Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos:
Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

26 de novembro de 2025

Sumário

O Problema

Encontrar uma r-Arborescência Geradora de Custo Mínimo

Dado um r-digrafo ponderado (D, w, r):

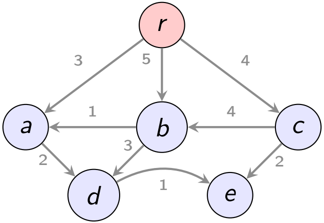
- Encontrar uma r-arborescência geradora de custo mínimo de D

Algoritmos estudados:

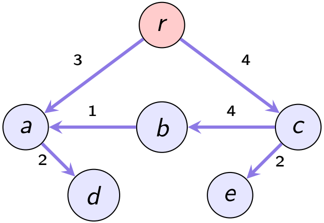
1. Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
2. András Frank (1981-2014)

UFABC

Exemplo: r-Arborescência Geradora Mínima

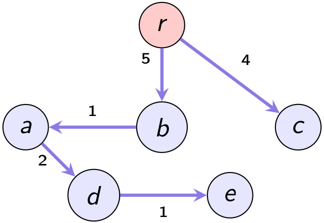


Digrafo Original



r-Arborescência Geradora

Custo: 16



Geradora Mínima

Custo: 13

Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu–liu–edmonds((D, w, r)):

1. **Reduzir custos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
2. **Construir** D_0: escolhendo um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
3. **Verificar**: se D_0 é uma r-arborescência $\Rightarrow$ **devolver** D_0
   Caso contrário:
4. **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair
5. **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r)
6. **Devolver**: expandir(T')

UFABC

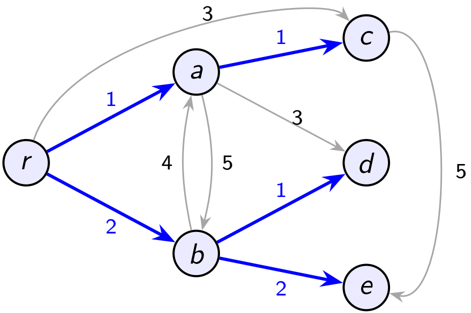
Escolha Gulosa

Definição:
Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de custo mínimo que entra em v:

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

Propriedade:
Se T é uma r-arborescência, então T tem custo mínimo.

Prova: Para qualquer outra r-arborescência F, temos $w(T) \leq w(F)$.



Resultado

$T = \{(r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e)\}$ é uma r-arborescência de custo mínimo!

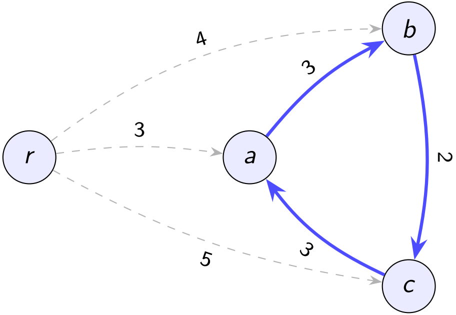
E quando a escolha gulosa falha?

Problema:
A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r-arborescência.

Exemplo:
Os arcos de custo mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r.

Solução:

1. Reduzir custos
2. Identificar ciclos
3. Contrair ciclos
4. Resolver recursivamente



Arcos azuis formam um **ciclo**!

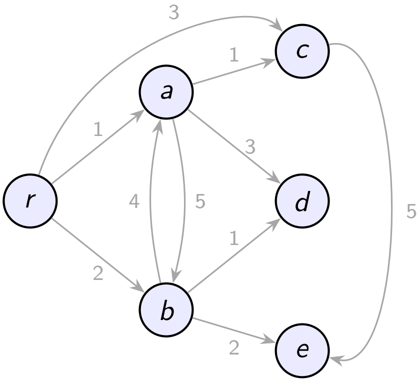
Passo 1: Redução de Custos

Objetivo

Encontrar a r-arborescência geradora de custo mínimo através do algoritmo de Chu-Liu-Edmonds.

Pontos principais:

- Redução de custos por vértice;
- Construção de D_0 com arestas de custo zero;
- Contração de ciclos e recursão.



