

# Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC  
Centro de Matemática, Computação e Cognição

26 de novembro de 2025



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Aplicação Web
- 6 Conclusões

# O Problema

Encontrar uma  $r$ -Arborescência Geradora de Custo Mínimo

Dado um  $r$ -digafo ponderado  $(D, w, r)$ :

- Encontrar uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$

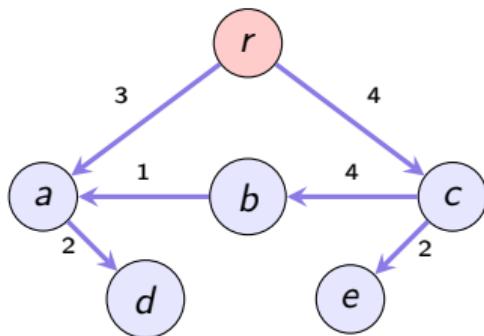
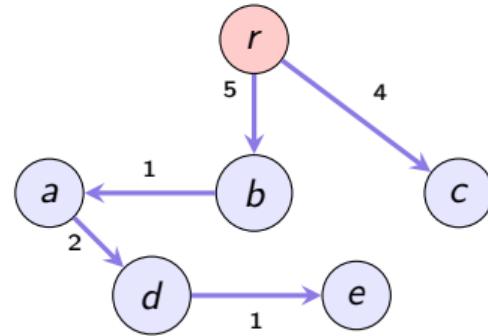
**Algoritmos estudados:**

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)

# Exemplo: $r$ -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 $r$ -Arborescência Geradora

Geradora Mínima

Custo: 16

Custo: 13

# Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado  $(D, w, r)$

chu-liu-edmonds( $(D, w, r)$ ):

- ① **Reduzir custos:** para cada vértice  $v \neq r$ , subtrair  $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- ② **Construir  $D_0$ :** escolhendo um arco  $a_v$  de custo reduzido zero para cada  $v \neq r$
- ③ **Verificar:** se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência  $\Rightarrow$  **devolver**  $D_0$   
Caso contrário:
- ④ **Contração:** encontrar ciclo  $C$  em  $D_0$  e contrair
- ⑤ **Chamada recursiva:** Seja  $D' = D/C$  e  $w' = w_\lambda/C$ . Calcular  $T' =$  chu-liu-edmonds( $D', w', r$ )
- ⑥ **Devolver:** expandir( $T'$ )

# Escolha Gulosa

## Definição:

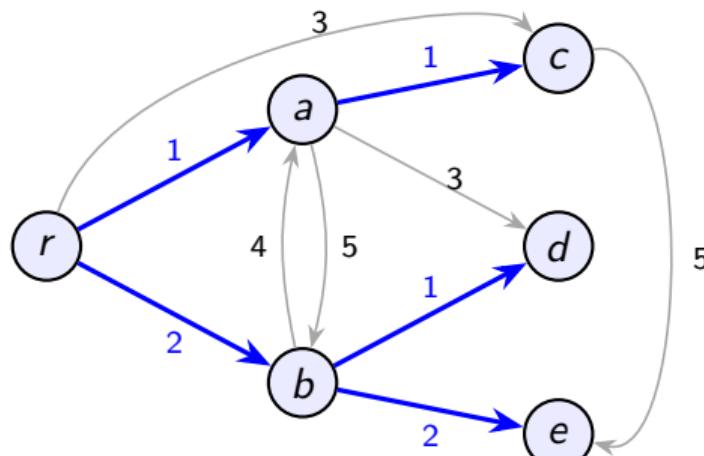
Para cada  $v \neq r$ , escolher um arco  $a_v$  de custo mínimo que entra em  $v$ :

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

## Propriedade:

Se  $T$  é uma  $r$ -arborescência, então  $T$  tem custo mínimo.

Prova: Para qualquer outra  $r$ -arborescência  $F$ , temos  $w(T) \leq w(F)$ .



## Resultado

$T = \{(r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e)\}$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo!

