxo Máximo e do Corte Mínimo que envolve a noção de caminhos aumentadores. Para isso, precisamos definir a noção de um caminho não orientado em um digrafo.

Caminhos não orientados. Seja, assim, D um digrafo. Um *(u_0, u_k)-caminho não orientado* P em D é uma sequência $\langle u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k \rangle$ tal que

- $k \in \mathbb{N}$,
- $u_0, \ldots, u_k \in V_D$,
- $a_1, \ldots, a_k \in A_D$, e
- para cada $i \in [k]$, $a_i \simeq u_{i-1}u_i$ e, neste caso, a_i é dito um arco *direto* de P, ou $a_i \simeq u_i u_{i-1}$ e, neste caso, a_i é dito um arco *reverso* de P.

O conjunto dos arcos diretos de P é denotado por $A^+(P)$ enquanto que o conjunto dos arcos reversos de P é denotado por $A^-(P)$. Seja χ_P o vetor sobre A tal que

$$\chi_P(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in A^+(P), \\ -1, & \text{se } a \in A^-(P), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para cada $a \in A$ ou, mais compactamente, $\chi_P := \mathbb{1}^A_{A^+(P)} - \mathbb{1}^A_{A^-(P)}$.

Caminhos aumentadores. Seja D um digrafo, $s \neq t \in V$ e $c : A \to \mathbb{R}_+$ uma função capacidade. Além disso, seja x um (s,t)-fluxo c-viável de D. Um caminho não orientado P é um *caminho x-aumentador* se

$$x(a) < c(a) \text{ para cada } a \in A^+(P), \text{ e}$$
$$x(a) > 0 \text{ para cada } a \in A^-(P).$$

A *folga* de um caminho x-aumentador P é o número

$$\varepsilon(P) := \min\big(\{c(a) - x(a) \mid a \in A^+(P)\} \cup \{x(a) \mid a \in A^-(P)\}\big).$$

Observe que $\varepsilon(P) > 0$.

Proposição 4.5. *Seja D um digrafo, $s \neq t \in V$ e $c : A \to \mathbb{R}_+$ uma função capacidade. Se x é um (s,t)-fluxo c-viável de D e D é livre de (s,t)-caminhos x-aumentadores, então existe um $(\bar{s},t)$-conjunto T tal que $v(x) = \widetilde{c}(\delta^- T)$.*

Prova. Suponha que x é um (s,t)-fluxo c-viável de D e que D é livre de (s,t)-caminhos x-aumentadores. Seja T o conjunto dos $u \in V$ tais que existe um (u,t)-caminho x-aumentador. É claro que $s \notin T$ e $t \in T$. Além disso, se $a \in \delta^- T$, então $x(a) = c(a)$, caso contrário, $*a \in T$, o que é uma contradição. Finalmente, se $a \in \delta^+ T$, então $x(a) = 0$, caso contrário, $a* \in T$, o que também é uma contradição. Pela Proposição 4.3(ii), $v(x) = \widetilde{c}(\delta^- T)$. □

Teorema 4.7. *Seja D um digrafo, $s \neq t \in V$ e $c : A \to \mathbb{R}_+$ uma função capacidade. Um (s,t)-fluxo c-viável x de D tem valor máximo se, e só se, D não possui (s,t)-caminhos x-aumentadores.*

Prova. Suponha que x é um (s,t)-fluxo c-viável de valor máximo. Admita, por um momento, que D possui um (s,t)-caminho x-aumentador P. Seja $z := x + \varepsilon(P)\chi_P$. Não é difícil checar[8] que z é um (s,t)-fluxo c-viável de D de valor $v(x) + \epsilon$. Portanto, x não tem valor máximo. Essa contradição estabelece que D é livre de (s,t)-caminhos x-aumentadores.

Suponha agora que D é livre de (s,t)-caminhos x-aumentadores. Pela Proposição 4.5, existe um $(\bar{s},t)$-conjunto T de D tal que $v(x) = \widetilde{c}(\delta^- T)$ e, pela Proposição 4.3(iii), x é um (s,t)-fluxo c-viável de valor máximo. □

[8] Prove!

4.5 Fluxos e capacidades inteiras

Seja D um digrafo e $s \neq t \in V$. Nesta seção, vamos lidar com fluxos e capacidades *inteiras*.[9] Uma função capacidade c é *inteira* se $c \in \mathbb{N}^A$. De forma similar, um (s,t)-fluxo x é *inteiro* se $x \in \mathbb{N}^A$. O próximo resultado é uma versão do Teorema do Fluxo Máximo e do Corte Mínimo para capacidades inteiras. Ele afirma que sempre é possível encontrar um fluxo viável inteiro de valor máximo!

[9] O leitor atento pode ficar desconfortável com essa definição. Entenda ela como afirmando que a respectiva imagem de ambas as funções é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Teorema 4.8. *Seja D um digrafo, $s \neq t \in V$ e $c \in \mathbb{N}^A$. Seja $\mathscr{I}$ o conjunto dos (s,t)-fluxos inteiros c-viáveis e $\mathscr{C}$ o conjunto dos $(\bar{s},t)$-conjuntos de D. Então,*

$$\max\{v(x) \mid x \in \mathscr{I}\} = \min\{\tilde{c}(\delta^- T) \mid T \in \mathscr{C}\}.$$

Prova. Seja $x \in \mathscr{I}$ tal que[10]

$$v(x) = \max\{v(x) \mid x \in \mathscr{I}\}.$$

[10] Por que um tal máximo sempre existe?

Suponha, por um momento, que existe um (s,t)-caminho x-aumentador de D. Nesse caso, $\epsilon(P) \in \mathbb{N}$ — uma vez que x é um fluxo inteiro e c é uma capacidade inteira — e $z := x + \epsilon(P)\chi_P$ é um (s,t)-fluxo c-viável tal que $v(z) > v(x)$. Além disso, z é inteiro, donde $z \in \mathscr{I}$. Isso contraria a escolha de x. Segue daí que D não possui (s,t)-caminhos x-aumentadores. Portanto, pelo Teorema 4.7, x é um (s,t)-fluxo c-viável de valor máximo, como queríamos. □

4.6 Emparelhamentos de peso máximo em grafos bipartidos

Vamos abordar mais um exemplo de uso de dualidade. Nesta seção, vamos estudar brevemente o problema do emparelhamento de peso máximo em grafos bipartidos. Lembre-se que um *emparelhamento* de um grafo (simples)[11] $G := (V,E)$ é um subconjunto M de E tal que

$$e \neq f \in M \quad \Longrightarrow \quad e \cap f = \emptyset.$$

[11] Durante esta seção, vamos admitir que todos os grafos são simples. Assim, "grafo" significa "grafo simples".

O conjunto dos vértices *saturados* (ou *cobertos*) por M, denotado por $V(M)$, é o conjunto dos vértices que incidem em alguma aresta de M, isto é,

$$V(M) := \bigcup M.$$

Para começar, vamos fornecer uma prova alternativa da parte difícil do Teorema de Hall usando o Teorema 4.8:

Teorema de Hall. *Se G é um grafo bipartido com bipartição R, U e*

$$\gamma X \geqslant |X|$$

para cada $X \subseteq U$, então existe um emparelhamento M de G que satura U.

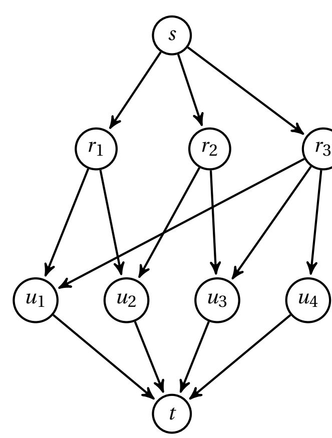


Figura 4.4: Ilustração da construção do Teorema de Hall. Cada arco da figura tem capacidade igual a 1.

Prova. Suponha que $G := (V, E)$ é um grafo bipartido com bipartição R, U tal que $\gamma X \geqslant |X|$ para cada $X \subseteq R$. Sejam $s \neq t \notin V$ e considere o digrafo $D := (V \cup \{s, t\}, A)$, onde

$$A := \{(r, u) \mid r \in R, u \in U\} \cup \{(s, r) \mid r \in R\} \cup \{(u, t) \mid u \in U\}.$$

Além disso, seja $c \in \{1\}^A$, ou seja, $c(a) = 1$ para cada $a \in A$. Vamos mostrar que um st-corte mínimo de D tem capacidade $|R|$. Primeiro note que $\widetilde{c}(\delta^-(V \cup \{t\})) = |R|$, por construção. Seja X um $\bar{s}t$-conjunto de D. Vamos mostrar que $\widetilde{c}(\delta^- X) \geqslant |R|$. Para isso, seja $R_1 := X \cap R$ e $R_2 := R \setminus X$. Note que para cada $r \in R_1$, o arco $(s, r) \in A$ entra em R_1. Seja $Y_1 := \Gamma^+(R_2) \cap X$ e $Y_2 := \Gamma^+(R_2) \setminus X$. Ademais, $\Gamma^+ R_2 \subseteq T$, donde $\Gamma^+(R_2) \cap R_1 = \emptyset$. A condição de Hall implica que $|\Gamma^+ R_2| \geqslant |R_2| = |Y_1| + |Y_2|$. Agora, $Y_2 \subseteq T$. Por construção, $(y, t) \in A$ para cada $y \in Y_2$. Combinando-se essas observações vem que

$$\widetilde{c}(\delta^-(X)) \geqslant |R_1| + |Y_1| + |Y_2| = |R_1| + |R_2| = |R|.$$

Pelo Teorema 4.8, existe um st-fluxo máximo c-viável tal que $x \in \{0, 1\}^A$ e $v(x) = |R|$. Seja

$$M := \{r u \mid (r, u) \in E, x(r, u) = 1\}.$$

É fácil verificar que M é um emparelhamento de G que satura R, como desejado. □

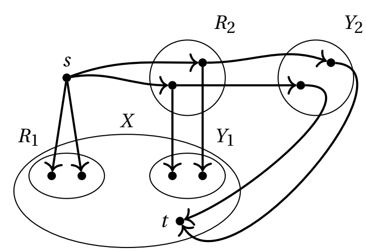


Figura 4.5: A figura ilustra a prova do Teorema de Hall.

Proposição 4.6. *Seja $G := (V, A)$ um grafo bipartido, $w \in \mathbb{R}_+^E$ uma função peso,*

$$P := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid \forall v \in V : \widetilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\}$$
$$D := \{y \in \mathbb{R}_+^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant w(uv)\}.$$

Então, $\max\{w^\top x \mid x \in P\} = \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in D\}$.

Prova. Os problemas $\max\{w^\top x \mid x \in P\}$ e $\min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in D\}$ constituem um par primal-dual. Vamos mostrar que ambos os problemas são viáveis. É claro que $0 \in P$[12] e, assim, P é viável. Suponha que S, T é uma bipartição de G. Seja $y \in \mathbb{R}_+^V$ tal que

$$y(s) := 0 \text{ para cada } s \in S, \text{ e}$$
$$y(t) := \max\big(\{0\} \cup \{w(a) \mid a \in \delta(t)\}\big) \text{ para cada } t \in T.$$

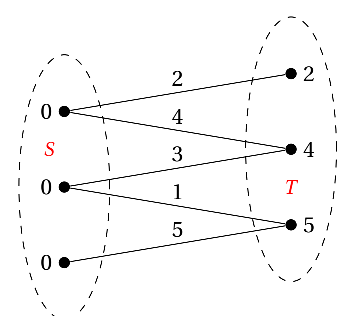


Figura 4.6: A figura ilustra a construção do vetor dual viável y.

É fácil verificar que $y \in D$. De fato, suponha que $st \in E$, com $s \in S$ e $t \in T$. Então, $y(s) + y(t) = y(t) = \max\{w(a) \mid a \in \delta(t)\} \geqslant w(uv)$. Logo, $y \in D$ e, assim, D é viável. Como P e D são viáveis, pelo Teorema Forte da Dualidade, temos que

$$\max\{w^\top x \mid x \in P\} = \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in D\}.$$

□

[12] Aqui, $0 \in \{0\}^E$!

É conveniente introduzir a seguinte definição. Seja $G := (V, E)$ um grafo e $w \in \mathbb{R}^E_+$ uma função peso. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^V_+$ é uma *w-cobertura* e $y(s) + y(t) \geqslant w(st)$ para cada $st \in E$. Se y é uma w-cobertura e $uv \in E$ é tal que $y(u) + y(v) = w(uv)$, então dizemos que uv é *justa*.

A próxima proposição é inspirada no Teorema Fraco da Dualidade aplicado aos problemas $\max\{w^\top x \mid x \in P\}$ e $\min\{y^\top \mathbb{1} \mid y \in D\}$:

Proposição 4.7. *Seja $G := (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição S, T e $w \in \mathbb{R}^E_+$. Se M é um emparelhamento e y é uma w-cobertura de G, então*

(i) $\widetilde{w}(M) \leqslant \widetilde{y}(V)$, e

(ii) $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$ se, e só se, valem as condições de folgas complementares,

(FC$_1$) *$y(u) + v(v) = w(uv)$ para cada $uv \in M$, e*

(FC$_2$) *para cada $v \in V$, se $y(v) > 0$, então M cobre v.*

Prova. Suponha no que segue que M é um emparelhamento e y é uma w-cobertura de G.

Para a prova de (i), note que

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \widetilde{y}(V) - \widetilde{w}(M) &= \widetilde{y}(V) - \sum_{st \in M} w(st) \\
&\geqslant \sum_{v \in V} y(v) - \sum_{st \in M} (y(s) + y(t)) \\
&= \sum_{v \in V \setminus V(M)} y(v) \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

onde a primeira desigualdade segue do fato de y ser uma w-cobertura; e, a segunda desigualdade, de $y \geqslant 0$. Isso prova (i).

Para a prova de (ii), suponha que $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$. Dessa forma, vale igualdade em todas as passagens de (*), donde

$$\sum_{st \in M} w(st) = \sum_{st \in M} y(s) + y(t) \quad \text{e} \quad \widetilde{y}(V \setminus V(M)) = \sum_{v \in V \setminus V(M)} y(v) = 0.$$

Como $y(s) + y(t) \geqslant w(st)$ para cada $st \in E$, então $y(s) + y(t) = w(st)$ para cada $st \in M$ e, assim, vale (FC$_1$). Ademais, $y \geqslant 0$ e $\widetilde{y}(V \setminus V(M)) = 0$ implicam que $y(v) = 0$ para cada $v \in V \setminus V(M)$ e, consequentemente, para cada $v \in V$, se $y(v) > 0$, então $v \in V(M)$, ou seja, M satura v e, assim, vale (FC$_2$).

Suponha agora que valem as condições de folgas complementares (FC$_1$) e (FC$_2$). Ora, (FC$_2$) implica que $\widetilde{y}(V \setminus V(M)) = 0$. Logo, as duas desigualdades de (*) valem com igualdade e, portanto, $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$. □

Teorema 4.9. *Seja $G := (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição S, T e $w \in \mathbb{R}^E_+$. Seja $\mathscr{M}$ o conjunto dos emparelhamentos de G e Y o conjunto* *das w-coberturas de G. Então,*

$$\max\{\widetilde{w}(M) \mid M \in \mathcal{M}\} = \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in Y\}.$$

Prova. Pela Proposição 4.7, temos que

$$\max\{\widetilde{w}(M) \mid M \in \mathcal{M}\} \leqslant \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in Y\}.$$

Vamos mostrar que existe um emparelhamento M e uma w-cobertura de G tal que $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$, o que permite concluir que

$$\max\{\widetilde{w}(M) \mid M \in \mathcal{M}\} = \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in Y\}.$$

Pela Proposição 4.6, existe $y \in Y$ tal que $\widetilde{y}(V) = \min\{\widetilde{z}(V) \mid z \in Y\}$. Vamos mostrar que existe um emparelhamento M de G tal que valem as condições de folgas complementares (FC_1) e (FC_2):

(FC_1) $y(u) + v(v) = w(uv)$ para cada $uv \in M$, e

(FC_2) se $y(v) > 0$, então M cobre v.

A existência de M, de acordo com a Proposição 4.7, garante que $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$ e, portanto, M é um emparelhamento w-máximo e y é uma w-cobertura mínima.

Seja $R := \underline{y}$, ou seja, $R = \{v \in V \mid y(v) > 0\}$, e F o conjunto das arestas justas, isto é, $F := \{uv \in E \mid y(u) + y(v) = w(uv)\}$. Considere o grafo $H := (V, F)$. Suponha que não existe um emparelhamento de H que satura R. Pela Proposição 1.1, não existe um emparelhamento que satura $R \cap S$ ou não existe um emparelhamento que satura $R \cap T$. Suponha, sem perda de generalidade, que não existe um emparelhamento que satura $R \cap S$. Pelo Teorema de Hall, existe $X \subseteq R \cap S$ tal que $|X| > \gamma_H(X)$. Seja

$$\epsilon := \min\big(\{y(s) \mid s \in X\} \cup \{y(s) + y(t) - w(st) \mid st \in E \setminus F, s \in X\}\big).$$

Note que $\epsilon > 0$. Seja $z := y - \epsilon \mathbb{1}_X^V + \epsilon \mathbb{1}_{\Gamma_H(X)}^V$. Observe primeiro que

$$\widetilde{z}(V) = \widetilde{y}(V) - \epsilon|X| + \epsilon|\Gamma_H(X)| = \widetilde{y}(V) - \epsilon(|X| - |\Gamma_H(X)| < \widetilde{y}(V).$$

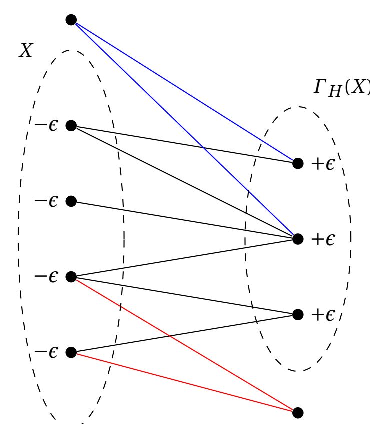


Figura 4.7: Cada aresta preta uv é justa: $y(u) + y(v) = w(uv)$. Cada aresta vermelha ou azul uv tem "folga": $y(u) + y(v) > w(uv)$.

Além disso, seja $st \in E$, com $s \in S$ e $t \in T$. Suponha primeiro que $st \in F$. Então, $z(s) + z(t) = y(s) - \epsilon + y(t) + \epsilon = w(st)$. Suponha que $st \in E \setminus F$. Se $s \in X$, então $z(s) + z(t) = y(s) + y(t) - \epsilon \geqslant y(s) + y(t) - (y(s) + y(t) - w(st) = w(st)$. Se $t \in \Gamma_H(X)$, então $z(s) + z(t) = y(s) + y(t) + \epsilon \geqslant w(st)$. Finalmente, se $s \notin X$ e $t \notin \Gamma_H(X)$, então $z(s) + z(t) = y(s) + y(t) = w(st)$. Concluímos, assim que z é uma w-cobertura. No entanto $\widetilde{z}(V) < \widetilde{y}(V)$, o que contraria a escolha de y. Essa contradição mostra que existe um emparelhamento que satura R. □

4.7 *Arborescências de custo mínimo*

Seja $D := (V, A, \iota)$ um digrafo e $r \in V$ um de seus vértices. Uma parte $B \subseteq A$ é uma *r-sub-arborescência* de D se para cada[13] $t \in V(B) \cup \{r\}$ existe um único

[13] Para um conjunto de arcos B, o conjunto das pontas dos arcos de B é denotado por $V(B)$.

[14] Prove!

(r,t)-caminho P tal que $A(P) \subseteq B$. Dizemos que B é uma *r-arborescência* se $V(B) = V$. Note que se B é uma $\bar{r}$-sub-arborescência de D, então $|B \cap \delta^- u| = 1$ para cada $u \in V(B) \setminus \{r\}$.[14]

Um *$\bar{r}$-conjunto* é um subconjunto não vazio X de $V \setminus \{r\}$.

Proposição 4.8. *Seja D um digrafo e $r \in V$ um de seus vértices. Então D contém uma r-arborescência se, e só se, $\delta^- X \neq \emptyset$ para cada $\bar{r}$-conjunto X de D.*

Prova. Para a prova da necessidade, seja B uma r-arborescência e suponha que X é um $\bar{r}$-conjunto. Seja $t \in X$. Seja $P := \langle u_0, a_1, \ldots, a_k, u_k \rangle$ um (r,t)-caminho tal que $A(P) \subseteq B$. Seja $i := \min\{j \in [k] \mid u_j \in X\}$; tal i existe pois $t \in X$; ademais $i > 0$ uma vez que $r \notin X$. A escolha de i implica que $i - 1 \notin X$, donde $a_i \in \delta^- X$. Portanto, $\delta^- X \neq \emptyset$.

Para a prova da suficiência, suponha que $\delta^- X \neq \emptyset$ para cada $\bar{r}$-conjunto X de D. Seja B uma r-sub-arborescência maximal de D. Vamos mostrar que B é uma r-arborescência de D. Suponha que não. Então $V(B) \neq V$. Assim, $X := V \setminus V(B)$ é um $\bar{r}$-conjunto. Por hipótese, $\delta^- X \neq \emptyset$. Seja $a \in \delta^- X$ e $a \simeq uv$. Como $a \in \delta^- X$, então $u \in V(B)$ e $v \in X$. Considere o conjunto de arcos $B' := B \cup \{a\}$. É fácil checar[15] que B' é uma r-sub-arborescência de D, o que contraria a escolha de B. Logo, B é uma r-arborescência de D e, portanto, D possui uma r-arborescência. $\square$

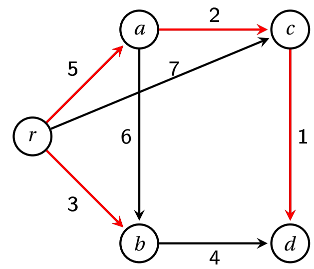


Figura 4.8: A figura ilustra um digrafo. Os números nos arcos indicam os seus respectivos custos. Os arcos vermelhos formam uma r-arborescência de custo mínimo.

[15] Seja $t \in V(B')$ e suponha que P_1 e P_2 são (r,t)-caminhos cujos arcos estão contidos em B'. Suponha primeiro que $t \neq v$. Nesse caso, $a \notin A(P_1) \cup A(P_2)$ pois não há arco de B' saindo de A (ou seja, $B' \cap \delta^+ v = \emptyset$). Assim, $A(P_1) \subseteq B$ e $A(P_2) \subseteq B$, donde $P_1 = P2$. Suponha agora que $t = v$. Nesse caso, sejam Q_1 e Q_2 (r,u)-caminhos tais que $P_1 = Q_1 \cdot \langle u,a,v \rangle$ e $P_2 = Q_2 \cdot \langle u,a,v \rangle$. Ora, $A(Q_1) \subseteq B$ e $A(Q_2) \subseteq B$ e, assim, $Q_1 = Q_2$. No entanto, $Q_1 = Q_2$ implica que $P_1 = P_2$, como queríamos.

Proposição 4.9. *Seja D um digrafo, $r \in V$ e $B \subseteq A$. Então, B é uma r-aborescência de D se, e só se,*

(i) o digrafo (V,B) contém um (r,v)-caminho para cada $v \in V$, e

(ii) $|B| = |A| - 1$.

Prova. Exercício. $\square$

4.8 O problema da arborescência de custo mínimo

Seja D um digrafo, $r \in V$ e $c \in \mathbb{R}^A$. Suponha que D possui uma r-arborescência. O *problema de r-arborescência de custo mínimo* consiste em determinar uma r-arborescência B, dita de *custo c-mínimo*, de D tal que

$$\widetilde{c}(B) = \min\{\widetilde{c}(J) \mid J \text{ é uma } r\text{-arborescência de } D\}.$$

Seja $r \in \mathbb{R}$ e considere a função $c + r\mathbb{1}_A^A$. Note que para cada arborescência B de A,

$$\big(\widetilde{c + r\mathbb{1}_A^A}\big)(B) = \widetilde{c}(B) + r\big(\widetilde{\mathbb{1}_A^A}(B)\big) = \widetilde{c}(B) + r(|V| - 1).$$

Logo, B é uma r-arborescência de custo c-mínimo se, e só se, B é de custo $(c + r\mathbb{1}_A^A)$-mínimo. Por isso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $c \geqslant 0$, coisa que faremos daqui em diante.

Seja $\mathscr{S}$ o conjunto dos $\bar{r}$-conjuntos de D. A Proposição 4.8 permite formular o problema da r-arborescência de custo mínimo como um problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & \tilde{x}(\delta^-(S)) \geqslant 1 \quad \forall S \in \mathscr{S} \\ & x \in \{0,1\}^A. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como de costume, vamos considerar a relaxação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & \tilde{x}(\delta^-(S)) \geqslant 1 \quad \forall S \in \mathscr{S} \\ & x \in \mathbb{R}_+^A. \end{aligned} \tag{4.5}$$

cujo dual é[16]

$$\begin{aligned} \min \quad & y^\top \mathbb{1} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{S \in \mathscr{S}} [a \in \delta^- S]\, y(S) \leqslant c(a) \quad \forall a \in A \\ & y \in \mathbb{R}_+^{\mathscr{S}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

[16] Aqui, utilizamos a *notação de Iverson*. Para uma propriedade P,

$$[P] := \begin{cases} 1, & \text{se } P \text{ é verdadeira} \\ 0. & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $[a \in \delta^- S] = 1$ se $a \in \delta^- S$, e 0, caso contrário. Claro, poderíamos ter definido usando vetores o produto de vetores característicos: $[a \in \delta^- S] = (\mathbb{1}^A_{\{a\}})^\top \mathbb{1}^A_{\delta^- S}$.

