



Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Algoritmos para o problema da arborescência  
geradora miníma: Uma aplicação didática  
interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Algoritmos para o problema da arborescência geradora  
miníma: Uma aplicação didática interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Universidade Federal do ABC

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

*Dedicatória (opcional).*

# Agradecimentos

Agradecimentos (opcional).

*“Epígrafe (opcional).”*

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

## **Algoritmos para o problema da arborescência geradora miníma: Uma aplicação didática interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Trabalho aprovado. Brasil, 24 de novembro de 2025:

---

**Prof. Dr. Mário Leston**  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Brasil  
2025

# Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r-arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

**Palavras-chave:** Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

# Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r-arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

**Keywords:** Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

# Lista de ilustrações

<p>Figura 1 – A figura ilustra um digrafo <math>D</math> cujo conjunto dos vértices é <math>\{a, b, c, d, e\}</math> e cujo conjunto dos arcos é <math>\{ab, bc, cd, de, ea, be\}</math>. . . . .</p> <p>Figura 2 – Os arcos em azul entram em um subconjunto <math>X \subseteq V(D)</math>. . . . .</p> <p>Figura 3 – Exemplo de digrafo ponderado <math>(D, w)</math>: cada arco recebe um custo real <math>w(a)</math>. . . . .</p> <p>Figura 4 – A figura ilustra um caminho simples <math>(u_0, u_1, u_2, u_3)</math> em um digrafo. . . . .</p> <p>Figura 5 – A figura ilustra um ciclo <math>(u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)</math> em um digrafo. . . . .</p> <p>Figura 6 – A figura ilustra uma <math>r</math>-arborescência. . . . .</p> <p>Figura 7 – O subdigrafo <math>T</math> (em azul) é uma arborescência geradora do digrafo <math>D</math>, que inclui tanto os arcos azuis quanto os arcos cinza. . . . .</p> <p>Figura 8 – A figura ilustra um subconjunto <math>B</math> (de arcos azuis) de custo <math>w(B) =</math> <math>2 + 1 + 3 + 4 = 10</math> visto como uma arborescência geradora de <math>D</math>. . . . .</p> <p>Figura 9 – Contração de um digrafo <math>D</math> pela partição <math>\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}</math>, em que <math>X := \{a, b\}</math>, <math>Y := \{c\}</math> e <math>Z := \{d, e\}</math>. . . . .</p> <p>Figura 10 – Contração de um subconjunto <math>X \subseteq V(D)</math> em um digrafo <math>D</math>. À es- querda, o subconjunto <math>X = \{b, c\}</math> é destacado; à direita, os vértices de <math>X</math> foram identificados em um único vértice <math>v</math>, obtendo-se o digrafo <math>D/X \rightarrow v</math>. . . . .</p> <p>Figura 11 – Contração de um digrafo ponderado <math>(D, w)</math> pela partição <math>\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}</math>, em que <math>X := \{a, b\}</math>, <math>Y := \{c\}</math> e <math>Z := \{d, e\}</math>. O peso de cada arco <math>XY</math> em <math>D/\mathcal{P}</math> é o mínimo dos pesos dos arcos de <math>D</math> que vão de um vértice de <math>X</math> para um vértice de <math>Y</math>. . . . .</p> <p>Figura 12 – Contração ponderada de um subconjunto <math>X \subseteq V(D)</math>. À esquerda, o digrafo <math>(D, w)</math> com <math>X = \{b, c\}</math> destacado. À direita, o digrafo <math>(D/X \rightarrow</math> <math>v, w/X)</math>, em que os vértices de <math>X</math> foram identificados em um único vértice <math>v</math> e cada peso <math>w/X</math> é o mínimo dos pesos dos arcos de <math>D</math> entre <math>X</math> e os demais vértices. . . . .</p> <p>Figura 13 – Componentes fortes <math>S_1, S_2, S_3</math> de um digrafo <math>D</math> e sua condensação <math>D/\mathcal{C}(D)</math>, um digrafo acíclico em que <math>S_1</math> é fonte. . . . .</p> <p>Figura 14 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma <math>r</math>-arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo. . . . .</p> <p>Figura 15 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .</p> <p>Figura 16 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .</p> <p>Figura 17 – Os arcos azuis são os arcos de <math>D_0</math>. . . . .</p>	<p>16</p> <p>17</p> <p>17</p> <p>17</p> <p>18</p> <p>18</p> <p>18</p> <p>18</p> <p>18</p> <p>19</p> <p>21</p> <p>21</p> <p>21</p> <p>22</p> <p>22</p> <p>24</p> <p>24</p> <p>25</p> <p>26</p>
---	---

Figura 18 – O caminho simples maximal $P$ inicia em $u$ e termina em $v$ . A porção $S$ de $P$ entre $u$ e $t$ é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo. ....	27
Figura 19 – Contração de um ciclo $C$ em um vértice $x_C$ . ....	27
Figura 20 – À esquerda, vértice $v$ com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar <code>reduce_weights(D, v)</code> : o menor peso 3 é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco $(u_2, v)$ (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para $D_0$ . ....	34
Figura 21 – A figura ilustra uma coleção laminar $\{A, B, C, D, E, F\}$ de conjuntos, onde $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , $B := \{4, 7, 8\}$ , $C := \{3, 5\}$ , $D := \{8\}$ , $E := \{7\}$ , $F := \{6\}$ . ....	40
Figura 22 – Um arco $a$ de peso 5 que entra nos $r$ -conjuntos $R_1$ , $R_2$ e $R_3$ com multiplididades 2, 1, e 1, respectivamente. ....	41
Figura 23 – Digrafo $D$ com raiz $r$ : arcos pretos em $A(D) \setminus F$ e arcos verdes em $F$ . As caixas tracejadas destacam os componentes fortemente conexos de $D[F]$ ; $C_1$ e $C_2$ são fontes na condensação. ....	45
Figura 24 – Distribuição de tempos: Fase I apresenta maior mediana (8,93s) e variabilidade que Chu–Liu/Edmonds (0,25s). ....	53
Figura 25 – Escalonamento temporal em função de $ A $ : crescimento aproximadamente linear. ....	53
Figura 26 – Comparação de desempenho entre implementações da Fase II. À esquerda, o gráfico de boxplot mostra a distribuição de tempo da v1 do algoritmo com mediana de 0,98s enquanto v2 reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração ( <i>speedup</i> ) mostra a distribuição concentrada entre 40 e 80 vezes, com mediana de 58,12 vezes (linha tracejada vermelha) e média de 61,30 vezes (linha pontilhada laranja). ....	54
Figura 27 – Métricas estruturais de Chu–Liu/Edmonds. À esquerda, o histograma vermelho mostra que o número de contrações (eixo horizontal) é concentrado em valores baixos — a maioria das 2000 instâncias (eixo vertical) requer menos de 20 contrações, com mediana 2 (linha tracejada) e média 6,82 (linha pontilhada). À direita, o histograma azul da profundidade de recursão exibe padrão similar. ....	54
Figura 28 – Pico de memória na Fase I: mediana 11,5 MB. ....	55
Figura 29 – Tamanho de $D_0$ versus $ V $ : relação linear confirma $ A_0  = O( V )$ . ....	55
Figura 30 – Captura de tela de <code>home.html</code> : visão geral com resumo e integrantes. ....	69
Figura 31 – Captura de tela de <code>draw_graph.html</code> : editor livre de grafos. ....	69
Figura 32 – Captura de tela de <code>tese.html</code> : visão geral com resumo e integrantes. ....	70
Figura 33 – Captura de tela de <code>chuliu.html</code> : criação de grafo, seleção de raiz e execução do algoritmo. ....	70

Figura 34 – Tripartição funcional (navegação, conteúdo interativo, guia de passos). A presença do passo a passo auxilia na compreensão sequencial do algoritmo.....	71
Figura 35 – Captura de tela de <code>andrasfrank_v1.html</code> : interface para o procedi- mento em duas fases, a tela da página <code>andrasfrank_v2.html</code> tem aparência similar. ....	71
Figura 36 – A barra lateral injeta navegação consistente; páginas de algoritmo formam trilha exploratória. ....	72

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	Justificativa	14
1.2	Objetivos	14
1.3	Estrutura do Trabalho	14
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>16</b>
2.1	Digrafos	16
2.2	Caminhos	17
2.3	Arborescências	18
2.4	Problema da arborescência de custo mínimo	19
2.5	Contração	20
2.6	Componentes fortes	22
<b>3</b>	<b>ALGORITMO DE CHU-LIU-EDMONDS</b>	<b>23</b>
3.1	O algoritmo	23
3.2	Custos reduzidos	25
3.3	Implementação em Python	31
3.3.1	Redução de custos	33
3.3.2	Construção de $D_0$	34
3.3.3	Detecção de ciclo:	35
3.3.4	Contração de um ciclo	35
3.3.5	Procedimento principal	37
<b>4</b>	<b>ALGORITMO DE ANDRÁS FRANK</b>	<b>40</b>
4.1	Preliminares	40
4.2	Fase 1 do algoritmo de Frank	42
4.3	Implementação da fase 1	46
4.4	Fase 2 do Algoritmo de Frank	47
4.5	Implementação da fase 2	49
4.6	Versão alternativa da fase 2	49
4.7	O algoritmo de Frank	51
<b>5</b>	<b>CHU-LIU – EDMONDS VS. FRANK</b>	<b>52</b>
5.1	Análise comparativa dos algoritmos	52
5.2	Conclusões	55
<b>6</b>	<b>A DIDÁTICA DO ABSTRATO</b>	<b>57</b>
6.0.1	Fundamentos cognitivos e didáticos	57

6.0.2	Lidando com grafos e digrafos .....	58
6.0.3	Visualização e interação: princípios em uso .....	59
6.1	O ecossistema de ferramentas .....	60
7	<b>A INTERAÇÃO HUMANO-COMPUTACIONAL EM AÇÃO: UMA APLICAÇÃO WEB INTERATIVA .....</b>	64
7.1	Descrição da aplicação .....	64
7.1.1	Estrutura e Funcionalidades .....	64
7.1.2	Fluxo de interação .....	65
7.1.3	Arquitetura do Sistema .....	65
7.2	Princípios de interação humano-computador .....	66
7.3	Detalhes de Implementação .....	68
7.3.1	Estrutura de arquivos .....	68
7.3.2	Páginas da Aplicação web .....	68
7.3.3	Página do Andrasfrank (v1) e Andrasfrank (v2): .....	71
7.3.4	Estrutura das páginas .....	71
7.4	Considerações Finais e Trabalhos Futuros .....	72
8	<b>CONCLUSÃO .....</b>	74
8.1	Contribuições .....	75
8.2	Limitações .....	75
8.3	Trabalhos Futuros .....	76
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	77
	<b>ANEXOS</b>	79
	<b>ANEXO A – ANEXO A .....</b>	80

# 1 Introdução

Encontrar uma *r-arborescência de custo mínimo* em grafos dirigidos é um problema estudado em ciência da computação desde os anos 1960, com formulações fundamentais apresentadas por Jack Edmonds em 1967 (??).

Essa busca dialoga com um princípio filosófico formulado na Idade Média por Guilherme de Ockham: a navalha de Occam (princípio da parcimônia), uma heurística filosófica segundo a qual, entre explicações concorrentes para um fenômeno, devemos preferir a mais simples ou a que faz menos suposições. Podemos pensar na navalha de Occam como critério de escolha entre explicações por meio de uma *teia explicativa mínima*: uma estrutura que conecta fatos ou observações com o mínimo de relações explicativas necessárias. Quando tais relações envolvem dependência ou causalidade, podemos representá-las pictograficamente como setas direcionadas entre os fatos (as hipóteses aparecem como rótulos dessas setas). Para refinar o modelo, associamos um custo a cada relação (por exemplo, o esforço para validar a relação ou a complexidade da explicação).

Encontrar a *teia explicativa mínima* equivale, nessa metáfora, a encontrar uma *r-arborescência de custo mínimo*: fixamos um vértice raiz  $r$  (a explicação inicial) e escolemos um conjunto mínimo de relações explicativas de modo que todos os fatos tenham um caminho dirigido que leve a  $r$ , minimizando o custo total das arestas.

A *r-arborescência* (também chamada *out-arborescência*) orienta as arestas para fora de  $r$ : cada vértice  $v \neq r$  tem exatamente uma aresta de entrada, e há um caminho dirigido único de  $r$  até  $v$ . Já a *r-arborescência inversa* (*in-arborescência*) orienta as arestas em direção a  $r$ : cada  $v \neq r$  tem exatamente uma aresta de saída, e de cada vértice parte um caminho dirigido único até  $r$  (??FRANK; HAJDU, 2014).

Com essa distinção em mente, este trabalho concentra-se na variante inversa. Formalmente, dado um grafo dirigido  $G = (V, E)$  com custos  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  nas arestas e um vértice raiz  $r \in V$ , procura-se uma *r-arborescência inversa* — isto é, uma árvore direcionada que atinja todos os vértices por caminhos dirigidos até  $r$  — que minimize o custo total das arestas selecionadas (cf. (??FRANK; HAJDU, 2014)).

Nosso interesse, porém, não é apenas encontrar a arborescência mínima: o percurso até ela também importa, pois revela propriedades estruturais dos digrafos e ilumina técnicas distintas de otimização. Por isso, investigamos duas rotas clássicas e complementares: (i) o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds, que opera por normalização dos custos das arestas de entrada, seleção sistemática de arestas de custo zero e contração de ciclos até obter um grafo reduzido, seguida pela reexpansão para reconstrução da solução (????); e (ii) a abordagem dual, em duas fases, de András Frank, fundamentada

em cortes dirigidos, na qual se maximiza uma função de cortes c-viável para induzir arestas de custo zero e, em seguida, extrai-se a arborescência apenas a partir dessas arestas (FRANK; HAJDU, 2014). Embora assentados em princípios distintos — contração de ciclos no plano primal versus empacotamento/dualidade por cortes —, ambos os paradigmas produzem soluções ótimas e tornam explícitas a variedade de abordagens matemáticas que podem ser empregadas para resolver o mesmo problema.

## 1.1 Justificativa

A busca por uma *r-arborescência de custo mínimo* em grafos dirigidos é um problema clássico com aplicações em diversas áreas, como redes de comunicação, planejamento de rotas, análise de dependências e modelagem de processos. Mas, não precisamos dessa justificação prática para nos interessarmos pelo problema: a riqueza estrutural dos digrafos e a variedade de técnicas algorítmicas disponíveis o tornam um excelente caso de estudo em otimização combinatória.

Do ponto de vista didático, a metáfora da “teia explicativa mínima” torna concreto o porquê de estudarmos arborescências enraizadas: ela mapeia perguntas sobre explicação, alcance e economia de recursos para estruturas dirigidas, servindo de fio condutor nas implementações e nos experimentos que apresentamos.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é analisar, implementar e comparar duas abordagens clássicas para o problema de *r-arborescência de custo mínimo* em grafos dirigidos oferecendo uma aplicação *web* interativa que facilite o entendimento e a experimentação com o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds e o método de András Frank, tornando-o acessível para estudantes e educadores.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

Resumidamente, o trabalho abrange as seguintes frentes:

1. **Definições Preliminares:** fixação de notação e conceitos fundamentais (digrafos, arborescências, custos e dualidade).
2. **Em busca da Arborescência Perdida:** motivação do problema e intuições que guiaram os algoritmos.
3. **Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:** detalhamento da abordagem primal por normalização/contração de ciclos, com ênfase em invariantes e correção.

4. **Procedimento em Duas Fases de András Frank:** detalhamento da abordagem dual por cortes c-viáveis, com ênfase em invariantes e correção.
5. **Discussão e Resultados: Chu-liu/Edmonds vs Frank:** comparação de desempenho e estrutura das soluções, com testes em larga escala.
6. **Didática do Abstrato:** discussão de desafios do ensino de matemática no ensino superior especialmente quando há o envolvimento de conceitos abstratos e como representações visuais atuam em favor da compreensão.
7. **A interação humano–computacional em ação - uma aplicação web interativa:** apresentação de conceitos em interação humano-computacional, a influência desses conceitos nas decisões tomadas para o desenvolvimento da aplicação *web* e detalhamento da implementação.
8. **Conclusão:** síntese das contribuições, limitações e trabalhos futuros.

Deste modo, o trabalho entrega implementações verificadas de Chu-Liu/Edmonds e András Frank, um visualizador *web* interativo e testes de volume que confirmam a equivalência de custos, úteis ao estudo e ao ensino de arborescências.

## 2 Preliminares

Neste capítulo, reunimos as noções básicas necessárias para compreensão completa do texto.

### 2.1 Digrafos

Começamos por introduzir a noção de digrafo. Um **digrafo**  $D$  é um par  $(V, A)$ , em que  $V$  é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** e  $A$ , chamado de conjunto dos **arcos**, é um subconjunto de

$$\{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}.$$

Escrevemos  $V(D)$  e  $A(D)$  para denotar, respectivamente, o conjunto dos vértices e o conjunto dos arcos de  $D$ .

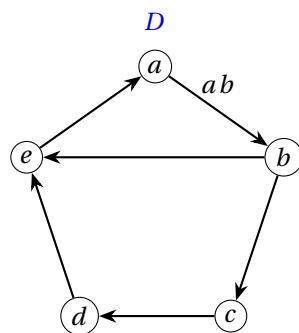


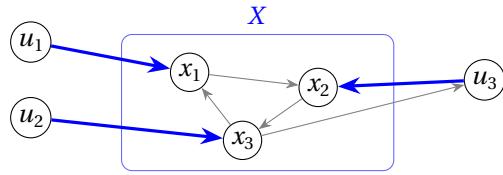
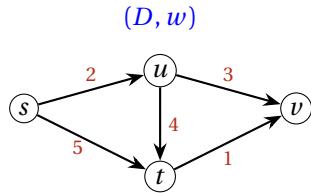
Figura 1 – A figura ilustra um digrafo  $D$  cujo conjunto dos vértices é  $\{a, b, c, d, e\}$  e cujo conjunto dos arcos é  $\{ab, bc, cd, de, ea, be\}$ .

Para um arco  $a := (u, v)$  de  $D$  — o que costumamos abreviar como  $uv$  — dizemos que  $u$  é a **cauda** (ou **ponta inicial**) de  $a$  e  $v$  é a **cabeça** (ou **ponta final**) de  $a$ .

Seja  $X$  um subconjunto de  $V(D)$ . Dizemos que um arco  $a$  **entra** em  $X$  se a ponta final de  $a$  está fora de  $X$  e a inicial está em  $X$ . Por outro lado, um arco  $a$  sai de  $X$  se a ponta inicial de  $a$  está em  $X$  e a final está fora de  $X$ . De forma análoga, dizemos que um subconjunto  $B$  de  $A(D)$  **entra** em  $X$  se existe um arco de  $B$  que entra em  $X$ . O conjunto dos arcos de  $D$  que entram em  $X$  é denotado por  $\delta_D^-(X)$  (ou  $\delta^-(X)$  quando o contexto permitir). De forma similar, o conjuntos dos arcos que saem de  $X$  é denotado por  $\delta_D^+(X)$ . Por brevidade, para cada vértice  $v \in V(D)$ , escrevemos  $\delta_D^-(v)$  no lugar de  $\delta_D^-(\{v\})$ . A mesma convenção é usada para  $\delta_D^+$ .

Um **digrafo ponderado** é um par  $(D, w)$ , em que  $D$  é um digrafo e  $w : A(D) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que associa a cada arco  $a \in A(D)$  um **custo** (ou **peso**) real  $w(a)$ .

Um digrafo  $H$  é um **subdigrafo** de um digrafo  $D$  se  $V(H) \subseteq V(D)$  e  $A(H) \subseteq A(D)$ .

Figura 2 – Os arcos em azul entram em um subconjunto  $X \subseteq V(D)$ .Figura 3 – Exemplo de digrafo ponderado  $(D, w)$ : cada arco recebe um custo real  $w(a)$ .

Seja  $D$  um digrafo e seja  $B \subseteq A(D)$ . O subdigrafo de  $D$  gerado por  $B$ , denotado  $D[B]$ , é o par  $(W, B)$ , em que  $W$  é o conjunto dos vértices que são pontas de arcos de  $B$ , isto é,

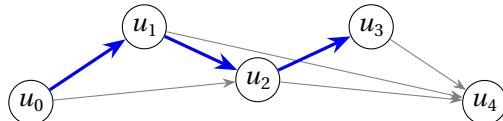
$$W = \{v \in V(D) : \text{existe } u \in V \text{ tal que } uv \in A(D) \text{ ou } vu \in A(D)\}.$$

## 2.2 Caminhos

Um **caminho**  $P$  em um digrafo  $D$  é uma sequência de vértices de  $D$

$$(u_0, u_1, \dots, u_k),$$

em que  $k \geq 0$  e, para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $u_i u_{i+1}$  é um arco de  $D$ . Dizemos que  $P$  é um caminho de  $u_0$  até  $u_k$  para destacar a **origem**  $u_0$  de  $P$  e o **destino**  $u_k$  de  $P$ . Um caminho  $P$  é dito **simples** se seus vértices são dois a dois distintos. Um caminho é **fechado** se sua origem e seu destino coincidem. Finalmente, um caminho fechado  $P := (u_0, u_1, \dots, u_k)$  é um **ciclo** se  $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$  é um caminho simples.

Figura 4 – A figura ilustra um caminho simples  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  em um digrafo.

A noção de caminho permite definir o território de um vértice em um digrafo. Seja  $D$  um digrafo e seja  $r \in V(D)$ . O **território** de  $r$  em  $D$  é o conjunto dos vértices  $v \in V(D)$  tais que existe um caminho de  $r$  até  $v$  em  $D$ . O seguinte fato é bem conhecido. Para enunciá-lo é conveniente introduzir a seguinte definição. Um  $r$ -conjunto de  $D$  é um subconjunto não vazio  $X$  de  $V(D)$  tal que  $r \notin V(D)$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $D$  um digrafo e  $r \in V(D)$ . O território de  $r$  em  $D$  é igual a  $V(D)$  se, e somente se, para cada  $r$ -conjunto  $X$  existe ao menos um arco de  $D$  que entra em  $X$ .  $\square$*

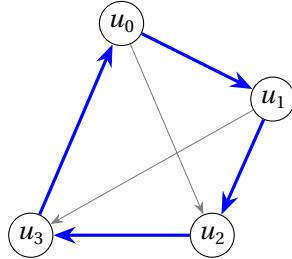


Figura 5 – A figura ilustra um ciclo  $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$  em um digrafo.

### 2.3 Arborescências

Podemos agora introduzir um dos objetos fundamentais deste trabalho: as arborescências. Dizemos que um digrafo  $D$  é uma **arborescência** se existe um vértice  $r \in V(D)$  tal que, para cada vértice  $v \in V(D)$ , existe um único caminho em  $D$  de  $r$  até  $v$ . Nesse caso, chamamos  $r$  de **raiz** de  $D$ . Para destacar o papel de  $r$  nesta definição, dizemos que  $D$  é uma  $r$ -**arborescência**.

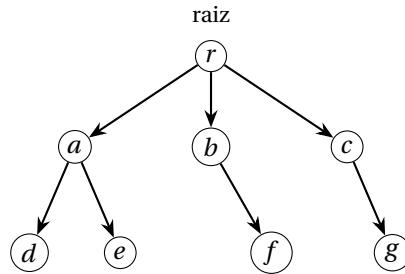


Figura 6 – A figura ilustra uma  $r$ -arborescência.

Um subdigrafo  $T$  de um digrafo  $D$  é uma **arborescência de  $D$**  se  $T$  é uma arborescência. Dizemos que  $T$  é uma arborescência **geradora** de  $D$  se, além disso,  $V(T) = V(D)$ .

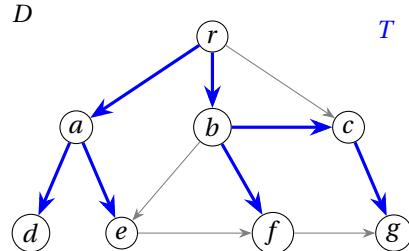


Figura 7 – O subdigrafo  $T$  (em azul) é uma arborescência geradora do digrafo  $D$ , que inclui tanto os arcos azuis quanto os arcos cinza.

Seja  $(D, w)$  um digrafo ponderado. Para todo subconjunto  $B \subseteq A(D)$ , definimos

$$w(B) := \sum_{b \in B} w(b).$$

Quando  $H$  é um subdigrafo de  $D$ , escrevemos  $w(H)$  para abreviar  $w(A(H))$ .

No contexto de arborescências de um digrafo  $D$ , é comum identificarmos um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  com o subdigrafo  $D[B]$ . Assim, dizemos que  $B \subseteq A(D)$  é uma **arborescência de  $D$**  se  $D[B]$  é uma arborescência de  $D$ .

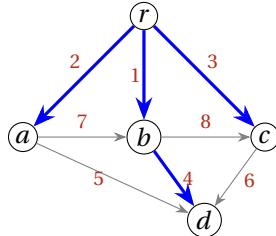


Figura 8 – A figura ilustra um subconjunto  $B$  (de arcos azuis) de custo  $w(B) = 2+1+3+4 = 10$  visto como uma arborescência geradora de  $D$ .

Seja  $D$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $D$ . Uma **cobertura de  $r$ -conjuntos** é um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  tal que  $B$  entra em todo  $r$ -conjunto de  $D$ . É claro que uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos. A próxima proposição afirma que  $B \subseteq A(D)$  é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  se, e somente se,  $B$  é uma cobertura *minimal* de  $r$ -conjuntos de  $D$ . Isto significa que: (i)  $B$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos e (ii) para cada  $a \in B$ , o conjunto  $B \setminus \{a\}$  não é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $D$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $D$ . Um subconjunto  $B \subseteq A(D)$  é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  se, e somente se,  $B$  é uma cobertura minimal de  $r$ -conjuntos de  $D$ .*  $\square$

## 2.4 Problema da arborescência de custo mínimo

Finalmente, podemos enunciar o problema que constitui o objeto de estudo deste trabalho.

### Problema da $r$ -arborescência geradora de custo mínimo

Dado um digrafo ponderado  $(D, w)$  e um vértice  $r \in V(D)$ , deseja-se encontrar, se existir, uma  $r$ -arborescência geradora  $T$  de  $D$  tal que

$$w(T) \leq w(F)$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F$  de  $D$ .

É uma chateação lidar com a possibilidade de que uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  pode não existir. Além disso, decidir se uma  $r$ -arborescência existe é tarefa simples: basta determinar o território do vértice  $r$  em  $D$ , o que pode ser feito por meio de qualquer algoritmo de busca. Assim, o problema só se coloca quando existe ao menos uma  $r$ -arborescência. Nesse caso, há ainda uma hipótese que pode ser adotada sem

perda de generalidade: podemos supor que nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ , uma vez que nenhuma  $r$ -arborescência contém um arco entrando em  $r$ . Para evitar essas repetições, introduzimos a seguinte definição. Dizemos que uma tripla  $(D, w, r)$  é um  **$r$ -digrafo ponderado** se

- $(D, w)$  é um digrafo ponderado;
- $r$  é um vértice de  $D$ ;
- $\delta^-(r) = \emptyset$ ; e
- $D$  possui uma  $r$ -arborescência.

Para um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ , dizemos que uma  $r$ -arborescência geradora é de **custo mínimo** em  $(D, w)$  se

$$w(T) \leq w(F)$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F$  de  $D$ .

## 2.5 Contração

A operação de contração de um conjunto de vértices é fundamental para o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds e é o assunto que passaremos a tratar agora.

Seja  $D$  um digrafo e seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(D)$ . Definimos o digrafo obtido de  $D$  pela **contração** de  $\mathcal{P}$ , denotado por  $D/\mathcal{P}$ , como segue. Seu conjunto de vértices é

$$V(D/\mathcal{P}) := \mathcal{P},$$

e seu conjunto de arcos é

$$A(D/\mathcal{P}) := \{XY \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : X \neq Y \text{ e existem } x \in X, y \in Y \text{ tais que } xy \in A(D)\}.$$

Em outras palavras,  $D/\mathcal{P}$  é o digrafo cujo conjunto de vértices é  $\mathcal{P}$  e em que há um arco de  $X$  para  $Y$ , com  $X, Y \in \mathcal{P}$  e  $X \neq Y$ , se, e somente se, existe um arco  $xy \in A(D)$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

Definimos agora em que consiste contrair um conjunto não vazio de vértices de um digrafo. Seja  $D$  um digrafo e seja  $\emptyset \neq X \subseteq V(D)$ . A **contração** de  $X$  em  $D$ , denotada por  $D/X$ , é o digrafo  $D/\mathcal{P}$ , em que

$$\mathcal{P} := \{\{u\} : u \in V(D) \setminus X\} \cup \{X\}.$$

Informalmente, em  $D/X$  todos os vértices de  $X$  são identificados em um único vértice, enquanto os vértices fora de  $X$  permanecem inalterados.

Nesse caso, no contexto do digrafo  $D/X$ , vamos identificar o conjunto  $\{u\}$  com o próprio elemento  $u$ , para cada  $u \in V(D) \setminus X$ . Também vamos identificar o conjunto  $X$

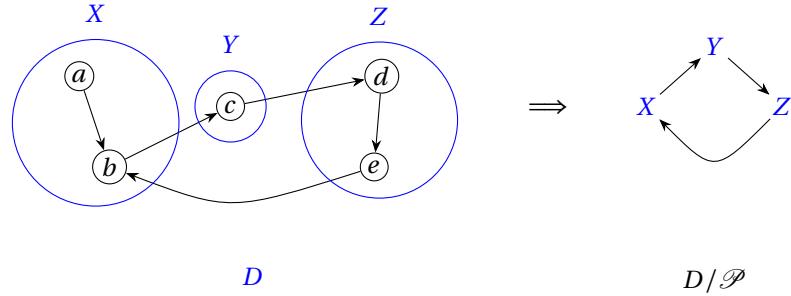


Figura 9 – Contração de um digrafo  $D$  pela partição  $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ , em que  $X := \{a, b\}$ ,  $Y := \{c\}$  e  $Z := \{d, e\}$ .

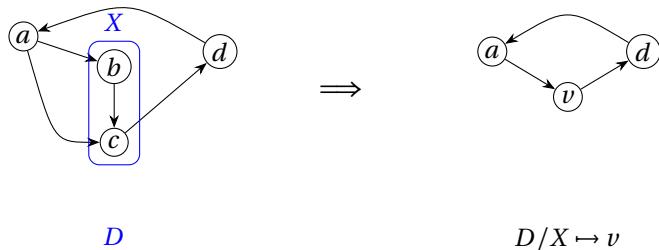


Figura 10 – Contração de um subconjunto  $X \subseteq V(D)$  em um digrafo  $D$ . À esquerda, o subconjunto  $X = \{b, c\}$  é destacado; à direita, os vértices de  $X$  foram identificados em um único vértice  $v$ , obtendo-se o digrafo  $D/X \rightarrow v$ .

com um vértice  $v \notin V(D)$ . Para explicitar essa identificação, escreveremos  $D/X \rightarrow v$  em vez de simplesmente  $D/X$ .

Considere agora um digrafo ponderado  $(D, w)$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $V(D)$ . Definimos o digrafo ponderado  $(D/\mathcal{P}, w/\mathcal{P})$  pondo

$$(w/\mathcal{P})(XY) := \min\{w(xy) : x \in X, y \in Y\}$$

para cada  $XY \in A(D/\mathcal{P})$ . Ou seja, o custo de cada arco  $XY$  de  $D/\mathcal{P}$  é o menor dos custos dos arcos  $xy \in A(D)$  tais que  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

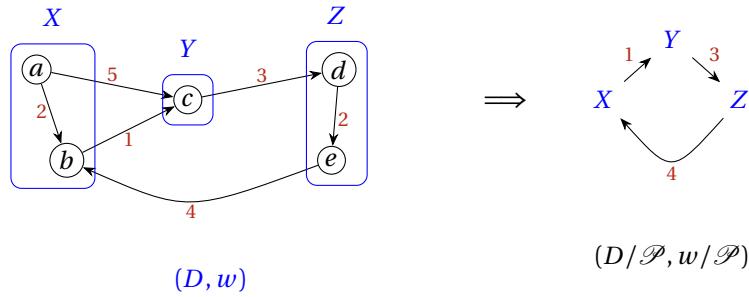


Figura 11 – Contração de um digrafo ponderado  $(D, w)$  pela partição  $\mathcal{P} = \{X, Y, Z\}$ , em que  $X := \{a, b\}$ ,  $Y := \{c\}$  e  $Z := \{d, e\}$ . O peso de cada arco  $XY$  em  $D/\mathcal{P}$  é o mínimo dos pesos dos arcos de  $D$  que vão de um vértice de  $X$  para um vértice de  $Y$ .

Quando  $X$  é um subconjunto não vazio de vértices de  $D$ , escrevemos  $(D/X \mapsto v, w/X \mapsto v)$  para denotar a contração de  $X$  na qual o conjunto  $X$  é identificado com o vértice  $v \notin V(D)$ .

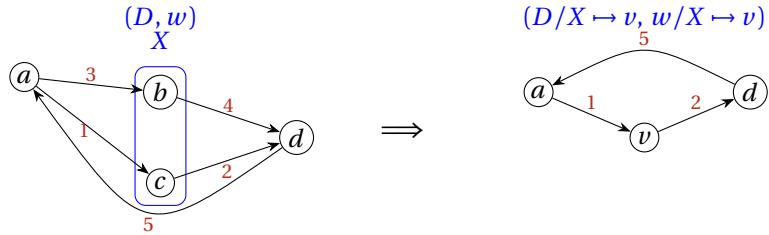


Figura 12 – Contração ponderada de um subconjunto  $X \subseteq V(D)$ . À esquerda, o digrafo  $(D, w)$  com  $X = \{b, c\}$  destacado. À direita, o digrafo  $(D/X \mapsto v, w/X \mapsto v)$ , em que os vértices de  $X$  foram identificados em um único vértice  $v$  e cada peso  $w/X$  é o mínimo dos pesos dos arcos de  $D$  entre  $X$  e os demais vértices.

## 2.6 Componentes fortes

Seja  $D$  um digrafo. Uma **componente forte** de  $D$  é um subconjunto maximal  $S \subseteq V(D)$  tal que, para cada  $s, t \in S$ , existe um caminho de  $s$  até  $t$  em  $D$  e um caminho de  $t$  até  $s$  em  $D$ . Nesse caso, qualquer caminho de  $s$  até  $t$  (por  $s, t \in S$ ) tem todos os seus vértices contidos em  $S$ .

O conjunto das componentes fortes de  $D$  é denotado por  $\mathcal{C}(D)$ , ou simplesmente por  $\mathcal{C}$  quando não houver risco de ambiguidade. A **condensação** de  $D$  é o digrafo  $D/\mathcal{C}$ , cujos vértices são as componentes fortes de  $D$  e em que há um arco do vértice  $S$  para o vértice  $T$  de  $D/\mathcal{C}$  se, e somente se, existe um arco de  $D$  que sai de um vértice de  $S$  e entra em um vértice de  $T$ .

Dizemos que  $S \in \mathcal{C}$  é uma **fonte** de  $\mathcal{C}$  se nenhum arco de  $D/\mathcal{C}$  entra em  $S$ . É bem sabido que  $D/\mathcal{C}$  é um digrafo livre de ciclos (isto é, um digrafo acíclico).

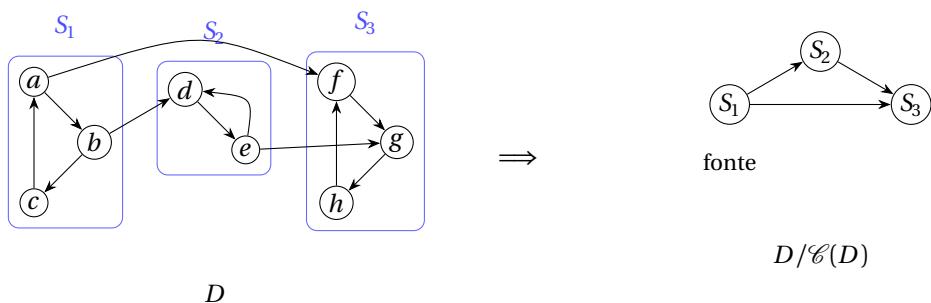


Figura 13 – Componentes fortes  $S_1, S_2, S_3$  de um digrafo  $D$  e sua condensação  $D/\mathcal{C}(D)$ , um digrafo acíclico em que  $S_1$  é fonte.

# 3 Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds ([CHU; LIU, 1965](#)) ([EDMONDS, 1967](#)), que determina uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em duas operações fundamentais: (i) a redução gulosa dos custos dos arcos e (ii) a contração de ciclos. Essas operações permitem resolver recursivamente uma instância menor do problema e, em seguida, estender a solução obtida para o problema original.

O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

## 3.1 O algoritmo

O problema que nos interessa consiste em, dado um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$  (veja a página [19](#)), encontrar uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$  e devolve uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

Vamos primeiro fornecer uma visão geral do algoritmo. O algoritmo é recursivo. Inicialmente, ele faz uma escolha gulosa de um certo conjunto de arcos. Se esse conjunto forma uma arborescência, o algoritmo pára e devolve esse conjunto. Caso contrário, identifica um ciclo especial no digrafo e o contrai, produzindo um novo digrafo. Esse novo digrafo é então submetido recursivamente ao algoritmo, que devolve uma arborescência de custo mínimo. Por fim, utilizamos o ciclo contraído para construir uma arborescência de custo mínimo no digrafo original. Essa construção é detalhada a seguir.

### Escolha gulosa

Suponha doravante que  $(D, w, r)$  é um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo tem um caráter guloso. Note que, se  $T$  é uma  $r$ -arborescência de  $D$ , então, para cada vértice  $v \neq r$ , existe exatamente um arco de  $T$  que entra em  $v$ . Isso sugere a seguinte escolha gulosa: para cada vértice  $v \neq r$ , selecione um arco  $a_v$  de custo mínimo dentre aqueles que entram em  $v$  e forme o conjunto  $T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$ .

Suponha que  $T$  é uma  $r$ -arborescência. Não é difícil verificar que  $T$  tem custo mínimo. De fato, seja  $F$  uma  $r$ -arborescência de  $D$ . Para cada vértice  $v \neq r$ , escreva  $b_v$

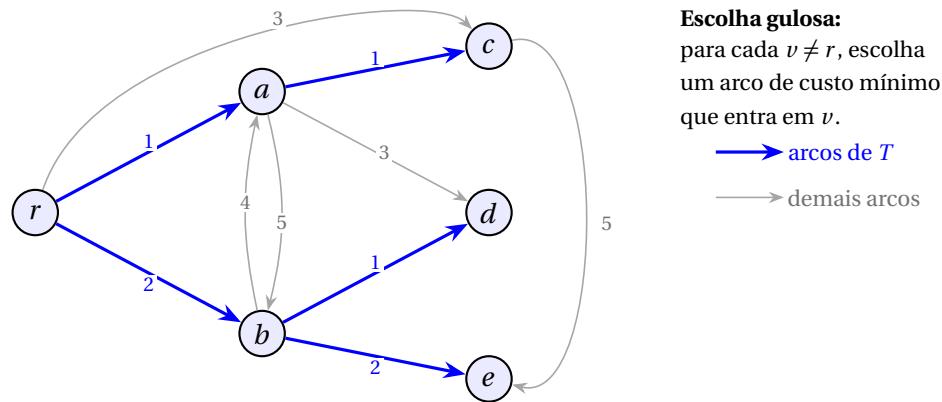


Figura 14 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma  $r$ -arborescência.  
Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo.

para o *único* arco de  $F$  que entra em  $v$ . Pela escolha gulosa,

$$w(a_v) \leq w(b_v) \quad \text{para todo } v \neq r.$$

Logo,

$$w(F) = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} w(b_v) \geq \sum_{v \in V \setminus \{r\}} w(a_v) = w(T).$$

Portanto,  $T$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo.

A Figura 15 ilustra que podemos não ter tanta sorte com  $T$ .

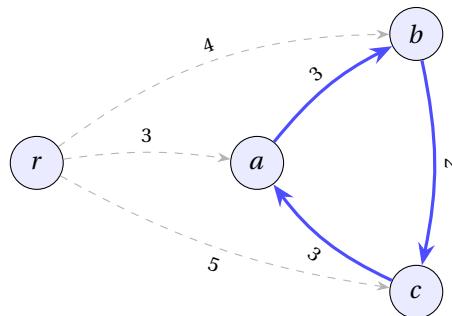


Figura 15 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Ora, se no lugar do arco  $(c, a)$  tivessemos escolhido o arco  $(r, a)$ , então  $r$ -arborescência resultante seria de custo mínimo.

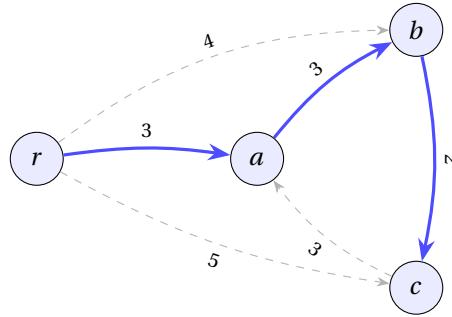


Figura 16 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

### 3.2 Custos reduzidos

Vamos introduzir agora a noção de custo reduzido. Essa noção permite fazer uma transformação nos custos que preserva a otimalidade.

Seja  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos o **custo  $q$ -reduzido**  $w_q : A \rightarrow \mathbb{R}$  por<sup>1</sup>

$$w_q(uv) := w(uv) - q(v), \quad uv \in A.$$

Para um conjunto  $X \subseteq V$ , escrevemos  $q(X) := \sum_{u \in X} q(u)$ .