# E quando a escolha gulosa falha?

## Problema:

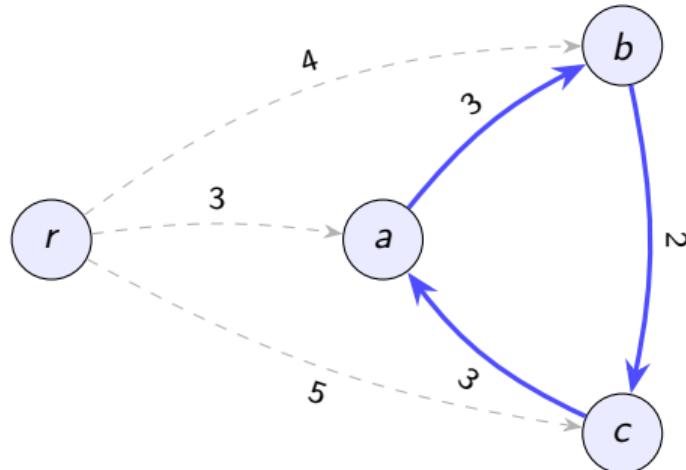
A escolha gulosa pode produzir um conjunto  $T$  que *não* é uma  $r$ -arborescência.

## Exemplo:

Os arcos de custo mínimo formam um ciclo  $(a, b, c, a)$  sem alcançar  $r$ .

## Solução:

- ① Reduzir custos
- ② Identificar ciclos
- ③ Contrair ciclos
- ④ Resolver recursivamente



Arcos azuis formam um **ciclo**!

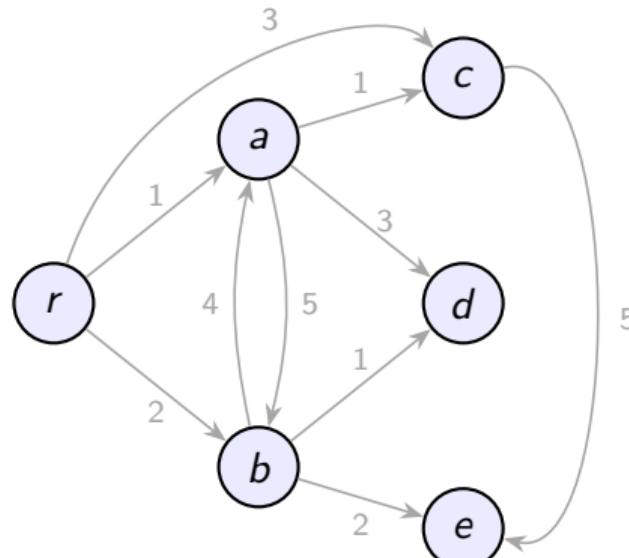
# Passo 1: Redução de Custos

## Objetivo

Encontrar a  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo através do algoritmo de Chu-Liu-Edmonds.

## Pontos principais:

- Redução de custos por vértice;
- Construção de  $D_0$  com arestas de custo zero;
- Contração de ciclos e recursão.



# Custos Reduzidos

## Definição:

Para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ :

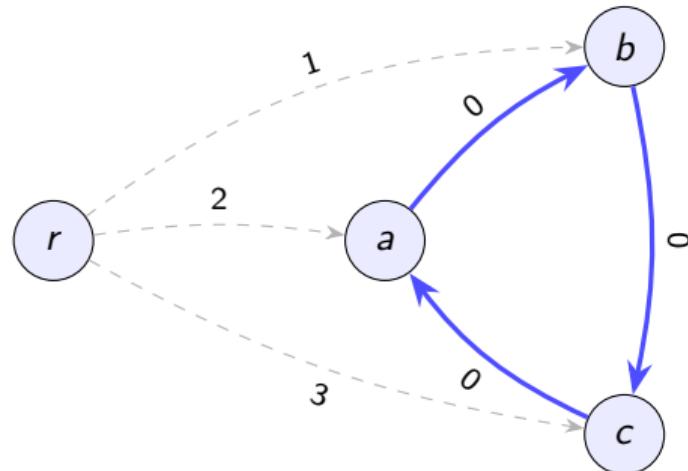
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custo  $\lambda$ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

## Propriedade importante:

$T$  é ótima em  $(D, w)$  se, e somente se,  $T$  é ótima em  $(D, w_\lambda)$ .



Arcos do ciclo têm custo zero!

