

Algoritmos para r -Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

30 de novembro de 2025

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Didática do Abstrato
- 6 Conclusões
- 7 Aplicação Web
- 8 Conclusões

O Problema



Encontrar uma r -Arborescência Geradora de Peso Mínimo

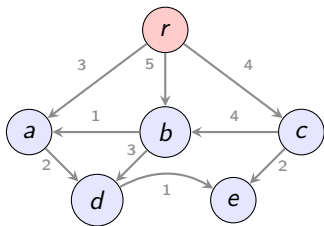
Dado um r -digrafo ponderado (D, w, r) :

- Encontrar uma r -arborescência geradora de peso mínimo de D

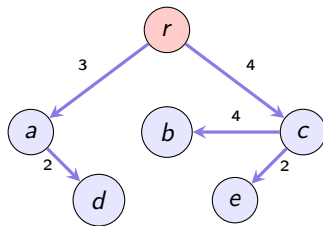
Algoritmos estudados:

- 1 Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- 2 András Frank (1981-2014)

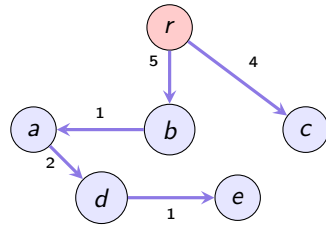
Exemplo: r -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 r -Arborescência Geradora

Peso: 16



Geradora Mínima

Peso: 13

Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r -digrafo ponderado (D, w, r)

$\text{chu-liu-edmonds}((D, w, r))$:

- ➊ **Reduzir pesos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- ➋ **Construir** D_0 : escolhendo um arco a_v de peso reduzido zero para cada $v \neq r$
- ➌ **Verificar**: se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0
Caso contrário:
- ➍ **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair
- ➎ **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' = \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$
- ➏ **Devolver**: expandir(T')

Exemplo: Escolha Gulosa



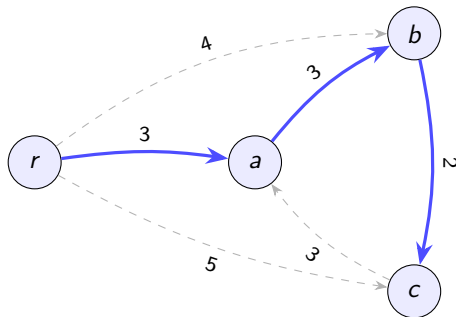
Definição:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de peso mínimo que entra em v :

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

Propriedade:

Se T é uma r -arborescência, então T tem peso mínimo.



Resultado

$T = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma r -arborescência geradora mínima!

E quando a escolha gulosa falha?

Problema:

A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r -arborescência.

Exemplo:

Os arcs de peso mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r .



Arcos azuis formam um **ciclo**!

Passo 1: Redução de Pesos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

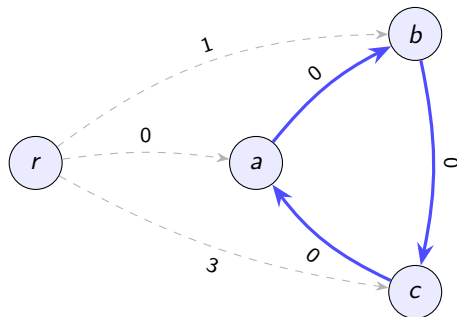
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Peso λ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ :

- $\lambda(a) = 3, \lambda(b) = 3, \lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm peso zero!

Arcos com peso zero são candidatos para A_0 em D_0 .

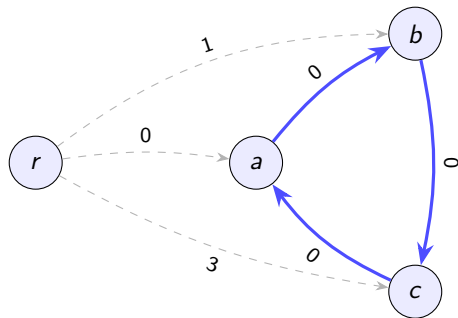
Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0 : Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (a, b)
- (b, c)
- (c, a)



Passo 3: Verificação de D_0

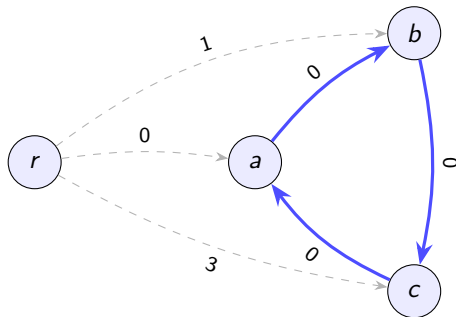
Verificar:

Se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0

Caso contrário:

D_0 contém algum ciclo C .

\Rightarrow **prosseguir** para os passos 4 e 5.



D_0 não é uma r -arborescência!

Neste exemplo, $A_0 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ não forma uma r -arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a) .

Passo 4: Contração de Ciclos

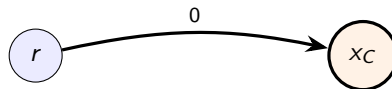
Operação:

Contrair ciclo C em supervértice x_C .

Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de D que entra em algum vértice de C



Digrafo contraído D' - *podem ter arcos saindo de x_C em D' .*

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D .

Passo 5: Chamada Recursiva

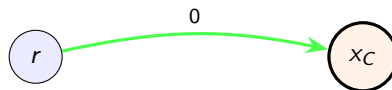


Novo problema: (D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$$

Resultado: T' é uma r -arborescência geradora mínima em (D', w')



r -arborescência ótima em D'

Passo 6: Reexpansão da Solução

Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

- 1 Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
- 2 Incluir uv em T
- 3 Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v



Resultado: T é uma r -arborescência geradora mínima

r -arborescência final no digrafo original

Complexidade do Algoritmo



Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até $O(n)$ chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de pesos, construção de D_0 , detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade $O(m)$

Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde n é o número de vértices e m é o número de arcos no digrafo original.

Intermissão



Algoritmo de András Frank

Algoritmo de András Frank



Abordagem em Duas Fases

Fase I (Fulkerson): Construir cobertura de r -conjuntos via redução de pesos

Fase II (Frank): Extrair r -arborescência geradora da cobertura

Objetivo da Fase I:

Construir uma sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ tal que:

- $F := \{f_i : i \in [k]\}$ é uma **cobertura de r -conjuntos**
- A sequência $(R_i, \lambda_i)_{i \in [k]}$ é **w -disjunta**

Objetivo da Fase II:

Extrair r -arborescência geradora mínima usando F e a propriedade w -disjunta.

Fase I: Conceitos Fundamentais



Coleção Laminar:

Uma coleção \mathcal{L} de conjuntos é **laminar** se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{L}$:

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset$$

Sequência w -disjunta:

Uma sequência $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ é **w -disjunta** se:

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \leq w(a) \quad \forall a \in A(D)$$

O peso $w(a)$ limita a soma das multiplicidades λ_i sobre os conjuntos que a entra.

Fase I: r -conjunto Minimal



r -conjunto minimal não coberto por F

Um r -conjunto R é **minimal não coberto por F** se:

- F não entra em R (i.e., $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$)
- Para todo $\emptyset \subset R' \subset R$, existe arco de F que entra em R'

Propriedade importante:

Se S é uma fonte de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$, então S é um r -conjunto minimal não coberto por $A(D_0)$.

Fase I: Condições de Otimalidade



Seja F uma cobertura de r -conjuntos e $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ uma sequência w -disjunta.

Se $w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$, então valem as **condições de otimalidade**:

$$\forall a \in F : \quad w(a) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \quad (\text{CO1})$$

$$\forall i \in [k] : \quad \varrho_F(R_i) = 1 \quad (\text{CO2})$$

Consequência

Se F é uma r -arborescência geradora e as condições valem, então F tem peso mínimo e a sequência tem valor máximo.

Fase I: Objetivo



Construir uma sequência $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ que satisfaz:

- ❶ $\{f_i : i \in [k]\}$ é uma **cobertura de r -conjuntos** de D
- ❷ $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ é uma **sequência w -disjunta**
- ❸ $\forall j \in [k] : \sum_{i \in [k]} \lambda_i [f_j \in \delta^-(R_i)] = w(f_j)$ (CO1)

Interpretação:

- A Fase I constrói uma cobertura F que satisfaz a condição de otimalidade (CO1)
- Cada arco $f_j \in F$ tem peso "totalmente explicado" pelos λ_i
- A coleção $\{R_i\}$ é laminar e os λ_i respeitam os pesos dos arcos

Fase I: Algoritmo de Fulkerson



Processo iterativo

Dado: um r -digrafo ponderado (D, w, r)

1 Inicializar:

- $c := w$ (pesos correntes)
- $\sigma := \epsilon$ (sequência vazia)
- $F := \emptyset$ (conjunto de arcos selecionados)

2 Enquanto existir fonte R em $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin R$:

- Calcular $\lambda := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R)\}$
- Selecionar $f \in \delta^-(R)$ com $c(f) = \lambda$
- $\sigma := \sigma \cdot (f, R, \lambda)$
- $F := F \cup \{f\}$
- $c := c - \lambda 1_{\delta^-(R)}$ (reduzir pesos)
- $D_0 := (V, F)$ (atualizar digrafo auxiliar)

3 Devolver: σ

Fase I: Invariantes do Algoritmo



Em cada iteração, a sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ satisfaz:

- 1 $c = w - \sum_{i \in [k]} \lambda_i 1_{\delta^-(R_i)}$ (pesos reduzidos)
- 2 $\forall i \in [k] : f_i$ entra em R_i
- 3 $\forall i \in [k], \forall j \in [i] : f_j$ não entra em R_i (prioridade)
- 4 $\{R_i : i \in [k]\}$ é uma **coleção laminar** de r -conjuntos
- 5 $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ é uma sequência **w -disjunta**
- 6 $\forall i \in [k] : c(f_i) = 0$ (peso reduzido zero)

A laminaridade garante estrutura hierárquica; a condição (6) garante a otimalidade.

Fase I: Encontrando r -conjuntos Minimais

Como encontrar um r -conjunto minimal não coberto?

Seja $D_0 := (V, F)$ onde $F = \{f_i : i \in [k]\}$.

- 1 Calcular a condensação $\mathcal{C}(D_0)$
- 2 Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
- 3 Encontrar uma fonte S em $\mathcal{C}(D_0)$ tal que $r \notin S$

Proposição

Toda fonte S de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$ é um r -conjunto minimal não coberto por F .

Complexidade: identificação de CFCs em $O(|A|)$ usando Kosaraju.

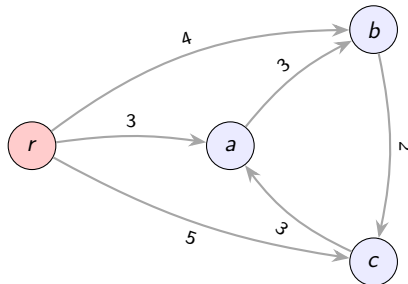
Exemplo: Digrafo Inicial

Digrafo ponderado (D, w, r) :

- Vértices: $\{r, a, b, c\}$
- Raiz: r

Pesos dos arcos:

- $(r, a) : 3$, $(r, b) : 4$, $(r, c) : 5$
- $(a, b) : 3$, $(b, c) : 2$
- $(c, a) : 3$



Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a r -arborescência geradora de peso mínimo.

Fase I: Iteração 1 - Encontrar r -conjunto Minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$ (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$ tem 4 fontes

Fontes que são r -conjuntos:

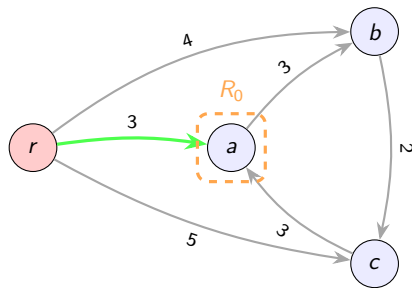
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

Escolha:

$R_0 = \{a\}$ (minimal)

Arcos que entram em $\{a\}$:

- $(r, a) : 3 \leftarrow$ **mínimo**
- $(c, a) : 3 \leftarrow$ **mínimo**



$$\lambda_0 = 3, f_0 = (r, a)$$

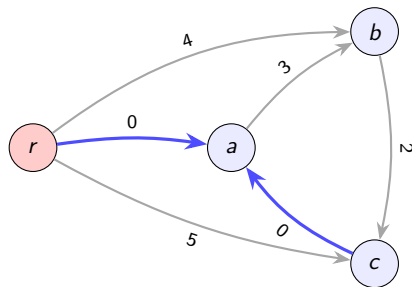
Fase I: Iteração 2 - Redução de Pesos

Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, \{(r, a)\})$

Redução de pesos:

- $c(r, a) = 3 - 3 = 0 \checkmark$
- $c(c, a) = 3 - 3 = 0 \checkmark$



Arcos azuis têm peso zero

Observação

Pesos são reduzidos para garantir que σ seja w -disjunta.

Fase I: Iteração 3 - Redução de Pesos

Atualização:

- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, F)$

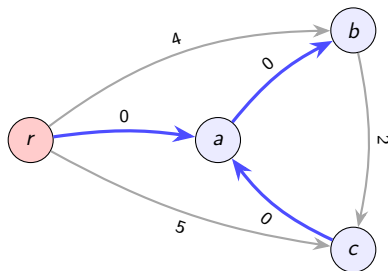
Escolha: $R_1 = \{b\}$

Redução:

- $(a, b) : 3, (r, b) : 4 \leftarrow$ **mínimo: 3**
- $c(a, b) = 3 - 3 = 0 \checkmark$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(r, a), (a, b)\}$:

- CFCs: $\{r\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}$
- Fontes em D_0 : $\{r\}, \{c\}$



Arcos com peso zero em azul

Fase I: Iteração 4 - Redução de Pesos

Estado: $F = \{(r, a), (a, b)\}$

$\mathcal{C}(D_0)$ ainda tem:

- Fonte $\{c\}$ não contém r

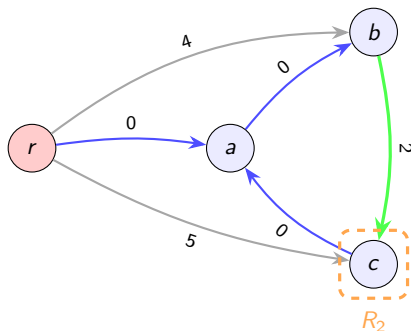
Escolha: $R_2 = \{c\}$

Arcos que entram em $\{c\}$:

- $(b, c) : 2 \leftarrow$ **mínimo**
- $(r, c) : 5$

Seleção:

- $\lambda_2 = 2$
- $f_2 = (b, c)$



Fase I: Iteração 5 - Estado Final

Atualização:

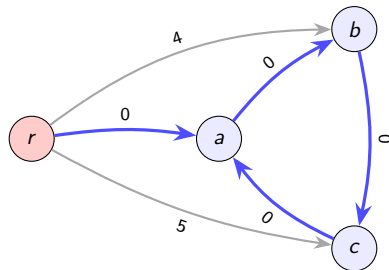
- $F = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Redução:

- $c(b, c) = 2 - 2 = 0$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$:

Condição de parada satisfeita!



Todos arcos de F têm peso zero!

Sequência devolvida

$\sigma = [(f_0 = (r, a), R_0 = \{a\}, \lambda_0 = 3), (f_1 = (a, b), R_1 = \{b\}, \lambda_1 = 3), (f_2 = (b, c), R_2 = \{c\}, \lambda_2 = 2)]$

Intermissão

Fase II: Duas Abordagens

Fase II: Construção da Arborescência

Entrada: Sequência $(f_i)_{i \in [k]}$ da Fase I

Objetivo: Extrair $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$ que é uma r -arborescência geradora

Algoritmo guloso:

- 1 Iniciar com $U := \{r\}$ e $J := \emptyset$
- 2 Para $t = 1$ até $|V| - 1$:
 - Para cada $f_i = (u_i, v_i)$ na sequência:
 - Se $u_i \in U$ e $v_i \notin U$:
 - $U := U \cup \{v_i\}$
 - $J := J \cup \{f_i\}$
 - Passar para próxima iteração

Invariante

Em cada iteração, $\varrho_J(R_i) \leq 1$ para todo $i \in [k]$

Fase II: Exemplo - Extração da Arborescência

Entrada da Fase II:

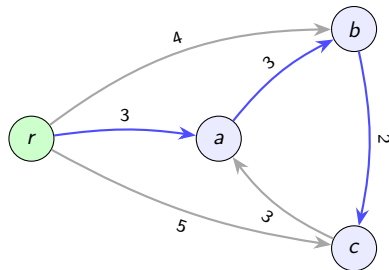
- $F = [f_0, f_1, f_2] = [(r, a), (a, b), (b, c)]$

Estado inicial:

- $U = \{r\}$ (alcançados)
- $J = \emptyset$ (arborescência)

Objetivo:

- Selecionar $|V| - 1 = 3$ arcos
- Manter propriedade de arborescência



Verde = vértices em U

Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D , não apenas F .

Fase II: Iteração 1

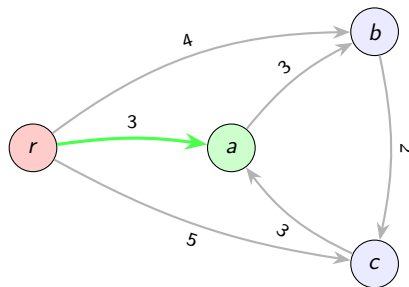
Estado: $U = \{r\}$, $J = \emptyset$

Procurar em F :

- $f_0 = (r, a)$: $r \in U$, $a \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (r, a) a J
- $U := U \cup \{a\} = \{r, a\}$



$J = \{(r, a)\}$, peso = 3

Fase II: Iteração 2

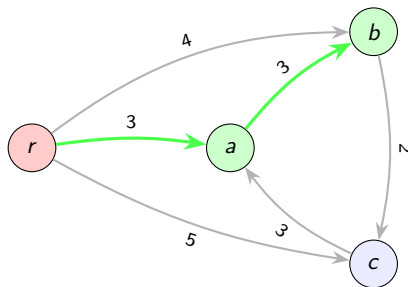
Estado: $U = \{r, a\}$, $J = \{(r, a)\}$

Procurar em F :

- $f_1 = (a, b)$: $a \in U$, $b \notin U \checkmark$

Ação:

- Adicionar (a, b) a J
- $U := U \cup \{b\} = \{r, a, b\}$



$J = \{(r, a), (a, b)\}$, peso = 6

Fase II: Iteração 3 - Estado Final

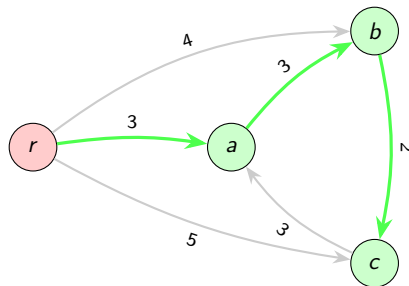
Estado: $U = \{r, a, b\}$, $|J| = 2$

Procurar em F :

- $f_2 = (b, c)$: $b \in U$, $c \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (b, c) a J
- $U := U \cup \{c\} = V$
- $|J| = 3 = |V| - 1$ ✓



$J = r$ -arborescência geradora!

Resultado Final

$J = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ com peso $w(J) = 3 + 3 + 2 = 8$ (peso mínimo!)

Intermissão

Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	0,016 s	0,020 s

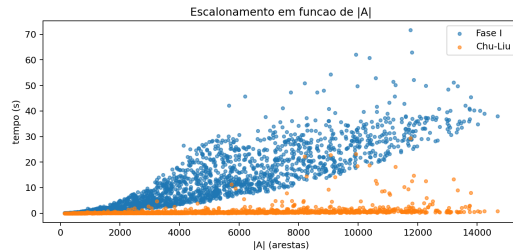
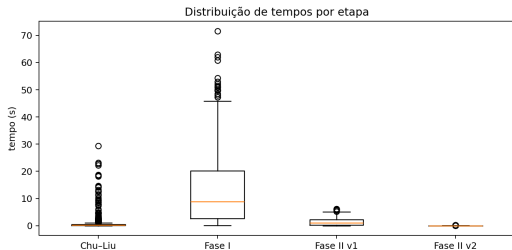
Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

Escalonamento e Consumo de Memória

Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arestas
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida



Principais Resultados

- **Corretude validada:** pesos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
 - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
 - Speedup: $58\times$ (mediana), $61\times$ (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Memória modesta: 11,5 MB

Conclusões dos Experimentos

- Equivalência teórica e prática dos algoritmos confirmada
- Chu-Liu/Edmonds é mais eficiente
- Fase I de Frank é o gargalo computacional
- Heap na Fase II traz ganhos práticos expressivos
- Algoritmos são escaláveis e viáveis para grandes digrafos

Intermissão

Didática do Abstrato

Fundamentos Cognitivos e Didáticos



Desafios do Ensino de Matemática Abstrata

- Conhecimento abstrato exige transitar entre registros: intuitivo, visual, simbólico e formal.
- **Carga cognitiva:**
 - Intrínseca: complexidade dos conceitos e pré-requisitos.
 - Extrínseca: forma de apresentação e coordenação entre texto, fórmulas e figuras.
 - Pertinente: esforço dedicado à organização dos esquemas mentais.
- Combinar representações verbais e visuais reduz sobrecarga e favorece integração semântica.

Desafios na Ensino de Algoritmos de Grafos

Três Eixos de Dificuldade

- ❶ **Decisões locais vs. coerência global:** Escolhas localmente ótimas podem gerar ciclos, dificultando a compreensão da solução global.
- ❷ **Contração e expansão:** Transitar entre grafo original, condensado e reexpansão exige rastreabilidade e clareza sobre o que muda e o que permanece.
- ❸ **Relação com a teoria primal-dual:** Dificuldade em conectar ações operacionais do algoritmo com fundamentos teóricos e certificados de otimalidade.

Solução: Visualização e interação bem projetadas facilitam a integração entre prática e teoria.

O Ecossistema de Ferramentas para Ensino de Grafos

Categorias de Ferramentas Digitais

- **Diagramas programáveis:** Visualização estável e integrada ao texto matemático (*Graphviz*, *TikZ*).
- **Exploração e edição de grafos:** Manipulação gráfica e análise estrutural (*Gephi*, *yEd*, *Cytoscape*).
- **Visualização de algoritmos:** Animações e explicações dinâmicas (*VisuAlgo*).
- **Ambientes programáveis:** Integração de código, texto e visualização para exemplos reprodutíveis (*Jupyter*, *NetworkX*).

Nenhuma ferramenta cobre todos os aspectos didáticos de forma integrada. A aplicação proposta busca preencher essa lacuna.

Objetivos da Ferramenta Didática

- Facilitar a compreensão dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank
- Permitir aos usuários interagir com grafos e observar o funcionamento dos algoritmos
- Fornecer feedback imediato sobre as operações realizadas
- Ser acessível via navegador web, sem necessidade de instalação

Intermissão

Aplicação Web

Aplicação web

Ferramenta web interativa para ensino de algoritmos de arborescências dirigidas, permitindo visualização passo a passo, edição livre de grafos e exportação de resultados, com arquitetura modular e foco didático.

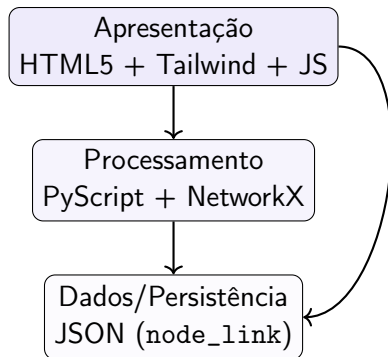
Módulos principais:

- **Visualização Algorítmica:** Páginas para execução passo a passo dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank.
- **Modelagem Livre:** Editor sandbox para desenhar, testar e exportar grafos arbitrários.
- **Disseminação Científica:** Página informativa sobre o projeto e a dissertação.

Arquitetura da Aplicação

Estrutura em três camadas:

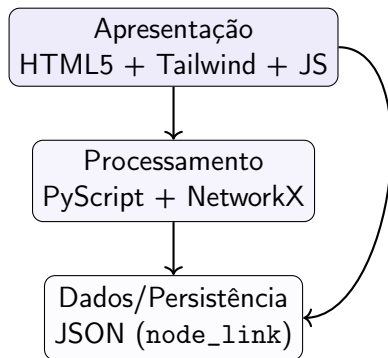
- **Apresentação:** Interface construída em HTML5, estilizada com Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript.
- **Processamento (PyScript):** Executa algoritmos em Python (NetworkX) diretamente no navegador, gerando visualizações estáticas com Matplotlib.
- **Dados e Persistência:** Utiliza JSON (`node_link`) para serializar grafos, armazenar pesos e permitir exportação/importação entre módulos.



Arquitetura da Aplicação

Benefícios:

- Processamento local e rápido
- Facilidade de uso e reprodutibilidade
- Modularidade e extensibilidade



Princípios de IHC Aplicados

Fundamentos para o Design da Ferramenta

O desenvolvimento da aplicação web foi guiado por oito princípios de Interação Humano-Computador (IHC), integrando heurísticas de usabilidade e teorias de aprendizagem:

- **Usabilidade:** Interface limpa, controles claros e navegação intuitiva.
- **Eficiência cognitiva:** Redução da carga mental, destaque para informações relevantes.
- **Feedback imediato:** Atualização visual e textual em tempo real a cada ação.
- **Engajamento ativo:** Usuário explora, manipula e prediz resultados.
- **Visão geral com detalhe sob demanda**
- **Consistência semântica:** Terminologia e estilos padronizados em toda a interface.
- **Múltiplos registros de representação:** Grafo visual, log textual e parâmetros simbólicos.
- **Prevenção e recuperação de erros**

Intermissão

Conclusões

Contribuições do Trabalho



1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

2 Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>