UFABC

Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos:
Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

1 de dezembro de 2025

Sumário

UFABC

O Problema

UFABC

Encontrar uma r-Arborescência Geradora de Peso Mínimo

Dado um r-digrafo ponderado (D, w, r):

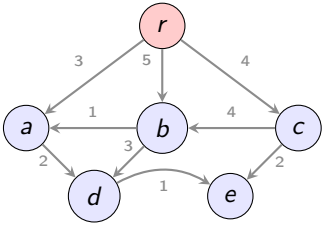
- Encontrar uma r-arborescência geradora de peso mínimo de D

Algoritmos estudados:

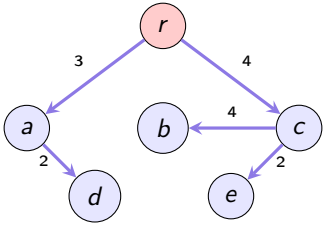
1. Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
2. András Frank (1981-2014)

Exemplo: r-Arborescência Geradora Mínima

UFABC

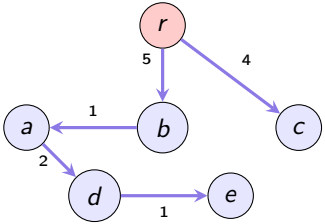


Digrafo Original



r-Arborescência Geradora

Peso: 16



Geradora Mínima

Peso: 13

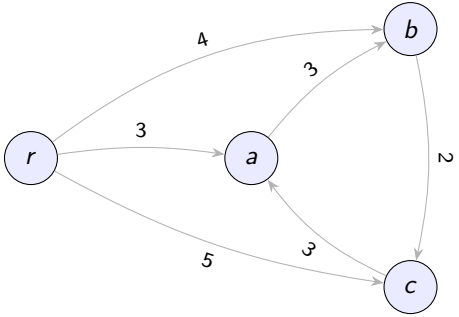
Intermissão

UFABC

Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

Encontrando uma r-Arborescência Geradora Mínima

UFABC

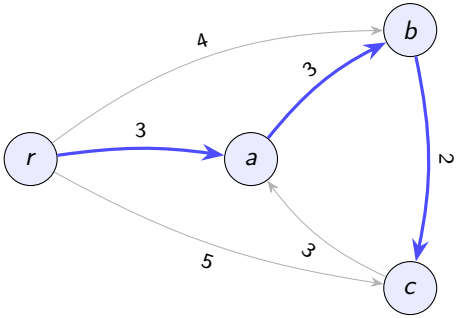


Motivação

UFABC

Objetivo:
Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de peso mínimo que entra em v e forma a arborescência:

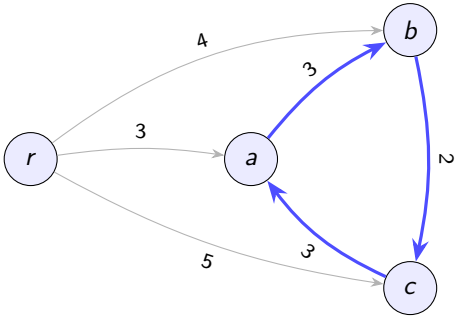
$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$



Aqui tem um problema...

UFABC

Problema:
A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r-arborescência.



Chu-Liu-Edmonds

UFABC

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu–liu–edmonds$((D, w, r))$:

1. **Reduzir pesos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair o peso $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$ do peso de cada arco que entra em v;
2. **Construir** D_0: escolhendo um arco a_v de peso reduzido zero para cada $v \neq r$;
3. **Verificar**: se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0
   Caso contrário:
4. **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair;
5. **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r);
6. **Devolver**: expandir(T').

Passo 1: Redução de Pesos

UFABC

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

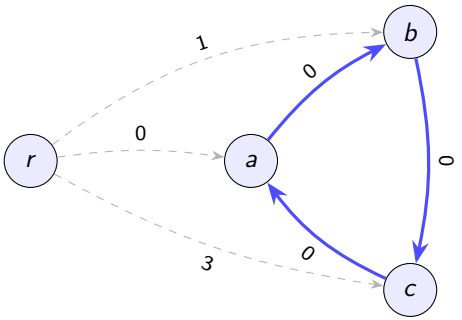
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Peso λ-reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ:

- $\lambda(a) = 3$, $\lambda(b) = 3$, $\lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm peso zero!

Arcos com peso zero são candidatos para A_0 em D_0.