# Passo 1: Redução de Custos

**Escolha gulosa:**

Para cada  $v \neq r$ , calcular:

$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

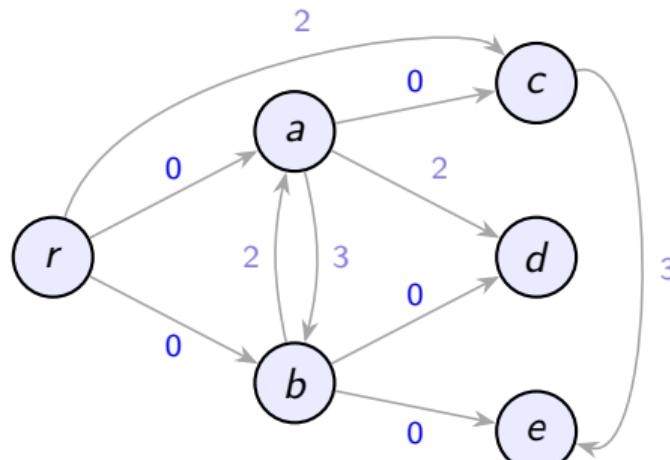
Custos  $\lambda$ -reduzidos:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

**Valores de  $\lambda$ :**

- $\lambda(a) = 1, \lambda(b) = 2$
- $\lambda(c) = 1, \lambda(d) = 1, \lambda(e) = 2$

Arcos com custo zero são candidatos para  $D_0$



## Passo 2: Construção de $D_0$

**Formação de  $D_0$ :**

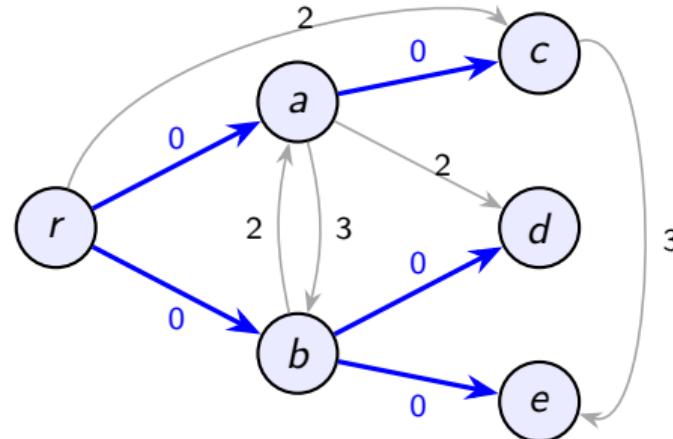
Para cada  $v \neq r$ , escolher um arco  $a_v \in \delta^-(v)$  com  $w_\lambda(a_v) = 0$

Formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

**Arcos escolhidos:**

- $(r, a), (r, b)$
- $(a, c), (b, d), (b, e)$



$D_0$  é uma  $r$ -arborescência!

Neste exemplo,  $D_0 = \{(r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e)\}$  forma uma  $r$ -arborescência.

# Contração de Ciclos

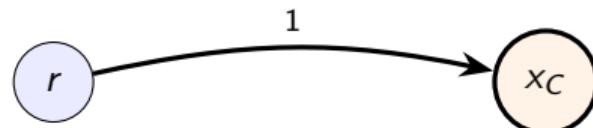
**Operação:**

Contrair ciclo  $C$  em supervértice  $x_C$ .

**Novo problema:**

$(D', w', r)$  onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$



Digrafo contraído  $D'$

**Recursão:**

Resolver problema no digrafo menor recursivamente.

**Propriedade**

Uma solução ótima em  $D'$  pode ser expandida para uma solução ótima em  $D$ .

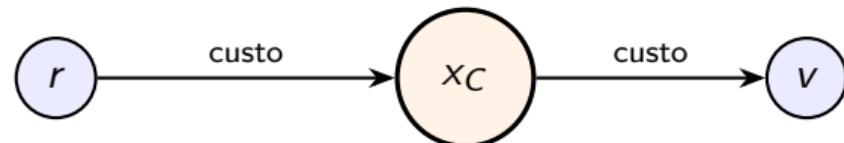
## Passo 3: Contração de Ciclos

**Quando  $D_0$  tem ciclo:**

Se após redução de custos,  $D_0$  contém um ciclo  $C$ , contraímos  $C$  em supervértice  $x_C$

*Em outras palavras:* todos os vértices de  $C$  viram um único vértice

Custos são ajustados usando os custos  $\lambda$ -reduzidos



### Chamada Recursiva

Resolvemos chu-liu-edmonds( $D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r$ )

*Em outras palavras:* aplicamos o mesmo algoritmo no digrafo menor

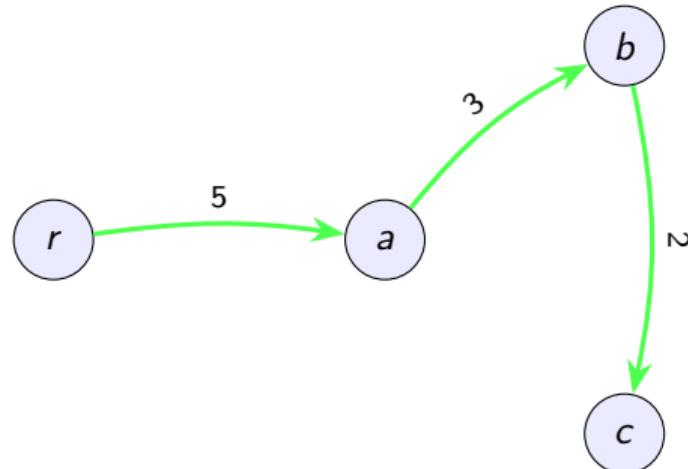
# Reexpansão da Solução

Dado:  $T'$  ótima em  $(D', w')$

Construir:  $T$  ótima em  $(D, w)$

Procedimento:

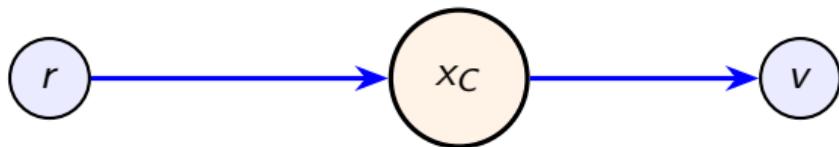
- ① Seja  $uv$  o arco de  $D$  correspondente ao arco  $ux_C$  de  $T'$
- ② Incluir  $uv$  em  $T$
- ③ Incluir todos os arcos de  $C$  exceto aquele que entra em  $v$



Resultado:  $T$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo

$r$ -arborescência final no digrafo original

## Passo 4: Chamada Recursiva



O algoritmo devolve  $T'$  (arborescência no digrafo contraído)

*Em outras palavras:* encontramos a  $r$ -arborescência ótima no grafo contraído

**Próximo passo:** expandir  $T'$  de volta para obter  $T$  no digrafo original

# Solução Final – Exemplo Original

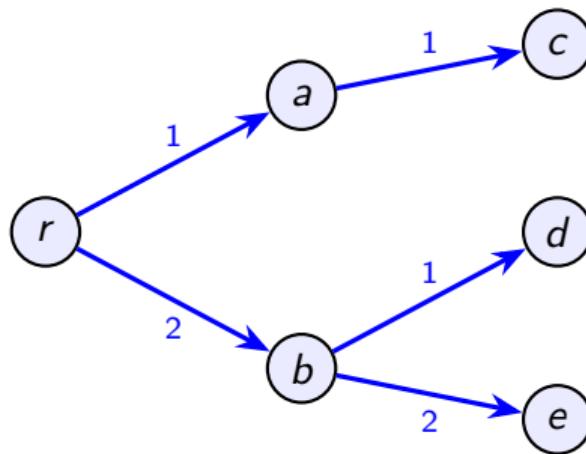
Para nosso exemplo inicial:

A escolha gulosa produziu uma  
 $r$ -arborescência diretamente!

Resultado:

- Não há ciclo
- Todos vértices alcançáveis de  $r$
- Cada vértice tem grau de entrada 1
- Solução ótima encontrada!

Custo total:  $1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7$



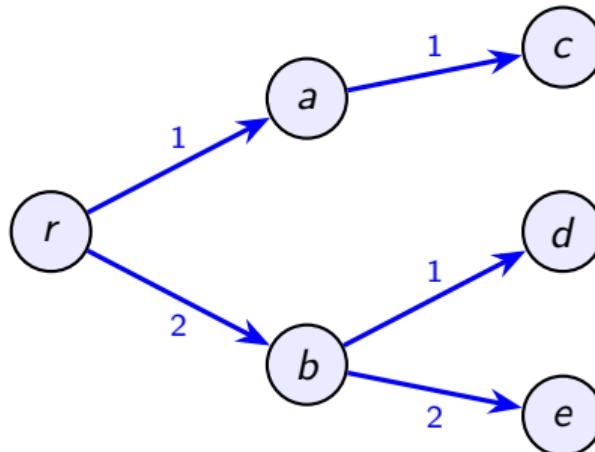
# Solução Final – Exemplo Original

Para nosso exemplo:

Como  $D_0$  já é uma  $r$ -arborescência, o algoritmo termina diretamente!

Em outras palavras:

- Não há ciclo
- Todos vértices alcançáveis de  $r$
- Cada vértice tem grau de entrada 1
- Solução ótima encontrada!



## Solução Ótima

Custo total:  $1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7$

# András Frank: Visão Geral

## Abordagem em Duas Fases

**Fase I:** Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

**Fase II:** Extrair arborescência da cobertura

### Diferencial:

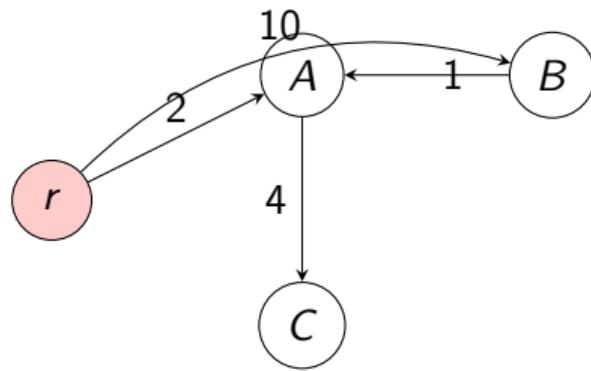
- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

### Complexidade:

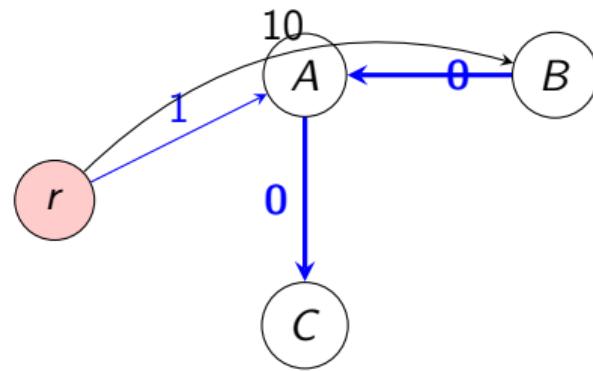
- Fase I:  $O(nm)$
- Fase II v1 (lista):  $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap):  $O(n \log n)$

# Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice  $v \neq r$ : subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

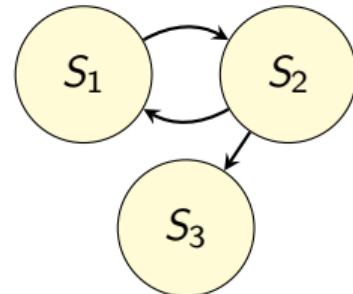
Arcos com custo zero formam o digrafo  $D_0$

# Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em  $D_0$

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



## Condição de Optimalidade

Sequência  $\lambda$  satisfaz:  $|\delta^-(X)| = 1$  para cada  $X$  em  $\lambda$

# Fase II: Construção da Arborescência

**Objetivo:** Extrair arborescência de  $D_0$  respeitando  $\lambda$

- ① Iniciar com conjunto  $R = \{r\}$
- ② Para cada  $v$  fora de  $R$ :
  - Selecionar arco  $(u, v)$  com  $u \in R$  e custo reduzido zero
  - Adicionar  $v$  a  $R$
- ③ Repetir até incluir todos os vértices

## Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

# Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios,  $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	<b>0,016 s</b>	<b>0,020 s</b>

## Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de 58,12 vezes (mediana)

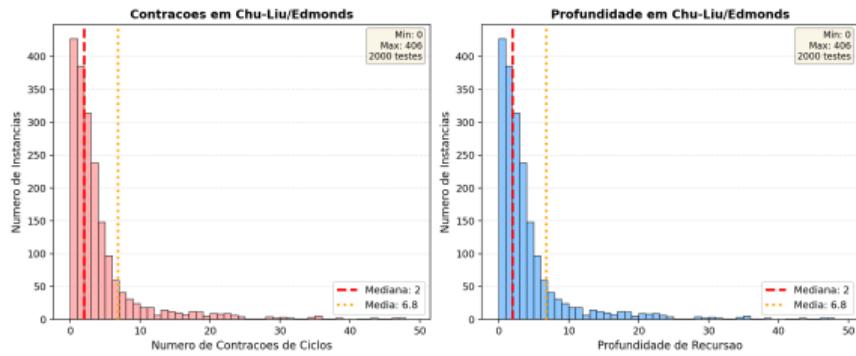
# Características Estruturais

## Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

Muito abaixo do limite teórico  $O(n)$

**Consumo de memória:** mediana 11,5 MB (Fase I)



# Motivação Didática

## Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos e difíceis de visualizar**

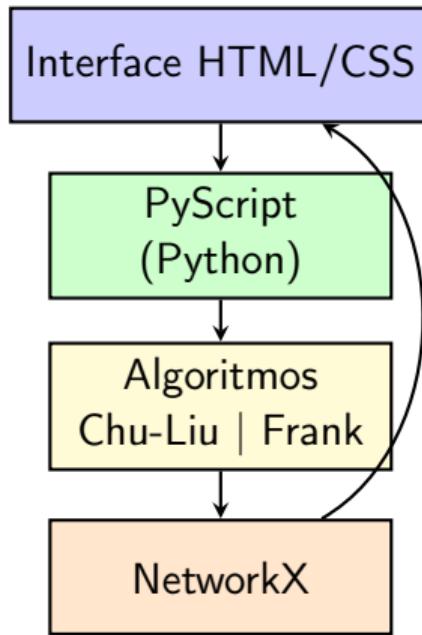
## Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

## Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

# Arquitetura da Aplicação



# Interface: Página Principal

 ArboGraph

Algoritmos para o problema da arborescência geradora mínima: uma aplicação didática interativa

- Home
- Chu-Liu-Edmonds
- András Frank (V1)
- András Frank (V2)
- Desenhe um digrafo
- Nossa dissertação

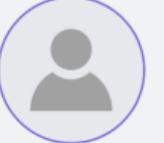
Dúvidas ?  
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

