

Algoritmos para Arborescências de Custo Mínimo em Digrafos

Chu-Liu-Edmonds e András Frank

Seu Nome

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

25 de novembro de 2025

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Aplicação Web
- 6 Conclusões

Arborescência de Custo Mínimo

Dado um digrafo $D = (V, A)$ com pesos $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ e raiz $r \in V$:

- Encontrar uma r -arborescência geradora T
- Que minimize $w(T) = \sum_{a \in A(T)} w(a)$

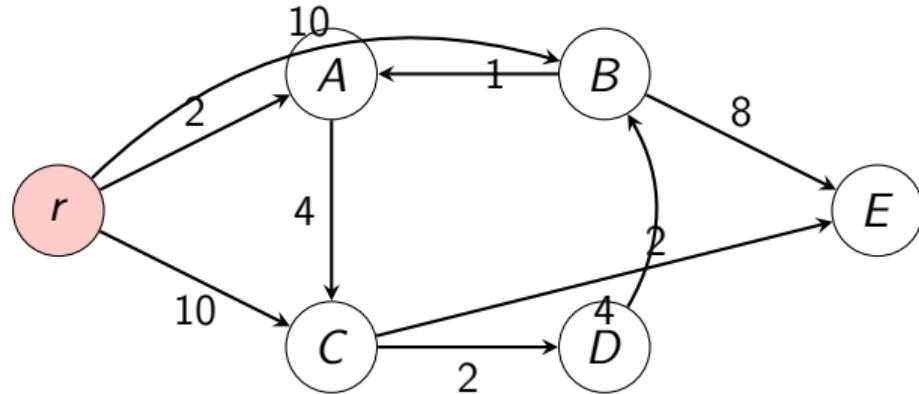
Aplicações:

- Redes de comunicação
- Logística
- Otimização de recursos

Algoritmos estudados:

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)

Digrafo de Exemplo



Objetivo

Encontrar a r -arborescência geradora de custo mínimo

Estratégia Recursiva

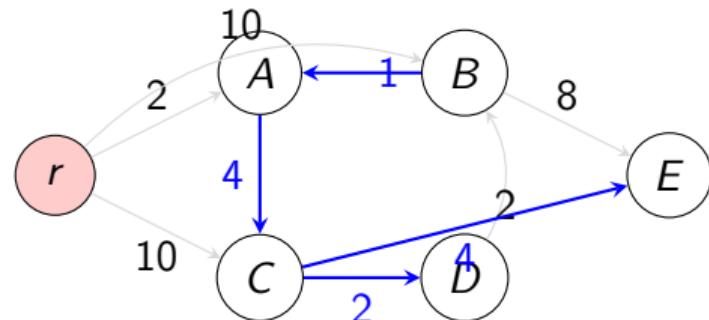
- ① Para cada vértice $v \neq r$: escolher arco de entrada de **custo mínimo**
- ② Se não há ciclos \Rightarrow solução ótima encontrada!
- ③ Se há ciclos \Rightarrow **contrair** e resolver recursivamente

Escolha Gulosa + Contração de Ciclos

Passo 1: Escolha Gulosa

Para cada vértice, selecionar arco de entrada mínimo:

- A: arco (B, A) peso 1 ✓
- B: arco (r, B) peso 10
- C: arco (A, C) peso 4 ✓
- D: arco (C, D) peso 2 ✓
- E: arco (C, E) peso 4 ✓



Problema

Ciclo detectado: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$

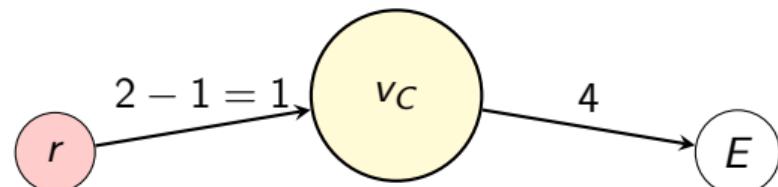
Passo 2: Contração do Ciclo

Ciclo encontrado: $\{A, B, C, D\}$

Contraímos em um super-vértice v_C

Ajustamos pesos dos arcos que **entram** no ciclo:

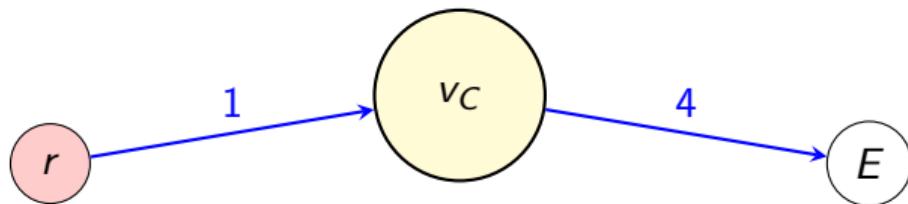
$$w'(u, v_C) = w(u, v) - w(\min_in(v))$$



Recursão

Resolver o problema no digrafo contraído

Passo 3: Solução no Digrafo Contraído



Escolha gulosa:

- (r, v_C) peso 1
- (v_C, E) peso 4

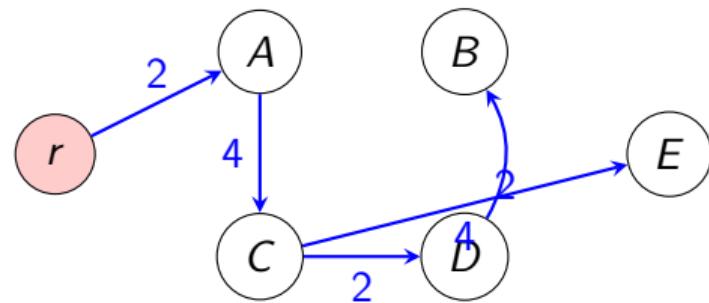
Sem ciclos! \Rightarrow Solução encontrada no digrafo contraído

Passo 4: Expandindo a Solução

No digrafo contraído: (r, v_C) foi escolhido

Expandindo v_C :

- Remover arco (B, A) do ciclo
- Manter: $(A, C), (C, D), (D, B)$
- Adicionar: (r, A) peso 2



Solução Ótima

Custo total: $2 + 4 + 2 + 2 + 4 = 14$

Abordagem em Duas Fases

Fase I: Construir cobertura de subconjuntos minimais via redução de custos

Fase II: Extrair arborescência da cobertura

Diferencial:

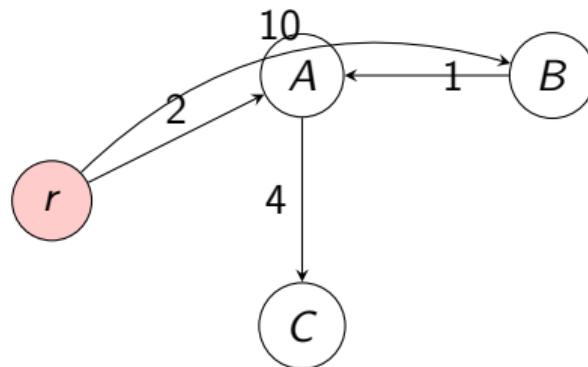
- Trabalha com múltiplos vértices simultaneamente
- Usa componentes fortemente conexas
- Redução sistemática de custos

Complexidade:

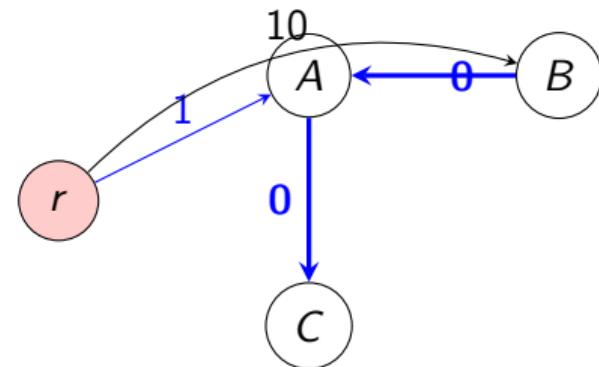
- Fase I: $O(nm)$
- Fase II v1 (lista): $O(n^2)$
- Fase II v2 (heap): $O(n \log n)$

Fase I: Redução de Custos

Para cada vértice $v \neq r$: subtrair o mínimo de entrada



Original



Após Redução

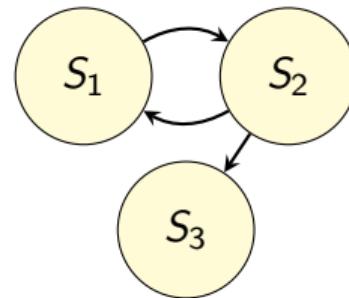
Arcos com custo zero formam o digrafo D_0

Fase I: Componentes Fortemente Conexas

Identificar componentes fortemente conexas (CFCs) em D_0

Cada CFC forma um **subconjunto minimal**

Construir sequência laminar de subconjuntos



Condição de Optimalidade

Sequência λ satisfaz: $|\delta^-(X)| = 1$ para cada X em λ

Fase II: Construção da Arborescência

Objetivo: Extrair arborescência de D_0 respeitando λ

- ① Iniciar com conjunto $R = \{r\}$
- ② Para cada v fora de R :
 - Selecionar arco (u, v) com $u \in R$ e custo reduzido zero
 - Adicionar v a R
- ③ Repetir até incluir todos os vértices

Resultado

Arborescência ótima com mesma solução: custo 14

Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	0,016 s	0,020 s

Speedup Fase II

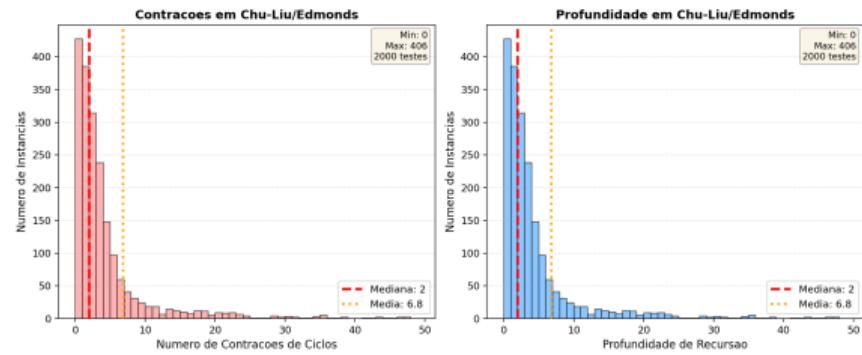
Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

Muito abaixo do limite teórico $O(n)$

Consumo de memória: mediana 11,5 MB (Fase I)



Desafio

Algoritmos de grafos são **abstratos e difíceis de visualizar**

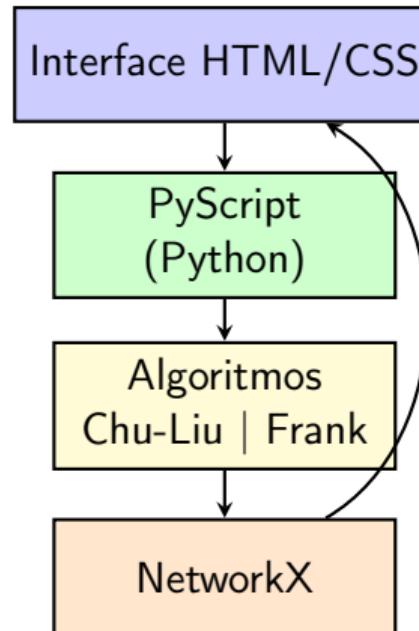
Solução Proposta:

- Visualização interativa
- Execução passo a passo
- Feedback imediato
- Acessível via navegador

Tecnologias:

- PyScript (Python no browser)
- JavaScript
- HTML5/CSS3
- NetworkX

Arquitetura da Aplicação



Interface: Página Principal

 ArboGraph

-  Home
-  Chu-Liu-Edmonds
-  András Frank (V1)
-  András Frank (V2)
-  Desenhe um digrafo
-  Nossa dissertação

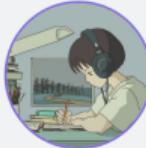
 Dúvidas ?
Quer aprender mais sobre
esses algoritmos, leia nossa
tese :)

[Link](#)

Resumo

Este trabalho investiga e implementa algoritmos de busca de uma r -arborescência geradora mínima em digrafos. A partir da formulação clássica e da literatura de Chu-Liu-Edmonds e também da formulação de András Frank, desenvolvemos uma aplicação web que permite: (i) desenhar ou importar um digrafo ponderado, (ii) escolher o nó raiz r , (iii) executar o algoritmo passo a passo com visualização das contrações, seleção de arcos de custo mínimo e reconstrução da arborescência, e (iv) exportar resultados e logs. A solução combina PyScript e NetworkX para a lógica algorítmica, Cytoscape para edição e visualização interativa, e Tailwind/Flowbite na interface. Como contribuição, o sistema oferece um ambiente didático que torna transparentes as decisões do algoritmo e facilita a análise e comparação de soluções em diferentes instâncias, apoiando ensino, experimentação e validação.

Integrantes do Projeto



Lori Sampaio
Discente do BCC-UFABC



Mario Leston Rey
Docente do BCC-UFABC



Samira Haddad
Discente do BCC-UFABC

Interface: Desenho de Grafos

 ArboGraph

Home

Chu-Liu/Edmonds

Andras Frank (V1)

Andras Frank (V2)

Desenhe um grafo

Nossa tese

Dúvidas ?

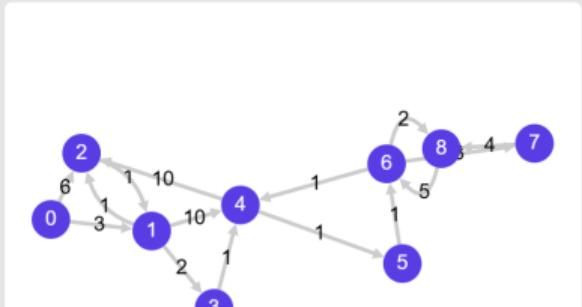
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

Link

Desenhe seu grafo

1. Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.

Grafo Original



[+](#) [-](#)

Funcionalidades:

- Adicionar vértices e arestas
- Definir pesos
- Exportar/importar grafos em JSON

Interface: Chu-Liu-Edmonds

ArboGraph

- Home
- Chu-Liu/Edmonds
- Andras Frank (VI)
- Andras Frank (V2)
- Desenhe um grafo
- Nossa tese

Dúvidas ?
Quer aprender mais sobre esses algoritmos, leia nossa tese :)

Link

Chu-Liu / Edmonds

1 Crie um grafo
Desenhe um grafo, [carregue](#) um exemplo ou [importe](#) um grafo já existente.

2 Escolha o nó raiz
0

3 Execute o algoritmo

» Passo A Passo

Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo

Grafo Original

```
graph LR; 0((0)) -- 6 --> 2((2)); 0 -- 3 --> 1((1)); 1 -- 2 --> 2; 1 -- 10 --> 4((4)); 1 -- 3 --> 3((3)); 3 -- 2 --> 1; 4 -- 1 --> 5((5)); 4 -- 1 --> 6((6)); 4 -- 10 --> 2; 5 -- 1 --> 6; 6 -- 2 --> 8((8)); 6 -- 5 --> 8; 6 -- 8 --> 7((7)); 7 -- 4 --> 8;
```

- Visualização passo a passo
- Destacamento de ciclos detectados
- Log detalhado das operações

Interface: András Frank

The screenshot shows the ArboGraph software interface for the Andras Frank v1 algorithm. The left sidebar contains a navigation menu with icons and labels: Home, Chu-Liu/Edmonds, Andras Frank (V1), Andras Frank (V2), Desenhe um grafo, and Nossa tese. A 'Dúvidas?' button with a 'Link' button is also present. The main area is titled 'Andras Frank v1' and shows three steps: 1. Crie um grafo (Create a graph), 2. Escolha o nó raiz (Select the root node), and 3. Execute o algoritmo (Run the algorithm). Step 2 has a 'node' input field and a play button. Step 3 has a text box: 'Execute o algoritmo para visualizar o passo-a-passo'. Below these steps is a section titled 'Grafo Original'.

- Exibição das duas fases
- Visualização de CFCs
- Comparação entre versões (lista vs heap)

Teoria dos Registros de Representação (Duval)

Transitar entre diferentes representações:

- **Visual:** diagramas do grafo
- **Simbólico:** código Python
- **Textual:** log das operações

Feedback Imediato

Validação em tempo real das operações do usuário

1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

2 Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

- **Corretude validada:** custos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
 - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
 - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Memória modesta: 11,5 MB

Extensões Possíveis

- Implementar outras variantes (Tarjan, Gabow)
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>