Passo 2: Construção de D_0

UFABC

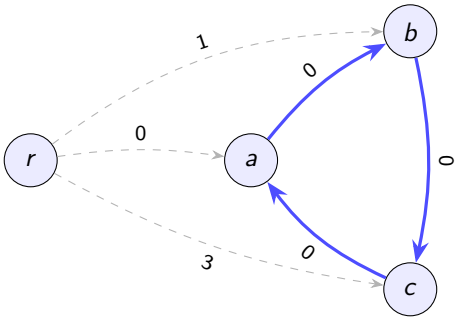
Formação de D_0:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (a, b)
- (b, c)
- (c, a)

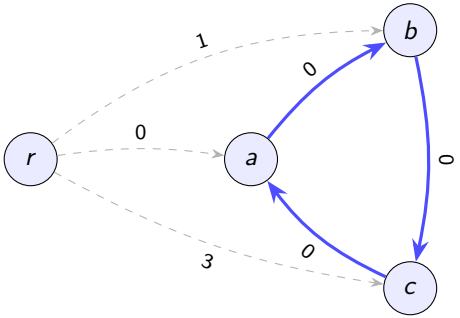


Passo 3: Verificação de D_0

UFABC

Verificar:
Se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0

Caso contrário:
D_0 contém algum ciclo C.
$\Rightarrow$ **prosseguir** para os passos 4 e 5.



D_0 não é uma r-arborescência!

Neste exemplo, $A_0 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ não forma uma r-arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a).

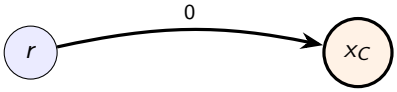
Passo 4: Contração de Ciclos

UFABC

Operação:
Contrair ciclo C em supervértice x_C.
Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de menor peso daqueles que vão de r até x_C.



Digrafo contraído D' - *podem ter arcos saindo de x_C em D'.*

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D.

Passo 5: Chamada Recursiva

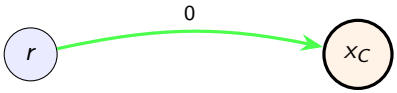
UFABC

Novo problema:
(D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu–liu–edmonds}(D', w', r)$$

Resultado:
T' é uma r-arborescência geradora mínima em (D', w')



r-arborescência ótima em D'

Passo 6: Reexpansão da Solução

UFABC

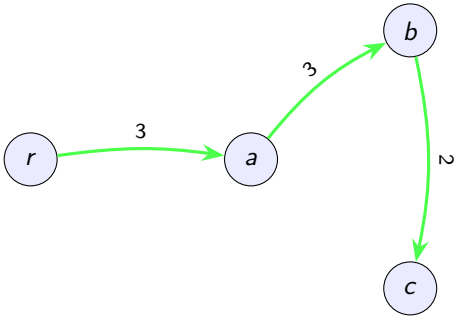
Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

1. Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
2. Incluir uv em T
3. Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v

Resultado: T é uma r-arborescência geradora mínima



r-arborescência final no digrafo original

Complexidade do Algoritmo

UFABC

Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até $O(n)$ chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de pesos, construção de D_0, detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade $O(m)$

Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde n é o número de vértices e m é o número de arcos no digrafo original.

Intermissão

UFABC

Algoritmo de András Frank

Algoritmo de András Frank

UFABC

Abordagem em Duas Fases

Fase I (Fulkerson): construir cobertura de r-conjuntos via redução de pesos
Fase II (Frank): extrair r-arborescência geradora da cobertura

Objetivo da Fase I:
Construir uma sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ tal que:

- $F := \{f_i : i \in [k]\}$ é uma **cobertura de r-conjuntos**
- A sequência $(R_i, \lambda_i)_{i \in [k]}$ é **w-disjunta**

Objetivo da Fase II:
Extrair r-arborescência geradora mínima usando F e a propriedade w-disjunta.

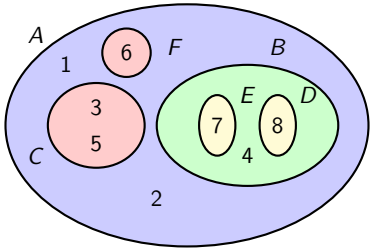
Fase I: Conceitos Fundamentais

UFABC

Coleção Laminar:

Uma coleção $\mathcal{L}$ de conjuntos é **laminar** se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{L}$:

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset$$



Exemplo de coleção laminar: $\mathcal{L} = \{A, B, C, D, E, F\}$

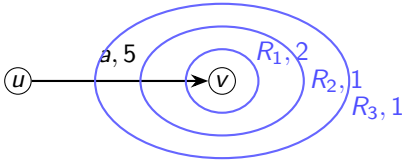
Fase I: Conceitos Fundamentais

UFABC

Sequência w-disjunta: Uma sequência $((R_i, \lambda_i))_{i\in[k]}$ é w-**disjunta** se:

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i \left[a \in \delta^-(R_i)\right] \leq w(a) \quad \forall a \in A(D)$$

O peso $w(a)$ limita a soma das multiplicidades λ_i sobre os conjuntos que a entra.



Um arco a de peso 5 que entra nos r-conjuntos R_1, R_2 e R_3 com multiplidades 2, 1, e 1, respectivamente.

Fase I: r-conjunto Minimal

UFABC

r-conjunto minimal não coberto por F

Um r-conjunto R é **minimal não coberto por** F se:

- F não entra em R (i.e., $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$)
- Para todo $\emptyset \subset R' \subset R$, existe arco de F que entra em R'

Propriedade importante:
Se S é uma fonte de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$, então S é um r-conjunto minimal não coberto por $A(D_0)$.

Fase I: Condições de Otimalidade

UFABC

Seja F uma cobertura de r-conjuntos e $((R_i, \lambda_i))_{i\in[k]}$ uma sequência w-disjunta.

Se $w(F) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i$, então valem as **condições de otimalidade**:

$$\forall a \in F: \quad w(a) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i \, [a \in \delta^-(R_i)] \tag{CO1}$$

$$\forall i \in [k]: \quad \varrho_F(R_i) = 1 \tag{CO2}$$

Consequência

Se F é uma r-arborescência geradora e as condições valem, então F tem peso mínimo e a sequência tem valor máximo.

Fase I: Objetivo

UFABC

Construir uma sequência $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i\in[k)}$ que satisfaz:

1. $\{f_i : i \in [k)\}$ é uma **cobertura de** r**-conjuntos** de D
2. $((R_i, \lambda_i))_{i\in[k)}$ é uma **sequência** w**-disjunta**
3. $\forall j \in [k) : \sum_{i\in[k)} \lambda_i \left[f_j \in \delta^-(R_i)\right] = w(f_j)$ (CO1)

Interpretação:

- A Fase I constrói uma cobertura F que satisfaz a condição de otimalidade (CO1)
- Cada arco $f_j \in F$ tem peso "totalmente explicado"pelos λ_i
- A coleção $\{R_i\}$ é laminar e os λ_i respeitam os pesos dos arcos

Fase I: Algoritmo de Fulkerson

UFABC

Processo iterativo

Dado: um r-digrafo ponderado (D, w, r)

1. **Inicializar**:
   - $c := w$ (pesos correntes)
   - $\sigma := \epsilon$ (sequência vazia)
   - $F := \emptyset$ (conjunto de arcos selecionados)
2. **Enquanto** existir fonte R em $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin R$:
   - Calcular $\lambda := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R)\}$
   - Selecionar $f \in \delta^-(R)$ com $c(f) = \lambda$
   - $\sigma := \sigma \cdot (f, R, \lambda)$
   - $F := F \cup \{f\}$
   - $c := c - \lambda 1_{\delta^-(R)}$ (reduzir pesos)
   - $D_0 := (V, F)$ (atualizar digrafo auxiliar)
3. **Devolver**: σ

Fase I: Invariantes do Algoritmo

UFABC

Em cada iteração, a sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ satisfaz:

1. $c = w - \sum_{i \in [k]} \lambda_i 1_{\delta^-(R_i)}$ (pesos reduzidos)
2. $\forall i \in [k] : f_i$ entra em R_i
3. $\forall i \in [k], \forall j \in [i] : f_j$ *não* entra em R_i (prioridade)
4. $\{R_i : i \in [k]\}$ é uma **coleção laminar** de r-conjuntos
5. $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ é uma sequência w-**disjunta**
6. $\forall i \in [k] : c(f_i) = 0$ (peso reduzido zero)

A laminaridade garante estrutura hierárquica; a condição (6) garante a otimalidade.

Fase I: Encontrando r-conjuntos Minimais

UFABC

Como encontrar um r-conjunto minimal não coberto?

Seja $D_0 := (V, F)$ onde $F = \{f_i : i \in [k]\}$.

1. Calcular a condensação $\mathcal{C}(D_0)$
2. Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
3. Encontrar uma fonte S em $\mathcal{C}(D_0)$ tal que $r \notin S$

Proposição

Toda fonte S de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$ é um r-conjunto minimal não coberto por F.

Complexidade: identificação de CFCs em $O(|A|)$ usando Kosaraju.

Exemplo: Digrafo Inicial

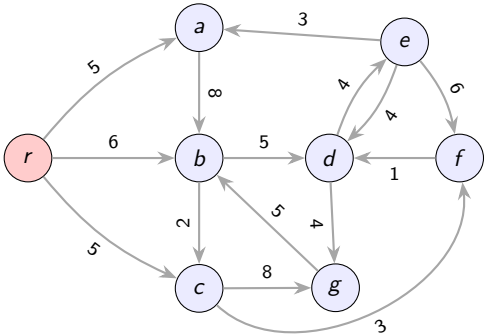
UFABC

Digrafo ponderado (D, w, r):

- Vértices: $\{r, a, b, c, d, e, f, g\}$
- Raiz: r

Pesos dos arcos:

- $(r, a) : 5$, $(r, b) : 6$, $(r, c) : 5$
- $(a, b) : 8$, $(b, c) : 2$, $(b, d) : 5$
- $(c, g) : 8$, $(c, f) : 3$, $(d, g) : 4$
- $(d, e) : 4$, $(e, d) : 4$, $(e, a) : 3$
- $(e, f) : 2$, $(f, d) : 1$



Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a r-arborescência geradora de peso mínimo.