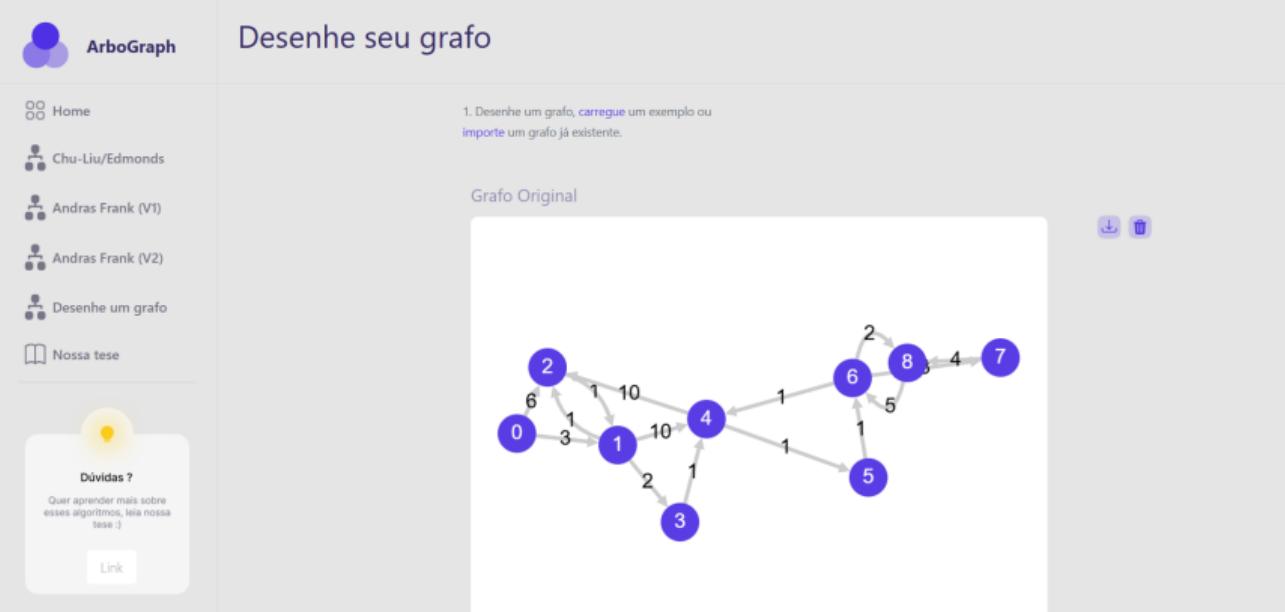
**Resumo**

Este trabalho investiga e implementa algoritmos de busca de uma  $r$ -arborescência geradora mínima em digrafos. A partir da formulação clássica e da literatura de Chu-Liu-Edmonds e também da formulação de András Frank, desenvolvemos uma aplicação web que permite: (i) desenhar ou importar um digrafo ponderado, (ii) escolher o nó raiz  $r$ , (iii) executar o algoritmo passo a passo com visualização das contrações, seleção de arcos de custo mínimo e reconstrução da arborescência, e (iv) exportar resultados e logs. A solução combina PyScript e NetworkX para a lógica algorítmica, Cytoscape para edição e visualização interativa, e Tailwind/Flowbite na interface. Como contribuição, o sistema oferece um ambiente didático que torna transparentes as decisões do algoritmo e facilita a análise e comparação de soluções em diferentes instâncias, apoiando ensino, experimentação e validação.

Integrantes do Projeto



# Interface: Desenho de Grafos



The screenshot shows the ArboGraph web application interface. On the left, there is a sidebar with the following menu items:

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (V1)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

Below the menu is a yellow button labeled "Dúvidas ?" with a tooltip: "Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)" and a "Link" button.

The main area is titled "Desenhe seu grafo" and contains instructions: "1. Desenhe um grafo, carregue um exemplo ou importe um grafo já existente." Below this is a section titled "Grafo Original" showing a directed graph with 9 nodes (0-8) and edges with weights:

```

graph LR
    0((0)) -- 3 --> 1((1))
    0((0)) -- 6 --> 2((2))
    1((1)) -- 1 --> 0((0))
    1((1)) -- 10 --> 4((4))
    1((1)) -- 2 --> 3((3))
    2((2)) -- 1 --> 1((1))
    3((3)) -- 1 --> 4((4))
    4((4)) -- 10 --> 1((1))
    4((4)) -- 1 --> 5((5))
    4((4)) -- 1 --> 6((6))
    5((5)) -- 1 --> 4((4))
    5((5)) -- 1 --> 6((6))
    5((5)) -- 1 --> 7((7))
    6((6)) -- 2 --> 8((8))
    6((6)) -- 5 --> 8((8))
    6((6)) -- 4 --> 7((7))
    7((7)) -- 4 --> 6((6))
    8((8)) -- 2 --> 6((6))
  
```

On the right side of the graph area are two small icons: a downward arrow and a trash can.

## Funcionalidades:

- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

# Interface: Chu-Liu-Edmonds



**ArboGraph**

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (V1)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

**Dúvidas ?**

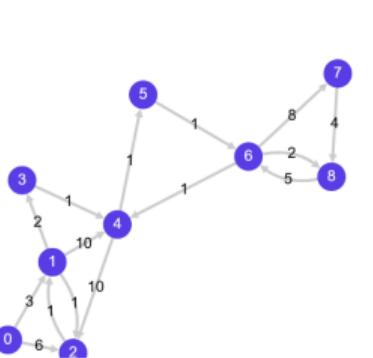
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

## Chu-Liu / Edmonds

- 1 Crie um grafo  
Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.
- 2 Escolha o nó raiz
- 3 Execute o algoritmo 

**Grafo Original**



» Passo A Passo

Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

# Interface: András Frank

- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

# Princípios de Design

## Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

## Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário



# Contribuições do Trabalho

## ① Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

## ② Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

## ③ Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário



# Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite  $O(n)$ )
  - Memória modesta: 11,5 MB

# Trabalhos Futuros

## Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

## Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

# Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>