4.9 *Contração*

A demonstração que vamos apresentar depende do conceito de contração em um digrafo. Seja D um digrafo e $\mathscr{P}$ uma partição.[17] O digrafo obtido de D através da *contração* das classes de $\mathscr{P}$, denotado $D/\mathscr{P}$, é o digrafo tal que

(i) $V(D/\mathscr{P}) := \mathscr{P}$,
(ii) $A(D/\mathscr{P}) := \{a \in A_D \mid \exists X \neq Y \in \mathscr{P} : *a \in X, a* \in Y\}$, e
(iii) $\iota_{D/\mathscr{P}}(a) = ([*a],[a*])$ para cada $a \in A(D/\mathscr{P})$.

A condição (i) estabelece que o conjunto dos vértices de $D/\mathscr{P}$ é $\mathscr{P}$. A condição (ii) estabelece que cujo conjunto dos arcos de $D/\mathscr{P}$ é o conjunto dos arcos de D cujas pontas estão em classes distintas de $\mathscr{P}$. A condição (iii) afirma que um arco a de $D/\mathscr{P}$ tem pontas (X,Y) se, e só se, a é um arco de D cujas pontas são (x,y) onde $x \in X$ e $y \in Y$.

[17] Uma *partição* $\mathscr{P}$ de um conjunto V é um subconjunto de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos de 2^V cuja união é V, ou seja, $\mathscr{P} \subseteq 2^V$ é uma partição de V se
- $P \neq \emptyset$ para cada $P \in \mathscr{P}$,
- $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ para cada $P_1 \neq P_2 \in \mathscr{P}$, e
- $\bigcup \mathscr{P} = V$.

Cada $P \in \mathscr{P}$ é chamado de *classe* de $\mathscr{P}$. Para cada $v \in V$ existe uma única classe $P \in \mathscr{P}$ tal que $v \in P$; tal classe é denotada por $[v]_{\mathscr{P}}$ ou, simplesmente, $[v]$.

Note que para cada $a \in A(D/\mathscr{P})$ e cada $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} a \in \delta^-_{D/\mathscr{P}} \mathscr{Y} \quad & \equiv \quad \exists X \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{Y}, Y \in \mathscr{Y} : \iota_{D/\mathscr{P}}(a) = (X,Y) \\ & \equiv \quad \exists X \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{Y}, Y \in \mathscr{Y}, x \in X, y \in Y : \iota_D(a) = (x,y) \\ & \equiv \quad \exists x \in \bigcup(\mathscr{P} \setminus \mathscr{Y}), y \in \bigcup \mathscr{Y} : \iota_D(a) = (x,y) \\ & \equiv \quad a \in \delta^-_D\big(\bigcup \mathscr{Y}\big). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta^-_{D/\mathscr{P}}(\mathscr{Y}) = \delta^-_D\big(\bigcup \mathscr{Y}\big). \tag{4.7}$$

Seja $X \subseteq V$ e considere a partição $\mathscr{P} := \{X\} \cup \{\{v\} \mid v \in V \setminus X\}$. É conveniente, por simplicidade, escrever D/X em vez de $D/\mathscr{P}$ e é o que faremos no que segue.

Proposição 4.10. *Seja D um digrafo, $r \in V$, e $\mathscr{P}$ uma partição de V. Se D possui uma r-arborescência, então $D/\mathscr{P}$ também possui uma $[r]$-arborescência.*

Prova. Suponha que D possui uma r-arborescência. Pela Proposição 4.8, $\delta^-_D X \neq \emptyset$ para cada $\bar{r}$-conjunto X de D. Note que $\delta^-_{D/\mathscr{P}}\mathscr{X} = \delta^-_D(\bigcup \mathscr{X})$ para cada $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}$. Seja $\mathscr{X}$ um $\overline{[r]}$-conjunto de $D/\mathscr{P}$. Então $X := \bigcup \mathscr{X}$ é um $\bar{r}$-conjunto de D e, consequentemente, $\delta^-_D X \neq \emptyset$. Como $\delta^-_{D/\mathscr{P}}\mathscr{X} = \delta^-_D X$, temos que $\delta^-_{D/\mathscr{P}}\mathscr{X} \neq \emptyset$. Pela Proposição 4.8, o digrafo $D/\mathscr{P}$ contém uma $[r]$-arborescência. □

Proposição 4.11. *Seja D um digrafo, $r \in D$. Se C um circuito de D tal que $r \notin V_C$ e B' é uma $[r]$-arborescência de D/V_C contém, então D contém uma r-arborescência B tal que $B' \subseteq B$ e $B \cap A[V_C] \subseteq A(C)$.*

Prova. Suponha que C um circuito de D tal que $r \notin V_C$ e que B' é uma $[r]$-arborescência de D/V_C. Seja a o arco de B' cuja cabeça é o vértice V_C de D/C. Seja s a ponta de a em D e b o arco de C em D cuja cabeça é s. Considere o conjunto $B := B' \cup (A(C) \setminus \{b\})$. É claro que $B' \subseteq B$ e $B \cap A[V_C] \subseteq A(C)$. Ademais, não é difícil checar que o B é uma r-arborescência de D (Exercício). □

4.10 Teorema de Fulkerson

Seja D um digrafo, $r \in V$ e $c \in \mathbb{R}^A_+$. Seja também $\mathscr{S}$ o conjunto dos $\bar{r}$-conjuntos de D. Considere os problemas[18] primal (4.5) e, em especial, o dual (4.6). Observe uma solução viável para o dual tem tamanho $|\mathscr{S}| = 2^{|V|-1} - 1$. Gostaríamos de estabelecer uma relação minimax inspirada nos problemas primal e dual. Assim, desejamos, se possível, encontrar uma r-arborescência B e uma solução viável dual y tal que $\tilde{c}(B) = \tilde{y}(\mathscr{S})$. Ora, $\tilde{y}(S) = \sum_{S \in \mathscr{S}} y(S)$. Assim, é suficiente considerar tão somente os elementos do suporte de y. Para que haja alguma viabilidade computacional, o suporte de y deve ter tamanho polinomial no tamanho da entrada do problema. O Teorema de Fulkerson afirma, em particular, que esse é o caso.

Lema 4.1. *Seja D um digrafo, e $r \in V$ um de seus vértices. Se $\delta^- u \neq \emptyset$ para cada $u \in V \setminus \{r\}$ e D não possui uma r-arborescência, então existe um circuito C em D tal que $r \notin V_C$.*

Prova. Suponha que $\delta^- u \neq \emptyset$ para cada $u \in V \setminus \{r\}$ e que D não possui uma r-arborescência. Seja R o conjunto dos vértices $t \in V$ tais que D possui um (r,t)-caminho. Como D não possui uma r-arborescência, então

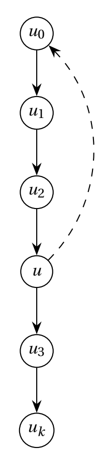
[18] Eis o primal,

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{sujeito a} & \tilde{x}(\delta^-(S)) \geq 1 \quad \forall S \in \mathscr{S} \\ & x \in \mathbb{R}^A_+. \end{array}$$

e o dual,

$$\begin{array}{ll} \min & y^\top \mathbb{1} \\ \text{sujeito a} & \sum_{S \in \mathscr{S}} [a \in \delta^- S]\, y(S) \leq c(a) \quad \forall a \in A \\ & y \in \mathbb{R}^{\mathscr{S}}_+. \end{array}$$

.



$V \setminus R \neq \emptyset$. Seja, assim, $v \in V \setminus R$. Considere um caminho, digamos $P := \langle u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k\rangle$, simples e maximal que termina em v, isto é $u_k = v$. É claro que $u_0 \neq r$. Assim, $\delta^- u_0 \neq \emptyset$. Seja $a \in A$ um arco tal que $a* = u_0$. A maximalidade de P implica que $u := *a \in V(P)$. Segue daí que $P(u_0, u) \cdot \langle u, a, u_0\rangle$ é um circuito de D. □

Função c-disjunta. Seja $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{S}$ e[19] $y \in \mathbb{R}_{++}^{\mathscr{L}}$. Dizemos que y é *c-disjunta* se

$$\sum_{L \in \mathscr{L}} [a \in \delta^- L]\, y(L) \leq c(a) \tag{4.8}$$

para cada $a \in A$.

[19] $\mathbb{R}_{++} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

Teorema 4.10. *Seja D um digrafo, $r \in V$, $c \in \mathbb{R}_+^A$ e $\mathscr{S}$ o conjunto dos $\bar{r}$-conjuntos de D. Se B é uma r-arborescência e $y \in \mathbb{R}_+$ é uma função c-disjunta de D, então $\widetilde{c}(B) \geq \widetilde{y}(\mathscr{S})$.*

Prova. Suponha que B é uma r-arborescência e $y \in \mathbb{R}_+$ é uma função c-disjunta de D. Então,

$$\begin{aligned} \widetilde{c}(B) &= \sum_{a \in B} c(a) \\ &\geq \sum_{a \in B} \Big(\sum_{S \in \mathscr{S}} [a \in \delta^- S]\, y(S) \Big) \\ &\geq \sum_{S \in \mathscr{S}} y(S), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue do fato da função y ser c-disjunta; a segunda segue do fato de B ser uma r-arborescência e, portanto, $B \cap \delta^- S \neq \emptyset$ para cada $S \in \mathscr{S}$. □

Eis o Teorema de Fulkerson:

Teorema 4.11. *Seja D um digrafo, $r \in V$ e $c \in \mathbb{R}_+^A$. Se D possui uma r-arborescência, então existe uma r-arborescência B, uma coleção laminar $\mathscr{L}$ de $\bar{r}$-conjuntos e uma função c-disjunta $y \in \mathbb{R}_{++}^{\mathscr{L}}$ tal que*

$$\widetilde{c}(B) = \widetilde{y}(\mathscr{L}).$$

Prova. A prova é por indução em $|V| + |\underline{c}|$. Seja D um digrafo, $r \in V$, $c \in \mathbb{R}_+^A$ e suponha que D possui uma r-arborescência.

Caso 1: Existe $u \in V \setminus \{r\}$ tal que $c(a) > 0$ para cada $a \in \delta^- u$.

Como D possui uma r-arborescência, temos que $\delta^- u \neq \emptyset$, donde

$$\lambda := \min\{c(a) \mid a \in \delta^- u\} > 0.$$

Seja $c' \in \mathbb{R}_+^A$ tal que $c'(a) = c(a) - [a \in \delta^- u]\lambda$ para cada $a \in A$. Note que $|\underline{c'}| < |\underline{c}|$. Assim, por hipótese de indução, existe uma r-arborescência B, uma coleção laminar $\mathscr{L}'$ de $\bar{r}$-conjuntos de D e uma função c'-disjunta $y' \in \mathbb{R}^{\mathscr{L}'}_{++}$ tal que $\widetilde{c'}(B) = \widetilde{y'}(\mathscr{L}')$. Note que $\{u\} \notin \mathscr{L}'$. Ora, $|B \cap \delta^- u| = 1$, donde $\tilde{c}(B) = \widetilde{c'}(B) + \lambda$. Seja

$$\mathscr{L} := \mathscr{L}' \cup \{\{u\}\} \quad \text{e} \quad y := y' \cup \{(\{u\}, \lambda)\}.$$

É evidente que $y \in \mathbb{R}^{\mathscr{L}}_{++}$ e $\mathscr{L}$ é laminar. Vamos mostrar que y é c-disjunta. De fato, para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\sum_{L \in \mathscr{L}} [a \in \delta^- L]\, y(L) &= \sum_{L \in \mathscr{L}'} [a \in \delta^- L]\, y(L) + [a \in \delta^- L]\, y(\{u\}) \\
&= \sum_{L \in \mathscr{L}'} [a \in \delta^- L]\, y'(L) + [a \in \delta^- u]\lambda \\
&\leqslant c'(a) + [a \in \delta^- u]\lambda \\
&= c(a).
\end{aligned}$$

Isso prova que y é c-disjunta. Vamos agora mostrar que $\tilde{c}(B) = \tilde{y}(\mathscr{L})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\mathscr{L}) &= \sum_{L \in \mathscr{L}} y(L) \\
&= \sum_{L \in \mathscr{L}'} y(L) + y(\{u\}) \\
&= \sum_{L \in \mathscr{L}'} y'(L) + \lambda \\
&= \widetilde{c'}(B) + \lambda \\
&= \tilde{c}(B).
\end{aligned}$$

Caso 2: Para cada $u \in V \setminus \{r\}$ existe $a \in \delta^- u$ tal que $c(a) = 0$.

Seja $A_0 := \{a \in A \mid c(a) = 0\}$ e D_0 o digrafo (V, A_0). Suponha primeiro que D_0 possui uma r-arborescência. Seja $y := 0$ e $\mathscr{L} := \emptyset$.[20] É claro que y é c-disjunta. Ademais, $0 = \tilde{c}(B) = \tilde{y}(\mathscr{S})$.

[20] O "0" aqui denota a função $0 \in \mathbb{R}^{\mathscr{S}}_{+}$, isto é, $0(S) = 0$ para cada $S \in \mathscr{S}$.

Suponha agora que D_0 não possui uma r-arborescência. Pelo Lema 4.1, D_0 possui um circuito C tal que $A(C) \subseteq A_0$ e $r \notin V(C)$. Considere o digrafo $D' := D/V(C)$, obtido de D através da contração dos vértices de C, e a função custo $c' := c_{\restriction A \setminus A[C]}$. Pela Proposição 4.10, o digrafo D' possui uma $[r]$-arborescência uma vez que D possui uma r-arborescência. Como $|V(D/V(C))| < |V(D)|$ e $|\underline{c'}| \leqslant |\underline{c}|$, por hipótese de indução, existe uma $[r]$-arborescência B', uma coleção laminar $\mathfrak{L}'$ de $\overline{[r]}$-conjuntos de D' e uma função c'-disjunta $y' \in \mathbb{R}^{\mathfrak{L}'}_{++}$ tal que $\widetilde{c'}(B') = \widetilde{y'}(\mathfrak{L}')$. Pela Proposição 4.11, podemos estender B' para uma r-arborescência B de D tal que $B' \subseteq B$ e $B \cap A[V_C] \subseteq A(C)$. Assim, $\tilde{c}(B) = \tilde{c}(B')$ uma vez que $c(a) = 0$ para todo arco $a \in A(C)$. Seja

$$\mathscr{L} := \left\{ \bigcup \mathscr{L}' \mid \mathscr{L}' \in \mathfrak{L}' \right\}$$

e $y \in \mathbb{R}^{\mathscr{L}}_{+}$ definida pondo-se

$$y\left(\bigcup \mathscr{L}'\right) := y'(\mathscr{L}')$$

para cada $\mathscr{L}' \in \mathfrak{L}'$. É fácil ver que $\mathscr{L}$ é uma coleção laminar[21] de $\bar{r}$-conjuntos em D. Vamos checar que y é c-disjunta em D. Seja $a \in A$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{L\in\mathscr{L}} [a \in \delta^-_D L]\, y(L) &= \sum_{\mathscr{L}'\in\mathfrak{L}'} [a \in \delta^-_D(\textstyle\bigcup \mathscr{L}')]\, y(\textstyle\bigcup \mathscr{L}') \\ &= \sum_{\mathscr{L}'\in\mathfrak{L}'} [a \in \delta^-_{D'}(\mathscr{L}')]\, y'(\mathscr{L}') \\ &\leqslant c'(a).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{L\in\mathscr{L}} y(L) &= \sum_{\mathscr{L}'\in\mathfrak{L}'} y(\textstyle\bigcup \mathscr{L}') \\ &= \sum_{\mathscr{L}'\in\mathfrak{L}'} y'(\mathscr{L}') \\ &= \widetilde{c'}(B') \\ &= \widetilde{c}(B).\end{aligned}$$

□

4.11 Exercícios

Exercício 4.1. Prove o Corolário 4.1.

Exercício 4.2. Mostre que o dual do dual é o problema primal.

Exercício 4.3. Seja (A, b, c) um problema de otimização sobre $M \times N$.

(i) Determine o dual de $\sup\{c^\top x \mid x \in \{Ax = b, x \geqslant 0\}\}$. Quais são as condições de folgas complementares para esse par de problemas?

(ii) Determine o dual de $\sup\{c^\top x \mid x \in \{Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}\}$. Quais são as condições de folgas complementares para esse par de problemas?

Exercício 4.4. Seja $G := (V, E)$ um grafo bipartido e $c \in \mathbb{R}^E$. considere a formulação do problema do emparelhamento perfeito de peso máximo como um problema de programação linear, definido na página 26.

$$\begin{aligned} &\max && c^\top x \\ &\text{sujeito a} && \widetilde{x}(\delta(v)) = 1 \text{ para cada } v \in V \\ & && 0 \leqslant x(e) \leqslant 1 \text{ para cada } e \in E. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Suponha ademais que G possui um emparelhamento perfeito.

(i) Determine o problema dual.

(ii) Mostre que os problemas primal e dual possuem soluções viáveis.

(iii) Prove que a formulação (4.9) sempre admite uma solução ótima (primal) x tal que $x \in \{0,1\}^E$.

Exercício 4.5. Considere o problema do emparelhamento de peso máximo em um grafo bipartido G com função peso $w \in \mathbb{Z}^E$. Mostre que a prova do

[21] É fácil ver *visualmente*. Formalmente, é um aborrecimento. No entanto, vamos checar rigorosamente.

Proposição 4.12. *Seja V um conjunto e $\mathscr{P}$ uma partição de V. Se $\mathfrak{M} \subseteq 2^{\mathscr{P}}$ é laminar, então*

$$\mathscr{L} := \{\textstyle\bigcup \mathscr{M} \mid \mathscr{M} \in \mathfrak{M}\} \subseteq 2^V$$

é também laminar.

Prova. Suponha que $\mathfrak{M} \subseteq 2^{\mathscr{P}}$ é laminar. Seja $\mathscr{L} := \{\bigcup \mathscr{M} \mid \mathscr{M} \in \mathfrak{M}\}$. Cada $W \in \mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ é um subconjunto de V e, assim, $\bigcup \mathscr{M} \subseteq V$ para cada $M \in \mathscr{M}$. Logo, $\mathscr{L} \subseteq 2^V$. Seja $L_1, L_2 \in \mathscr{L}$. Vamos mostrar que $L_1 \subseteq L_2$ ou $L_2 \subseteq L_1$ ou $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Por construção, existem $\mathscr{M}_1$ e $\mathscr{M}_\in$ em $\mathfrak{M}$ tais que $L_1 = \bigcup \mathscr{M}_1$ e $L_2 = \bigcup \mathscr{M}_2$. Como $\mathfrak{M}$ é laminar, então $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}_2$ ou $\mathscr{M}_2 \subseteq \mathscr{M}_1$ ou $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \emptyset$. Suponha primeiro que $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}_2$ ou $\mathscr{M}_2 \subseteq \mathscr{M}_1$. Sem perda de generalidade, admita que $\mathscr{M}_\infty \subseteq \mathscr{M}_2$. Ora, $X \in \mathscr{M}_1$ implica $X \in \mathscr{M}_2$, donde $L_1 = \bigcup \mathscr{M}_1 \subseteq \bigcup \mathscr{M}_2 = L_2$. Finalmente, suponha que $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \emptyset$. Como $\mathscr{P}$ é uma partição, temos que

$$X \in \mathscr{M}_1 \text{ e } Y \in \mathscr{M}_2 \Longrightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Segue daí que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Isso prova que $\mathscr{L}$ é laminar. □

Teorema 4.9 pode ser adaptada para mostrar que existe uma w-cobertura $y \in \mathbb{N}^V$ e um emparelhamento M de G tal que $\widetilde{w}(M) = \widetilde{y}(V)$. A diferença aqui é que as entradas de y são números inteiros não-negativos.

Exercício 4.6. Ajuste a prova do Teorema 4.11 para mostrar que a coleção laminar tem tamanho no máximo $|V| - 1$.

Exercício 4.7. O propósito deste exercício é o de explorar uma prova alternativa para o Teorema Forte da Dualidade. Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$, $c \in \mathbb{R}^N$ e $P := P(A, b)$. Para cada vetor $x \in \mathbb{R}^N$, seja $I(x) := \{i \in M \mid a_i x = b(i)\}$. Suponha que

$$\delta := \sup\{c^\top x \mid x \mid P(A, b)\} \in \mathbb{R}.$$

(i) Mostre que para cada $x \in P$ existe $z \in P$ tal que $\mathsf{rank}(A_{I(z)}) = \mathsf{rank}(A)$ e $c^\top z \geqslant c^\top x$. Sugestão: Suponha que $\mathsf{rank}(A_{I(x)}) < \mathsf{rank}(A)$. Então existe $d \neq 0$ tal que $A_{I(x)} d = 0$. Considere vetores z da forma $x + \lambda d$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Suponha que x e z são vetores em P tais que $I(x) = I(z)$ e $\mathsf{rank}(A_{I(x)}) = \mathsf{rank}(A)$. Mostre que $c^\top x = c^\top z$.

(iii) Mostre que existe $x \in P$ tal que $\mathsf{rank}(A_{I(x)}) = \mathsf{rank}(A)$ e $c^\top x = \delta$.

(iv) Mostre que se $P(A, b) \neq \emptyset$ and $D(A, c) \neq \emptyset$, então existem $x \in P(A, b)$ e $y \in D(A, c)$ tais que $c^\top x = y^\top b$. Sugestão: O item (iii) permite selecionar $x \in P(A, b)$ tal que $c^\top x = \delta$. Verifique que $A_{I(x)} d \leqslant 0$ implica que $c^\top d \leqslant 0$ para cada $d \in \mathbb{R}^N$. Conclua, a partir daí, usando o Lema de Farkas que existe $y \geqslant 0$ tal que $y A_{I(x)} = c$ e use folgas complementares para concluir que $c^\top x = y^\top b$.

5

Poliedros

5.1 Conjuntos convexos

Segmento de reta. Sejam x_0 e x_1 vetores em $\mathbb{R}^N$. O *segmento de reta* unindo x_0 e x_1, denotado $[x_0, x_1]$, é o conjunto[1]

$$[x_0, x_1] := \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

[1] Lembre-se que $[0,1] = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

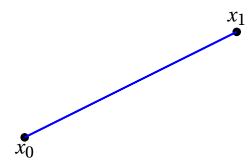


Figura 5.1: A figura ilustra o segmento de reta, $[x_0, x_1]$, unindo x_0 e x_1.

Conjunto convexo. Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é *convexo* se

$$x, y \in C \implies [x, y] \subseteq C. \tag{5.1}$$

Assim, o conjunto C é convexo se, sempre que dois pontos estão em C, então o segmento de reta unindo esses pontos também está em C.

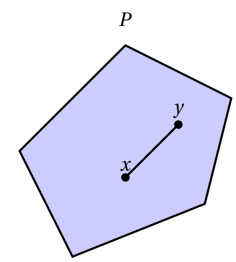


Figura 5.2: A figura ilustra um conjunto convexo P.

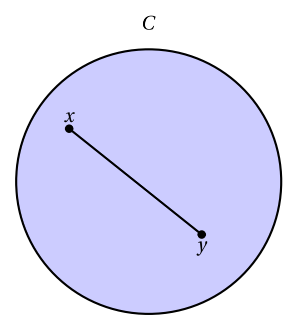


Figura 5.3: A figura ilustra um conjunto convexo C: se x e y são pontos de C, então $[x, y] \subseteq C$.

5.2 Soma de Minkowski.

Seja X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. A *soma de Minkowski* de X e Y, denotada $X+Y$, é o conjunto

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Não é difícil checar que a soma de Minkowski de conjuntos convexos também é um conjunto convexo. De fato, se $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in X + Y$ e $\lambda \in [0,1]$, então

$$\lambda(x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2.$$

No entanto, X convexo implica que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ e Y conexo implica que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Y$. Pela definição de $X+Y$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in X + Y$. Logo, $X+Y$ é convexo.

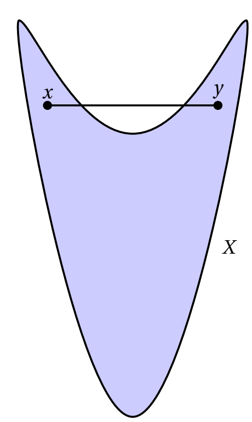


Figura 5.4: A figura ilustra um conjunto X que não é convexo.

5.3 Combinações convexas

Seja A uma matriz sobre $M \times N$. Um vetor $b \in \mathbb{R}^M$ é uma *combinação convexa* (das colunas) de A se existe $x \in \mathbb{R}^N_+$ tal que

$$Ax = b \quad \text{e} \quad \mathbb{1}^\top x = 1,$$

ou seja, se b é uma combinação linear das colunas de A cujos coeficientes são não negativos e têm soma igual a 1.[2] O conjunto das combinações convexas de A é denotado por $\mathsf{conv}(A)$. Observe que se A é uma matriz sobre $M \times \emptyset$, então $\mathsf{conv}(A) = \emptyset$.[3]

[2] Lembre-se que $\mathbb{1}^\top x = \sum_{k \in N} x(k)$.

[3] Justifique!

Vamos estender a definição de uma forma natural para subconjuntos de $\mathbb{R}^M$. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^M$ um conjunto de vetores. Um vetor $b \in \mathbb{R}^M$ é *combinação convexa* de A se existe $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A tal que b é combinação convexa de $\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}$, ou, equivalentemente, b é combinação convexa de A se existe $\lambda \in \mathbb{R}^A_+$ de *suporte finito* tal que $b = \sum_{a \in A} \lambda(a) a$ e $\sum_{a \in A} \lambda(a) = 1$.[4] Em particular, se $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^M$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $b \in \mathbb{R}^M$ é combinação convexa de A se, e só, se $b \in \mathsf{conv}\left(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}\right)$.

[4] Se preferir,

$$b = \sum_{a \in \underline{\lambda}} \lambda(a) a \quad \text{e} \quad \sum_{a \in \underline{\lambda}} \lambda(a) = 1.$$

O conjunto das combinações convexas de um conjunto A de vetores de $\mathbb{R}^M$ é também denotado por $\mathsf{conv}(A)$. Note que $\mathsf{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Proposição 5.1. *Sejam C e X subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Se C é convexo e $X \subseteq C$, então $\mathsf{conv}(X) \subseteq C$.*

Prova. Vamos introduzir uma definição local. Uma *testemunha* para um vetor $y \in \mathsf{conv}(X)$ é um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^X_+$ de suporte finito tal que $y = \sum_{x \in X} \lambda(x) x$ e $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 1$. Suponha que C é convexo e que $X \subseteq C$. Vamos mostrar que se $y \in \mathsf{conv}(X)$, então $y \in C$. A prova é por indução no tamanho do suporte de λ.[5] Suponha que $y \in \mathsf{conv}(X)$. Seja λ uma testemunha para y. Se $|\underline{\lambda}| = 1$, então $y \in X$, donde $y \in C$. Suponha que $|\underline{\lambda}| \geqslant 2$ e seja $z \in \underline{\lambda}$. Note que $0 < \lambda(z) < 1$. Agora,

[5] De forma mais pedante. Vamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $y \in \mathbb{R}^N$, se y possui uma testemunha λ tal que $|\underline{\lambda}| = n$, então $y \in C$.

$$y = \lambda(z) z + \sum_{x \in X \setminus \{z\}} \lambda(x) x.$$

Seja $\mu \in \mathbb{R}^{X \setminus \{z\}}_+$ tal que $\mu(x) := \lambda(x)/(1 - \lambda(z))$ para cada $x \in X \setminus \{z\}$ e considere o vetor

$$v := \sum_{x \in X \setminus \{z\}} \mu(x) x.$$

Observe que $\sum_{x \in X \setminus \{z\}} \mu(x) = 1$. Logo, μ é uma testemunha para $v \in \mathsf{conv}(X)$. Como $|\underline{\mu}| < |\underline{\lambda}|$, então $v \in C$. Ora, $y = \lambda(z) z + (1 - \lambda(z)) v$ e, portanto, $y \in [z, v]$. Como $z, v \in C$ e C é convexo, então $y \in C$. Isso completa a prova. □

O próximo lema relaciona combinações convexas e cônicas.[6]

[6] Seja A uma matriz sobre $M \times N$. O *cone* de A, denotado $\mathsf{cone}(A)$, é o conjunto

$$\mathsf{cone}(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^N_+\}.$$

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^M$. Um vetor $b \in \mathbb{R}^M$ é combinação cônica de A se existe $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ tal que b é combinação cônica de $\begin{bmatrix} a_1 \ldots a_n \end{bmatrix}$. O conjunto das combinações cônicas de A é denotado $\mathsf{cone}(A)$.

Lema 5.1. *Para cada matriz A sobre $M \times N$ e cada vetor b sobre M,*

$$b \in \mathsf{conv}(A) \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathsf{cone}\left(\begin{bmatrix} A \\ \mathbb{1}^\top \end{bmatrix}\right),$$

□

Prova. Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e b um vetor sobre M. Então,

$$\begin{aligned} b \in \mathsf{conv}(A) &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^N_+ : Ax = b, \mathbb{1}^\top = 1 \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^N_+ : \begin{bmatrix} A \\ \mathbb{1}^\top \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathsf{cone}\left(\begin{bmatrix} A \\ \mathbb{1}^\top \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. *Seja A uma matriz sobre $M \times N$. Se $b \in \mathsf{conv}(A)$, então existe um subconjunto $J \subseteq N$ tal que $|J| \leq |M| + 1$ e $b \in \mathsf{conv}(A^J)$.*

Prova. Suponha que $b \in \mathsf{conv}(A)$. Seja

$$A' := \begin{bmatrix} A \\ \mathbb{1}^\top \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b' := \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Seja M' o conjunto dos índices das linhas de A'. Note que $|M'| = |M| + 1$. Pelo Lema 5.1, $b' \in \mathsf{cone}(A')$. Pelo Teorema 4.3, existe uma parte $J \subseteq N$ tal que $\bar{b} \in \mathsf{cone}(A'^J)$ e A'^J é linearmente independente. Como A'^J é linearmente independente, temos, pelo Corolário 1.2, que $|J| \leq |M'| = |M| + 1$. O Lema 5.1, combinado com $b' \in \mathsf{cone}(A'^J)$, permite concluir que $b \in \mathsf{conv}(A^J)$, como queríamos. □

Corolário 5.1. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^M$ um conjunto de vetores e $b \in \mathbb{R}^M$. Se $b \in \mathsf{conv}(A)$, então existe um subconjunto B de A tal que $|B| \leq |M| + 1$ e $b \in \mathsf{conv}(B)$.* □

O Corolário 5.1 afirma que todo vetor de $\mathsf{conv}(A) \subseteq \mathbb{R}^M$ pode ser exprimido como uma combinação convexa de no máximo $|M| + 1$ vetores de A.

Proposição 5.2. *Se $\mathscr{C}$ uma coleção de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^N$, então $\bigcap \mathscr{C}$ também é um conjunto convexo.*

Prova. Suponha que $\mathscr{C}$ é uma coleção de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^N$. Vamos mostrar que[7] $\bigcap \mathscr{C}$ também é convexo. Suponha que $x, y \in \bigcap \mathscr{C}$ e que $C \in \mathscr{C}$. Como $x, y \in \bigcap \mathscr{C}$, então $x, y \in C$. Mas, C é convexo, donde $[x, y] \subseteq C$. Segue daí que $[x, y] \subseteq \bigcap \mathscr{C}$ e, portanto, o conjunto $\bigcap \mathscr{C}$ também é conexo. □

[7] Lembre-se que

$$x \in \bigcap \mathscr{C} \quad \equiv \quad \forall C \in \mathscr{C} : x \in C.$$

Para a próxima proposição, lembre-se que se $Ax \leq b$ é um sistema sobre $M \times N$, então $P(A, b)$ denota $\{Ax \leq b\}$. A proposição afirma que $P(A, b)$ é um conjunto convexo.

Proposição 5.3. *Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$. Então $P(A,b)$ é um conjunto convexo.*

Prova. Suponha que $x_0, x_1 \in P(A,b)$ e seja $z \in [x_0, x_1]$. Vamos mostrar que $z \in P(A,b)$. Seja $\lambda \in [0,1]$ tal que $z = \lambda x_0(1-\lambda)x_1$. Então

$$Az = A(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \leqslant \lambda A x_0 + (1-\lambda)Ax_1 \leqslant \lambda b + (1-\lambda)b = b,$$

ou seja, $z \in P(A,b)$. Concluímos, assim, que $[x_0, x_1] \subseteq P(A,b)$ e, consequentemente, $P(A,b)$ é convexo. □

5.4 Poliedros.

Dizemos que $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um *poliedro* em $\mathbb{R}^N$ se existe um conjunto finito M e uma matriz A sobre $M \times N$ tal que[8]

$$P = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax \leqslant b\} = \{Ax \leqslant b\},$$

e, neste caso, o sistema $Ax \leqslant b$ é dito uma *descrição* de P.[9]

[8] Vamos abreviar e simplesmente dizer "existe uma matriz A sobre $M \times N$" em vez de "existe um conjunto finito M e uma matriz A sobre $M \times N$".

[9] É claro que se $Ax \leqslant b$ é uma descrição de P e $y \in \mathbb{R}^M_+$ e $\delta \in \mathbb{R}$ são tais que $y^\top b \leqslant \delta$, então

$$Ax \leqslant b, (y^\top A)x \leqslant \delta$$

também é uma descrição de P.

5.5 Projeção de poliedros

Seja $P := \{Ax \leqslant b\} \subseteq \mathbb{R}^N$ um poliedro e $J \subseteq N$. A *projeção* de P sobre J, denotada $\mathsf{proj}_J(P)$, é o conjunto[10]

$$\mathsf{proj}_J(P) := \{x \in \mathbb{R}^J \mid \exists z \in P : z_J = x\}.$$

[10] Lembre-se que z_J é um vetor sobre J tal que $z_J(j) = z(j)$ para cada $j \in J$.

Para o próximo teorema, é conveniente introduzir a seguinte notação. Seja A uma matriz sobre $M \times N$ e j um elemento de N. Vamos, por preguiça, escrever A^{-j} em vez de $A^{N \setminus \{j\}}$. Essa notação vai ser estendida para outros contextos desde que seu uso seja evidente.[11]

[11] Por exemplo, no próximo teorema escrevemos proj_{-j} em vez de $\mathsf{proj}_{N\setminus\{j\}}$.

Teorema 5.2. *Se $Ax \leqslant b$ é um sistema sobre $M \times N$ e $j \in N$, então existe uma matriz B sobre $R \times M$ tal que*

$$\{(BA)^{-j} x \leqslant Bb\} = \mathsf{proj}_{-j}(\{Ax \leqslant b\}).$$

Prova. Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$ e suponha que $j \in N$. Seja $P := \{Ax \leqslant b\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Pelo Teorema 3.1, existe uma matriz B sobre $R \times M$ tal que

(i) $(BA)e^N_j = 0$,
(ii) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, se $Ax \leqslant b$, então $(BA)x \leqslant Bb$, e
(iii) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, se $(BA)x \leqslant Bb$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A(x + \lambda e^N_j) \leqslant b$.

Vamos mostrar que $\mathsf{proj}_{-j}(P) = \{(BA)^{-j} x \leqslant Bb\} =: Q$. Suponha primeiro que $x \in \mathsf{proj}_{-j}(P)$. Vamos mostrar que $x \in Q$. Como $x \in \mathsf{proj}_{-j}(P)$, então existe $z \in P$ tal que $x = z_{-j}$. Mas, $Az \leqslant b$ implica que $(BA)z \leqslant Bb$. No entanto,

$$Bb \geqslant (BA)z = \sum_{n \in N} (BA)e^N_n z(n) = \sum_{n \in N\setminus\{j\}} (BA)e^N_n z(n) = (BA)^{-j} x,$$

donde $x \in Q$. Suponha agora que $x \in Q$. Vamos mostrar que $x \in \text{proj}_{-j}(P)$. Seja $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $x = z_{-j}$.[12] Como $(BA)e_j^N = 0$ e $(BA)^{-j}x \leqslant Bb$, então $(BA)z \leqslant Bb$. Em virtude de (iii), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A(z + \lambda e_j^N) \leqslant b$. Ora, $z + \lambda e_j^N \in P$ e $(z + \lambda e_j^N)_{-j} = x$ e, consequentemente, $x \in \text{proj}_{-j}(P)$. □

Corolário 5.2. *Se $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um poliedro e $j \in N$, então $\text{proj}_{-j}(P)$ também é um poliedro.*

Prova. Suponha que $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um poliedro e que j é um elemento de N. Como P é poliedro sobre $\mathbb{R}^N$, então existe um sistema $Ax \leqslant b$ sobre $M \times N$ tal que $P = \{Ax \leqslant b\}$. Pelo Teorema 5.2, existe uma matriz B sobre $R \times M$ tal que $\text{proj}_{-j}(P) = \{(BA)^{-j}x \leqslant Bb\}$, ou seja, $\text{proj}_{-j}(P)$ é um poliedro. □

Corolário 5.3. *Se $P := \{Ax \leqslant b\} \subseteq \mathbb{R}^N$ é um poliedro e $\emptyset \neq J \subseteq N$, então existe um conjunto finito R e uma matriz B sobre $R \times M$ tal que*

$$\{(BA)^J x \leqslant Bb\} = \text{proj}_J(P),$$

ou seja, $\text{proj}_J(P)$ é um poliedro. □

Prova. Exercício. □

Cones. Um *cone* em $\mathbb{R}^N$ é um conjunto não vazio $C \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que

(5.2) se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ e $u, v \in C$, então $\lambda u + \mu v \in C$.

Dizemos que um cone $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é *finitamente gerado* se existe um conjunto finito M e uma matriz A sobre $N \times M$ tal que[13]

$$C = \text{cone}(A).$$

Dizemos que um cone $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é *poliédrico* se existe um conjunto finito M e uma matriz A sobre $M \times N$ tal que[14]

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax \leqslant 0\}.$$

O Teorema de Farkas-Minkowski-Weyl, exibido a seguir, mostra que os conceitos de cone poliédrico e finitamente gerado coincidem:

Teorema 5.3. *Um cone é finitamente gerado se, e somente se, é poliédrico.*

Prova. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^M$ um cone.

Para a prova da necessidade, suponha que C é finitamente gerado. Então, existe um conjunto finito N e uma matriz A sobre $M \times N$ tal que

$$C = \text{cone}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^N\}.$$

[12] O valor de z em j, $z(j)$, é irrelevante.

cone($[u\ v]$)

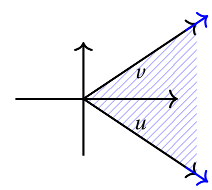


Figura 5.5: A figura ilustra o cone gerado pelos vetores u e v.

[13] Lembre-se que $\text{cone}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^M\}$. Observe que se A é uma matriz sobre $N \times \emptyset$, então $\text{cone}(A) = \{0\}$, onde $0 \in \mathbb{R}^N$. Além disso, para toda matriz A sobre $M \times N$, $\text{cone}(A)$ é um cone. De fato, suponha que $b, c \in \text{cone}(A)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Então existem $x, y \in \mathbb{R}_+^N$ tais que $Ax = b$ e $Ay = c$. Como $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, então $\lambda x + \mu y \in \mathbb{R}_+^N$. Segue daí que $\lambda b + \mu c = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y)$ e, portanto, $\lambda b + \mu c \in \text{cone}(A)$.

[14] O conjunto $C := \{Ax \leqslant 0\}$ é um cone. De fato, suponha que $x, y \in C$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Então $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \leqslant 0$ e, portanto, $\lambda x + \mu y \in C$.

Vamos mostrar que C é poliédrico. Como C é finitamente gerado, então C é o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^M$ tais que existe um vetor $x \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $Ax = b$, ou seja, C é a projeção do poliedro[15]

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \sqcup M} \middle| Ax - b \leqslant 0, -Ax + b \leqslant 0, -\boldsymbol{I}x \leqslant 0 \right\}$$

sobre M.[16] Mais precisamente, seja

$$A' := \begin{bmatrix} A & -\boldsymbol{I} \\ -A & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade sobre M e $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade sobre N. Assim, C é a projeção do poliedro

$$P := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \cup M} \middle| A' \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} \leqslant 0 \right\}$$

sobre M. Pelo Corolário 5.3, existe uma matriz B tal que

$$\mathsf{proj}_M(P) = \{(BA')^M x \leqslant B0\},$$

ou seja, $\mathsf{proj}_M(P)$ também é um poliedro. Como, evidentemente, $B0 = 0$, então $C = \mathsf{proj}_M(P)$ é um cone poliédrico.

Para a prova da suficiência, suponha que $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é um cone poliédrico. Então, existe um conjunto M e uma matriz A sobre $M \times N$ tal que

$$C = \{Ax \leqslant 0\}.$$

Seja[17]

$$C^\circ := \mathsf{cone}(A^\top). \tag{5.3}$$

Como C° é um cone finitamente gerado, então existe um conjunto K e uma matriz B sobre $K \times N$ tal que

$$C^\circ = \{Bz \leqslant 0\}. \tag{5.4}$$

Seja [18]

$$C^{\circ\circ} := \mathsf{cone}(B^\top). \tag{5.5}$$

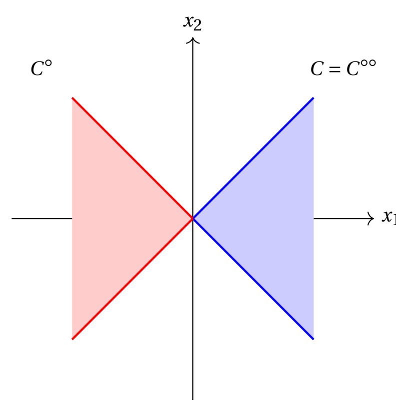
Vamos mostrar que $C = C^{\circ\circ}$. Suponha primeiro que $x \in C^{\circ\circ}$. Então, existe $u \in \mathbb{R}^K_+$ tal que $x = B^\top u$. Vamos mostrar quer $A(B^\top u) \leqslant 0$ (o que coloca x em C). Como $u \geqslant 0$, então basta mostrar que $AB^\top \leqslant 0$. É claro que $AB^\top \leqslant 0$ se, e só se, $BA^\top \leqslant 0$. Seja $i \in M$. Observe que, em virtude de (5.3), temos que $A^\top e_i^M \in C^\circ$ o que, combinado com (5.4), permite concluir que $(BA^\top)e_i^M = B(A^\top e_i^M) \leqslant 0$. Logo, $BA^\top \leqslant 0$, donde $AB^\top \leqslant 0$ e, por conseguinte, $x \in C$.

[15] Lembre-se que para quaisquer conjuntos X e Y, $X \sqcup Y$ denota o conjunto $(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$.

[16] Na verdade, é a projeção sobre $\{1\} \times M$. É conveniente evitar tais picuinhas.

[17] Note que $C^\circ \subseteq \mathbb{R}^N$.

[18] Note que $C^{\circ\circ} \subseteq \mathbb{R}^N$.



Suponha agora que $x \notin C^{\circ\circ}$. Vamos mostrar que $x \notin C$. Como $x \notin C^{\circ\circ}$, temos, pelo Lema de Farkas, que existe $u \in \mathbb{R}^N$ tal que $u^\top B^\top \leqslant 0$ e $u^\top x > 0$. Ora, $u^\top B^\top = (Bu)^\top$, donde $Bu \leqslant 0$ e, assim, em virtude de (5.4), temos que $u \in C^\circ$. Pela igualdade (5.4), existe $y \in \mathbb{R}^M_+$ tal que $u = A^\top y$. Agora, vamos mostrar que, se $z \in C$, então $u^\top z \leqslant 0$. Suponha que $z \in C$. Como $y \geqslant 0$, temos que

$$u^\top z = (A^\top y)^\top z = (y^\top A)z = y^\top(Az) \leqslant 0.$$

Portanto, $x \notin C$ uma vez que $u^\top x > 0$. □

Teorema 5.4. *Um conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um poliedro se, e somente se, existem conjuntos finitos $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ e $C \subseteq \mathbb{R}^N$ tais que*

$$P = \operatorname{conv}(Q) + \operatorname{cone}(C).$$

Prova. Para a prova da necessidade, suponha primeiro que $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um poliedro. Então, existe uma matriz A sobre $M \times N$ e um vetor b sobre M tal que $P = \{Ax \leqslant b\}$. Seja

$$P' := \left\{ \begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} \leqslant 0 \right\}.$$

Note que

$$x \in P \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in P'.$$

Como P' é um cone poliédrico, temos, pelo Teorema 5.3, que existe $k \in \mathbb{N}$ e vetores

$$\begin{bmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

para cada $i \in [k]$ tais que

$$P' = \operatorname{cone}\left(\left\{ \begin{bmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} \middle| i \in [k] \right\} \right).$$

Observe que se $\begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} \in P'$, então $\alpha \geqslant 0$. Segue daí que $\alpha_i \geqslant 0$ para cada $i \in [k]$. Podemos admitir que $\alpha_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in [k]$.[19] Suponha que Segue daí que[20]

[19] Basta mudar a "escala". Para cada $i \in [k]$ com $\alpha_i > 0$ "troque" o vetor

$$\begin{bmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

pelo vetor

$$\begin{bmatrix} x_i/\alpha_i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[20] Aqui, $\underline{\alpha}^c := (\underline{\alpha})^c := [k] \setminus \underline{\alpha}$.

$$
\begin{aligned}
x \in P \quad &\equiv \quad \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in P' \\
&\equiv \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{[k]} : \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} \\
&\equiv \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{[k]} : \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i \in \underline{\alpha}} \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i \in \underline{\alpha}^c} \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\equiv \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{[k]} : x = \sum_{i \in \underline{\alpha}} \lambda_i x_i + \sum_{i \in \underline{\alpha}^c} \lambda_i x_i \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \underline{\alpha}} \lambda_i = 1 \\
&\equiv \quad x \in \mathsf{conv}(\{x_i \mid i \in \underline{\alpha}\}) + \mathsf{cone}(\{x_i \mid i \in \underline{\alpha}^c\})
\end{aligned}
$$

Para a prova da suficiência, suponha que existem $k, n \in \mathbb{N}$ e conjuntos $\{x_1, \ldots, x_k\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de vetores em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$P = \mathsf{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\}) + \mathsf{cone}(\{y_1, \ldots, y_n\}).$$

Então,[21]

$$
\begin{aligned}
x \in P \quad &\equiv \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{[k]}, \mu \in \mathbb{R}_+^{[n]} : x = \sum_{i \in [k]} \lambda_i x_i + \sum_{i \in [n]} \mu_i y_i \quad \text{e} \quad \sum_{i \in [k]} \lambda_i = 1 \\
&\equiv \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{[k]}, \mu \in \mathbb{R}_+^{[n]} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i \in [k]} \lambda_i x_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i \in [n]} \mu_i \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\equiv \quad \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathsf{cone}(C),
\end{aligned}
$$

onde $C := \left\{ \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} \middle| i \in [k] \right\} \bigcup \left\{ \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} \middle| i \in [n] \right\}$. Logo,

$$x \in P \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathsf{cone}(C). \tag{5.6}$$

Como C é finito, temos que $\mathsf{cone}(C)$ é finitamente gerado. Assim, pelo Teorema 5.3, existe uma matriz $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ tal que $\mathsf{cone}(C) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \leqslant 0 \right\}$. Agora, em virtude de (5.6), temos que

$$x \in P \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \leqslant 0 \quad \equiv \quad Ax - b \leqslant 0 \quad \equiv \quad Ax \leqslant -b.$$

Portanto, $P = \{Ax \leqslant -b\}$, ou seja, P é um poliedro. □

Politopos. Um subconjunto P de $\mathbb{R}^N$ é um *politopo* se $P = \mathsf{conv}(Q)$ para algum subconjunto finito Q de $\mathbb{R}^N$.

Conjuntos limitados. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ é *limitado* se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que[22] $|x| \leqslant r$ para cada $x \in X$.

[21] Vamos tecer alguns comentários a respeito da parte formal. Admitimos que os vetores coluna $[1]$ e $[0]$ estão definidos sobre um certo conjunto unitário, digamos U. Dessa forma, os $\begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix}$ também vivem no espaço $N \sqcup U$, uma vez que $x_i, y_k \in \mathbb{R}^N$. Em alguns casos, torna-se excessivamente detalhado especificar o universo de índices das matrizes. Por isso, optamos por omiti-lo quando essa informação for lateralmente relevante, como ocorre no próximo parágrafo, ao nos referirmos à matriz $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$.

[22] Lembre-se que $|x| := \sqrt{x^\top x}$.

Corolário 5.4. *Um subconjunto P de $\mathbb{R}^M$ é um politopo se, e só se, P é um poliedro limitado.*

Prova. Suponha que $P \subseteq \mathbb{R}^M$ é um politopo. Então existe uma matriz Q sobre $M \times N$ tal que $P = \mathsf{conv}(Q)$. É claro que $P = \mathsf{conv}(Q) + \mathsf{cone}(\{0\})$ e, assim, P é um poliedro. Vamos agora mostrar que P é limitado. Se $P = \emptyset$, então o resultado é evidente. Suponha que $P \neq \emptyset$. Para simplificar, vamos escrever $q^j := Qe_j^N$ para cada $j \in N$. Seja $k \in N$ tal que $|q^k| \geqslant |q^j|$ para cada $j \in N$. Seja $p \in P$ e $x \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $Qx = p$ e $\sum_{j \in N} x(j) = 1$. Ora,

$$\begin{aligned}
|p| &= |Qx| \\
&= \Big|\sum_{j\in N} q^j x(j)\Big| \\
&\leqslant \sum_{j\in N} |q^j x(j)| \\
&= \sum_{j\in N} |q^j||x(j)| \\
&\leqslant \sum_{j\in N} |q^k||x(j)| \\
&= |q^k| \sum_{j\in N} |x(j)| \\
&= |q_k|,
\end{aligned}$$

e, consequentemente, P é limitado.

Suponha agora que $P \subseteq \mathbb{R}^M$ é um poliedro limitado. Pelo Teorema 5.4, existe uma matriz Q sobre $M \times N_0$ e uma matriz C sobre $M \times N_1$ tal que $P = \mathsf{conv}(Q) + \mathsf{cone}(C)$. Se $P = \emptyset$, então não há nada a provar. Suponha que $P \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\mathsf{cone}(C) = \{0\}$. Suponha que existe $d \in \mathsf{cone}(C)$ tal que $d \neq 0$. Como $P \neq \emptyset$, temos que $\mathsf{conv}(Q) \neq \emptyset$. Tome $p \in \mathsf{conv}(Q)$ e seja $r \in \mathbb{R}$ e $j \in \underline{d}$. Escolha $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p(j) + \lambda d(j) > r$. Observe que $p + \lambda d \in P$. Além disso,

$$|p + \lambda d| \geqslant |p(j) + \lambda d(j)| > r,$$

e, consequentemente, o poliedro P não é limitado. Segue daí que $\mathsf{cone}(C) = \{0\}$ e, portanto, P é um politopo. □

Proposição 5.4. *Para todo conjunto finito e não vazio $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ e todo $c \in \mathbb{R}^N$,*

$$\max\{c^\top x \mid x \in Q\} = \max\{c^\top x \mid x \in \mathsf{conv}(Q)\}.$$

Prova. Seja Q um conjunto finito e não vazio e $c \in \mathbb{R}^N$. Como $Q \subseteq \mathsf{conv}(Q)$, então

$$\max\{c^\top x \mid x \in Q\} \leqslant \sup\{c^\top x \mid x \in \mathsf{conv}(Q)\}.$$

Vamos agora mostrar que

$$\max\{c^\top x \mid x \in Q\} \geqslant \sup\{c^\top x \mid x \in \mathsf{conv}(Q)\}$$

[23] Um tal z existe pois Q é finito e não vazio.

Seja $z \in Q$ tal que $c^\top z = \max\{c^\top x \mid x \in Q\}$.[23] Seja $x \in \mathrm{conv}(Q)$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}^Q_+$ tal que

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda(q) q \quad \text{e} \quad \sum_{q \in Q} \lambda(q) = 1.$$

Agora,

$$\begin{aligned} c^\top x &= c^\top \Big(\sum_{q\in Q} \lambda(q) q \Big) \\ &= \sum_{q \in Q} \lambda(q) c^\top q \\ &\leqslant \sum_{q\in Q} \lambda(q) c^\top z && \text{pois } \lambda \geqslant 0 \text{ e } \forall q \in Q : c^\top q \leqslant c^\top z \\ &= c^\top z \sum_{q \in Q} \lambda(q) \\ &= c^\top z && \text{pois } \sum_{q\in Q} \lambda(q) = 1. \end{aligned}$$

Logo, $\sup\{c^\top x \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\} \leqslant c^\top x = \max\{c^\top x \mid x \in Q\}$. Como $z \in \mathrm{conv}(Q)$, então $\sup\{c^\top x \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\} = \max\{c^\top x \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\}$. □

5.6 *Pontos extremos*

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto convexo. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^N$ é um *ponto extremo* de C se $x \in P$ e

(5.7) $$x \in [x_1, x_2] \implies x = x_1 \quad \text{ou} \quad x = x_2$$

para cada $x_1, x_2 \in C$, ou seja, $x \in C$ é um ponto extremo de C se x não pode ser expresso como uma combinação convexa *não trivial* de outros dois pontos (distintos) de P, isto é, existem $x_1 \neq x_2 \in C$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. É conveniente escrever

$$\mathrm{ext}(C)$$

para denotar o conjunto dos pontos extremos de C.

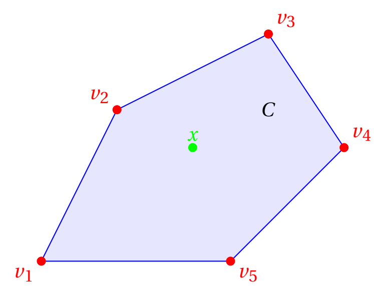


Figura 5.6: A figura ilustra um conjunto convexo C com $\mathrm{ext}(C) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. O ponto x não é um ponto extremo de C.

Proposição 5.5. *Seja X um subconjunto finito de $\mathbb{R}^N$. Para todo $x_o \in X$, se $x_o \in \mathrm{conv}(X \setminus \{x_o\})$, então $\mathrm{conv}(X) = \mathrm{conv}(X \setminus \{x_o\})$.*

Prova. Suponha que $x_o \in X$ é tal que $x_o \in \mathrm{conv}(X \setminus \{x_o\})$. Seja $y \in \mathrm{conv}(X)$. Vamos mostrar que $y \in \mathrm{conv}(X \setminus \{x_o\})$. De $y \in \mathrm{conv}(X)$ vem que existe $\lambda \in \mathbb{R}^X_+$ tal que

$$y = \sum_{x \in X} \lambda(x) x \quad \text{e} \quad \sum_{x\in X} \lambda(x) = 1.$$

Como $x_o \in \mathrm{conv}(X \setminus \{x_o\})$, então existe $\mu \in \mathbb{R}^{X \setminus \{x\}}_+$ tal que

$$x_o = \sum_{X \setminus \{x_o\}} \mu(x) x \quad \text{e} \quad \sum_{X\setminus\{x_o\}} \mu(x) = 1.$$

Agora,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{x\in X} \lambda(x)x \\ &= \lambda(x_o)x_o + \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \lambda(x)x \\ &= \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \lambda(x_o)\mu(x)x + \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \lambda(x)x \\ &= \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} (\lambda(x_o)\mu(x)+\lambda(x))x. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} (\lambda(x_o)\mu(x)+\lambda(x)) &= \lambda(x_o) \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \mu(x) + \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \lambda(x)) \\ &= \lambda(x_o) + \sum_{x\in X\setminus\{x_o\}} \lambda(x) \\ &= \sum_{x\in X} \lambda(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isso prova que $y \in \mathsf{conv}(X \setminus \{x_o\})$. Assim, $\mathsf{conv}(X) \subseteq \mathsf{conv}(X \setminus \{x_o\})$. A relação $\mathsf{conv}(X \setminus \{x_o\}) \subseteq \mathsf{conv}(X)$ é imediata. Portanto, $\mathsf{conv}(X) = \mathsf{conv}(X \setminus \{x_o\})$. □

Teorema 5.5. *Para cada subconjunto finito Q de $\mathbb{R}^N$ existe um subconjunto V de Q tal que*

(i) todo vetor de V é um ponto extremo de $\mathsf{conv}(Q)$, *e*

(ii) $\mathsf{conv}(V) = \mathsf{conv}(Q)$.

Prova. Seja Q um subconjunto finito de $\mathbb{R}^N$. Seja V um subconjunto minimal de Q tal que $\mathsf{conv}(V) = \mathsf{conv}(Q)$. Vamos mostrar que todo vetor de V é um ponto extremo de $\mathsf{conv}(V)$. Suponha que não. Então existe $x \in V$ tal que x não é ponto extremo de $\mathsf{conv}(V)$. Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $x_1 \neq x_2 \in \mathsf{conv}(V)$ tais que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Como $x_1, x_2 \in \mathsf{conv}(V)$, temos que existem $\lambda \in \mathbb{R}^V_+$ e $\mu \in \mathbb{R}^V_+$ tais que

$$x_1 = \sum_{v\in V} \lambda(v)v \quad \text{e} \quad \sum_{v\in V} \lambda(v) = 1,$$

e

$$x_2 = \sum_{v\in V} \mu(v)v \quad \text{e} \quad \sum_{v\in V} \mu(v) = 1,$$

Seja $\nu \in \mathbb{R}^V_+$ tal que $\nu(v) := \alpha\lambda(v) + (1-\alpha)\mu(v)$ para cada $v \in V$. Assim,

$$x = \sum_{v\in V} \nu(v)v \quad \text{e} \quad \sum_{v\in V} \nu(v) = 1.$$

Suponha primeiro que $\nu(x) < 1$. Nesse caso,

$$x = \sum_{v\in V\setminus\{x\}} \frac{\nu(v)}{1-\nu(x)} v \quad \text{e} \quad \sum_{v\in V\setminus\{x\}} \frac{\nu(v)}{1-\nu(x)} = 1,$$

donde $x \in \mathrm{conv}(V \setminus \{x\})$. Pela Proposição 5.5, $\mathrm{conv}(V) = \mathrm{conv}(V \setminus \{x\})$, o que contraria a minimalidade de V. Suponha agora que $\nu(x) = 1$. Nesse caso, $\mu(v) = 0$ para cada $v \in V \setminus \{x\}$. Como $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \geqslant 0$ e $\mu \geqslant 0$, então $\lambda(v) = 0$ e $\mu(v) = 0$ para cada $v \in V \setminus \{x\}$. Mas, $\sum_{v \in V} \lambda(v) = \sum_{v \in V} \mu(v) = 1$ e, consequentemente, $\lambda(x) = \mu(x) = 1$. Por conseguinte, $x_1 = x_2 = x$, o que é uma contradição. Concluímos, assim, que todo elemento de V é um ponto extremo de $\mathrm{conv}(V)$, como queríamos. □

Corolário 5.5. *Se $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um politopo, então $P = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P))$.*

Prova. Suponha que $P \subseteq \mathbb{R}^N$ é um politopo. Seja Q uma parte finita de $\mathbb{R}^N$ tal que $P = \mathrm{conv}(Q)$. Pelo Teorema 5.5, existe um subconjunto V de Q tal que $V \subseteq \mathrm{ext}(P)$ e $\mathrm{conv}(V) = \mathrm{conv}(Q)$. Agora, $\mathrm{ext}(P) \subseteq P$ implica que $\mathrm{conv}(V \cup \mathrm{ext}(P)) = \mathrm{conv}(V) = P$. □

Proposição 5.6. *Sejam $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^N$. Se P_1 um politopo, P_2 é um poliedro e $\mathrm{ext}(P_1) \subseteq P_2$, então $P_1 \subseteq P_2$.*

Prova. Suponha que P_1 é um politopo, P_2 é um poliedro e $\mathrm{ext}(P_1) \subseteq P_2$. Como P_1 é um politopo, então existe um subconjunto finito Q de $\mathbb{R}^N$ tal que $P_1 = \mathrm{conv}(Q)$. Pelo Teorema 5.5, existe uma parte finita V de Q tal que $V \subseteq \mathrm{ext}(P_1)$ e $\mathrm{conv}(V) = P_1$. Agora, P_2 é um conjunto convexo e contém $\mathrm{ext}(P_1) \supseteq V$ e, consequentemente, pela Proposição 5.1, também contém $\mathrm{conv}(V) = P_1$. □

Proposição 5.7. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto convexo e $c \in \mathbb{R}^N$. Se $x \in C$ é tal que $c^\top x > c^\top z$ para cada $z \in C \setminus \{x\}$, então x é um ponto extremo de C.*

Prova. Suponha que $x \in C$ é tal que $c^\top x > c^\top z$ para cada $z \in C \setminus \{x\}$. Sejam $y, z \in C$ tais que $x \in [y, z]$. Seja $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = \lambda y + (1 - \lambda z)$. Então,

$$c^\top x = c^\top(\lambda y + (1-\lambda)z) = \lambda c^\top y + (1-\lambda)c^\top z \leqslant \lambda c^\top x + (1-\lambda)c^\top x = c^\top x,$$

donde vale igualdade em todas as passagens. Logo, $c^\top y = c^\top z = c^\top x$ e, portanto, $y = z = x$. Concluímos, assim, que x é um ponto extremo de C. □

Teorema 5.6. *Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$. Suponha que $x \in P := P(A, b)$ e seja $I := \{i \in M \mid a_i x = b(i)\}$. São equivalentes:*

(i) *x é um ponto extremo de P;*
(ii) $\mathrm{rank}(A_I) = |N|$; *e*
(iii) *existe $c \in \mathbb{R}^N$ tal que $c^\top x > c^\top z$ para cada $z \in P \setminus \{x\}$.*

Prova. Para a prova de (i) ⇒ (ii), suponha que x é um ponto extremo de $P(A,b)$. Admita, por um momento, que $\mathsf{rank}(A_I) < |N|$. Nesse caso, existe $d \neq 0$ (pela Álgebra Linear) tal que $Ad = 0$. Considere o conjunto $I^c := M \setminus I$. A definição de I implica que $a_j x < b(j)$ para cada $j \in I^c$. Vamos agora separar os elementos de I^c em dois conjuntos:

$$J^- := \{j \in I^c \mid a_j d < 0\} \quad \text{e} \quad J^+ := \{j \in I^c \mid a_j d > 0\}.$$

Seja

$$\lambda^- := \sup\left\{\frac{b(j) - a_j x}{a_j d} \mid j \in J^-\right\} \quad \text{e} \quad \lambda^+ := \inf\left\{\frac{b(j) - a_j x}{a_j d} \mid j \in J^+\right\}.$$

Note que $\lambda^- < 0$, pois $b(j) - a_j x > 0$ e $a_j d < 0$ para cada $j \in J^-$ e $\lambda^+ > 0$, pois $b(j) - a_j x > 0$ e $a_j d > 0$ para cada $j \in J^+$. Afirmamos que $x + \mu d \in P$ para cada $\mu \in \mathbb{R} \cap [\lambda^-, \lambda^+]$. De fato, suponha que $\mu \in \mathbb{R} \cap [\lambda^-, \lambda^+]$. Se $i \in I$, então $a_i(x + \mu d) = a_i x + \mu a_i d = b(i)$. Se $i \in I^c$, então

$$a_i(x + \mu d) = a_i x + \mu a_i d \leqslant b(i) + \frac{b(i) - a_i x}{a_i d} a_i d = b(i).$$

Agora, seja $\mu > 0$ um real tal que $\mu, -\mu \in [\lambda^-, \lambda^+]$ e $x_1 := x + \mu d$ e $x_2 := x - \mu d$. Como $d \neq 0$, temos que $x_1 \neq x$ e $x_2 \neq x$. Ademais, $x_1, x_2 \in P$ e $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Logo, x não é ponto extremo de P, o que é uma contradição. Isso prova a implicação (i) ⇒ (ii).

Para a prova de (ii) ⇒ (iii), suponha que $\mathsf{rank}(A_I) = |N|$. Pela Álgebra Linear, se $z \in \mathbb{R}^N$ é tal que $A_I z = b_I$, então $z = x$. Suponha que $z \in P \setminus \{x\}$. Então existe $i \in I$ tal que $a_i z < b(i)$. Seja[24] $c := A_I^\top \mathbb{1}_I^M$ (ou seja, c é a soma das linhas de A cujos índices estão em I). Vamos mostrar que $c^\top x > c^\top z$.

$$\begin{aligned} c^\top x &= ((\mathbb{1}_I^M)^\top A_I)x \\ &= (\mathbb{1}_I^M)^\top (A_I x) \\ &= (\mathbb{1}_I^M)^\top b_I \\ &> (\mathbb{1}_I^M)^\top (A_I z) \\ &= ((\mathbb{1}_I^M)^\top A_I) z \\ &= c^\top z. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Isso prova que (ii) ⇒ (iii).

A prova de (ii) ⇒ (iii) segue imediatamente da Proposição 5.7 uma vez que P é um conjunto convexo. □

[24] Como de hábito, $a_i := e_i^M A$, ou seja, a_i é a i-ésima linha de A.

5.7 O politopo dos emparelhamentos perfeitos

Seja $G := (V,E)$ um grafo. Considere o conjunto

$$P_{\mathsf{pm}}(G) := \mathsf{conv}(\{\mathbb{1}_M^E \mid M \text{ é um emparelhamento perfeito de } G\}). \tag{5.9}$$

É claro que $P_{\mathsf{pm}}(G)$ é um politopo. Esse politopo, $P_{\mathsf{pm}}(G)$, é denominado de *politopo dos emparelhamentos perfeitos* de G. Considere, durante esta seção, o conjunto $P(G)$ dos vetores $x \in \mathbb{R}_+^E$ tais que $\widetilde{x}(\delta(v)) = 1$ para cada $v \in V$. O propósito desta seção é estabelecer que $P_{\mathsf{pm}}(G) = P(G)$ para todo grafo bipartido G.

Teorema 5.7. *Se G é um grafo bipartido, então*

$$P_{\mathsf{pm}}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid \widetilde{x}(\delta(v)) = 1 \text{ para cada } v \in V\}.$$

Prova. Para cada grafo G, seja

$$P(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid \widetilde{x}(\delta(v)) = 1 \text{ para cada } v \in V\}.$$

A prova segue uma linha similar à prova da Proposição 2.1. Suponha que G é um grafo bipartido. Como vimos no Capítulo 2, $P_{\mathsf{pm}}(G) \subseteq P(G)$. Vamos então provar que $P(G) \subseteq P_{\mathsf{pm}}(G)$. Para isso, de acordo com a Proposição 5.6, basta mostrar que $\mathsf{ext}(P(G)) \subseteq P_{\mathsf{pm}}(G)$. Suponha que x é um ponto extremo de $P(G)$. Vamos mostrar que $x(e) \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$. Seja $F := \{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}$. Se $F = \emptyset$, então $x(e) \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$. Suponha que $F \neq \emptyset$. Seja P um caminho simples e maximal cujas arestas estão contidas em F. Considere a última aresta, a, de P e denote por u o término de P. Como $\widetilde{x}(\delta(u)) = 1$ e $0 < x(a) < 1$, então existe uma aresta $f \neq a$ tal que $f \in \delta(u)$ e $0 < x(f) < 1$. Como P é maximal, então a ponta de f distinta de u está em P. Logo $\{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}$ contém as arestas de um circuito, digamos C. Ora, C é um circuito par, donde o conjunto das arestas de C é a união disjunta de dois emparelhamentos J_0 e J_1. Seja $\lambda := \min\{x(e) \mid e \in E(C)\}$. É claro que $\lambda > 0$. Além disso, $x_1 := x + \lambda(\mathbb{1}_{J_0}^E - \mathbb{1}_{J_1}^E) \in P(G)$ e $x_2 := x - \lambda(\mathbb{1}_{J_0}^E - \mathbb{1}_{J_1}^E) \in P(G)$. Entretanto, $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, o que contraria o fato de x ser um ponto extremo de $P_0(G)$. Concluímos, assim, que $x(e) \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$. Agora, é fácil ver que $\{e \in E \mid x(e) = 1\}$ é um emparelhamento de G e, consequentemente, $x \in P_{\mathsf{pm}}(G)$. □

5.8 O politopo dos emparelhamentos

Seja $G := (V, E)$ um grafo. Considere o conjunto

$$P_{\mathsf{m}}(G) := \mathsf{conv}(\{\mathbb{1}_M^E \mid M \text{ é um emparelhamento de } G\}). \tag{5.10}$$

É claro que $P_{\mathsf{m}}(G)$ é um politopo. Esse politopo, $P_{\mathsf{m}}(G)$, é denominado de *politopo dos emparelhamentos* de G. Durante esta seção, seja $P(G)$ o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}_+^E$ tais que $\widetilde{x}(\delta(v)) \leq 1$ para cada $v \in V$. O propósito desta seção é estabelecer que $P_{\mathsf{m}}(G) = P(G)$ se, e só se, G é um grafo bipartido.

Antes, entretanto, vamos tecer alguns comentários. Suponha que $G := (V, E)$ é um grafo tal que $E = \emptyset$. O único emparelhamento de G, nesse caso, é o conjunto vazio de arestas cujo vetor de incidência é $\mathbb{1}_\emptyset^\emptyset$ (lembre-se de que esse objeto é um vetor coluna). Assim, $P_{\mathsf{pm}}(G) = \{\mathbb{1}_\emptyset^\emptyset\}$.[25] Considere agora o conjunto $P(G)$ definido acima e convença-se de que $\mathbb{1}_\emptyset^\emptyset$ é o único habitante de $P(G)$.

[25] Mais precisamente, o que é $\mathbb{1}_\emptyset^\emptyset$?

Lema 5.2. *Seja $G := (V, E)$ um grafo bipartido. Se $E \neq \emptyset$ e x é ponto extremo de $\{x \in \mathbb{R}^E_+ \mid \forall v \in V : \tilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\}$, então existe $e \in E$ tal que $x(e) \in \{0, 1\}$.*

Prova. Suponha que $E \neq \emptyset$ e que x é ponto extremo de

$$P(G) := \{x \in \mathbb{R}^E_+ \mid \forall v \in V : \tilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\}.$$

mas que, do contrário,

$$0 < x(e) < 1$$

para cada $e \in E$. Como x é ponto extremo de $P(G)$, temos, pelo Teorema 5.6, que existe um subconjunto U de V tal que

(i) $\tilde{x}(\delta u) = 1$ para cada $u \in U$,

(ii) $\{\mathbb{1}^E_{\delta u} \mid u \in U\}$ é linearmente independente, e

(iii) $|U| = |E|$.

Note que, em virtude de (i), $d(u) \geqslant 2$ para cada $u \in U$. Assim,

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in V \setminus U} d(v) \geqslant \sum_{v \in U} d(v) \geqslant 2|U| = 2|E|,$$

donde vale a igualdade em todas as passagens e, consequentemente, $d(v) = 2$ para cada $v \in U$ e $d(v) = 0$ para cada $v \in V \setminus U$. Segue daí que cada componente de G é um circuito ou consiste de um único vértice.[26] Como $E \neq \emptyset$, então G possui um circuito C, que é par, uma vez que G é bipartido. Seja S, T uma bipartição de G. Então,

$$\sum_{s \in V(C) \cap S} \mathbb{1}^E_{\delta s} = \sum_{t \in V(C) \cap T} \mathbb{1}^E_{\delta t}. \tag{5.11}$$

Note que $V(C) \cap S, V(C) \cap T \subseteq U$. A igualdade (5.11) implica que o conjunto $\{\mathbb{1}^E_{\delta u} \mid u \in U\}$ é linearmente dependente, o que contraria (ii). Essa contradição mostra que existe $e \in E$ tal que $x(e) \in \{0, 1\}$. □

Teorema 5.8. *Para todo grafo G,*

$$P_{\mathsf{m}}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E_+ \mid \forall v \in V : \tilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\} \quad \equiv \quad G \text{ é bipartido.}$$

Prova. Para um grafo G, seja $P(G) := \{x \in \mathbb{R}^E_+ \mid \forall v \in V : \tilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\}$.

Para a prova de necessidade, seja G um grafo e suponha que G não é bipartido. Vamos exibir um vetor que habita $P(G) \setminus P_{\mathsf{m}}(G)$. Seja C um circuito ímpar de G e considere o vetor $x := \frac{1}{2}\mathbb{1}^E_{E(C)}$, ou seja, $x(e) = 1/2$ se $e \in E(C)$ e 0 caso contrário. Note que $x \in P(G)$. Seja $c := \mathbb{1}^E_{E(C)}$. Então $c^\top x = |C|/2$. Além disso, $c^\top \mathbb{1}^E_M \leqslant (|C| - 1)/2$ para cada emparelhamento M de G, donde, pela Proposição 5.4, $c^\top z \leqslant (|C| - 1)/2$ para cada $z \in P_{\mathsf{m}}(G)$. Portanto, $x \notin P_{\mathsf{m}}(G)$, como desejado. Isso prova que G é bipartido.

Para a prova da suficiência, vamos mostrar que para todo grafo bipartido G, se x é um ponto extremo de $P(G)$, então $x(e) \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$. A

[26] Se G é um grafo e $d(v) \geqslant 2$ para cada $v \in V$, então G possui um circuito. De fato, tome um caminho simples e maximal em G, digamos P. Considere uma das pontas de P, digamos u. Como $d(u) \geqslant 2$ existe uma aresta $e \in \delta(u)$ tal que $e \notin E(P)$. Seja v a ponta de e distinta de u. A maximalidade de P implica que $v \in V(C)$. Segue daí que $P(v, u) \cdot \langle u, e, v \rangle$ é um circuito de G.
Agora, suponha que G é um grafo tal que $d(v) \in \{0, 2\}$ para cada $v \in V$. Vamos mostrar que cada componente de G é um circuito ou consiste de um único vértice. A prova é por indução em $|E|$. Se $E = \emptyset$, então todo componente consiste de um único vértice. Se $E \neq \emptyset$, então, de acordo com o provado anteriormente, G possui um circuito C. Como $|E(G - V(C))| < |E(G)|$ e $d_{G-V(C)}(v) \in \{0, 2\}$ para cada $v \in V(G - V(C))$, então, por hipótese de indução, cada componente de $G - V(C)$ é um circuito ou consiste de um único vértice. Como C é um circuito e é um componente de G, então cada componente de G é um circuito ou consiste de um único vértice.

prova por indução em $|E|$. Seja G um grafo bipartido. O resultado é imediato se $E = \emptyset$. Suponha então que $E \neq \emptyset$. Admita que $x \in \mathsf{ext}(P(G))$. Pelo Lema 5.2, existe $e \in E$ tal que $x(e) \in \{0,1\}$. Pelo Teorema 5.6, existe $c \in \mathbb{R}^E$ tal que $c^\top x > c^\top z$ para cada $z \in P(G) \setminus \{x\}$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $x(e) = 0$.

Nesse caso, seja $G' := G - e$. Vamos mostrar que x_{-e} é ponto extremo de $P_1(G')$. Note que $x_{-e} \in P_1(G')$. Considere o vetor c_{-e} e suponha que $y \in P_1(G') \setminus \{x_{-e}\}$. Seja $z \in \mathbb{R}^E$ tal que $z_{-e} = y$ e $z(e) = 0$. É fácil ver que $z \in P_1(G)$. Ademais, $z \neq x$ uma vez que $z_{-e} \neq x_{-e}$. Logo, $c_{-e}^\top x_{-e} = c(e)x(e) + c_{-e}^\top x_{-e} = c^\top x > c^\top z = c(e)z(e) + c_{-e}^\top z_{-e} = c_{-e}^\top z_{-e}$. Assim, pelo Teorema 5.6, o vetor x_{-e} é ponto extremo de $P(G')$. Por hipótese de indução, $x_{-e}(f) \in \{0,1\}$ para cada $f \in E(G')$. Portanto, $x(f) \in \{0,1\}$ para cada $f \in E$, como queríamos.

Caso 2: $x(e) = 1$.

Nesse caso, $x(f) = 0$ para cada $f \in (\delta u \cup \delta v) \setminus \{e\}$. Sejam u e v as pontas de e e considere o grafo $G' := G - \{u, v\}$. Para abreviar, seja $E' := E(G')$. Vamos mostrar que $x_{E'}$ é ponto extremo de $P(G')$. Note que $x_{E'} \in P(G')$. Considere o vetor $c_{E'}$ e suponha que $y \in P(G') \setminus \{x_{E'}\}$. Seja $z \in \mathbb{R}^E$ tal que $z_{E'} = y$, $z_{(\delta u \cup \delta v)\setminus\{e\}} = 0$ e $z(e) = 1$. É fácil ver que $z \in P_1(G)$. Ademais, $z \neq x$ uma vez que $z_{E'} \neq x_{E'}$. Logo, $c_{E'}^\top x_{E'} = c^\top x - c(e) > c^\top z - c(e) = c_{E'}^\top z_{E'}$. Assim, pelo Teorema 5.6, o vetor $x_{E'}$ é ponto extremo de $P(G')$. Por hipótese de indução, $x_{E'}(f) \in \{0,1\}$ para cada $f \in E'$. Portanto, $x(f) \in \{0,1\}$ para cada $f \in E$, como queríamos.

Para finalizar a prova, suponha que $x \in \mathsf{ext}(P(G))$. Então $x(e) \in \{0,1\}$ para cada $e \in E$. Seja $M := \{e \in E \mid x(e) = 1\}$. É claro que M é um emparelhamento de G.[27] Além disso, $x = \mathbb{1}_M^E$. Por conseguinte, $x \in P_{\mathsf{m}}(G)$. Pela Proposição 5.6, $P(G) \subseteq P_{\mathsf{m}}(G)$. A relação $P_{\mathsf{m}}(G) \subseteq P(G)$ é imediata. Portanto, $P_{\mathsf{m}}(G) = P(G)$, como queríamos. □

[27] Suponha que $uv \in M$ e que $uv' \in E \setminus M$. Ora, $1 \geqslant \widetilde{x}(\delta u) \geqslant x(uv) + x(uv') = 1 + x(uv')$, donde $x(uv') \leqslant 0$ e, portanto, $uv' \notin M$.

No que segue, vamos reorganizar a prova da suficiência do Teorema 5.8. A ideia lembra a prova da Proposição 2.1 no seguinte sentido. Vamos mostrar que para cada $x \in P(G)$ existe um emparelhamento M cujo custo é pelo menos tão grande quanto o custo do vetor x. Lembre-se de que, durante esta seção, para cada grafo G,

$$P(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid \forall v \in V : \widetilde{x}(\delta(v)) \leqslant 1\}.$$

Teorema 5.9. *Se G é um grafo bipartido, então para cada $c \in \mathbb{R}^E$ existe um emparelhamento M de G tal que $\widetilde{c}(M) \geqslant c^\top x$ para cada $x \in P(G)$.*

Prova. A prova é por indução em $|E|$. Seja G um grafo bipartido e $c \in \mathbb{R}^E$ Se $E = \emptyset$, então tome $M := \emptyset$. Suponha que $E \neq \emptyset$. Note que $P(G)$ é um politopo. Seja x um ponto extremo de $P(G)$ tal que

$$c^\top x = \max\{c^\top z \mid z \in P(G)\}.$$

Pelo Lema 5.2, existe $e \in E$ tal que $x(e) \in \{0,1\}$. Temos os seguintes casos:

Caso 1: $x(e) = 0$.

Nesse caso, seja $G' := G - e$. É claro que $x_{-e} \in P(G')$. Por hipótese de indução, existe um emparelhamento M' de G' tal que $\widetilde{c_{-e}}(M') \geqslant c_{-e}^\top z$ para cada $z \in P(G')$. Logo, em particular, $\widetilde{c_{-e}}(M') \geqslant c_{-e}^\top x_{-e}$. Seja $M := M'$. Agora, $\widetilde{c}(M) = \widetilde{c_{-e}}(M') \geqslant c_{-e}^\top x_{-e} = c^\top x$. Finalmente, seja $z \in P(G)$. Então, $\widetilde{c}(M) \geqslant c^\top x \geqslant c^\top z$, como queríamos.

Caso 2: $x(e) = 1$.

Nesse caso, sejam u e v as pontas de u e seja $G' := G - \{u, v\}$. Para abreviar, seja $E' := E(G')$. Observe que $E' = E \setminus (\delta u \cup \delta v)$. Por hipótese de indução, existe um emparelhamento M' de G' tal que $\widetilde{c_{E'}}(M') \geqslant c_{E'}^\top z$ para cada $z \in P(G')$. Logo, em particular, $\widetilde{c_{E'}}(M') \geqslant c_{E'}^\top x_{E'}$ já que $x_{E'} \in P(G')$.[28] Seja $M := M' \cup \{e\}$. Agora,

$$\widetilde{c}(M) = \widetilde{c_{E'}}(M') + c(e) \geqslant c_{E'}^\top x_{E'} + c(e) = c_{E'}^\top x_{E'} + \widetilde{c}(\delta u \cup \delta v) = c^\top x.$$

Finalmente, seja $z \in P(G)$. Então, $\widetilde{c}(M) \geqslant c^\top x \geqslant c^\top z$, como queríamos.

[28] verifique!

□

Vamos agora provar a suficiência Teorema 5.8. Seja G um grafo bipartido. Suponha que x é um ponto extremo de $P(G)$. Pelo Teorema 5.6, existe $c \in \mathbb{R}^E$ tal que $c^\top x > c^\top z$ para cada $z \in P(G) \setminus \{x\}$. O Teorema 5.9 implica que existe um emparelhamento M de G tal que $\widetilde{c}(M) \geqslant c^\top z$ para cada $z \in P(G)$. Em particular, $\widetilde{c}(M) \geqslant c^\top x$. Ora, o vetor $\mathbb{1}_M^E$ é tal que $\widetilde{c}(M) = c^\top \mathbb{1}_M^E$ e, ademais, $\mathbb{1}_M^E \in P(G)$, donde, pelo Teorema 5.6, $c^\top \mathbb{1}_M^E = c^\top x$ e, portanto, $x = \mathbb{1}_M^E$.

5.9 O politopo das coberturas de vértices

Uma *cobertura* de um grafo simples $G = (V, E)$ é um subconjunto $C \subseteq V$ tal que toda aresta de G tem uma ponta em C.

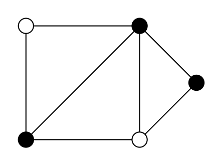


Figura 5.7: O conjunto dos vértices pretos é uma cobertura.

Seja G um grafo simples. O *politopo das coberturas de vértices* de G é o conjunto

$$P_{\mathsf{c}}(G) := \mathsf{conv}(\{\mathbb{1}_C^V \mid C \text{ é uma cobertura de } G\}).$$

Além disso, durante esta seção, seja[29]

$$P(G) := \{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}.$$

O propósito agora é estabelecer que $P(G) = P_{\mathsf{c}}(G)$ quando G é um grafo bipartido. É claro que $P_{\mathsf{c}}(G) \subseteq P(G)$. Seguindo uma linha similar ao da seção anterior, vamos provar primeiro o seguinte lema.

[29] Suponha que $G := (V, E)$ é um grafo livre de arestas, ou seja, $E = \emptyset$. Nesse caso, qualquer subconjunto de V é uma cobertura. Logo, $P_{\mathsf{c}}(G) = \mathsf{conv}\{\mathbb{1}_C^V \mid C \subseteq V\} = [0,1]^V$. Observe, também, que qualquer vetor $y \in [0,1]^V$ satisfaz trivialmente as restrições $y(u) + y(v) \geqslant 1$ para cada $uv \in E$, uma vez que $E = \emptyset$. Assim, $P_{\mathsf{c}}(G) = [0,1]^V$.

Lema 5.3. *Seja $G := (V,E)$ um grafo bipartido. Se y é ponto extremo de $\{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}$, então existe $u \in V$ tal que $y(u) \in \{0,1\}$.*

Prova. Suponha que y é ponto extremo de $P(G) := \{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}$, mas que, do contrário, $0 < y(v) < 1$ para cada $v \in V$. Como y é ponto extremo de $P(G)$, então, pelo Teorema 5.6, existe um subconjunto F de E tal que

(i) $y(u) + y(v) = 1$ para cada $uv \in F$,
(ii) $\{\mathbb{1}^V_{\{u,v\}} \mid uv \in F\}$ é linearmente independente,
(iii) $|F| = |V|$.

Agora, $|F| = |V|$ implica que G possui um circuito. Como G é bipartido, o circuito C tem comprimento par e, assim, existem emparelhamentos disjuntos J_0 e J_1 de G tais que $J_0 \cup J_1 = E(C)$. Agora,

$$\sum_{uv \in J_0} \mathbb{1}^V_{\{u,v\}} = \mathbb{1}^V_{V(C)} = \sum_{uv \in J_1} \mathbb{1}^V_{\{u,v\}},$$

o que contraria (ii). Isso prova o lema. □

Teorema 5.10. *Para todo grafo simples G.*

$$P_{\mathsf{c}}(G) = \{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\} \quad \equiv \quad G \text{ é bipartido.}$$

Prova. A prova da necessidade fica para o leitor (imite a prova da necessidade do Teorema 5.8). Para cada grafo simples G, seja

$$P(G) := \{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}.$$

É fácil checar que $P_{\mathsf{c}}(G) \subseteq P(G)$ para todo grafo G. Vamos mostrar que para todo grafo simples e bipartido G, se $y \in \operatorname{ext}(P(G))$, então $y(u) \in \{0,1\}$ para cada $u \in V$. A prova é por indução em $|V|$. Suponha que $y \in \operatorname{ext}(P(G))$. O resultado é claro se $|V| = 1$.[30] Assim, admita que $|V| \geqslant 2$. Pelo Lema 5.3, existe $u \in V$ tal que $y \in \{0,1\}$. Como y é ponto extremo de $P(G)$, então, pelo Teorema 5.6, existe $c \in \mathbb{R}^V$ tal que $c^\top y > c^\top x$ para cada $x \in P(G) \setminus \{y\}$. Temos então dois casos a considerar.

[30] Justifique (veja a nota anterior)!

Caso 1: Existe $u \in V$ tal que $y(u) = 1$.

Nesse caso, seja $G' := G - u$. Vamos mostrar que $y_{-u} \in \operatorname{ext}(P(G'))$. É claro que $y_{-u} \in P(G')$. Considere o vetor c_{-u}. Vamos mostrar que $c_{-u}^\top y_{-u} > c_{-u}^\top x$ para cada $x \in P(G') \setminus \{y_{-u}\}$. De fato, suponha que $x \in P(G') \setminus \{y_{-u}\}$. Seja $z \in \mathbb{R}^V$ tal que $z_{-u} = x$ e $z(u) = 1$. É fácil verificar que $z \in P(G)$. Logo, $c_{-u}^\top y_{-u} = c^\top y - c(u) > c^\top z - c(u) = c_{-u}^\top z_{-u} = c_{-u} x$. Assim, pelo Teorema 5.6, y_{-u} é ponto extremo de $P(G')$. Por hipótese de indução, $y_{-u}(v) \in \{0,1\}$ para cada $v \in V(G')$ e, portanto, $y(v) \in \{0,1\}$ para cada $v \in V$.

Caso 2: Para cada $u \in V$ vale que $y(u) < 1$.

Como $y(v) \in \{0,1\}$ para cada $v \in V$, temos que existe $u \in V$ tal que $y(u) = 0$. Afirmamos que $d(u) = 0$. De fato, se $d(u) > 0$, então existe $uv \in \delta u$. De $y(u) + y(v) \geqslant 1$ e $y(v) \leqslant 1$ vem que $y(v) = 1$, o que é uma contradição. Portanto, existe $u \in V$ tal que $y(u) = 0$ e $d(u) = 0$.

Seja $G' := G - u$. Vamos mostrar que $y_{-u} \in \operatorname{ext}(P(G'))$. É claro que $y_{-u} \in P(G')$. Considere o vetor c_{-u}. Vamos mostrar que $c_{-u}^\top y_{-u} > c_{-u}^\top x$ para cada $x \in P(G') \setminus \{y_{-u}\}$. De fato, suponha que $x \in P(G') \setminus \{y_{-u}\}$. Seja $z \in \mathbb{R}^V$ tal que $z_{-u} = x$ e $z(u) = 0$. É fácil verificar que $z \in P(G)$. Logo, $c_{-u}^\top y_{-u} = c^\top y > c^\top z = c_{-u}^\top z_{-u} = c_{-u} x$. Assim, pelo Teorema 5.6, y_{-u} é ponto extremo de $P(G')$. Por hipótese de indução, $y_{-u}(v) \in \{0,1\}$ para cada $v \in V(G')$ e, portanto, $y(v) \in \{0,1\}$ para cada $v \in V$.

Suponha que $y \in \operatorname{ext}(P(G))$ e seja $Y := \{u \in V \mid y(v) = 1\}$. Afirmamos que Y é uma cobertura de vértices de G. Suponha que $uv \in E$. Como $y \in P(G)$, então $y(u) + y(v) \geqslant 1$. Mas, $y(u), y(v) \in \{0,1\}$, donde $y(u) = 1$ ou $y(v) = 1$ e, consequentemente, $u \in Y$ ou $v \in Y$. Isso prova que Y é uma cobertura. Como $y = \mathbb{1}_Y^V$, então $y \in P_\mathsf{c}(G)$. Isso prova que $\operatorname{ext}(P(G)) \subseteq P_\mathsf{c}(G)$, donde, pela Proposição 5.6, $P(G) \subseteq P_\mathsf{c}(G)$. □

5.10 O Teorema de König

Seja G um grafo simples bipartido, $\mathscr{M}$ o conjunto dos emparelhamentos de G e $\mathscr{C}$ o conjunto das coberturas de G. O Teorema de König afirma que o tamanho de um emparelhamento máximo de G é igual ao tamanho de uma cobertura mínima de G , isto é.

$$\nu(G) := \max\{|M| \mid M \in \mathscr{M}\} = \min\{|C| \mid C \in \mathscr{C}\} =: \tau(G).$$

Note que o Teorema de König é uma consequência imediata do Exercício 4.5. Vamos apresentar uma prova alternativa que usa as caracterizações do politopo dos emparelhamentos e do politopo das coberturas.

Seja $P(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid \forall v \in V : \tilde{x}(\delta v) \leqslant 1\}$ e $D(G) := \{y \in \mathbb{R}_+^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}$. Observe que o dual de $\sup\{\tilde{x}(E) \mid x \in P(G)\}$ é $\inf\{\tilde{y}(V) \mid y \in D(G)\}$. Como $P(G) \neq \emptyset$ e $D(G) \neq \emptyset$, temos, pelo Teorema Forte da Dualidade, que

$$\max\{\tilde{x}(E) \mid x \in P(G)\} = \min\{\tilde{y}(V) \mid y \in D(G)\}. \tag{5.12}$$

Seja $D'(G) := \{y \in [0,1]^V \mid \forall uv \in E : y(u) + y(v) \geqslant 1\}$. Afirmamos que

$$\min\{\tilde{y}(V) \mid y \in D(G)\} = \min\{\tilde{y}(V) \mid y \in D'(G)\}. \tag{5.13}$$

Como $D'(G) \subseteq D(G)$, então, em virtude de (5.12), basta mostrar que se $y \in D(G)$ é tal que $\tilde{y}(V) = \min\{\tilde{y}(V) \mid y \in D(G)\}$, então $y \in [0,1]^V$. De fato, suponha que $y \in D(G)$ é tal que $\tilde{y}(V) = \min\{\tilde{y}(V) \mid y \in D(G)\}$ e que, ademais, existe $u \in V$ tal que $y(u) > 1$. Se $\delta u = \emptyset$, então $y' := y[u \mapsto 0] \in D(G)$ e $\widetilde{y'}(V) = \widetilde{y}(V) - y(u) < \widetilde{y}(V)$, o que contraria a escolha de y. Suponha que $\delta u \neq \emptyset$. Seja $\lambda := \min\{y(u) + y(v) - 1 \mid uv \in \delta(u)\}$ e $y' := y[u \mapsto y(u) - \lambda]$. Não é difícil checar que $y' \in D(G)$.[31] Além disso, $\widetilde{y'}(V) = \widetilde{y}(V) - \lambda < \widetilde{y}(V)$ o que, mais uma vez, contraria a escolha de y. Isso prova que $y \in [0,1]^V$.

[31] De fato, seja $e \in E$. O resultado é imediato se u não é ponta de e. Suponha que u é ponta de e e seja v a outra ponta de e. Ora, $y'(u) + y'(v) = y(u) - \lambda + y(v) \geqslant y(u) - (y(u) + y(v) - 1) + y(v) = 1$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\max\{|M| \mid M \in \mathcal{M}\} &= \max\{\widetilde{x}(E) \mid x \in P_{\mathsf{m}}(G)\})\} \\
&= \max\{\widetilde{x}(E) \mid x \in P(G)\} \\
&= \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in D(G)\} \\
&= \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in D'(G)\} \\
&= \min\{\widetilde{y}(V) \mid y \in P_{\mathsf{c}}(G)\})\} \\
&= \min\{|C| \mid C \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade vem da Proposição 5.4; a segunda, de $P(G) = P_{\mathsf{m}}(G)$; a terceira, do Teorema Forte da Dualidade; a quarta, de (5.13); a quinta, de $D'(G) = P_{\mathsf{c}}(G)$; a sexta, da Proposição 5.4. Isso completa a prova do Teorema de König.

5.11 *O politopo das arborescências*

Lema 5.4. *Para qualquer digrafo D, qualquer $x \in \mathbb{R}^A_+$, e quaisquer conjuntos $S, T \subseteq V$, vale que*

$$\mathbb{1}_{\delta^- S} + \mathbb{1}_{\delta^- T} \geqslant 1_{\delta^-(S \cup T)} + 1_{\delta^-(S \cap T)}, \tag{5.14}$$

onde $\mathbb{1} := \mathbb{1}^A$. Ademais, vale igualdade em (5.14) se, e só se, não existe um arco $a \in A$ tal que a tem uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$.

Prova. A prova é um pouco enfadonha uma vez que envolve tão somente uma análise de casos. Seja D um digrafo, seja $x \in \mathbb{R}^A_+$ e sejam S, T subconjuntos de V. Suponha que $a \in A$ e seja $a \simeq uv$. Se $a \notin \delta^-(S \cup T) \cup \delta^-(S \cap T)$, então $\mathbb{1}_{\delta^-(S \cup T)}(a) + \mathbb{1}_{\delta^-(S \cap T)}(a) = 0$, e a desigualdade é óbvia. Suponha primeiro que $a \in \delta^-(S \cup T)$. Então, $u \notin S \cup T$ e $v \in S \cup T$. Temos três casos:

Caso 1: $v \in S \setminus T$.

Nesse caso, como $v \notin T$, então $a \notin \delta^- T$ e $a \notin \delta^-(S \cap T)$. Ademais, $a \in \delta^- S$, pois $v \in S$ e $u \notin S$. Por um lado,

$$\mathbb{1}_{\delta^- S}(a) + \mathbb{1}_{\delta^- T}(a) = 1 + 0 = 1,$$

e, por outro lado,

$$1_{\delta^-(S \cup T)}(a) + 1_{\delta^-(S \cap T)}(a) = 1 + 0 = 1.$$

Logo, a desigualdade é válida.

Caso 2: $v \in T \setminus S$.

Análogo ao Caso 1.

Caso 3: $v \in S \cap T$.

Nesse caso, $a \in \delta^-(S \cap T)$. Além disso, $a \in \delta^- S$ — pois $u \notin S$ e $v \in S$ — e $a \in \delta^- T$ — pois $u \notin T$ e $v \in T$. Assim,

$$1_{\delta^- S}(a) + 1_{\delta^- T}(a) = 1 + 1 = 2,$$

e

$$1_{\delta^-(S \cup T)}(a) + 1_{\delta^-(S \cap T)}(a) = 1 + 1 = 2.$$

Logo, a desigualdade é válida.

Suponha agora que $a \in \delta^-(S \cap T)$ mas que $a \notin \delta^-(S \cup T)$. Assim, $u \in (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$ e $v \in S \cap T$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u \in S \setminus T$. Então, $a \in \delta^-(T)$ e $a \notin \delta^- S$. Logo,

$$1_{\delta^- S}(a) + 1_{\delta^- T}(a) = 0 + 1 = 1,$$

e

$$1_{\delta^-(S \cup T)}(a) + 1_{\delta^-(S \cap T)}(a) = 0 + 1 = 1.$$

Logo, a desigualdade é válida. Note que o argumento apresentado[32] permite concluir que não há nenhum arco com uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$ se, e só se,

$$\mathbb{1}_{\delta^- S} + \mathbb{1}_{\delta^- T} = 1_{\delta^-(S \cup T)} + 1_{\delta^-(S \cap T)}.$$

□

[32] Apenas observe que se não vale a igualdade, então existe $a \in A$ tal que

$$\mathbb{1}_{\delta^- S}(a) + \mathbb{1}_{\delta^- T}(a) > 1_{\delta^-(S \cup T)}(a) + 1_{\delta^-(S \cap T)}(a).$$

Os casos da prova estabelecem que a tem uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$. Reciprocamente, se não há arcos com uma ponta $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$, então os casos da prova implicam que

$$\mathbb{1}_{\delta^- S} + \mathbb{1}_{\delta^- T} = 1_{\delta^-(S \cup T)} + 1_{\delta^-(S \cap T)}.$$

Corolário 5.6. *Para qualquer digrafo D, qualquer $x \in \mathbb{R}^A_+$, e quaisquer conjuntos $S, T \subseteq V$, vale que*

$$\widetilde{x}(\delta^- S) + \widetilde{x}(\delta^- T) \geqslant \widetilde{x}(\delta^-(S \cup T)) + \widetilde{x}(\delta^-(S \cap T)). \tag{5.15}$$

Se vale igualdade em (5.14), *então*

- *(i)* $x(a) = 0$ *para cada $a \in A$ tal que a tem uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$, e*
- *(ii)* *se $x > 0$, então* $\mathbb{1}_{\delta^- S} + \mathbb{1}_{\delta^- T} = 1_{\delta^-(S \cup T)} + 1_{\delta^-(S \cap T)}$.

Prova. Seja D um digrafo, seja $x \in \mathbb{R}^A_+$ e sejam S e T subconjuntos de V. Para abreviar, escrevemos $\mathbb{1} := \mathbb{1}^A$. Então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(\delta^- S) + \widetilde{x}(\delta^- T) &= x^\top \mathbb{1}_{\delta^- S} + x^\top \mathbb{1}_{\delta^- T} \\
&= x^\top (\mathbb{1}_{\delta^- S} + x^\top \mathbb{1}_{\delta^- T}) \\
&\geqslant x^\top (\mathbb{1}_{\delta^-(S \cup T)} + \mathbb{1}_{\delta^-(S \cap T)}) \\
&= x^\top \mathbb{1}_{\delta^-(S \cup T)} + x^\top \mathbb{1}_{\delta^-(S \cap T)} \\
&= \widetilde{x}(\delta^-(S \cup T)) + \widetilde{x}(\delta^-(S \cap T)),
\end{aligned}$$

onde a desigualdade segue de (5.14) e de $x \geqslant 0$. Suponha que vale igualdade em (5.15). Pelo Lema 5.4, $x(a) = 0$ para cada $a \in A$ que possui uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$, o que prova (i). Para a prova de (ii), suponha que $x > 0$.[33] Nesse caso, não existe nenhum arco com uma ponta em $S \setminus T$ e a outra em $T \setminus S$. Assim, o Lema 5.4 implica que $\mathbb{1}_{\delta^- S} + \mathbb{1}_{\delta^- T} = 1_{\delta^-(S \cup T)} + 1_{\delta^-(S \cap T)}$. □

[33] Isto é, $x(a) > 0$ para cada $a \in A$.

Seja $D := (V, A)$ um digrafo e $r \in V$ um de seus vértices. Seja também $\mathscr{S}$ a família de $\bar{r}$-conjuntos de D. Considere o conjunto

(5.16) $P_{\mathsf{arb}}(D) := P_{\mathsf{arb}}(D, r) := \mathsf{conv}\{\mathbb{1}^A_B \mid B \text{ é uma } r\text{-arborescência de } D\}.$

É claro que $P_{\mathsf{arb}}(D)$ é um politopo. Esse politopo é chamado de *politopo das r-aborescências* de D. Durante esta seção, seja $P'_{\mathsf{arb}}(D, r) =: P'_{\mathsf{arb}}(D)$ o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}^A_+$ tais que

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(\delta^-(r)) &= 0, \\ \widetilde{x}(\delta^-(s)) &= 1 \quad \text{para cada } s \in V \setminus \{r\}, \\ \widetilde{x}(\delta^- S) &\geqslant 1 \quad \text{para cada } S \in \mathscr{S}. \end{aligned}$$

O propósito desta seção é estabelecer que $P_{\mathsf{arb}}(D, r) = P'_{\mathsf{arb}}(D, r)$ para todo digrafo D e todo vértice r de D.

Lema 5.5. *Seja D um digrafo, $r \in V$ um de seus vértices, e $\mathscr{S}$ a coleção dos $\bar{r}$-conjuntos de D. Suponha que $x \in P'_{\mathsf{arb}}(D)$ é tal que $x > 0$. Seja $\mathscr{F} := \{S \in \mathscr{S} \mid \widetilde{x}(\delta^- S) = 1\}$. Então, para cada $S, T \in \mathscr{F}$ com $S \cap T \neq \emptyset$ vale que:*

(i) $S \cup T, S \cap T \in \mathscr{F}$, e

(ii) $\mathbb{1}^A_{\delta^- S} + \mathbb{1}^A_{\delta^- T} = \mathbb{1}^A_{\delta^-(S \cup T)} + \mathbb{1}^A_{\delta^-(S \cap T)}$.

Prova. Sejam $S, T \in \mathscr{F}$ e suponha que $S \cap T \neq \emptyset$.

Para a prova de (i), observe que

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= \widetilde{x}(\delta^- S) + \widetilde{x}(\delta^- T) \\ &\geqslant \widetilde{x}(\delta^-(S \cup T)) + \widetilde{x}(\delta^-(S \cap T)) \\ &\geqslant 1 + 1, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue do Corolário 5.6; e, a segunda, de $S \cup T, S \cap T \in \mathscr{S}$. Portanto, vale a igualdade em todas as passagens. Isso implica que $\widetilde{x}(\delta^-(S \cup T)) = \widetilde{x}(\delta^-(S \cap T)) = 1$, donde $S \cup T, S \cap T \in \mathscr{F}$, provando (i).

Para a prova de (ii), suponha que $x > 0$. Observe que, pela parte (i),

$$\widetilde{x}(\delta^- S) + \widetilde{x}(\delta^- T) = \widetilde{x}(\delta^-(S \cup T)) + \widetilde{x}(\delta^-(S \cap T)),$$

o que combinado com $x > 0$ e com o Lema 5.5, permite concluir que

$$\mathbb{1}^A_{\delta^- S} + \mathbb{1}^A_{\delta^- T} = \mathbb{1}^A_{\delta^-(S \cup T)} + \mathbb{1}^A_{\delta^-(S \cap T)},$$

provando (ii). □

Lema 5.6. *Seja $D := (V, A)$ um digrafo e $r \in V$. Se $A \neq \emptyset$ e x é um ponto extremo de $P'_{\mathsf{arb}}(D)$, então existe $a \in A$ tal que $x(a) \in \{0, 1\}$.*

Prova. Para abreviar, seja $\mathbb{1} := \mathbb{1}^A$. Suponha que $A \neq \emptyset$ e que x é um ponto extremo de $P'_{\mathsf{arb}}(D)$. Admita, por um momento, que $0 < x(a) < 1$ para cada $a \in A$. Como $\widetilde{x}(\delta^- r) = 0$ e $x > 0$, temos que $\delta^- r = \emptyset$ e, assim, $\mathbb{1}_{\delta^- r} = 0$. Seja $\mathscr{F} := \{S \in \mathscr{S} \mid \widetilde{x}(\delta^- S) = 1\}$. Pelo Teorema 5.6, existem $|A|$ desigualdades linearmente independentes satisfeitas com igualdade por x cujas linhas têm índices no conjunto $\mathscr{F}$, pois $\mathbb{1}_{\delta^- r} = 0$. Segue daí que $\mathsf{rank}(\{\mathbb{1}_{\delta^- S} \mid S \in \mathscr{F}\}) = |A|$. A combinação dos Lemas 5.5 e 1.10 permite inferir que existe um subconjunto laminar $\mathscr{L}$ de $\mathscr{F}$ tal que $|\mathscr{L}| = |A|$ e $\{\mathbb{1}_{\delta^- L} \mid L \in \mathscr{L}\}$ é linearmente independente. Note que $d^-(s) \geqslant 2$ para cada $s \in V \setminus \{r\}$. De fato, suponha que $s \in V \setminus \{r\}$. Como $x \in P'_{\mathsf{arb}}(D)$, então $\widetilde{x}(\delta^-(s)) = 1$. Mas, $0 < x(a) < 1$ para cada $a \in \delta^-(s)$ e, portanto, $d^-(s) \geqslant 2$. Agora,

$$|\mathscr{L}| = |A| = \sum_{s \in V \setminus \{r\}} d^-(s) \geqslant 2|V \setminus \{r\}| = 2|V| - 2. \tag{5.17}$$

A independência linear de $\{\mathbb{1}^A_{\delta^- L} \mid L \in \mathscr{L}\}$ implica que $\emptyset \notin \mathscr{L}$. Como $\mathscr{L} \subseteq 2^{V \setminus \{r\}}$, temos, pela Proposição 1.2, que $|\mathscr{L}| \leqslant 2|V| - 3$, o que contraria (5.17). Essa contradição mostra que existe $a \in A$ tal que $x(a) \in \{0, 1\}$, como queríamos. □

Teorema 5.11. *Seja D um digrafo e $r \in V$ um de seus vértices. Se D possui uma r-arborescência, então para todo $c \in \mathbb{R}^A$ existe uma r-arborescência B de D tal que $\widetilde{c}(B) \geqslant c^\top x$ para cada $x \in P'_{\mathsf{arb}}(D)$.*

Prova. A prova é por indução em $|A|$. Seja D um digrafo e $r \in V$. Suponha que D possui uma r-arborescência. Se $A = \emptyset$, então tome $B := \emptyset$. Suponha que $A \neq \emptyset$. Seja x um ponto extremo de $P'_{\mathsf{arb}}(D)$ tal que $c^\top x = \max\{c^\top z \mid z \in P'_{\mathsf{arb}}(D)\}$. Pelo Lema 5.6, existe $a \in A$ tal que $x(a) \in \{0, 1\}$. Há assim dois casos a considerar:

Caso 1: $x(a) = 0$.

Considere o digrafo $D' := D - a$. É claro que $x_{-a} \in P'_{\mathsf{arb}}(D')$. Observe que D' possui uma r-arborescência.[34] Logo, por hipótese de indução, existe uma r-arborescência B' de D' tal que $\widetilde{c_{-a}}(B') \geqslant c_{-a}^\top z$ para cada $z \in P'_{\mathsf{arb}}(D')$. Logo, em particular, $\widetilde{c_{-a}}(B') \geqslant c_{-a}^\top x_{-a}$. Seja $B := B'$. É claro que B é uma r-arborescência de D. Agora, suponha que $z \in P_{\mathsf{arb}}(D)$. Então, $\widetilde{c}(B) = \widetilde{c_{-a}}(B') \geqslant c_{-a}^\top x_{-a} = c^\top x \geqslant c^\top z$.

Caso 2: $x(a) = 1$.

Seja $a \simeq uv$. Considere o digrafo $D' := D/\{u, v\}$, ou seja, D' é o digrafo obtido de D através da contração do conjunto de vértices $\{u, v\}$. Note que $\delta^- v = \{a\}$, pois $\widetilde{x}(\delta^- v) = 1$, $x(a) = 1$ e $x > 0$. Logo, $A' := A(D') = A \setminus \{a\}$.

[34] Ora, o subdigrafo $H := (V, \underline{x})$ de D possui uma r-arborescência. De fato, seja S um $\bar{r}$-conjunto de H. Por hipótese,

$$\sum_{e \in \delta^-_H(S)} x(e) = \widetilde{x}(\delta^- S) \geqslant 1$$

e, consequentemente, $\delta^-_H(S) \geqslant 1$. Pela Proposição 3.1, o digrafo H possui uma r-arborescência que, evidentemente, é uma r-arborescência de D'.

[35] Verifique!

[36] Na verdade, D' possui uma $[r]$-arborescência.

É claro que $x_{-a} \in P'_{\mathsf{arb}}(D')$.[35] Observe que, pela Proposição 4.10, D' possui uma r-arborescência.[36] Logo, por hipótese de indução, existe uma r-arborescência B' de D' tal que $\widetilde{c_{-a}}(B') \geqslant c_{-a}^{\top} z$ para cada $z \in P'_{\mathsf{arb}}(D')$. Logo, em particular, $\widetilde{c_{-a}}(B') \geqslant c_{-a}^{\top} x_{-a}$. Seja $B := B' \cup \{a\}$. É claro que B é uma r-arborescência de D uma vez que $\delta^{-} v = \{a\}$. Agora, suponha que $z \in P_{\mathsf{arb}}(D)$. Então, $\widetilde{c}(B) = \widetilde{c_{-a}}(B') + c(a) \geqslant c_{-a}^{\top} x_{-a} + c(a) = c^{\top} x \geqslant c^{\top} z$.

□

Teorema 5.12. *Para todo digrafo D e todo vértice r de D, vale que*

$$P_{\mathsf{arb}}(D, r) = P'_{\mathsf{arb}}(D, r).$$

Prova. Seja D um digrafo e $r \in V$ um de seus vértices. Se D não possui r-arborescência, então $P_{\mathsf{arb}}(D) = P'_{\mathsf{arb}}(D) = \emptyset$. Suponha que D possui uma r-arborescência. Não é difícil checar que $P_{\mathsf{arb}}(D) \subseteq P'_{\mathsf{arb}}(D)$. Suponha que $x \in \mathsf{ext}(P'_{\mathsf{arb}}(D))$. Pelo Teorema 5.6, existe $c \in \mathbb{R}^{A}$ tal que $c^{\top} x > c^{\top} z$ para cada $z \in P'_{\mathsf{arb}}(D) \setminus \{x\}$. Pelo Teorema 5.11, existe uma r-arborescência B de D tal que $\widetilde{c}(B) \geqslant c^{\top} z$ para cada $z \in P'_{\mathsf{arb}}(D)$. Em particular, $\widetilde{c}(B) \geqslant c^{\top} x$. Ora, o vetor $\mathbb{1}_{B}^{A}$ é tal que $\widetilde{c}(B) = c^{\top} \mathbb{1}_{B}^{A}$ e, ademais, $\mathbb{1}_{B}^{A} \in P'_{\mathsf{arb}}(D)$, donde, pelo Teorema 5.6, $c^{\top} \mathbb{1}_{B}^{A} = c^{\top} x$ e, portanto, $x = \mathbb{1}_{B}^{A}$. □

5.12 Exercícios

Exercício 5.1. Prove o Corolário 5.3.

Exercício 5.2. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{N} \mid |x| \leqslant 1\}$ não é um poliedro.

Exercício 5.3. Seja $Ax \leqslant b$ um sistema sobre $M \times N$. Mostre que se $\emptyset \neq P(A, b) \subseteq \mathbb{R}_{+}^{N}$, então $P(A, b)$ possui um ponto extremo.

Exercício 5.4. Seja G um grafo e considere o conjunto

$$\mathscr{M} := \{\mathbb{1}_{M}^{E} \mid M \text{ é emparelhamento de } G\}$$

Mostre que todo vetor em $\mathscr{M}$ é um ponto extremo de $P_{\mathsf{m}}(G)$.

Exercício 5.5. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^{N}$ um conjunto convexo e A uma matriz sobre $N \times N$. Suponha que A é inversível. Mostre que

(i) o conjunto $B := \{Ax \mid x \in C\}$ é convexo, e
(ii) para todo $z \in \mathbb{R}^{N}$, o vetor z é ponto extremo de C se, e só se, z é ponto extremo de B.

Exercício 5.6. Seja X um subconjunto finito de $\mathbb{R}^{N}$. Se $x_o \in \mathsf{conv}(X)$ não é ponto extremo de $\mathsf{conv}(X)$, então $x_o \in \mathsf{conv}(X \setminus \{x_o\})$.

6

Matróides

6.1 Sistemas de conjuntos independentes

Vamos começar por definir um conceito extremamente simples, o de sistema de conjuntos independentes. Um *sistema de conjuntos independentes* é um par $(S, \mathscr{I})$, em que S é um conjunto finito e $\mathscr{I} \subseteq 2^S$ é uma coleção (finita) de subconjuntos de S tal que

(6.1) (i) $\mathscr{I} \neq \emptyset$, e
(ii) se $I \subseteq J \in \mathscr{I}$, então $I \in \mathscr{I}$.

Um subconjunto T de S é chamado de um conjunto *independente* se $T \in \mathscr{I}$; do contrário, isto é, se $T \notin \mathscr{I}$, então T é chamado de um conjunto *dependente*. Um conjunto dependente minimal é chamado de *circuito*. Para cada $I \in \mathscr{I}$, seja

(6.2) $$N(I) := \{s \in S \setminus I \mid I \cup \{s\} \in \mathscr{I}\}.$$

Seja $T \subseteq S$ e

(6.3) $$\mathscr{I}_T := \{I \in \mathscr{I} \mid I \subseteq T\}.$$

Uma *base* de T é um elemento maximal de $\mathscr{I}_T$.[1] Uma *base* de M é um elemento maximal de $\mathscr{I}$. Assim, se $B \in \mathscr{I}$, então B é uma base de M se, e só se, $N(B) = \emptyset$. Note que todo subconjunto de S possui uma base.

Proposição 6.2. *Se $M := (S, \mathscr{I})$ é um sistema de conjuntos independentes, então todo subconjunto de S possui uma base.*

Prova. Seja $T \subseteq S$ e considere o conjunto $\mathscr{I}_T := \{I \in \mathscr{I} \mid I \subseteq T\}$. Note que, em virtude de (6.1)(i), temos que $\emptyset \in \mathscr{I}_T$. Logo, $\mathscr{I}_T$ é finito — pois $\mathscr{I}$ é finito — e não vazio. Assim, pela Proposição 6.1, $\mathscr{I}_T$ possui um elemento maximal e, portanto, T possui uma base. □

O próximo resultado é usado no decorrer deste texto de forma frequente, mas a justificativa de seu uso será normalmente omitida.

[1] Seja X um conjunto e $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Dizemos que $M \in \mathscr{C}$ é *maximal* em $\mathscr{C}$ se para cada $N \in \mathscr{C}$, se $M \subseteq N$, então $M = N$.

Proposição 6.1. *Seja U um conjunto. Se $\mathscr{C}$ é um subconjunto finito e não vazio de 2^U, então $\mathscr{C}$ possui um elemento maximal.*

Prova. A prova é por indução em $|\mathscr{C}|$. Seja $\mathscr{C}$ um subconjunto finito e não vazio de 2^U. O resultado é óbvio se $|\mathscr{C}| = 1$. Suponha que $|\mathscr{C}| \geq 2$ e seja $C \in \mathscr{C}$. Por hipótese de indução, $\mathscr{C}' := \mathscr{C} \setminus \{C\}$ possui um elemento maximal M. Temos os seguintes casos:

Caso 1: $C \not\subseteq M$ e $M \not\subseteq C$.

Seja $N \in \mathscr{C}$ e suponha que $M \subseteq N$. Nesse caso, $N \neq C$, donde $N \in \mathscr{C}'$. Como M é maximal em $\mathscr{C}'$ e $M \subseteq N \in \mathscr{C}'$, temos que $M = N$. Logo, M é maximal em $\mathscr{C}$.

Caso 2: $C \subset M$.

Seja $N \in \mathscr{C}$ e suponha que $M \subseteq N$. Nesse caso, $C \subset N$, donde $N \in \mathscr{C}'$. De forma similar ao caso anterior, temos que M é maximal em $\mathscr{C}$.

Caso 3: $M \subset C$.

Vamos mostrar que C é maximal em $\mathscr{C}$. Seja $N \in \mathscr{C}$ e suponha que $C \subseteq N$. Assim, $M \subset N$ o que, combinado com M é maximal em $\mathscr{C}'$, implica que $N \notin \mathscr{C}'$ e, portanto, $C = N$. Isso prova que C é maximal em $\mathscr{C}$.

□

Proposição 6.3. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um sistema de conjuntos independentes, T uma parte de S. Para cada $I \in \mathscr{I}_T$ existe uma base B de T tal que $I \subseteq B$.*

Prova. Seja I um conjunto em $\mathscr{I}_T$. Conidere a coleção $\mathscr{J} := \{J \in \mathscr{I}_T \mid I \subseteq J\}$. É claro que $\mathscr{J}$ é não vazio — $I \in \mathscr{J}$ — e finito. Logo, pela Proposição 6.2, $\mathscr{J}$ possui um elemento maximal, digamos B. Agota, se $C \in \mathscr{I}_T$ é tal que $B \subseteq C$, então $C \in \mathscr{J}$. A maximalidade de B implica que $B = C$. Portanto, B é uma base de T. □

Restrição. Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um sistema de conjuntos independentes e $T \subseteq S$. A *restrição* de M a T, denotada $M_{\upharpoonright T}$, é o par $(T, \mathscr{I}_T)$. É simples checar que $(T, \mathscr{I}_T)$ é um sistema de independência. Seja $R \subseteq S$. Escrevemos $M - R$ para denotar $M_{\upharpoonright S \setminus R}$. Finalmente, para cada $s \in S$, escrevemos $M - s$ em vez do mais longo $M - \{s\}$.

6.2 Matróides

Um *matróide* é um sistema de conjuntos independentes $M := (S, \mathscr{I})$ tal que

(6.4) se $I, J \in \mathscr{I}$ e $|I| < |J|$, então existe $x \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{x\} \in \mathscr{I}$.

Teorema 6.1. *Seja S um conjunto finito e $\mathscr{I} \subseteq 2^S$. Então, $(S, \mathscr{I})$ é um matróide se, e só se, satisfaz* (6.4)*(i) e (ii) e, além disso,*

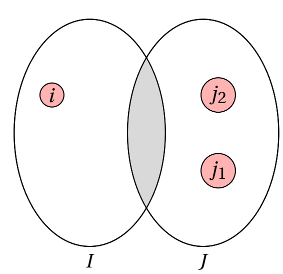
(6.5) *para cada $I, J \in \mathscr{I}$, se $|I \setminus J| = 1$ e $|J \setminus I| = 2$, então existe $x \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{z\} \in \mathscr{I}$.*

Prova. Seja $M := (S, \mathscr{I})$. Suponha que M satisfaz (6.4)(i), (ii) e (6.5). Vamos mostrar que M é um matróide. Para isso, é suficiente mostrar que vale (6.4)(iii):

para cada $I, J \in \mathscr{I}$, se $|I| < |J|$, então existe $x \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{x\} \in \mathscr{I}$.

A prova é por indução em $|I \setminus J|$. Sejam I e J em $\mathscr{I}$ e suponha que $|I| < |J|$. Suponha primeiro que $|I \setminus J| = 0$. Como $J \setminus I \neq \emptyset$, então podemos selecionar um elemento $x \in J \setminus I$. Ora, $I \cup \{x\} \subseteq J$ e, consequentemente, em virtude de (6.4)(ii), $I \cup \{x\} \in \mathscr{I}$.

Suponha agora que $|I \setminus J| \geqslant 1$. Seja $i \in I \setminus J$ e considere o conjunto $I \setminus \{i\}$. Note que $|(I \setminus \{i\}) \setminus J| < |I \setminus J|$ e $|I \setminus \{i\}| < |J|$, donde, por hipótese de indução, existe $j_1 \in J \setminus (I \setminus \{i\})$ tal que $(I \setminus \{i\}) \cup \{j_1\} \in \mathscr{I}$. Observe que $j_1 \in J \setminus I$. Agora, $|(I \setminus \{i\}) \cup \{j_1\}| < |I \setminus J|$ e $|J| > |I| = |(I \setminus \{i\}) \cup \{j_1\}|$. Logo, por hipótese de indução, existe $j_2 \in J \setminus ((I \setminus \{i\}) \cup \{j_1\})$ tal que $(I \setminus \{i\}) \cup \{j_1, j_2\} \in \mathscr{I}$. Note que $j_2 \neq j_1$ e $j_2 \in J \setminus I$. Considere agora o conjunto $J' := (I \setminus \{i\}) \cup \{j_1, j_2\}$. Então, $|I \setminus J'| = 1$ e $|J' \setminus I| = 2$. Assim, de acordo com (6.5), $I \cup \{j_1\} \in \mathscr{I}$ ou $I \cup \{j_2\} \in \mathscr{I}$ e, portanto, existe $x \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{x\} \in \mathscr{I}$. Isso completa a prova. □



Exemplo 6.1. Seja A uma matriz sobre $M \times N$. Considere o par $(N, \mathscr{J})$, onde $J \in \mathscr{J}$ se, e só se, as colunas de A^J são linearmente independentes. As propriedades (i) e (ii) de um matróide são evidentes. Para a prova de (iii), suponha que $J_1, J_2 \in \mathscr{J}$ e que $|J_1| < |J_2|$. Admita por um momento que $J_1 \cup \{j\}$ é linearmente dependente para cada $j \in J_2 \setminus J_1$. Pelo Lema 1.5, $A^j \in \mathrm{cs}(A^{J_1})$ para cada $j \in J_2 \setminus J_1$. Segue daí[2] que $\mathrm{cs}(A^{J_2}) \subseteq \mathrm{cs}(A^{J_1})$, donde[3] $|J_2| \leqslant |J_1|$, o que é uma contradição.

[2] Verifique!

[3] Por que?

Proposição 6.4. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $T \subseteq S$. Então,*

(i) T possui uma base,

(ii) se B_1 e B_2 são bases de T, então $|B_1| = |B_2|$, e

(iii) se B_1 é base de T e $B_2 \in \mathscr{I}_T$ satisfaz $|B_2| = |B_1|$, então B_2 é base de T.

Prova. Pela Proposição 6.2, T possui uma base. Logo, vale (i).

Para a prova de (ii), suponha que B_1 e B_2 são bases de T, mas que $|B_1| \neq |B_2|$. Sem perda de generalidade, admita que $|B_1| < |B_2|$. Como $B_1, B_2 \in \mathscr{I}$, temos, em virtude de (6.4), que existe $x \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{x\} \in \mathscr{I}$. Ora, $x \in B_2$ implica que $x \in T$, donde $B_1 \cup \{x\} \subseteq T$, o que contraria a maximalidade de B_1 em T. Portanto, $|B_1| = |B_2|$. □

Teorema 6.2. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $\mathscr{B}$ a coleção das bases de M. Então,*

(i) $\mathscr{B} \neq \emptyset$,

(ii) se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, então $|B_1| = |B_2|$, e

(iii) para cada $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e para cada $x \in B_1$ existe $y \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}$.

Prova. Para a prova de (iii), suponha que $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e $x \in B_1$. Em virtude de (ii), temos que $|B_1| = |B_2|$. Como $B_1 \setminus \{x\} \in \mathscr{I}$ e $|B_1 \setminus \{x\}| < |B_2|$, então, de acordo com (6.4)(iii), existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{I}$. Note que $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$, donde $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}$. □

6.3 Algoritmo guloso

Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w : S \to \mathbb{R}$ uma função peso. O problema considerado nesta seção consiste em determinar uma base B, chamada de *w-ótima*, de M tal que

$$\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}(J)$$

para cada base J de M.

O propósito desta seção é demonstrar que o algoritmo guloso, descrito a seguir, ao receber um sistema de conjuntos independentes, devolve uma solução ótima para toda função peso se, e só se, o sistema de conjuntos independentes é um matróide.[4]

[4] Se preferir, eis uma versão num estilo pseudo-código:

Recebe: Um sistema de conjuntos independentes $M = (E, \mathscr{I})$ e uma função de peso $w : E \to \mathbb{R}^+$

Devolve: Uma base de M

GreedyMatroid($S, \mathscr{I}$):
  $B := \emptyset$
  while $N(B) \neq \emptyset$ **do**
    seja $s \in \arg\max\{w(u) \mid u \in S\}$
    $B := B \cup \{s\}$
  return B

Algoritmo 6.1. O algoritmo recebe um sistema de conjuntos independentes $M := (S, \mathscr{I})$ e uma função $w : S \to \mathbb{R}$ que a cada elemento s de S associa um *peso* $w(s)$ e devolve uma base de M. Cada iteração do algoritmo guloso começa com um conjunto independente B. A primeira iteração começa com $B = \emptyset$. Cada iteração consiste no seguinte:

Caso 1: $N(B) = \emptyset$.

Devolva B e pare

Caso 2: $N(B) \neq \emptyset$.

Seja $s \in \operatorname{argmax}\{w(t) \mid t \in N(B)\}$. Comece nova iteração com $B \cup \{s\}$ no lugar de B.

Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um sistema de conjuntos independentes e $w : S \to \mathbb{R}$. Um conjunto independente $B \in \mathscr{I}$ é dito *w-ótimo restrito* se

$$\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}(I)$$

para cada $I \in \mathscr{I}$ tal que $|I| = |B|$. Note que se M é um matróide e B é uma base de M que é w-ótima restrita, então B é w-ótima.

O próximo teorema é central para demonstrar que se o sistema independente é um matróide, então a base produzida é ótima.

Teorema 6.3. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w : S \to \mathbb{R}$. Se B é w-ótimo restrito e $N(B) \neq \emptyset$, então $B \cup \{s\}$ também é w-ótimo restrito, onde $s \in \operatorname{argmax}\{w(e) \mid e \in N(B)\}$.*

Prova. Suponha que B é w-ótimo restrito e que $N(B) \neq \emptyset$. Além disso, seja $s \in \operatorname{argmax}\{w(e) \mid e \in N(B)\}$. Por construção, $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$. Seja $T \in \mathscr{I}$ tal que $|T| = |B| + 1$. Como M é um matróide e $|T| > |B|$, temos, em virtude de (6.4), que existe $t \in T \setminus B$ tal que $B \cup \{t\} \in \mathscr{I}$, donde $t \in N(B)$. A escolha de s implica que $w(s) \geqslant w(t)$. Por hipótese, $\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}(T \setminus \{t\})$, pois $T \setminus \{t\} \in \mathscr{I}$ e $|T \setminus \{t\}| = |B|$. Assim,

$$\widetilde{w}(B \cup \{s\}) = \widetilde{w}(B) + w(s) \geqslant \widetilde{w}(T \setminus \{t\}) + w(s) \geqslant \widetilde{w}(T \setminus \{t\}) + w(t) = \widetilde{w}(T).$$

Portanto, $B \cup \{s\}$ também é w-ótimo restrito. □

Teorema 6.4. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um sistema de conjuntos independentes. Então, M é um matróide se, e só se, para todo $w : S \to \mathbb{R}$ o Algoritmo 6.1 devolve uma base B de M que é w-ótima.*

Prova. Suponha primeiro que M é um matróide. Seja $w : S \to \mathbb{R}$ uma função peso. Afirmamos que

$$B \text{ é } w\text{-ótimo restrito}$$

é uma propriedade invariante do Algoritmo 6.1. De fato, na primeira iteração $B = \emptyset$, donde B é w-ótimo restrito. Suponha que B é w-ótimo restrito no início de uma iteração arbitrária e que $N(B) \neq \emptyset$. Pelo Teorema 6.3, $B \cup \{s\}$ também é w-ótimo restrito. É claro que o Algoritmo 6.1 para uma vez que $|S \setminus B|$ diminui a cada iteração. Concluímos assim que o algoritmo devolve um conjunto independente B que é w-ótimo restrito. Como $N(B) = \emptyset$, então B é uma base de M. Portanto, B é uma base w-ótima de M.

Suponha agora que para cada função peso $w : S \to \mathbb{R}$ o algoritmo guloso devolve uma base w-ótima de M. Vamos mostrar que M é um matróide. Suponha, por um momento, que existem I e J em $\mathscr{I}$ tais que $|I| < |J|$ e $I \cup \{x\} \notin \mathscr{I}$ para cada $x \in J \setminus I$. Seja $n := |I|$. Considere a função peso $w : S \to \mathbb{R}$ tal que $w := (n+2)\mathbb{1}_I^S + (n+1)\mathbb{1}_{J \setminus I}^S$.

É fácil ver que o algoritmo guloso devolve uma base B_1 de M tal que $I \subseteq B_1$ e $B \setminus I \subseteq S \setminus (I \cup J)$ — pois os elementos de maior peso, $n+2$, estão em I e não há nenhum conjunto independente que inclua I e algum elemento de $J \setminus I$ —, donde $\widetilde{w}(B_1) = (n+2)n$. Como J é independente, então existe uma base B_2 de M tal que $J \subseteq B_2$ e, consequentemente, $\widetilde{w}(B_2) \geqslant (n+1)(n+1)$. Finalmente,

$$\widetilde{w}(B_1) = (n+2)n < (n+1)^2 \leqslant \widetilde{w}(B_2),$$

o que é uma contradição. □

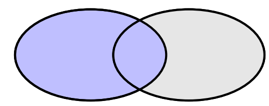


Figura 6.1: Os elementos de I têm peso $n+2$ enquanto que os elementos de $J \setminus I$ têm peso $n+1$ e o os demais elementos têm peso 0.

É um bom exercício escrever e provar a correção de uma versão recursiva do algoritmo guloso, veja `GreedyRec`.

```
Recebe: Um matróide M = (S, 𝒥) e
        uma função de peso
        w : S → ℝ
Devolve: Uma base w-ótima

GreedyRec(M, w):
    if S = ∅ then
        return ∅
    seja s ∈ argmin{w(u) | u ∈ S}
    B := GreedyRec(M − s, w_{−s})
    return B ∪ {s} ∈ 𝒥 ? B ∪ {s} : B
```

Figura 6.2: Versão recursiva do algoritmo guloso. Uma expressão da forma "$b?e_1 : e_2$" produz e_1 se b é verdadeiro e e_2 se b é falso.

Lema 6.1. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide. Para cada $s \in S$, se B é uma base de $M - s$, então*

(i) $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$ implica que $B \cup \{s\}$ é uma base de M, e

(ii) $B \cup \{s\} \notin \mathscr{I}$ implica que B é uma base de M.

Prova. Suponha que $s \in S$ e admita que B é uma base de $M - s$.

Para a prova de (i), suponha que $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$. Vamos mostrar que $B \cup \{s\}$ é uma base de M. Suponha que $J \in \mathscr{I}$ é tal que $B \cup \{s\} \subseteq J$. Como $s \in J$ e $s \notin B$, então $B \subseteq J \setminus \{s\}$. É claro que $J \setminus \{s\} \in \mathscr{I}(M - s)$. No entanto, B é base de $M - s$, donde $B = J \setminus \{s\}$ e, por conseguinte, $B \cup \{s\} = J$. Logo, $B \cup \{s\}$ é base de M.

Para a prova de (ii), suponha que $B \cup \{s\} \notin \mathscr{I}$. Vamos mostrar que B é base de M. Suponha que não. Como $B \in \mathscr{I}$, então existe uma base J de M tal que $B \subset J$. Agora, se $s \notin J$, então $J \in \mathscr{I}(M - s)$ o que contradiz B ser uma base de $M - s$, pois $|J| > |B|$. Assim, $s \in J$ e, nesse caso, $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$ o que é uma contradição. Podemos então concluir que B é base de M. Isso completa a prova do lema. □

Teorema 6.5. *Se $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide, e $w \in S \to \mathbb{R}$, então a chamada `GreedyRec`(M, w) devolve uma base w-ótima de M.*

Prova. A prova é por indução em $|S|$. Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in S \to \mathbb{R}$. Se $|S| = 0$, então $S = \emptyset$ e $\emptyset$ é uma base w-ótima. Suponha que $|S| > 0$ ou, equivalentemente, $S \neq \emptyset$. Por hipótese de indução, B, o resultado da chamada $\texttt{GreedyRec}(M-s, w_{-s})$, é uma base w_{-s}-ótima de $M-s$. Temos que lidar com dois casos:

Caso 1: $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$.

Pelo Lema 6.1, temos que $B \cup \{s\}$ é uma base de M. Resta assim mostrar que $B \cup \{s\}$ é w-ótima. Seja J uma base de M. Como $B \cup \{s\}$ é base de M, temos que $|J| = |B| + 1$. Afirmamos que $s \in J$. De fato, se $s \notin J$, então $J \subseteq S \setminus \{s\}$. Como $J \in \mathscr{I}(M)$, temos que $J \in \mathscr{I}(M-s)$, o que contraria o fato de que B é uma base de $M-s$. Logo, $s \in J$. A base B de $M-s$ é w-ótima e $J \setminus \{s\}$ é também uma base de $M-s$, donde $\widetilde{w}(B) = \widetilde{w_{-s}}(B) \geqslant \widetilde{w_{-s}}(J \setminus \{s\}) = \widetilde{w}(J \setminus \{s\})$. Segue daí que

$$\widetilde{w}(B \cup \{s\}) = \widetilde{w}(B) + w(s) \geqslant \widetilde{w}(J \setminus \{s\}) + w(s) = \widetilde{w}(J).$$

Portanto, B é uma base w-ótima de M, o que completa a prova neste caso.

Caso 2: $B \cup \{s\} \notin \mathscr{I}$.

Pelo Lema 6.1, temos que B é uma base de M. Resta assim mostrar que B é w-ótima. Considere uma base J de M. Há dois casos a considerar. Suponha primeiro que $s \notin J$. Então, $J \in \mathscr{I}(M-s)$. Como B é uma base w_{-s}-ótima de $M-s$, temos que $\widetilde{w}(B) = \widetilde{w_{-s}}(B) \geqslant \widetilde{w_{-s}}(J) = \widetilde{w}(J)$ e, assim, não há mais nada a provar. Suponha agora que $s \in J$ e seja $J' := J \setminus \{s\}$. Como $|B| > |J'|$, então existe $t \in B \setminus J'$ tal que $J' \cup \{t\} \in \mathscr{I}(M)$. A escolha de s implica que $w(t) \geqslant w(s)$. Ademais, $J' \cup \{t\} \in \mathscr{I}(M-s)$, donde $J' \cup \{t\}$ é uma base de $M-s$. Por conseguinte,

$$\widetilde{w}(B) = \widetilde{w_{-s}}(B) \geqslant \widetilde{w_{-s}}(J' \cup \{t\}) = \widetilde{w}(J) - w(s) + w(t) \geqslant \widetilde{w}(J).$$

Isso prova que b é w-ótima.

□

Teorema 6.6. *Se $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide, e $w \in S \to \mathbb{R}$, então a chamada $\texttt{RevGreedy}(M, w)$ devolve uma base w-ótima de M.*

Recebe: Um matróide $M = (S, \mathscr{I})$ e uma função de peso $w : S \to \mathbb{R}$
Devolve: Uma base w-ótima

```
RevGreedy(M, w):
    if S ∈ 𝒥 then
        return S
    seja C um circuito de S
    seja s ∈ argmin{w(u) | u ∈ S}
    return RevGreedy(M − s, w_{−s})
```

Prova. A prova é por indução em $|S|$. Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}^S$. Se $S \in \mathscr{I}$, então S é a única base de M e, portanto, S é w-ótima. Suponha que $S \notin \mathscr{I}$. Então S é um conjunto dependente. Seja C um circuito de M e $s \in \operatorname{argmin}\{w(u) \mid u \in C\}$. Seja $B := \texttt{RevGreedy}(M-s, w_{-s})$. Por hipótese de indução, B é uma base w-ótima de $M-s$. Vamos primeiro mostrar que

$$B \text{ é uma base de } M. \tag{6.6}$$

Como C é um circuito de M, temos que $C \setminus \{s\} \in \mathscr{I}$. Note que, como $C \setminus \{s\} \in \mathscr{I}(M-s)$, então $|B| \geqslant |C \setminus \{s\}|$. Suponha por um momento que $B \cup \{s\} \in \mathscr{I}$. Ora, $|B \cup \{s\}| > |C \setminus \{s\}|$, donde existe $T \subseteq (B \cup \{s\}) \setminus (C \setminus \{s\})$ tal que[5]

[5] Justifique!

$$(C \setminus \{s\}) \cup T \in \mathscr{I} \quad \text{e} \quad |(C \setminus \{s\}) \cup T| = |B \cup \{s\}|.$$

É claro que $s \neq t$. Assim, $(C \setminus \{s\}) \cup T \in \mathscr{I}(M - s)$. Mas, $|(C \setminus \{s\}) \cup T| > |B|$, o que é uma contradição, uma vez que B é uma base de $M - s$. Isso prova que B é uma base de M e estabelece (6.6).

Vamos agora mostrar que B é w-ótima. Por hipótese de indução, $\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}(K)$ para toda base K de $M - s$. Seja J uma base de M. Se $s \notin J$, então J é uma base de $M - s$, donde $\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}(J)$. Suponha então que $s \in J$. Como $|B| > |J \setminus \{s\}|$, temos que existe $t \in B \setminus (J \setminus \{s\})$ tal que $(J \setminus \{s\}) \cup \{t\} \in \mathscr{I}$. É claro que $t \neq s$, pois $s \notin B$. Ademais, $(J \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ é uma base de $M - s$. Assim,

$$\widetilde{w}(B) \geqslant \widetilde{w}((J \setminus \{s\}) \cup \{t\}) \geqslant \widetilde{w}(J) - w(s) + w(t) \geqslant \widetilde{w}(J).$$

Logo, B é uma base w-ótima de M, como queríamos. □

6.4 *Função posto*

Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide. Vimos que, se $X \subseteq S$ e B_1 e B_2 são bases de X em M, então $|B_1| = |B_2|$. Com isso, definimos $r : 2^S \to \mathbb{N}$ pondo-se[6]

$$r(X) := \max\{|I| \mid I \in \mathscr{I}_X\}$$

para cada $X \subseteq S$. A função r é chamada de função *posto* de M e, quando houver possibilidade de confusão, é denotada por r_M.

[6] $r(X)$ é o tamanho de uma base de X.

Proposição 6.5. *Se $M := (S, \mathscr{I})$ é um matróide, então a função posto r de M satisfaz:*

(i) se $X \subseteq S$, então $rX \leqslant |X|$,

(ii) se $X \subseteq Y \subseteq S$, então $rX \leqslant rY$, e

(iii) se $X, Y \subseteq S$, então

$$rX + rY \geqslant r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

Prova. Para a prova de (i), seja $X \subseteq S$ e B uma base de X em M. Por definição, $B \subseteq X$. Logo, $rX = |B| \leqslant |X|$.

Para a prova de (ii), suponha que $X \subseteq Y \subseteq S$. Seja B uma base de X. Então existe uma base B' de Y tal que $B \subseteq B'$. Por definição, $rX = |B|$ e $|B'| = rY$. Assim, $rX \leqslant rY$.

Para a prova de (iii), seja $X, Y \subseteq S$. Seja $B_{X \cap Y}$ uma base de $X \cap Y$ em M. Então existe uma base $B_{X \cup Y}$ de $X \cup Y$ tal que $B_{X \cap Y} \subseteq B_{X \cup Y}$. Note que $rX \geqslant |X \cap B_{X \cup Y}|$, uma vez que $X \cap B_{X \cup Y}$ é independente em M. De forma similar, $rY \geqslant |Y \cap B_{X \cup Y}|$. Com isso,

$$\begin{aligned}
rX + rY &\geqslant |X \cap B_{X \cup Y}| + |Y \cap B_{X \cup Y}| \\
&= |(X \cap B_{X \cup Y}) \cup (Y \cap B_{X \cup Y})| + |(X \cap B_{X \cup Y}) \cap (Y \cap B_{X \cup Y})| \\
&= |(X \cup Y) \cap B_{X \cup Y}| + |(X \cap Y) \cap B_{X \cup Y}| \\
&\geqslant |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| \\
&= r(X \cup Y) + r(X \cap Y)
\end{aligned}$$

□

Seja S um conjunto finito e $r : 2^S \mapsto \mathbb{N}$ uma função que leva um subconjunto $X \subseteq S$ em um número natural $r(X) \in \mathbb{N}$. Dizemos que o par (S, r) é uma *estrutura posto* se

(6.7) (i) se $X \subseteq S$, então $rX \leqslant |X|$,
(ii) se $X \subseteq Y \subseteq S$, então $r(X) \leqslant r(Y)$, e
(iii) se $X, Y \subseteq S$, então $rX + rY \geqslant r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$.

Lema 6.2. *Seja (S, r) uma estrutura posto e $X, Y \subseteq S$. Se $r(X \cup \{y\}) = rX$ para cada $y \in Y \setminus X$, então $r(X \cup Y) = rX$.*

Prova. Vamos mostrar que, para cada $X, Y \subseteq S$

$$\forall y \in Y \setminus X : r(X \cup \{y\}) = r(X) \implies r(X \cup Y) = rX.$$

A prova é por indução em $|Y \setminus X|$. Seja X e Y subconjuntos de S. Se $|Y \setminus X| \leqslant 1$, então o resultado é evidente. Suponha então que $|Y \setminus X| \geqslant 2$ e seja $y \in Y \setminus X$. É evidente que $r(X \cup \{z\}) = rX$ para cada $z \in (Y \setminus \{y\}) \setminus X$. Logo, por hipótese de indução,

$$r(X \cup (Y \setminus \{y\})) = r(X). \tag{6.8}$$

Ademais, por hipótese,

$$r(X \cup \{y\}) = rX. \tag{6.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned} rX + rX &= r(X \cup (Y \setminus \{y\})) + r(X \cup \{y\}) && \text{por (6.8) e (6.9)} \\ &\geqslant r(X \cup Y) + r(X) && \text{por (6.7)(iii)} \\ &\geqslant rX + rX && \text{por (6.7)(ii),} \end{aligned}$$

donde vale a igualdade em todas as passagens e, portanto, $r(X \cup Y) = rX$, como queríamos. □

Teorema 6.7. *Seja (S, r) uma estrutura posto e $\mathscr{I} := \{I \subseteq S \mid rI = |I|\}$. Então*

(i) $M := (S, \mathscr{I})$ é um matróide, e
(ii) a função r coincide com a função posto, r_M, de M, isto é,

$$r = r_M.$$

Prova. Vamos primeiro provar (i), isto é, que $M := (S, \mathscr{I})$ é um matróide.

Para a prova de (6.1)(i), note que $r\emptyset \leqslant |\emptyset| = 0$ e, assim, $r\emptyset = 0$. Logo, $\emptyset \in \mathscr{I}$, donde vale (6.1)(i).

Para a prova de (6.1)(ii), suponha que $I \subseteq J \in \mathscr{I}$. Como $J \in \mathscr{I}$, temos que $rJ = |J|$. Ademais, em virtude de (6.7)(i), vale que $rI \leqslant |I|$ e $r(J \setminus I) \leqslant |J \setminus I|$. Assim,

$$\begin{aligned} |J| &= |I| + |J \setminus I| && \text{pois } I \subseteq J \\ &\geqslant rI + r(J \setminus I) && \text{pois } rI \leqslant |I| \text{ e } r(J \setminus I) \leqslant |J \setminus I| \\ &\geqslant rJ && \text{por (6.7)(iii)} \\ &= |J| && \text{pois } J \in \mathscr{I}. \end{aligned}$$

Todas as desigualdades acima são, portanto, igualdades. Em particular, $r(I) = |I|$, o que mostra que $I \in \mathscr{I}$.

Para a prova de (6.4), suponha por um momento que existem I e J em $\mathscr{I}$ tais que $|I| < |J|$ e, ademais, que $I \cup \{j\} \notin \mathscr{I}$ para cada $j \in J \setminus I$. Seja j um elemento em $J \setminus I$. Como $I \cup \{j\} \notin \mathscr{I}$, então $r(I \cup \{j\}) \neq |I \cup \{j\}| = |I| + 1$ o que, combinado com (6.7)(i), permite concluir que $r(I \cup \{j\}) \leqslant |I|$. Agora, $I \in \mathscr{I}$ implica que $rI = |I|$. Pela condição (6.7)(ii), $r(I \cup \{j\}) \geqslant rI = |I|$, donde $r(I \cup \{j\}) = r(I)$. Portanto, $r(I \cup \{j\}) = r(I)$ para cada $j \in J \setminus I$. De acordo com o Lema 6.2, $r(I \cup J) = r(I)$. Segue daí que

$$|J| = rJ \leqslant r(I \cup J) = rI = |I|,$$

o que contradiz a suposição $|I| < |J|$. Isso estabelece que existe $j \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{j\} \in \mathscr{I}$ e, por conseguinte, a validade de (6.4).

Vamos agora provar (ii), ou seja, vamos estabelecer que $r = r_M$. Seja $X \subseteq S$. Suponha primeiro que $X \in \mathscr{I}$, ou seja, $rX = |X|$. No entanto, por definição, $r_M(X) = |X|$. Logo, $rX = r_M(X)$. Suponha agora que $X \notin \mathscr{I}$. Seja B uma base de X no matróide M. Por definição, $rB = |B|$. Além disso, como B é base de X em M, então $B \cup \{x\} \notin \mathscr{I}$ para cada $x \in X \setminus B$. Ora, $|B| = rB \leqslant r(B \cup \{x\}) \leqslant |B|$, donde $r(B \cup \{x\}) = r(B)$. Pelo Lema 6.2, temos que $|B| = rB = r(B \cup (X \setminus B)) = rX$ e, por definição, temos que $r_M(X) = |B|$. Portanto, $r_M(X) = r(X)$. Concluímos assim que $r = r_M$. □

6.5 *Contração de um matróide*

Considere um matróide $M := (S, \mathscr{I})$ e seja $X \subseteq S$. Seja $\varrho : 2^{S \setminus X} \to \mathbb{N}$ tal que $\varrho(Y) := r_M(X \cup Y) - r_M(X)$. Vamos mostrar que $(S \setminus X, \varrho)$ é uma estrutura posto.

Seja Y uma parte de $S \setminus X$. Seja B uma base de X e $Y' \subseteq S \setminus B$ tal que $Y' \cup B$ é uma base de $Y \cup X$. É claro que $Y' \subseteq Y$. Assim, $\varrho Y = r_M(X \cup Y) - r_M(X) = |Y' \cup B| - |B| = |Y'| \leqslant |Y|$. Logo, vale (6.7)(i).

Seja $Y_1, Y_2 \in S \setminus X$ e suponha que $Y_1 \subseteq Y_2$. Então

$$\varrho(Y_2) = r_M(X \cup Y_2) - r_M(X) \geqslant r_M(X \cup Y_1) - r_M(X) = \rho(Y_1).$$

Assim, vale (6.7)(ii).

Finalmente, se Y_1 e Y_2 são subconjunto de $S \setminus X$, então

$$\begin{aligned}
\varrho(Y_1) + \varrho(Y_2) &= r_M(X \cup Y_1) - r_M(X) + r_M(X \cup Y_2) - r_M(X) \\
&\geqslant r_M(X \cup (Y_1 \cup Y_2)) + r_M((X \cup Y_1) \cap (X \cup Y_2)) - r_M(X) - r_M(X) \\
&= r_M(X \cup (Y_1 \cup Y_2)) - r_M(X) + r_M(X \cup (Y_1 \cap Y_2)) - r_M(X) \\
&= \varrho(Y_1 \cup Y_2) + \varrho(Y_1 \cap Y_2),
\end{aligned}$$

o que prova (6.7)(iii).

Com isso, em virtude do Teorema 6.7, o par

$$(S \setminus X, \{Y \subseteq S \setminus X \mid \varrho Y = |Y|\})$$

é um matróide cuja função posto é ϱ, dito o matróide obtido de M pela *contração* de X, e denotado por M/X.[7]

[7] Como de costume, para cada $s \in S$ vamos escrever

$$M/s$$

em vez do mais longo $M/\{s\}$.

Proposição 6.6. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide, $X \subseteq S$ e $I \subseteq S \setminus X$. São equivalentes*

(i) $I \in \mathscr{I}(M/X)$,

(ii) $I \cup B \in \mathscr{I}(M)$ para toda base B de X em M, e

(iii) $I \cup B \in \mathscr{I}(M)$ para alguma base B de X em M.

Prova. Vamos primeiro provar que (i) implica (ii). Suponha que $I \in \mathscr{I}(M/X)$. Suponha também que B é uma base de X em M. Existe $I' \subseteq S \setminus B$ tal que $I' \cup B$ é uma base de $I \cup X$ em M. Note que como B é base de X, então I' não pode conter elementos de $X \setminus B$ (do contrário, I' não é independente em M). Logo, $I' \subseteq I$. Ademais, $I \in \mathscr{I}(M/X)$ implica que $|I| = r_{M/X}(I) = r_M(I \cup X) - r_M(X)$. Agora,

$$|I| + |B| = |I \cup B| \geqslant |I' \cup B| = |I'| + |B| = r_M(I \cup X) = |I| + r_M(X) = |I| + |B|.$$

Segue daí que todas as desigualdades valem com igualdade e, em particular, $|I'| = |I|$. Isso, junto com $I' \subseteq I$, garante que $I = I'$ e, portanto, $I \cup B \in \mathscr{I}(M)$.

A prova de que (ii) implica (iii) é imediata uma vez que todo $X \subseteq S$ possui uma base.

Vamos finalmente provar que (iii) implica (i). Suponha que B é uma base de X em M tal que $I \cup B \in \mathscr{I}(M)$. Então $r_M(I \cup B) = |I \cup B|$. Além disso, B é base de X em M, donde $r_M(X) = |B|$. Agora,

$$\begin{aligned}
r_{M/X}(I) &= r_M(I \cup X) - r_M(X) \\
&\geqslant r_M(I \cup B) - r_M(X) \\
&= |I \cup B| - |B| \\
&= |I| + |B| - |B| \\
&= |I|.
\end{aligned}$$

Como $r_{M/X}(I) \leqslant |I|$, temos que $r_{M/X}(I) = |I|$. Portanto, $I \in \mathscr{I}(M/X)$, como queríamos. □

6.6 O politopo das bases de um matróide

Seja $M := (S, \mathcal{I})$ um matróide e

$$P_b(M) := \operatorname{conv}\{1_B^S \mid B \text{ é uma base de } M\}.$$

Seja também $P_b'(M)$ o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}_+^S$ tais que

(i) $\tilde{x}S = rS$, e

(ii) $\tilde{x}T \leqslant rT$ para cada $T \subseteq S$.

O propósito desta seção é demonstrar que $P_b(M) = P_b'(M)$. É fácil checar que $P_b(M) \subseteq P_b'(M)$. Como de costume, o trabalho reside na demonstração de que $P_b'(M) \subseteq P_b(M)$.

Lema 6.3. *Seja $M := (S, \mathcal{I})$ um matróide. Suponha que $x \in P_b'(M)$ e seja $\mathcal{T} := \{T \subseteq S \mid \tilde{x}T = rT\}$. Então*

$$T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_1 \in \mathcal{T}$$

para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$.

Prova. Suponha que $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Então

$$\begin{aligned} rT_1 + rT_2 &= \tilde{x}T_1 + \tilde{x}T_2 \\ &= \tilde{x}(T_1 \cup T_2) + \tilde{x}(T_1 \cap T_2) \\ &\leqslant r(T_1 \cup T_2) + r(T_1 \cap T_2) \\ &\leqslant rT_1 + rT_2. \end{aligned}$$

Assim, todas as passagens valem com igualdade. Logo, $\tilde{x}(T_1 \cup T_2) = r(T_1 \cup T_2)$ e $\tilde{x}(T_1 \cap T_2) = r(T_1 \cap T_2)$ e, portanto, $T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$. □

Lema 6.4. *Seja $M := (S, \mathcal{I})$ um matróide tal que $S \neq \emptyset$. Se x é um ponto extremo de $P_b'(M)$, então existe $s \in S$ tal que $x(s) \in \{0, 1\}$.*

Prova. Suponha que x é um ponto extremo de $P_b'(M)$ e que $0 < x(s) < 1$ para cada $s \in S$. Seja $\mathcal{T} := \{T \subseteq S \mid \tilde{x}T = rT\}$. Pelo Lema 6.3, $T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$ para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Ademais, $\mathbb{1}_{T_1}^S + \mathbb{1}_{T_2}^S = \mathbb{1}_{T_1 \cup T_2}^S + \mathbb{1}_{T_1 \cap T_2}^S$ para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Segue daí, usando o Lema 1.11 e o Teorema 5.6, que existe uma cadeia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que

(i) $\{\mathbb{1}_C \mid C \in \mathcal{C}\}$ é linearmente independente,

(ii) $\operatorname{span}\{\mathbb{1}_T^S \mid T \in \mathcal{T}\} = \operatorname{span}\{\mathbb{1}_C^S \mid C \in \mathcal{C}\}$, e

(iii) $|\mathcal{C}| = |S|$.

Pela[8] Proposição 6.7, $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, onde $k := |\mathcal{C}|$, e

$$C_i \subset C_{i+1}$$

para cada $i \in [k-1]$. Ponha $C_0 := \emptyset$. Afirmamos que

$$|C_i \setminus C_{i-1}| \geqslant 2 \tag{6.10}$$

[8] Lembre que para um conjunto V um subconjunto $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ é uma *cadeia* se

$$C_1 \subseteq C_2 \quad \text{ou} \quad C_2 \subseteq C_1$$

para cada $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

Proposição 6.7. *Seja V um conjunto. Se $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ uma cadeia finita, então existe um natural $n \in \mathbb{N}$ e conjuntos $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tais que*

(i) $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, e

(ii) $\forall i \in [1 : n-1] : C_i \subset C_{i+1}$.

Prova. A prova é por indução em $|\mathcal{C}|$. Seja $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ uma cadeia finita. O resultado é claro se $|\mathcal{C}| = 0$. Suponha então que $|\mathcal{C}| > 0$. Pela Proposição 6.1, existe um elemento maximal $C \in \mathcal{C}$. Considere o conjunto $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{C\}$. É claro que $\mathcal{C}'$ é uma cadeia. Logo, por hipótese de indução, existe $n \in \mathbb{N}$ e $C_1 \ldots, C_n \in \mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C}' = \{C_1, \ldots, C_n\}$ e $C_i \subset C_{i+1}$ para cada $i \in [1 : n-1]$. Seja $C_{n+1} := C$. Então $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$. Como $\mathcal{C}$ é cadeia, então $C_n \subset C_{n+1}$ ou $C_{n+1} \subset C_n$. Pela maximalidade de C_{n+1} em $\mathcal{C}$, temos que $C_n \subset C_{n+1}$, o que completa a prova. □

para cada $i \in [k]$. Eis a prova. Suponha que $i \in [k]$. Note que $\tilde{x}C_{i-1} = rC_{i-1} \in \mathbb{N}$ e $\tilde{x}C_i = rC_i \in \mathbb{N}$. Logo, $\tilde{x}C_i - \tilde{x}C_{i-1} \in \mathbb{N}$ o que, combinado com $0 < x < 1$, permite concluir que $|C_i \setminus C_{i-1}| \geqslant 2$.

Agora,

$$
\begin{aligned}
|S| &\geqslant |C_k| \\
&= \sum_{i \in [k]} |C_i \setminus C_{i-1}| && \text{pois } \mathscr{C} \text{ é uma cadeia} \\
&\geqslant \sum_{i \in [k]} 2 && \text{por (6.10)} \\
&= 2k \\
&= 2|S| && \text{por (iii),}
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição uma vez que $S \neq \emptyset$. Concluímos assim que existe $s \in S$ tal que $x(s) \in \{0,1\}$. □

Teorema 6.8. *Para todo matróide $M := (S, \mathscr{I})$ e toda função peso $w \in \mathbb{R}^S$ existe uma base B de M tal que $\tilde{w}(B) \geqslant w^\top x$ para cada $x \in P'_b(M)$.*

Prova. A prova é por indução em $|S|$. Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}^S$ uma função peso. O resultado é claro se $S = \emptyset$. Suponha então que $S \neq \emptyset$. Seja x um ponto extremo de $P'_b(M)$ tal que $w^\top x = \max\{w^\top z \mid z \in P'_b(M)\}$. Pelo Lema 6.4, existe $s \in S$ tal que $x(s) \in \{0,1\}$. Temos assim dois casos.

Caso 1: $x(s) = 0$.

Considere o matróide $M' := M - s$. Por hipótese de indução, existe uma base B' de M' tal que $\widetilde{w_{-s}}(B') \geqslant w_{-s}^\top z$ para cada $z \in P'_b(M')$. Afirmamos que

$$x_{-s} \in P'_b(M').$$

Eis a prova. É claro que $x_{-s} \in \mathbb{R}_+^{S \setminus \{s\}}$. Ora,

$$r_M(S) = \tilde{x}(S) = \widetilde{x_{-s}}(S \setminus \{s\}) \leqslant r_M(S \setminus \{s\}) = r_{M'}(S \setminus \{s\}),$$

donde

$$r_M(S) = r_{M'}(S \setminus \{s\}) \quad \text{e} \quad \widetilde{x_{-s}} = r_{M'}(S \setminus \{s\}). \tag{6.11}$$

Seja agora $T \subseteq S \setminus \{s\}$. Então $\widetilde{x_{-s}}(T) = \tilde{x}(T) \leqslant r_M(T) = r_{M'}(T)$. Isso prova que $x_{-s} \in P'_b(M')$.

Assim, $\widetilde{w_{-s}}(B') \geqslant w_{-s}^\top x_{-s}$. Note que B' é uma base de M. De fato, B' é uma base de M' e, consequentemente, $r_{M'}(B') = r_{M'}(S \setminus \{s\})$. Mas, de acordo com (6.11), temo que $r_M(S) = r_{M'}(B')$ e, portanto, $r_M(S) = r_M(B')$. Para terminar a prova neste caso, observe que

$$\tilde{w}(B) = \widetilde{w_{-s}}(B') \geqslant w_{-s}^\top x_{-s} = w^\top x.$$

A escolha de x implica que $\tilde{w}(B) \geqslant w^\top z$ para cada $z \in P'_b(M)$, como desejado.

Caso 2: $x(s) = 1$.

Seja $M' := M/s$, ou seja, M' é obtido do matróide M através da contração do elemento s. Lembre que

$$r_{M'}(T) = r_M(T \cup \{s\}) - r_M(s)$$

para cada $T \subseteq S \setminus \{s\}$. Por hipótese de indução, existe uma base B' de M' tal que $\widetilde{w_{-s}}(B') \geqslant w_{-s}^\top z$ para cada $z \in P'_b(M')$. Afirmamos que

$$x_{-s} \in P'_b(M').$$

Eis a prova. Ora, $x(s) = 1$ implica que $r_M(\{s\}) = 1$. Assim,

$$\widetilde{x_{-s}}(S \setminus \{s\}) = \widetilde{x}(S) - 1 = r_M(S) - 1 = r_{M'}(S \setminus \{s\}).$$

Seja agora $T \subseteq S \setminus \{s\}$. Então

$$\widetilde{x_{-s}}(T) = \widetilde{x}(T) - 1 \leqslant r_M(T) - 1 = r_{M'}(T).$$

Isso prova que $x_{-s} \in P'_b(M')$. Como $r_M(\{s\}) = 1$, então $\{s\}$ é independente em M. Ademais, B' é independente em M'. Assim, pela Proposição 6.6, temos que o conjunto $B := B' \cup \{s\}$ é uma base de M. Segue daí que

$$\widetilde{w}(B) = \widetilde{w_{-s}}(B') + w(s) \geqslant w_{-s}^\top x_{-s} + w(s)x(s) = w^\top x.$$

A escolha de x implica que $\widetilde{w}(B) \geqslant w^\top z$ para cada $z \in P'_b(M)$, como desejado.

□

6.7 *Uma relação minimax*

Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}_+^S$. Considere o par de problemas "primal-dual":

$$\begin{aligned} \max \quad & w^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & \widetilde{x}(U) \leqslant r(U) \quad \forall U \in 2^S \\ & x \in \mathbb{R}_+^S. \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & r^\top z \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] \geqslant w(s) \quad \forall s \in S \\ & z \in \mathbb{R}_+^{2^S}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

É fácil checar que ambos os problemas possuem soluções viáveis. Logo, pelo Teorema Forte da Dualidade existe uma solução viável ótima x para o problema (6.12) e uma solução viável ótima z para o problema (6.13) tal

[9] Este termo não é padrão.

que $w^\top x = r^\top z$. No que segue, vamos mostrar que é possível escolher x de tal forma que $x = \mathbb{1}_B^S$ para alguma base B de M. Note que nesta seção w é não-negativa. É conveniente introduzir a seguinte definição.

Uma w-*cobertura*[9] de M é um vetor $z \in \mathbb{R}_+^{2^S}$ tal que

$$\sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] \geqslant w(s)$$

para cada $s \in S$.

A próxima proposição é simplesmente uma reformulação do Teorema Fraco da Dualidade e da condição de folgas complementares.

Proposição 6.8. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}_+^S$. Então*

$$\max\{\widetilde{w}(I) \mid I \in \mathscr{I}\} \leqslant \min\{r^\top z \mid z \text{ é uma } w\text{-cobertura de } M\}.$$

Ademais, um conjunto independente $I \in \mathscr{I}$ e uma w-cobertura z satisfazem $\widetilde{w}(I) = r^\top z$ se, e só se,

(i) $s \in I \implies \sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] = w(s)$, *e*

(ii) $U \in \underline{z} \implies |U \cap I| = r(U)$.

Prova. Seja $I \in \mathscr{I}$ e z uma w-cobertura de M. Então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}(I) &= \sum_{s \in I} w(s) \\
&\leqslant \sum_{s \in I} \sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] \\
&= \sum_{U \in 2^S} \sum_{s \in I} z(U)[s \in U] \\
&= \sum_{U \in 2^S} z(U) \sum_{s \in I} [s \in U] \\
&= \sum_{U \in 2^S} z(U)|U \cap I| \\
&\leqslant \sum_{U \in 2^S} z(U) r(U) \\
&= r^\top z.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Note que, em virtude de (6.14), temos que $\widetilde{w}(I) = r^\top z$ se, e só se, se cumprem as condições (i) e (ii). □

Teorema 6.9. *Para cada matróide $M := (S, \mathscr{I})$ e cada $w \in \mathbb{R}_+^S$, existe uma base B de M e uma w-cobertura z de M tal que*

(i) $\underline{z}$ *é uma cadeia,*

(ii) $s \in B \implies \sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] = w(s)$, *e*

(iii) $U \in \underline{z} \implies |U \cap B| = r(U)$.

Prova. A prova é por indução em S. Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}_+^S$. Se $S = \emptyset$, então $B := \emptyset$ e $z := 0 \in \mathbb{R}_+^S$ satisfazem (i), (ii) e (iii). Suponha que

$S \neq \emptyset$. Seja $s \in \operatorname{argmin}\{w(u) \mid u \in S\}$ e $w' := w - w(s)\mathbb{1}_S^S$. Por hipótese de indução, existe uma base $B' \in \mathscr{I}(M - s)$ e uma w'-cobertura z' de $M - s$ tal que

- $\underline{z'}$ é uma cadeia,
- $t \in B' \implies \sum_{U \in 2^{S\setminus\{s\}}} z'(U)[t \in U] = w'(t)$, e
- $U \in \underline{z'} \implies |U \cap B'| = r_{M-s}(U) = r(U)$.

Seja $z := z'[S \mapsto w(s)]$ e

$$B := \begin{cases} B' \cup \{s\} & \text{se } B' \cup \{s\} \in \mathscr{I} \\ B' & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Precisamos provar que

(6.15) (i) $\underline{z}$ é uma cadeia,
(ii) $t \in B \implies \sum_{U \in 2^S} z(U)[t \in U] = w(t)$, e
(iii) $U \in \underline{z} \implies |U \cap B| = r_M(U) = r(U)$.

Vamos primeiro mostrar que z é uma w-cobertura de M. De fato, seja t um elemento de S. Então,

(6.16)
$$\begin{aligned} \sum_{U \in 2^S} z(U)[t \in U] &= \sum_{U \in 2^{S\setminus\{s\}}} z'(U)[t \in U] + z(S)[t \in S] \\ &= \sum_{U \in 2^{S\setminus\{s\}}} z'(U)[t \in U] + z(S) \\ &\geqslant w'(t) + w(s) \\ &= w(t) - w(s) + w(s) \\ &= w(t). \end{aligned}$$

Além disso,

(6.17)
$$\sum_{U \in 2^S} z(U)[s \in U] = z(S)[s \in S] = z(S) = w(s).$$

Logo, z é uma w-cobertura de M.

Para a prova de (6.15)(i), note que, como $\underline{z'}$ é uma cadeia, então $\underline{z}$ também é uma cadeia, já que

$$\underline{z} = \underline{z'} \cup \{S\}.$$

Logo, vale (6.15)(i).

Para a prova de (6.15)(ii), suponha que $t \in B$. Então a primeira desigualdade em (6.16), quando aplicada a t vale com igualdade. Ademais, a igualdade (6.17) também vale para s. Por conseguinte, vale (6.15)(ii).

Para a prova de (6.15)(iii), suponha que $U \in \underline{z}$. Se $U \in \underline{z'}$, então

$$|U \cap B| = |U \cap B'| = r_{M-s}(U) = r(U).$$

Pelo Lema 6.1, temos que B é uma base de M. Assim, $|S \cap B| = |B| = r(S)$ e, portanto, vale (6.15)(iii). Isso completa a prova do teorema. $\square$

Corolário 6.1. *Seja $M := (S, \mathscr{I})$ um matróide e $w \in \mathbb{R}^S_+$. Então*

$$\max\{\widetilde{w}(I) \mid I \in \mathscr{I}\} = \min\{r^\top z \mid z \text{ é uma } w\text{-cobertura de } M\}.$$

6.8 Intersecção de matróides

Teorema 6.10. *Sejam $M_1 := (S, \mathscr{I}_1)$ e $M_2 := (S, \mathscr{I}_2)$ matróides. Então*

$$\max\{|I| \mid I \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2\} = \min\{r_1(X) + r_2(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}.$$

Prova. Vamos mostrar que, para todo par de matróides $M_1 := (S, \mathscr{I}_1)$, $M_2 := (S, \mathscr{I}_2)$ e para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\} \geqslant k \implies \exists I \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2 : |I| \geqslant k. \tag{6.18}$$

A prova é por indução em k. Sejam $M_1 := (S, \mathscr{I}_1)$ e $M_2 := (S, \mathscr{I}_2)$, $k \in \mathbb{N}$ e suponha que $\min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\} \geqslant k$. O resultado é imediato se $k = 0$ uma vez que $\emptyset \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$. Suponha que $k > 0$. Afirmamos que

$$\textit{existe } x \in S \textit{ tal que } r_{M_1}(x) = r_{M_2}(x) = 1.$$

De fato, se este não fosse o caso, então $r_{M_1}(x) = 0$ ou $r_{M_2}(x) = 0$ para cada $x \in S$. Seja $Z := \{x \in S \mid r_{M_1}(x) = 0\}$ e observe que $S \setminus Z = \{x \in S \mid r_{M_2}(x) = 0\}$. Assim, $r_{M_1}(Z) + r_{M_2}(S \setminus Z) = 0$, o que contraria $\min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\} \geqslant k$. Logo, existe $x \in S$ tal que $r_{M_1}(x) = r_{M_2}(x) = 1$.

Considere agora os matróides $M_1 - x$ e $M_2 - x$ e os matróides M_1 / x e M_2 / x. Afirmamos que

(6.19) (i) existe $I \in \mathscr{I}(M_1 - x) \cap \mathscr{I}(M_2 - x)$ tal que $|I| \geqslant k$, ou
(ii) existe $I \in \mathscr{I}(M_1 / x) \cap \mathscr{I}(M_2 / x)$ tal que $|I| \geqslant k - 1$.

Suponha que não vale (i) e nem (ii).

Se não vale (i), então $|I| \leqslant k - 1$ para cada $I \in \mathscr{I}(M_1 - x) \cap \mathscr{I}(M_2 - x)$. Por hipótese de indução, $\min\{r_{M_1 - x}(X) + r_{M_2 - x}(S \setminus X) \mid X \subseteq S \setminus \{x\}\} \leqslant k - 1$. Seja $\{A_1, A_2\}$ uma partição de $S \setminus \{x\}$ tal que $r_{M_1 - x}(A_1) + r_{M_2 - x}(A_2) \leqslant k - 1$. Como $r_{M_1 - x}(A_1) = r_{M_1}(A_1)$ e $r_{M_2 - x}(A_2) = r_{M_2}(A_2)$, temos que

$$r_{M_1}(A_1) + r_{M_2}(A_2) \leqslant k - 1. \tag{6.20}$$

Se não vale (ii), então que $|I| \leqslant k - 2$ para cada $I \in \mathscr{I}(M_1 / x) \cap \mathscr{I}(M_2 / x)$. Por hipótese de indução, $\min\{r_{M_1 - x}(X) + r_{M_2 - x}(S \setminus X) \mid X \subseteq S \setminus \{x\}\} \leqslant k - 2$. Seja $\{B_1, B_2\}$ uma partição de $S \setminus \{x\}$ tal que $r_{M_1 / x}(B_1) + r_{M_2 / x}(B_2) \leqslant k - 2$. Como $r_{M_1 / x}(B_1) = r_{M_1}(B_1 \cup \{x\}) - 1$ e $r_{M_2 / x}(B_2) = r_{M_2}(B_2 \cup \{x\}) - 1$, temos que

$$r_{M_1}(B_1 \cup \{x\}) - 1 + r_{M_2}(B_2 \cup \{x\}) - 1 \leqslant k - 2. \tag{6.21}$$

A submodularidade de r_{M_1} e r_{M_2} implicam que

$$r_{M_1}(A_1) + r_{M_1}(B_1 \cup \{x\}) \geqslant r_{M_1}(A_1 \cup B_1 \cup \{x\}) + r_{M_1}(A_1 \cap B_1), \tag{6.22}$$

$$r_{M_2}(A_2) + r_{M_2}(B_2 \cup \{x\}) \geqslant r_{M_2}(A_2 \cup B_2 \cup \{x\}) + r_{M_2}(A_2 \cap B_2). \tag{6.23}$$

Observe que $\{A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2 \cup \{x\}\}$ é uma partição de S.[10] De forma similar, $\{A_2 \cap B_2, A_1 \cup B_1 \cup \{x\}\}$ é uma partição de S. Por conseguinte,

$$r_{M_1}(A_1 \cap B_1) + r_{M_2}(A_2 \cup B_2 \cup \{x\}) \geqslant k, \tag{6.24}$$

$$r_{M_1}(A_2 \cap B_2) + r_{M_2}(A_1 \cup B_1 \cup \{x\}) \geqslant k. \tag{6.25}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
2k-3 &= k-1+k-2 \\
&\geqslant r_{M_1}(A_1) + r_{M_2}(A_2) \\
&\quad + r_{M_1}(B_1 \cup \{x\}) - 1 + r_{M_2}(B_2 \cup \{x\}) - 1 && \text{por (6.20) e (6.21)} \\
&= r_{M_1}(A_1) + r_{M_1}(B_1 \cup \{x\}) \\
&\quad + r_{M_2}(A_2) + r_{M_2}(B_2 \cup \{x\}) - 2 \\
&\geqslant r_{M_1}(A_1 \cup B_1 \cup \{x\}) + r_{M_1}(A_1 \cap B_1) \\
&\quad + r_{M_2}(A_2 \cup B_2 \cup \{x\}) + r_{M_2}(A_2 \cap B_2) - 2 && \text{por (6.22) e (6.23)} \\
&\geqslant 2k-2 && \text{por (6.24) e (6.25)},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Isso completa a prova de (6.19). ◇

Em virtude de (6.19), temos que vale (i) ou (ii).

Suponha que vale (i), ou seja, existe $I \in \mathscr{I}(M_1 - x) \cap \mathscr{I}(M_2 - x)$ tal que $|I| \geqslant k$. É claro que $I \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$. Isso prova (6.18).

Suponha finalmente que vale (ii), ou seja, existe $I \in \mathscr{I}(M_1/x) \cap \mathscr{I}(M_2/x)$ tal que $|I| \geqslant k-1$. Pela Proposição 6.6, $I \cup \{x\} \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$, o que prova (6.18). Isso completa a prova do Teorema da Intersecção de Matróides. □

Segunda prova. Vamos mostrar que

(6.26) se $M_1 := (S, \mathscr{I}_1)$ e $M_2 := (S, \mathscr{I}_2)$ são matróides, então existe um conjunto independente $I \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$ tal que

$$|I| \geqslant \min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}.$$

A prova é por indução em $|S|$.

O resultado é evidente se $|S| \leqslant 1$. Suponha, então, que $|S| \geqslant 2$. Seja

$$k := \min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}.$$

A prova é dividida em dois casos:

Caso 1: $\operatorname{argmin}\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\} = \{\emptyset, S\}$.

[10] De fato, seja $z \in S$. Vamos provar que $z \in (A_1 \cap B_1) \cup A_2 \cup B_2 \cup \{x\}$. Se $z = x$, então estamos feitos. Suponha no que segue que $z \neq x$. Se $z \in A_2$, então não há nada a provar. Suponha que $z \notin A_2$. Como $\{A_1, A_2\}$ é uma partição de $S \setminus \{x\}$, então $x \in A_1$. Se $z \in B_1$, então não há mais nada a provar. Suponha que $z \notin B_1$. Como $\{B_1, B_2\}$ é uma partição de $S \setminus \{x\}$, temos que $z \in B_2$, o que completa a prova. Falta só verificar que os conjuntos $A_1 \cap B_1$ e $A_2 \cup B_2 \cup \{x\}$ são disjuntos. Suponha que $z \in A_1 \cap B_1$. Ora, $z \in A_1$ implica que $z \notin A_2$. Ademais, $z \in B_1$ implica que $z \notin B_2$. Finalmente $z \neq x$, pois $A_1 \cap B_1 \subseteq S \setminus \{x\}$.

Seja s um elemento de S. Considere os matróides $M_1 - s$ e $M_2 - s$. Afirmamos que

$$r_{M_1-s}(X) + r_{M_2}((S \setminus \{s\}) \setminus X) \geqslant k \tag{6.27}$$

para cada $X \subseteq S \setminus \{s\}$. Suponha que este não é o caso. Então existe $X \subseteq S \setminus \{s\}$ tal que[11]

$$r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})) \leqslant k - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} k &\geqslant r_{M_1}(X) + 1 + r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})) \\ &\geqslant r_{M_1}(X \cup \{s\}) + r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})) \\ &\geqslant k. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} k &\geqslant r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})) + 1 \\ &\geqslant r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \\ &\geqslant k. \end{aligned}$$

Logo, $r_{M_1}(X \cup \{s\}) + r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})) = k$ e $r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X)) = k$. Segue daí que $\{\emptyset, S\} = \{X, X \cup \{s\}\}$, donde $X = \emptyset$ e $S = \{s\}$, o que contraria $|S| \geqslant 2$. Isso prova (6.27).

Por hipótese de indução, existe um conjunto independente $I \in \mathscr{I}(M_1 - s) \cap \mathscr{I}(M_2 - s)$ tal que $|I| \geqslant k$. Mas, $I \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$, o que completa a prova neste caso.

Caso 2: Existe $\emptyset \subset Z \subset S$ tal que $Z \in \operatorname{argmin}\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}$.

Seja $Z^c := S \setminus Z$ e considere os matróides $M_1 - Z^c$ e M_2 / Z^c. Por hipótese de indução, existe $I \in \mathscr{I}(M_1 - Z^c) \cap \mathscr{I}(M_2 / Z^c)$ tal que

$$|I| \geqslant \min\{r_{M_1 - Z^c}(X) + r_{M_2/Z^c}(Z \setminus X) \mid X \subseteq Z\}.$$

Afirmamos que

$$\min\{r_{M_1 - Z^c}(X) + r_{M_2/Z^c}(Z \setminus X) \mid X \subseteq Z\} \geqslant r_{M_1}(Z).$$

Suponha que não. Estão, existe $T \subseteq Z$ tal que

$$\begin{aligned} r_{M_1}(Z) &> r_{M_1 - Z^c}(T) + r_{M_2/Z^c}(Z \setminus T) \\ &= r_{M_1}(T) + r_{M_2}((Z \setminus T) \cup Z^c) - r_{M_2}(Z^c) \\ &= r_{M_1}(T) + r_{M_2}(S \setminus T) - r_{M_2}(Z^c), \end{aligned}$$

donde $r_{M_1}(Z) + r_{M_2}(Z^c) > r_{M_1}(T) + r_{M_2}(S \setminus T)$, o que contraria a escolha de Z, isto é, que $Z \in \operatorname{argmin}\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}$.

[11] Note que

$$(S \setminus \{s\}) \setminus X = S \setminus (X \cup \{s\}),$$
$r_{M_1 - s}(X) = r_{M_1}(X)$ e
$$r_{M_2 - s}(S \setminus (X \cup \{s\})) = r_{M_2}(S \setminus (X \cup \{s\})).$$

Considere os matróides M_1/Z e $M_2 - Z$. Por hipótese de indução, existe $J \in \mathscr{I}(M_1/Z) \cap \mathscr{I}(M_2 - Z)$ tal que

$$|J| \geqslant \min\{r_{M_1/Z}(X) + r_{M_2-Z}(Z^c \setminus X) \mid X \subseteq Z^c\}.$$

Afirmamos que

$$\min\{r_{M_1/Z}(X) + r_{M_2-Z}(Z^c \setminus X) \mid X \subseteq Z^c\} \geqslant r_{M_2}(S \setminus Z)$$

Suponha que não. Então, existe $T \subseteq Z^c$ tal que

$$\begin{aligned} r_{M_2}(S \setminus Z) &> r_{M_1/Z}(T) + r_{M_2-Z}(Z^c \setminus T) \\ &= r_{M_1}(T \cup Z) - r_{M_1}(Z) + r_{M_2}(Z^c \setminus T) \\ &= r_{M_1}(T \cup Z) - r_{M_1}(Z) + r_{M_2}(S \setminus (T \cup Z), \end{aligned}$$

donde $r_{M_2}(S \setminus Z) + r_{M_1}(Z) > r_{M_1}(T \cup Z) + r_{M_2}(S \setminus (T \cup Z)$, o que contraria a escolha de Z, isto é, que $Z \in \operatorname{argmin}\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}$.

Pela Proposição 6.6, $I \cup J \in \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$. Ademais, $|I \cup J| = |I| + |J| \geqslant r_{M_1}(Z) + r_{M_2}(S \setminus Z) \geqslant \min\{r_{M_1}(X) + r_{M_2}(S \setminus X) \mid X \subseteq S\}$, como queríamos.

$\square$