Fase I: Iteração 1 - Encontrar r-conjunto Minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$ (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$ tem 8 fontes

Fontes que são r-conjuntos:

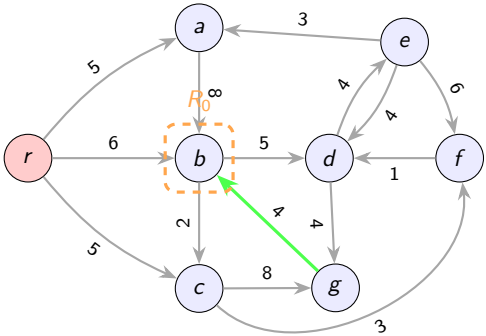
- $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{f\}$, $\{g\}$

Escolha:

$R_0 = \{b\}$ (minimal)

Arcos que entram em $\{b\}$:

- $(r, b) : 6$
- $(g, b) : 5 \leftarrow$ **mínimo**
- $(a, b) : 8$



$\lambda_0 = 5$,

$f_0 = (g, b)$

Fase I: Iteração 2 - Redução de Pesos

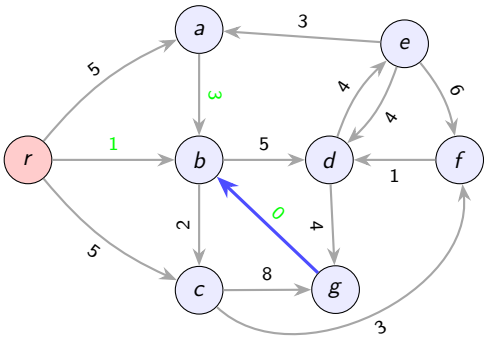
UFABC

Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, \{(r, a)\})$

Redução de pesos:

- $c(r, b) = 6 - 5 = 1$ ✓
- $c(g, b) = 5 - 5 = 0$ ✓
- $c(a, b) = 8 - 5 = 3$ ✓



Arco em azul tem peso zero

Observação

Pesos são reduzidos para garantir que σ seja w-disjunta

Fase I: Iteração 3 - Redução de Pesos

UFABC

Atualização:

- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, F)$

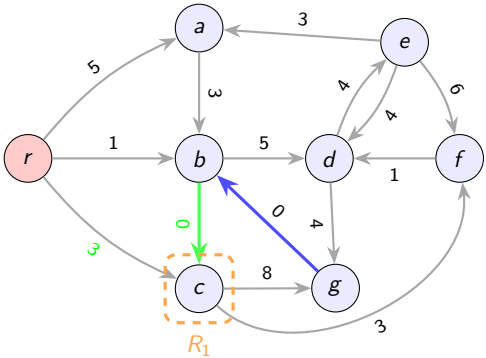
Escolha: $R_1 = \{c\}$

Redução:

- $(r, c) : 5$, $(b, c) : 2 \leftarrow$ **mínimo: 2**
- $c(r, c) = 5 - 2 = 3$, $c(b, c) = 2 - 2 = 0$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(g, b), (b, c)\}$:

- CFCs: $\{r\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$
- Fontes em D_0: $\{r\}, \{b\}$



Arco em azul tem peso zero

Fase I: Iteração 4 - Redução de Pesos

UFABC

Estado: $F = \{(g, b), (b, c)\}$

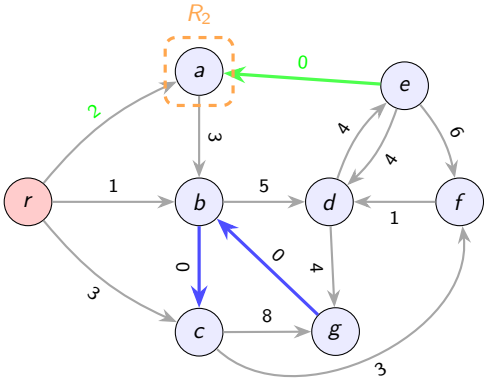
Escolha: $R_2 = \{a\}$

Arcos que entram em $\{a\}$:

- $(r, a) : 5$
- $(e, a) : 3 \leftarrow$ **mínimo**

Seleção:

- $\lambda_2 = 3$
- $f_2 = (e, a)$



Fase I: Iteração 5 - Redução de Pesos

UFABC

Estado: $F = \{(g, b), (b, c), (e, a)\}$

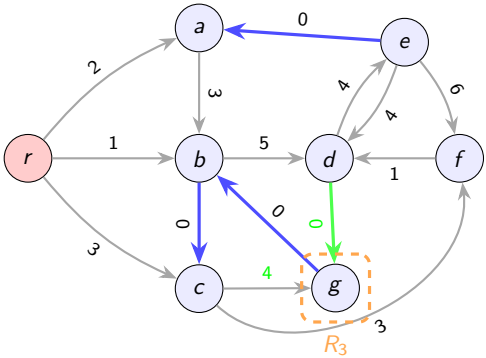
Escolha: $R_3 = \{g\}$

Arcos que entram em $\{g\}$:

- $(c, g) : 8$
- $(d, g) : 4 \leftarrow$ **mínimo**

Seleção:

- $\lambda_3 = 4$
- $f_3 = (d, g)$



Fase I: Iteração 6 - Redução de Pesos

Estado: $F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g)\}$

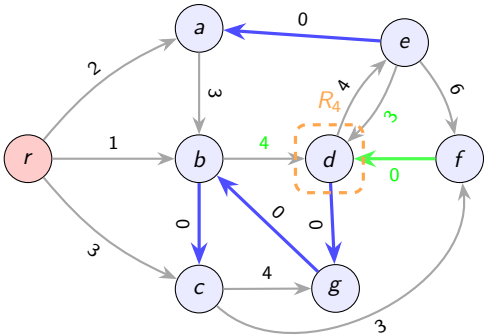
Escolha: $R_4 = \{d\}$

Arcos que entram em $\{d\}$:

- $(b, d) : 5$
- $(e, d) : 4$
- $(f, d) : 1 \leftarrow$ **mínimo**

Seleção:

- $\lambda_4 = 1$
- $f_4 = (f, d)$



Fase I: Iteração 7 - Redução de Pesos

UFABC

Estado:
$F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d)\}$

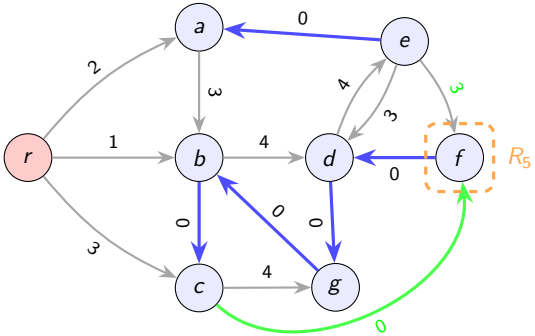
Escolha: $R_5 = \{f\}$

Arcos que entram em $\{f\}$:

- $(c, f) : 3 \leftarrow$ **mínimo**
- $(e, f) : 6$

Seleção:

- $\lambda_5 = 3$
- $f_5 = (c, f)$



Fase I: Iteração 8 - Redução de Pesos

UFABC

Estado: $F = \{(g,b),(b,c),(e,a),(d,g),(f,d),(c,f)\}$

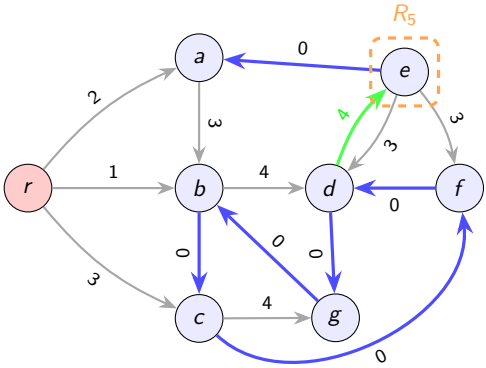
Escolha: $R_6 = \{e\}$

Arcos que entram em $\{e\}$:

- $(d,e) : 4 \leftarrow$ **mínimo**

Seleção:

- $\lambda_6 = 4$
- $f_6 = (d,e)$



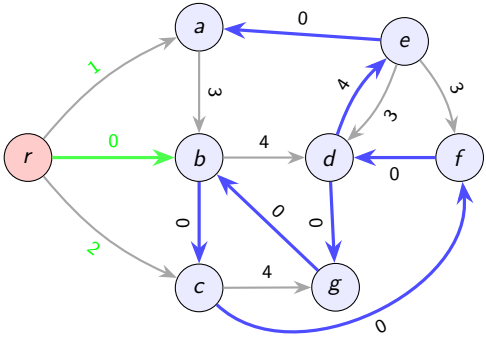
Fase I: Iteração 9 - Estado Final

UFABC

Redução:

- $c(r, b) = 1 - 1 = 0$

Condição de parada satisfeita!



Todos arcos de F têm peso zero!

Intermissão

UFABC

Fase II: Duas Abordagens

Fase II: Construção da Arborescência

UFABC

Entrada: Sequência $(f_i)_{i \in [k]}$ da Fase I
Objetivo: Extrair $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$ que é uma r-arborescência geradora
Algoritmo guloso:

1. Iniciar com $U := \{r\}$ e $J := \emptyset$
2. Para $t = 1$ até $|V| - 1$:
   - Para cada $f_i = (u_i, v_i)$ na sequência:
   - Se $u_i \in U$ e $v_i \notin U$:
     - $U := U \cup \{v_i\}$
     - $J := J \cup \{f_i\}$
     - Passar para próxima iteração

Invariante

Em cada iteração, $\varrho_J(R_i) \leq 1$ para todo $i \in [k]$

Fase II: Exemplo - Extração da Arborescência

Entrada da Fase II:

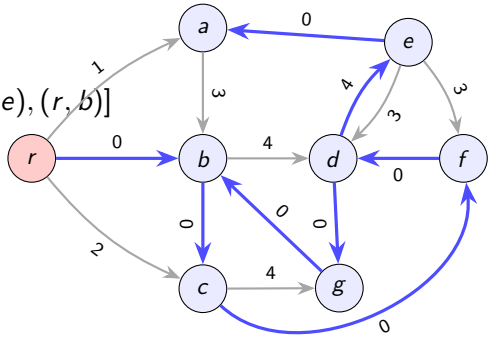
- $F = [f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7] = [(b, g), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d), (c, f), (d, e), (r, b)]$

Estado inicial:

- $U = \{r\}$ (alcançados)
- $J = \emptyset$ (arborescência)

Objetivo:

- Selecionar $|V| - 1 = 7$ arcos
- Manter propriedade de arborescência



Verde = vértices em U

Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D, não apenas F.

Fase II: Iteração 1

UFABC

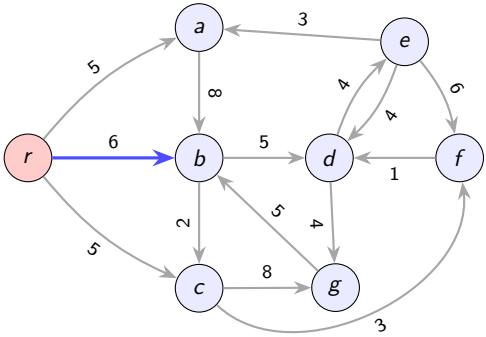
Estado: $U = \{r\}$, $J = \emptyset$

Procurar em F:

- $f_7 = (r, b)$: $r \in U$, $b \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (r, b) a J
- $U := U \cup \{b\} = \{r, b\}$



$J = \{(r, b)\}$, peso $= 6$

Fase II: Iteração 2

UFABC

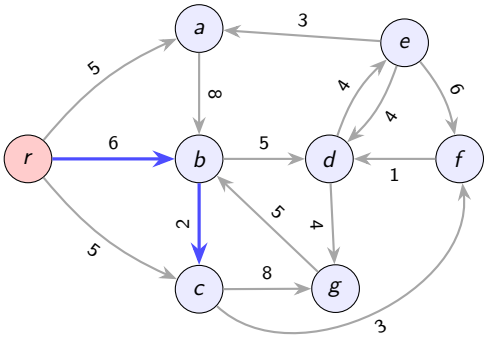
Estado: $U = \{r, b\}$

Procurar em F**:**

- $f_1 = (b, c)$: $b \in U$, $c \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (b, c) a J
- $U := U \cup \{c\} = \{r, b, c\}$



$J = \{(r, b), (b, c)\}$, peso $= 8$

Fase II: Iteração 3

UFABC

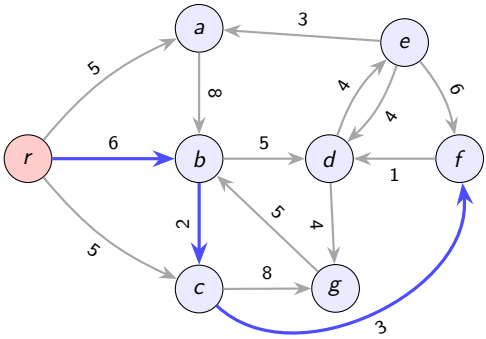
Estado: $U = \{r, b, c\}$

Procurar em F:

- $f_5 = (c, f)$: $c \in U$, $f \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (c, f) a J
- $U := U \cup \{f\} = \{r, b, c, f\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f)\}$, peso $= 11$

Fase II: Iteração 4

UFABC

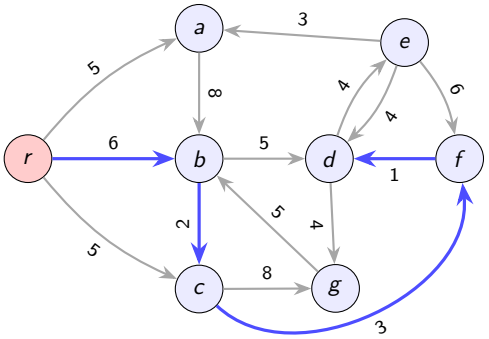
Estado: $U = \{r, b, c, f\}$

Procurar em F:

- $f_4 = (f, d)$: $f \in U$, $d \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (f, d) a J
- $U := U \cup \{d\} = \{r, b, c, f, d\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d)\}$, peso $= 12$