A próxima proposição mostra que a transformação por custo  $q$ -reduzido preserva a otimalidade.

**Proposição 3.1.** *Para toda função  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma  $r$ -arborescência  $T$  é de custo mínimo em  $(D, w)$  se, e somente se,  $T$  é de custo mínimo em  $(D, w_q)$ .*

*Prova.* Seja  $F$  uma  $r$ -arborescência. Para cada  $u \in V \setminus \{r\}$ , seja  $a_u$  o único arco de  $F$  que entra em  $u$ . Então

$$\begin{aligned} w_q(F) &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} w_q(a_u) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} (w(a_u) - q(u)) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} w(a_u) - \sum_{u \in V \setminus \{r\}} q(u) \\ &= w(F) - q(V \setminus \{r\}). \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer  $r$ -arborescências  $T$  e  $F$ ,

$$w(T) \leq w(F) \iff w_q(T) = w(T) - q(V \setminus \{r\}) \leq w(F) - q(V \setminus \{r\}) = w_q(F),$$

o que prova a proposição. □

<sup>1</sup> Recorde que nenhum arco entra em  $r$ ; logo, a função  $w_q$  está bem definida.

O custo reduzido de interesse é o dado pela função  $\lambda$  definida a seguir. Para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , definimos

$$\lambda(v) := \lambda_w(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}.$$

Note que  $\lambda$  está bem definida, uma vez que  $D$  possui uma  $r$ -arborescência e, portanto, existe ao menos um arco que entra em cada vértice diferente de  $r$ . Consequentemente, para todo  $v \in V \setminus \{r\}$ ,

$$\min\{w_\lambda(a) : a \in \delta^-(v)\} = 0,$$

isto é, precisamente os arcos de custo mínimo que entram em  $v$  passam a ter custo zero, e os demais ficam com custo positivo.

Definimos o subdigrafo gerador  $D_0$  de  $D$  escolhendo, para cada  $v \neq r$ , exatamente um arco  $a_v$  que entra em  $v$  e satisfaz  $w_\lambda(a_v) = 0$ . Assim,

$$V(D_0) := V(D) \quad \text{e} \quad A(D_0) := \{a_v : v \in V(D) \setminus \{r\}\}.$$

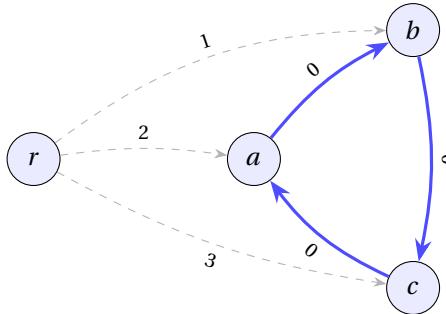


Figura 17 – Os arcos azuis são os arcos de  $D_0$ .

Como vimos, se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência, então  $D_0$  tem custo mínimo. Podemos então supor que  $D_0$  não é uma  $r$ -arborescência. Vamos mostrar que, nesse caso,  $D_0$  possui um ciclo.

Seja  $v \neq r$  um vértice de  $V$  que *não* é alcançável a partir de  $r$  em  $D_0$ ; um tal vértice existe uma vez que estamos admitindo que  $D_0$  não possui uma  $r$ -arborescência. Observe que, por construção, para cada vértice  $s$  de  $D_0$  existe exatamente um arco de  $D_0$  que entra em  $s$ . Considere um caminho simples maximal<sup>2</sup> de  $D_0$  que termina em  $v$ . Seja  $u$  o início de  $P$ . Como  $v$  não é atingível a partir de  $r$ , temos que  $u \neq r$ . Logo, existe exatamente um arco, digamos  $t u$ , de  $D_0$  que entra em  $u$ . Pela maximalidade de  $P$ , o vértice  $t$  é um dos vértices de  $P$  (caso contrário,<sup>3</sup>  $t \cdot P$  é um caminho simples, o que contradiz a escolha de  $P$ ). Como  $P$  é um caminho simples que começa em  $u$ , o vértice  $t$  aparece em  $P$  *após*  $u$ ; portanto,  $P$  contém um subcaminho  $S$  de  $u$  até  $t$ . Consequentemente,  $S \cdot u$  é um ciclo de  $D_0$ . Isso prova que  $D_0$  contém um ciclo.

<sup>2</sup> Maximal aqui tem o seguinte sentido. Para cada vértice  $u$  de  $D_0$ , as sequências  $P \cdot u$  e  $u \cdot P$  não são caminhos simples.

<sup>3</sup> Para sequências  $\alpha$  e  $\beta$ , escrevemos  $\alpha \cdot \beta$  para denotar a concatenação de  $\alpha$  e  $\beta$ . Para simplificar a notação, uma sequência de comprimento 1 é identificada com o seu único elemento.

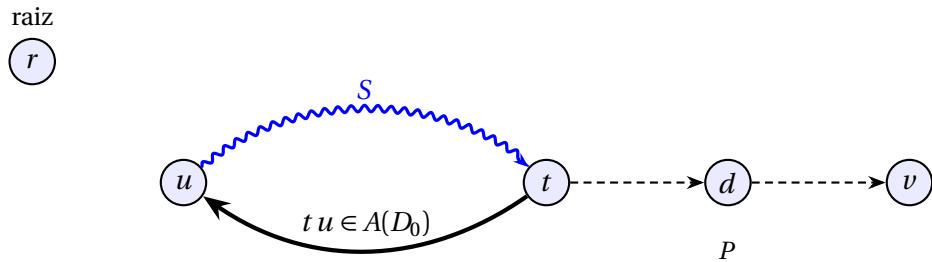


Figura 18 – O caminho simples maximal  $P$  inicia em  $u$  e termina em  $v$ . A porção  $S$  de  $P$  entre  $u$  e  $t$  é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho  $S \cdot u$  é um ciclo.

Devemos agora mostrar o que fazer com um desses ciclos de  $D_0$ .

### Contração de ciclos

A próxima operação do algoritmo é a contração de ciclos (veja a Seção 2.5). É conveniente identificar um ciclo com o conjunto de seus vértices. Suponha que o digrafo  $D_0$  possua um ciclo, digamos  $C$ . Observe que  $r \notin V(C)$ . Recorde que, ao *contrair* o ciclo  $C$  em  $D$  e obter o digrafo  $D/C \mapsto x_C$ , identificamos todos os vértices de  $C$  em um único vértice, denotado por  $x_C$  e visto como um supervértice, e redirecionamos os arcos incidentes: arcos da forma  $uv$ , em que  $v \in C$  (isto é, que entravam em  $C$ ), passam a ser da forma  $ux_C$  em  $D/C \mapsto x_C$ , e arcos da forma  $vu$ , em que  $v \in C$  (isto é, que saíram de  $C$ ), passam a ser da forma  $x_C u$  em  $D/C \mapsto x_C$ . Assim, em  $D/C \mapsto x_C$ , o ciclo  $C$  é tratado como um único vértice.

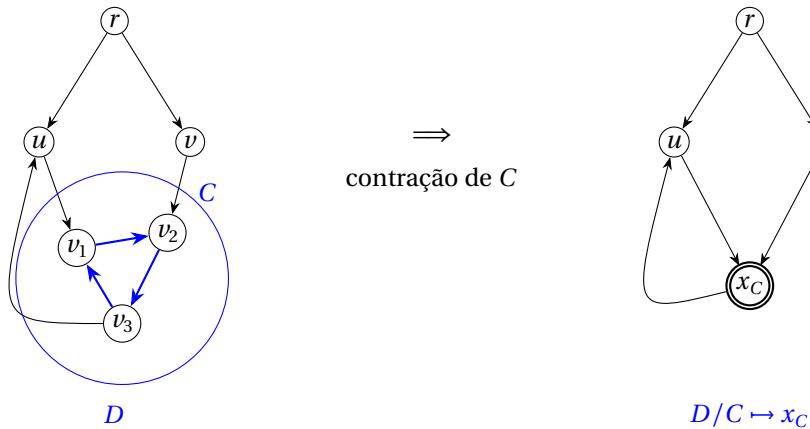
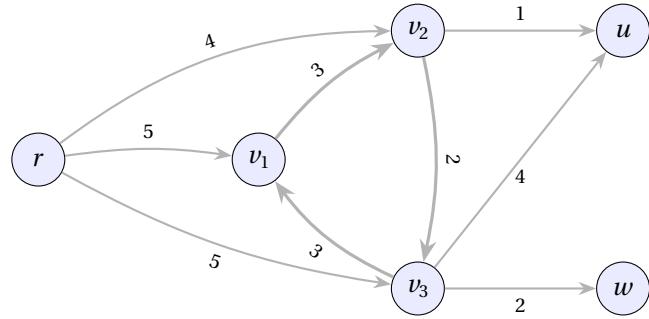


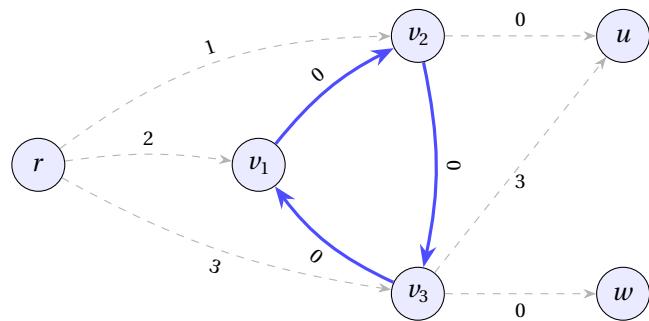
Figura 19 – Contração de um ciclo  $C$  em um vértice  $x_C$ .

Precisamos agora definir um novo  $r$ -digrafo ponderado. Ei-lo:  $(D', w', r)$ , onde  $D' := D/C \mapsto x_C$  e  $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$ . Note que  $r$  é um vértice de  $D'$  e que, além disso,  $D'$  possui uma  $r$ -arborescência.

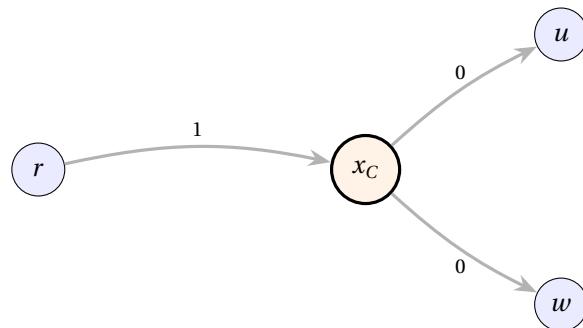
Agora vamos ilustrar um exemplo de como essa contração é feita e os custos são ajustados. Considere o digrafo a seguir.



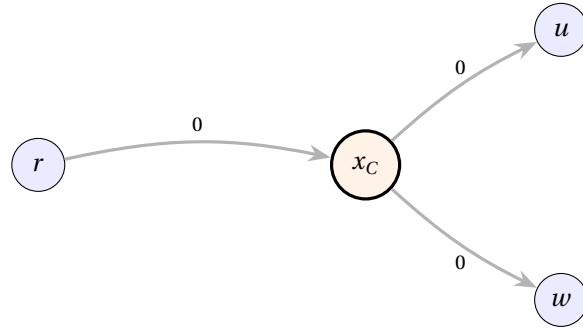
Após a redução dos custos, obtemos um ciclo  $C := (v_1, v_2, v_3, v_1)$  cujos arcos têm custo reduzido igual a zero.



Após a contração do ciclo  $C$ , obtemos o digrafo abaixo com o supervértice  $x_C$ .



O digrafo contraído é submetido recursivamente ao algoritmo. Assim, o próximo passo consiste em reduzir os custos dos arcos dessa nova intância, obtendo assim o seguinte  $r$ -digrafo ponderado.

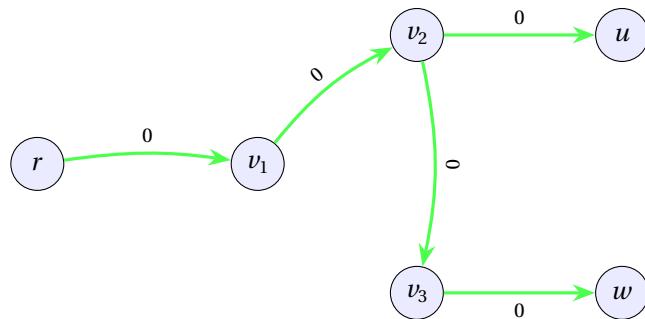


O subdigrafo gerador obtido a partir desse digrafo, usando apenas os arcos de custo reduzido igual a zero, possui uma  $r$ -arborescência. O algoritmo devolve essa  $r$ -arborescência, que agora deverá passar por um processo de expansão.

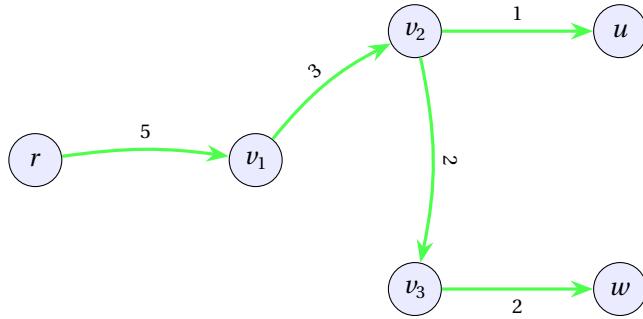
### Reexpansão de arborescências

Após resolver o problema no digrafo contraído  $D'$ , obtemos uma  $r$ -arborescência geradora  $T'$  de custo mínimo em  $(D', w')$ . Observe que tão somente um arco de  $T'$  entra em  $x_C$ . Para reexpandir  $T'$  em uma  $r$ -arborescência  $T$  em  $D$ , substituímos o supervértice  $x_C$  pelo ciclo  $C$  e adicionamos os arcos do ciclo que formam a arborescência dentro de  $C$ . Especificamente, o arco  $ux_C$  de  $T'$  corresponde a um arco  $uv$  de  $D$ , onde  $v \in C$ . Esse arco  $uv$  é incluído em  $T$ . Em seguida, adicionamos os arcos do ciclo  $C$  que conectam os vértices de  $C$  de forma a manter a estrutura de arborescência. Note que, devemos escolher todos os arcos do ciclo  $C$  exceto aquele que entra em  $v$ , garantindo que cada vértice de  $C$  tenha grau de entrada igual a 1 em  $T$ .

Retomemos o exemplo para ilustrar a expansão da  $r$ -arborescência geradora do digrafo contraído. Primeiro, adicionamos os vértices do ciclo  $C$  e, em seguida, incluímos os arcos apropriados para formar a  $r$ -arborescência geradora do digrafo original:



No  $r$ -digrafo ponderado original, temos a seguinte configuração.



Vamos agora verificar que a  $r$ -arborescência geradora  $T$ , obtida da construção descrita, é de custo mínimo em  $(D, w)$ . Por hipótese,  $T'$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D', w')$ , isto é,

$$w'(T') \leq w'(F')$$

para toda  $r$ -arborescência geradora  $F'$  de  $D'$ . Pela construção de  $T$ , temos que  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora tal que  $w_\lambda(T) = w'(T')$ , uma vez que todo arco  $a$  de  $C$  satisfaz  $w_\lambda(a) = 0$ .

Suponha agora que  $F$  seja uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w_\lambda)$ . Então  $w_\lambda(F) \leq w_\lambda(T)$ . Seja  $F' := F/C \rightarrow x_C$ . Note que  $F'$  pode não ser uma  $r$ -arborescência de  $D'$ . No entanto,  $F'$  contém uma  $r$ -arborescência de  $D'$ ; logo, existe  $F'' \subseteq F'$  tal que  $F''$  é uma  $r$ -arborescência de  $D'$ . Temos, então,  $w'(F'') \leq w'(F')$  pois  $w'(a) \geq 0$  para cada  $a \in A(D')$ . Por hipótese,  $w'(T') \leq w'(F'')$  o que, combinado com  $w_\lambda(T) = w'(T')$ , permite inferir que

$$w_\lambda(T) \leq w'(F'') \leq w'(F') = w_\lambda(F).$$

Portanto,  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w_\lambda)$ . Agora, pela Proposição 3.1,  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em  $(D, w)$ , como queríamos. Isso completa a prova de que a  $r$ -arborescência devolvida pelo algoritmo é de custo mínimo em  $(D, w)$ .

Convém agora sumarizar e exibir uma descrição em pseudocódigo do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. O mapeamento desse pseudocódigo para código Python será discutido na próxima seção.

### Algoritmo 3.1: Chu–Liu/Edmonds

```

1 def chu-liu-edmonds( $D$ ,  $w$ ,  $r$ ):
2      $\lambda := \{(v, \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}) : v \in V \setminus \{r\}\}$ 
3     para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , seja  $a_v \in \delta^-(v)$  tal que  $w_\lambda(a_v) = 0$ 
4     seja  $D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$ 
5     if  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência: return  $D_0$ 
  
```

```

6     seja  $C$  um ciclo em  $D_0$ 
7      $T' := \text{chu-liu-edmonds}(D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r)$ 
8      $T := \text{expand}(T')$ 
9     return  $T$ 

```

## Complexidade

Não é difícil ver que as operações envolvidas nas linhas 2 a 6 e na linha 8 podem ser implementadas de forma a serem executadas em tempo  $O(|A|)$ . Como cada chamada recursiva contrai ao menos um vértice, o número total de chamadas é limitado por  $O(|V|)$ . Portanto, o consumo de tempo do algoritmo está em  $O(|V||A|)$ .

Quanto ao consumo de memória, é possível realizar as operações de contração de modo que o uso total de memória adicional permaneça em  $O(|V||A|)$ . A implementação descrita a seguir, disponível em <<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>>, apresenta consumo de tempo e memória em  $O(|V||A|)$ .

## 3.3 Implementação em Python

Esta seção descreve a implementação do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em Python, estruturada para refletir com precisão as etapas discutidas anteriormente. Cada operação fundamental — redução dos custos, construção do subdigrafo gerador de arcos de custo reduzido iguais a zero, contração de ciclos e reexpansão — é implementada utilizando como suporte a biblioteca networkx.

### Representação de digrafos e detecção de ciclos

A implementação utiliza a biblioteca NetworkX<sup>4</sup>. Digrafos ponderados são representados por instâncias da classe `DiGraph`. Internamente, essa classe usa dicionários do Python para armazenar vértices, arcos e atributos, o que garante operações eficientes na prática. Por exemplo, adicionar ou remover um arco tem consumo amortizado de tempo em  $O(1)$ ; iterar sobre os sucessores de um vértice  $u$  tem consumo de tempo em  $O(|\delta^+(u)|)$ ; e iterar sobre todos os arcos tem consumo de tempo em  $O(m)$ , em que  $m$  é o número de arcos do digrafo.

### Métodos da API NetworkX

Elencamos a seguir alguns métodos da API NetworkX utilizados na implementação. Para uma instância  $D$  de `DiGraph`:

<sup>4</sup> Disponível em <<https://networkx.org/>>.

### Consulta de estrutura

- `D.nodes()`: devolve um iterável sobre o conjunto dos vértices de D.
- `D.in_edges(v, data="w")`: devolve um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $uv$  é um arco de D com peso  $w$ .
- `D.out_edges(u, data="w")`: devolve um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $uv$  é um arco de D com peso  $w$ .
- `D[u][v]["w"]`: devolve o peso do arco  $uv$  de D, isto é, o valor armazenado no atributo " $w$ " associado a esse arco.

### Modificação de estrutura

- `D.add_edge(u, v, w=p)`: adiciona o arco  $uv$  a D com peso  $p$  armazenado no atributo " $w$ ". Os vértices  $u$  e/ou  $v$  são criados automaticamente se ainda não existirem em D.
- `D.remove_edges_from(edges)`: recebe um iterável edges de arcos e remove de D cada arco  $(u, v)$  em edges.
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: recebe um iterável nodes de vértices e remove de D cada vértice  $v$  em nodes (bem como todos os arcos incidentes em  $v$ ).

### Remoção de arcos que entram na raiz

Recorde que o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe um  $r$ -digafo ponderado e que, por definição, em um  $r$ -digafo ponderado nenhum arco entra em  $r$ . Escrevemos esta função como uma etapa de pré-processamento justamente para garantir que a raiz  $r$  não possua arcos de entrada antes de iniciar o algoritmo principal.

Em detalhes, essa função recebe como entrada uma instância D de `DiGraph` e um vértice  $r$  de D. A função modifica D removendo todos os arcos que entram em  $r$  e tem consumo amortizado de tempo em  $O(k)$ , em que  $k$  é o número de arcos que entram em  $r$ . Destacamos que é necessário armazenar, em uma lista, todos esses arcos usando o método `in_edges` (linha 2), pois esse método devolve um iterador que é invalidado assim que alguma operação modifica a estrutura de dados que o produziu.

Remoção de arcos que entram na raiz
<i>Entrada:</i> D: Digraph e r.
<i>Pré-condição:</i> r vértice de D.
<i>Modifica:</i> D.
<i>Pós-condição:</i> D não possui nenhum arco que entra em r.

```

1 def remove_edges_to(D: nx.DiGraph, r: int):
2     in_edges = list(D.in_edges(r))
3     D.remove_edges_from(in_edges)

```

### 3.3.1 Redução de custos

A função `reduce_weights` tem como propósito realizar a redução de custos por vértice. Em outras palavras, é nessa função que, para um vértice  $v$ , calculamos  $\lambda(v)$  e obtemos os custos  $\lambda$ -reduzidos dos arcos que entram em  $v$ . A função recebe  $D$ : `DiGraph` e um vértice  $v$ . A variável `in_edges` é um iterável de triplas da forma  $(u, v, w)$ , em que  $(u, v)$  é um arco de  $D$  e  $w$  é o seu peso, obtidas por meio do método `D.in_edges(node, data="w")`. A variável  $yv$  é o peso mínimo entre esses arcos. Em seguida, os pesos dos arcos que entram em  $v$  são decrementados de  $yv$ . O consumo de tempo está em  $O(k)$ , em que  $k$  é o número de arcos que entram em  $node$ .

#### Redução de custos por vértice (normalização)

*Entrada:*  $D$ : `DiGraph`,  $v$ : `int`.

*Pré-condição:*  $v$  é vértice de  $D$  e possui ao menos um arco de entrada.

*Modifica:*  $D$ .

*Pós-condição:*  $D[u][v]["w"]$  é o custo  $\lambda$ -reduzido do arco  $(u, v)$  para cada  $u$  que é predecessor de  $v$ .

```

1 def reduce_weights(D: nx.DiGraph, v: int):
2     in_edges = D.in_edges(v, data=True)
3     yv = min((data["w"] for _, _, data in in_edges))
4     for u, _, _ in in_edges:
5         D[u][v]["w"] -= yv

```

A Figura 20 ilustra o funcionamento da redução:

**Antes:**  $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$       **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

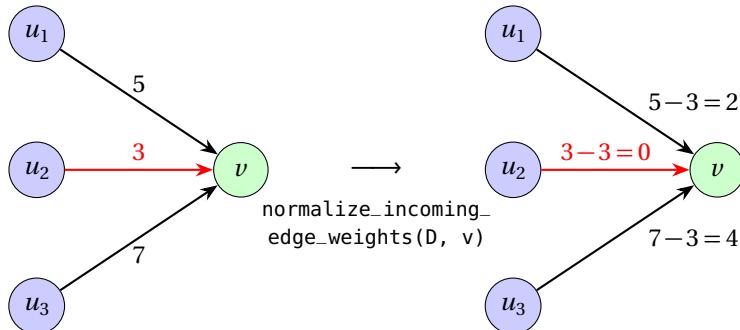


Figura 20 – À esquerda, vértice  $v$  com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar  $\text{reduce\_weights}(D, v)$ : o menor peso 3 é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco  $(u_2, v)$  (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para  $D_0$ .

### 3.3.2 Construção de $D_0$

Vamos mostrar agora como construir o subdigrafo  $D_0$  de  $D$ . Lembre-se de que  $D_0$  é o subdigrafo gerador de  $D$  em que, para cada vértice  $v \neq r$ , selecionamos um arco que entra em  $v$  com peso zero.

A função é bastante simples. Ela recebe um  $D: \text{DiGraph}$  e um vértice  $r$  de  $D$  tais que, em cada vértice  $v$  diferente de  $r$ , entra ao menos um arco de peso zero. A função devolve um subdigrafo gerador  $D0: \text{DiGraph}$ , construído ao se iterar sobre o conjunto dos vértices  $v$  de  $D$  distintos de  $r$  e selecionar exatamente um arco de peso zero que entra em  $v$ .

#### Construção de $D_0$

*Entrada:*  $D: \text{DiGraph}$ ,  $r: \text{int}$ .

*Pré-condição:*  $r$  é vértice de  $D$  e para cada vértice distinto de  $r$  existe um arco de peso zero (atributo "w") que nele entra.

*Saída:*  $D0: \text{DiGraph}$  subdigrafo gerador de  $D$  tal que em cada vértice diferente de  $r$  entra exatamente um arco de custo reduzido igual a zero.

```

1 def get_Dzero(D: nx.DiGraph, r: int):
2     D_zero = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r:
5             in_edges = D.in_edges(v, data=True)
6             u = next((u for u, _, data in in_edges
7                         if data["w"] == 0))
8             D_zero.add_edge(u, v)
9     return D_zero

```

As funções de redução de custo e construção de  $D_0$  juntas implementam os passos das linhas 2, 3, e 4 do Algoritmo de Chu-Liu/Edmonds.

### 3.3.3 Detecção de ciclo:

O próximo passo consiste em mostrar como decidir se o digrafo  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência e, caso isso não ocorra, como encontrar um ciclo para futura contração. A decisão sobre se  $D_0$  é uma arborescência é delegada a uma função de biblioteca, chamada `is_arborescence`. Note que, em virtude da forma como  $D_0$  é construído, se  $D_0$  é uma arborescência, então  $D_0$  é necessariamente uma  $r$ -arborescência. No que segue, vamos assumir que  $D_0$  não é uma arborescência.

A função recebe `D_zero`: `DiGraph` e supõe que (i) `D_zero` não é uma arborescência; (ii) existe exatamente um vértice de `D_zero` no qual não entra nenhum arco; e (iii) em cada um dos demais vértices, entra ao menos um arco. A função devolve um subdigrafo `C`: `DiGraph` de `D_zero` que é um ciclo.

Uma função de biblioteca, `find_cycle`, é usada para encontrar um ciclo em `D_zero`. Os arcos desse ciclo — resultado da chamada

```
find_cycle(D_zero, orientation="original")
```

— determinam o subconjunto de vértices do ciclo. A função devolve o subdigrafo de `D_zero` induzido por esse subconjunto vértices.

#### Detecção de ciclo dirigido em $D_0$

*Entrada:* `D_zero`: `DiGraph`.

*Pré-condição:* `D_zero` não é uma arborescência, e existe exatamente um vértice de `D_zero` no qual não entra nenhum arco e nos demais vértices entra ao menos um arco.

*Saída:* `C`: `DiGraph` subdigrafo de `D_zero` que é um ciclo.

```
1 def find_cycle(D_zero: nx.DiGraph):
2     nodes_in_cycle = set()
3     for u, v, _ in nx.find_cycle(D_zero, orientation="original"):
4         nodes_in_cycle.update([u, v])
5     return D_zero.subgraph(nodes_in_cycle)
```

### 3.3.4 Contração de um ciclo

Vamos agora mostrar como implementar a contração de um ciclo  $C$  de  $D_0$ . A função `contract_cycle` recebe um digrafo `D`, um<sup>5</sup> subdigrafo `C` de `D` e um nome `label`

<sup>5</sup> Isso é irrelevante: `C` poderia ser qualquer subdigrafo não vazio de `D`.

para o supervértice do digrafo contraído. A função modifica  $D$  de tal forma que, após a chamada,  $D$  representa o digrafo  $D/C \rightarrow \text{label}$  e devolve dois dicionários

```
in_to_cycle, out_from_cycle:dict[int, tuple[int, float]],
```

cuja formação é explicada a seguir.

Considere um vértice  $u$  de  $D$  que está fora de  $C$  e que possui ao menos um sucessor em  $C$ . Dizemos que um arco  $uv$  de  $D$  é **essencial de  $u$  para  $C$**  se  $v$  é vértice de  $C$  e o custo de  $uv$  é mínimo entre os custos dos arcos que saem de  $u$  e entram em  $C$ . De forma similar, considere um vértice  $v$  de  $D$  que está fora de  $C$  e que possui ao menos um antecessor em  $C$ . Dizemos que um arco  $uv$  de  $D$  é **essencial de  $C$  para  $v$**  se  $u$  é vértice de  $C$  e o custo de  $uv$  é mínimo entre os custos dos arcos que saem de  $C$  e entram em  $v$ .

A função constrói os dicionários com os arcos essenciais e seus pesos. Assim, para cada  $u$  que é antecessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $u$  para  $C$ , de custo  $w$ . De forma similar, para cada  $v$  que é sucessor de  $C$ ,  $\text{out\_from\_cycle}[v] = (u, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $C$  para  $v$ , de custo  $w$ .

É fácil ver que o consumo de tempo da função está em  $O(m)$ , em que  $m$  é o número de arcos de  $D$ .

#### Contração de ciclo

*Entrada:*  $D$ : DiGraph,  $C$ : DiGraph,  $\text{label}$ : int.

*Pré-condição:*  $C$  subdigrafo de  $D$  e  $\text{label}$  não é um vértice de  $D$ .

*Modifica:*  $D$ .

*Pós-condição:*  $D$  é o digrafo  $D/C \rightarrow \text{label}$ .

*Saída:*  $\text{in\_to\_cycle}, \text{out\_from\_cycle}: \text{dict[int, tuple[int, float]]}$ .

Para cada  $u$  que é antecessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $uv$  é um arco essencial de  $u$  para  $C$  de custo  $w$ .

Para cada  $u$  que é sucessor de  $C$ ,  $\text{in\_to\_cycle}[u] = (v, w)$  se, e somente se,  $vu$  é um arco é um arco essencial de  $C$  para  $u$  de custo  $w$ .

```

1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: int):
2     cycle_nodes: set[int] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
4     for u in D.nodes():
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, data["w"]),
8                  for _, v, data in D.out_edges(u, data=True)
9                  if v in cycle_nodes),
10                key=lambda x: x[1],

```

```

11             default=None, )
12         if min_weight_edge_to_cycle:
13             in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
14         for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
15             D.add_edge(u, label, w=w)
16         out_from_cycle: dict[int, tuple[int, float]] = {}
17         for v in D.nodes:
18             if v not in cycle_nodes:
19                 min_weight_edge_from_cycle = min(
20                     ((u, data["w"]))
21                     for u, _, data in D.in_edges(v, data=True)
22                     if u in cycle_nodes),
23                 key=lambda x: x[1],
24                 default=None, )
25             if min_weight_edge_from_cycle:
26                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
27         for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
28             D.add_edge(label, v, w=w)
29         D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
30     return in_to_cycle, out_from_cycle

```

### 3.3.5 Procedimento principal

Vamos agora apresentar a função principal, que orquestra todas as funções auxiliares descritas anteriormente e completa a implementação do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds. A função recebe um digrafo ponderado  $D$ , um vértice raiz  $r$  e um inteiro  $label$  que satisfazem:

- os vértices de  $D$  são inteiros no conjunto  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ , para algum  $n \geq 1$ ;
- $r$  é um vértice de  $D$ ;
- $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência;
- nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ ; e
- $label$  é um inteiro maior ou igual a  $n$ .

A função devolve um digrafo ponderado que é uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

A seguir, comentamos brevemente o papel de cada bloco de instruções do código.

Na linha 2,  $D\_copy$  é uma cópia de  $D$ . As linhas 3 a 5 são responsáveis por calcular o custo reduzido de cada arco do digrafo  $D\_copy$  (as modificações dos custos são feitas

em  $D_{\text{copy}}$ ). A linha 6 determina o digrafo  $D_{\text{zero}}$ , que contém exatamente um arco de custo reduzido igual a zero entrando em cada vértice distinto de  $r$ . A linha 7 determina se  $D_{\text{zero}}$  é uma arborescência. Se esse for o caso, a função restaura os pesos originais nos arcos de  $D_{\text{zero}}$  e devolve  $D_{\text{zero}}$ .

Suponha que  $D_{\text{zero}}$  não seja uma arborescência. A linha 11 determina um ciclo em  $D_{\text{zero}}$ , armazenando-o em  $C$ . A linha 12 contrai o ciclo  $C$  em  $D_{\text{copy}}$ ; o digrafo  $D_{\text{copy}}$  é modificado de tal forma que corresponda ao digrafo contraído. A linha 13 determina em  $F_{\text{prime}}$  uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo do digrafo  $D_{\text{copy}}$ . As demais linhas são responsáveis pelo processo de expansão de  $F_{\text{prime}}$ : elas modificam  $F_{\text{prime}}$  de tal forma que  $F_{\text{prime}}$  se torne uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo de  $D$ .

O código completo da função principal é apresentado a seguir:

#### Procedimento principal (recursivo)

*Entrada:*  $D$ : DiGraph,  $r$ : int,  $\text{label}$ : int.

*Pré-condição:*  $D$  é um digrafo ponderado; os vértices de  $D$  são inteiros no conjunto  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  para algum  $n \geq 0$ ;  $r$  é um vértice de  $D$ ;  $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência; nenhum arco de  $D$  entra em  $r$ ; e  $\text{label}$  é maior ou igual a  $n$ .

*Saída:*  $T$ : DiGraph é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo de  $D$ .

```

1 def chuliu_edmonds(D: nx.DiGraph, r: int, label: int):
2     D_copy = cast(nx.DiGraph, D.copy())
3     for v in D_copy.nodes:
4         if v != r:
5             reduce_weights(D_copy, v)
6     D_zero = get_Dzero(D_copy, r)
7     if nx.is_arborescence(D_zero):
8         for u, v in D_zero.edges:
9             D_zero[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
10    return D_zero
11 C = find_cycle(D_zero)
12 in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(D_copy, C, label)
13 F_prime = chuliu_edmonds(D_copy, r, label + 1)
14 in_edge = next(iterator(F_prime.in_edges(label, data=True)))
15 u, _, _ = cast(tuple, in_edge)
16 v, _ = in_to_cycle[u]
17 F_prime.add_edge(u, v)
18 for u_c, v_c in C.edges:
19     if v != v_c: F_prime.add_edge(u_c, v_c)
20 for _, z, _ in list(F_prime.out_edges(label, data=True)):
21     u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
22     F_prime.add_edge(u_cycle, z)

```

```
23     F_prime.remove_node(label)
24     for u, v in F_prime.edges:
25         F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
26     return F_prime
```

# 4 Algoritmo de András Frank

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo de András Frank, que determina uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo em um  $r$ -digrafo ponderado. O algoritmo é composto por duas fases. Na primeira, devida a Fulkerson (FULKERSON, 1974), constrói-se de maneira gulosa uma cobertura de  $r$ -conjuntos. Na segunda, devida a Frank (FRANK, 1979; FRANK, 2011), extrai-se dessa cobertura, também por meio de um procedimento guloso, uma  $r$ -arborescência geradora de custo mínimo. A apresentação é baseada em (LESTON-REY, 2025).

O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

## 4.1 Preliminares

Começamos por definir a noção de uma coleção<sup>1</sup> laminar de conjuntos. Seja  $U$  um conjunto e denotemos por  $2^U$  a coleção cujos elementos são os subconjuntos de  $U$ . Uma subcoleção  $\mathcal{L} \subseteq 2^U$  é dita **laminar** se, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{L}$ , vale uma das alternativas:

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

Não é difícil verificar que, se  $U$  é um conjunto finito e  $\emptyset \notin \mathcal{L} \subseteq 2^U$  é uma coleção laminar de subconjuntos de  $U$ , então

$$|\mathcal{L}| \leq 2|U| - 1.$$

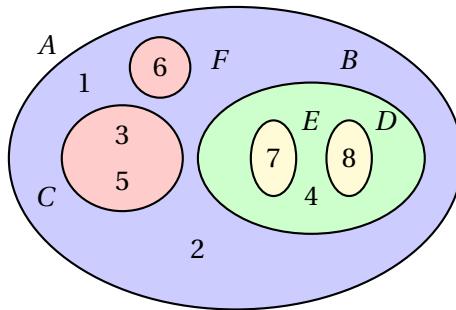


Figura 21 – A figura ilustra uma coleção laminar  $\{A, B, C, D, E, F\}$  de conjuntos, onde  $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $B := \{4, 7, 8\}$ ,  $C := \{3, 5\}$ ,  $D := \{8\}$ ,  $E := \{7\}$ ,  $F := \{6\}$ .

Seja  $(D, w \geq 0, r)$  um  $r$ -digrafo ponderado. Para cada subconjunto  $X \subseteq V$  e cada  $F \subseteq A(D)$ , seja

$$\varrho_F(X) := |F \cap \delta^-(X)|,$$

<sup>1</sup> Ao longo deste texto, usamos “coleção” como sinônimo de “conjunto”.

isto é,  $\varrho_F(X)$  é o número de arcos de  $F$  que *entram* em  $X$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja

$$[k] := \{i \in \mathbb{N} : i < k\}.$$

Assim, por exemplo,  $[4] = \{0, 1, 2, 3\}$ . Uma sequência

$$\left((R_i, \lambda_i)\right)_{i \in [k]},$$

em que, para cada  $i \in [k]$ , o conjunto  $R_i$  é um  $r$ -conjunto<sup>2</sup> e  $\lambda_i$  é um real não negativo, é dita  **$w$ -disjunta** se

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \leq w(a)$$

para cada  $a \in A(D)$ , em que  $[P]$  denota a função indicadora da proposição  $P$ , isto é,  $[P] = 1$  se  $P$  é verdadeira e  $[P] = 0$  caso contrário. O número  $\sum_{i \in [k]} \lambda_i$  é chamado de **valor** da sequência  $w$ -disjunta  $\left((R_i, \lambda_i)\right)_{i \in [k]}$ .

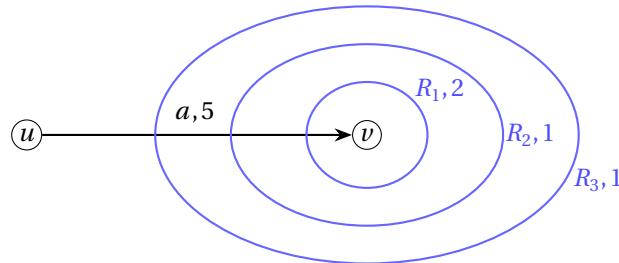


Figura 22 – Um arco  $a$  de peso 5 que entra nos  $r$ -conjuntos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  com multiplicidades 2, 1, e 1, respectivamente.

Podemos pensar nos valores  $\lambda_i$  como uma multiplicidade, no seguinte sentido. Para cada  $r$ -conjunto  $R_i$ , o valor  $\lambda_i$  representa a multiplicidade de  $R_i$ , isto é, o “número de cópias” de  $R_i$  que queremos incluir. Além disso, fixado um arco  $a$ , o número total de vezes que  $a$  é coberto pelos  $\lambda_i$ , isto é, o valor

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)],$$

não excede  $w(a)$ .

Suponha que  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos – assim, para cada  $r$ -conjunto

<sup>2</sup> Recorde que um  $r$ -conjunto é um subconjunto não vazio de  $V$  que *não* contém  $r$ .

$R$ , vale  $\varrho_F(R) \geq 1 - \text{de } D$  e que a sequência  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é  $w$ -disjunta. Então

$$\begin{aligned} w(F) &= \sum_{a \in F} w(a) \\ &\geq \sum_{a \in F} \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \\ &= \sum_{i \in [k]} \lambda_i \sum_{a \in F} [a \in \delta^-(R_i)] \\ &= \sum_{i \in [k]} \lambda_i \varrho_F(R_i) \\ &\geq \sum_{i \in [k]} \lambda_i. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos que  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos, de modo que, para cada  $i \in [k]$ , vale  $\varrho_F(R_i) \geq 1$ .

Note que  $w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$  se, e somente se, há igualdade em todas as desigualdades na cadeia acima. Logo,

$$w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$$

se, e somente se, as seguintes **condições de otimalidade** valem:

$$\forall a \in F : w(a) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)], \quad (4.1a)$$

$$\forall i \in [k] : \varrho_F(R_i) = 1. \quad (4.1b)$$

Assim, se  $F$  é uma  $r$ -arborescência geradora e  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma sequência  $w$ -disjunta que satisfaz as condições de otimalidade (4.1), então  $F$  é uma  $r$ -arborescência de peso mínimo e  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma sequência  $w$  - disjunta de valor máximo.<sup>3</sup>

## 4.2 Fase 1 do algoritmo de Frank

Antes de iniciarmos a descrição da fase 1, vale destacar que, embora ela seja referida como a fase 1 do algoritmo de Frank, ela é, na verdade, essencialmente devida a Fulkerson (FULKERSON, 1974).

É conveniente introduzir a seguinte definição para simplificar a notação. Seja  $U$  um conjunto e seja  $X \subseteq U$ . Definimos  $\mathbf{1}_X^U : U \rightarrow \{0, 1\}$  pondo

$$\mathbf{1}_X^U(u) := \begin{cases} 1, & \text{se } u \in X, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada  $u \in U$ . Quando o contexto permitir, escrevemos  $\mathbf{1}_X$  no lugar de  $\mathbf{1}_X^U$ . Além disso, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é definida pondo

$$(\lambda f)(u) := \lambda f(u)$$

---

<sup>3</sup> Isto é,  $\sum_{i \in [k]} \lambda_i$  é máximo entre todas as sequências  $w$ -disjuntas.

para cada  $u \in U$ . Finalmente, como de costume, se  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f - g : U \rightarrow \mathbb{R}$  é definida pondo

$$(f - g)(u) := f(u) - g(u)$$

para cada  $u \in U$ .

Voltemos à descrição da primeira fase. A apresentação dessa fase, bem como dos demais algoritmos deste capítulo, segue de perto a exposição informal, porém rigorosa, de (FEOFILOFF, 2005).

Seja  $(D, w \geq 0, r)$  um  $r$ -digráfo ponderado. A primeira fase do algoritmo constrói uma sequência

$$\left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$\{f_i : i \in [k]\} \text{ é uma cobertura de } r\text{-conjuntos de } D, \quad (4.2a)$$

$$\left( (R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]} \text{ é uma sequência } w\text{-disjunta,} \quad (4.2b)$$

$$\forall j \in [k] : \sum_{i \in [k]} \lambda_i [f_j \in \delta^-(R_i)] = w(f_j). \quad (4.2c)$$

Note que (4.2c) é a condição (4.1a).

Cada iteração da primeira fase começa com uma função  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  e uma sequência  $\left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$  tais que

$$c = w - \sum_{i \in [k]} \lambda_i \mathbf{1}_{\delta^-(R_i)} \quad (4.3a)$$

$$\forall i \in [k] : f_i \text{ entra em } R_i, \quad (4.3b)$$

$$\forall i \in [k], \forall j \in [i] : f_j \text{ não entra em } R_i, \quad (4.3c)$$

$$\forall i \in [k], \forall \emptyset \subset R \subset R_i, \exists h \in [i] : f_h \text{ entra em } R, \quad (4.3d)$$

$$\left( (R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]} \text{ é uma sequência } w\text{-disjunta,} \quad (4.3e)$$

$$\{R_i : i \in [k]\} \text{ é uma coleção laminar de } r\text{-conjuntos,} \quad (4.3f)$$

$$\forall i \in [k] : c(f_i) = 0 \quad (4.3g)$$

Note que a condição (4.3g) é equivalente a

$$\forall i \in [k] : \sum_{j \in [k]} \lambda_j [f_i \in \delta^-(R_j)] = w(f_i).$$

A primeira iteração começa com  $c = w$  e com a sequência vazia. Cada iteração consiste no seguinte. Suponha que  $\sigma := \left( (f_i, R_i, \lambda_i) \right)_{i \in [k]}$  satisfaz (4.3). Se  $F := \{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ , então o algoritmo pára e devolve  $\sigma$ . Suponha que esse não seja o caso. O algoritmo então seleciona um  $r$ -conjunto *minimal*  $R_k$  que não é

coberto por  $F$ . Como  $D$  possui ao menos uma  $r$ -arborescência, então existe ao menos um arco que entra em  $R_k$ . A próxima iteração começa com  $\sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$  no lugar de  $\sigma$  e  $c - \lambda_k \mathbf{1}_{\delta^-(R_k)}$  no lugar de  $c$ , em que

- $\lambda_k := \min \{ c(a) | a \in \delta^-(R_k) \}$ , e
- $f_k$  é um arco em  $\delta^-(R_k)$  tal que  $c(f_k) = \lambda_k$ .

Precisamos verificar que  $\sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$  satisfaz (4.3). A única propriedade em (4.3) que não segue diretamente das escolhas de  $f_k$ ,  $R_k$  e  $\lambda_k$  é a laminaridade da coleção  $\{R_i : i \in [k+1]\}$ . Suponha que esse não seja o caso. Então existe  $i \in [k]$  tal que

$$R_i \cap R_k \neq \emptyset, \quad R_i \setminus R_k \neq \emptyset, \quad R_k \setminus R_i \neq \emptyset.$$

Em virtude de (4.3d), existe  $h \in [i]$  tal que  $f_h =: uv$  entra em  $R_i \cap R_k$ . Assim,  $u \notin R_i \cap R_k$  e  $v \in R_i \cap R_k$ . Ora,  $u \notin R_i \cap R_k$  implica que  $u \in V \setminus R_i$  ou  $u \in V \setminus R_k$ . Mas  $u \in V \setminus R_i$  implica que  $uv$  entra em  $R_i$ , o que contradiz (4.3c). Por outro lado,  $u \in V \setminus R_k$  implica que  $uv$  entra em  $R_k$ , o que novamente é uma contradição, pois  $F$  não entra em  $R_k$ . Logo, a coleção  $\{R_i : i \in [k+1]\}$  é laminar.

Para completar a descrição da primeira fase, basta mostrar como encontrar um  $r$ -conjunto minimal que não é coberto por  $F$ . Para isso, considere o digrafo  $D_0 := (V, F)$ . Como  $F$  não é uma cobertura de  $r$ -conjuntos,  $D_0$  não contém uma  $r$ -arborescência. Logo, pela Proposição 2.2, existe um  $r$ -conjunto  $X \subseteq V$  tal que nenhum arco de  $F$  entra em  $X$ . Logo, existe pelo menos uma fonte, digamos  $S$ , em  $\mathcal{C}(D_0)$ . Proposição 4.1,  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $F$ .

**Proposição 4.1.** *Seja  $H$  um digrafo e seja  $r$  um vértice de  $H$ . Para toda fonte  $S$  de  $\mathcal{C}(H)$ , se  $r \notin S$ , então  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $A(H)$ .*

*Prova.* Suponha que  $S$  seja uma fonte de  $\mathcal{C}(H)$  que satisfaz  $r \notin S$ . Como  $S$  é uma fonte de  $\mathcal{C}(H)$ , nenhum arco de  $H$  entra em  $S$ . Além disso,  $r \notin S$ , donde  $S$  é um  $r$ -conjunto não coberto por  $A(H)$ . Resta mostrar que  $S$  é minimal.

Ora,  $S$  é uma componente fortemente conexa de  $H$ , de modo que  $H[S]$  é fortemente conexo. Seja agora  $\emptyset \neq R \subset S$  um subconjunto próprio e não vazio de  $S$ . Como  $H[S]$  é fortemente conexo, existe ao menos um arco de  $H[S]$  que entra em  $R$ . Como  $A(H[S]) \subseteq A(H)$ , esse arco pertence a  $A(H)$  e entra em  $R$ . Logo,  $A(H)$  entra em todo subconjunto próprio e não vazio de  $S$ .

Portanto,  $S$  não é coberto por  $A(H)$ , mas todo subconjunto próprio não vazio de  $S$  é coberto por  $A(H)$ , isto é,  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $A(H)$ .  $\square$

Para sumarizar o processo algoritmo recém descrito, eis um pseudo-código da fase 1 do algoritmo de Frank.

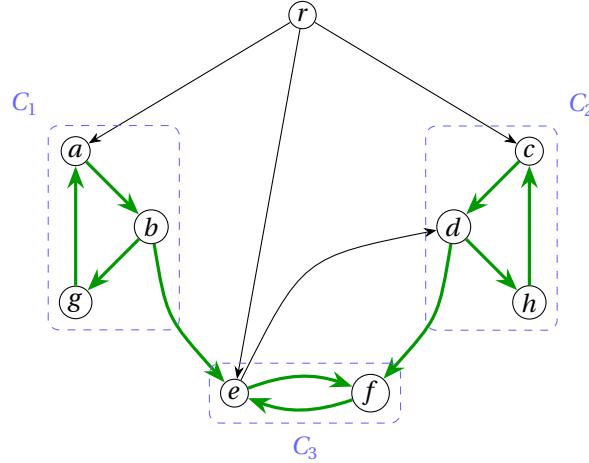


Figura 23 – Digráfo  $D$  com raiz  $r$ : arcos pretos em  $A(D) \setminus F$  e arcos verdes em  $F$ . As caixas tracejadas destacam os componentes fortemente conexos de  $D[F]$ ;  $C_1$  e  $C_2$  são fontes na condensação.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank (algoritmo de Fulkerson)

*Recebe um  $r$ -digráfo ponderado  $(D, w, r)$  e devolve uma sequência  $\sigma$  que satisfaz (4.2).*

```

1 def phase1( $D, w, r$ ):
2    $c, \sigma := w, \epsilon$ 
3   loop:
4      $(f_i, R_i, \lambda_i)_{i \in [k]} := \sigma$ 
5      $F := \{f_i \mid i \in [k]\}$ 
6      $D_0 := (V, F)$ 
7     if  $\mathcal{C}(D_0)$  não possui fontes: return  $\sigma$ 
8     seja  $R_k$  uma fonte em  $\mathcal{C}(D_0)$ 
9      $\lambda_k := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R_k)\}$ 
10    seja  $f_k \in \delta^-(R_k)$  tal que  $c(f_k) = \lambda_k$ 
11     $\sigma := \sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$ 
12     $c := c - \lambda_k \mathbf{1}_{\delta^-(R_k)}$ 

```

#### Complexidade

A cada iteração, o algoritmo determina um componente fonte de  $\mathcal{C}(D_0)$ , o que pode ser realizado em tempo  $O(|A|)$ , usando, por exemplo, o algortimo de Kosaraju (COR-MEN et al., 2009). O conjunto obtido da sequência de  $r$ -conjunto devolvida pelo algoritmo é laminar (e a sequência não possui repetições). Logo, seu tamanho é limitado por  $2|V| - 1$ . Consequentemente, é possível implementar a fase 1 em tempo  $O(|V||A|)$ .

### 4.3 Implementação da fase 1

A função `phase1` recebe  $D$ : `DiGraph`, ponderado pelo atributo "w" associado a cada arco, e  $r$ : `int`, que é um vértice de  $D$ . Além disso,  $D$  deve possuir uma  $r$ -arborescência. A função devolve uma lista `sigma` de triplas que corresponde à sequência  $\lambda$  satisfazendo (4.2).

Na linha 3, é definido `D_zero`, que, durante a execução da função, armazena os arcos da lista `sigma` — mais precisamente, o primeiro componente de cada tripla em `sigma`. Assim, em cada iteração, temos  $D\_zero = (V, F)$ , onde  $F = \{f_i\}$  é a família de arcos já selecionados.

A função usa `condensation`, da biblioteca `NetworkX`, que recebe um `DiGraph` e devolve um `DiGraph` que é a sua condensação. Assim, após a execução da linha 5,  $C$  é a condensação de `D_zero`. Na linha 6, as fontes de  $C$ , isto é, os vértices nos quais nenhum arco entra, são coletadas na lista `sources`.

Pela hipótese de que  $(D, w, r)$  admite uma  $r$ -arborescência, sabemos que toda fonte de  $\mathcal{C}(D_0)$  que não contém  $r$  corresponde a um  $r$ -conjunto minimal não coberto. Logo, quando `sources` contém apenas uma fonte, todos os  $r$ -conjuntos já estão cobertos e a função termina.

Caso contrário, para cada fonte de  $C$ , os vértices do componente forte correspondente em `D_zero` são coletados em `X` (linha 9); um tal `X` é de interesse desde que  $r$  não pertença a `X`. Nesse caso, os arcos de `D_copy` que entram em `X` são armazenados em `arcs` (linha 12). O peso de um arco de custo mínimo em `arcs` é determinado na linha 15 e armazenado em `min_weight`.

A função `update_weights` decremente de `min_weight` o peso de cada arco em `arcs` e devolve um arco de menor peso em `arcs`, que é armazenado em `a` (linha 16). O arco `a` é adicionado ao digrafo `D_zero` (linha 17). Finalmente, na linha 18, a tripla  $(a, X, min\_weight)$  é adicionada à lista `sigma`.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank

*Entrada:*  $D$ : `DiGraph`,  $r$ : `int`

*Pré-condição:*  $D$  é ponderado,  $r$  é um vértice de  $D$ , e  $D$  possui uma  $r$ -arborescência.

*Saída:* uma lista `sigma` que corresponde à uma sequência que satisfaz 4.2.

```

1 def phase1(D: nx.DiGraph, r: int):
2     D_copy = D.copy()
3     sigma = []
4     D_zero = nx.DiGraph(); D_zero.add_nodes_from(D_copy.nodes())
5     while True:
6         C = nx.condensation(D_zero)
7         sources = [x for x in C.nodes() if C.in_degree(x) == 0]
8         if len(sources) == 1: break

```

```

9   for s in sources:
10      X = C.nodes[s]["members"]
11      if r in X:
12         continue
13      arcs = [(u, v, data)
14              for u, v, data in D_copy.edges(data=True)
15              if u not in X and v in X]
16      min_weight = min(data["w"] for _, _, data in arcs)
17      a = update_weights(D_copy, arcs, min_weight)
18      D_zero.add_edge(a[0], a[1])
19      sigma.append((a, X, min_weight))
20
21  return sigma

```

A função `update_weights` é muito simples e segue abaixo.

#### Fase 1 do algoritmo de Frank

*Entrada:* `D: DiGraph, arcs: list[tuple[int, int, dict]], min_weight: float.`

*Pré-condição:* `D` é ponderado, `arcs` é uma lista de arcos, `min_weight` é o peso de um arco de menor peso em `arcs`.

*Pós-condição:* Decrementa de `min_weight` o peso de cada arco em `arcs`, modificando esse atributo em `D`.

```

1 def update_weights(D: nx.DiGraph,
2                     arcs: list[tuple[int, int, dict]],
3                     min_weight: float):
4     for u, v, _ in arcs:
5         D[u][v]["w"] -= min_weight
6         if D[u][v]["w"] == 0:
7             a = (u, v)
8
8     return a

```

## 4.4 Fase 2 do Algoritmo de Frank

A fase 2 do algoritmo de Frank recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w \geq 0, r)$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  extraída da sequência  $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ , obtida na fase 1 do algoritmo de Frank, a qual satisfaz (4.2). A fase 2 devolve um subconjunto  $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$ , satisfazendo (4.1a), ou seja,<sup>4</sup>

$$\forall i \in [k]: \quad \varrho_J(R_i) = 1.$$

A combinação da sequência  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  com esse conjunto  $J$  prova que  $J$  é uma  $r$ -arborescência geradora de peso mínimo de  $(D, w)$ .

Cada iteração da fase 2 começa com um conjunto  $J$  de arcos tal que  $J$  é uma  $r$ -arborescência.<sup>5</sup> A primeira iteração começa com  $J := \emptyset$ . Cada iteração consiste no

<sup>4</sup> Se preferir em palavras, isto quer dizer que, em cada  $r$ -conjunto  $R_i$ , entra exatamente um arco de  $J$ .

<sup>5</sup> Assuma, por simplicidade, que quando  $J = \emptyset$  o digrafo  $J$  é uma  $r$ -arborescência.

seguinte. Se  $J$  é uma  $r$ -arborescência geradora, então o algoritmo pára e devolve  $J$ . Suponha que esse não seja o caso. O algoritmo então considera a sequência

$$(f_i)_{i \in [k]}$$

e seleciona o menor  $i \in [k]$  tal que  $f_i$  é um arco que sai de  $V(J)$ . Note que tal arco deve existir, pois  $\{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos. A próxima iteração começa com  $J \cup \{f_i\}$  no lugar de  $J$ .

Afirmamos que no início de cada iteração, o conjunto  $J$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_J(R_i) \leq 1.$$

Isso é óbvio no início da primeira iteração. Considere uma iteração arbitrária e suponha que  $J$  não é uma  $r$ -arborescência. Vamos mostrar que  $J \cup \{f_i\}$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_{J \cup \{f_i\}}(R_i) \leq 1.$$

Por construção, dentre os arcos de  $(f_i)_{i \in [k]}$  que saem de  $V(J)$ , o arco  $f_i$  é o de menor índice. Além disso,  $f_i$  entra em  $R_i$ . Suponha, por um momento, que algum arco de  $J$  entre em  $R_i$ ; então  $V(J) \cap R_i \neq \emptyset$ , donde  $R_i \setminus V(J) \subset R_i$ . Além disso, como  $f_i$  sai de  $V(J)$  e entra em  $R_i$ , concluímos que  $R_i \setminus V(J) \neq \emptyset$ . Logo,  $\emptyset \subset R_i \setminus V(J) \subset R_i$ .

Sabemos que, para cada  $\emptyset \subset R \subset R_i$ , existe um arco de  $F := \{f_j : j \in [k]\}$  que entra em  $R$  e cujo índice é menor que  $i$ . Em particular, tomando  $R := R_i \setminus V(J)$ , existe  $f_k =: uv \in F$  tal que  $f_k$  entra em  $R_i \setminus V(J)$  e, portanto,  $k < i$  e  $v \in R_i \setminus V(J)$ . Como  $f_k$  não entra em  $R_i$  e a ponta final  $v$  pertence a  $R_i$ , segue que  $u \in R_i$ .

Ora,  $R_i = (R_i \cap V(J)) \cup (R_i \setminus V(J))$ , e, como  $u \in R_i$  e  $u \notin R_i \setminus V(J)$ , obtemos  $u \in V(J)$ . Logo,  $f_k$  é um arco de  $F$  que sai de  $V(J)$ , o que contradiz a escolha de  $i$ , pois  $k < i$ . Essa contradição mostra que  $J \cup \{f_i\}$  satisfaz

$$\forall i \in [k] : \varrho_{J \cup \{f_i\}}(R_i) \leq 1,$$

como queríamos.

O pseudo-código do algoritmo da fase 2, em uma versão ingênua, é muito simples.

#### Fase 2: Construção da $r$ -arborescência geradora

*Recebe um digrafo  $D$ , um vértice  $r$  de  $D$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  de arcos tal que  $\{f_i : i \in [k]\}$  é uma cobertura dos  $r$ -conjuntos de  $D$ , e devolve um subdigrafo que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$ .*

```

1 def phase2( $D$ ,  $r$ ,  $(f_i)_{i \in [k]}$ ):
2      $U, J := \{r\}, \emptyset$ 
```

```

3   for  $t := 1$  to  $|V(D)| - 1$ :
4     for  $i \in [k]$ :
5        $(u_i, v_i) := f_i$ 
6       if  $u_i \in U$  e  $v_i \notin U$ :
7          $U, J := U \cup \{v_i\}, J \cup \{f_i\}$ 
8         break
9   return  $(U, J)$ 

```

## Complexidade

Observe que o algoritmo realiza  $O(|V(D)|)$  iterações e que cada iteração pode ser implementada de modo a consumir tempo em  $O(|F|)$ . Logo, o consumo de tempo está em  $O(|V||F|)$ .

## 4.5 Implementação da fase 2

A implementação da fase 2 é muito simples e segue bem de perto a versão do pseudo-código.

### Fase 2: Construção da arborescência

*Entrada:* D: nx.DiGraph, r: int, F: list[tuple[int, int]]

*Pré-condição:* F é uma cobertura de r-conjuntos de D.

*Saída:* Um DiGraph que é uma r-arborescência geradora de D cujos arcos estão contidos em F.

```

1 def phase2(D: nx.DiGraph, r: int, F: list[tuple[int, int]]):
2   Arb = nx.DiGraph()
3   Arb.add_node(r)
4   n = len(D.nodes())
5   for _ in range(n - 1):
6     for u, v in F:
7       if u in Arb.nodes() and v not in Arb.nodes():
8         edge_data = D.get_edge_data(u, v)
9         Arb.add_edge(u, v, **edge_data)
10        break
11  return Arb

```

## 4.6 Versão alternativa da fase 2

Vamos agora exibir uma versão alternativa e mais eficiente da fase 2, como sugerido em (REY, 2025), que fornece um algoritmo que pode ser implementado em

tempo  $O(|A| + |V|\log|V|)$ . No contexto do nosso problema isso se reduz a  $O(|V|\lg|V|)$ . A ideia é simples e nada mais é do que uma variante do algoritmo de Dijkstra (CORMEN et al., 2009).

A versão alternativa recebe um  $r$ -dиграфo ponderado  $(D, w \geq 0, r)$  e uma sequência  $(f_i)_{i \in [k]}$  extraída da sequência  $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ , obtida na fase 1 do algoritmo de Frank, a qual satisfaz (4.2). Ela devolve um subconjunto  $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$  e satisfaz (4.1a).

Forme o subdigrafo gerador

$$H := (V, \{f_i : i \in [k]\})$$

de  $D$  e a função *prioridade*

$$p : \{f_i : i \in [k]\} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad p(f_i) := i \text{ para cada } i \in [k].$$

Cada iteração do algoritmo começa com um subconjunto  $J$  de arcos de  $H$  e com um subconjunto  $Q$  também de arcos de  $H$ . A primeira iteração começa com

$$J := \emptyset \quad \text{e} \quad Q := \delta_H^+(r).$$

Cada iteração consiste no seguinte.

- Se  $Q = \emptyset$ , então o algoritmo pára e devolve  $J$ .
- Caso contrário, o algoritmo seleciona um arco  $(u, v) \in Q$  tal que  $p(u, v)$  é mínimo.
  - Se  $v \in V(J)$ , então o algoritmo inicia uma nova iteração com  $J$  e  $Q \setminus \{(u, v)\}$  nos papéis de  $J$  e  $Q$ , respectivamente.
  - Se  $v \notin V(J)$ , então o algoritmo inicia uma nova iteração com

$$J' := J \cup \{(u, v)\} \quad \text{e} \quad Q' := (Q \setminus \{(u, v)\}) \cup \delta_H^+(v)$$

nos papéis de  $J$  e  $Q$ , respectivamente.

