

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca  
de uma  $r$ -Arborescência Inversa de Custo Mínimo  
em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática  
Interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma  
r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos  
Dirigidos com Aplicação Didática Interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Universidade Federal do ABC

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

*Dedicatória (opcional).*

# Agradecimientos

Agradecimientos (opcional).



# Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma  $r$ -arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

**Palavras-chave:** Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

# Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse  $r$ -arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

**Keywords:** Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma $r$ -arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos de digrafo. . . . .	12
Figura 2 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	12
Figura 3 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	12
Figura 4 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	13
Figura 5 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa. . . . .	14
Figura 6 – O caminho simples maximal $P$ inicia em $u$ e termina em $v$ . A porção $S$ de $P$ entre $u$ e $w$ é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo. . . . .	15
Figura 7 – Bijeção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em $D'$ escolhe exatamente um arco que entra em $x_C$ ; ao expandir $C$ , esse arco corresponde a um $(u, w)$ que entra em algum $w \in C$ e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total. . . . .	16
Figura 8 – Reexpansão de $C$ : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em $x_C$ ; ao expandir, $x_C$ é substituído por $C$ e o arco selecionado entra em algum $w \in C$ ; remove-se exatamente um arco interno de $C$ para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero). . . . .	16
Figura 9 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice $v$ com três arestas de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar <code>normalize_incoming_edge_weights(D, v)</code> : o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. A aresta $(u_2, v)$ (em vermelho) tem custo zero e será selecionada para $F^*$ . . . . .	21
Figura 10 – Exemplo de construção de $F^*$ a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo $D$ após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos uma aresta de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo $F^*$ resultante contém apenas as arestas de custo zero selecionadas, uma por vértice. Note que $F^*$ pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$ ) que serão tratados nas etapas subsequentes. . . . .	23



- Figura 11 – Exemplo de detecção de ciclo em  $F^*$ . À esquerda, o subgrafo  $F^*$  contém um ciclo formado pelos vértices  $\{v_2, v_3, v_4\}$  (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar a aresta  $(v_4, v_2)$ , onde  $v_2$  já está na pilha de recursão. À direita, a função retorna uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e as três arestas que formam o ciclo. . . . . 25
- Figura 12 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original  $D$  com ciclo  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  (em amarelo). Vértices externos  $r, v_1$  e  $v_5$  têm arestas conectando ao ciclo:  $r$  envia aresta para  $v_2$  (peso 2) e  $v_4$  (peso 5);  $v_4$  envia aresta para  $v_5$  (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice  $x_C$  (vermelho). As arestas de entrada são redirecionadas:  $(r, x_C)$  recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). A aresta de saída  $(x_C, v_5)$  mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão. . . . . 29
- Figura 13 – Remoção de aresta interna durante reexpansão. À esquerda, ciclo  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  após adicionar aresta externa  $(u, v_2)$  vindoura da arborescência  $T'$ : o vértice  $v_2$  tem grau de entrada 2 (aresta externa vermelha de  $u$  e aresta interna do ciclo vinda de  $v_4$ ), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover a aresta interna  $(v_4, v_2)$ : o vértice  $v_2$  passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. A aresta removida é mostrada tracejada em cinza. . . . . 32
- Figura 14 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplas arestas com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arestas que entram na raiz, porém não há nenhuma neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo. . . . . 35
- Figura 15 – Normalização parcial das arestas de entrada para o vértice 1. As arestas de entrada são  $(0 \rightarrow 1)$  com peso original 3 e  $(2 \rightarrow 1)$  com peso original 1. Elegendo a aresta  $(2 \rightarrow 1)$  como a de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todas as arestas de entrada:  $(0 \rightarrow 1)$  passa de peso 3 para 2, e  $(2 \rightarrow 1)$  passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices. . . . . 36

- Figura 16 – Grafo contraído após detecção do ciclo  $C = \{1, 2\}$  em  $F^*$ . O ciclo foi contraído no supervértice  $n*0$  (destacado em vermelho). As arestas que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionadas para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas  $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$  para arestas de entrada e  $c'(x_C, v) := c(w, v)$  para arestas de saída. . . 36
- Figura 17 – Arborescência ótima  $F'$  obtida no grafo contraído. Todas as arestas selecionadas têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o grafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente uma aresta de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como  $F'$  é acíclico, alcançamos o caso base da recursão. . . . . 37
- Figura 18 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice  $n * 0$  foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com a aresta externa  $(0, 1)$  escolhida pela solução recursiva conectando ao ciclo. A aresta interna  $(2, 1)$  do ciclo original foi removida para manter a propriedade de arborescência ( $\deg^-(v) = 1$ ). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arestas, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0. . . . . 37

# Sumário

<b>1</b>	<b>ALGORITMO DE CHU-LIU-EDMONDS</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>O algoritmo</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Descrição do algoritmo</b>	<b>15</b>
1.2.1	Corretude	17
1.2.2	Complexidade	18
<b>1.3</b>	<b>Implementação em Python</b>	<b>18</b>
1.3.1	Representação de digrafos e detecção de ciclos	19
1.3.2	Normalização por vértice	20
1.3.3	Construção de $F^*$ :	21
1.3.4	Detecção de ciclo:	24
1.3.5	Contração de ciclo:	25
1.3.6	Remoção de arestas que entram na raiz:	30
1.3.7	Remoção de arco interno:	31
1.3.8	Procedimento principal (recursivo):	33
1.3.8.1	Exemplo de execução do algoritmo	35
1.3.9	Correspondência entre teoria e implementação	37
1.3.10	Transição para a abordagem primal-dual	39
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>40</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>41</b>
	<b>ANEXO A – ANEXO A</b>	<b>42</b>

# 1 Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds, que determina uma arborescência de custo mínimo em um dígrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em duas operações fundamentais: (i) a redução gulosa dos custos dos arcos e (ii) a contração de ciclos, de modo a resolver recursivamente uma instância menor do problema e, em seguida, estender a solução para o problema original. O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

## 1.1 O algoritmo

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe uma tripla  $(D, c, r)$ , em que  $D = (V, A)$  é um dígrafo,  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função custo e  $r \in V$  é a raiz, sob a hipótese de que  $D$  admite ao menos uma  $r$ -arborescência. O algoritmo devolve uma  $r$ -arborescência  $c$ -mínima de  $D$ .

Para evitar repetir essa hipótese, introduzimos a seguinte definição. Uma tripla  $(D, c, r)$  é um  **$r$ -dígrafo ponderado** se  $(D, c)$  é um dígrafo ponderado,  $r$  é um vértice de  $D$ ,  $\delta^-(r) = \emptyset$  e  $D$  possui uma  $r$ -arborescência. Note que a hipótese  $\delta^-(r)$  é uma trivialidade, pois uma  $r$ -arborescência não contém nenhum arco que entra em  $r$  e, portanto, tais arcos podem ser eliminados de  $D$  sem nenhum prejuízo.

Vamos tecer algumas considerações para motivar o algoritmo. Suponha doravante que  $(D, c, r)$  é um  $r$ -dígrafo ponderado. O algoritmo tem um caráter guloso. Note que, se  $T$  é uma  $r$ -arborescência de  $D$ , então, para cada vértice  $v \neq r$ , existe exatamente um arco de  $T$  que entra em  $v$ . Isso sugere a seguinte escolha gulosa: para cada vértice  $v \neq r$ , selecione um arco  $a_v$  de custo mínimo que entra em  $v$  e forme o conjunto  $T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$ .

Suponha que  $T$  é uma  $r$ -arborescência. Não é difícil verificar que  $T$  tem custo mínimo. De fato, seja  $F$  uma  $r$ -arborescência de  $D$ . Para cada vértice  $v \neq r$ , escreva  $b_v$  para o *único* arco de  $F$  que entra em  $v$ . Pela escolha gulosa,

$$c(a_v) \leq c(b_v) \quad \text{para todo } v \neq r.$$

Logo,

$$c(F) = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(b_v) \geq \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(a_v) = c(T).$$

Portanto,  $T$  é uma  $r$ -arborescência de custo mínimo.



Figura 1 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma  $r$ -arborescência. Os arcs em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcs de digrafo.

A seguinte figura ilustra que podemos não ter tanta sorte.

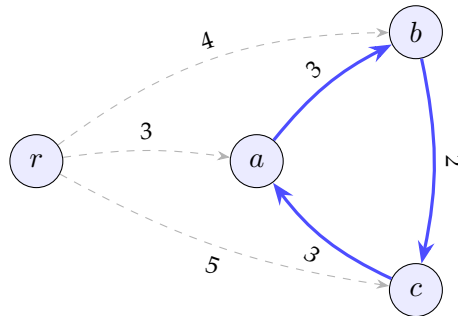


Figura 2 – Os arcs azuis são os da escolha gulosa.

Ora, se no lugar do arco  $(c, a)$  tivéssemos escolhido o arco  $(r, a)$ , então  $r$ -arborescência resultante seria de custo mínimo.

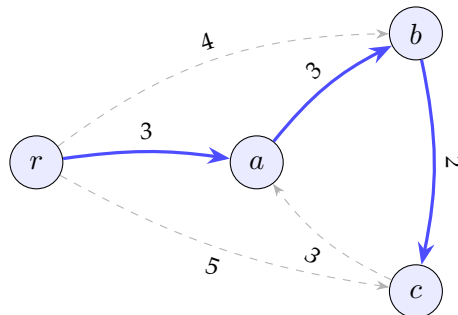


Figura 3 – Os arcs azuis são os da escolha gulosa.

O exemplo acima sugere que devemos formar o subdigrafo  $H$  de  $D$  com  $V(H) = V(D)$  e

$$A(H) := \bigcup_{v \in V \setminus \{r\}} \arg \min \{ c(a) : a \in \delta^-(v) \}.$$

Ou seja, para cada  $v \neq r$  incluímos em  $H$  todos os arcos de custo mínimo que entram em  $v$ . Um argumento análogo ao anterior mostra que, se  $H$  contém uma  $r$ -arborescência, então ela é de custo mínimo.

Infelizmente, só isso não é suficiente, como mostra a próxima figura.



Figura 4 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

O ideal, do ponto de vista algorítmico, é dispor de uma forma simples de identificar o subdigrafo  $H$ . Uma transformação nos custos fornece exatamente isso. Para tanto, introduzimos a noção de **custo  $q$ -reduzido**.

Seja  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$  (convencionamos  $q(r) = 0$ ). Definimos o **custo  $q$ -reduzido**  $c_q : A \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$c_q(a) := c(a) - q(\text{head}(a)), \quad a \in A.$$

Para um conjunto  $X \subseteq V$ , escrevemos  $q(X) := \sum_{u \in X} q(u)$ .

A próxima proposição mostra que a transformação por custo  $q$ -reduzido preserva a otimalidade.

**Proposição 1.1.** *Para toda função  $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma  $r$ -arborescência  $T$  é  $c$ -mínima em  $D$  se, e somente se,  $T$  é  $c_q$ -mínima em  $D$ .*

*Prova.* Seja  $F$  uma  $r$ -arborescência. Para cada  $u \in V \setminus \{r\}$ , seja  $a_u$  o único arco de  $F$  que entra em  $u$ . Então

$$\begin{aligned} c_q(F) &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c_q(a_u) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} (c(a_u) - q(u)) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c(a_u) - \sum_{u \in V \setminus \{r\}} q(u) \\ &= c(F) - q(V \setminus \{r\}). \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer  $r$ -arborescências  $T$  e  $F$ ,

$$c(T) \leq c(F) \iff c'(T) = c(T) - q(V \setminus \{r\}) \leq c(F) - q(V \setminus \{r\}) = c_q(F),$$

o que prova a proposição.  $\square$

Para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , defina

$$\lambda(v) := \lambda_c(v) := \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}.$$

Note que  $\lambda$  está bem definida uma vez que  $D$  possui uma  $r$ -arborescência e, portanto, existe ao menos um arco que entra em cada vértice diferente de  $r$ . Então, para todo  $v \in V \setminus \{r\}$ ,

$$\min\{c_\lambda(a) : a \in \delta^-(v)\} = 0,$$

isto é, precisamente os arcos de custo mínimo que entram em  $v$  passam a ter custo zero, e os demais ficam com custo positivo. Consequentemente, o subdigrafo  $H$  obtém-se simplesmente como o subdigrafo induzido pelos arcos de custo zero de  $c_\lambda$ :

$$V(H) = V(D) \quad \text{e} \quad A(H) = \{a \in A : c_\lambda(a) = 0\}.$$

A figura a seguir ilustra a redução de custos no digrafo da Figura 4.



Figura 5 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Podemos agora retomar o caso no qual o subdigrafo gerador  $H$  de  $D$ , cujo arcos são aqueles cujo custo  $\lambda$ -reduzido é zero, não possui uma  $r$ -arborescência. Vamos mostrar que  $H$  possui um ciclo.

Seja  $v \neq r$  um vértice de  $V$  que *não* é alcançável a partir de  $r$  em  $H$ . Considere um caminho simples maximal<sup>1</sup> de  $H$  que termina em  $v$ . Seja  $u$  o início de  $P$ . Como  $v$  não é atingível a partir de  $r$ , temos que  $u \neq r$ . Logo, existe exatamente um arco, digamos  $wv$ , de  $H$  que entra em  $u$ . Pela maximalidade de  $P$ , o vértice  $w$  é um dos vértices de  $P$  (caso contrário,  $w \cdot P$  é um caminho simples, o que contraria a escolha de  $P$ ). Como  $P$  é um caminho simples que começa em  $u$ , o vértice  $w$  aparece em  $P$  após  $u$ ; portanto,  $P$  contém um subcaminho  $S$  de  $u$  até  $w$ . Consequentemente,  $S \cdot u$  é um ciclo de  $H$ .

A solução consiste em *normalizar os custos por vértice*: para cada  $v \neq r$ , subtraímos de todo arco que entra em  $v$  o menor custo entre os arcos que chegam a  $v$ . Após esse

<sup>1</sup> Maximal aqui tem o seguinte sentido. Para cada vértice  $u$  de  $H$ , as sequências  $P \cdot u$  e  $u \cdot P$  não são caminhos simples.

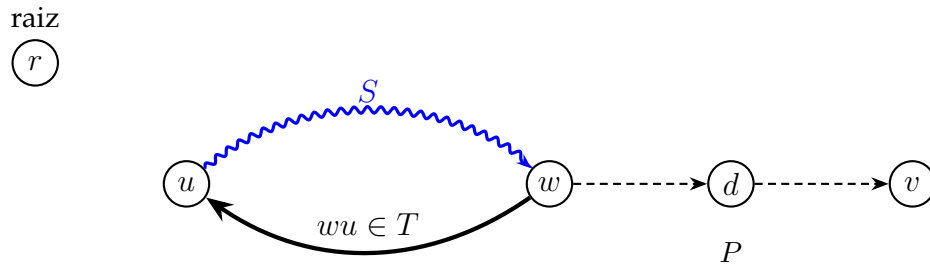


Figura 6 – O caminho simples maximal  $P$  inicia em  $u$  e termina em  $v$ . A porção  $S$  de  $P$  entre  $u$  e  $w$  é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho  $S \cdot u$  é um ciclo.

ajuste (custos reduzidos), cada  $v \neq r$  passa a ter ao menos um arco de custo reduzido zero. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a  $r$ -arborescência ótima. Se formarem um ciclo  $C$ , *contraímos*  $C$  em um **supervértice**  $x_C$ , ajustamos os custos dos arcos externos e resolvemos recursivamente no grafo menor. Ao final, *expandimos* as contrações removendo exatamente um arco interno de cada ciclo para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global.

## 1.2 Descrição do algoritmo

A seguir apresentamos uma descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. Detalhes de implementação serão discutidos na próxima seção. Denotamos por  $A'$  o conjunto de arcos escolhidos na construção da  $r$ -arborescência.

Construa  $A'$  escolhendo, para cada  $v \neq r$ , um arco de menor custo que entra em  $v$ . Se  $(V, A')$  é acíclico, então  $A'$  já é uma  $r$ -arborescência ótima, pois realizamos o menor custo de entrada em cada vértice e nenhuma troca pode reduzir o custo mantendo as restrições (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Sec. 4.9).

Se  $A'$  contiver um ciclo dirigido  $C$  (que não inclui  $r$ ), normalizamos os custos de entrada, *contraímos*  $C$  em um supervértice  $x_C$  ajustando arcos que entram em  $C$  por  $c'(u, x_C) = c(u, w) - c(a_w)$ , e resolvemos recursivamente no grafo contraído.

As arborescências obtidas no grafo contraído estão em correspondência bijetiva com as arborescências do grafo original que possuem exatamente um arco entrando no ciclo  $C$ . Como, após a normalização, todos os arcos internos de  $C$  passam a ter custo reduzido igual a zero, a expansão do supervértice recupera uma arborescência válida no grafo original sem alterar o custo total da solução.



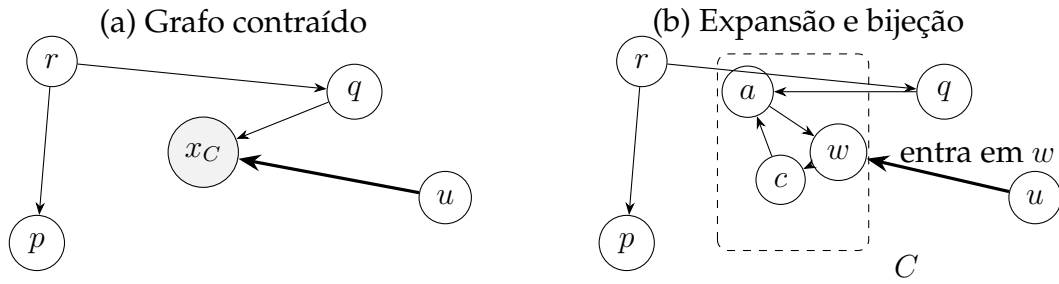


Figura 7 – Bijecção entre arborescências no grafo contraído e no original: toda arborescência em  $D'$  escolhe exatamente um arco que entra em  $x_C$ ; ao expandir  $C$ , esse arco corresponde a um  $(u, w)$  que entra em algum  $w \in C$  e os arcos internos (de custo reduzido zero) são mantidos, preservando o custo total.

Na expansão, reintroduzimos  $C$  e removemos exatamente um arco interno para manter grau de entrada 1 e aciclicidade global (SCHRIJVER, 2003; KLEINBERG; TARDOS, 2006).

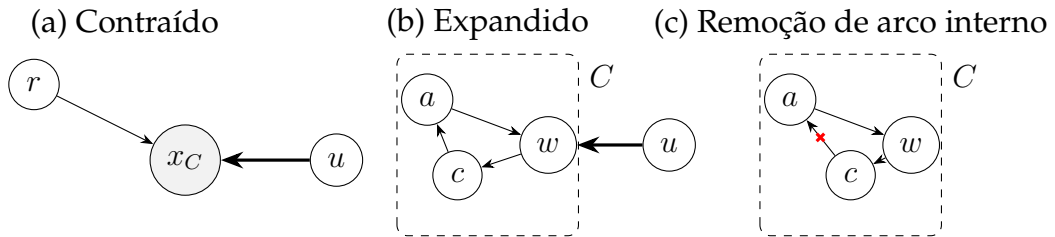


Figura 8 – Reexpansão de  $C$ : no grafo contraído seleciona-se um arco que entra em  $x_C$ ; ao expandir,  $x_C$  é substituído por  $C$  e o arco selecionado entra em algum  $w \in C$ ; remove-se exatamente um arco interno de  $C$  para eliminar o ciclo, preservando conectividade e custo total (arcos internos têm custo reduzido zero).

Abaixo, temos a descrição formal do algoritmo.

### Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo  $D = (V, A)$ , custos  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , raiz  $r$ .<sup>a</sup>

1. Para cada  $v \neq r$ , escolha  $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$ . Defina  $y(v) := c(a_v)$  e  $F^* := \{a_v : v \neq r\}$ .
2. Se  $(V, F^*)$  é acíclico, devolva  $F^*$ . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma  $r$ -arborescência de custo mínimo.
3. Caso contrário, seja  $C$  um ciclo dirigido de  $F^*$  (com  $r \notin C$ ). **Contração:**

contraia  $C$  em um supervértice  $x_C$  e defina custos  $c'$  por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em  $x_C$  e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por  $D' = (V', A')$ .

4. **Recursão:** compute uma  $r$ -arborescência ótima  $T'$  de  $D'$  com custos  $c'$ .
5. **Expansão:** seja  $(u, x_C) \in T'$  o único arco que entra em  $x_C$ . No grafo original, ele corresponde a  $(u, w)$  com  $w \in C$ . Forme

$$T := (T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}) \cup \{(u, w)\} \cup ((F^* \cap A(C)) \setminus \{a_w\}).$$

Então  $T$  tem grau de entrada 1 em cada  $v \neq r$ , é acíclico e tem o mesmo custo de  $T'$ ; logo, é uma  $r$ -arborescência ótima de  $D$  (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

<sup>a</sup> Se algum  $v \neq r$  não possui arco de entrada, não existe  $r$ -arborescência.

### 1.2.1 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos:* para cada  $v \neq r$ , defina  $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$  e  $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$ . Para qualquer  $r$ -arborescência  $T$ , vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de  $T$  entrando em cada  $v \neq r$ . O termo  $\sum_{v \neq r} y(v)$  é constante (independe de  $T$ ); assim, minimizar  $\sum c$  equivale a minimizar  $\sum c'$  (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos  $a_v$  de menor custo que entram em  $v$  têm custo reduzido zero e formam  $F^*$ .

2. *Caso acíclico:* se  $(V, F^*)$  é acíclico, então já é uma  $r$ -arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada  $v \neq r$ , é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).
3. *Caso com ciclo (contração/expansão):* se  $F^*$  contém um ciclo dirigido  $C$ , todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

Contraia  $C$  em  $x_C$  e ajuste apenas arcos que *entram* em  $C$ :  $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$ .

Resolva o problema no grafo contraído  $D'$ , obtendo uma  $r$ -arborescência ótima  $T'$  sob  $c'$ . Na expansão, substitua o arco  $(u, x_C) \in T'$  pelo correspondente  $(u, w)$  (com  $w \in C$ ) e remova  $a_w$  de  $C$ .

Como os arcos de  $C$  têm custo reduzido zero e  $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$ , a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo,  $T'$  ótimo em  $D'$  mapeia para  $T$  ótimo em  $D$  para  $c'$ . Pela equivalência entre  $c$  e  $c'$ ,  $T$  também é ótimo para  $c$ . Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

Em termos intuitivos,  $y$  funciona como um potencial nos vértices: torna “apertados” (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

### 1.2.2 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os  $a_v$ , detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa  $O(m)$  por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo  $O(n)$  níveis e tempo total  $O(mn)$ , com  $n = |V|$ ,  $m = |A|$ .

O uso de memória é  $O(m + n)$ , incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão  $O(mn)$  por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>>).

## 1.3 Implementação em Python

Esta seção apresenta uma implementação em Python do algoritmo. A arquitetura segue os passos teóricos: recebe como entrada um digrafo ponderado, os custos das arestas e o vértice raiz. O procedimento seleciona, para cada vértice, o arco de menor custo de entrada, verifica se o grafo é acíclico e, se necessário, contrai ciclos e ajusta custos. Ao final, retorna como saída a  $r$ -arborescência ótima: um conjunto de arestas que conecta todos os vértices à raiz com custo mínimo.

Formalizamos a implementação do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

- **Entrada:** digrafo  $D = (V, A)$ , custos  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$  no atributo “w”, raiz  $r \in V$ .
- **Hipóteses:** (i)  $D$  é conexo a partir de  $r$  — todo  $v \neq r$  é alcançável; (ii) para todo  $X \subseteq V \setminus \{r\}$ , existe arco entrando em  $X$  (condições de Edmonds (SCHRIJVER, 2003)); (iii) custos não negativos.
- **Saída:** subgrafo  $T$  com  $|A_T| = |V| - 1$  arestas, grau de entrada 1 para todo  $v \neq r$ , alcançabilidade a partir de  $r$  e custo  $\sum_{a \in A_T} c(a)$  mínimo.

- **Convenções:** arcos paralelos permitidos após contrações; laços descartados.

A implementação consiste em funções auxiliares que traduzem cada passo teórico (normalização, construção de  $F^*$ , contração, reexpansão) em operações sobre `nx.DiGraph`, orquestradas por uma função principal que gerencia o fluxo recursivo. As subseções seguintes detalham cada função auxiliar: lógica, parâmetros, retornos e complexidade.

### 1.3.1 Representação de digrafos e detecção de ciclos

A implementação utiliza a biblioteca NetworkX<sup>2</sup>, especificamente a classe `nx.DiGraph` para representar digrafos  $D = (V, A)$ . Internamente, usa dicionários aninhados do Python para armazenar vértices, arestas e atributos, garantindo operações eficientes: adicionar/remover aresta  $O(1)$  amortizado, iterar vizinhos  $O(\deg(u))$ , percorrer todas as arestas  $O(m)$ .

#### Métodos da API NetworkX

Os métodos da API NetworkX utilizados na implementação dividem-se em três categorias funcionais, cada uma correspondendo a uma fase específica do algoritmo:

#### Consulta de estrutura

- `D.nodes()`: retorna visão iterável sobre  $V$ , permitindo percorrer todos os vértices.
- `D.in_edges(v, data="w")`: retorna arestas entrantes em  $v$  com pesos, produzindo tuplas  $(u, v, w)$ . Usado para encontrar o arco de menor custo que entra em cada vértice.
- `D.out_edges(u, data="w")`: retorna arestas saíntes de  $u$  com pesos, análogo a `in_edges`. Necessário na reexpansão para reintegrar arestas do ciclo.
- `D[u][v]["w"]`: acessa diretamente o peso da aresta  $(u, v)$  para leitura ou modificação. Usado na normalização para ajustar custos reduzidos.

#### Modificação de estrutura

- `D.add_edge(u, v, w=peso)`: adiciona aresta  $(u, v)$  com peso especificado, criando vértices automaticamente se não existirem. Usado para construir  $F^*$  e reintegrar arestas na reexpansão.

<sup>2</sup> NetworkX é uma biblioteca Python para criação, manipulação e estudo de redes. Disponível em <https://networkx.org/>.

- `D.remove_edges_from(edges)`: remove múltiplas arestas em lote. Aplicado para eliminar arestas internas do ciclo contraído.
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: remove vértices e todas as suas arestas incidentes. Usado para eliminar os vértices do ciclo original após contração.

### Detecção de ciclos

- `nx.find_cycle(G, orientation="original")`: detecta ciclos via DFS (detalhado na próxima subseção).

Essa função retorna um iterador sobre as arestas do ciclo (tuplas  $(u, v, key)$ ). Dois aspectos importantes, o retorno é iterador (não lista), economizando memória e em grafos acíclicos, lança a exceção `NetworkXNoCycle` em vez de retornar valor sentinela. Isso segue o princípio EAFP (*Easier to Ask for Forgiveness than Permission*) do Python e casa naturalmente com o fluxo do algoritmo: tratamos o caso acíclico com `try-except`, distinguindo caso base (sem ciclo, retornar solução) de caso recursivo (com ciclo, contrair e recursão).

Abaixo, detalhamos as funções auxiliares que implementam os passos do algoritmo e ao final apresentamos a função principal que orquestra o fluxo recursivo.

### 1.3.2 Normalização por vértice

Esta função implementa a normalização de custos reduzidos: calcula  $y(v) = \min\{w(u, v)\}$  e substitui cada peso  $w(u, v)$  por  $w(u, v) - y(v)$ , garantindo que ao menos uma aresta de entrada tenha custo zero. Como cada *r-arborescência* possui exatamente uma aresta entrando em cada vértice não-raiz, a soma total dos valores  $y(v)$  subtraídos é constante para qualquer solução, preservando assim a ordem de otimalidade entre diferentes arborescências.

Recebe como entrada um digrafo `D` (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo `node` do vértice a ser normalizado. A implementação coleta todas as arestas de entrada de `node` com seus pesos usando o método `D.in_edges(node, data="w")`, que retorna uma lista de tuplas  $(u, node, w)$  (linha 2). Em seguida, verifica se a lista está vazia e se estiver retorna imediatamente sem fazer alterações (linhas 3–4). Caso contrário, calcula o peso mínimo  $y_v$  através de uma compreensão de gerador que extrai o terceiro elemento de cada tupla (linha 5) e, para cada predecessor  $u$ , subtrai  $y_v$  do peso armazenado em `D[u][node][w]` (linha 6).

Não retorna nenhum valor (retorno implícito `None`), pois a operação é realizada in-place: o grafo `D` passado como parâmetro é modificado diretamente, e ao menos uma

aresta de entrada de node terá custo reduzido zero após a execução. A complexidade é  $O(\deg^-(v))$ , pois cada operação percorre as arestas de entrada uma única vez.

#### Normalização por vértice: custos reduzidos

*Normaliza os pesos das arestas que entram em node, subtraindo de cada uma o menor peso de entrada. Modifica o grafo D in-place.*

```

1 def normalize_incoming_edge_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
2     predecessors = list(D.in_edges(node, data="w"))
3     if not predecessors:
4         return
5     yv = min((w for _, _, w in predecessors))
6     D[u][node]["w"] -= yv

```

A Figura 9 ilustra o funcionamento da normalização:

**Antes:**  $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$  **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

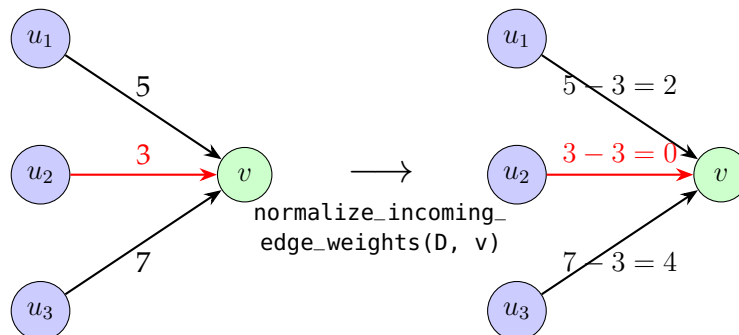


Figura 9 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice  $v$  com três arestas de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar `normalize_incoming_edge_weights(D, v)`: o menor peso  $y(v) = 3$  é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. A aresta  $(u_2, v)$  (em vermelho) tem custo zero e será selecionada para  $F^*$ .

Observe que as diferenças relativas são preservadas: a aresta mais cara permanece 4 unidades acima da mais barata, e a intermediária mantém sua posição relativa. Como cada  $r$ -arborescência contém exatamente uma aresta entrando em cada vértice não-raiz, a soma  $\sum_{w \neq r} y(w)$  é constante para qualquer solução, garantindo que a ordem de otimalidade seja preservada.

### 1.3.3 Construção de $F^*$ :

Esta função constrói o subdigrafo  $F^*$  selecionando, para cada vértice  $v \neq r_0$ , uma única aresta de custo reduzido zero que entra em  $v$ .

Recebe como entrada um digrafo  $D$  (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo  $r_0$  da raiz. A implementação cria um novo digrafo vazio  $F\_star$  (linha 2) em vez de modificar  $D$  diretamente; essa escolha de criar uma estrutura separada é fundamental porque  $F^*$  é um subgrafo conceitual usado para detecção de ciclos, e preservar  $D$  inalterado permite que as operações subsequentes (como contração) trabalhem com o grafo original completo, evitando perda de informação sobre arestas não selecionadas que podem ser necessárias após reexpansões.

Em seguida, para cada vértice  $v$  diferente de  $r_0$  (linhas 3–4), utilizando o método `D.nodes()`, coleta todas as arestas de entrada de  $v$  com seus pesos em uma lista e armazena na variável `in_edges` (linha 5); a materialização em lista é necessária porque a subsequente iteração sobre as arestas para encontrar aquela de peso zero poderia causar problemas se trabalhássemos diretamente com a visão retornada por `in_edges`, especialmente em cenários de modificação concorrente. Se não houver arestas de entrada, prossegue para o próximo vértice (linhas 6–7) usando `continue`, pois um vértice isolado ou inacessível não contribui para  $F^*$  e sua ausência será detectada posteriormente como violação das hipóteses de conectividade.

Caso contrário, utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o primeiro predecessor  $u$  cuja aresta  $(u, v)$  tem peso zero (linha 8); a escolha de `next` com gerador em vez de uma busca exaustiva é eficiente porque interrompe a iteração assim que encontra a primeira aresta de custo zero, evitando processamento desnecessário das arestas restantes (embora teoricamente todas as arestas de custo zero sejam equivalentes, na prática apenas uma é necessária para  $F^*$ ). A função `next` retorna `None` se nenhuma aresta de peso zero existir, o que teoricamente não deveria ocorrer após a normalização correta (que garante ao menos uma aresta de custo zero por vértice), mas o tratamento defensivo evita erros em casos degenerados. Se tal aresta existir, adiciona-a a  $F\_star$  com peso zero usando o método `add_edge` (linhas 9–10); a especificação explícita de  $w=0$  garante que  $F^*$  contenha apenas arestas de custo reduzido zero, propriedade fundamental para a corretude do algoritmo.

Retorna o digrafo  $F\_star$  contendo exatamente uma aresta entrando em cada  $v \neq r_0$ , todas com custo reduzido zero. O grafo original  $D$  não é modificado, preservando o estado para operações futuras. A complexidade é  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de arestas, pois cada aresta é considerada no máximo uma vez durante a iteração sobre todos os vértices: para cada um dos  $n - 1$  vértices não-raiz, examina-se suas arestas de entrada (totalizando no máximo  $m$  arestas ao longo de todas as iterações), e para cada vértice a busca por aresta de peso zero é interrompida no primeiro match, resultando em tempo linear no tamanho do grafo.

Construção de  $F^*$ 

Constrói o subdigrafo  $F^*$  a partir do digrafo  $D$ , selecionando para cada vértice (exceto a raiz  $r_0$ ) uma aresta de custo reduzido zero que entra nele.

```

1 def get_Fstar(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     F_star = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r0:
5             in_edges = list(D.in_edges(v, data="w"))
6             if not in_edges:
7                 continue
8             u = next((u for u, _, w in in_edges if w == 0), None)
9             if u:
10                 F_star.add_edge(u, v, w=0)
11     return F_star

```

A Figura 10 ilustra a construção de  $F^*$ :

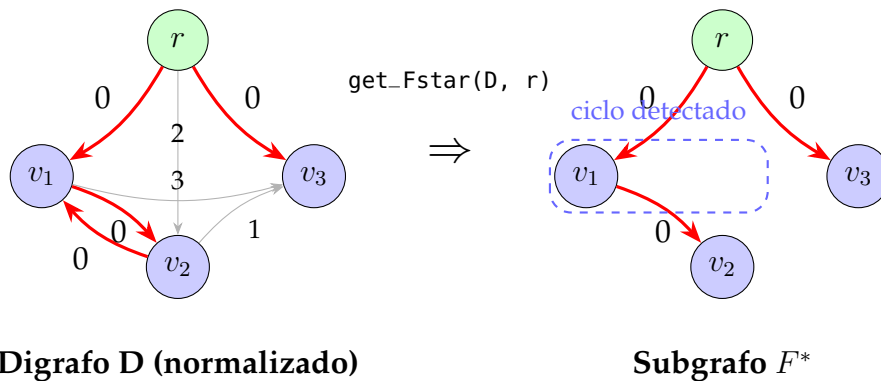
Digrafo  $D$  (normalizado)Subgrafo  $F^*$ 

Figura 10 – Exemplo de construção de  $F^*$  a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo  $D$  após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos uma aresta de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo  $F^*$  resultante contém apenas as arestas de custo zero selecionadas, uma por vértice. Note que  $F^*$  pode conter ciclos (como  $\{v_1, v_2\}$ ) que serão tratados nas etapas subsequentes.

A detecção de ciclos é crucial, pois a presença de um ciclo em  $F^*$  indica que a escolha de arestas de custo reduzido zero não formou uma arborescência válida. Esses ciclos precisam ser tratados nas etapas subsequentes do algoritmo.

As funções de normalização por vértice e construção de  $F^*$  juntas implementam o passo 1 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:



### Passo 1 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

**Passo 1:** Para cada  $v \neq r$ , escolha  $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$ . Defina  $y(v) := c(a_v)$  e  $F^* := \{a_v : v \neq r\}$ .

#### 1.3.4 Detecção de ciclo:

Esta função detecta a presença de um ciclo dirigido em  $F^*$  e retorna um subgrafo que o contém; se  $F^*$  for acíclico, retorna None.

Recebe como entrada um digrafo `F_star` (objeto `nx.DiGraph`). A implementação utiliza um bloco `try` (linha 2) para capturar exceções caso não haja ciclo; esta escolha de tratamento por exceção é necessária porque a API do NetworkX adota o padrão EAFP (*Easier to Ask for Forgiveness than Permission*), onde `nx.find_cycle` não retorna um valor especial (como None) quando o grafo é acíclico, mas sim lança a exceção `NetworkXNoCycle` para sinalizar a ausência de ciclos.

Em seguida a função inicializa um conjunto vazio `nodes_in_cycle` (linha 3) e emprega a função `nx.find_cycle` do NetworkX (linha 4), que realiza uma busca em profundidade (DFS) para detectar ciclos. A função `nx.find_cycle` percorre o grafo visitando vértices e arestas: ao encontrar uma aresta  $(u, v)$  onde  $v$  já está na pilha de recursão da DFS, identifica um ciclo e retorna um iterador sobre todas as arestas que compõem esse ciclo. O laço na linha 4 itera sobre essas arestas retornadas, desempacotando cada uma na forma  $(u, v, \_)$  (ignorando o terceiro elemento com `_`, que contém metadados de orientação), e para cada aresta  $(u, v)$  adiciona ambos os vértices ao conjunto `nodes_in_cycle` (linha 5); a escolha de usar conjunto em vez de lista garante que cada vértice seja adicionado apenas uma vez mesmo que o ciclo tenha múltiplas arestas incidentes, e a operação de adição tem complexidade  $O(1)$  amortizada.

Após coletar todos os vértices do ciclo, constrói e retorna uma cópia do subgrafo induzido por eles (linha 7); a cópia é necessária porque o método `subgraph` retorna apenas uma visão dinâmica sobre o grafo original.

Se nenhum ciclo existir, a exceção `nx.NetworkXNoCycle` é capturada no bloco `except` (linha 8) e a função retorna None (linha 9);

No final, um subgrafo contendo os vértices e arestas do ciclo detectado é retornado, ou None se não houver ciclo. O grafo original `F_star` não é modificado. A complexidade é  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de arestas, pois a DFS visita cada aresta no máximo uma vez.

### Detecção de ciclo dirigido em $F^*$

Detecta um ciclo dirigido em  $F^*$  e retorna um subgrafo contendo seus vértices e arestas, ou *None* se for acíclico.

```

1 def find_cycle(F_star: nx.DiGraph):
2     try:
3         nodes_in_cycle = set()
4         for u, v, _ in nx.find_cycle(F_star, orientation="original"):
5             nodes_in_cycle.update([u, v])
6         return F_star.subgraph(nodes_in_cycle).copy()
7     except nx.NetworkXNoCycle:
8         return None

```

A Figura 11 ilustra o processo de detecção de ciclo:

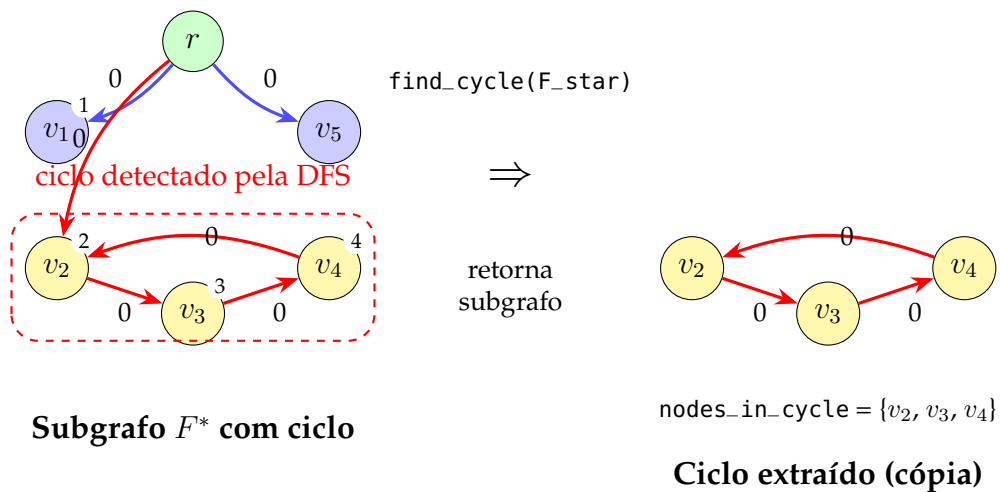


Figura 11 – Exemplo de detecção de ciclo em  $F^*$ . À esquerda, o subgrafo  $F^*$  contém um ciclo formado pelos vértices  $\{v_2, v_3, v_4\}$  (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar a aresta  $(v_4, v_2)$ , onde  $v_2$  já está na pilha de recursão. À direita, a função retorna uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e as três arestas que formam o ciclo.

Ao detectar um ciclo, a função permite que o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds prossiga para a etapa de contração, onde o ciclo será reduzido a um supervértice, facilitando a resolução do problema no grafo modificado.

#### 1.3.5 Contração de ciclo:

Esta função contrai um ciclo dirigido  $C$  em um supervértice  $x_C$ , redirecionando arcos incidentes e ajustando custos segundo a regra de custos reduzidos. Retorna

dicionários auxiliares para reexpansão.

Recebe como entrada um digrafo  $D$  (objeto `nx.DiGraph`), o ciclo  $C$  a ser contraído e o rótulo `label` do novo supervértice. A implementação coleta os vértices de  $C$  em um conjunto (linha 2) para permitir verificações de pertinência em tempo  $O(1)$ , essencial dado que essa operação é realizada repetidamente nos laços seguintes. Inicializa `in_to_cycle` (linha 3), um dicionário que tem como chave vértices externos ao ciclo e como valor tuplas  $(v, w)$ , onde  $v$  é o vértice do ciclo conectado a  $u$  e  $w$  é o peso da aresta  $(u, v)$ ; essa estrutura preserva não apenas o peso mínimo, mas também o ponto exato de entrada no ciclo, informação crucial para a reexpansão posterior.

Para cada vértice  $u$  no digrafo  $D$  (linha 4), se  $u$  não pertence ao ciclo (linha 5), identifica a aresta de menor peso que sai de  $u$  e entra em  $C$  (linhas 6–9) usando uma compreensão de gerador: a expressão `((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in cycle_nodes)` itera sobre todas as arestas que saem de  $u$ , desempacota cada aresta na forma  $(_, v, w)$  (ignorando a origem com `_`, capturando o destino  $v$  e o peso  $w$ ), filtra apenas aquelas cujo destino  $v$  pertence ao ciclo, e produz tuplas  $(v, w)$ ; a função `min` (linha 6) então seleciona a tupla de menor peso usando `key=lambda x: x[1]` (linha 7) para comparar pelo segundo elemento (o peso), e retorna `None` se não houver arestas (linha 8). A escolha de selecionar apenas a aresta de *menor peso* reflete a propriedade fundamental do algoritmo: qualquer solução ótima que conecta um vértice externo ao ciclo contraído usará necessariamente a aresta de custo mínimo, pois todas as outras seriam subótimas. Se tal aresta existir, armazena em `in_to_cycle` (linhas 9–10).

Em seguida, a implementação itera sobre `in_to_cycle` usando o método `items()`, desempacotando cada entrada na forma  $(u, (v, w))$ , onde  $u$  é o vértice externo e  $(v, w)$  é a tupla com o vértice do ciclo e o peso (linhas 11–12). Para cada par, cria uma aresta de  $u$  para `label` com peso  $w$ , efetivamente redirecionando as arestas de entrada para o supervértice. A separação entre coleta (linhas 4–10) e criação (linhas 11–12) é necessária porque modificar o grafo durante a iteração sobre seus vértices causaria comportamento indefinido; ao coletar primeiro todos os dados em estruturas auxiliares, garantimos que as modificações posteriores sejam seguras.

De forma análoga, constrói o dicionário `out_from_cycle` (linha 13) para mapear arestas que saem do ciclo. Para cada vértice  $v$  em  $D$  (linha 14), se  $v$  não pertence ao ciclo (linha 15), identifica a aresta de menor peso que sai de  $C$  e entra em  $v$  (linhas 16–17) usando uma compreensão de gerador análoga: a expressão `((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in cycle_nodes)` itera sobre todas as arestas que entram em  $v$ , desempacota cada aresta na forma  $(u, _, w)$  (capturando a origem  $u$ , ignorando o destino com `_`, e capturando o peso  $w$ ), filtra apenas aquelas cuja origem  $u$  pertence ao ciclo, e produz tuplas  $(u, w)$ ; a função `min` seleciona a de menor peso pela mesma razão de otimalidade. Se existir, armazena em `out_from_cycle` (linhas 18–19).

Depois, itera sobre `out_from_cycle` e cria arestas de `label` para cada vértice  $v$  com os respectivos pesos (linhas 20–21). Por fim, remove todos os vértices de  $C$  do grafo (linha 22); essa remoção é realizada por último para garantir que todas as operações de consulta (linhas 4–21) tenham acesso aos dados originais antes da modificação estrutural.

Retorna dois dicionários: `in_to_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de entrada no ciclo original, e `out_from_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de saída. Esses dicionários são essenciais para a fase de reexpansão, onde será necessário determinar exatamente qual aresta interna do ciclo deve ser removida para restaurar a propriedade de arborescência. O digrafo  $D$  é modificado in-place: os vértices de  $C$  são removidos e substituídos por `label`. A escolha de modificação in-place (em vez de criar uma cópia) reduz significativamente o uso de memória e o tempo de execução, especialmente em grafos grandes ou com múltiplos níveis de recursão, embora exija atenção cuidadosa ao gerenciamento de referências. A complexidade é  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de arestas, pois cada aresta incidente ao ciclo é processada uma vez: os laços nas linhas 4–10 e 14–19 examinam cada aresta no máximo uma vez, e as operações de adição (linhas 11–12, 20–21) e remoção (linha 22) têm custo proporcional ao número de arestas afetadas.

#### Contração de ciclo

*Contraí o ciclo  $C$  em um supervértice `label`, redirecionando arcos incidentes e ajustando custos. Modifica  $D$  in-place e retorna dicionários para reexpansão.*

```

1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str):
2     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
4     for u in D.nodes:
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in
8                     cycle_nodes),
9                 key=lambda x: x[1],
10                default=None,)
11             if min_weight_edge_to_cycle:
12                 in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
13     for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
14         D.add_edge(u, label, w=w)
15     out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
16     for v in D.nodes:
17         if v not in cycle_nodes:

```

```
17         min_weight_edge_from_cycle = min(  
18             ((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in  
                cycle_nodes), key=lambda x: x[1], default=None,  
19         if min_weight_edge_from_cycle:  
20             out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle  
21     for v, (u, w) in out_from_cycle.items():  
22         D.add_edge(label, v, w=w)  
23     D.remove_nodes_from(cycle_nodes)  
24     return in_to_cycle, out_from_cycle
```

A Figura 12 ilustra o processo de contração de ciclo:

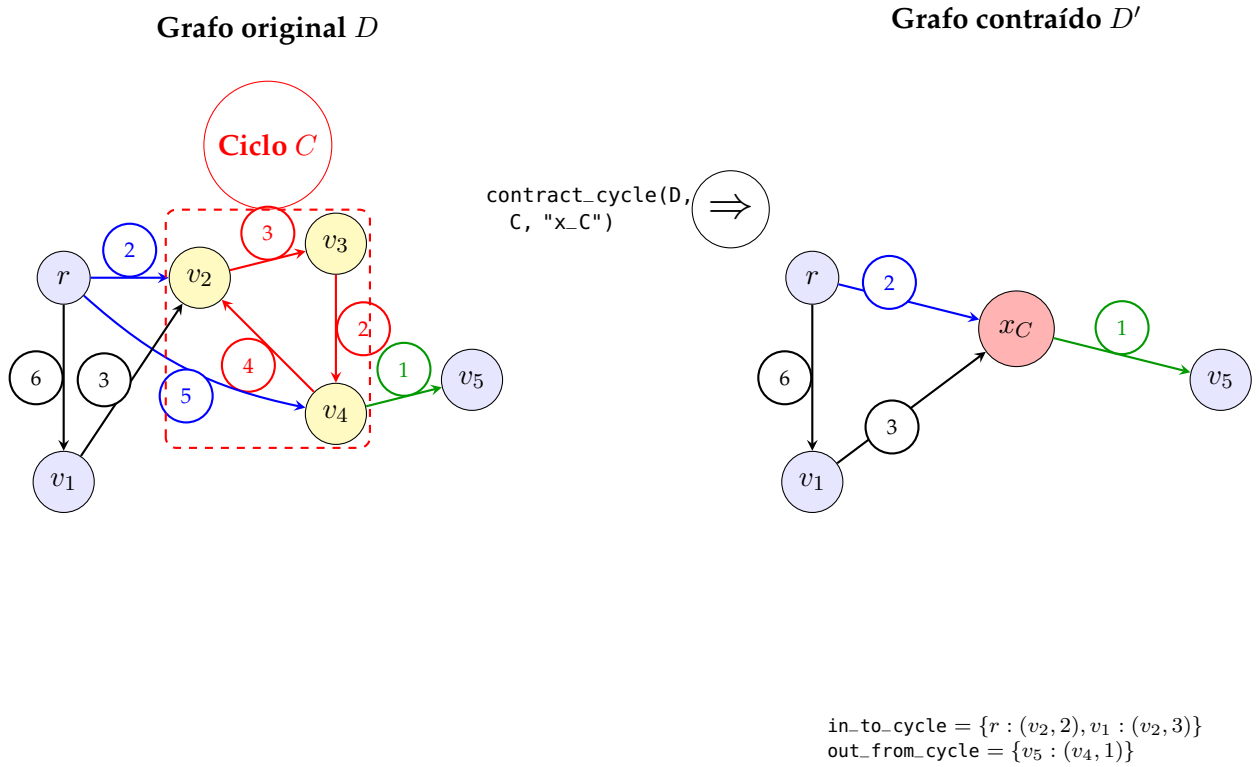


Figura 12 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original  $D$  com ciclo  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  (em amarelo). Vértices externos  $r$ ,  $v_1$  e  $v_5$  têm arestas conectando ao ciclo:  $r$  envia aresta para  $v_2$  (peso 2) e  $v_4$  (peso 5);  $v_4$  envia aresta para  $v_5$  (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice  $x_C$  (vermelho). As arestas de entrada são redirecionadas:  $(r, x_C)$  recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). A aresta de saída  $(x_C, v_5)$  mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão.

A função de detecção de ciclo e a de contração juntas implementam os passos 2 e 3 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

#### Passos 2 e 3 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

**Passo 2:** Se  $(V, F^*)$  é acíclico, devolva  $F^*$ . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma  $r$ -arborescência de custo mínimo.

**Passo 3:** Caso contrário, seja  $C$  um ciclo dirigido de  $F^*$  (com  $r \notin C$ ). **Contração:**

contraia  $C$  em um supervértice  $x_C$  e defina custos  $c'$  por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em  $x_C$  e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por  $D' = (V', A')$ .

### 1.3.6 Remoção de arestas que entram na raiz:

Esta função remove todas as arestas que entram no vértice raiz  $r_0$ , garantindo que a raiz não tenha predecessores. A remoção é necessária porque, por definição, uma  $r$ -arborescência é uma arborescência enraizada em  $r_0$  onde todo vértice  $v \neq r_0$  deve ser alcançável a partir de  $r_0$ , mas a própria raiz não pode ter predecessores (grau de entrada zero). Se o grafo original contiver arestas entrando em  $r_0$ , essas arestas violariam a definição de arborescência enraizada e poderiam criar ciclos envolvendo a raiz, o que tornaria impossível obter uma estrutura válida. Além disso, a presença de arestas entrando na raiz interfere na normalização: ao tentar normalizar custos de entrada para  $r_0$ , criaríamos custos reduzidos artificiais que não fazem sentido no contexto do problema, já que nenhuma solução válida pode incluir tais arestas. Portanto, esta função atua como um passo de pré-processamento essencial que prepara o grafo para os passos subsequentes do algoritmo.

A escolha de implementar esta operação como uma função auxiliar separada (em vez de incluí-la apenas inline na função principal) segue princípios de design de software: (1) *modularidade*, encapsulando uma responsabilidade específica e bem definida (remover entradas na raiz) em uma unidade testável independente; (2) *reutilização*, permitindo que outras partes do código ou implementações alternativas possam chamar esta operação quando necessário sem duplicar lógica; (3) *clareza semântica*, dando um nome descritivo (`remove_edges_to_r0`) que documenta a intenção da operação no ponto de chamada, tornando a função principal mais legível ao abstrair detalhes de implementação; e (4) *facilidade de teste*, possibilitando escrever testes unitários focados exclusivamente nesta operação de pré-processamento, verificando casos extremos (como grafos onde a raiz já não tem predecessores ou onde todas as arestas entram na raiz) sem precisar testar toda a complexidade do algoritmo recursivo.

Em detalhes, ela recebe como entrada um digrafo  $D$  (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo  $r_0$  da raiz. A implementação armazena em uma lista todas as arestas que entram em  $r_0$  usando o método `in_edges` (linha 2). Se a lista não estiver vazia (linha 3), remove todas essas arestas usando o método `remove_edges_from` (linha 4). Este método da biblioteca NetworkX recebe como parâmetro uma lista de tuplas representando arestas na forma

$(u, v)$  e remove cada uma delas do grafo. A operação é realizada em lote: `NetworkX` itera sobre a lista fornecida e, para cada tupla  $(u, v)$ , remove a aresta correspondente da estrutura interna de adjacência. Se alguma aresta especificada não existir no grafo, ela é silenciosamente ignorada sem gerar erro. A complexidade de `remove_edges_from` é  $O(k)$ , onde  $k$  é o número de arestas na lista de entrada, pois cada remoção individual tem custo  $O(1)$  em média devido ao uso de dicionários aninhados para armazenar arestas.

Por fim, a função retorna o grafo  $D$  atualizado in-place com todas as arestas de entrada em `r0` são removidas (linha 5). A complexidade total da função é  $O(\deg^-(r_0))$ , pois a operação coleta e remove cada aresta de entrada uma única vez.

#### Remoção de arestas que entram na raiz

*Remove todas as arestas que entram na raiz  $r_0$ , modificando  $D$  in-place e retornando o grafo atualizado.*

```
1 def remove_edges_to_r0(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     in_edges = list(D.in_edges(r0))
3     if in_edges:
4         D.remove_edges_from(in_edges)
5     return D
```

### 1.3.7 Remoção de arco interno:

Esta função é invocada durante a fase de reexpansão do ciclo contraído, após a chamada recursiva retornar com a arborescência ótima  $T'$  do grafo contraído. Quando o supervértice  $x_C$  é expandido de volta para o ciclo original  $C$ , uma aresta externa  $(u, v)$  é adicionada conectando um vértice externo  $u$  a um vértice  $v$  dentro do ciclo. Como o ciclo  $C$  originalmente continha exatamente uma aresta entrando em cada um de seus vértices (formando um ciclo fechado), e agora  $v$  recebe uma aresta adicional vinda do exterior, esse vértice teria grau de entrada 2, violando a propriedade fundamental de arborescência (cada vértice não-raiz deve ter exatamente uma entrada). Para restaurar essa propriedade, a função remove a aresta interna que anteriormente entrava em  $v$ , mantendo apenas a nova aresta externa. Essa remoção "quebra" o ciclo no ponto de entrada, transformando-o em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore.

A função recebe como entrada o subgrafo do ciclo  $C$  (objeto `nx.DiGraph`) e o vértice de entrada  $v$ . A implementação utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o predecessor de  $v$  dentro do ciclo (linha 2): a expressão `(u for u, _ in C.in_edges(v))` itera sobre as arestas de entrada de  $v$ , extraíndo apenas o



vértice origem  $u$  (ignorando metadados com  $_$ ), e `next` retorna o primeiro (e teoricamente único) predecessor. Em seguida, remove a aresta (`predecessor`,  $v$ ) do ciclo usando o método `remove_edge` (linha 3).

