

Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

30 de novembro de 2025

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Didática do Abstrato
- 6 Conclusões
- 7 Aplicação Web
- 8 Conclusões

O Problema

Encontrar uma r -Arborescência Geradora de Custo Mínimo

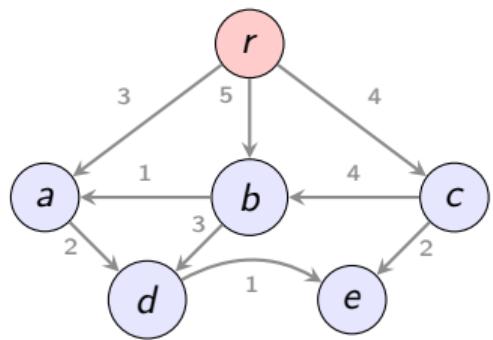
Dado um r -digrafo ponderado (D, w, r) :

- Encontrar uma r -arborescência geradora de custo mínimo de D

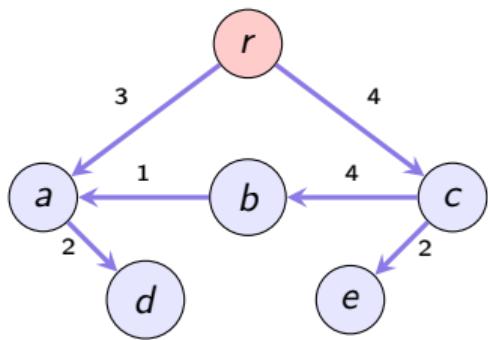
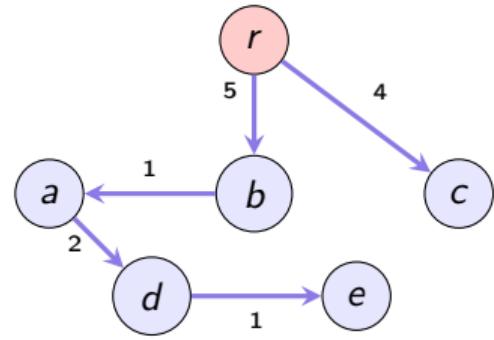
Algoritmos estudados:

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)

Exemplo: r -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 r -Arborescência Geradora

Geradora Mínima

Custo: 16

Custo: 13

Intermissão

Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado (D, w, r)

chu-liu-edmonds((D, w, r)):

- ① **Reduzir custos:** para cada vértice $v \neq r$, subtrair $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- ② **Construir D_0 :** escolhendo um arco a_v de custo reduzido zero para cada $v \neq r$
- ③ **Verificar:** se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow devolver D_0
Caso contrário:
- ④ **Contração:** encontrar ciclo C em D_0 e contrair
- ⑤ **Chamada recursiva:** Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' =$ chu-liu-edmonds(D', w', r)
- ⑥ **Devolver:** expandir(T')

Exemplo: Escolha Gulosa

Definição:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de custo mínimo que entra em v :

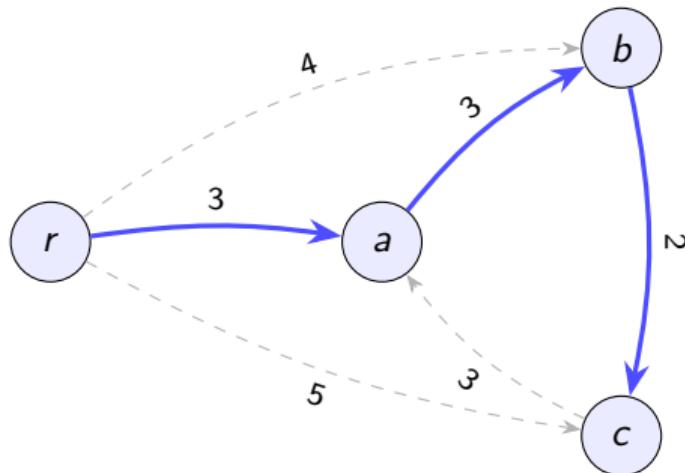
$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$

Propriedade:

Se T é uma r -arborescência, então T tem custo mínimo.

Resultado

$T = \{(r, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma r -arborescência de custo mínimo!



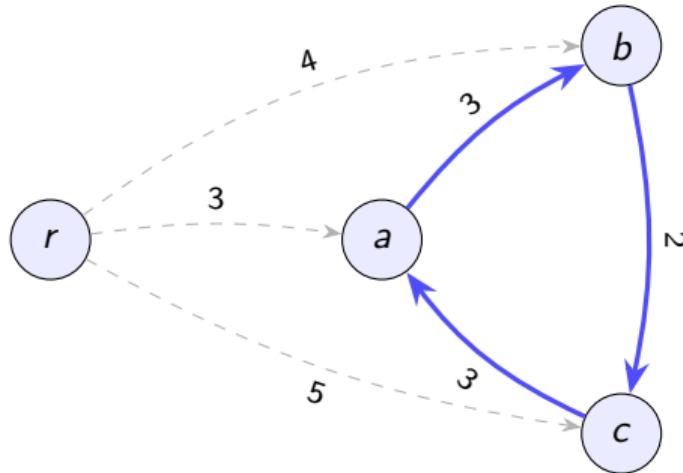
E quando a escolha gulosa falha?

Problema:

A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r -arborescência.

Exemplo:

Os arcos de custo mínimo formam um ciclo (a, b, c, a) sem alcançar r .



Arcos azuis formam um **ciclo!**

Passo 1: Redução de Custos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

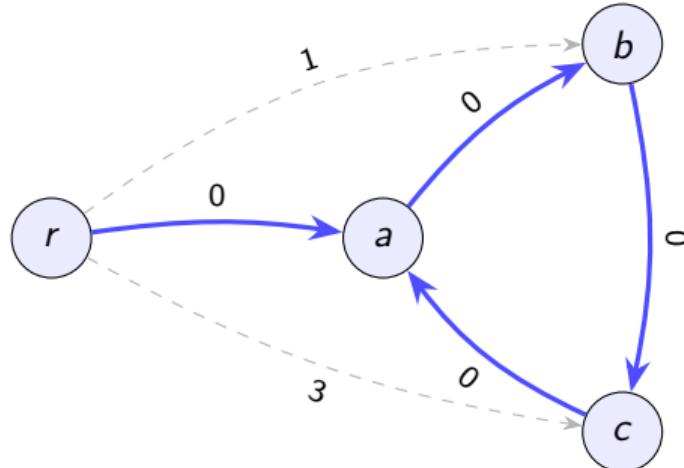
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Custo λ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

Valores de λ :

- $\lambda(a) = 3, \lambda(b) = 3, \lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm custo zero!

Arcos com custo zero são candidatos para D_0

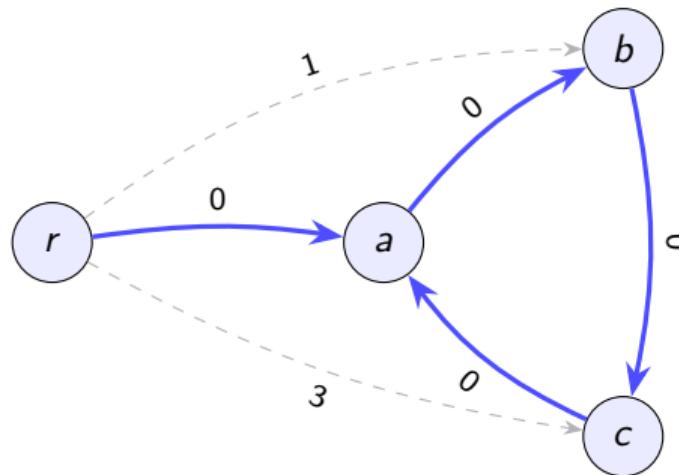
Passo 2: Construção de D_0

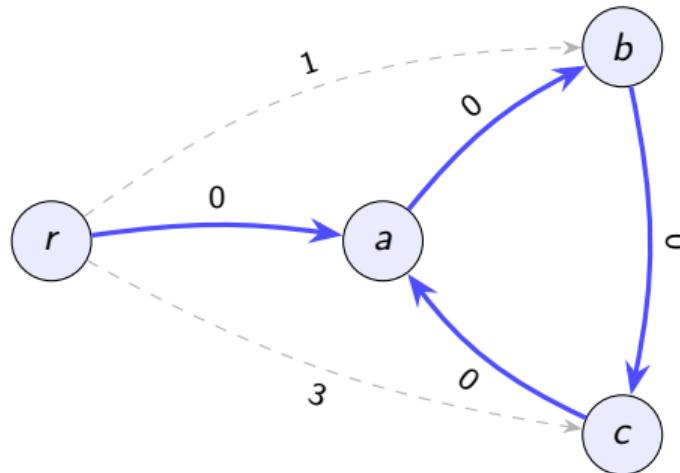
Formação de D_0 : Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (r, a)
- $(a, b), (c, a)$



Passo 3: Verificação de D_0 **Verificar:**Se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0 **Caso contrário:** D_0 contém algum ciclo C . \Rightarrow **prosseguir** para os passos 4 e 5. D_0 não é uma r -arborescência!Neste exemplo, $D_0 = \{(r, a), (a, b), (c, a)\}$ não forma uma r -arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a) .

Passo 4: Contração de Ciclos

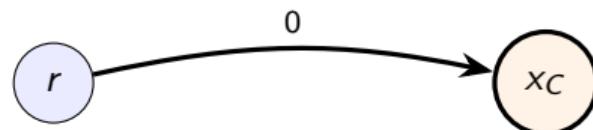
Operação:

Contrair ciclo C em supervértice x_C .

Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de D que entra em algum vértice de C



Digrafo contraído D' - podem ter arcos saindo de x_C em D' .

Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D .

Passo 5: Chamada Recursiva

Novo problema: (D', w', r)

Chamada recursiva:

$$T' := \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$$



r-arborescência ótima em D'

Resultado: T' é uma r -arborescência de custo mínimo em (D', w')

Passo 6: Reexpansão da Solução

Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

Procedimento:

- ① Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
- ② Incluir uv em T
- ③ Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v



Resultado: T é uma r -arborescência de custo mínimo

r -arborescência final no digrafo original

Complexidade do Algoritmo

Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até $O(n)$ chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de custos, construção de D_0 , detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade $O(m)$

Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde n é o número de vértices e m é o número de arcos no digrafo original.

Intermissão

Algoritmo de András Frank

Algoritmo de András Frank

Abordagem em Duas Fases

Fase I (Fulkerson): Construir cobertura de r -conjuntos via redução de custos

Fase II (Frank): Extrair r -arborescência geradora da cobertura

Objetivo da Fase I:

Construir uma sequência $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ tal que:

- $F := \{f_i : i \in [k]\}$ é uma **cobertura de r -conjuntos**
- A sequência $(R_i, \lambda_i)_{i \in [k]}$ é **w -disjunta**

Objetivo da Fase II:

Extrair r -arborescência geradora mínima usando F e a propriedade w -disjunta.

Fase I: Conceitos Fundamentais

Definições:

r -conjunto minimal

Um r -conjunto R é **minimal não coberto por F** se:

- F não entra em R (i.e., $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$)
- Para todo $\emptyset \subset R' \subset R$, existe arco de F que entra em R'

Sequência w -disjunta

Uma sequência $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$ é **w -disjunta** se:

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \leq w(a) \quad \text{para cada } a \in A(D)$$

A soma dos λ_i sobre os conjuntos que a entra não excede o peso de a .

Fase I: Algoritmo de Fulkerson

Processo iterativo

Dado: um r -digafo ponderado (D, w, r)

1 Inicializar:

- $c := w$ (custos correntes)
- $\sigma := \epsilon$ (sequência vazia)
- $F := \emptyset$ (conjunto de arcos selecionados)

2 Enquanto existir fonte R_k em $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin R_k$:

- Calcular $\lambda_k := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R_k)\}$
- Selecionar $f_k \in \delta^-(R_k)$ com $c(f_k) = \lambda_k$
- $\sigma := \sigma \cdot (f_k, R_k, \lambda_k)$
- $F := F \cup \{f_k\}$
- $c := c - \lambda_k 1_{\delta^-(R_k)}$ (reduzir custos)
- $D_0 := (V, F)$ (atualizar digrafo auxiliar)

3 Devolver: σ

Fase I: Encontrando r -conjuntos Minimais

Como encontrar um r -conjunto minimal não coberto?

Seja $D_0 := (V, F)$ onde $F = \{f_i : i \in [k]\}$.

- ① Calcular a condensação $\mathcal{C}(D_0)$
- ② Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
- ③ Encontrar uma fonte S em $\mathcal{C}(D_0)$ tal que $r \notin S$

Proposição

Toda fonte S de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$ é um r -conjunto minimal não coberto por F .

Complexidade: identificação de CFCs em $O(|A|)$ usando Kosaraju.

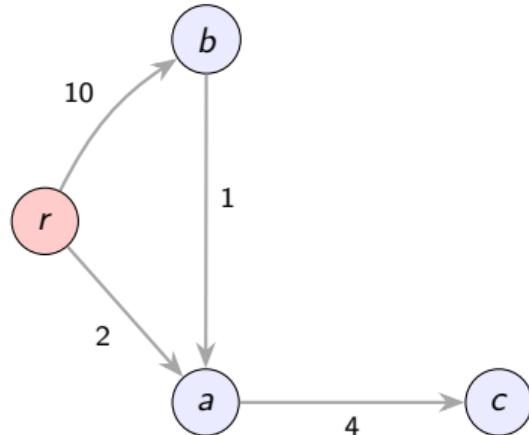
Exemplo: Digrafo Inicial

Digrafo ponderado (D, w, r):

- Vértices: $\{r, a, b, c\}$
- Raiz: r

Pesos dos arcos:

- $(r, a) : 2, (r, b) : 10$
- $(b, a) : 1, (a, c) : 4$



Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a r -arborescência geradora de custo mínimo.

Fase I: Iteração 1 - Encontrar r -conjunto Minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$ (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$ tem 4 fontes

Fontes que são r -conjuntos:

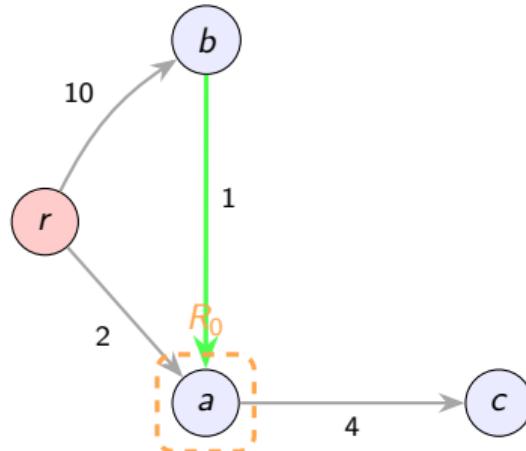
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

Escolha:

$R_0 = \{a\}$ (minimal)

Arcos que entram em $\{a\}$:

- $(r, a) : 2$
- $(b, a) : 1 \leftarrow \text{mínimo}$



$$\lambda_0 = 1, f_0 = (b, a)$$

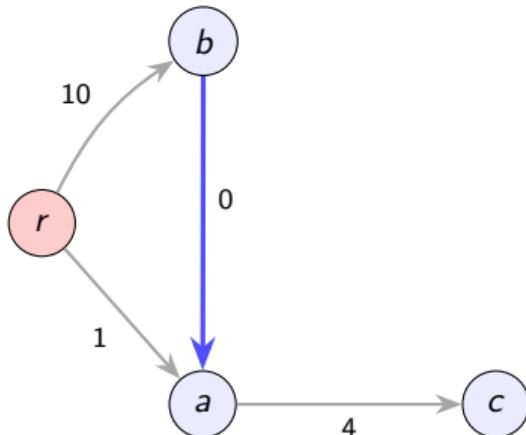
Fase I: Iteração 2 - Redução de Custos

Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(b, a)\}$
- $D_0 = (V, \{(b, a)\})$

Redução de custos:

- $c(r, a) = 2 - 1 = 1$
- $c(b, a) = 1 - 1 = 0 \checkmark$



Arcos azuis têm custo zero

Observação

Custos são reduzidos para garantir que σ seja w -disjunta.

Fase I: Iteração 3 - Redução de Custos

Atualização:

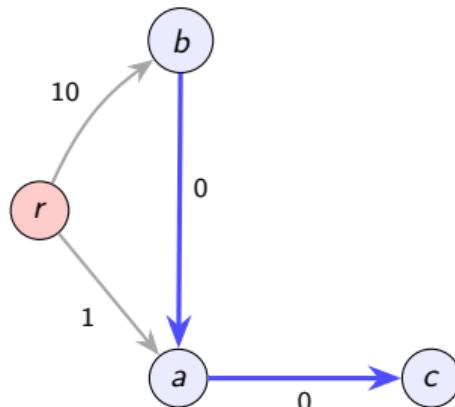
- $F = \{(b, a), (a, c)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Redução:

- $c(a, c) = 4 - 4 = 0 \checkmark$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(b, a), (a, c)\}$:

- CFCs: $\{r\}, \{b\}, \{a\}, \{c\}$
- Fontes em D_0 : $\{r\}, \{b\}$



Arcos com custo zero em azul

Fase I: Iteração 4 - Redução de Custos

Estado: $F = \{(b, a), (a, c)\}$

$\mathcal{C}(D_0)$ ainda tem:

- Fonte $\{b\}$ não contém r

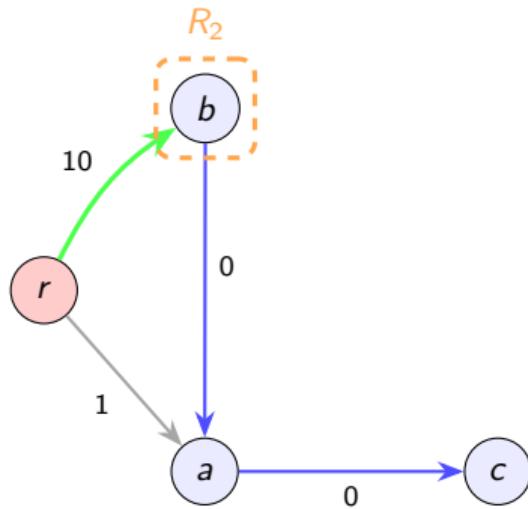
Escolha: $R_2 = \{b\}$

Arcos que entram em $\{b\}$:

- $(r, b) : 10 \leftarrow$ único arco

Seleção:

- $\lambda_2 = 10$
- $f_2 = (r, b)$



Fase I: Iteração 5 - Estado Final

Atualização:

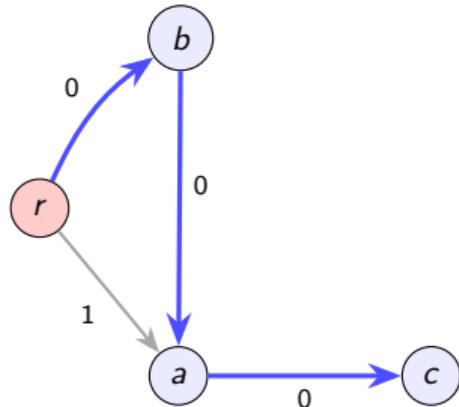
- $F = \{(b, a), (a, c), (r, b)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Redução:

- $c(r, b) = 10 - 10 = 0$

$\mathcal{C}(D_0)$ com $F = \{(b, a), (a, c), (r, b)\}$:

Condição de parada satisfeita!



Todos arcos de F têm custo zero!

Sequência devolvida

$\sigma = [(f_0 = (b, a), R_0 = \{a\}, \lambda_0 = 1), (f_1 = (a, c), R_1 = \{c\}, \lambda_1 = 4), (f_2 = (r, b), R_2 = \{b\}, \lambda_2 = 10)]$

Intermissão

Fase II: Duas Abordagens

Fase II: Construção da Arborescência

Entrada: Sequência $(f_i)_{i \in [k]}$ da Fase I

Objetivo: Extrair $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$ que é uma r -arborescência geradora

Algoritmo guloso:

- ① Iniciar com $U := \{r\}$ e $J := \emptyset$
- ② Para $t = 1$ até $|V| - 1$:
 - Para cada $f_i = (u_i, v_i)$ na sequência:
 - Se $u_i \in U$ e $v_i \notin U$:
 - $U := U \cup \{v_i\}$
 - $J := J \cup \{f_i\}$
 - Passar para próxima iteração

Invariante

Em cada iteração, $\varrho_J(R_i) \leq 1$ para todo $i \in [k]$

Fase II: Exemplo - Extração da Arborescência

Entrada da Fase II:

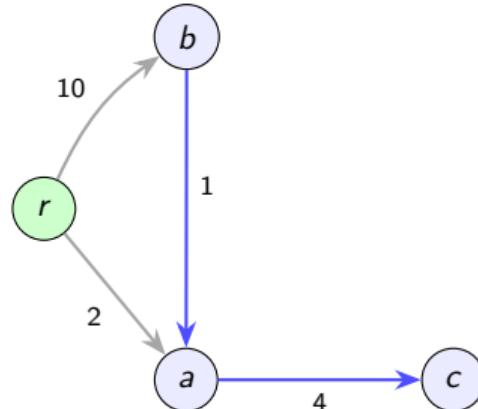
- $F = [f_0, f_1, f_2] = [(b, a), (a, c), (r, b)]$

Estado inicial:

- $U = \{r\}$ (alcançados)
- $J = \emptyset$ (arborescência)

Objetivo:

- Selecionar $|V| - 1 = 3$ arcos
- Manter propriedade de arborescência



Verde = vértices em U

Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D , não apenas F .

Fase II: Iteração 1

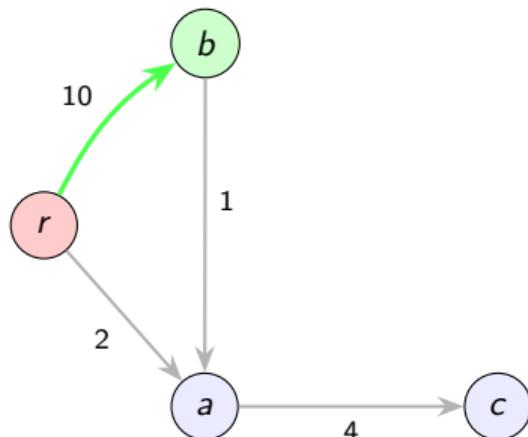
Estado: $U = \{r\}$, $J = \emptyset$

Procurar em F :

- $f_0 = (b, a)$: $b \notin U \times$
- $f_1 = (a, c)$: $a \notin U \times$
- $f_2 = (r, b)$: $r \in U$, $b \notin U \checkmark$

Ação:

- Adicionar (r, b) a J
- $U := U \cup \{b\} = \{r, b\}$



$$J = \{(r, b)\}, \text{ custo} = 10$$

Fase II: Iteração 2

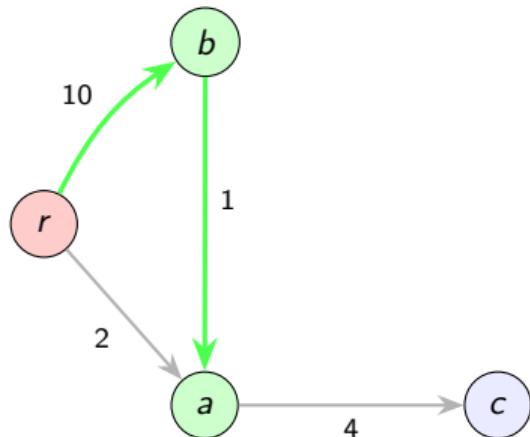
Estado: $U = \{r, b\}$, $J = \{(r, b)\}$

Procurar em F :

- $f_0 = (b, a)$: $b \in U$, $a \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (b, a) a J
- $U := U \cup \{a\} = \{r, b, a\}$



$$J = \{(r, b), (b, a)\}, \text{ custo} = 11$$

Fase II: Iteração 3 - Estado Final

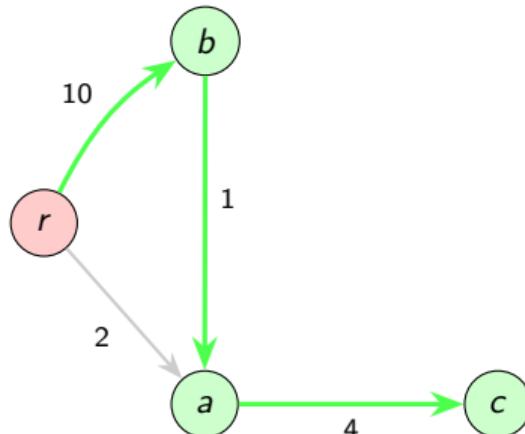
Estado: $U = \{r, b, a\}$, $|J| = 2$

Procurar em F :

- $f_1 = (a, c)$: $a \in U$, $c \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (a, c) a J
- $U := U \cup \{c\} = V$
- $|J| = 3 = |V| - 1$ ✓



$J = r$ -arborescência geradora!

Resultado Final

$J = \{(r, b), (b, a), (a, c)\}$ com custo $w(J) = 10 + 1 + 4 = 15$ (custo mínimo!)

Intermissão

Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	0,016 s	0,020 s

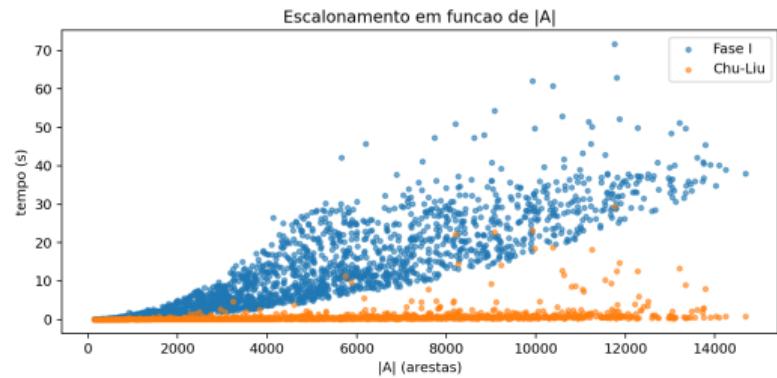
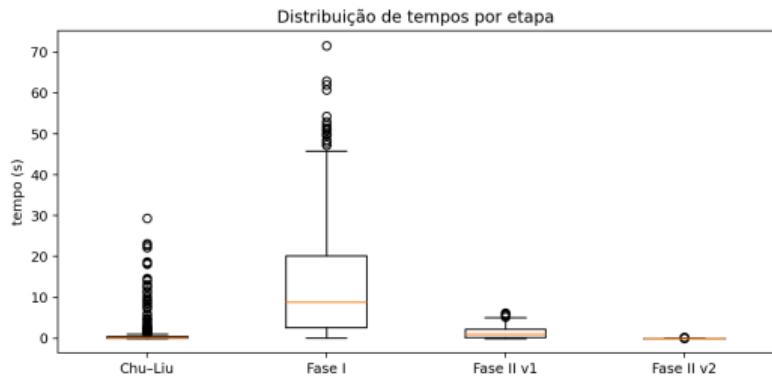
Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

Escalonamento e Consumo de Memória

Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arestas
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida



Principais Resultados

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
 - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
 - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Memória modesta: 11,5 MB

Conclusões dos Experimentos

- Equivalência teórica e prática dos algoritmos confirmada
- Chu-Liu/Edmonds é mais eficiente
- Fase I de Frank é o gargalo computacional
- Heap na Fase II traz ganhos práticos expressivos
- Algoritmos são escaláveis e viáveis para grandes digrafos

Intermissão

Didática do Abstrato

Fundamentos Cognitivos e Didáticos

Desafios do Ensino de Matemática Abstrata

- Conhecimento abstrato exige transitar entre registros: intuitivo, visual, simbólico e formal.
- **Carga cognitiva:**
 - Intrínseca: complexidade dos conceitos e pré-requisitos.
 - Extrínseca: forma de apresentação e coordenação entre texto, fórmulas e figuras.
 - Pertinente: esforço dedicado à organização dos esquemas mentais.
- Combinar representações verbais e visuais reduz sobrecarga e favorece integração semântica.

Desafios na Ensino de Algoritmos de Grafos

Três Eixos de Dificuldade

- ① **Decisões locais vs. coerência global:** Escolhas localmente ótimas podem gerar ciclos, dificultando a compreensão da solução global.
- ② **Contração e expansão:** Transitar entre grafo original, condensado e reexpansão exige rastreabilidade e clareza sobre o que muda e o que permanece.
- ③ **Relação com a teoria primal-dual:** Dificuldade em conectar ações operacionais do algoritmo com fundamentos teóricos e certificados de optimidade.

Solução: Visualização e interação bem projetadas facilitam a integração entre prática e teoria.

O Ecossistema de Ferramentas para Ensino de Grafos

Categorias de Ferramentas Digitais

- **Diagramas programáveis:** Visualização estável e integrada ao texto matemático (*Graphviz*, *TikZ*).
- **Exploração e edição de grafos:** Manipulação gráfica e análise estrutural (*Gephi*, *yEd*, *Cytoscape*).
- **Visualização de algoritmos:** Animações e explicações dinâmicas (*VisuAlgo*).
- **Ambientes programáveis:** Integração de código, texto e visualização para exemplos reproduzíveis (*Jupyter*, *NetworkX*).

Nenhuma ferramenta cobre todos os aspectos didáticos de forma integrada. A aplicação proposta busca preencher essa lacuna.

Objetivos da Ferramenta Didática

- Facilitar a compreensão dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank
- Permitir aos usuários interagir com grafos e observar o funcionamento dos algoritmos
- Fornecer feedback imediato sobre as operações realizadas
- Ser acessível via navegador web, sem necessidade de instalação

Intermissão

Aplicação Web

Aplicação web

Ferramenta web interativa para ensino de algoritmos de arborescências dirigidas, permitindo visualização passo a passo, edição livre de grafos e exportação de resultados, com arquitetura modular e foco didático.

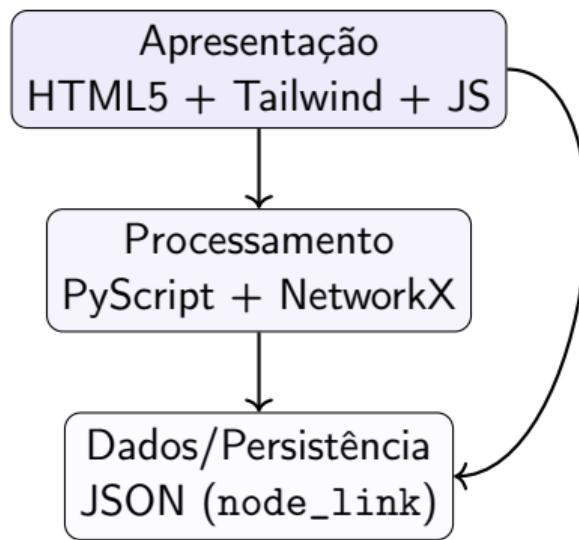
Módulos principais:

- **Visualização Algorítmica:** Páginas para execução passo a passo dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank.
- **Modelagem Livre:** Editor sandbox para desenhar, testar e exportar grafos arbitrários.
- **Disseminação Científica:** Página informativa sobre o projeto e a dissertação.

Arquitetura da Aplicação

Estrutura em três camadas:

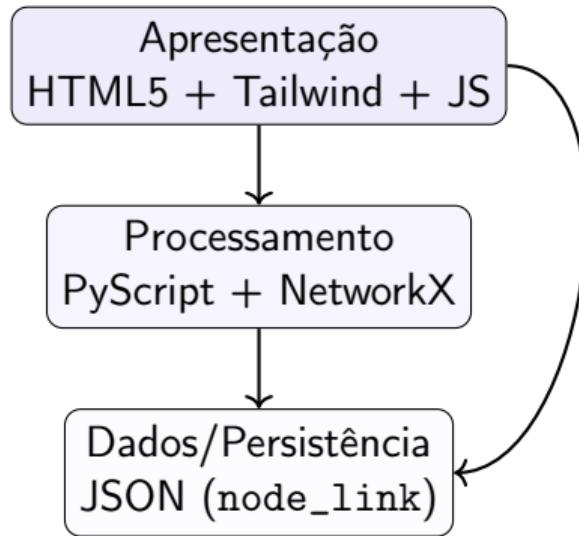
- **Apresentação:** Interface construída em HTML5, estilizada com Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript.
- **Processamento (PyScript):** Executa algoritmos em Python (NetworkX) diretamente no navegador, gerando visualizações estáticas com Matplotlib.
- **Dados e Persistência:** Utiliza JSON (node_link) para serializar grafos, armazenar pesos e permitir exportação/importação entre módulos.



Arquitetura da Aplicação

Benefícios:

- Processamento local e rápido
- Facilidade de uso e reproduzibilidade
- Modularidade e extensibilidade



Princípios de IHC Aplicados



Fundamentos para o Design da Ferramenta

O desenvolvimento da aplicação web foi guiado por oito princípios de Interação Humano-Computador (IHC), integrando heurísticas de usabilidade e teorias de aprendizagem:

- **Usabilidade:** Interface limpa, controles claros e navegação intuitiva.
- **Eficiência cognitiva:** Redução da carga mental, destaque para informações relevantes.
- **Feedback imediato:** Atualização visual e textual em tempo real a cada ação.
- **Engajamento ativo:** Usuário explora, manipula e prediz resultados.
- **Visão geral com detalhe sob demanda**
- **Consistência semântica:** Terminologia e estilos padronizados em toda a interface.
- **Múltiplos registros de representação:** Grafo visual, log textual e parâmetros simbólicos.
- **Prevenção e recuperação de erros**

Intermissão

Conclusões

Contribuições do Trabalho

① Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

② Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

③ Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>