Custos Reduzidos

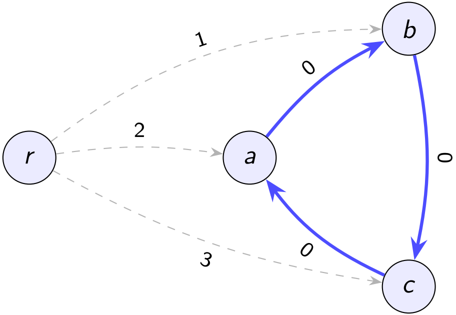
Definição:
Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custo λ-reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Propriedade importante:
T é ótima em (D, w) se, e somente se, T é ótima em (D, w_λ).



Arcos do ciclo têm custo zero!

Passo 1: Redução de Custos

Escolha gulosa:

Para cada $v \neq r$, calcular:

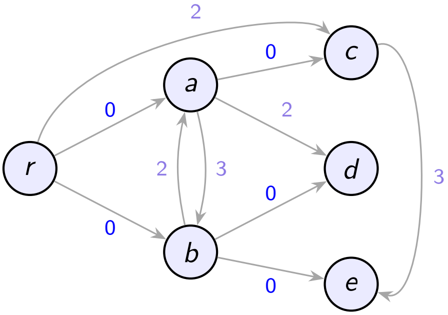
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custos λ-reduzidos:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ:

- $\lambda(a) = 1$, $\lambda(b) = 2$
- $\lambda(c) = 1$, $\lambda(d) = 1$, $\lambda(e) = 2$



Arcos com custo zero são candidatos para D_0

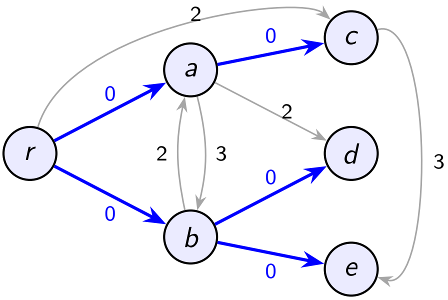
Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$

Formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$



Arcos escolhidos:

- (r, a), (r, b)
- (a, c), (b, d), (b, e)

D_0 é uma r-arborescência!

Neste exemplo, $D_0 = \{(r, a), (r, b), (a, c), (b, d), (b, e)\}$ forma uma r-arborescência.

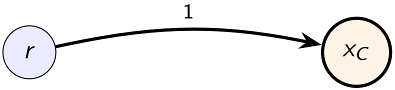
Contração de Ciclos

Operação:
Contrair ciclo C em supervértice x_C.

Novo problema:
(D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

Recursão:
Resolver problema no digrafo menor recursivamente.



Digrafo contraído D'

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D.

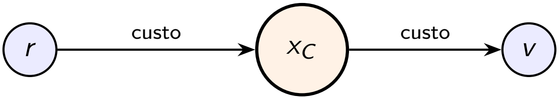
Passo 3: Contração de Ciclos

Quando D_0 tem ciclo:

Se após redução de custos, D_0 contém um ciclo C, contraímos C em supervértice x_C

Em outras palavras: todos os vértices de C viram um único vértice

Custos são ajustados usando os custos λ-reduzidos



Chamada Recursiva

Resolvemos chu-liu-edmonds($D/C \mapsto x_C, w_\lambda/C \mapsto x_C, r$)
Em outras palavras: aplicamos o mesmo algoritmo no digrafo menor

Reexpansão da Solução

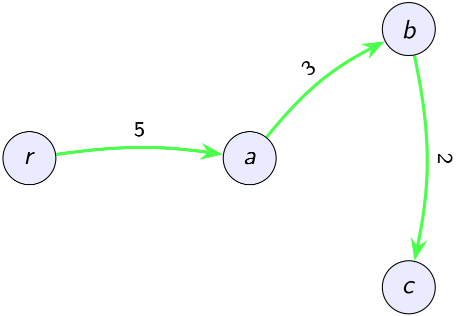
Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

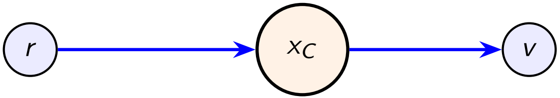
1. Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
2. Incluir uv em T
3. Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v

Resultado: T é uma r-arborescência de custo mínimo



r-arborescência final no digrafo original

Passo 4: Chamada Recursiva



O algoritmo devolve T' (arborescência no digrafo contraído)

Em outras palavras: encontramos a r-arborescência ótima no grafo contraído

Próximo passo: expandir T' de volta para obter T no digrafo original

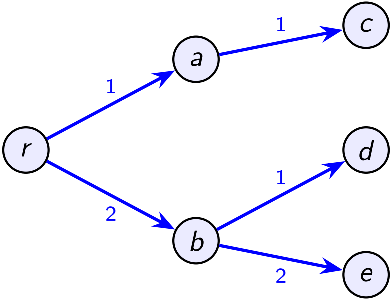
Solução Final – Exemplo Original

Para nosso exemplo inicial:
A escolha gulosa produziu uma r-arborescência diretamente!

Resultado:

- Não há ciclo
- Todos vértices alcançáveis de r
- Cada vértice tem grau de entrada 1
- Solução ótima encontrada!

Custo total: $1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7$

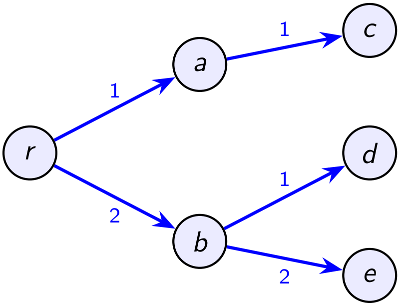


Solução Final – Exemplo Original

Para nosso exemplo:
Como D_0 já é uma r-arborescência, o algoritmo termina diretamente!

Em outras palavras:

- Não há ciclo
- Todos vértices alcançáveis de r
- Cada vértice tem grau de entrada 1
- Solução ótima encontrada!



Solução Ótima

Custo total: $1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7$

András Frank: Visão Geral

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos
Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

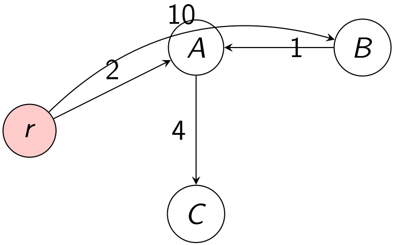
Complexidade:

- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$

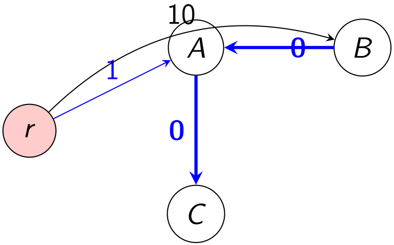
UFABC

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

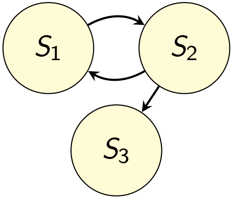
Arcos com custo **zero** formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Otimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^{-}(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

1. Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
2. Para cada v fora de R:
   - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
   - Adicionar v a R
3. Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

UFABC

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	**Tempo Mediano**	**Tempo Médio**
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	**0,016 s**	**0,020 s**

Speedup Fase II

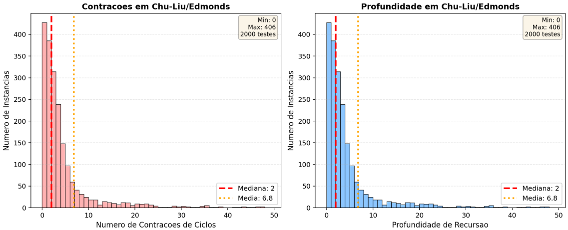
Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

UFABC

Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20



Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)

Motivação Didática

Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos** e **difíceis de visualizar**

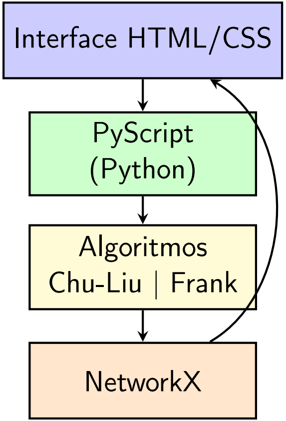
Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

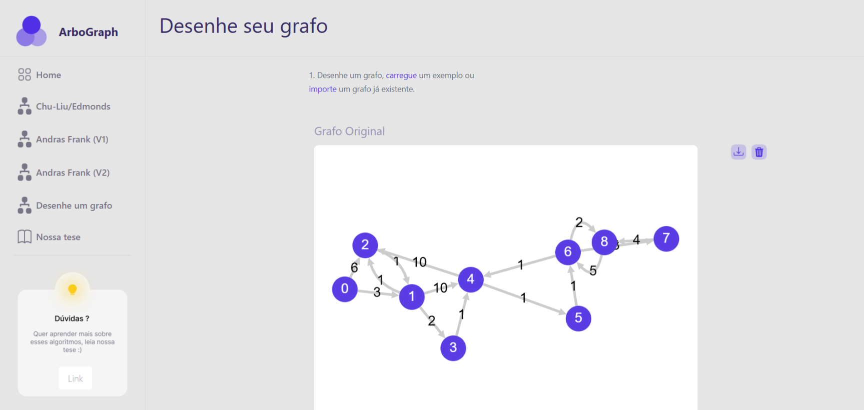
Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

UFABC

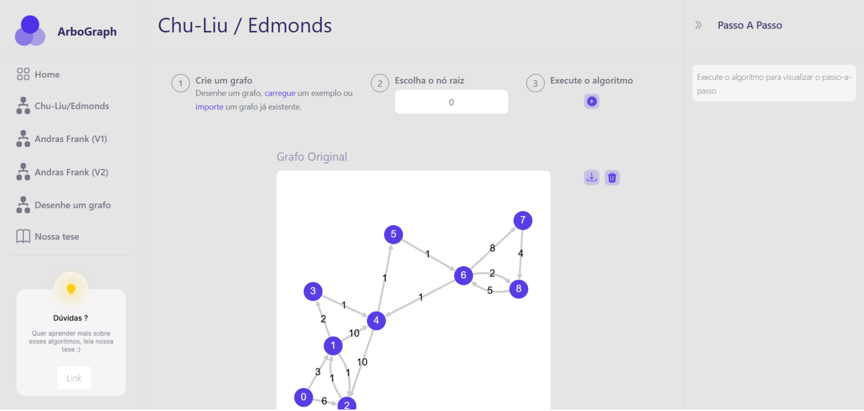
Interface: Desenho de Grafos



Funcionalidades:

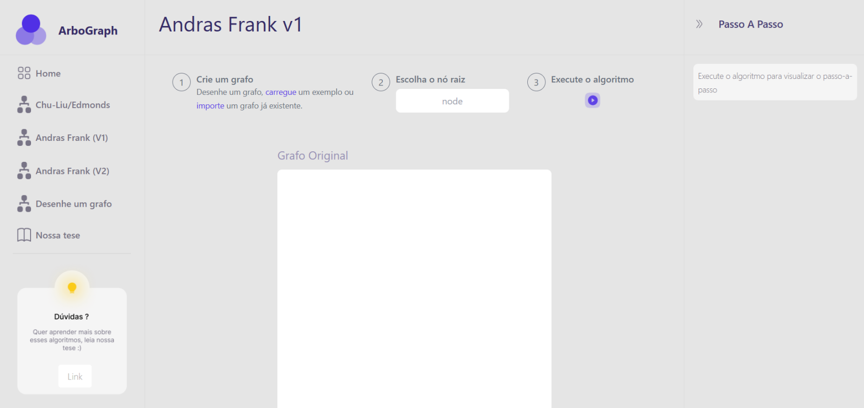
- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

Interface: Chu-Liu-Edmonds



- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank



- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Princípios de Design

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário

Contribuições do Trabalho

1. **Implementação completa** de dois algoritmos clássicos
   - Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
   - András Frank: duas fases com otimização heap
2. **Análise experimental** detalhada
   - 2000 instâncias aleatórias
   - Comparação de desempenho e características estruturais
3. **Aplicação web interativa**
   - Ferramenta didática para visualização
   - Execução passo a passo dos algoritmos
   - Design centrado no usuário

Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58$\times$ (mediana), 61$\times$ (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
  - Memória modesta: 11,5 MB

UFABC

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

`https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer`