

Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

25 de novembro de 2025



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Aplicação Web
- 6 Conclusões



UFABC

O Problema

Arborescência de Custo Mínimo

Dado um digrafo $D = (V, A)$ com pesos $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ e raiz $r \in V$:

- Encontrar uma r -arborescência geradora T
- Que minimize $w(T) = \sum_{a \in A(T)} w(a)$

Aplicações:

- Redes de comunicação
- Logística
- Otimização de recursos

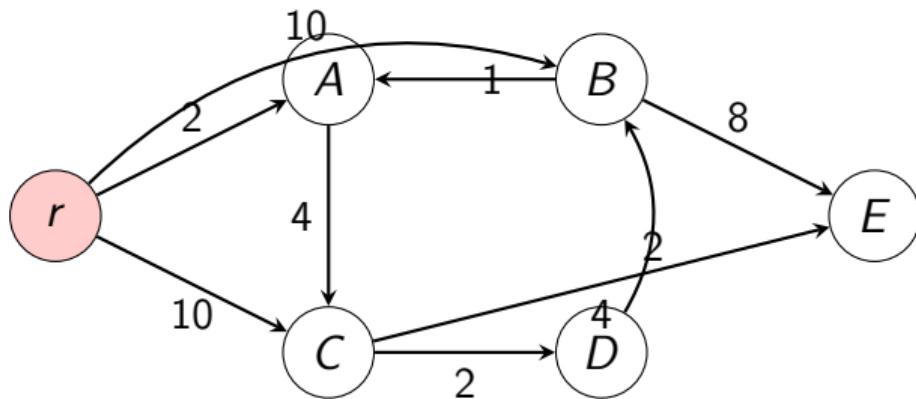
Algoritmos estudados:

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)



UFABC

Digrafo de Exemplo



Objetivo

Encontrar a r -arborescência geradora de custo mínimo

Chu-Liu-Edmonds: Ideia Principal

Estratégia Recursiva

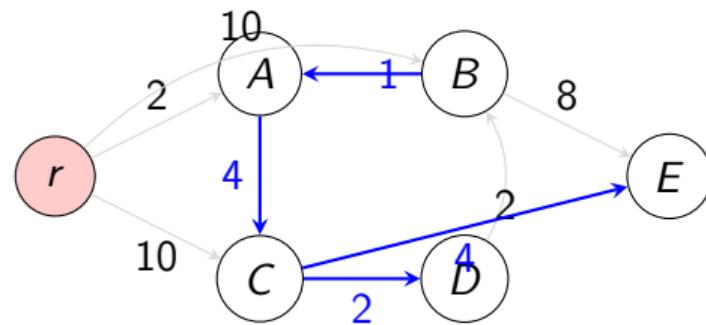
- ① Para cada vértice $v \neq r$: escolher arco de entrada de **custo mínimo**
- ② Se não há ciclos \Rightarrow solução ótima encontrada!
- ③ Se há ciclos \Rightarrow **contrair** e resolver recursivamente

Escolha Gulosa + Contração de Ciclos

Passo 1: Escolha Gulosa

Para cada vértice, selecionar arco de entrada mínimo:

- A: arco (B, A) peso 1 ✓
- B: arco (r, B) peso 10
- C: arco (A, C) peso 4 ✓
- D: arco (C, D) peso 2 ✓
- E: arco (C, E) peso 4 ✓



Problema

Ciclo detectado: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$

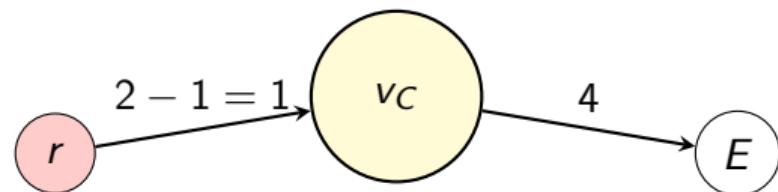
Passo 2: Contração do Ciclo

Ciclo encontrado: $\{A, B, C, D\}$

Contraímos em um super-vértice v_C

Ajustamos pesos dos arcos que **entram** no ciclo:

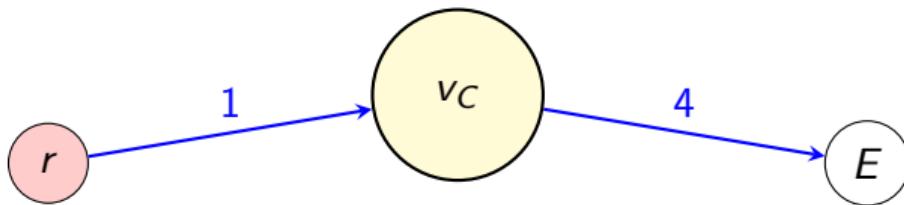
$$w'(u, v_C) = w(u, v) - w(\min_in(v))$$



Recursão

Resolver o problema no digrafo contraído

Passo 3: Solução no Digrafo Contraído



Escolha gulosa:

- (r, v_C) peso 1
- (v_C, E) peso 4

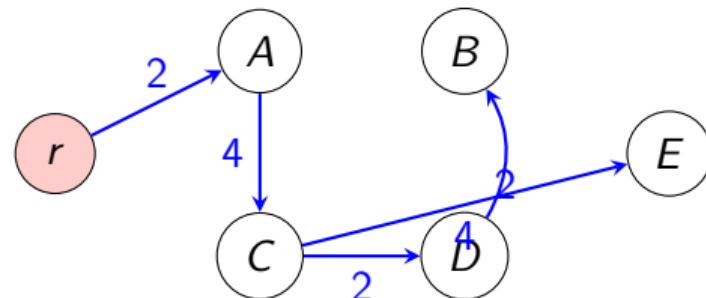
Sem ciclos! \Rightarrow Solução encontrada no digrafo contraído

Passo 4: Expandindo a Solução

No digrafo contraído: (r, v_C) foi escolhido

Expandindo v_C :

- Remover arco (B, A) do ciclo
- Manter: $(A, C), (C, D), (D, B)$
- Adicionar: (r, A) peso 2



Solução Ótima

Custo total: $2 + 4 + 2 + 2 + 4 = 14$

András Frank: Visão Geral

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

Complexidade:

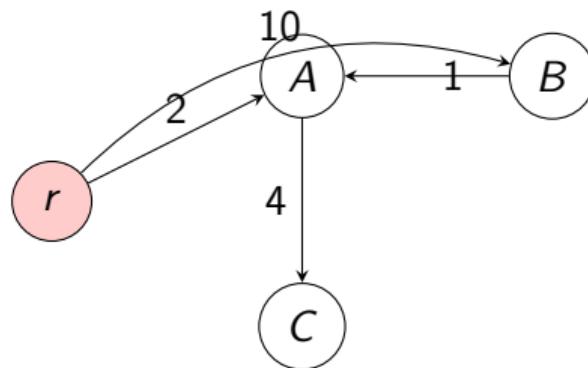
- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$



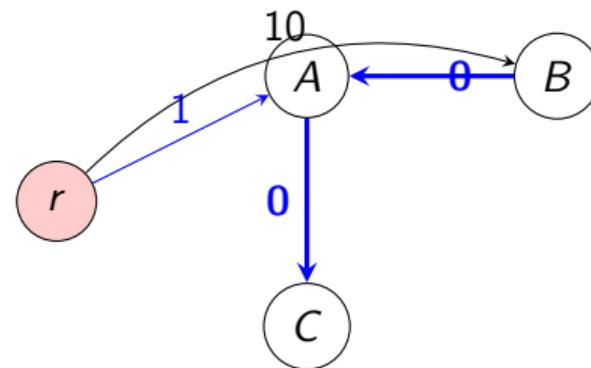
UFABC

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

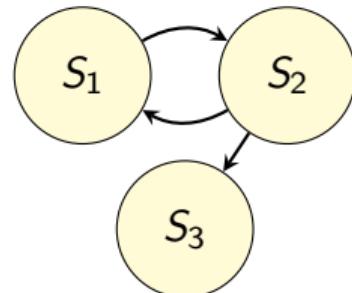
Arcos com custo zero formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Optimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^-(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

- ① Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
- ② Para cada v fora de R :
 - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
 - Adicionar v a R
- ③ Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	0,016 s	0,020 s

Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de 58,12 vezes (mediana)

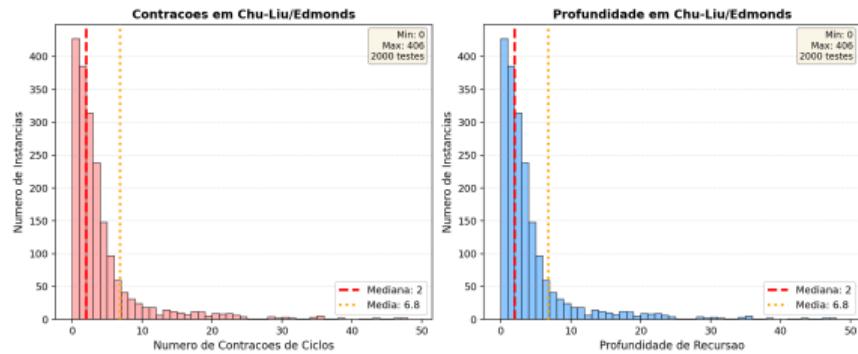
Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)



Motivação Didática

Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos e difíceis de visualizar**

Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

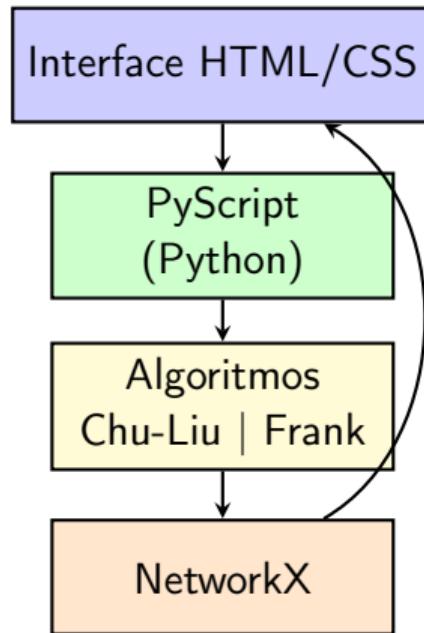
Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX



UFABC

Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

 ArboGraph

Algoritmos para o problema da arborescência geradora mínima: uma aplicação didática interativa

- Home
- Chu-Liu-Edmonds
- András Frank (V1)
- András Frank (V2)
- Desenhe um digrafo
- Nossa dissertação

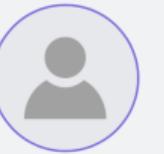
Dúvidas ?
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

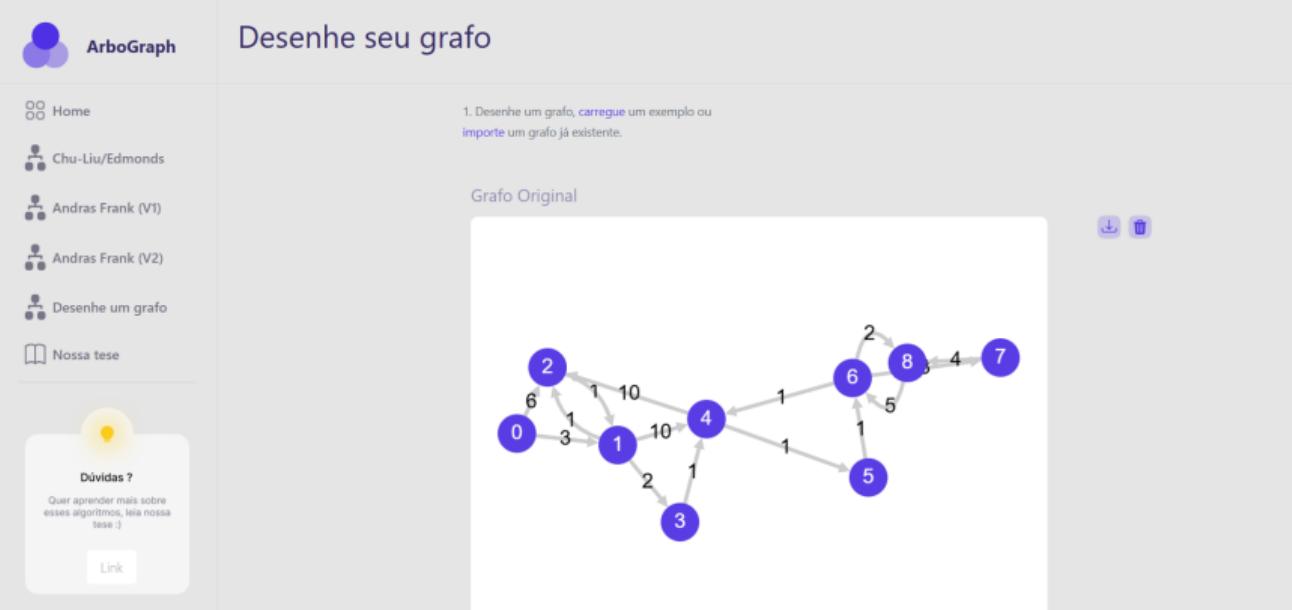
Resumo

Este trabalho investiga e implementa algoritmos de busca de uma r -arborescência geradora mínima em digrafos. A partir da formulação clássica e da literatura de Chu-Liu-Edmonds e também da formulação de András Frank, desenvolvemos uma aplicação web que permite: (i) desenhar ou importar um digrafo ponderado, (ii) escolher o nó raiz r , (iii) executar o algoritmo passo a passo com visualização das contrações, seleção de arcos de custo mínimo e reconstrução da arborescência, e (iv) exportar resultados e logs. A solução combina PyScript e NetworkX para a lógica algorítmica, Cytoscape para edição e visualização interativa, e Tailwind/Flowbite na interface. Como contribuição, o sistema oferece um ambiente didático que torna transparentes as decisões do algoritmo e facilita a análise e comparação de soluções em diferentes instâncias, apoiando ensino, experimentação e validação.

Integrantes do Projeto



Interface: Desenho de Grafos



The screenshot shows the ArboGraph web application interface. On the left, there is a sidebar with the following menu items:

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (V1)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

Below the menu is a yellow button labeled "Dúvidas ?" with a tooltip: "Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)" and a "Link" button.

The main area is titled "Desenhe seu grafo" and contains instructions: "1. Desenhe um grafo, carregue um exemplo ou importe um grafo já existente." Below this is a section titled "Grafo Original" showing a directed graph with 9 nodes (0-8) and edges with weights:

```

graph LR
    0((0)) -- 6 --> 2((2))
    0 -- 3 --> 1((1))
    1 -- 1 --> 2
    1 -- 10 --> 4((4))
    1 -- 10 --> 3((3))
    2 -- 1 --> 1
    3 -- 2 --> 1
    4 -- 1 --> 6((6))
    4 -- 1 --> 5((5))
    5 -- 1 --> 6
    5 -- 1 --> 8((8))
    6 -- 2 --> 8
    6 -- 5 --> 8
    8 -- 4 --> 7((7))
  
```

On the right side of the graph area are two small icons: a downward arrow and a trash can.

Funcionalidades:

- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos

Interface: Chu-Liu-Edmonds



ArboGraph

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (V1)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

Dúvidas ?

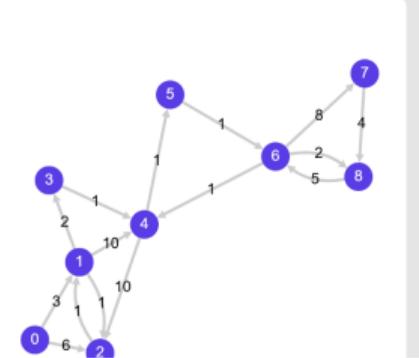
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

[Link](#)

Chu-Liu / Edmonds

- 1 Crie um grafo
Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.
- 2 Escolha o nó raiz
- 3 Execute o algoritmo 

Grafo Original



The graph consists of 9 nodes labeled 0 through 8. Node 0 is the root node. There are several edges with weights: (0,1) weight 6, (0,2) weight 1, (1,3) weight 2, (1,4) weight 10, (1,5) weight 1, (2,4) weight 1, (3,4) weight 1, (4,5) weight 1, (4,6) weight 1, (5,6) weight 1, (6,7) weight 8, (6,8) weight 2, (7,8) weight 4, and (8,6) weight 5. Some edges are highlighted in red, indicating they are part of the minimum spanning tree.

Passo A Passo

Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank

The screenshot shows the ArboGraph web application interface for Andras Frank v1. The left sidebar contains a navigation menu with icons and labels: Home, Chu-Liu/Edmonds, Andras Frank (V1), Andras Frank (V2), Desenhe um grafo, and Nossa tese. A yellow lightbulb icon with a tooltip labeled 'Dúvidas?' and a link button are also present. The main area is titled 'Andras Frank v1' and contains three numbered steps: 1. Crie um grafo (Create a graph), 2. Escolha o nó raiz (Select the root node), and 3. Execute o algoritmo (Execute the algorithm). Step 2 has a 'node' input field. To the right of step 3 is a button labeled 'Passo A Passo' (Step by Step). Below the steps is a section titled 'Grafo Original' (Original Graph) which is currently empty. A tooltip for the 'Passo A Passo' button says 'Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo' (Execute the algorithm to visualize step-by-step).

- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Princípios de Design

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário



UFABC

Contribuições do Trabalho

1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

2 Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
 - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
 - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Memória modesta: 11,5 MB

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>