A função modifica o subgrafo  $C$  in-place e não retorna valor. A complexidade é  $O(\deg^-(v))$ , dominada pela operação de busca das arestas de entrada, embora em ciclos simples isso seja tipicamente  $O(1)$  pois cada vértice tem exatamente um predecessor.

#### Remover arco interno na reexpansão

*Remove a aresta interna que entra no vértice de entrada  $v$  do ciclo  $C$  durante a reexpansão, pois  $v$  passa a receber uma aresta externa, e manter ambas violaria a propriedade de arborescência.*

```
1 def remove_internal_edge_to_cycle_entry(C: nx.DiGraph, v):
2     predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)), None)
3     C.remove_edge(predecessor, v)
```

A Figura 13 ilustra o objetivo da função:

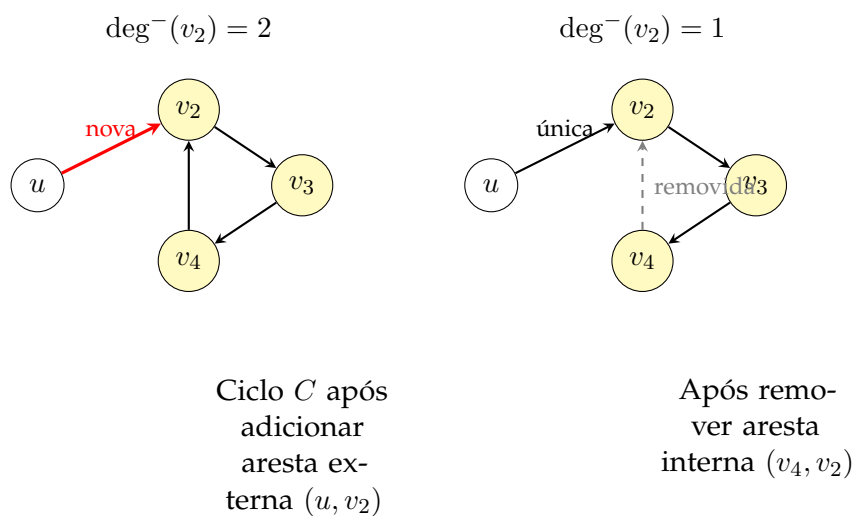


Figura 13 – Remoção de aresta interna durante reexpansão. À esquerda, ciclo  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  após adicionar aresta externa  $(u, v_2)$  vindoura da arborescência  $T'$ : o vértice  $v_2$  tem grau de entrada 2 (aresta externa vermelha de  $u$  e aresta interna do ciclo vinda de  $v_4$ ), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover a aresta interna  $(v_4, v_2)$ : o vértice  $v_2$  passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. A aresta removida é mostrada tracejada em cinza.

### 1.3.8 Procedimento principal (recursivo):

Esta função implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva, orquestrando todas as funções auxiliares descritas anteriormente. Recebe como entrada um digrafo ponderado  $D$  (objeto `nx.DiGraph`), o vértice raiz  $r_0$ , e um parâmetro `level` (padrão 0) usado para rotular supervértices em níveis recursivos distintos.

A implementação segue a estrutura do algoritmo:

Preservação do grafo original (linha 2):

Cria uma cópia `D_copy = D.copy()` para preservar os pesos originais. Como as operações de normalização e contração modificam os pesos das arestas in-place, a cópia é necessária para restaurar os custos corretos na arborescência final. Complexidade:  $O(m + n)$ .

Normalização e construção de  $F^*$  (linhas 3–6):

Itera sobre todos os vértices não-raiz (linhas 3–5), chamando `normalize_incoming_edge_weight(v)` para cada um. Após normalizar todos os vértices, constrói  $F^*$  (linha 6) chamando `get_Fstar(D_copy, r0)`, que seleciona uma aresta de custo reduzido zero entrando em cada vértice não-raiz.

Verificação de aciclicidade — caso base (linhas 7–10):

Verifica se  $F^*$  é uma arborescência válida usando `nx.is_arborescence(F_star)` (linha 7). Se sim, restaura os pesos originais de  $D$  para cada aresta de  $F^*$  (linhas 8–9) e retorna `F_star` como solução (linha 10). A função `nx.is_arborescence` testa conectividade, aciclicidade e grau de entrada correto simultaneamente.

Contração e resolução recursiva — caso recursivo (linhas 11–16):

Caso  $F^*$  contenha um ciclo, detecta  $C$  chamando `find_cycle(F_star)` (linha 12). Cria um rótulo único `contracted_label = f"contracted_{level}"` para o supervértice (linha 13). Contrai o ciclo chamando `contract_cycle(D_copy, C, contracted_label)` (linhas 14–15), que modifica `D_copy` in-place criando o digrafo contraído  $D'$  e retorna os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle`. Chama-se recursivamente (linha 16) com `find_optimum_arborescence_chuliu(D_copy, r0, level+1)`, obtendo  $F'$ .

Reexpansão do ciclo contraído (linhas 17–30):

Identifica a aresta externa que entra no supervértice em  $F'$  (linha 17) e extrai o vértice externo  $u$  (linha 18). Consulta  $v = \text{in\_to\_cycle}[u]$  para determinar o vértice do ciclo que recebe a conexão (linha 19). Remove a aresta interna que entrava em  $v$  chamando `remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)` (linha 20), quebrando o ciclo no ponto de entrada. Adiciona a aresta externa  $(u, v)$  a  $F'$  (linha 21) e reintegra as demais arestas do ciclo (linhas 22–23). Processa as arestas de saída (linhas 24–26): para cada  $(\text{contracted\_label}, w)$  em  $F'$ , adiciona  $(v_{\text{out}}, w)$  usando `out_from_cycle[w]`. Remove o supervértice (linha 27), restaura os pesos originais (linhas 28–29) e retorna  $F_{\text{prime}}$  (linha 30).

A função retorna um digrafo contendo exatamente  $|V| - 1$  arestas onde cada vértice  $v \neq r_0$  tem grau de entrada 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de  $r_0$ , e o custo total é mínimo. O grafo original  $D$  não é modificado devido à cópia (linha 2). A complexidade é  $O(mn)$  no pior caso, onde cada nível de recursão (até  $O(n)$  níveis) processa  $O(m)$  arestas durante normalização, detecção de ciclos e contração/expansão.

O código completo da função principal é apresentado a seguir:

#### Procedimento principal (recursivo)

*Implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva para encontrar a  $r$ -arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado  $D$  com raiz  $r_0$ . Normaliza custos, constrói  $F^*$ , detecta ciclos e, se houver, contrai em supervértice, resolve recursivamente no grafo reduzido e reexpande, restaurando a arborescência ótima no grafo original. Retorna um `nx.DiGraph` contendo exatamente  $|V| - 1$  arestas com grau de entrada 1 para cada vértice exceto a raiz.*

```

1 def find_optimum_arborescence_chuliu(D: nx.DiGraph, r0: str, level=0,):
2     D_copy = D.copy()
3     for v in D_copy.nodes:
4         if v != r0:
5             normalize_incoming_edge_weights(D_copy, v)
6     F_star = get_Fstar(D_copy, r0)
7     if nx.is_arborescence(F_star):
8         for u, v in F_star.edges:
9             F_star[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
10    return F_star
11 else:
12    C: nx.DiGraph = find_cycle(F_star)
13    contracted_label = f"\n n*{level}"

```

```

14     in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(
15     D_copy, C, contracted_label)
16     F_prime = find_optimum_arborescence_chuliu(D_copy, r0, level + 1)
17     in_edge = next(iter(F_prime.in_edges(contracted_label, data="w")),
18                       None)
19     u, _, _ = in_edge
20     v, _ = in_to_cycle[u]
21     remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)
22     F_prime.add_edge(u, v)
23     for u_c, v_c in C.edges:
24         F_prime.add_edge(u_c, v_c)
25     for _, z, _ in F_prime.out_edges(contracted_label, data=True):
26         u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
27         F_prime.add_edge(u_cycle, z)
28     F_prime.remove_node(contracted_label)
29     for u, v in F_prime.edges:
30         F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
31     return F_prime

```

A seguir, ilustramos o funcionamento do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo de teste. Mostramos o grafo original, os principais passos do algoritmo e a arborescência final encontrada.

#### 1.3.8.1 Exemplo de execução do algoritmo

A seguir, demonstramos a execução completa do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo exemplo, ilustrando cada fase do processo: normalização, construção de  $F^*$ , detecção de ciclos, contração, resolução recursiva e reexpansão.

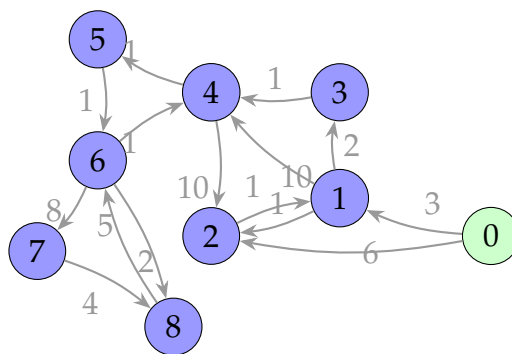


Figura 14 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplas arestas com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arestas que entram na raiz, porém não há nenhuma neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo.

O primeiro passo do nosso algoritmo seria remover as arestas que entram na raiz (vértice 0), porém não há nenhuma nesse caso, logo não existe a necessidade de alterar o grafo.

O próximo passo é normalizar os pesos das arestas de entrada para cada vértice. Nessa etapa, para cada vértice  $v$  (exceto a raiz), o algoritmo encontra a aresta de menor peso que entra em  $v$  e subtrai esse menor peso de todas as arestas que entram em  $v$  (isso serve para zerar o peso da aresta mínima de entrada em cada vértice).

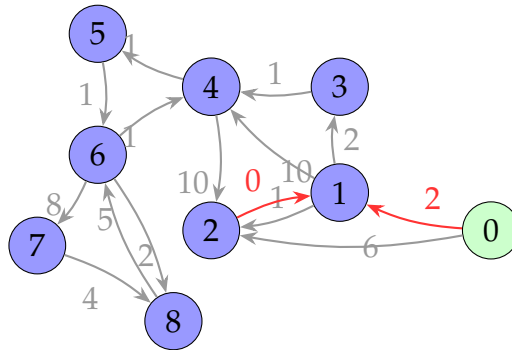


Figura 15 – Normalização parcial das arestas de entrada para o vértice 1. As arestas de entrada são  $(0 \rightarrow 1)$  com peso original 3 e  $(2 \rightarrow 1)$  com peso original 1. Elegendo a aresta  $(2 \rightarrow 1)$  como a de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todas as arestas de entrada:  $(0 \rightarrow 1)$  passa de peso 3 para 2, e  $(2 \rightarrow 1)$  passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices.

Com os pesos normalizados, o próximo passo é construir  $F^*$ : para isso, selecionamos para cada vértice a aresta de custo reduzido zero de entrada. Detectamos um ciclo em  $F^*$ , formado pelos vértices  $\{1, 2\}$ . Portanto, precisamos contrair esse ciclo em um supervértice  $n * 0$ .

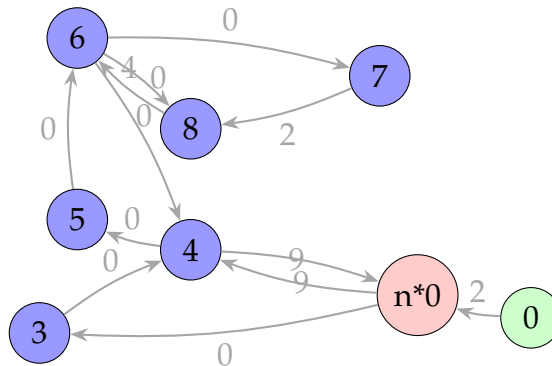


Figura 16 – Grafo contraído após detecção do ciclo  $C = \{1, 2\}$  em  $F^*$ . O ciclo foi contraído no supervértice  $n * 0$  (destacado em vermelho). As arestas que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionadas para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas  $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$  para arestas de entrada e  $c'(x_C, v) := c(w, v)$  para arestas de saída.

Agora, repetimos o processo recursivamente no grafo contraído até obter uma arborescência válida.

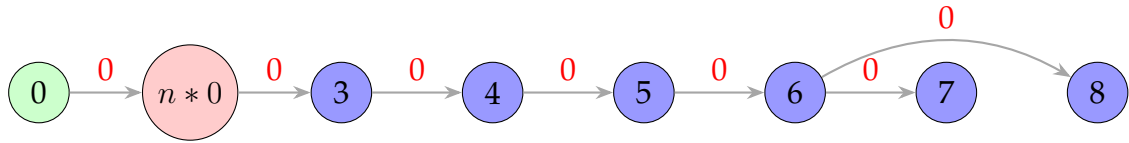


Figura 17 – Arborescência ótima  $F'$  obtida no grafo contraído. Todas as arestas selecionadas têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o grafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente uma aresta de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como  $F'$  é acíclico, alcançamos o caso base da recursão.

Após validarmos que  $F^*$  não possui mais ciclos e forma uma arborescência, iniciamos o processo de reexpansão do ciclo contraído para obter a arborescência final no grafo original. Adicionamos a aresta de entrada ao ciclo  $(0, 1)$ , as arestas internas do ciclo modificado  $(1, 2)$ , e as arestas de saída  $(1, 3)$ , chegando a uma arborescência válida.

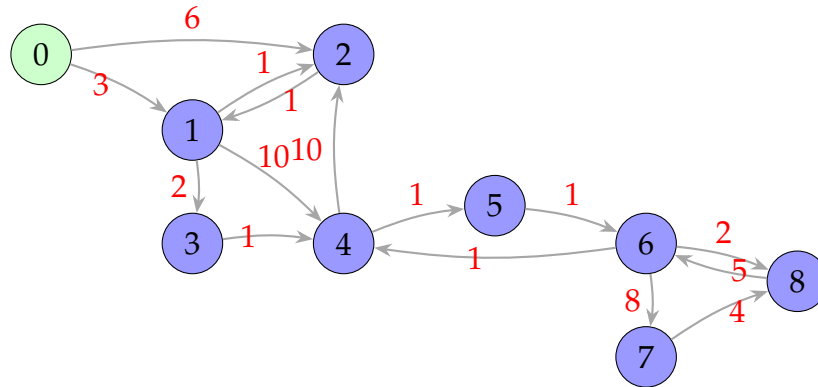


Figura 18 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice  $n * 0$  foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com a aresta externa  $(0, 1)$  escolhida pela solução recursiva conectando ao ciclo. A aresta interna  $(2, 1)$  do ciclo original foi removida para manter a propriedade de arborescência ( $\deg^-(v) = 1$ ). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arestas, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0.

### 1.3.9 Correspondência entre teoria e implementação

A implementação em Python segue fielmente os cinco passos da descrição teórica do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds apresentada na Seção anterior. A tabela abaixo estabelece o paralelo direto entre cada passo teórico e sua realização no código:

Descrição Teórica	Implementação Python
<b>Passo 1:</b> Normalização e construção de $F^*$ Para cada $v \neq r$ , escolha $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$ . Defina $y(v) := c(a_v)$ e $F^* := \{a_v : v \neq r\}$ .	<b>Linhas 3–6:</b> <pre>for v in D_copy.nodes:     normalize_incoming_edge_weights(D_copy,                                      v) F_star = get_Fstar(D_copy, r0)</pre> Calcula $y(v)$ e cria custos reduzidos, depois constrói $F^*$ selecionando arestas de custo zero.
<b>Passo 2:</b> Verificação de aciclicidade (caso base) Se $(V, F^*)$ é acíclico, devolva $F^*$ . Por Obs. 4.36 de (KLEINBERG; TARDOS, 2006), trata-se de uma $r$ -arborescência de custo mínimo.	<b>Linhas 7–10:</b> <pre>if nx.is_arborescence(F_star):     [restaura pesos originais]     return F_star</pre> Testa conectividade, aciclicidade e grau de entrada correto simultaneamente.
<b>Passo 3:</b> Contração de ciclo Caso contrário, seja $C$ um ciclo dirigido de $F^*$ (com $r \notin C$ ). Contraia $C$ em supervértice $x_C$ e defina custos $c'$ por: $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ $c'(x_C, v) := c(w, v)$ Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$ .	<b>Linhas 11–15:</b> <pre>C = find_cycle(F_star) label = f"contracted_{level}" in_to_cycle, out_from_cycle =     contract_cycle(D_copy, C, label)</pre> Implementa as fórmulas de ajuste de custos e modifica $D\_copy$ para criar $D'$ .
<b>Passo 4:</b> Resolução recursiva Resolva recursivamente em $D'$ , obtendo arborescência ótima $F'$ .	<b>Linha 16:</b> <pre>F_prime =     find_optimum_arborescence_chuliu(         D_copy, r0, level+1)</pre> Chamada recursiva resolve o problema no grafo contraído.
<b>Passo 5:</b> Reexpansão Expanda $x_C$ para o ciclo original $C$ . Se $(u, x_C) \in F'$ , adicione $(u, v)$ onde $v$ é o vértice do ciclo mapeado por $u$ , remova a aresta interna entrando em $v$ , e reintegre demais arestas de $C$ . Restaure custos originais.	<b>Linhas 17–30:</b> <pre>v = in_to_cycle[u] remove_internal_edge_to_cycle_entry(C,                                      v) F_prime.add_edge(u, v) F_prime.add_edges_from(C.edges) [processa saídas, remove supervértice] [restaura pesos originais]</pre>

Tabela 1 – Correspondência entre os cinco passos teóricos do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds e sua implementação em Python. Cada linha da coluna direita mostra a tradução direta dos conceitos matemáticos da coluna esquerda em operações concretas sobre grafos.

Esta correspondência demonstra que a implementação não é uma aproximação ou interpretação livre da teoria, mas uma tentativa de traduzir fielmente a descrição teórica. As funções auxiliares (`normalize_incoming_edge_weights`, `get_Fstar`, `find_cycle`, `contract_cycle`, `remove_internal_edge_to_cycle_entry`) encapsulam exatamente as operações descritas na formulação teórica, preservando as propriedades de correção e complexidade do algoritmo original.

### 1.3.10 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode parecer um conjunto de heurísticas bem-sucedidas sem uma justificativa teórica unificadora aparente. Por que escolher a melhor entrada para cada vértice garante otimalidade global após o tratamento de ciclos? A resposta reside na *dualidade em programação linear*.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica primal–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais<sup>3</sup>  $y(\cdot)$ , explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma mecânica operacional (normalizar  $\rightarrow$  contrair  $\rightarrow$  expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

---

<sup>3</sup> No contexto primal–dual, “potenciais” são valores escalares  $y(v)$  atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos  $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$ . Ajustar  $y$  desloca uniformemente os custos das arestas que entram em  $v$ , sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna “apertadas” (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de corretude via cortes apertados.



## Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 6 vezes nas páginas [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [29](#) e [38](#).

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [17](#) e [18](#).

# Anexos

# ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.