Fase II: Iteração 5

UFABC

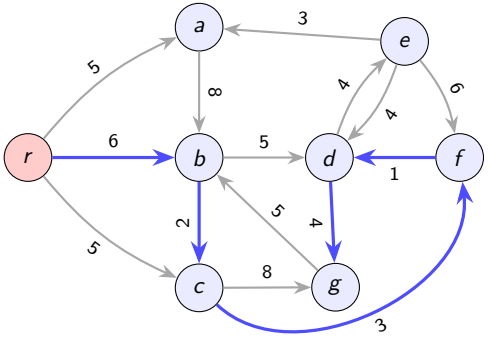
Estado: $U = \{r, b, c, f, d\}$

Procurar em F:

- $f_3 = (d, g)$: $d \in U$, $g \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (d, g) a J
- $U := U \cup \{g\} = \{r, b, c, f, d, g\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g)\}$,
peso $= 16$

Fase II: Iteração 6

UFABC

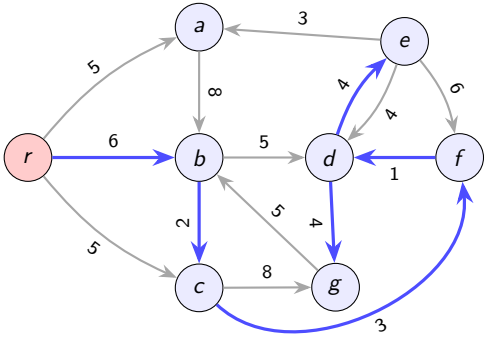
Estado: $U = \{r, b, c, f, d, g\}$

Procurar em F:

- $f_6 = (d, e)$: $d \in U$, $e \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (d, e) a J
- $U := U \cup \{e\} = \{r, b, c, f, d, g, e\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g), (d, e)\}$,
peso $= 20$

Fase II: Iteração 7 (Interação final)

UFABC

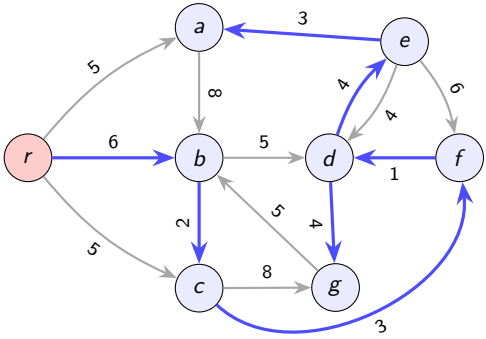
Estado: $U = \{r, b, c, f, d, g, e\}$

Procurar em F:

- $f_2 = (e, a)$: $e \in U$, $a \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (e, a) a J
- $U := U \cup \{e\} = \{r, b, c, f, d, g, e, a\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g), (e, a)\}$,
peso $= 23$

Intermissão

UFABC

Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

Comparação de Desempenho

UFABC

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	**0,016 s**	**0,020 s**

Speedup Fase II

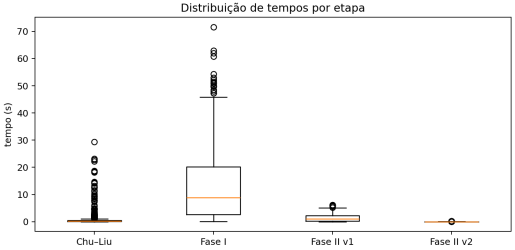
Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

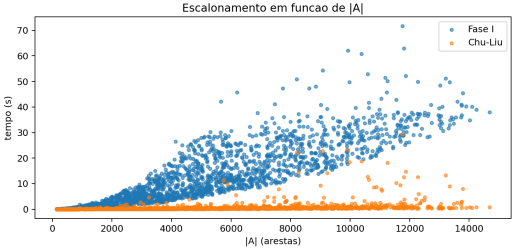
Escalonamento e Consumo de Memória

UFABC

Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arestas
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida





Principais Resultados

UFABC

- **Corretude validada:** pesos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
  - Memória modesta: 11,5 MB

Conclusões dos Experimentos

UFABC

- Equivalência teórica e prática dos algoritmos confirmada
- Chu-Liu/Edmonds é mais eficiente
- Fase I de Frank é o gargalo computacional
- Heap na Fase II traz ganhos práticos expressivos
- Algoritmos são escaláveis e viáveis para grandes digrafos

Intermissão

UFABC

Didática do Abstrato

Fundamentos Cognitivos e Didáticos

UFABC

Desafios do Ensino de Matemática Abstrata

- Conhecimento abstrato exige transitar entre registros: intuitivo, visual, simbólico e formal.
- **Carga cognitiva:**
  - Intrínseca: complexidade dos conceitos e pré-requisitos.
  - Extrínseca: forma de apresentação e coordenação entre texto, fórmulas e figuras.
  - Pertinente: esforço dedicado à organização dos esquemas mentais.
- Combinar representações verbais e visuais reduz sobrecarga e favorece integração semântica.

Desafios na Ensino de Algoritmos de Grafos

UFABC

Três Eixos de Dificuldade

1. **Decisões locais vs. coerência global:** Escolhas localmente ótimas podem gerar ciclos, dificultando a compreensão da solução global.
2. **Contração e expansão:** Transitar entre grafo original, condensado e reexpansão exige rastreabilidade e clareza sobre o que muda e o que permanece.
3. **Relação com a teoria primal-dual:** Dificuldade em conectar ações operacionais do algoritmo com fundamentos teóricos e certificados de otimalidade.

Solução: Visualização e interação bem projetadas facilitam a integração entre prática e teoria.

O Ecossistema de Ferramentas para Ensino de Grafos

UFABC

Categorias de Ferramentas Digitais

- **Diagramas programáveis:** Visualização estável e integrada ao texto matemático (*Graphviz*, *TikZ*).
- **Exploração e edição de grafos:** Manipulação gráfica e análise estrutural (*Gephi*, *yEd*, *Cytoscape*).
- **Visualização de algoritmos:** Animações e explicações dinâmicas (*VisuAlgo*).
- **Ambientes programáveis:** Integração de código, texto e visualização para exemplos reprodutíveis (*Jupyter*, *NetworkX*).

Nenhuma ferramenta cobre todos os aspectos didáticos de forma integrada. A aplicação proposta busca preencher essa lacuna.

Objetivos da Ferramenta Didática

UFABC

- Facilitar a compreensão dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank
- Permitir aos usuários interagir com grafos e observar o funcionamento dos algoritmos
- Fornecer feedback imediato sobre as operações realizadas
- Ser acessível via navegador web, sem necessidade de instalação

Intermissão

UFABC

Aplicação Web

Aplicação web

UFABC

Ferramenta web interativa para ensino de algoritmos de arborescências dirigidas, permitindo visualização passo a passo, edição livre de grafos e exportação de resultados, com arquitetura modular e foco didático.

Módulos principais:

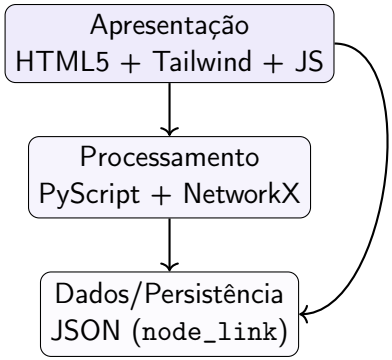
- **Visualização Algorítmica:** Páginas para execução passo a passo dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank.
- **Modelagem Livre:** Editor sandbox para desenhar, testar e exportar grafos arbitrários.
- **Disseminação Científica:** Página informativa sobre o projeto e a dissertação.

Arquitetura da Aplicação

UFABC

Estrutura em três camadas:

- **Apresentação:** Interface construída em HTML5, estilizada com Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript.
- **Processamento (PyScript):** Executa algoritmos em Python (NetworkX) diretamente no navegador, gerando visualizações estáticas com Matplotlib.
- **Dados e Persistência:** Utiliza JSON (`node_link`) para serializar grafos, armazenar pesos e permitir exportação/importação entre módulos.

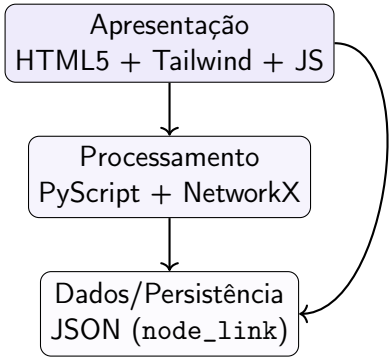


Arquitetura da Aplicação

UFABC

Benefícios:

- Processamento local e rápido
- Facilidade de uso e reprodutibilidade
- Modularidade e extensibilidade



Princípios de IHC Aplicados

Fundamentos para o Design da Ferramenta

O desenvolvimento da aplicação web foi guiado por oito princípios de Interação Humano-Computador (IHC), integrando heurísticas de usabilidade e teorias de aprendizagem:

- **Usabilidade:** Interface limpa, controles claros e navegação intuitiva.
- **Eficiência cognitiva:** Redução da carga mental, destaque para informações relevantes.
- **Feedback imediato:** Atualização visual e textual em tempo real a cada ação.
- **Engajamento ativo:** Usuário explora, manipula e prediz resultados.
- **Visão geral com detalhe sob demanda**
- **Consistência semântica:** Terminologia e estilos padronizados em toda a interface.
- **Múltiplos registros de representação:** Grafo visual, log textual e parâmetros simbólicos.
- **Prevenção e recuperação de erros**

Intermissão

UFABC

Conclusões

Contribuições do Trabalho

UFABC

1. **Implementação completa** de dois algoritmos clássicos
   - Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
   - András Frank: duas fases com otimização heap
2. **Análise experimental** detalhada
   - 2000 instâncias aleatórias
   - Comparação de desempenho e características estruturais
3. **Aplicação web interativa**
   - Ferramenta didática para visualização
   - Execução passo a passo dos algoritmos
   - Design centrado no usuário

Trabalhos Futuros

UFABC

Extensões Possíveis

- Implementação de algoritmos para resolver o problema da r-arborescência inversa geradora mínima
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer