Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática Interativa

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática Interativa

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Universidade Federal do ABC

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

Dedicatória (opcional).

Agradecimentos

Agradecimentos (opcional).

“Epígrafe (opcional).”

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r-arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

Palavras-chave: Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r-arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

Keywords: Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds, que determina uma arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em duas operações fundamentais: (i) a redução gulosa dos custos dos arcos e (ii) a contração de ciclos, de modo a resolver recursivamente uma instância menor do problema e, em seguida, estender a solução para o problema original. O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

1.1 O algoritmo

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe uma tripla (D, c, r), em que $D = (V, A)$ é um digrafo, $c\colon A \to \mathbb{R}$ é uma função custo e $r \in V$ é a raiz, sob a hipótese de que D admite ao menos uma r-arborescência. O algoritmo devolve uma r-arborescência c-mínima de D.

Para evitar repetir essa hipótese, introduzimos a seguinte definição. Uma tripla (D, c, r) é um **r-digrafo ponderado** se (D, c) é um digrafo ponderado, r é um vértice de D, $\delta^-(r) = \varnothing$ e D possui uma r-arborescência. Note que a hipótese $\delta^-(r)$ é uma trivialidade, pois uma r-arborescência não contém nenhum arco que entra em r e, portanto, tais arcos podem ser eliminados de D sem nenhum prejuízo.

Vamos tecer algumas considerações para motivar o algoritmo.

Caráter Guloso

Suponha doravante que (D, c, r) é um r-digrafo ponderado. O algoritmo tem um caráter guloso. Note que, se T é uma r-arborescência de D, então, para cada vértice $v \neq r$, existe exatamente um arco de T que entra em v. Isso sugere a seguinte escolha gulosa: para cada vértice $v \neq r$, selecione um arco a_v de custo mínimo que entra em v e forme o conjunto $T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$.

Suponha que T é uma r-arborescência. Não é difícil verificar que T tem custo mínimo. De fato, seja F uma r-arborescência de D. Para cada vértice $v \neq r$, escreva b_v para o *único* arco de F que entra em v. Pela escolha gulosa,

$$c(a_v) \leq c(b_v) \quad \text{para todo } v \neq r.$$

Logo,

$$c(F) \;=\; \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(b_v) \;\geq\; \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(a_v) \;=\; c(T).$$

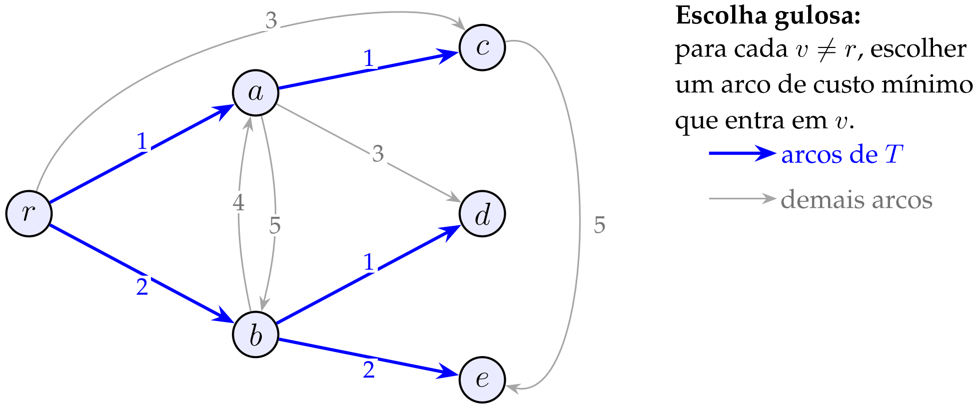


Figura 1 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma r-arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo.

Portanto, T é uma r-arborescência de custo mínimo.

A seguinte figura ilustra que podemos não ter tanta sorte.

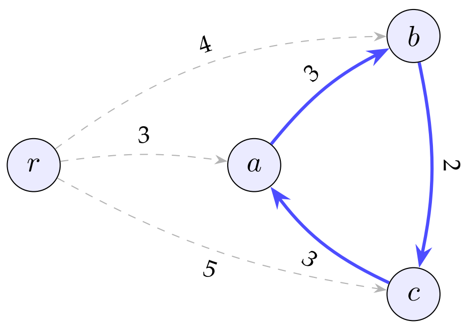


Figura 2 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Ora, se no lugar do arco (c, a) tivessemos escolhido o arco (r, a), então r-arborescência resultante seria de custo mínimo.

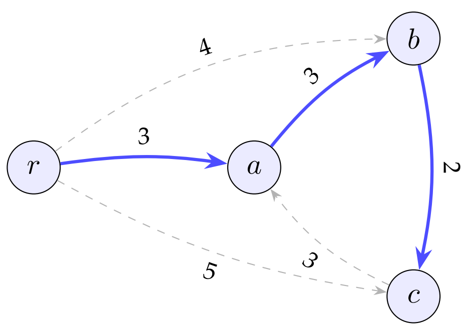


Figura 3 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

O exemplo acima sugere que devemos formar o subdigrafo H de D com $V(H) = V(D)$ e

$$A(H) \; := \bigcup_{v \in V \setminus \{r\}} \arg\min\{\, c(a) : a \in \delta^-(v) \,\}.$$

Ou seja, para cada $v \neq r$ incluímos em H *todos* os arcos de custo mínimo que entram em v. Um argumento análogo ao anterior mostra que, se H contém uma r-arborescência, então ela é de custo mínimo.

Infelizmente, só isso não é suficiente, como mostra a próxima figura.

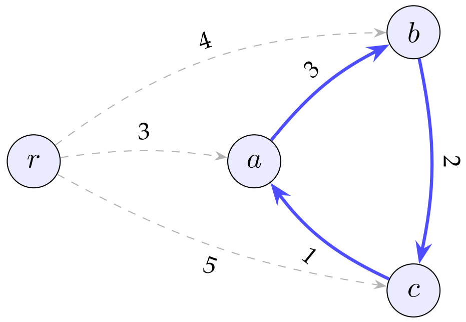


Figura 4 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

O ideal, do ponto de vista algorítmico, é dispor de uma forma simples de identificar o subdigrafo H. Uma transformação nos custos fornece exatamente isso. Para tanto, introduzimos a noção de **custo q-reduzido**.

Seja $q : V \setminus \{r\} \to \mathbb{R}$ (convencionamos $q(r) = 0$). Definimos o **custo q-reduzido** $c_q : A \to \mathbb{R}$ por

$$c_q(a) := c(a) - q\big(\mathrm{head}(a)\big), \qquad a \in A.$$

Para um conjunto $X \subseteq V$, escrevemos $q(X) := \sum_{u \in X} q(u)$.

A próxima proposição mostra que a transformação por custo q-reduzido preserva a otimalidade.

Proposição 1.1. *Para toda função $q : V \setminus \{r\} \to \mathbb{R}$, uma r-arborescência T é c-mínima em D se, e somente se, T é c_q-mínima em D.*

Prova. Seja F uma r-arborescência. Para cada $u \in V \setminus \{r\}$, seja a_u o único arco de F que entra em u. Então

$$\begin{aligned}
c_q(F) &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c_q(a_u) \\
&= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} \big(c(a_u) - q(u)\big) \\
&= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c(a_u) - \sum_{u \in V \setminus \{r\}} q(u) \\
&= c(F) - q(V \setminus \{r\}).
\end{aligned}$$

Assim, para quaisquer r-arborescências T e F,

$$c(T) \leq c(F) \iff c'(T) = c(T) - q(V \setminus \{r\}) \leq c(F) - q(V \setminus \{r\}) = c_q(F),$$

o que prova a proposição. □

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$, defina

$$\lambda(v) := \lambda_c(v) := \min\{\, c(a) : a \in \delta^-(v) \,\}.$$

Note que λ está bem definida uma vez que D possui uma r-arborescência e, portanto, existe ao menos um arco que entra em cada vértice diferente de r. Então, para todo $v \in V \setminus \{r\}$,

$$\min\{\, c_\lambda(a) : a \in \delta^-(v) \,\} = 0,$$

isto é, precisamente os arcos de custo mínimo que entram em v passam a ter custo zero, e os demais ficam com custo positivo. Consequentemente, o subdigrafo H obtém-se simplesmente como o subdigrafo induzido pelos arcos de custo zero de c_λ:

$$V(H) = V(D) \quad \text{e} \quad A(H) = \{\, a \in A : c_\lambda(a) = 0 \,\}.$$

A figura a seguir ilustra a redução de custos no digrafo da Figura 4.

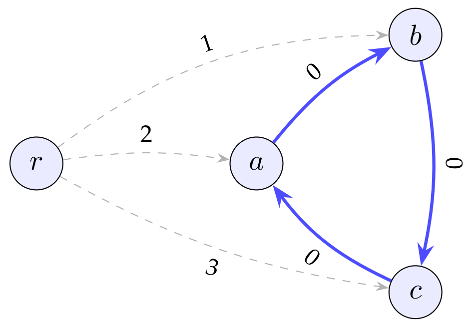


Figura 5 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Podemos agora retomar o caso no qual o subdigrafo gerador H de D, cujos arcos são aqueles em que o custo λ-reduzido é zero, não possui uma r-arborescência. Vamos mostrar que H possui um ciclo.

Seja $v \neq r$ um vértice de V que *não* é alcançável a partir de r em H. Considere um caminho simples maximal[1] de H que termina em v. Seja u o início de P. Como v não é atingível a partir de r, temos que $u \neq r$. Logo, existe exatamente um arco, digamos wv, de H que entra em u. Pela maximalidade de P, o vértice w é um dos vértices de P (caso contrário, $w \cdot P$ é um caminho simples, o que contraria a escolha de P). Como P é um caminho simples que começa em u, o vértice w aparece em P *após* u; portanto, P contém um subcaminho S de u até w. Consequentemente, $S \cdot u$ é um ciclo de H.

A solução consiste em *normalizar os custos por vértice*: para cada $v \neq r$, subtraímos de todo arco que entra em v o menor custo entre os arcos que chegam a v. Após esse

[1] Maximal aqui tem o seguinte sentido. Para cada vértice u de H, as sequencias $P \cdot u$ e $u \cdot P$ não são caminhos simples.

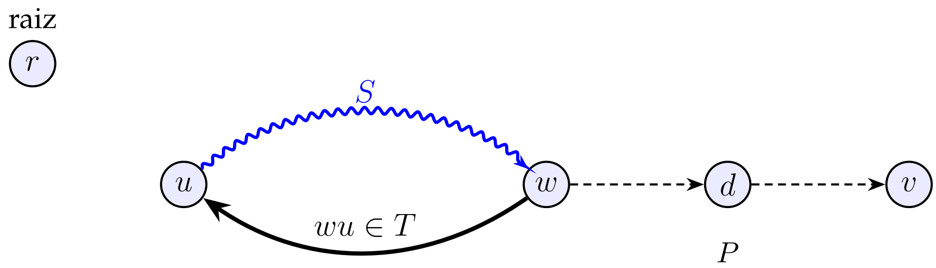


Figura 6 – O caminho simples maximal P inicia em u e termina em v. A porção S de P entre u e w é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo.

ajuste (custos reduzidos), cada $v \neq r$ passa a ter ao menos um arco de custo reduzido zero. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a r-arborescência ótima. Se formarem um ciclo C, *contraímos* C em um **supervértice** x_C, ajustamos os custos dos arcos externos e resolvemos recursivamente no digrafo menor.

A seguir, detalhamos essa operação de contração de ciclos.

Contração de ciclos

Vamos agora formalizar a operação de contração de ciclos. Seja (D, c, r) um r-digrafo ponderado e seja C um ciclo dirigido de D tal que $r \notin C$. A **contração de** C consiste em formar um novo digrafo $D' = (V', A')$ substituindo todos os vértices de C por um único **supervértice** x_C tal que $x_C \notin V$. Formalmente, o conjunto de vértices de D' é dado por

$$V' \;:=\; (V \setminus C) \cup \{x_C\}.$$

O conjunto de arcos A' é construído a partir de A da seguinte forma: para cada arco $a = (u, v) \in A$, mantemos a inalterado em A' se ambos u e v estão fora de C; descartamos a se ambos pertencem a C; criamos um arco (u, x_C) se $u \notin C$ e $v \in C$; e criamos um arco (x_C, v) se $u \in C$ e $v \notin C$.

Ajustamos os custos dos arcos que entram e saem do supervértice x_C em D' para refletir a contração do ciclo C da seguinte forma: para cada arco (u, v) com $u \notin C$ e $v \in C$, o custo do arco contraído (u, x_C) é definido como $c_\lambda(u, v)$, onde $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$ é o custo mínimo de entrada em v e de forma semelhante, para cada arco (u, v) com $u \in C$ e $v \notin C$, o custo do arco contraído (x_C, v) é definido como $c_\lambda(u, v)$, onde $c_\lambda(u, v) = c(u, v) - \lambda(v)$ e $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$ é o custo mínimo de entrada em v.

Agora vamos ilustrar um exemplo de como essa contração é feita e os custos são ajustados.

Considere o digrafo D a seguir, com o ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$.

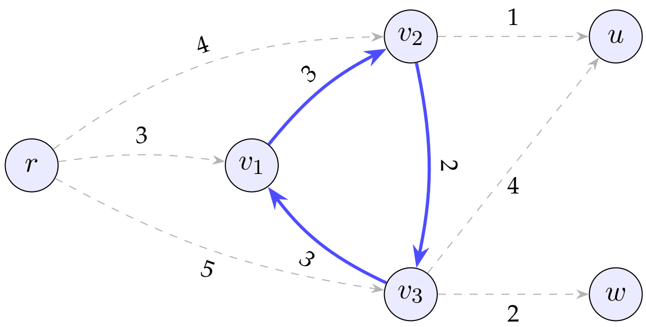


Figura 7 – O digrafo D com o ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$. Os arcos azuis representam os arcos do ciclo, os tracejados representam os demais arcos do digrafo.

Após a normalização dos custos, os arcos internos do ciclo passam a ter custo reduzido zero e os demais arcos são ajustados conforme a definição de custo λ-reduzido:

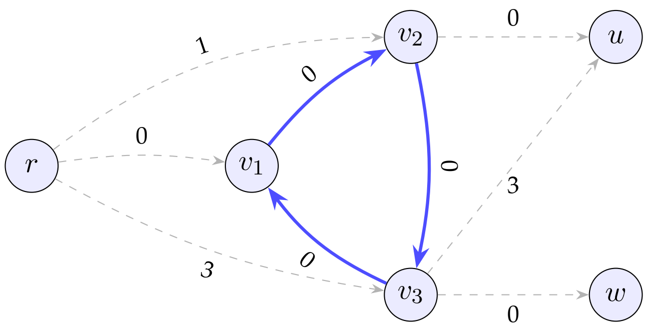


Figura 8 – digrafo com custos λ-reduzidos. Os arcos internos do ciclo C têm custo zero (em azul). Os arcos da raiz para o ciclo têm custos 1, 0 e 3 (tracejados).

Após a contração do ciclo C, obtemos o digrafo D' com o supervértice x_C.

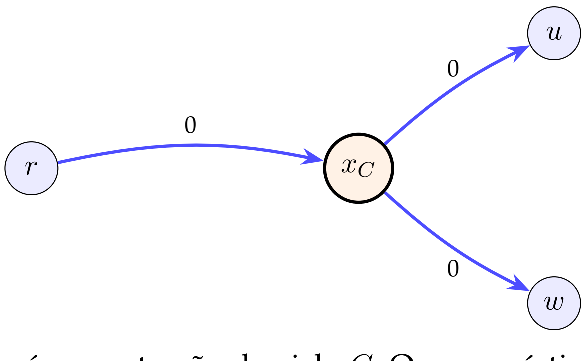


Figura 9 – digrafo D' após a contração do ciclo C. O supervértice x_C substitui todos os vértices do ciclo. Originalmente, havia três arcos paralelos de r para o ciclo: (r, v_1), (r, v_2) e (r, v_3) com custos reduzidos 1, 0 e 3; mantemos apenas o de menor custo 0. Os arcos que saíam do ciclo agora saem de x_C: (x_C, u) com custo 0 e (x_C, w) com custo 0. Note que havia dois arcos de vértices do ciclo para u; mantemos apenas o de menor custo.

Por definição não admitimos gerar arcos paralelos entre um mesmo par de vértices, mantemos apenas o arco de menor custo, conforme ilustrado do vértice r para o supervértice x_C e de x_C para u e isso não afeta a otimalidade, já que na reexpansão qualquer escolha entre arcos paralelos conduz à mesma solução ótima.

Reexpansão de arborescências

Após resolver o problema no digrafo contraído D', obtemos uma r-arborescência ótima T' em D'. Para reexpandir T' em uma r-arborescência T em D, substituímos o supervértice x_C pelo ciclo C e adicionamos os arcos do ciclo que formam a arborescência dentro de C. Especificamente, se o arco (u, x_C) em T' corresponde a um arco (u, v_i) em D (onde $v_i \in C$), então incluímos esse arco em T. Em seguida, adicionamos os arcos do ciclo C que conectam os vértices de C de forma a manter a estrutura de arborescência. Note que, devemos escolher todos os arcos do ciclo C exceto aquele que entra em v_i, garantindo que cada vértice de C tenha grau de entrada igual a 1, exceto v_i.

Seguindo nosso exemplo anterior, ilustramos a reexpansão da r-arborescência, primeiramente adicionando novamente os vértices que pertenciam ao ciclo C e, em seguida, incluindo os arcos apropriados para formar a r-arborescência T em D:

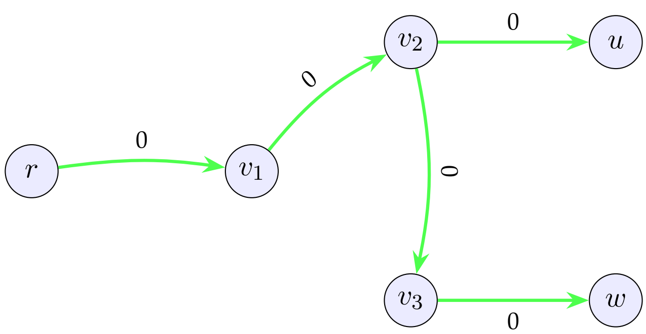


Figura 10 – Reexpansão da r-arborescência ótima T' em D' para obter a r-arborescência T em D

Após isso reinserimos os pesos originais dos arcos. A figura a seguir ilustra esse processo:

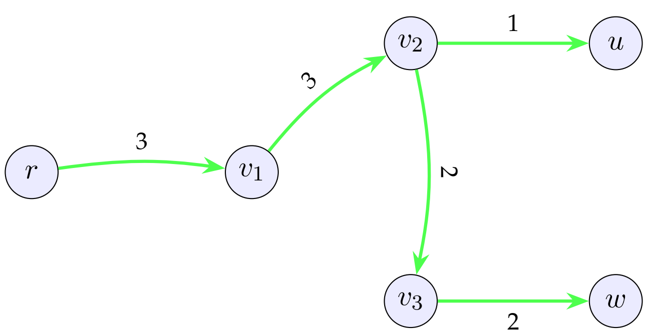


Figura 11 – Reexpansão da r-arborescência ótima T' em D' para obter a r-arborescência T em D. Os arcos selecionados em verde fazem parte de T.

É importante observar que, ao depender da forma com a qual extraímos a arborescência ótima de D' a partir do nosso diagrafo original, podemos obter múltiplas arborescências ótimas em D, o exemplo a seguir ilustra essa situação:

Considere o digrafo a seguir com custos originais:

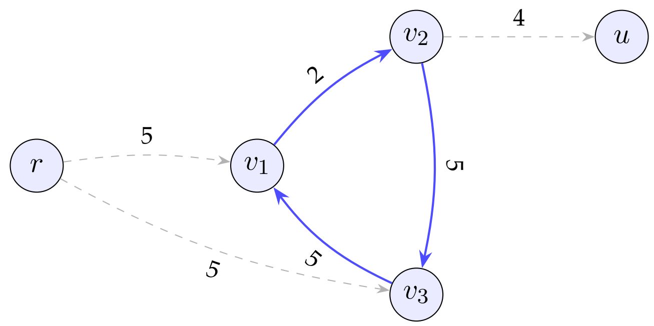


Figura 12 – digrafo D com custos originais. O ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ tem arcos com custos 5, 5 e 2. Existem dois arcos da raiz para o ciclo, ambos com custo 5: (r, v_1) e (r, v_3).

Após a normalização dos custos (subtraindo $\lambda(v_1) = 5$, $\lambda(v_2) = 2$, $\lambda(v_3) = 5$ e $\lambda(u) = 4$), obtemos:

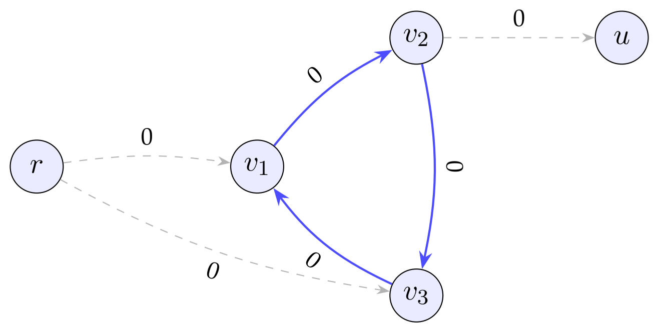


Figura 13 – digrafo D com custos λ-reduzidos. Todos os arcos do ciclo custo mínimo têm agora custo zero.

Após a contração do ciclo C, ambas as arborescências T_1 e T_2 mapeiam para a mesma arborescência T' no digrafo contraído D':

Arborescência T' em D'

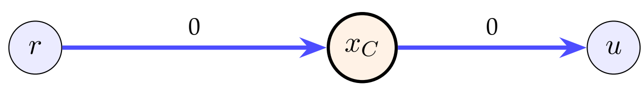
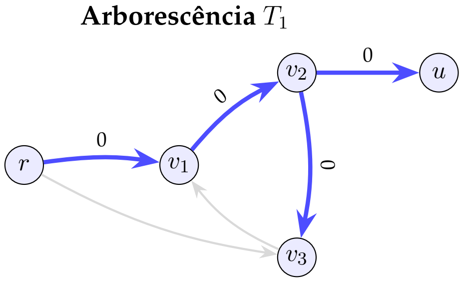


Figura 14 – Arborescência T' no digrafo contraído D'. O arco (r, x_C) pode corresponder ou ao arco (r, v_1) ou ao (r, v_3) em D e o arco (x_C, u) corresponde ao arco normalizado (v_2, u) em D.

No processo de reexpansão, existem duas r-arborescências ótimas distintas em D, ilustradas a seguir:



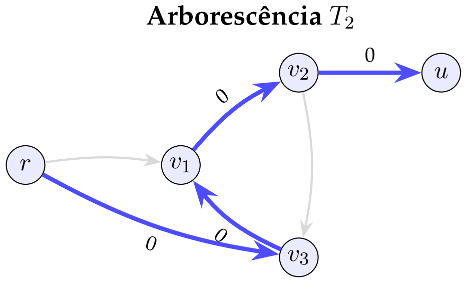


Figura 15 – Duas r-arborescências ótimas distintas em D com custos c_λ-reduzidos. T_1 usa o arco (r, v_1) e os arcos do ciclo (v_1, v_2) e (v_2, v_3). T_2 usa o arco (r, v_3) e os arcos do ciclo (v_3, v_1) e (v_1, v_2). Ambas incluem o arco (v_2, u) e têm custo total zero.

Assim, vemos que a correspondência entre as r-arborescências de D e D' não é bijetiva, pois duas arborescências distintas em D podem corresponder à mesma arborescência em D'. Isso ocorre porque ambos os arcos (r, v_1) e (r, v_3) têm o mesmo custo λ-reduzido (zero) e ambos entram no ciclo C; após a contração, ambos são representados pelo único arco (r, x_C) no digrafo contraído.

A seguir, apresentamos a proposição que estabelece a correspondência entre as r-arborescências de D e D' após a contração do ciclo C.

Proposição 1.2. *Seja C um ciclo dirigido em D com $r \notin C$, e seja D' o digrafo obtido pela contração de C. Para cada vértice $v \in C$, seja a_v o único arco de C que entra em v, e suponha que $c_\lambda(a_v) = 0$ para todo $v \in C$, onde $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$. Defina os custos $c' : A' \to \mathbb{R}$ por*

$$c'(a') := \begin{cases} c_\lambda(a) & \text{se } a' = a \text{ e } a \text{ não envolve } C, \\ c_\lambda(u, w) & \text{se } a' = (u, x_C) \text{ corresponde a } (u, w) \text{ com } w \in C, \\ c_\lambda(u, v) & \text{se } a' = (x_C, v) \text{ corresponde a } (u, v) \text{ com } u \in C. \end{cases}$$

Então existe uma correspondência bijetiva entre as r-arborescências de D' com custos c' e as r-arborescências de D com custos c_λ que contêm exatamente um arco entrando em C. Note que, em geral, podem haver múltiplas arborescências ótimas de D que são mapeadas para uma mesma arborescência ótima de D', ou seja, a correspondência entre arborescências ótimas pode não ser bijetiva.

Prova. Seja T' uma r-arborescência de D'. Como x_C é um vértice de D' e $x_C \neq r$, existe exatamente um arco de T' que entra em x_C. Seja (u, x_C) esse arco. No digrafo original D, o arco (u, x_C) corresponde a um arco (u, w) para algum $w \in C$.

Definimos $T \subseteq A$ da seguinte forma: para cada arco $a' \in T'$ que não envolve x_C, incluímos o arco correspondente $a \in A$ em T; para o arco $(u, x_C) \in T'$, incluímos

$(u, w) \in A$ em T; e incluímos todos os arcos de C, com exceção do arco a_w que entra em w.

Afirmamos que T é uma r-arborescência de D. De fato, para cada vértice $v \in V \setminus \{r\}$, se $v \notin C$, então $v \in V'$ e há exatamente um arco de T' entrando em v, logo há exatamente um arco de T entrando em v. Se $v \in C$ e $v \neq w$, então o único arco de T entrando em v é o arco a_v do ciclo C. Finalmente, se $v = w$, o único arco de T entrando em w é precisamente (u, w).

Além disso, como T' é acíclico em D' e os arcos do ciclo C formam um caminho de w até seus predecessores em C (exceto o arco removido a_w), o conjunto T permanece acíclico. Portanto, T é uma r-arborescência de D.

Reciprocamente, seja T uma r-arborescência de D que contém exatamente um arco entrando em C, digamos (u, w) com $u \notin C$ e $w \in C$. Definimos $T' \subseteq A'$ mantendo cada arco de T que não envolve vértices de C, substituindo o arco (u, w) por (u, x_C), e descartando os arcos internos de C presentes em T. É direto verificar que T' é uma r-arborescência de D' e que essa correspondência é bijetiva.

Finalmente, como todos os arcos a_v do ciclo C têm custo c_λ-reduzido zero, temos

$$c_\lambda(T) \;=\; \sum_{a \in T \setminus C} c_\lambda(a) + c_\lambda(u, w) \;=\; c'(T'),$$

o que estabelece a correspondência entre custos. □

Essa proposição justifica a estratégia recursiva do algoritmo: resolver o problema no digrafo contraído D' com custos ajustados c' e, em seguida, expandir a solução para o digrafo original D.

A seguir, apresentamos a implementação completa do algoritmo de Chu–Liu e Edmonds para encontrar uma r-arborescência de custo mínimo em um r-digrafo ponderado (D, c, r).

1.2 Descrição do algoritmo

A seguir apresentamos uma descrição formal do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. Detalhes de implementação serão discutidos na próxima seção.

Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo $D = (V, A)$, custos $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, raiz r.[a]

1. Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.

2. Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0. Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.

3. Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). **Contração:** contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C,\ w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C,\ v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

4. **Recursão:** compute uma r-arborescência ótima T' de D' com custos c'.

5. **Expansão:** seja $(u, x_C) \in T'$ o único arco que entra em x_C. No digrafo original, ele corresponde a (u, w) com $w \in C$. Forme

$$T := \big(T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}\big) \ \cup\ \{(u, w)\}\ \cup\ \big((A_0 \cap A(C)) \setminus \{a_w\}\big).$$

Então T tem grau de entrada 1 em cada $v \neq r$, é acíclico e tem o mesmo custo de T'; logo, é uma r-arborescência ótima de D (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

[a] Se algum $v \neq r$ não possui arco de entrada, não existe r-arborescência.

1.2.1 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos:* para cada $v \neq r$, defina $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$ e $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$. Para qualquer r-arborescência T, vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de T entrando em cada $v \neq r$. O termo $\sum_{v \neq r} y(v)$ é constante (independe de T); assim, minimizar $\sum c$ equivale a minimizar $\sum c'$ (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos a_v de menor custo que entram em v têm custo reduzido zero e formam A_0.

2. *Caso acíclico:* se (V, A_0) é acíclico, então já é uma r-arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada $v \neq r$, é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).

3. *Caso com ciclo (contração/expansão):* se A_0 contém um ciclo dirigido C, todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

   Contraia C em x_C e ajuste apenas arcos que *entram* em C: $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$.

   Resolva o problema no digrafo contraído D', obtendo uma r-arborescência ótima T' sob c'. Na expansão, substitua o arco $(u, x_C) \in T'$ pelo correspondente (u, w) (com $w \in C$) e remova a_w de C.

   Considerando que os arcos de C têm custo reduzido zero e $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$, a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo, T' ótimo em D' mapeia para T ótimo em D para c'. Pela equivalência entre c e c', T também é ótimo para c. Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

Em termos intuitivos, y funciona como um potencial nos vértices: torna "apertados" (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

1.2.2 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os a_v, detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa $O(m)$ por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo $O(n)$ níveis e tempo total $O(mn)$, com $n = |V|$, $m = |A|$.

O uso de memória é $O(m + n)$, incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão $O(mn)$ por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>).

1.3 Implementação em Python

Esta seção descreve a implementação do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds em Python, estruturada para refletir com precisão as etapas formais discutidas anteriormente. Cada operação fundamental — normalização dos custos, construção do subdigrafo gerador, contração de ciclos e reexpansão — é traduzida em procedimentos sobre digrafos orientados, utilizando a biblioteca `networkx`.

A entrada consiste em um digrafo orientado $D = (V, A)$, com custos dos arcos registrados no atributo `"w"`, e uma raiz $r \in V$. As hipóteses adotadas são: (i) o digrafo é conexo a partir de r, isto é, todo vértice $v \neq r$ é alcançável a partir da raiz; (ii) para todo subconjunto $X \subseteq V \setminus \{r\}$, existe ao menos um arco entrando em X (condições de Edmonds, cf. (SCHRIJVER, 2003)); e (iii) todos os custos são não negativos.

A saída é um subdigrafo T de D com $|A_T| = |V| - 1$ arcos, tal que cada vértice $v \neq r$ possui grau de entrada igual a 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de r, e o custo total $\sum_{a \in A_T} c(a)$ é mínimo.

Por limitações da representação com `networkx.DiGraph`, a implementação elimina arcos paralelos durante a contração de ciclos.

A estrutura do código é modular: funções auxiliares tratam cada etapa do algoritmo — normalização dos custos, detecção e contração de ciclos, construção do subdigrafo gerador e reexpansão da solução. Todas operam sobre objetos `nx.DiGraph` e são coordenadas por uma função principal que gerencia o fluxo recursivo. As subseções seguintes detalham cada função auxiliar, abordando lógica, parâmetros, saídas e complexidade.

1.3.1 Representação de digrafos e detecção de ciclos

A implementação utiliza a biblioteca NetworkX[2], especificamente a classe `nx.DiGraph` para representar digrafos $D = (V, A)$. Internamente, usa dicionários aninhados do Python para armazenar vértices, arcos e atributos, garantindo operações eficientes: adicionar/remover arco $O(1)$ amortizado, iterar vizinhos $O(\deg(u))$, percorrer todos os arcos $O(m)$.

Métodos da API NetworkX

Os métodos da API NetworkX utilizados na implementação dividem-se em três categorias funcionais, cada uma correspondendo a uma fase específica do algoritmo:

Consulta de estrutura

- `D.nodes()`: devolve visão iterável sobre V, permitindo percorrer todos os vértices.
- `D.in_edges(v, data="w")`: devolve arcos entrantes em v com pesos, produzindo tuplas (u, v, w).
- `D.out_edges(u, data="w")`: devolve arcos saíntes de u com pesos, análogo a `in_edges`.
- `D[u][v]["w"]`: acessa diretamente o peso do arco (u, v) para leitura ou modificação.

[2] NetworkX é uma biblioteca Python para criação, manipulação e estudo de redes. Disponível em <https://networkx.org/>.

Modificação de estrutura

- `D.add_edge(u, v, w=peso)`: adiciona arco (u, v) com peso especificado, criando vértices automaticamente se não existirem.
- `D.remove_edges_from(edges)`: remove múltiplos arcos em lote.
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: remove vértices e todos os seus arcos incidentes.

1.3.2 Remoção de arcos que entram na raiz:

Escrevemos essa função como uma etapa de pré-processamento para garantir que a raiz r_0 não possua arcos de entrada antes de iniciar o algoritmo principal.

A remoção é necessária porque, por definição, uma r-arborescência é uma arborescência enraizada em r_0 onde todo vértice $v \neq r_0$ deve ser alcançável a partir de r_0, mas a própria raiz não pode ter predecessores (grau de entrada zero). Se o digrafo original contiver arcos entrando em r_0, esses arcos violariam a definição de arborescência enraizada e poderiam criar ciclos envolvendo a raiz, o que tornaria impossível obter uma estrutura válida. Além disso, a presença de arcos entrando na raiz interfere na normalização: ao tentar normalizar custos de entrada para r_0, criaríamos custos reduzidos artificiais que não fazem sentido no contexto do problema, já que nenhuma solução válida pode incluir tais arcos.

A escolha de implementar esta operação e as demais funções auxiliares fora do escopo da execução principal segue princípios de design de software: (1) *modularidade*, encapsulando uma responsabilidade específica e bem definida (remover entradas na raiz) em uma unidade testável independente; (2) *reutilização*, permitindo que outras partes do código ou implementações alternativas possam chamar esta operação quando necessário sem duplicar lógica; (3) *clareza semântica*, dando um nome descritivo (`remove_edges_to_r0`) que documenta a intenção da operação no ponto de chamada, tornando a função principal mais legível ao abstrair detalhes de implementação; e (4) *facilidade de teste*, possibilitando escrever testes unitários focados exclusivamente nesta operação de pré-processamento, verificando casos extremos (como grafos onde a raiz já não tem predecessores ou onde todos os arcos entram na raiz) sem precisar testar toda a complexidade do algoritmo recursivo.

Em detalhes, ela recebe como entrada um digrafo `D` (objeto `nx.DiGraph`) e o raiz `r0`. A implementação armazena em uma lista todos os arcos que entram em `r0` usando o método `in_edges` (linha 2). Aqui precisamos armazenar os arcos em uma lista porque o método `in_edges` devolve um iterador, que quando sofre remoção direta sofre um erro devido à modificação da estrutura durante a iteração.

Em seguida, na linha 3, remove todos os arcos usando o método `remove_edges_from` da biblioteca NetworkX, o qual recebe como parâmetro uma lista de tuplas representando arcos na forma `(u, v)` e remove cada uma delas do digrafo. O método da NetworkX itera sobre a lista fornecida e, para cada tupla `(u, v)`, remove o arco correspondente da estrutura interna de adjacência. A complexidade de `remove_edges_from` é $O(k)$, onde k é o número de arcos na lista de entrada, pois cada remoção individual tem custo $O(1)$ em média devido ao uso de dicionários aninhados para armazenar arcos.

Por fim, a função devolve o digrafo `D` atualizado no próprio objeto com todos os arcos de entrada em `r0` removidos (linha 4). A complexidade total da função é $O(\deg^-(r_0))$, pois a operação coleta e remove cada arco de entrada uma única vez.

Remoção de arcos que entram na raiz

Remove todos os arcos que entram na raiz `r0`*, modificando* `D` *ao invés de criar uma cópia e devolve o digrafo atualizado.*

```
1 def remove_edges_to_r0(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     in_edges = list(D.in_edges(r0))
3     D.remove_edges_from(in_edges)
4     return D
```

1.3.3 Redução de custos por vértice (normalização):

Criamos uma função auxiliar para realizar a redução de custos por vértice - essa operação é chamada de normalização e calcula $y(v) = \min\{w(u,v)\}$ e substitui cada peso $w(u,v)$ por $w(u,v) - y(v)$, garantindo que ao menos um arco de entrada tenha custo zero. Como cada r-arborescência possui exatamente um arco entrando em cada vértice não-raiz, a soma total dos valores $y(v)$ subtraídos é constante para qualquer solução, preservando assim a ordem de otimalidade entre diferentes arborescências.

Recebe como entrada um digrafo `D` (objeto `nx.DiGraph`) e o vértice `node` a ser normalizado. A implementação armazena em uma variável `incoming_edges` todos os arcos de entrada de `node` com seus pesos usando o método `D.in_edges(node, data="w")`, que devolve uma lista de tuplas $(u, node, w)$ (linha 2) (fazemos isso para evitar repetição de código e deixar o código mais claro). Em seguida, calcula-se o peso mínimo `yv` através de uma compreensão de gerador que extrai o terceiro elemento de cada tupla (linha 3) e, para cada vértice `u`, se houver o atributo "w"subtrai `yv` do peso armazenado em `D[u][node]["w"]` (linha 7), caso contrário inicializa o peso como zero antes de subtrair (linha 6).

A função não devolve nenhum valor, pois a operação é realizada modificando diretamente a estrutura: o digrafo `D` passado como parâmetro é modificado diretamente, e ao menos um arco de entrada de `node` terá custo reduzido zero após a execução. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, pois cada operação percorre os arcos de entrada uma única vez.

Redução de custos por vértice (normalização)

Normaliza os pesos dos arcos que entram em `node`*, subtraindo de cada uma o menor peso de entrada. Modifica o digrafo D no próprio objeto.*

```
def reduce_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
    incoming_edges = D.in_edges(node, data=True)
    yv = min((data.get("w", 0) for _, _, data in incoming_edges))
    for u, _, _ in incoming_edges:
        if "w" not in D[u][node]:
            D[u][node]["w"] = 0
        D[u][node]["w"] -= yv
```

A Figura 16 ilustra o funcionamento da normalização:

Antes: $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$ **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

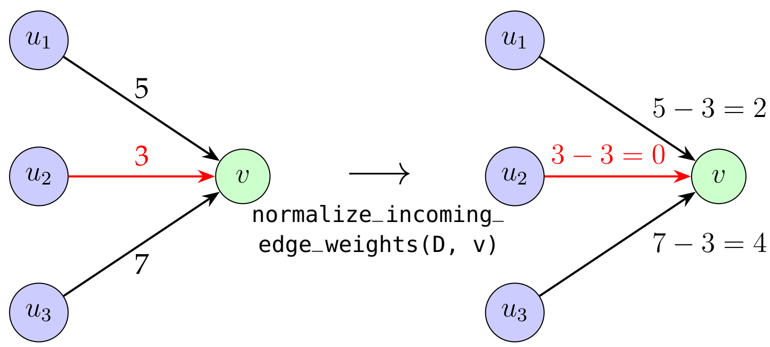


Figura 16 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice v com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar `reduce_weights(D, v)`: o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco (u_2, v) (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para A_0.

Observe que as diferenças relativas são preservadas: o arco mais caro permanece 4 unidades acima da mais barata, e a intermediária mantém sua posição relativa.

Vale destacar que, quando o vértice recebe apenas um arco de entrada, trivialmente o custo desse arco é reduzido a zero.

Considerando que cada r-arborescência contém exatamente um arco entrando em cada vértice não-raiz, a soma $\sum_{w \neq r} y(w)$ é constante para qualquer solução, garantindo que a ordem de otimalidade seja preservada.

1.3.4 Construção de A_0:

Esta função constrói o subdigrafo A_0 selecionando, para cada vértice $v \neq r_0$, um único arco de custo reduzido zero que entra em v.

Recebe como entrada um digrafo `D` e a raiz `r0`. A implementação cria um novo digrafo vazio `A_zero` (linha 2) em vez de modificar `D` diretamente; essa escolha de criar uma estrutura separada é fundamental porque A_0 é um subdigrafo usado para detecção de ciclos, e preservar `D` inalterado permite que as operações subsequentes (como contração) trabalhem com o digrafo original completo, evitando perda de informação sobre arcos não selecionados que podem ser necessários após reexpansões.

Em seguida, para cada vértice `v` diferente de `r0` (linha 3), utilizando o método `D.nodes()` para iterar sobre todos os vértices, se v for diferente de `r0` (linha 4), obtém todos os arcos de entrada em v com seus pesos usando `D.in_edges(v, data=True)` (linha 5).

Em seguida, obtém o primeiro predecessor `u` cujo arco (u, v) tem peso zero, aramazenando-o na variável `u` (linha 6) utilizando uma compreensão de gerador combinada com `next`. A escolha de `next` com gerador em vez de uma busca exaustiva é eficiente porque interrompe a iteração assim que encontra o primeiro arco de custo zero, evitando processamento desnecessário dos arcos restantes (embora teoricamente todos os arcos de custo zero sejam equivalentes, na prática apenas um é necessário para A_0). Finalmente, adiciona o arco (u, v) com peso zero a `A_zero` (linha 7).

Então, devolve-se o digrafo `A_zero` contendo exatamente um arco entrando em cada $v \neq r_0$, todos com custo reduzido zero. O digrafo original `D` não é modificado, preservando o estado para operações futuras. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois cada arco é considerado no máximo uma vez durante a iteração sobre todos os vértices: para cada um dos $n - 1$ vértices não-raiz, examina-se seus arcos de entrada (totalizando no máximo m arcos ao longo de todas as iterações), e para cada vértice a busca por arco de peso zero é interrompida na primeira identificação, resultando em tempo linear no tamanho do digrafo.

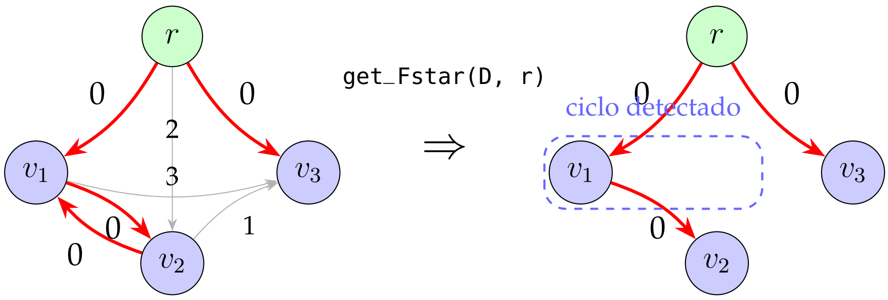
Construção de A zero

Constrói o subdigrafo A_0 a partir do digrafo D, selecionando para cada vértice (exceto a raiz r0) um arco de custo reduzido zero que entra nele.

```
1 def get_Azero(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     A_zero = nx.DiGraph()
```

```
    for v in D.nodes():
        if v != r0:
            in_edges = D.in_edges(v, data=True)
            u = next((u for u, _, data in in_edges if data.get("w") == 0))
            A_zero.add_edge(u, v, w=0)
    return A_zero
```

A Figura 17 ilustra a construção de A_0:



Digrafo D (normalizado) **Subgrafo F^***

Figura 17 – Exemplo de construção de A_0 a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo D após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos um arco de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o afo A_0 resultante contém apenas os arcos de custo zero selecionados, um por vértice. Note que A_0 pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$) que serão tratados nas etapas subsequentes.

As funções de normalização por vértice e construção de A_0 juntas implementam o passo 1 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passo 1 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 1: Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \arg\min_{(u,v)\in A} c(u,v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.

1.3.5 Detecção de ciclo:

A detecção de ciclos é crucial, pois a presença de um ciclo em A_0 indica que a escolha de arcos de custo reduzido zero não formou uma arborescência válida.

Logo, a função apresentada a seguir detecta a presença de um ciclo dirigido em A_0 e devolve um subdigrafo que o contém; Não verificamos se o digrafo é acíclico, pois a função principal não deve sequer fazer essa verificação: se não houver ciclo, é porque uma arborecência já foi encontrada.

Recebe como entrada um digrafo `A_zero`. A função inicializa um conjunto vazio `nodes_in_cycle` (linha 2). O laço na linha 3 itera sobre os arcos devolvidos pela função `nx.find_cycle(A_zero, orientation="original")`, que utiliza uma busca em profundidade (DFS) para detectar ciclos dirigidos. Se um ciclo for encontrado, a função devolve um iterador sobre os arcos do ciclo, desempacotando cada uma na forma `(u, v, _)` (ignorando o terceiro elemento com `_`, que contém metadados de orientação), e na linha 4 para cada arco (u, v) adiciona ambos os vértices ao conjunto `nodes_in_cycle` (linha 4); a escolha de usar conjunto em vez de lista garante que cada vértice seja adicionado apenas uma vez mesmo que o ciclo tenha múltiplos arcos incidentes, e a operação de adição tem complexidade $O(1)$.

Após coletar todos os vértices do ciclo, constrói e devolve uma cópia do subgrafo induzido por eles (linha 7); a cópia é necessária porque o método `subgraph` devolve apenas uma visão dinâmica sobre o digrafo original.

No final, um subdigrafo contendo os vértices e arcos do ciclo detectado é devolvido. O digrafo original `A_zero` não é modificado. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois a DFS visita cada arco no máximo uma vez.

Detecção de ciclo dirigido em A_0

Detecta um ciclo dirigido em A_0 e devolve um subdigrafo contendo seus vértices e arcos, ou `None` *se for acíclico.*

```python
1 def find_cycle(A_zero: nx.DiGraph):
2     nodes_in_cycle = set()
3     for u, v, _ in nx.find_cycle(A_zero, orientation=”original”):
4         nodes_in_cycle.update([u, v])
5     return A_zero.subgraph(nodes_in_cycle).copy()
```

A Figura 18 ilustra o processo de detecção de ciclo:

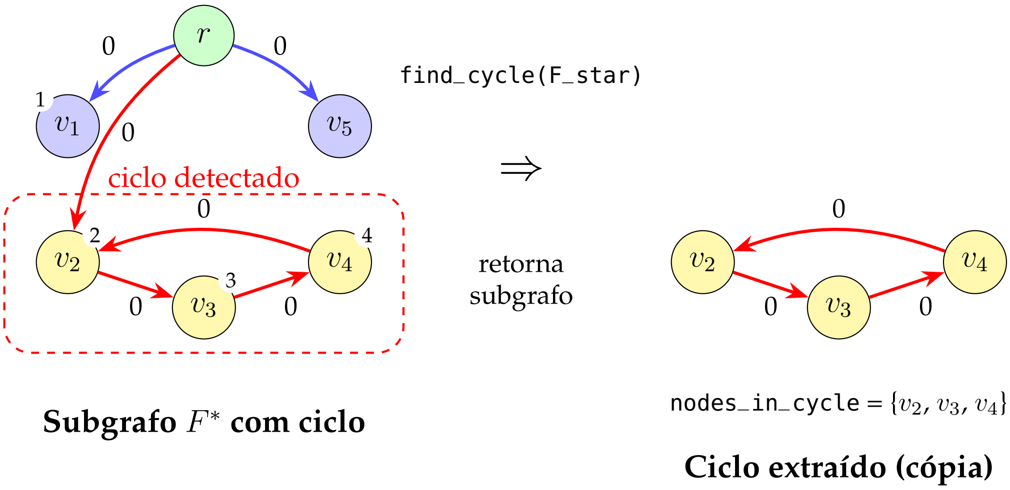


Figura 18 – Exemplo de detecção de ciclo em A_0. À esquerda, o subdigrafo A_0 contém um ciclo formado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ (destacados em amarelo). A DFS percorre o digrafo e detecta o ciclo ao encontrar o arco (v_4, v_2), onde v_2 já está na pilha de recursão. À direita, a função devolve uma cópia do subdigrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e os três arcos que formam o ciclo.

Ao detectar um ciclo, o código avança para a etapa de contração executando operações concretas sobre o objeto Python: primeiro, coleta os vértices de C num conjunto para consultas em $O(1)$; em seguida, para cada vértice externo $u \notin C$ determina o arco de menor peso que vai de u para algum $w \in C$ e guarda esse par em extttin_to_cycle[u]=(w,weight); análogamente, para cada vértice externo $v \notin C$ determina o arco de menor peso que vai de algum $w \in C$ para v e guarda em `out_from_cycle[v]=(w,weight)`. Depois de coletar estas informações (para evitar mutações durante iterações), o código cria no digrafo `D` arcos redirecionados `(u, label)` e `(label, v)` com os pesos mínimos correspondentes. Por fim, a função devolve os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle`, que serão usados na reexpansão para reconstruir corretamente os arcos do ciclo original. Note que a substituição efetiva do ciclo pelo supervértice é realizada pelas operações de remoção/adaptação subsequentes no procedimento principal; aqui apenas são computadas e adicionadas as arestas de ligação e preservadas as informações necessárias para a reexpansão.

1.3.6 Contração de ciclo:

Escrevemos uma função responsável por contrair um ciclo dirigido C a um supervértice x_C, redirecionando arcos incidentes e ajustando custos segundo a regra de custos reduzidos. No final, a função devolve dois dicionários auxiliares com informações dos vértices que incidiam e ascendiam de C, essenciais para a etapa posterior de reexpansão da arborescência.

A função recebe como entrada um digrafo `D`, o ciclo `C` a ser contraído (que fora detectado pela função anterior) e parâmetro de rotulação do novo supervértice `label`. Inicialmente, coletam-se os vértices de `C` em um conjunto (linha 2) para permitir verificações de pertinência em tempo $O(1)$, essencial dado que essa operação é realizada repetidamente nos laços seguintes. Inicializa-se então `in_to_cycle` (linha 3), um dicionário que tem como chave vértices externos ao ciclo e cujo valor são tuplas (v, w), onde v é o vértice do ciclo conectado a u e w é o peso do arco (u, v); essa estrutura preserva não apenas o peso mínimo, mas também o ponto exato de entrada no ciclo.

Para cada vértice `u` no digrafo `D` (linha 4), se `u` não pertence ao ciclo (linha 5), identifica-se o arco de menor peso que sai de `u` e entra em `C` (linhas 6–9) usando a função `min` combinada com uma compreensão de gerador: `((v, data.get("w", float("inf"))) for _, v, data in D.out_edges(u, data=True) if v in cycle_nodes)` a qual itera sobre todos os arcos que saem de `u`, desempacota cada arco na forma `(_, v, data)` (ignorando a origem com `_`, capturando o destino `v` e o peso `data`), filtra apenas aquelas cujo destino `v` pertence ao ciclo, e produz tuplas `(v, w)`; a função `min` (linha 6) então seleciona a tupla de menor peso usando `key=lambda x: x[1]` (linha 10) para comparar pelo segundo elemento (o peso), e devolve `None` se não houver arcos (linha 11). A escolha de selecionar apenas o arco de *menor peso* reflete a propriedade fundamental do algoritmo: qualquer solução ótima que conecta um vértice externo ao ciclo contraído usará necessariamente o arco de custo mínimo, pois todas as outras opções seriam subótimas. Se tal arco existir (linha 12), armazena em `in_to_cycle[u]` (linha 14).

Em seguida, a implementação itera sobre `in_to_cycle` usando o método `items()`, desempacotando cada entrada na forma `(u, (v, w))`, onde `u` é o vértice externo e `(v, w)` é a tupla com o vértice do ciclo e o peso (linha 14). Para cada par, cria um arco de `u` para `label` com peso `w`, efetivamente redirecionando os arcos de entrada para o supervértice (linha 15). A separação entre coleta (linhas 4–10) e criação (linhas 11–12) é necessária porque modificar o digrafo durante a iteração sobre seus vértices causaria comportamento indefinido; ao coletar primeiro todos os dados em estruturas auxiliares, garantimos que as modificações posteriores sejam seguras.

De forma análoga, constrói-se o dicionário `out_from_cycle` (linha 13) para mapear arcos que saem do ciclo.

Finalmente, dois dicionários são devolvidos: `in_to_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de entrada no ciclo original, e `out_from_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de saída. Esses dicionários são essenciais para a fase de reexpansão, onde será necessário determinar exatamente qual arco interno do ciclo deve ser removido a fim de manter um caminho que conecta todos os vértices. O digrafo `D` é modificado sem criar uma cópia: os vértices de `C` são removidos e substituídos por `label`. A escolha de modificação no próprio objeto (em vez de criar uma cópia) reduz significativamente o uso de memória e o tempo de execução, especialmente em grafos grandes ou com múltiplos níveis de recursão, embora exija atenção cuidadosa para que informações originais sejam preservadas. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois cada arco incidente ao ciclo é processado uma vez: os laços nas linhas 4–10 e 14–19 examinam cada arco no máximo uma vez, e as operações de adição (linhas 11–12, 20–21) e remoção (linha 22) têm custo proporcional ao número de arcos afetados.

Contração de ciclo

Contrai o ciclo C em um supervértice `label`*, redirecionando arcos incidentes e ajustando custos. Modifica D no próprio objeto e devolve dicionários para reexpansão.*

```
1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str):
2     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
4     for u in D.nodes:
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, data.get(”w”, float(”inf”)))
8                     for _, v, data in D.out_edges(u, data=True)
9                     if v in cycle_nodes),
10                key=lambda x: x[1],
11                default=None,)
12            if min_weight_edge_to_cycle:
13                in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
14    for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
15        D.add_edge(u, label, w=w)
16    out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
17    for v in D.nodes:
18        if v not in cycle_nodes:
19            min_weight_edge_from_cycle = min(
20                ((u2, data.get(”w”, float(”inf”)))
21                    for u2, _, data in D.in_edges(v, data=True)
22                    if u2 in cycle_nodes),
23                key=lambda x: x[1],
24                default=None,)
25            if min_weight_edge_from_cycle:
26                out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
27    for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
28        D.add_edge(label, v, w=w)
29    return in_to_cycle, out_from_cycle
```

A Figura 19 ilustra o processo de contração de ciclo:

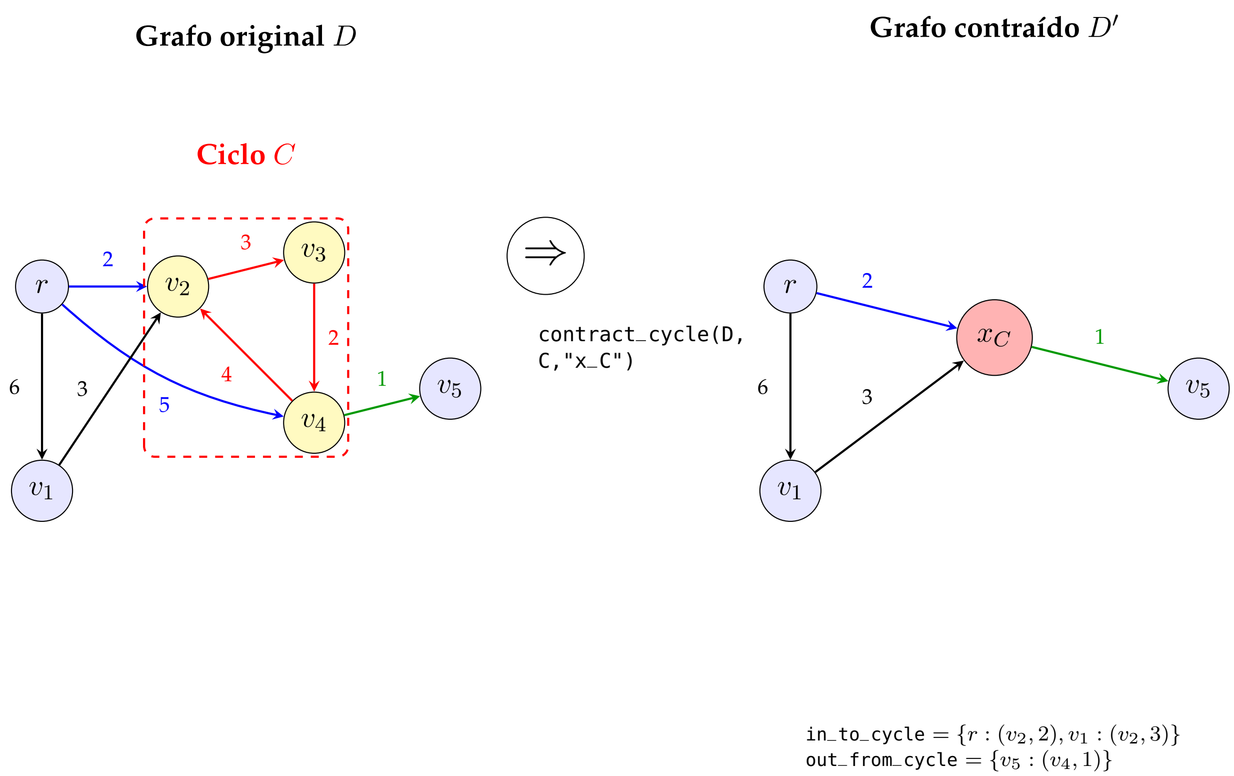


Figura 19 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, digrafo original D com ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ (em amarelo). Vértices externos r, v_1 e v_5 têm arcos conectando ao ciclo: r envia arco para v_2 (peso 2) e v_4 (peso 5); v_4 envia arco para v_5 (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice x_C (vermelho). Os arcos de entrada são redirecionados: (r, x_C) recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). O arco de saída (x_C, v_5) mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão.

A função de deteção de ciclo e a de contração juntas implementam os passos 2 e 3 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passos 2 e 3 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 2: Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0. Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.

Passo 3: Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). **Contração:** contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C,\ w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C,\ v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

1.3.7 Remoção de arco interno:

Esta função é invocada durante a fase de reexpansão do ciclo contraído, após a chamada recursiva devolver com a arborescência ótima T' do digrafo contraído. Quando o supervértice x_C é expandido de volta para o ciclo original C, um arco externo (u, v) é adicionado conectando um vértice externo u a um vértice v dentro do ciclo. Como o ciclo C originalmente continha exatamente um arco entrando em cada um de seus vértices (formando um ciclo fechado), e agora v recebe um arco adicional vindo do exterior, esse vértice teria grau de entrada 2, violando a propriedade fundamental de arborescência (cada vértice não-raiz deve ter exatamente uma entrada). Para restaurar essa propriedade, a função remove o arco interno que anteriormente entrava em v, mantendo apenas o novo arco externo. Essa remoção "quebra"o ciclo no ponto de entrada, transformando-o em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore.

A função recebe como entrada o ciclo `C` e o vértice de entrada `v`. A implementação utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o predecessor de `v` dentro do ciclo (linha 2): a expressão `(u for u, _ in C.in_edges(v))` itera sobre os arcos de entrada de `v`, extraindo apenas o vértice origem `u` (ignorando metadados com `_`), e `next` devolve o primeiro (e teoricamente único) predecessor. Em seguida, remove o arco `(predecessor, v)` do ciclo usando o método `remove_edge` (linha 3).

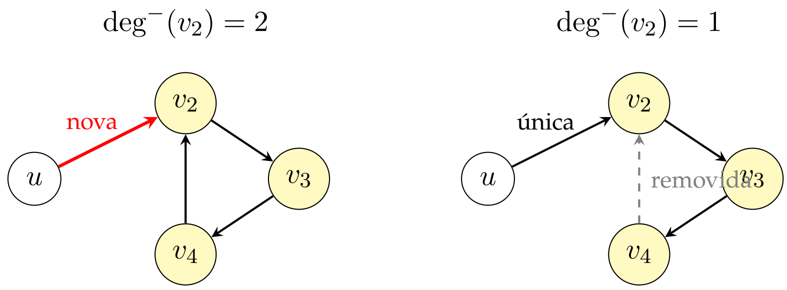
A função modifica diretamente o subdigrafo `C` e não devolve valor. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, dominada pela operação de busca dos arcos de entrada, embora em ciclos simples isso seja tipicamente $O(1)$ pois cada vértice tem exatamente um predecessor.

Remover arco interno na reexpansão

Remove o arco interno que entra no vértice de entrada `v` do ciclo `C` durante a reexpansão, pois `v` passa a receber um arco externo, e manter ambos violaria a propriedade de arborescência.

```python
def remove_edge_cycle(C: nx.DiGraph, v):
    predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)))
    C.remove_edge(predecessor, v)
```

A Figura 20 ilustra o objetivo da função:



Ciclo C após adicionar aresta externa (u, v_2)

Após remover aresta interna (v_4, v_2)

Figura 20 – Remoção de arco interno durante reexpansão. À esquerda, ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ após adicionar arco externo (u, v_2) vindouro da arborescência T': o vértice v_2 tem grau de entrada 2 (arco externo vermelho de u e arco interno do ciclo vindo de v_4), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover o arco interno (v_4, v_2): o vértice v_2 passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado"no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. O arco removido é mostrado tracejado em cinza.

1.3.8 Procedimento principal (recursivo):

Agora apresentaremos a função principal que orquestra todas as funções auxiliares descritas anteriormente no fluxo completo do algoritmo descrito por Chuliu-Edmonds. A função recebe como entrada um digrafo ponderado `D`, o vértice raiz `r0`, e um parâmetro `level` (padrão 0) usado para rotular supervértices de acordo os distintos níveis recursivos.

A implementação segue a estrutura do algoritmo:

Preservação do digrafo original (linha 2):

Cria uma cópia `D_copy = D.copy()` para preservar os pesos originais e chamamos uma função de cast() para garantir que o tipo seja `nx.DiGraph`, pois o método `copy()`

devolve um tipo `nx.Graph`. A cópia é necessária porque as operações de normalização e contração modificam os pesos dos arcos diretamente e precisamos preservar os dados originais para restaurar os custos corretos na arborescência final. A complexidade é $O(m+n)$ para copiar o digrafo, onde m é o número de arcos e n o número de vértices.

Normalização e construção de A_0 (linhas 3–6):

Itera sobre todos os vértices não-raiz (linhas 3–5), chamando `reduce_weights(D_copy, v)` para cada um. Após normalizar todos os vértices, constrói A_0 (linha 6) chamando `get_Azero(D_copy, r0)`, que seleciona um arco de custo reduzido zero entrando em cada vértice não-raiz.

Verificação de aciclicidade — caso base (linhas 7–10):

Verifica se A_0 é uma arborescência válida usando `nx.is_arborescence(A_zero)` (linha 7). Caso sim, restaura os pesos originais de `D` para cada arco de A_0 (linhas 8–9) e devolve `A_zero` como solução (linha 10). A função `nx.is_arborescence` testa conectividade, aciclicidade e o grau de entrada correto simultaneamente. Precisamos verificar essa condição porque, se A_0 for acíclico, já encontramos a arborescência ótima e não há necessidade de contração ou recursão. Essa verificação é portanto o caso base da recursão.

Contração e resolução recursiva — caso recursivo (linhas 11–14):

Essa operação começa detectando-se o ciclo C ao chamar `find_cycle(A_zero)` (linha 11). Em seguida é criado um rótulo `cl = f"contracted_{level}"` para o supervértice (linha 12) para identificar o ciclo contraído. Na linha 13, a função `contract_cycle(D_copy, C, contracted_label)` é chamada para contrair o ciclo. e modifica `D_copy` diretamente criando o digrafo contraído D' e devolve os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` que serão usados na reexpansão. Na linha 14 chamamos recursivamente `chuliu_edmonds(D_copy, r0, level + 1)` para resolver o problema no digrafo contraído, incrementando o nível recursivo. A arborescência ótima F' do digrafo contraído é devolvida e armazenada em `F_prime`.

Reexpansão do ciclo contraído (linhas 15–28):

Esse processo começa identificando o arco externo que entra no supervértice (linha 15) usando `next(iter(F_prime.in_edges(cl, data=True)))` para obter o primeiro arco de entrada em `cl`, desempacotando na forma `(u, _, _)` onde `u` é o vértice externo que conecta ao ciclo, é necessário chamar a função `cast()` para garantir o tipo correto, pois `in_edge` devolve um iterador de tuplas genéricas. O vértice externo `u` é extraído (linha 16). Na linha 17, extrai-se v com `v = in_to_cycle[u]` para identificar qual vértice do ciclo recebe a conexão externa; em seguida, chama-se `remove_edge_cycle(C, v)` (linha 18) para eliminar o arco interno que entrava em v, quebrando o ciclo no ponto de entrada e restaurando a propriedade de arborescência.

Na linha 19, o arco externo `(u, v)` é adicionado a F'. E nas linhas 20–21, todos os arcos internos do ciclo C são adicionados a F' para reconstruir a estrutura interna do ciclo. Em seguida, itera-se sobre os arcos que saem do supervértice `cl` em F' e para cada arco `(cl, z)`, identifica-se o vértice original do ciclo `u_cycle` usando `out_from_cycle[z]` e adiciona-se o arco `(u_cycle, z)` a F', restaurando as conexões de saída do ciclo (linha 22–24).

Finalmente, o supervértice `cl` é removido de F' (linha 25) e os pesos originais de `D` são restaurados para todos os arcos em F' (linhas 26–27). No final, a arborescência resultante F' é devolvida (linha 28).

O código completo da função principal é apresentado a seguir:

Procedimento principal (recursivo)

Implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva para encontrar a r-arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado `D` *com raiz* `r0`*. Normaliza custos, constrói* A_0*, detecta ciclos e, se houver, contrai em supervértice, resolve recursivamente no digrafo reduzido e reexpande, restaurando a arborescência ótima no digrafo original. Devolve um* `nx.DiGraph` *contendo exatamente* $|V| - 1$ *arcos com grau de entrada 1 para cada vértice exceto a raiz.*

```
1  def chuliu_edmonds(D: nx.DiGraph, r0: str,level=0):
2      D_copy = cast(nx.DiGraph, D.copy())
3      for v in D_copy.nodes:
4          if v != r0:
5              reduce_weights(D_copy, v)
6      A_zero = get_Azero(D_copy, r0)
7      if nx.is_arborescence(A_zero):
8          for u, v in A_zero.edges:
9              A_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
10         return A_zero
11     C = find_cycle(A_zero)
12     cl = f"\n n*{level}" # contracted label
13     in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(D_copy, C, cl)
14     F_prime = chuliu_edmonds(D_copy, r0,level + 1)
15     in_edge = next(iter(F_prime.in_edges(cl, data=True)))
```

```
16     u, _, _ = cast(tuple, in_edge)
17     v, _ = in_to_cycle[u]
18     remove_edge_cycle(C, v)
19     F_prime.add_edge(u, v)
20     for u_c, v_c in C.edges:
21         F_prime.add_edge(u_c, v_c)
22     for _, z, _ in F_prime.out_edges(cl, data=True):
23         u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
24         F_prime.add_edge(u_cycle, z)
25     F_prime.remove_node(cl)
26     for u2, v2 in F_prime.edges:
27         F_prime[u2][v2]["w"] = D[u2][v2]["w"]
28     return F_prime
```

Os passos do algoritmo implementados nesta função em conjunto com a função de remover arco interno do ciclo na reexpansão correspondem diretamente à descrição formal do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds da seguinte forma:

Passos 4 e 5 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 4 — Resolução recursiva:

- Para resolver o digrafo contraído D' aplica-se uma chamada recursiva: `F_prime = chuliu(D_copy, r0, level+1)` (linha 14 na implementação).
- Essa chamada executa novamente a normalização, construção de A_0, detecção/contração de ciclos e prossegue até que o caso base (arborescência em D') seja atingido.

Passo 5 — Reexpansão:

- Após obter `F_prime` em D', identifica-se o arco `(u, contracted_label)` que entra no supervértice; no digrafo original esse arco corresponde a `(u,v)` com `v = in_to_cycle[u]`.
- Remove-se o arco interno que entrava em `v` (quebrando o ciclo) — função `remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)` —, adiciona-se o arco externo `(u,v)` e reintegram-se os demais arcos de C; saídas do ciclo são tratadas via `out_from_cycle` (implementado nas linhas 15–28).
- O resultado é uma arborescência em D com pesos originais restaurados.

Aqui finalizamos a descrição detalhada da implementação do algoritmo de

Chu–Liu/Edmonds. A seguir, apresentamos um exemplo completo de execução do algoritmo em um digrafo específico, ilustrando cada etapa do processo.

Exemplo de execução do algoritmo

Aqui ilustraremos cada fase do processo: normalização, construção de A_0, detecção de ciclos, contração, resolução recursiva e reexpansão a partir do digrafo inicial mostrado na Figura 21.

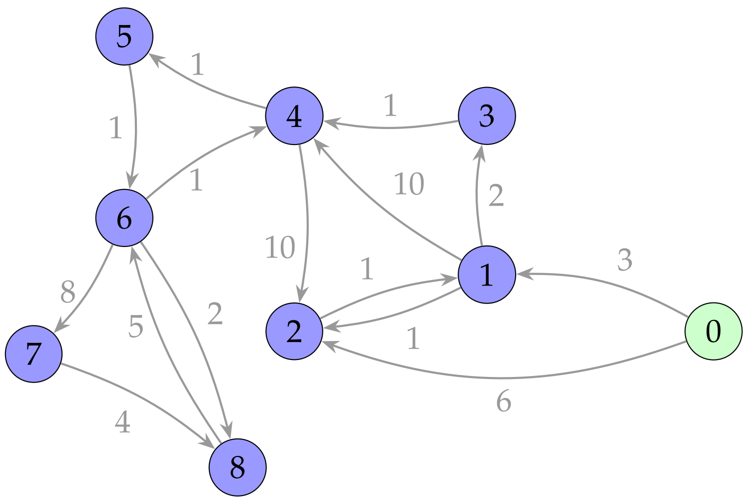


Figura 21 – digrafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O digrafo contém 9 vértices e múltiplos arcos com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arcos que entram na raiz, porém não há nenhum neste caso, logo não existe necessidade de alterar o digrafo.

O primeiro passo do nosso algoritmo seria remover os arcos que entram na raiz (vértice 0), porém não há nenhum nesse caso, logo não existe a necessidade de alterar o digrafo.

O próximo passo é normalizar os pesos dos arcos de entrada para cada vértice. Nessa etapa, para cada vértice v (exceto a raiz), o algoritmo encontra o arco de menor peso que entra em v e subtrai esse menor peso de todos os arcos que entram em v (isso serve para zerar o peso do arco mínimo de entrada em cada vértice).

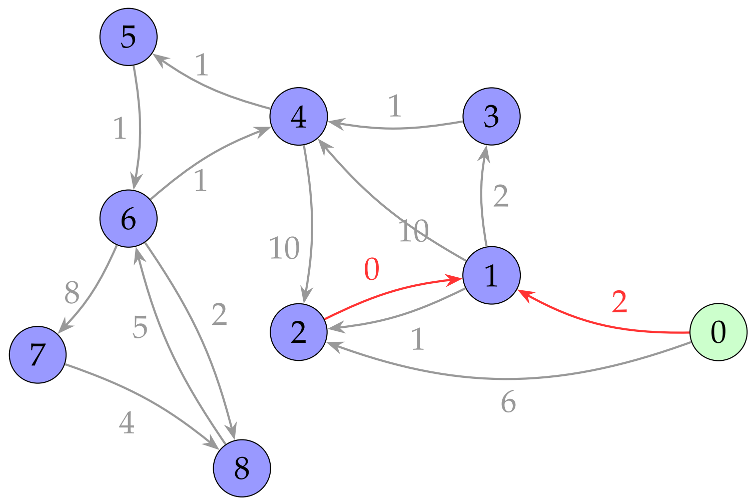


Figura 22 – Normalização parcial dos arcos de entrada para o vértice 1. Os arcos de entrada são $(0 \to 1)$ com peso original 3 e $(2 \to 1)$ com peso original 1. Elegendo o arco $(2 \to 1)$ como o de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todos os arcos de entrada: $(0 \to 1)$ passa de peso 3 para 2, e $(2 \to 1)$ passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices.

Com os pesos normalizados, o próximo passo é construir A_0: para isso, selecionamos para cada vértice o arco de custo reduzido zero de entrada. Detectamos um ciclo em A_0, formado pelos vértices $\{1, 2\}$. Portanto, precisamos contrair esse ciclo em um supervértice $n * 0$.

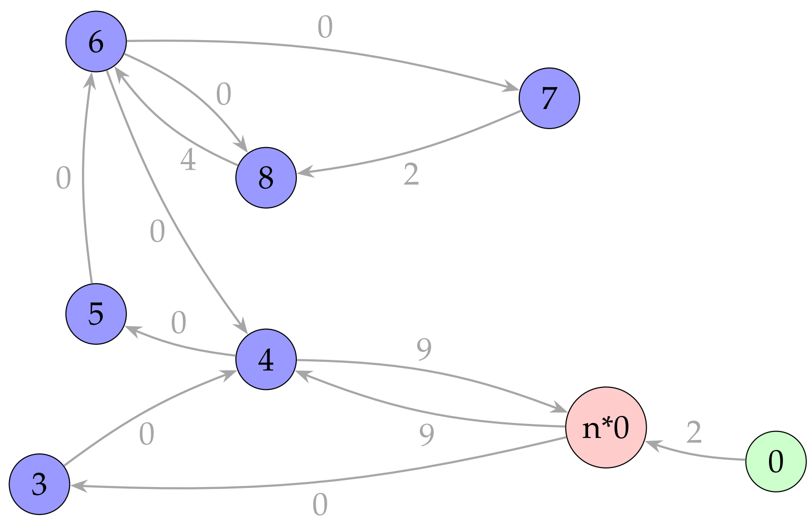


Figura 23 – digrafo contraído após detecção do ciclo $C = \{1, 2\}$ em A_0. O ciclo foi contraído no supervértice $n * 0$ (destacado em vermelho). Os arcos que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionados para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ para arcos de entrada e $c'(x_C, v) := c(w, v)$ para arcos de saída.

Agora, repetimos o processo recursivamente no digrafo contraído até obter uma arborescência válida.

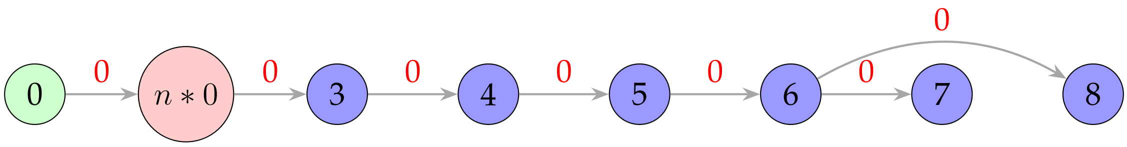


Figura 24 – Arborescência ótima F' obtida no digrafo contraído. todos os arcos selecionados têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o digrafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente um arco de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como F' é acíclico, alcançamos o caso base da recursão.

Após validarmos que A_0 não possui mais ciclos e forma uma arborescência, iniciamos o processo de reexpansão do ciclo contraído para obter a arborescência final no digrafo original. Adicionamos o arco de entrada ao ciclo $(0,1)$, os arcos internos do ciclo modificado $(1,2)$, e os arcos de saída $(1,3)$, chegando a uma arborescência válida.

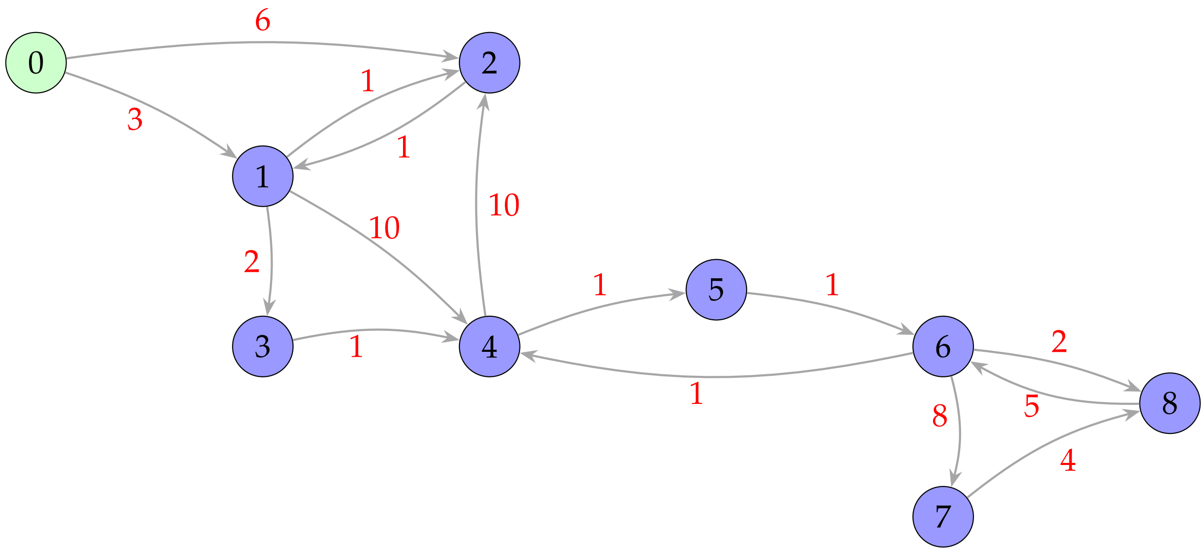


Figura 25 – Arborescência ótima final no digrafo original com pesos restaurados. O supervértice $n*0$ foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com o arco externo $(0,1)$ escolhido pela solução recursiva conectando ao ciclo. O arco interno $(2,1)$ do ciclo original foi removido para manter a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arcos, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0.

1.3.9 Correspondência entre teoria e implementação

A implementação em Python segue fielmente os cinco passos da descrição teórica do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds apresentada na Seção anterior. A tabela abaixo estabelece o paralelo direto entre cada passo teórico e sua realização no código:

Descrição Teórica	Implementação Python

Passo 1: Normalização e construção de A_0
Para cada $v \neq r$, escolha
$a_v \in \arg\min_{(u,v)\in A} c(u,v)$.
Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.
	Linhas 3–6:
	`for v in D_copy.nodes:`
	`  reduce_weights(D_copy, v)`
	`A_zero = get_Azero(D_copy, r0)`
	Calcula $y(v)$ e cria custos reduzidos, depois constrói A_0 selecionando arcos de custo zero.

Passo 2: Verificação de aciclicidade (caso base)
Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0. Por Obs. 4.36 de (KLEINBERG; TARDOS, 2006), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.
	Linhas 7–10:
	`if nx.is_arborescence(A_zero):`
	`  [restaura pesos originais]`
	`  return A_zero`
	Testa conectividade, aciclicidade e grau de entrada correto simultaneamente.

Passo 3: Contração de ciclo
Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). Contraia C em supervértice x_C e defina custos c' por:
$c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$
$c'(x_C, v) := c(w, v)$
Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.
	Linhas 11–13:
	`C = find_cycle(A_zero)`
	`label = f"contracted_{level}"`
	`in_to_cycle, out_from_cycle =`
	`  contract_cycle(D_copy, C, label)`
	Implementa as fórmulas de ajuste de custos e modifica `D_copy` para criar D'.

Passo 4: Resolução recursiva
Resolva recursivamente em D', obtendo arborescência ótima F'.
	Linha 14:
	`F_prime = chuliu(`
	`  D_copy, r0, level+1)`
	Chamada recursiva resolve o problema no digrafo contraído.

Passo 5: Reexpansão
Expanda x_C para o ciclo original C. Se $(u, x_C) \in F'$, adicione (u, v) onde v é o vértice do ciclo mapeado por u, remova o arco interno entrando em v, e reintegre demais arcos de C. Restaure custos originais.
	Linhas 15–28:
	`v = in_to_cycle[u]`
	`remove_internal_edge_to_cycle_entry(C,`
	`v)`
	`F_prime.add_edge(u, v)`
	`F_prime.add_edges_from(C.edges)`
	`[processa saídas, remove supervértice]`
	`[restaura pesos originais]`

Tabela 1 – Correspondência entre os cinco passos teóricos do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds e sua implementação em Python. Cada linha da coluna direita mostra a tradução direta dos conceitos matemáticos da coluna esquerda em operações concretas sobre grafos.

Esta correspondência demonstra que a implementação não é uma aproximação ou interpretação livre da teoria, mas uma tentativa de traduzir fielmente a descrição teórica. As funções auxiliares (`reduce_weights`, `get_Azero`, `find_cycle`, `contract_cycle`, `remove_edge_cycle`) encapsulam exatamente as operações descritas na formulação teórica, preservando as propriedades de correção e complexidade do algoritmo original.

1.3.10 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode ser melhorada em termos de intuição e generalização.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica gulosa–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais[3] $y(\cdot)$, explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma mecânica operacional (normalizar $\to$ contrair $\to$ expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

[3] No contexto primal–dual, "potenciais" são valores escalares $y(v)$ atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$. Ajustar y desloca uniformemente os custos dos arcos que entram em v, sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna "apertadas" (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de corretude via cortes apertados.

2 Algoritmo de András Frank

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de András Frank, que também determina uma arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em uma abordagem primal–dual: a elevação gulosa de potenciais duais[1] e (ii) a construção de uma solução gulosa a partir dos arcos de custo reduzido zero. Diferentemente do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds, que opera diretamente sobre os custos, o método de Frank manipula potenciais duais associados aos vértices, gerando arcos *apertados* (de custo reduzido zero) que formam a arborescência ótima. O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

2.1 O algoritmo

O algoritmo de András Frank também recebe uma tripla (D, c, r), em que $D = (V, A)$ é um digrafo, $c\colon A \to \mathbb{R}$ é uma função custo e $r \in V$ é a raiz, sob a hipótese de que D admite ao menos uma r-arborescência. O algoritmo devolve uma r-arborescência c-mínima de D.

Assim como no capítulo anterior, adotamos a terminologia de **r-digrafo ponderado** para uma tripla (D, c, r) em que (D, c) é um digrafo ponderado, r é um vértice de D, $\delta^-(r) = \varnothing$ e D possui uma r-arborescência.

Vamos desenvolver as ideias do algoritmo utilizando o mesmo dígrafo que apresentamos no capítulo anterior.

Abordagem Primal–Dual

Considere novamente o dígrafo D da figura a seguir, com custos nos arcos.

O algoritmo de Frank utiliza **potenciais** $y : V \to \mathbb{R}$ associados aos vértices para definir custos reduzidos nos arcos. Para cada arco $a = (u, v) \in A$, o **custo y-reduzido** é dado por

$$c_y(a) := c(a) - y(v).$$

Note que, diferentemente da redução do capítulo anterior (onde subtraíamos o mínimo custo de entrada em cada vértice), aqui o potencial $y(v)$ é uma variável dual que será

[1] **Potencial dual** é uma variável associada a cada vértice, que representa um "desconto"aplicado ao custo dos arcos que entram nesse vértice e servem para ajustar os custos de modo que certas restrições fiquem "apertadas", - satisfeitas com igualdade, ou seja, o valor da variável atinge exatamente o limite imposto pela restrição.

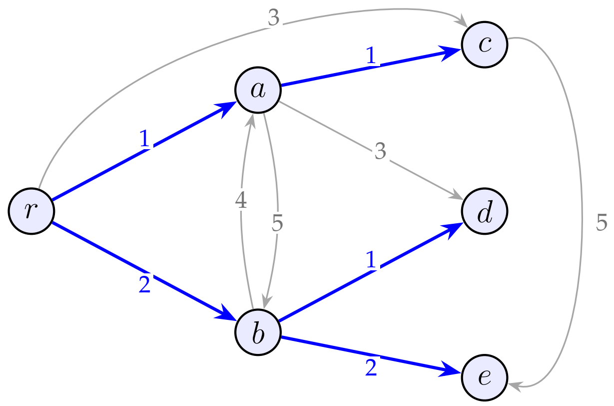


Figura 26 – O dígrafo D com custos nos arcos. Os arcos em azul formam a r-arborescência de custo mínimo T (custo total = 7).

ajustada pelo algoritmo.

Um arco a é dito **apertado** (ou **tight**) se $c_y(a) = 0$, isto é, se $c(a) = y(\text{head}(a))$. A ideia central do algoritmo de Frank é:

1. Elevar os potenciais $y(v)$ para cada $v \neq r$ até que cada vértice tenha ao menos um arco apertado entrando nele.

2. Construir a arborescência ótima usando apenas arcos apertados.

Elevação de Potenciais

Inicialmente, definimos $y(v) = 0$ para todo $v \in V$. Para cada vértice $v \neq r$, calculamos

$$\Delta(v) := \min\{\, c(a) : a \in \delta^-(v) \,\} - y(v).$$

O valor $\Delta(v)$ representa quanto precisamos elevar $y(v)$ para que exista ao menos um arco de custo reduzido zero entrando em v.

Vamos ilustrar esse processo no dígrafo D.

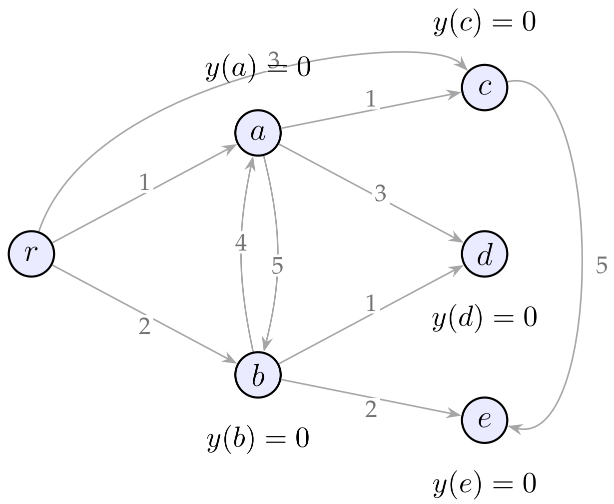


Figura 27 – Dígrafo D com potenciais iniciais $y(v) = 0$ para todo $v \in V$.

Calculamos $\Delta(v)$ para cada vértice $v \neq r$:

$$\begin{aligned}
\Delta(a) &= \min\{1, 4\} - 0 = 1, \\
\Delta(b) &= \min\{2, 5\} - 0 = 2, \\
\Delta(c) &= \min\{3, 1\} - 0 = 1, \\
\Delta(d) &= \min\{3, 1\} - 0 = 1, \\
\Delta(e) &= \min\{2, 5\} - 0 = 2.
\end{aligned}$$

Elevamos cada potencial:

$$\begin{aligned}
y(a) &\leftarrow y(a) + \Delta(a) = 0 + 1 = 1, \\
y(b) &\leftarrow y(b) + \Delta(b) = 0 + 2 = 2, \\
y(c) &\leftarrow y(c) + \Delta(c) = 0 + 1 = 1, \\
y(d) &\leftarrow y(d) + \Delta(d) = 0 + 1 = 1, \\
y(e) &\leftarrow y(e) + \Delta(e) = 0 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

Após a elevação, os custos reduzidos $c_y(a) = c(a) - y(\mathrm{head}(a))$ são:

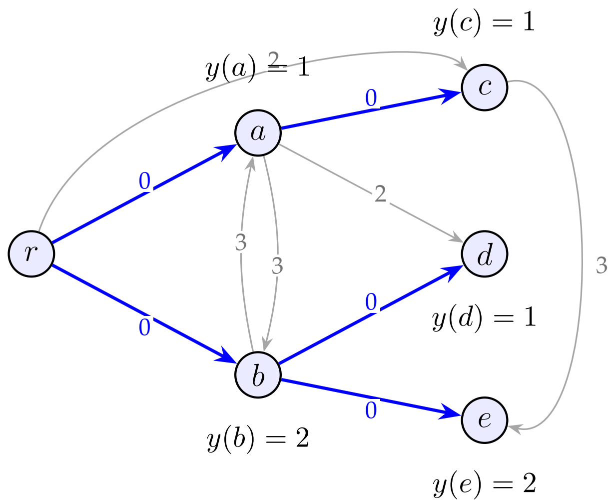


Figura 28 – Dígrafo após elevação de potenciais. Arcos em azul são apertados ($c_y = 0$); arcos em cinza têm custo reduzido positivo.

Observe que cada vértice $v \neq r$ possui agora ao menos um arco apertado entrando nele. Mais ainda: neste exemplo, os arcos apertados formam uma r-arborescência!

Construção da Arborescência

Se os arcos apertados formam uma r-arborescência, então encontramos a solução ótima. Caso contrário, os arcos apertados contêm ciclos, e precisamos tratá-los adequadamente.

No nosso exemplo, os arcos apertados são:

$$H = \{\, (r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e) \,\}.$$

Esses arcos formam a r-arborescência T de custo mínimo.

Para verificar a otimalidade, note que uma propriedade fundamental dos potenciais duais é:

Proposição 2.1. *Para toda função $y : V \to \mathbb{R}$ com $y(r) = 0$, uma r-arborescência T é c-mínima em D se, e somente se, todos os arcos de T são apertados (i.e., $c_y(a) = 0$ para todo $a \in T$) e $c_y(a) \geq 0$ para todo $a \in A$.*

Prova. Seja F uma r-arborescência qualquer. Para cada $v \in V \setminus \{r\}$, seja a_v o único arco de F que entra em v. Então

$$\begin{aligned} c(F) &= \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(a_v) \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{r\}} \big(c_y(a_v) + y(v)\big) \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c_y(a_v) + \sum_{v \in V \setminus \{r\}} y(v). \end{aligned}$$

Como a soma $\sum_{v \in V \setminus \{r\}} y(v)$ é constante para todas as r-arborescências, minimizar $c(F)$ equivale a minimizar $\sum_v c_y(a_v)$. Se todos os arcos de T são apertados e $c_y(a) \geq 0$ para todo a, então $\sum_v c_y(a_v^T) = 0 \leq \sum_v c_y(a_v^F)$ para qualquer F, provando que T é ótima. $\square$

No nosso exemplo, todos os arcos de T são apertados e $c_y(a) \geq 0$ para todo arco $a \in A$, portanto T é a r-arborescência de custo mínimo.

Tratamento de Ciclos

Em geral, após a elevação de potenciais, os arcos apertados podem conter ciclos. Nesse caso, o algoritmo de Frank procede de forma similar ao de Chu–Liu–Edmonds: contrai cada ciclo apertado em um supervértice, resolve o problema recursivamente no dígrafo contraído, e depois reexpande a solução.

Vamos ilustrar esse processo com um exemplo modificado. Suponha que adicionamos o arco (c, a) com custo 1 ao dígrafo original:

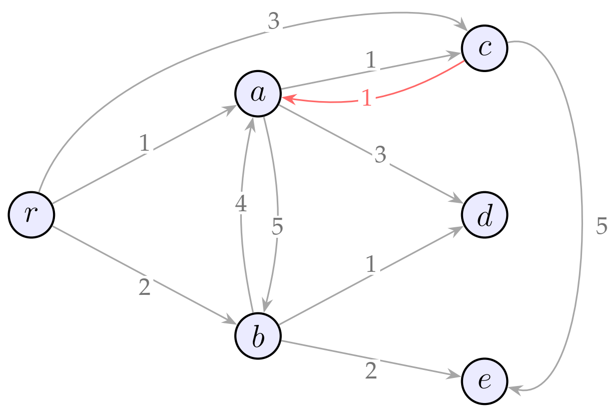


Figura 29 – Dígrafo modificado com o arco (c, a) de custo 1 (em vermelho).

Após a elevação de potenciais com $y(a) = 1, y(c) = 1$, o arco (c, a) torna-se apertado: $c_y(c, a) = 1 - 1 = 0$.

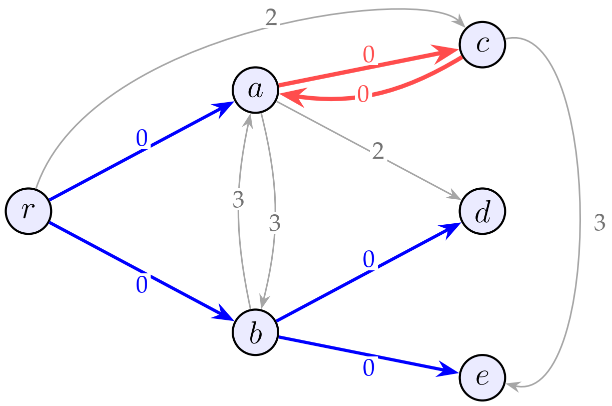


Figura 30 – Arcos apertados após elevação. O ciclo $C = (a, c, a)$ é destacado em vermelho.

Nesse caso, contraímos o ciclo $C = (a, c)$ em um supervértice x_C, ajustamos os custos dos arcos incidentes, e resolvemos o problema no dígrafo contraído. A reexpansão é feita removendo um arco do ciclo para manter a estrutura de arborescência, de forma análoga ao algoritmo de Chu–Liu–Edmonds.

Resumo do Algoritmo

O algoritmo de András Frank pode ser resumido da seguinte forma:

1. **Inicialização:** Defina $y(v) = 0$ para todo $v \in V$.
2. **Elevação de potenciais:** Para cada $v \neq r$, calcule $\Delta(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\} - y(v)$ e atualize $y(v) \leftarrow y(v) + \Delta(v)$.
3. **Identificação de arcos apertados:** Forme o conjunto $H = \{a \in A : c_y(a) = 0\}$.
4. **Verificação:** Se H contém uma r-arborescência, devolva-a.
5. **Contração de ciclos:** Caso contrário, identifique um ciclo C em H, contraia C em um supervértice, ajuste os potenciais e custos, e resolva recursivamente.
6. **Reexpansão:** Após obter a solução no dígrafo contraído, reexpanda removendo um arco do ciclo para formar a r-arborescência ótima no dígrafo original.

Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 33 e 42.

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

Anexos

ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.