A implementação dessa versão segue abaixo.

#### Versão alternativa da fase 2

*Entrada:*  $D : nx.DiGraph, r : int, F : list[tuple[int, int]]$

*Pré-condição:*  $F$  é uma cobertura de  $r$ -conjuntos de  $D$ .

*Saída:* Um  $DiGraph$  que é uma  $r$ -arborescência geradora de  $D$

```
1 def phase2_v2(D, r, F):
2     Arb = nx.DiGraph()
```

```

3   for i, (u, v) in enumerate(F):
4       Arb.add_edge(u, v, w=i)
5   V = {r}
6   q = []
7   for u, v, data in Arb.out_edges(r, data=True):
8       heapq.heappush(q, (data["w"], u, v))
9   J = nx.DiGraph()
10  while q:
11      _, u, v = heapq.heappop(q)
12      if v in V:
13          continue
14      J.add_edge(u, v, w=D[u][v]["w"])
15      V.add(v)
16      for x, y, data in Arb.out_edges(v, data=True):
17          heapq.heappush(q, (data["w"], x, y))
18  return J

```

## 4.7 O algoritmo de Frank

O algoritmo de Frank é obtido compondo-se as duas fases. Há duas versões à disposição. Para obter a segunda, basta trocar a chamada da função `phase2_v2` pela chamada da função `phase2`.

### Fase 2: Construção da $r$ -arborescência geradora

*Recebe um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ , e devolve um par  $(J, (R_i, \lambda_i)_{i \in [k]})$  satisfazendo as condições de optimilidade (4.1).*

```

1 def frankv1(D, w, r):
2     (f_i, R_i, lambda_i)_{i \in [k]} := phase1(D, w, r)
3     J := phase2_v2(D, r, {f_i : i \in [k]})
4     return (J, (R_i, lambda_i)_{i \in [k]})
```

## Complexidade

O algoritmo `phase1` tem consumo de tempo em  $O(|V||A|)$ . A sequência devolvida tem comprimento  $k \leq 2|V| - 1$ . Assim, o consumo de tempo de `phase2_v2` está em  $O(|V|\lg|V|)$ . Logo, o consumo de tempo de `frankv1` está em  $O(|V|(\lg|V| + |A|))$ .

# 5 Chu-liu – Edmonds vs. Frank

Neste capítulo, apresentamos uma análise comparativa entre os algoritmos de Chu–Liu–Edmonds e András Frank para o problema da arborescência geradora de peso mínimo. Ambas metodologias são equivalentes e resolvem o mesmo problema, mas adotam estratégias distintas na redução de pesos e na construção da solução.

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds ([CHU; LIU, 1965](#); [EDMONDS, 1967](#)) opera recursivamente selecionando para cada vértice  $v \neq r$  um arco de entrada de peso mínimo, contraindo ciclos detectados e ajustando pesos, até eliminar todos os ciclos.

O algoritmo de Frank ([FRANK, 1981](#); [FRANK; HAJDU, 2014](#)) também reduz pesos subtraindo o mínimo de entrada, mas identifica *subconjuntos minimais* via componentes fortemente conexas, processando múltiplos vértices simultaneamente. Opera em duas fases: (i) redução até criar arcos de peso reduzido zero e (ii) construção da arborescência a partir desses arcos.

A seguir, apresentamos os experimentos empíricos que avaliam o comportamento prático dessas metodologias em termos de tempo de execução, consumo de memória e características estruturais dos digrafos processados. Vale salientar que este trabalho não tem como objetivo explorar otimizações específicas, mas sim o comportamento dos algoritmos em sua forma clássica.

## 5.1 Análise comparativa dos algoritmos

Conduzimos 2000 experimentos em digrafos aleatórios construídos a partir de uma raiz  $r$  com quantidade de vértices  $|V| \in [101, 4996]$  (mediana 2464), número de arestas  $|A|$  proporcional ao número de vértices com densidade média de  $1,98|V|$  arcos e pesos inteiros associados  $\in [1, 50]$ . Para cada instância, executamos Chu–Liu/Edmonds e as duas fases de András Frank com duas versões v1 e v2 para a Fase II, sendo a v2 uma versão otimizada utilizando fila de prioridade - *heap*.

Os 2000 testes confirmaram que todos os métodos retornam sempre o mesmo peso, validando a corretude das implementações e a equivalência teórica entre Chu–Liu/Edmonds e Frank. Além disso, as verificações da condição de optimização dual foram bem-sucedidas em todos os casos para ambas as variantes de Frank.

Quanto ao desempenho temporal, a Fase I de Frank apresenta tempo mediano de 8,93 s (média 12,40s), significativamente superior ao tempo mediano de Chu–Liu/Edmonds (0,25s, média 0,58s). A Fase I, responsável pela identificação de subconjuntos minimais via componentes fortemente conexas, domina o tempo total de execução do método de Frank. A Fase II, em contrapartida, representa uma fração residual do

processamento com mediana de 0,98s para versão 1 do algoritmo e 0,016s para a versão 2.

As Figuras 24–29 apresentam os resultados experimentais.

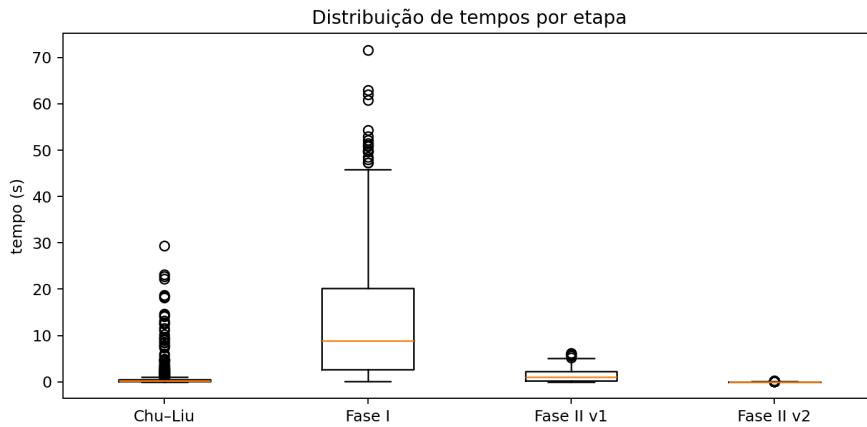


Figura 24 – Distribuição de tempos: Fase I apresenta maior mediana (8,93s) e variabilidade que Chu–Liu/Edmonds (0,25s).

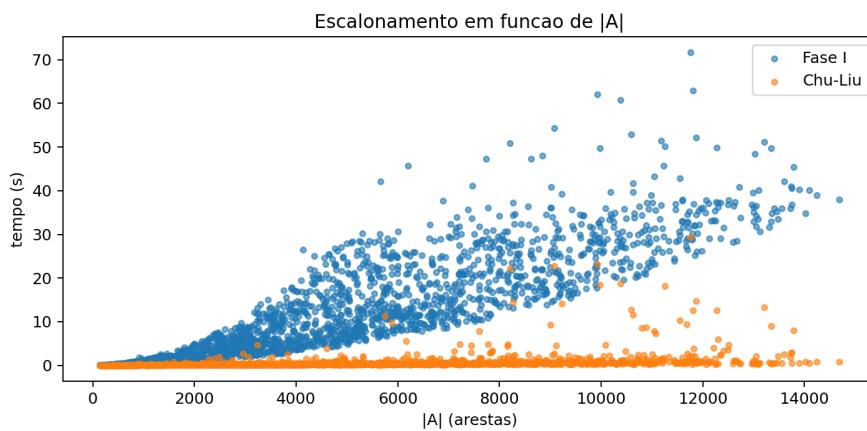


Figura 25 – Escalonamento temporal em função de  $|A|$ : crescimento aproximadamente linear.

A comparação entre as duas variantes da Fase II revela ganho expressivo com o uso de *heap*. A Figura 26 apresenta essa comparação em dois painéis: à esquerda, o boxplot evidencia a diferença de magnitude entre os tempos de execução — enquanto v1 (lista) apresenta mediana de 0,98s, a versão v2 (heap) reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração (*speedup*) mostra distribuição com mediana de 58,12 vezes e média de 61,30 vezes, com metade das instâncias apresentando aceleração entre 28 e 91 vezes (intervalo interquartil). Esses resultados confirmam empiricamente a vantagem da estrutura de dados com complexidade  $O(\log n)$  versus  $O(n)$  por operação de seleção de mínimo.

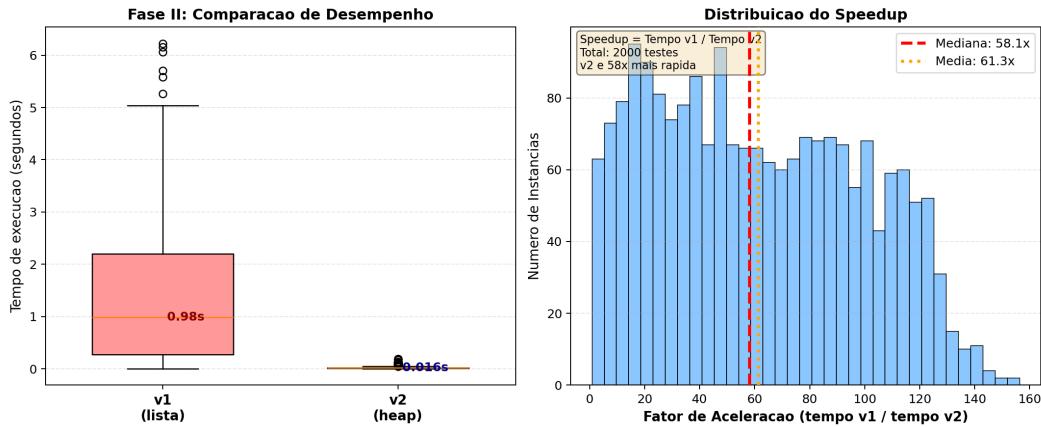


Figura 26 – Comparação de desempenho entre implementações da Fase II. À esquerda, o gráfico de boxplot mostra a distribuição de tempo da v1 do algoritmo com mediana de 0,98s enquanto v2 reduz para 0,016s. À direita, o histograma do fator de aceleração (*speedup*) mostra a distribuição concentrada entre 40 e 80 vezes, com mediana de 58,12 vezes (linha tracejada vermelha) e média de 61,30 vezes (linha pontilhada laranja).

As métricas estruturais do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds são apresentadas na Figura 27 em dois histogramas. O painel esquerdo mostra que o número de contrações é pequeno (mediana 2, média 6,82, máximo 406), com a grande maioria das instâncias requerendo menos de 20 contrações. O painel direito exibe a profundidade de recursão, que acompanha o número de contrações.

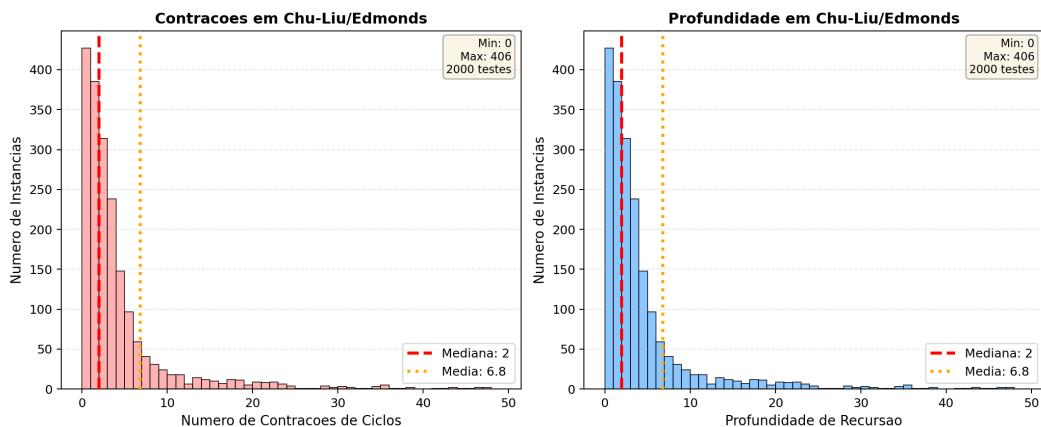


Figura 27 – Métricas estruturais de Chu–Liu/Edmonds. À esquerda, o histograma vermelho mostra que o número de contrações (eixo horizontal) é concentrado em valores baixos — a maioria das 2000 instâncias (eixo vertical) requer menos de 20 contrações, com mediana 2 (linha tracejada) e média 6,82 (linha pontilhada). À direita, o histograma azul da profundidade de recursão exibe padrão similar.

O consumo de memória na Fase I mantém-se modesto (mediana 11,5 MB, média 14,8 MB), viabilizando a aplicação dos algoritmos mesmo em ambientes com recursos

limitados.

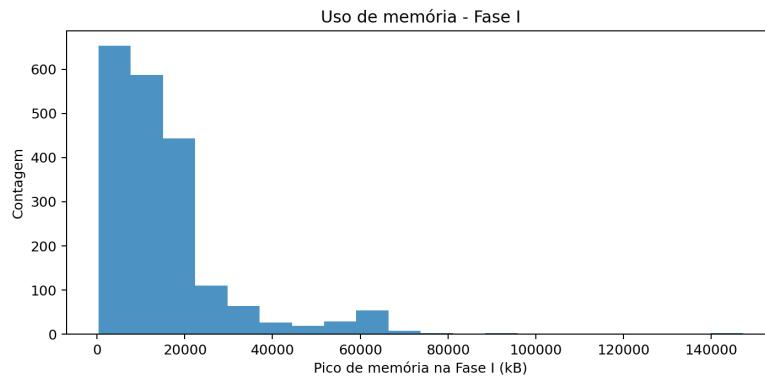


Figura 28 – Pico de memória na Fase I: mediana 11,5 MB.

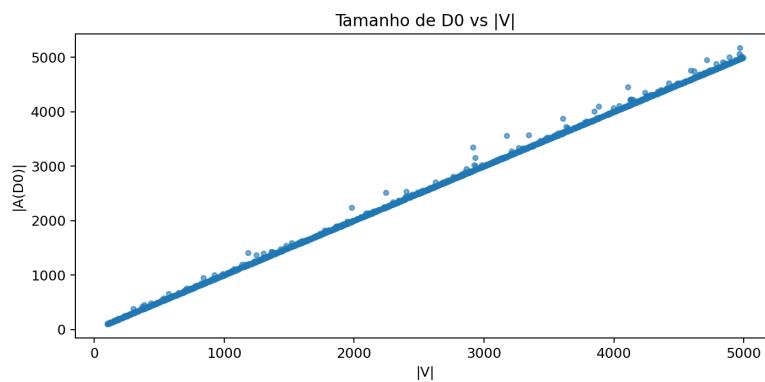


Figura 29 – Tamanho de  $D_0$  versus  $|V|$ : relação linear confirma  $|A_0| = O(|V|)$ .

## 5.2 Conclusões

Os experimentos validam empiricamente as previsões teóricas e revelam características importantes do comportamento prático dos algoritmos. A equivalência de pesos é verificada em todas as 2000 instâncias, somada à verificação bem-sucedida das condições de otimalidade dual.

Chu-Liu/Edmonds demonstra-se mais eficiente para construção direta de arborescências nas instâncias aleatórias testadas (mediana 0,25s, média 0,58s), enquanto o método de Frank apresenta tempo adicional significativo na Fase I (mediana 8,93s, média 12,40s) devido ao processamento de subconjuntos minimais via componentes fortemente conexas. A versão heap da Fase II valida os ganhos assintóticos esperados, com aceleração de 58,12 vezes (mediana) sobre a versão linear, demonstrando que melhorias algorítmicas fundamentais se traduzem em benefícios práticos mensuráveis.

Observamos também que o comportamento em digrafos aleatórios mostra que o número de contrações observado tem mediana 2 e média 6,82 e o subgrafo  $D_0$

mantém razão  $|A_0|/|V_0| \approx 1,00$ . O consumo modesto de memória (mediana 11,5 MB) e a escalabilidade observada viabilizam a aplicação prática de ambos os métodos em contextos com recursos computacionais limitados.

Compreender os algoritmos teoricamente e validá-los empiricamente é fundamental, mas como transformar esse conhecimento em aprendizagem efetiva? Desenvolvemos uma aplicação *web* que permite acompanhar passo a passo o funcionamento de ambos os algoritmos de forma visual e interativa. O próximo capítulo discute os fundamentos didáticos que orientaram esse design.

# 6 A Didática do Abstrato

Thomás de Aquino, em sua obra *De veritate*, argumenta que o conhecimento humano começa com a percepção sensorial do mundo concreto, mas alcança sua plenitude ao transcender o particular e abraçar o universal através da abstração. Esse processo de abstração é fundamental para a matemática e a ciência da computação, onde conceitos complexos são frequentemente representados por meio de símbolos e estruturas que vão além da experiência direta.

Grafos e digrafos são simultaneamente concretos (nós e arestas) e abstratos (propriedades globais como cortes e conectividade). Essas noções exigem transitar entre níveis de representação (intuitivo, visual, simbólico, formal) (TALL, 1991), o que pode ser desafiador. A abstração é poderosa, mas também pode ser uma barreira: conceitos como “complementaridade primal–dual” podem ser difíceis de visualizar e internalizar sem apoio didático adequado.

Então, como ensinar e aprender conceitos abstratos de forma eficaz? O ensino de matemática no ensino superior, especialmente em áreas como teoria dos grafos parecem sofrer com dificuldades específicas. A seguir, discutimos essas dificuldades e como o uso de ferramentas visuais e interativas pode ajudar a superá-las.

## 6.0.1 Fundamentos cognitivos e didáticos

O ensino de matemática no ensino superior exige transitar entre registros de representação (intuitivo, visual, simbólico, formal) com intencionalidade didática (TALL, 1991). À luz da teoria da carga cognitiva, é útil distinguir: (i) a *carga intrínseca*, determinada pela complexidade dos esquemas a construir e pelos pré-requisitos ativados; (ii) a *carga extrínseca*, criada pela forma de apresentação; e (iii) a *carga pertinente (germane)*, isto é, o esforço dedicado à organização e automatização de esquemas (SWELLER, 1988). Em cursos avançados, a extrínseca cresce quando definições, símbolos e figuras não são co-referenciados no tempo e no espaço, dificultando a coordenação entre o que se lê, o que se vê e o que se infere.

Aprender conteúdos de alta abstração envolve lidar com sobrecarga cognitiva intrínseca e extrínseca (SWELLER, 1988). Diretrizes de aprendizagem multimídia indicam que combinar representações verbais e visuais pode reduzir carga desnecessária e favorecer integração semântica (MAYER, 2009; PAIVIO, 1990). Em matemática avançada, a transição entre níveis de representação (intuitivo, formal, simbólico) exige mediação cuidadosa (TALL, 1991) e atenção a como exemplos, contraexemplos e invariantes são apresentados.

No caso específico de algoritmos com provas baseadas em teorias mais comple-

xas, é frequente que estudantes compreendam os passos operacionais sem internalizar a estrutura teórica que garante correção e otimalidade.

### 6.0.2 Lidando com grafos e digrafos

Na prática, o principal obstáculo para o ensino de dígrafos não está na definição de vértices e arcos, mas na articulação entre as operações realizadas nessas estruturas, os algoritmos que as exploram e as provas de correção que os fundamentam. No contexto desta dissertação, isso inclui compreender as arborescências de custo mínimo e os métodos clássicos de Chu–Liu/Edmonds e de Frank. Quando essa articulação não é explicitada, observa-se um aumento simultâneo da *carga intrínseca* (intrínseca devido às múltiplas dependências conceituais) e da *carga extrínseca* (decorrente do esforço de coordenar texto, fórmulas e representações gráficas)

A partir de uma análise reflexiva sobre o próprio processo de aprendizado das autoras, foi possível mapear onde a compreensão falha ou se torna nebulosa. Essas impressões pessoais permitiram sistematizar as dificuldades em três eixos didáticos principais, discutidos a seguir.

(1) Articulação entre decisões locais e coerência global. A articulação entre decisões locais e a integridade global da solução é um ponto crítico em ambos os métodos. Isso fica evidente na seleção da menor aresta de entrada para cada vértice: uma estratégia que parece intuitiva, mas que é enganosa. Escolhas localmente ótimas podem introduzir ciclos, violando a coerência global necessária para uma arborescência. O obstáculo principal está na crença equivocada de que regras de decisão simples e locais resultam automaticamente em uma solução global válida

(2) Acompanhamento dos efeitos de contração e expansão. Um segundo obstáculo central é o gerenciamento das mudanças estruturais e numéricas durante o algoritmo. Métodos de contração de ciclos exigem que o estudante transite mentalmente entre três estados distintos: o grafo original, a versão condensada (onde ciclos tornam-se super-vértices) e a reexpansão final. O desafio não é apenas visual; cada contração altera os custos reduzidos das arestas e redefine quais cortes permanecem ativos. A dificuldade típica ocorre quando se perde a "rastreabilidade" entre essas visões: o aprendiz esquece que uma aresta escolhida no grafo condensado corresponde a uma aresta específica no original, mas com um custo modificado. Sem explicitar o que muda e o que se mantém invariante, o processo torna-se uma "caixa preta", onde o aluno segue passos mecanicamente sem compreender a conexão entre a solução do grafo menor e a do grafo maior.

(3) Relação entre a execução do algoritmo e a formulação primal–dual. Aqui o desafio reside na interpretação teórica das ações mecânicas. Passos operacionais, como contrair ciclos, possuem significados precisos na análise Primal-Dual, que é o motor que garante a otimalidade da solução. No entanto, essa correspondência raramente é

óbvia para o aprendiz. A dificuldade emerge quando o estudante executa o algoritmo como uma "receita de bolo", sem perceber que cada ação está, na verdade, manipulando variáveis duais para tornar restrições "justas" (tight). Explicitar esses vínculos é fundamental: o aluno precisa entender que modificar um custo no desenho do grafo não é apenas um truque aritmético, mas a atualização de um certificado de otimalidade que valida a resposta final.

### 6.0.3 Visualização e interação: princípios em uso

Há evidências de que diagramas e animações, quando bem projetados, podem acelerar a compreensão de relações topológicas e causais (LARKIN; SIMON, 1987; WARE, 2012).

A teoria da carga cognitiva sugere que combinar representações verbais e visuais pode reduzir *carga extrínseca* e favorecer integração semântica (MAYER, 2009; PAIVIO, 1990). Diretrizes de aprendizagem multimídia recomendam evitar excesso de elementos visuais que não contribuam para o entendimento (reduzindo carga extrínseca) e alinhar texto e imagens no tempo e no espaço (reduzindo esforço de coordenação) (MAYER, 2009).

No campo específico de matemática avançada, Tall enfatiza a coordenação entre registros — intuitivo, visual, simbólico e formal — como motor da passagem do pensamento predominantemente procedural para o conceitual (TALL, 1991). Diagramas não são meros adornos: estruturam inferências espaciais e relacionais de modo mais eficiente que sentenças lineares (LARKIN; SIMON, 1987).

De modo convergente, pesquisas em educação em ciência da computação apontam que visualizações de algoritmos só se traduzem em melhora de aprendizagem quando ativam processos mentais do estudante, promovendo previsão, manipulação e explicação, em vez de mera observação passiva (HUNDHAUSEN et al., 2002; NAPS et al., 2003). Assim, tanto na matemática quanto na computação, o poder das visualizações reside menos no formato gráfico em si e mais na forma como elas integram e articulam o raciocínio.

Esses princípios orientaram o desenvolvimento do sistema interativo criado neste trabalho. A ferramenta permite visualizar e manipular dígrafos, acompanhar a execução passo a passo dos métodos de Chu-Liu/Edmonds e de Frank e alternar entre representações essenciais ao entendimento dos algoritmos: o grafo original, as contrações de ciclos, os custos reduzidos e as reexpansões. Ao concentrar em um único ambiente a estrutura gráfica, as operações do algoritmo e sua justificativa conceitual, a ferramenta busca reduzir a carga extrínseca e facilitar a construção de esquemas mentais integrados.

## 6.1 O ecossistema de ferramentas

Materiais que articulam teoria, evidências empíricas e interatividade tendem a favorecer transferência e retenção. Com base nesses fundamentos, realizamos um levantamento de ferramentas digitais relevantes para o ensino de grafos e dígrafos, buscando mapear soluções existentes, suas finalidades e limitações. Esse mapeamento permitiu identificar tanto o espaço de possibilidades quanto lacunas específicas que motivaram o desenvolvimento da aplicação proposta neste trabalho.

De modo geral, ferramentas digitais podem reduzir carga extrínseca e facilitar a integração entre registros visual, simbólico e formal quando a interação é projetada para promover engajamento ativo ([MAYER, 2009](#); [SWELLER, 1988](#); [HUNDHAUSEN et al., 2002](#); [NAPS et al., 2003](#)). No entanto, as abordagens disponíveis atualmente distribuem-se em diferentes categorias, cada qual cobrindo apenas parte das necessidades envolvidas no ensino de algoritmos para arborescências.

A seguir, descrevemos quatro categorias de ferramentas digitais que podem apoiar o ensino de grafos e dígrafos, indicando para cada uma suas forças, limitações e exemplos representativos: (i) diagramas programáveis e tipografia matemática; (ii) exploração e edição de grafos; (iii) visualização de algoritmos; e (iv) ambientes programáveis e reproduzibilidade.

As ferramentas da primeira categoria permitem criar diagramas de grafos com semântica visual consistente, integrando-os a textos matemáticos. Essas ferramentas são úteis para ilustrar conceitos, definições e provas em materiais didáticos. Existem uma série de benefícios didáticos como semântica visual estável (mesmo conceito, apresentado da mesma forma), autoria próxima ao símbolo e ao texto (co-referência) e manutenção e versionamento fáceis. Podemos levantar como limitações o fato de que as interações costumam ser offline (figuras estáticas) e a curva de aprendizado de sintaxe pode ser um obstáculo inicial. Em contextos de prova e definição, esses recursos ancoram a narrativa formal com diagramas que obedecem às diretrizes de ([LARKIN; SIMON, 1987](#); [WARE, 2012](#)).

Já ferramentas de exploração e edição de grafos permitem que os usuários interajam com representações gráficas de dados, facilitando a manipulação e a análise de estruturas complexas. Essas ferramentas são essenciais para atividades que exigem uma compreensão profunda das relações entre os elementos de um grafo. Elas são adequadas para: reconhecer padrões estruturais (componentes, comunidades), discutir implicações de layouts para percepção de estruturas, atividades de descoberta assistida (“*overview → filter → details*”) ([SHNEIDERMAN, 1996](#)). Porém existem algumas limitações, como o fato dessas ferramentas serem focadas para análise exploratória de dados, não em algoritmos específicos, alta carga extrínseca ao alternar entre interface gráfica e conceitos teóricos, além falta de controle fino sobre estados intermediários de

algoritmos.

Sobre as ferramentas de visualização de algoritmos, elas são projetadas para ilustrar o funcionamento interno de algoritmos através de animações e representações gráficas. Essas ferramentas são particularmente eficazes para demonstrar processos dinâmicos e mudanças de estado ao longo do tempo. Evidências sugerem ganhos quando o estudante prevê, manipula e explica o que vê, ao invés de consumir animações passivamente. ([HALIM et al., ; HUNDHAUSEN et al., 2002; NAPS et al., 2003](#))

Ainda temos ferramentas em ambientes programáveis, elas são valiosas para criar exemplos reprodutíveis e explorar algoritmos de forma prática. Contudo, requerem familiaridade com programação e podem introduzir carga extrínseca se o foco se desviar para detalhes de implementação. A curadoria do conteúdo é essencial para manter o foco didático e evitar dispersão.

A Tabela 1 sumariza as categorias discutidas, com suas forças, limitações e exemplos representativos.

Categoría	Forças	Limitações	Exemplos
Diagramas programáveis e tipografia matemática	Semântica visual estável; co-referência entre texto e diagrama; manutenção e versionamento fáceis; layouts consistentes.	Interação offline; curva de aprendizado de sintaxe; pouco adequadas para representar dinâmica de algoritmos.	<i>Graphviz/dot;</i> <i>TikZ/PGF</i>
Exploração e edição de grafos	Layouts automáticos; suporte a filtros e métricas; adequadas para investigar padrões estruturais e relações complexas.	Foco maior em análise do que em algoritmos; alternância entre interface gráfica e conceitos teóricos aumenta carga extrínseca; pouco controle sobre estados intermediários.	<i>Gephi;</i> <i>yEd;</i> <i>Cytoscape</i>
Visualização de algoritmos	Explica transformações dinâmicas; eficaz para raciocínio procedural; ganhos quando o estudante prevê, manipula e explica o que vê.	Pode induzir consumo passivo; limita personalização e integração com código.	<i>VisuAlgo;</i> repositórios de animações de algoritmos
Ambientes programáveis e reprodutilidade	Alta flexibilidade; integra código, texto e visualizações; ideal para exploração prática e criação de exemplos reproduutíveis.	Exige familiaridade com programação; risco de dispersão em detalhes técnicos; requer curadoria didática.	<i>Jupyter Notebooks;</i> <i>NetworkX</i>

Tabela 1 – Síntese das categorias de ferramentas digitais para o ensino de grafos e digrafos.

Esse levantamento mostra que, embora existam soluções robustas em cada categoria, nenhuma delas integra de forma unificada a visualização de algoritmos, a manipulação direta do grafo com acesso aos estados intermediários (como contrações, custos reduzidos e reexpansões) e a coordenação entre a representação visual e a explicação conceitual subjacente. Diante dessas lacunas, desenvolvemos uma aplicação web interativa que combina visualização algorítmica e manipulação gráfica, com foco específico nos procedimentos que compõem a construção de arborescências de custo mínimo.

Na seção seguinte, apresentamos os princípios de interação humano–computador que orientaram esse design e detalhamos como a aplicação se posiciona no ecossistema identificado.

# 7 A interação humano–computacional em ação: uma aplicação *web* interativa

Discutimos até aqui fundamentos teóricos dos algoritmos, análises de complexidade, resultados empíricos e princípios pedagógicos que justificam o uso de ferramentas interativas. Estabelecemos *o quê* ensinar (Chu-Liu/Edmonds e Frank), *por quê* usar visualizações (redução de carga cognitiva, engajamento ativo).

O passo seguinte consiste em transformar essas diretrizes em uma solução concreta. A aplicação *web* desenvolvida busca materializar os princípios apresentados, integrando escolhas didáticas e heurísticas de IHC em uma interface que favorece exploração gradual, leitura orientada e compreensão progressiva. Assim, passamos do plano conceitual para o plano operacional: *como* traduzir teoria e princípios pedagógicos em decisões de design.

Mas antes de fundamentar os conceitos de design utilizados iremos apresentar o objetivo da aplicação, sua estrutura e principais funcionalidades, bem como o fluxo de interação proposto para os usuários.

## 7.1 Descrição da aplicação

A aplicação *web* foi concebida como uma ferramenta educacional interativa para auxiliar na compreensão dos algoritmos de Chu-Liu/Edmonds e Andras Frank para a construção de  $r$ -arborescências dirigidas de custo mínimo. Seu principal objetivo é permitir que estudantes e pesquisadores explorem visualmente o funcionamento desses algoritmos, acompanhando passo a passo suas operações em grafos dirigidos.

### 7.1.1 Estrutura e Funcionalidades

A aplicação organiza-se em módulos funcionais projetados para atender aos objetivos didáticos do projeto, distribuídos em três eixos principais de navegação. O primeiro eixo, dedicado à visualização algorítmica, reúne três páginas focadas na execução passo a passo dos métodos estudados. Uma delas apresenta o algoritmo de Chu-Liu/Edmonds, enquanto as outras duas exploram diferentes implementações do algoritmo de Frank. Nessas páginas, o sistema mostra as iterações de forma sequencial, evidencia as alterações visuais no grafo e exibe o resultado final da  $r$ -arborescência.

O segundo eixo corresponde à modelagem livre, disponibilizando uma interface

de edição em formato de sandbox na qual o usuário pode desenhar grafos arbitrariamente. Esse espaço oferece liberdade para experimentar diferentes topologias e estruturas, permitindo testar hipóteses além dos exemplos previamente definidos.

Por fim, o terceiro eixo concentra-se na disseminação científica, reunindo uma página informativa dedicada à divulgação da dissertação e do projeto. Seu propósito é contextualizar a ferramenta, esclarecer as motivações de seu desenvolvimento e servir como canal de difusão do conhecimento teórico acerca dos algoritmos implementados.

### 7.1.2 Fluxo de interação

O fluxo de interação foi projetado para ser linear e intuitivo, guiando o usuário desde a criação do grafo até a visualização dos resultados do algoritmo. O fluxo típico é o seguinte: primeiro o usuário monta ou carrega um grafo de teste; em seguida, define (ou confirma) o vértice raiz  $r_0$ ; depois, executa o algoritmo, aplicando normalizações e seleção de arestas conforme implementado; então, observa os estados sequenciais gerados, onde cada snapshot reforça invariantes como arestas escolhidas, pesos e estrutura alcançada; por fim, o usuário pode optar por exportar o grafo resultante para replicação em notebooks ou comparação com a abordagem dual futura.

Além disso, o log textual funciona como uma *trilha de auditoria didática*. Cada ação do usuário (adição de aresta, definição de raiz, execução de passo) atualiza o grafo e o log, permitindo rastrear a evolução do estado. A exportação em JSON facilita a reimportação e análise posterior.

### 7.1.3 Arquitetura do Sistema

A arquitetura da aplicação foi projetada para operar integralmente no lado do cliente (*client-side*), utilizando o navegador como ambiente de execução para o código Python via WebAssembly. O sistema estrutura-se em três camadas lógicas principais:

- **Camada de Apresentação:** Responsável pela interface com o usuário, estruturada em HTML5, estilizada com o *framework* utilitário Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript. Esta camada gerencia a entrada de dados, a interatividade dos elementos e a exibição dos resultados, mantendo a responsividade em diferentes dispositivos.
- **Núcleo de Processamento (PyScript):** Atua como a ponte entre a interface *web* e as bibliotecas científicas. O PyScript permite a importação e execução de módulos Python diretamente no DOM. O processamento dos grafos é realizado pela biblioteca NetworkX, enquanto a geração das representações visuais estáticas (snapshots) é delegada ao Matplotlib.

- **Camada de Dados e Persistência:** A troca de informações entre o editor livre e os algoritmos utiliza o formato JSON (*JavaScript Object Notation*). Os grafos são serializados no padrão `node_link`, permitindo a representação leve de nós, arestas e atributos (pesos e custos) para armazenamento local ou transferência entre módulos.

Esta organização modular assegura que cada página carregue apenas os *scripts* necessários para sua função específica, otimizando o tempo de carregamento e o consumo de recursos do navegador.

## 7.2 Princípios de interação humano-computador

A Interação Humano-Computador (IHC) orienta o design de sistemas para que sejam, simultaneamente, eficientes, eficazes e agradáveis ao usuário. Nesse contexto, promovemos uma síntese entre heurísticas clássicas de usabilidade (NIELSEN, 1994; SHNEIDERMAN et al., 2016) e teorias de aprendizagem e carga cognitiva (ROGERS et al., 2011; MAYER, 2009; SWELLER, 1988; NAPS et al., 2003), resultando em oito princípios norteadores: (i) usabilidade, (ii) eficiência cognitiva, (iii) feedback imediato, (iv) engajamento ativo, (v) visão geral com detalhe sob demanda (o mantra overview → filter → details de (SHNEIDERMAN, 1996)), (vi) consistência semântica, (vii) múltiplos registros de representação e (viii) prevenção e recuperação de erros. A seguir, detalhamos cada princípio e sua operacionalização na ferramenta.

Começamos pela usabilidade, que refere-se à facilidade com que os usuários podem aprender a usar um sistema, realizar tarefas e alcançar seus objetivos. Na nossa aplicação, priorizamos uma interface limpa e intuitiva, com controles claros para navegar pelos passos dos algoritmos, selecionar arestas, visualizar cortes ativos e entender a evolução dos custos reduzidos.

Essa clareza se conecta diretamente à eficiência cognitiva, que envolve minimizar a carga cognitiva dos usuários, facilitando a compreensão e o processamento de informações. Implementamos visualizações que destacam mudanças importantes (como contrações e expansões) e fornecem explicações textuais concisas para cada passo, ajudando os usuários a conectar ações com conceitos teóricos.

A medida que o usuário interage com o sistema, o feedback imediato garante que os usuários informados sobre o estado do sistema e as consequências de suas ações. Nossa ferramenta oferece feedback visual e textual em tempo real, mostrando como cada ação afeta o grafo e os custos associados, reforçando a compreensão causal.

Esses elementos favorecem o engajamento ativo, que refere-se à participação dos usuários no processo de aprendizagem, incentivando-os a explorar, experimentar e interagir com o sistema. Nossa aplicação promove o engajamento ativo ao permitir que

os usuários manipulem o grafo, testem diferentes abordagens e visualizem os resultados de suas ações em tempo real, além de acessar descrições passo a passo da execução dos algoritmos.

Para orientar essa exploração sem sobrecarregar o usuário, aplicamos o princípio de visão geral com detalhe sob demanda que permite que os usuários obtenham uma compreensão ampla do sistema, enquanto ainda têm acesso a informações detalhadas quando necessário. Implementamos essa abordagem ao fornecer uma visualização geral do grafo, com a opção de expandir informações sobre arestas e nós específicos conforme o interesse do usuário.

A navegação entre essas diferentes camadas da interface é apoiada pela consistência semântica, que garante que os elementos da interface e suas interações sejam comprehensíveis e previsíveis. Nossa ferramenta mantém a consistência semântica ao usar terminologia e representações visuais padronizadas em toda a aplicação, facilitando a compreensão dos usuários.

Além disso, adotamos o conceito de múltiplos registros de representação, que referem-se à capacidade de apresentar informações de diferentes maneiras, atendendo às preferências e estilos de aprendizagem dos usuários. Na nossa aplicação oferecemos várias representações do grafo (visual, textual, interativa), permitindo que os usuários escolham a forma que melhor se adapta às suas necessidades.

Por fim, implementamos conceitos de prevenção de erros, que envolve projetar o sistema de forma a minimizar a probabilidade de erros dos usuários. Em nosso sistema garantimos feedback em tempo real, para ajudar os usuários a evitar ações indesejadas e compreender melhor as consequências de suas escolhas.

Esses princípios de interação humano-computador foram fundamentais para o desenvolvimento da nossa aplicação *web* interativa, garantindo que ela seja não apenas funcional, mas também acessível e eficaz como ferramenta de aprendizagem. A seguir, detalhamos a implementação técnica da aplicação e como ela se posiciona no ecossistema de ferramentas didáticas para o ensino de grafos.

Princípio	Exemplo Geral	Materialização na Aplicação
Usabilidade	Botões claros para avançar/- voltar etapas	Barra de controles com rótulos diretos (Adicionar Aresta, Executar, Reset); agrupamento visual consistente via Tailwind; nenhum menu profundo aninhado.
Eficiência cognitiva	Reducir elementos irrelevantes no estado atual	Layout estável entre passos; apenas arestas relevantes destacadas; eliminação de ornamentação visual; custos e rótulos legíveis sem rotação.
Feedback imediato	Mostrar efeito de uma ação logo após o clique	Cada ação dispara: (i) atualização do desenho do grafo, (ii) entrada no log textual explicando a mudança (ex.: contração, seleção de aresta).
Engajamento ativo	Usuário prediz antes de revelar próximo passo	Controles passo a passo permitem explorar sequencialmente; usuário insere/edita pesos e escolhe raiz antes de rodar o algoritmo.
Visão geral→ Detalhes	Visão global com acesso a informação pontual	Visão completa do grafo em todos os passos + possibilidade de inspecionar pesos e arestas específicas no log sequencial; estados anteriores preservados para comparação mental.
Consistência semântica	Mesmo conceito, mesma cor/ forma	Raiz destacada de forma fixa; arestas selecionadas mantêm estilo; semântica cromática não muda entre passos (evita remapeamento mental).
Múltiplos registros	Texto + grafo + (futuro) estrutura derivada	Combinação de: descrição textual no log, representação visual do grafo, parâmetros simbólicos (pesos); prepara expansão futura para mostrar custos reduzidos.
Prevenção / recuperação de erros	Impedir entrada inválida / ação reversível	Validação de pesos (numéricos); bloqueio de execução sem raiz definida; botão Reset para recompor estado limpo sem recarregar página.

Tabela 2 – Síntese dos princípios de interação humano-computador aplicados e sua realização concreta na ferramenta interativa.

### 7.3 Detalhes de Implementação

A aplicação foi implementada utilizando tecnologias *web* modernas, com foco em simplicidade, modularidade e reprodutibilidade. A seguir, detalhamos os principais aspectos técnicos da implementação.

#### 7.3.1 Estrutura de arquivos

A estrutura de arquivos da aplicação é organizada em diretórios e componentes bem definidos. O diretório `scripts/` reúne os scripts Python e JavaScript responsáveis pela lógica da aplicação. O diretório `assets/` armazena imagens, ícones e demais recursos estáticos utilizados pela interface. As páginas HTML encontram-se no diretório `pages/`, estruturadas de forma modular para facilitar manutenção e extensão futura. Por fim, o arquivo `pyscript.json` contém as configurações necessárias ao funcionamento do PyScript no ambiente da aplicação.

#### 7.3.2 Páginas da Aplicação *web*

A seguir, apresentamos as páginas que compõem a ferramente desenvolvida.

### Home:

o arquivo `home.html` serve como a página inicial da aplicação, oferecendo uma visão geral do projeto, incluindo um resumo do trabalho e informações sobre os integrantes. A estrutura da página é projetada para ser acolhedora e informativa, utilizando Tailwind CSS para garantir uma aparência moderna e responsiva. Abaixo, apresentamos um exemplo de captura de tela da página.

Figura 30 – Captura de tela de `home.html`: visão geral com resumo e integrantes.

### Draw graph:

Editor de grafos livre com funcionalidades de criação, edição, importação e exportação. Ele constitui o segundo módulo que definimos na seção de [7.1.1 Utiliza Cytoscape.js para visualização interativa e PyScript para lógica algorítmica](#). Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

Figura 31 – Captura de tela de `draw_graph.html`: editor livre de grafos.

### Tese:

Essa página compõem o módulo 3 apresentado na seção 7.1.1, nela apresentamos nossa tese bem como permitimos o download da mesma, o intuito é permitir com que o usuário possa ter um entendimento maior tanto dos algoritmos quanto do nosso sistema.



Figura 32 – Captura de tela de `tese.html`: visão geral com resumo e integrantes.

### Chuliu/Edmonds:

página dedicada ao visualizador do algoritmo de Chu-Liu/Edmonds. Inclui um passo a passo guiado para criar um grafo, selecionar o nó raiz e executar o algoritmo, com feedback visual e textual. Ela faz parte do primeiro módulo destacado na seção 7.1.1. Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

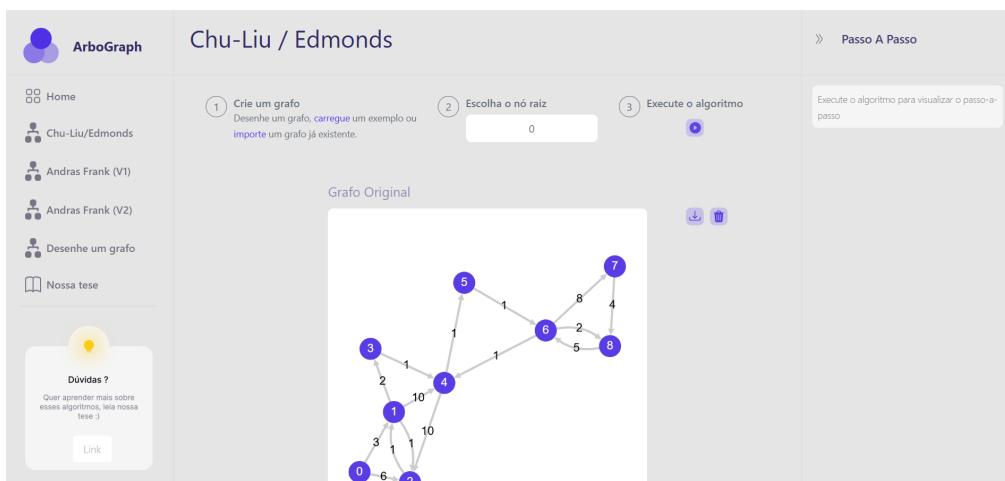


Figura 33 – Captura de tela de `chuliu.html`: criação de grafo, seleção de raiz e execução do algoritmo.

A figura a seguir destaca a tripartição funcional da página: navegação lateral,

conteúdo interativo central e guia de passos à direita.

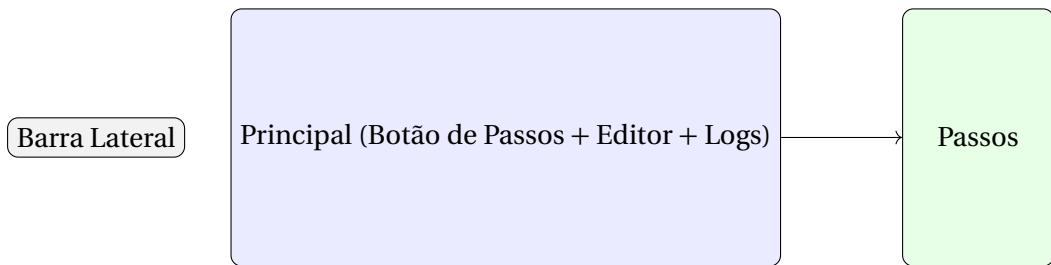


Figura 34 – Tripartição funcional (navegação, conteúdo interativo, guia de passos). A presença do passo a passo auxilia na compreensão sequencial do algoritmo.

### 7.3.3 Página do Andrasfrank (v1) e Andrasfrank (v2):

Ambas as páginas são dedicadas ao visualizador do algoritmo de Andras Frank (em suas diferentes implementações elucidadas em capítulos anteriores). Assim como na página dedicada ao algoritmo de Chu–Liu/Edmonds, essa página também faz parte do módulo 1 definido na seção 7.1.1 Além disso, ele inclui um passo a passo guiado para criar um grafo, selecionar o vértice raiz e executar o algoritmo, com feedback visual e textual. Abaixo, apresentamos uma captura de tela da página.

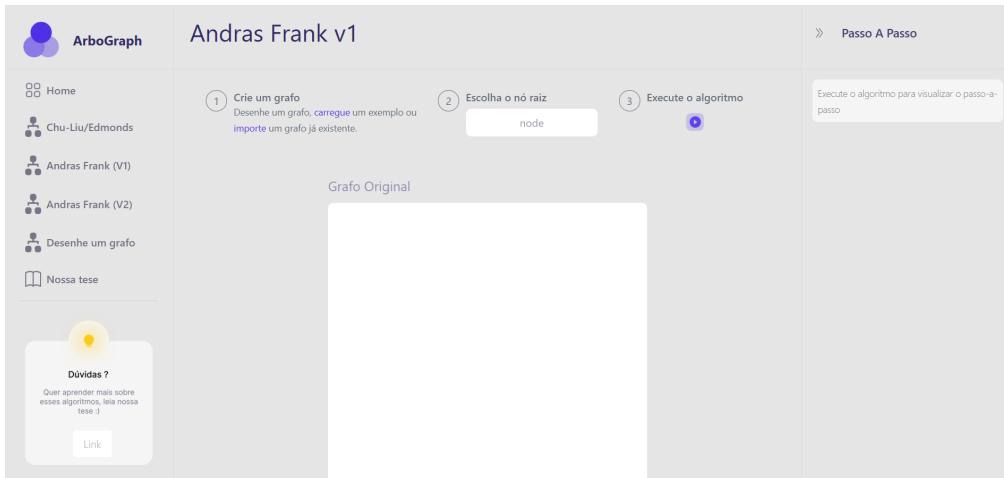


Figura 35 – Captura de tela de `andrasfrank_v1.html`: interface para o procedimento em duas fases, a tela da página `andrasfrank_v2.html` tem aparência similar.

Assim como na página do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds (fig. 34) a página dedicadas às implementações do algoritmo do Andras Frank também utilização o padrão de tripartição funcional para manter consistência cognitiva entre páginas.

### 7.3.4 Estrutura das páginas

A estrutura das páginas da aplicação segue um padrão modular e reutilizável, facilitando a manutenção e extensão futura. Cada página é composta por três seções

principais: uma barra lateral de navegação, um conteúdo interativo central e um painel de passos à direita. Essa organização promove consistência cognitiva e facilita a navegação do usuário entre diferentes funcionalidades.

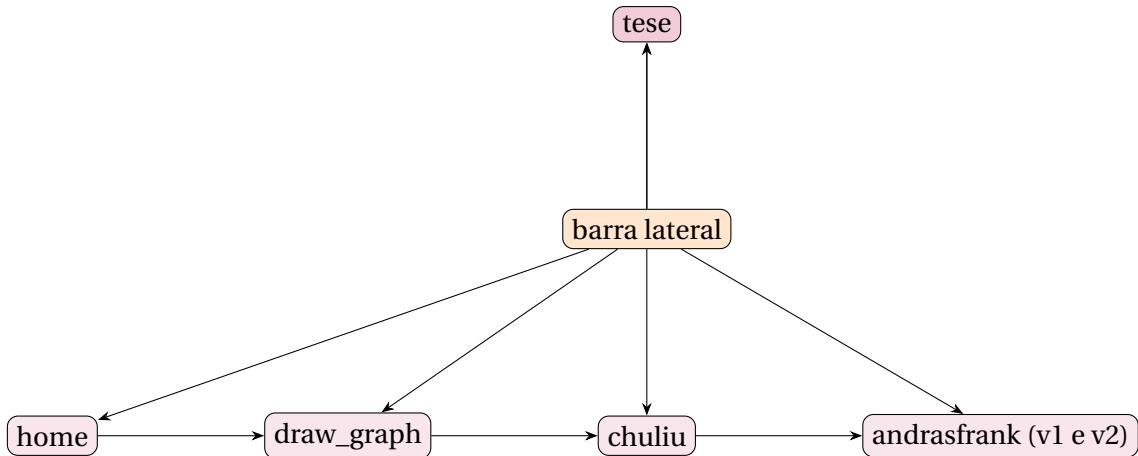


Figura 36 – A barra lateral injeta navegação consistente; páginas de algoritmo formam trilha exploratória.

A arquitetura modular e reutilizável das páginas *web* facilita manutenção, extensão e consistência. A barra lateral comum reduz esforço cognitivo ao navegar, enquanto o padrão tripartido de conteúdo interativo reforça familiaridade. A sequência lógica de páginas guia o usuário do contexto à experimentação e formalização, alinhando-se a princípios pedagógicos. Essa estrutura coesa apoia o aprendizado eficaz des conceitos de arborescências dirigidas e algoritmos associados.

## 7.4 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Este capítulo detalhou a implementação técnica do visualizador interativo de arborescências dirigidas, cobrindo desde a arquitetura *web* até a integração de algoritmos complexos. A escolha de tecnologias modernas como HTML5, CSS3, JavaScript e PyScript permitiu criar uma interface intuitiva e responsiva, facilitando a experimentação e a compreensão dos algoritmos de Chu–Liu/Edmonds e Andras Frank. A reutilização de padrões arquiteturais promoveu consistência cognitiva, enquanto a estrutura modular assegura a manutenção e a extensibilidade do projeto. Não obstante os resultados alcançados, a aplicação apresenta oportunidades de evolução para aprofundar a experiência didática. Atualmente, a ausência de uma visualização explícita da contração de ciclos e a falta de uma comparação lado a lado entre as abordagens de Chu–Liu e Frank limitam a clareza de certos processos. Para endereçar essas questões, planeja-se incorporar animações de contração com agrupamentos colapsáveis e desenvolver um módulo comparativo dedicado, incluindo uma extensão paralela para a abordagem primal–dual de Frank. No aspecto visual, o layout planar simples impõe restrições em instâncias den-

sas. A mitigação desse problema prevê a adoção de layouts adaptativos (como *spring* ou *dagre-like*) e a implementação de uma camada de sinalização cromática para custos reduzidos e arcos críticos ( $c' = 0$ ). Por fim, a funcionalidade de exportação será expandida para gerar relatórios automáticos (PDF/ZIP) que contemplem estados intermediários e métricas de desempenho, superando a limitação atual de exportar apenas os grafos inicial e final. No próximo capítulo, discutiremos as conclusões gerais da dissertação.

## 8 Conclusão

Ao final desta tese, refletimos sobre o ponto de chegada: o visualizador interativo de arborescências dirigidas. Este projeto foi concebido com o propósito de apresentar de forma didática os algoritmos envolvidos no problema da  $r$ -arborescência de custo mínimo.

Nessa trajetória, os fins não justificam os meios; pelo contrário, os meios pelos quais buscamos a solução, os algoritmos de Chu–Liu/Edmonds e o de Andras Frank, constituem o ponto central de discussão e a essência deste trabalho.

O algoritmo de Chu-Liu/Edmonds é um clássico da teoria dos grafos, com diversas aplicações práticas. Já o algoritmo de Andras Frank, embora menos conhecido, oferece uma abordagem elegante e eficiente para o mesmo problema, utilizando conceitos avançados de otimização combinatória. Ambos os algoritmos possuem complexidades e sutilezas que podem ser desafiadoras para estudantes e profissionais que buscam compreendê-los profundamente. Nesse contexto ressaltamos invariantes, cortes e custos reduzidos, e mostrando como escolhas locais se conectam a garantias globais de optimalidade. Procuramos menos descrever “o que o algoritmo faz” e mais explicitar “por que” cada passo se justifica, aproximando a mecânica operacional da linguagem primal–dual e de suas condições de complementaridade.

Os algoritmos foram implementados em Python, aproveitando bibliotecas como NetworkX para manipulação de grafos e Matplotlib para visualização. A escolha do Python se deve à sua sintaxe clara e à vasta gama de bibliotecas científicas disponíveis, facilitando tanto a implementação quanto a compreensão dos algoritmos. A integração com PyScript permitiu que esses algoritmos fossem executados diretamente no navegador, eliminando a necessidade de instalações complexas e tornando a ferramenta acessível a um público mais amplo. Os resultados foram validados através de testes com grafos de diferentes tamanhos e estruturas, garantindo a correção e eficiência das implementações.

A interface *web* foi projetada com foco na usabilidade e na experiência do usuário, utilizando HTML5, CSS3 e JavaScript para criar uma plataforma interativa e intuitiva obedecendo a princípios de design centrados no usuário orientados por princípios de interação humano-computacional. A estrutura modular da página permite fácil navegação entre diferentes seções, como a criação de grafos, a execução dos algoritmos e a visualização dos resultados. Elementos interativos, como botões, menus suspensos e áreas de desenho, foram incorporados para facilitar a interação do usuário com a ferramenta. A reutilização de padrões arquiteturais entre as páginas promoveu consistência cognitiva, enquanto a sequência lógica de páginas guia o usuário do contexto à

experimentação e formalização, alinhando-se a princípios pedagógicos orientados pela teoria da aprendizagem.

A partir desse desenvolvimento, o visualizador interativo de arborescências dirigidas se apresenta como uma ferramenta valiosa para estudantes, educadores e profissionais interessados em teoria dos grafos e algoritmos de otimização. A seguir destacamos algumas contribuições.

## 8.1 Contribuições

Este trabalho contribui para a interseção entre teoria dos grafos e design pedagógico, culminando no desenvolvimento de um visualizador interativo de arborescências dirigidas que promove a compreensão de algoritmos cruciais para o problema da  $r$ -arborescência de custo-mínimo.

A primeira e principal contribuição reside na integração detalhada de algoritmos complexos, como os de Chu–Liu/Edmonds e Andras Frank. A ferramenta não apenas implementa esses métodos, mas também destaca suas bases teóricas e operacionais, demonstrando como decisões locais se traduzem em garantias globais de otimalidade.

Este rigor teórico é complementado pelo design pedagógico da aplicação. Mediante a aplicação de princípios de Interação Humano-Computador (IHC) e de aprendizagem multimídia, o sistema foi desenhado para criar uma interface que facilita a compreensão de conceitos complexos, atuandoativamente na redução da carga cognitiva e promovendo o engajamento do usuário.

Tecnicamente, a contribuição se manifesta em uma arquitetura modular e reutilizável. O desenvolvimento utilizou tecnologias modernas como PyScript, NetworkX e Matplotlib, resultando em uma estrutura web que assegura fácil manutenção e consistência cognitiva entre as diferentes páginas. Essa escolha técnica culmina na criação de uma ferramenta acessível e reproduzível, que pode ser acessada diretamente no navegador, eliminando barreiras de adoção e permitindo que usuários experimentem e aprendam de forma autônoma.

Em suma, estas contribuições avançam o estado da arte na visualização e ensino de algoritmos de grafos, oferecendo uma plataforma que combina rigor teórico com práticas de design centradas no usuário.

## 8.2 Limitações

Apesar dos avanços alcançados, a implementação apresenta algumas limitações que devem ser consideradas. A complexidade dos algoritmos pode levar a tempos de execução elevados para grafos muito grandes, o que pode impactar a experiência do usuário. Além disso, a interface, embora intuitiva, pode beneficiar-se de melhorias

adicionais em termos de acessibilidade e usabilidade, especialmente para usuários com menos experiência em manipulação de grafos (descrevemos essas melhorias na seção 6.4 do capítulo anterior). Outro ponto de atenção está relacionado a dependência de bibliotecas externas, como Cytoscape.js e PyScript, que podem introduzir desafios de compatibilidade e manutenção a longo prazo.

### 8.3 Trabalhos Futuros

Para aprimorar a ferramenta, futuras iterações podem focar em otimizações de desempenho para lidar com grafos maiores de forma mais eficiente. A interface pode ser refinada com base em testes de usabilidade, incorporando feedback de uma base de usuários diversificada. A adição de funcionalidades avançadas, como suporte a diferentes tipos de grafos e algoritmos adicionais, pode expandir o escopo da ferramenta. A integração de análises de aprendizado, como rastreamento do progresso do usuário e sugestões personalizadas, também pode enriquecer a experiência educacional. Finalmente, a realização de estudos formais para avaliar o impacto pedagógico da ferramenta em ambientes educacionais contribuirá para validar sua eficácia e orientar futuras melhorias.

# Referências

- CHU, Y. J.; LIU, T. H. On the shortest arborescence of a directed graph. *Scientia Sinica*, v. 14, p. 1396–1400, 1965. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [52](#).
- CORMEN, T. H. et al. *Introduction to Algorithms*. 3rd. ed. [S.l.]: MIT Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [50](#).
- EDMONDS, J. Optimum branchings. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 71B, p. 233–240, 1967. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [52](#).
- FEOFILOFF, P. *Algoritmos de Programação Linear: Programação Linear Concreta*. [s.n.], 2005. Notas de curso, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/prog-lin>>. Citado na página [43](#).
- FRANK, A. Kernel systems of directed graphs. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, v. 41, n. 1-2, p. 63–76, 1979. Citado na página [40](#).
- FRANK, A. A weighted matroid intersection approach to R-arborescences and related problems. In: FRANK, A. et al. (Ed.). *Paths, Flows, and VLSI-Layout*. [S.l.]: Springer, 1981. Two-phase primal-dual method for minimum-cost arborescences; placeholder citation. Citado na página [52](#).
- FRANK, A. *Connections in Combinatorial Optimization*. Oxford: Oxford University Press, 2011. (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications). ISBN 978-0-19-920527-1. Citado na página [40](#).
- FRANK, A.; HAJDU, G. A simple algorithm and min–max formula for the inverse arborescence problem. *Algorithms*, v. 7, n. 4, p. 637–647, 2014. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [14](#) e [52](#).
- FULKERSON, D. R. Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph. *Mathematical Programming*, v. 6, p. 1–13, 1974. Citado 2 vezes nas páginas [40](#) e [42](#).
- HALIM, S. et al. *VisuAlgo*. <<https://visualgo.net/>>. Acesso didático a visualizações interativas de algoritmos, acessado em 2025. Citado na página [61](#).
- HUNDHAUSEN, C. D.; DOUGLAS, S. A.; STASKO, J. T. A meta-study of algorithm visualization effectiveness. *Journal of Visual Languages & Computing*, v. 13, n. 3, p. 259–290, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [59](#), [60](#) e [61](#).
- LARKIN, J. H.; SIMON, H. A. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, v. 11, n. 1, p. 65–100, 1987. Citado 2 vezes nas páginas [59](#) e [60](#).
- LESTON-REY, M. Notas de aula de métodos de otimização. 2025. Citado na página [40](#).
- MAYER, R. E. *Multimedia Learning*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 4 vezes nas páginas [57](#), [59](#), [60](#) e [66](#).

- NAPS, T. L. et al. Exploring the role of visualization and engagement in computer science education. In: *Proceedings of the 34th SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education*. [S.l.]: ACM, 2003. p. 131–152. Citado 4 vezes nas páginas [59](#), [60](#), [61](#) e [66](#).
- NIELSEN, J. *Usability Engineering*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1994. Fonte das heurísticas clássicas de usabilidade. ISBN 978-0125184069. Citado na página [66](#).
- PAIVIO, A. *Mental Representations: A Dual Coding Approach*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990. Citado 2 vezes nas páginas [57](#) e [59](#).
- REY, P. S. L. Comunicação oral. 2025. Citado na página [49](#).
- ROGERS, Y.; SHARP, H.; PREECE, J. *Interaction Design: Beyond Human-Computer Interaction*. 3rd. ed. [S.l.]: Wiley, 2011. ISBN 978-0470665763. Citado na página [66](#).
- SHNEIDERMAN, B. The eyes have it: A task by data type taxonomy for information visualizations. In: *Proceedings 1996 IEEE Symposium on Visual Languages*. [S.l.]: IEEE, 1996. p. 336–343. Citado 2 vezes nas páginas [60](#) e [66](#).
- SHNEIDERMAN, B. et al. *Designing the User Interface: Strategies for Effective Human-Computer Interaction*. 6th. ed. [S.l.]: Pearson, 2016. ISBN 978-0134380384. Citado na página [66](#).
- SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, v. 12, n. 2, p. 257–285, 1988. Citado 3 vezes nas páginas [57](#), [60](#) e [66](#).
- TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1991. Citado 2 vezes nas páginas [57](#) e [59](#).
- WARE, C. *Information Visualization: Perception for Design*. 3rd. ed. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [59](#) e [60](#).

## Anexos

## ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.