

Algoritmos para r -Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad
Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

11 de dezembro de 2025

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Didática do Abstrato
- 6 Aplicação Web
- 7 Conclusões

O Problema

Encontrar uma r -Arborescência Geradora de Peso Mínimo

Dado um r -digrafo ponderado (D, w, r) :

- Encontrar uma r -arborescência geradora de peso mínimo de D

Algoritmos estudados:

- 1 Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- 2 András Frank (1981-2014)

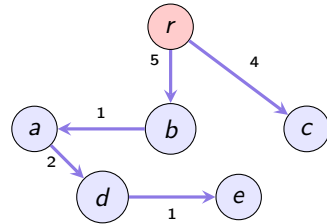
Exemplo: r -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 r -Arborescência Geradora

Peso: 16



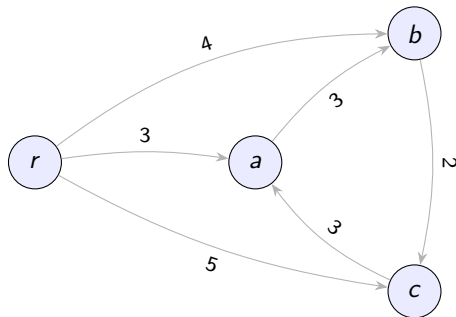
Geradora Mínima

Peso: 13

Intermissão

Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

Encontrando uma r -Arborescência Geradora Mínima



Motivação

Objetivo:

Para cada $v \neq r$, escolher um arco a_v de peso mínimo que entra em v e forma a arborescência:

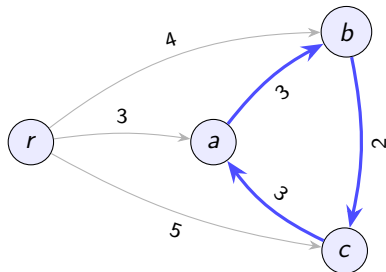
$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$



Aqui tem um problema...

Problema:

A escolha gulosa pode produzir um conjunto T que *não* é uma r -arborescência.



Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r -digrafo ponderado (D, w, r)

$\text{chu-liu-edmonds}((D, w, r))$:

- 1 **Reduzir pesos**: para cada vértice $v \neq r$, subtrair o peso $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$ do peso de cada arco que entra em v ;
- 2 **Construir D_0** : escolhendo um arco a_v de peso reduzido zero para cada $v \neq r$;
- 3 **Verificar**: se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0
Caso contrário:
- 4 **Contração**: encontrar ciclo C em D_0 e contrair;
- 5 **Chamada recursiva**: Seja $D' = D/C$ e $w' = w_\lambda/C$. Calcular $T' = \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$;
- 6 **Devolver**: expandir(T').

Passo 1: Redução de Pesos

Definição:

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$:

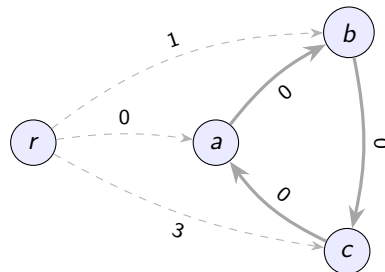
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Peso λ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

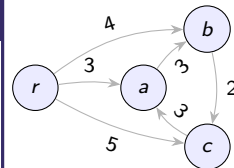
Valores de λ :

- $\lambda(a) = 3$, $\lambda(b) = 3$, $\lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm peso zero!

Digrafo Original



Passo 2: Construção de D_0

Formação de D_0 :

Para cada $v \neq r$, escolher um arco $a_v \in \delta^-(v)$ com $w_\lambda(a_v) = 0$ formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

Arcos escolhidos:

- (a, b)
- (b, c)
- (c, a)



Passo 3: Verificação de D_0

Verificar:

Se D_0 é uma r -arborescência \Rightarrow **devolver** D_0

Caso contrário:

D_0 contém algum ciclo C .

\Rightarrow **prosseguir** para os passos 4 e 5.



D_0 não é uma r -arborescência!

Neste exemplo, $A_0 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ não forma uma r -arborescência pois contém o ciclo (a, b, c, a) .

Passo 4: Contração de Ciclos

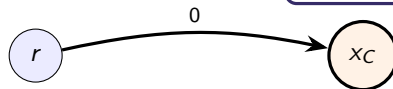
Operação:

Contrair ciclo C em supervértice x_C .

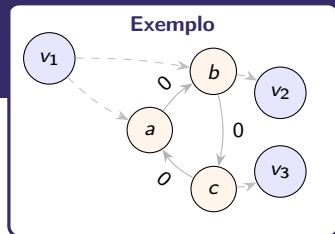
Novo problema: (D', w', r) onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de D' que entra em x_C deve corresponder ao arco de menor peso daqueles que vão de r até x_C .



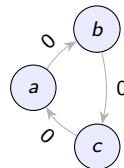
Digrafo contraído D' - *podem ter arcos saindo de x_C em D' .*



Propriedade

Uma solução ótima em D' pode ser expandida para uma solução ótima em D .

Passo 5: Chamada Recursiva

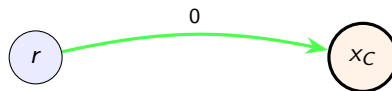
Ciclo em x_C 

Novo problema:

(D', w', r)

Chamada recursiva:

$T' := \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$



r -arborescência ótima em D'

Resultado:

T' é uma r -arborescência geradora mínima em (D', w')

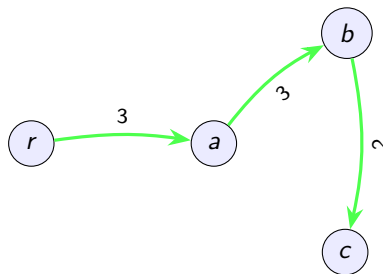
Passo 6: Reexpansão da Solução

Dado: T' ótima em (D', w')

Construir: T ótima em (D, w)

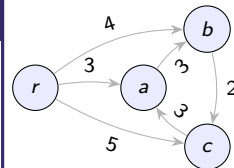
Procedimento:

- 1 Seja uv o arco de D correspondente ao arco ux_C de T'
- 2 Incluir uv em T
- 3 Incluir todos os arcos de C exceto aquele que entra em v



r -arborescência final no digrafo original

Digrafo Original



Resultado: T é uma r -arborescência geradora mínima

Complexidade do Algoritmo

Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até $O(n)$ chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de pesos, construção de D_0 , detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade $O(m)$

Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde n é o número de vértices e m é o número de arcos no digrafo original.

Intermissão

Algoritmo de Andrés Frank

Algoritmo de András Frank

Abordagem em Duas Fases

Fase I (Fulkerson): construir cobertura de r -conjuntos via redução de pesos

Fase II (Frank): extrair r -arborescência geradora da cobertura

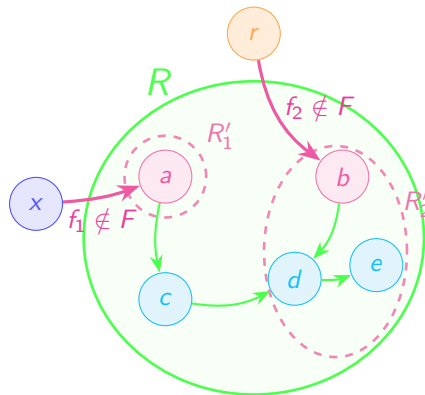
Fase I: r -conjunto minimal

r -conjunto minimal não coberto por $F \subseteq A$

Um r -conjunto R é **minimal não coberto** por $F \subseteq A$ se:

- F não entra em R (i.e., $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$)
- Para todo $\emptyset \subset R' \subset R$, existe arco de F que entra em R'

Se S é uma fonte de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$, então S é um r -conjunto minimal não coberto por $A(D_0)$.



R é r -conjunto: $r \notin R \neq \emptyset$

Fase I: Algoritmo de Fulkerson

Dado: (D, w, r)

1 Inicializar:

- $c := w$
- $\sigma := \epsilon$
- $F := \emptyset$
- $D_0 := (V, \emptyset)$

2 Enquanto \exists fonte R em $\mathcal{C}(D_0)$, $r \notin R$:

- $\lambda := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R)\}$
- $f \in \delta^-(R)$ com $c(f) = \lambda$
- $\sigma := \sigma \cdot (f, R, \lambda)$
- $F := F \cup \{f\}$
- $c := c - \lambda 1_{\delta^-(R)}$
- $D_0 := (V, F)$

3 Devolver: σ

Fase I: Encontrando r -conjuntos minimais

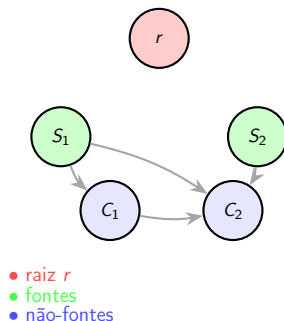
Como encontrar um r -conjunto minimal não coberto?

- 1 Calcular a condensação $\mathcal{C}(D_0)$
- 2 Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
- 3 Encontrar uma fonte S em $\mathcal{C}(D_0)$ tal que $r \notin S$

Proposição

Toda fonte S de $\mathcal{C}(D_0)$ com $r \notin S$ é um r -conjunto minimal não coberto por F .

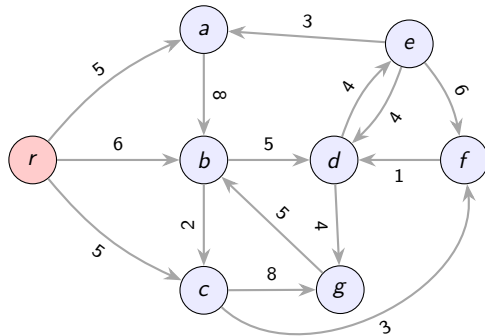
Complexidade: identificação de CFCs em $O(|V|)$ usando Kosaraju.



Exemplo de condensação $\mathcal{C}(D_0)$ com raiz r isolada e duas fontes S_1, S_2 .

Exemplo: Digrafo Inicial

Digrafo ponderado
 (D, w, r) :



Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a r -arborescência geradora de peso mínimo.

Fase I: Iteração 1 - Encontrar r -conjunto minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$ (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$ tem 8 fontes

7 Fontes são r -conjuntos:

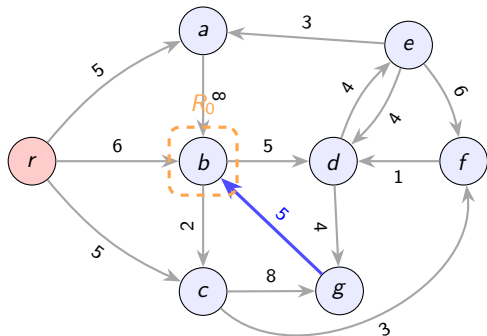
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$

Escolha:

$R_0 = \{b\}$ (minimal)

Arcos que entram em $\{b\}$:

- $(r, b) : 6$
- $(g, b) : 5 \leftarrow$ **mínimo**
- $(a, b) : 8$



$$\lambda_0 = 5, f_0 = (g, b)$$

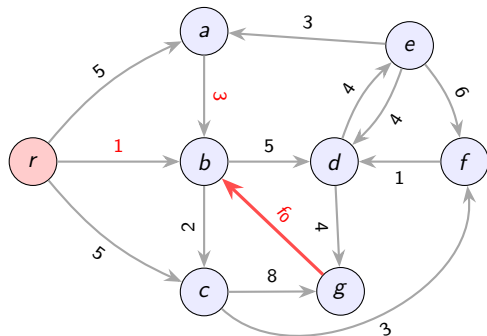
Fase I: Iteração 2 - Redução de Pesos

Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(g, b)\}$
- $D_0 = (V, \{(g, b)\})$

Redução de pesos:

- $c(r, b) = 6 - 5 = 1 \checkmark$
- $c(g, b) = 5 - 5 = 0 \checkmark$
- $c(a, b) = 8 - 5 = 3 \checkmark$



$$\lambda_0 = 5, f_0 = (g, b)$$

Pesos são reduzidos para garantir que σ seja w -disjunta.

Fase I: Iteração 3 - Redução de Pesos

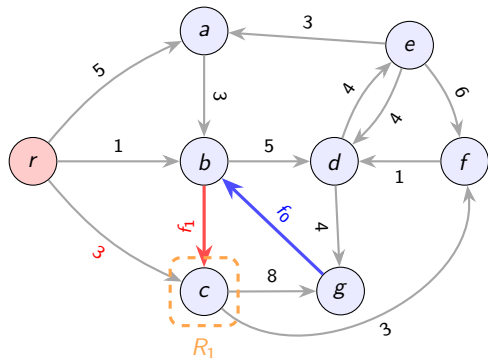
Estado:

- $F = \{(g, b)\}$
- $D_0 = (V, F)$

Escolha: $R_1 = \{c\}$

Seleção:

- $\lambda_1 = 2$
- $f_1 = (b, c)$



Fase I: Iteração 4 - Redução de Pesos

Estado:

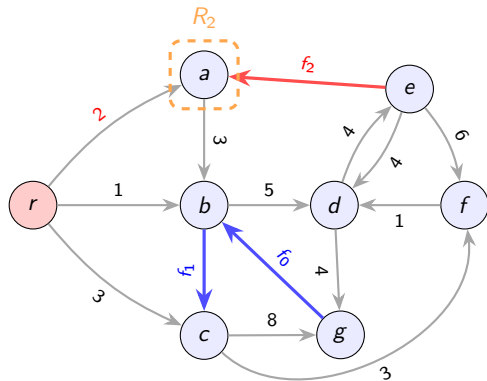
$$F = \{(g, b), (b, c)\}$$

Escolha: $R_2 = \{a\}$ Arcos que entram em $\{a\}$:

- $(r, a) : 5$
- $(e, a) : 3 \leftarrow \text{mínimo}$

Seleção:

- $\lambda_2 = 3$
- $f_2 = (e, a)$



Fase I: Iteração 5 - Redução de Pesos

Estado: $F = \{(g, b), (b, c), (e, a)\}$

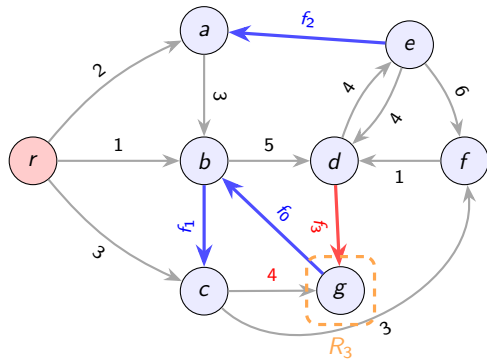
Escolha: $R_3 = \{g\}$

Arcos que entram em $\{g\}$:

- $(c, g) : 8$
- $(d, g) : 4 \leftarrow$ **mínimo**

Seleção:

- $\lambda_3 = 4$
- $f_3 = (d, g)$



Fase I: Iteração 6 - Redução de Pesos

Estado: $F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g)\}$

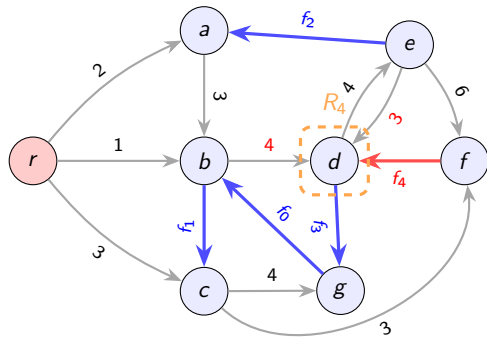
Escolha: $R_4 = \{d\}$

Arcos que entram em $\{d\}$:

- $(b, d) : 5$
- $(e, d) : 4$
- $(f, d) : 1 \leftarrow \text{mínimo}$

Seleção:

- $\lambda_4 = 1$
- $f_4 = (f, d)$



Fase I: Iteração 7 - Redução de Pesos

Estado:

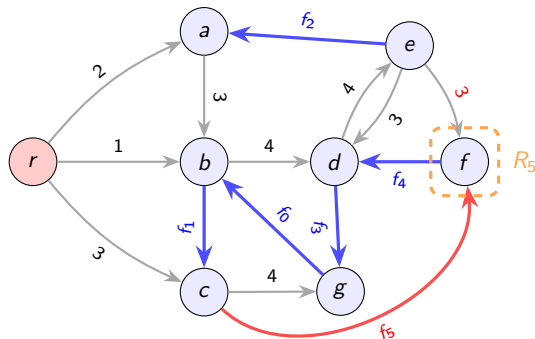
$$F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d)\}$$

Escolha: $R_5 = \{f\}$ Arcos que entram em $\{f\}$:

- $(c, f) : 3 \leftarrow$ **mínimo**
- $(e, f) : 6$

Seleção:

- $\lambda_5 = 3$
- $f_5 = (c, f)$



Fase I: Iteração 8 - Redução de Pesos

Estado: $F =$

$$\{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d), (c, f)\}$$

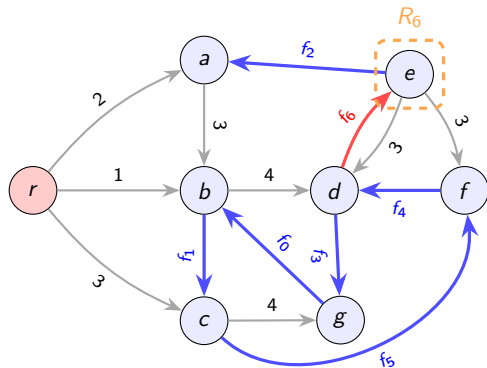
Escolha: $R_6 = \{e\}$

Arcos que entram em $\{e\}$:

- $(d, e) : 4 \leftarrow \text{mínimo}$

Seleção:

- $\lambda_6 = 4$
- $f_6 = (d, e)$

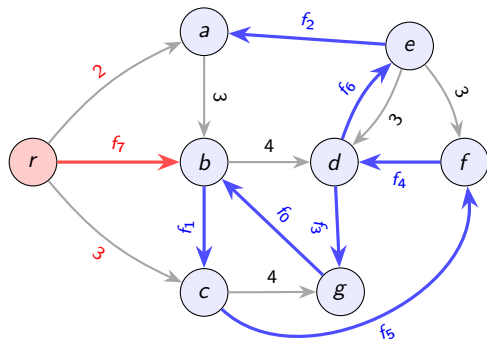


Fase I: Iteração 9 - Estado Final

Redução:

- $c(r, b) = 1 - 1 = 0$

Condição de parada satisfeita!

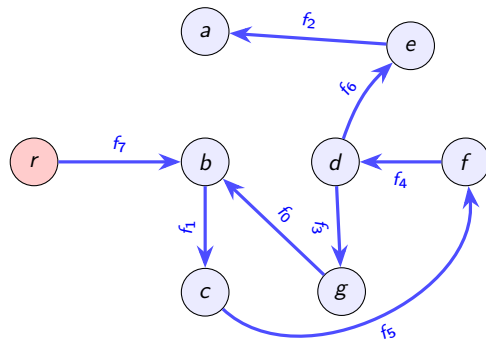


Todos arcos de F têm peso zero!

Final da Fase I

Devolução da fase I:

- $F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d), (c, f), (d, e), (r, b)\}$
- Todos arcos em F têm peso zero



Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D , não apenas F .

Intermissão

Fase II: Duas Abordagens

Fase II: Construção da Arborescência

Entrada: Sequência $(f_i)_{i \in [k]}$ da Fase I

Objetivo: Extrair $J \subseteq \{f_i : i \in [k]\}$ que é uma r -arborescência geradora

Algoritmo guloso:

- 1 Iniciar com $U := \{r\}$ e $J := \emptyset$
- 2 Para $t = 1$ até $|V| - 1$:
 - Para cada $f_i = (u_i, v_i)$ na sequência:
 - Se $u_i \in U$ e $v_i \notin U$:
 - $U := U \cup \{v_i\}$
 - $J := J \cup \{f_i\}$
 - Passar para próxima iteração
- 3 Devolver J ao final

Invariante

Em cada iteração, $\varrho_J(R_i) \leq 1$ para todo $i \in [k]$

Fase II - Entrada

Entrada da Fase II:

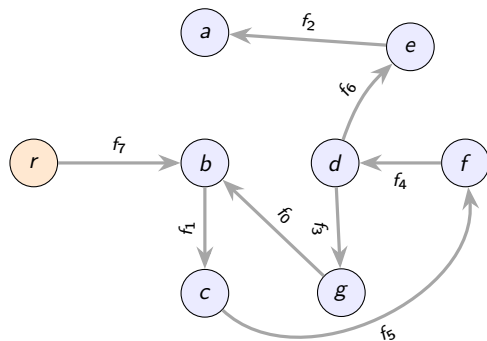
- $F = \{(g, b), (b, c), (e, a), (d, g), (f, d), (c, f), (d, e), (r, b)\}$

Estado inicial:

- $U = \{r\}$ (alcançados)
- $J = \emptyset$ (arborescência)

Objetivo:

- Selecionar $|V| - 1 = 7$ arcos
- Manter propriedade de arborescência



Observação

Fase II precisa considerar **todos** arcos de D , não apenas F .

Fase II: Iteração 1

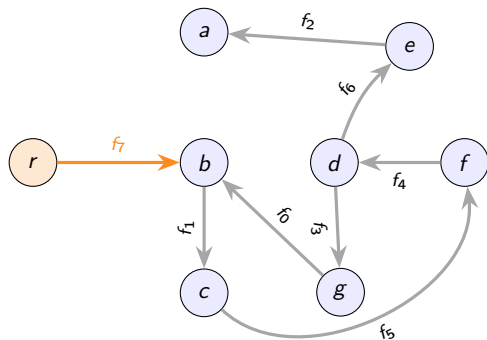
Estado: $U = \{r\}$, $J = \emptyset$

Procurar em F :

- $f_7 = (r, b)$: $r \in U$, $b \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (r, b) a J
- $U := U \cup \{b\} = \{r, b\}$



$J = \{(r, b)\}$, peso = 6

Fase II: Iteração 2

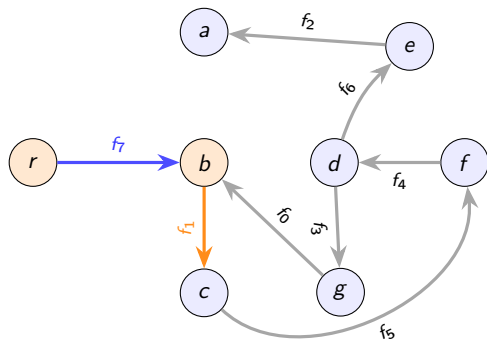
Estado: $U = \{r, b\}$

Procurar em F :

- $f_1 = (b, c)$: $b \in U, c \notin U \checkmark$

Ação:

- Adicionar (b, c) a J
- $U := U \cup \{c\} = \{r, b, c\}$



$$J = \{(r, b), (b, c)\}, \text{ peso} = 8$$

Fase II: Iteração 3

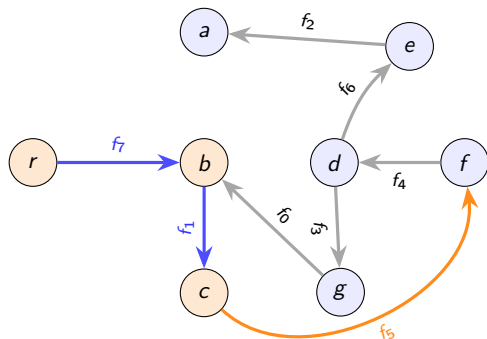
Estado: $U = \{r, b, c\}$

Procurar em F :

- $f_5 = (c, f)$: $c \in U$, $f \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (c, f) a J
- $U := U \cup \{f\} = \{r, b, c, f\}$



$$J = \{(r, b), (b, c), (c, f)\}, \text{ peso} = 11$$

Fase II: Iteração 4

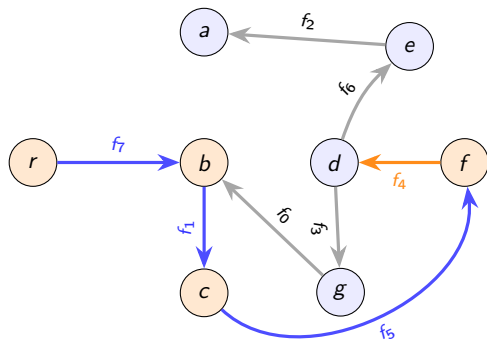
Estado: $U = \{r, b, c, f\}$

Procurar em F :

- $f_4 = (f, d)$: $f \in U, d \notin U \checkmark$

Ação:

- Adicionar (f, d) a J
- $U := U \cup \{d\} = \{r, b, c, f, d\}$



$$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d)\}, \text{ peso} = 12$$

Fase II: Iteração 5

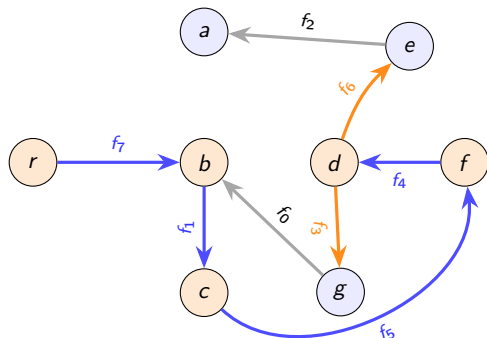
Estado: $U = \{r, b, c, f, d\}$

Procurar em F :

- $f_3 = (d, g)$: $d \in U, g \notin U \checkmark$

Ação:

- Adicionar (d, g) a J
- $U := U \cup \{g\} = \{r, b, c, f, d, g\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g)\},$
peso = 16

Fase II: Iteração 6

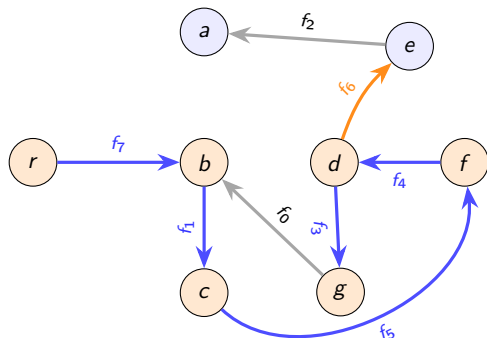
Estado: $U = \{r, b, c, f, d, g\}$

Procurar em F :

- $f_6 = (d, e)$: $d \in U$, $e \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (d, e) a J
- $U := U \cup \{e\} = \{r, b, c, f, d, g, e\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g), (d, e)\}$,
peso = 20

Fase II: Iteração 7

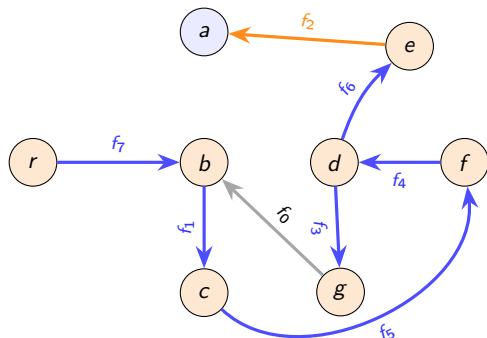
Estado: $U = \{r, b, c, f, d, g, e\}$

Procurar em F :

- $f_2 = (e, a)$: $e \in U$, $a \notin U$ ✓

Ação:

- Adicionar (e, a) a J
- $U := U \cup \{e\} = \{r, b, c, f, d, g, e, a\}$



$J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g), (e, a)\}$,
peso = 23

Fase II: Resultado Final

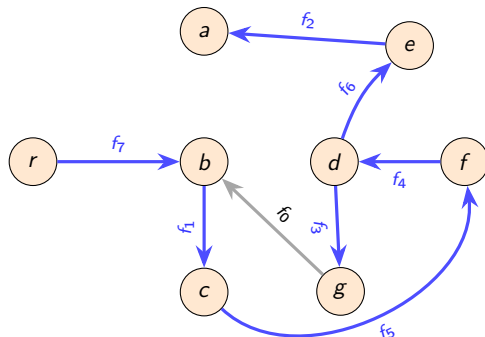
Estado: $U = \{r, b, c, f, d, g, e, a\}$

Ação:

- Devolver J
- U contém todos os vértices

Resultado:

- $J = \{(r, b), (b, c), (c, f), (f, d), (d, g), (e, a)\}$
- Peso Mínimo = 23



A arborescência geradora mínima é destacada em azul.

Intermissão

Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

Comparação de Desempenho

Implementação: Python 3.13

Bibliotecas: NetworkX, Matplotlib

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios, $|V| = 2000$, $|A| = 4000$

Algoritmo	Mediana Temporal	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,13 s	0,25 s
Frank Fase I	4,01 s	4,28 s
Frank Fase II (lista)	0,42 s	0,43 s
Frank Fase II (heap)	0,0083 s	0,0109 s

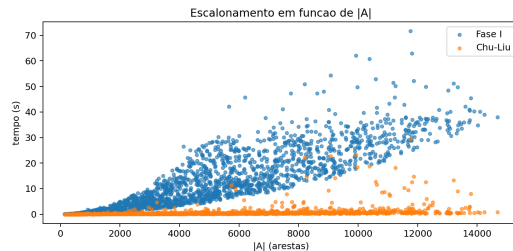
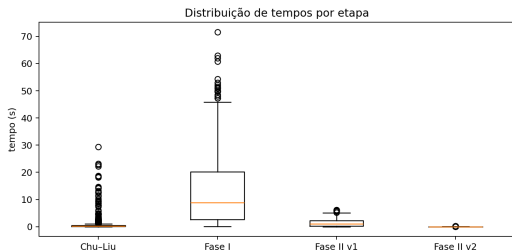
Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **50,94 vezes** (mediana)

Escalonamento e Consumo de Memória

Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arcos
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida

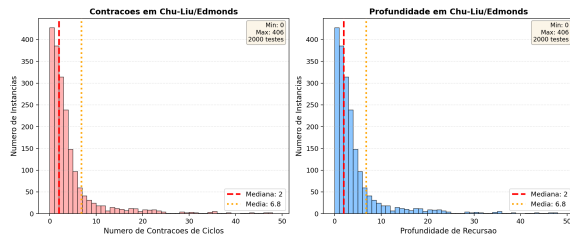


Características Estruturais

Contrações (Chu-Liu):

- Mediana: 2 contrações
- Média: 6,82
- Máximo: 406
- 93,8% com < 20

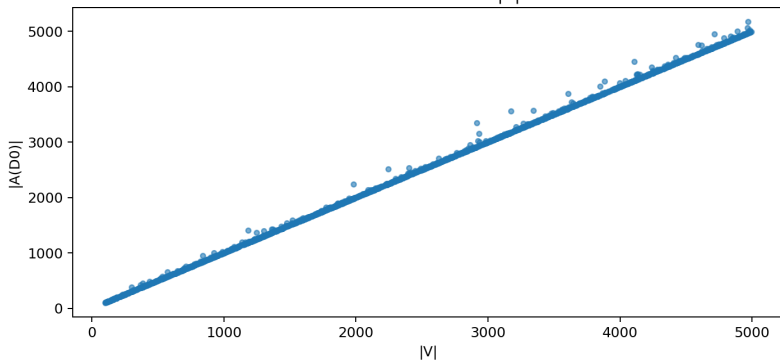
Muito abaixo do limite teórico $O(n)$



Características Estruturais

Tamanho de D_0 vs $|V|$: relação linear confirma $|A_0| = O(|V|)$

Tamanho de D_0 vs $|V|$



Resumidamente...

- **Corretude verificada:** pesos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds:** mais rápido, mas cabe discutir implementação
- **Fase I de Frank:** gargalo computacional
- **Otimização heap:** fundamental na Fase II, retira necessidade de verificação de arborescência na Fase I
- **Comportamento prático:** curioso
 - Contrações: mediana 2 (limite $O(n)$)
 - Uso modesto de memória: 11,5 MB

Intermissão

Didática do Abstrato

Fundamentos Cognitivos e Didáticos

Desafios do Ensino de Matemática Abstrata

- Conhecimento abstrato exige transitar entre registros: intuitivo, visual, simbólico e formal.
- **Carga cognitiva:**
 - Intrínseca: complexidade dos conceitos e pré-requisitos.
 - Extrínseca: forma de apresentação e coordenação entre texto, fórmulas e figuras.
 - Pertinente: esforço dedicado à organização dos esquemas mentais.
- Combinar representações verbais e visuais reduz sobrecarga e favorece integração semântica.

Desafios na Ensino de Algoritmos de Grafos

Três Eixos de Dificuldade

- ❶ **Decisões locais vs. coerência global:** Escolhas localmente ótimas podem gerar ciclos, dificultando a compreensão da solução global.
- ❷ **Contração e expansão:** Transitar entre grafo original, condensado e reexpansão exige rastreabilidade e clareza sobre o que muda e o que permanece.
- ❸ **Relação com a teoria primal-dual:** Dificuldade em conectar ações operacionais do algoritmo com fundamentos teóricos e certificados de otimalidade.

Solução: Visualização e interação bem projetadas facilitam a integração entre prática e teoria.

O Ecossistema de Ferramentas para Ensino de Grafos

Categorias de Ferramentas Digitais

- **Diagramas programáveis:** Visualização estável e integrada ao texto matemático (*Graphviz, TikZ*).
- **Exploração e edição de grafos:** Manipulação gráfica e análise estrutural (*Gephi, yEd, Cytoscape*).
- **Visualização de algoritmos:** Animações e explicações dinâmicas (*VisuAlgo*).
- **Ambientes programáveis:** Integração de código, texto e visualização para exemplos reprodutíveis (*Jupyter, NetworkX*).

Nenhuma ferramenta cobre todos os aspectos didáticos de forma integrada. A aplicação proposta busca preencher essa lacuna.

Objetivos da Ferramenta Didática

- Facilitar a compreensão dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank
- Permitir aos usuários interagir com grafos e observar o funcionamento dos algoritmos
- Fornecer feedback imediato sobre as operações realizadas
- Ser acessível via navegador web, sem necessidade de instalação

Intermissão

Aplicação Web

Aplicação web

Ferramenta web interativa para ensino de algoritmos de arborescências dirigidas, permitindo visualização passo a passo, edição livre de grafos e exportação de resultados, com arquitetura modular e foco didático.

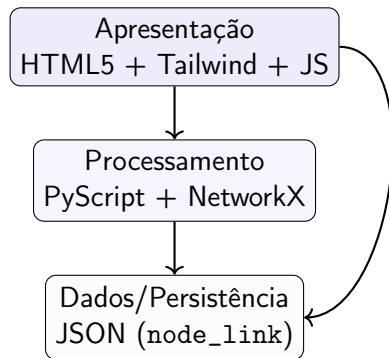
Módulos principais:

- **Visualização Algorítmica:** Páginas para execução passo a passo dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank.
- **Modelagem Livre:** Editor sandbox para desenhar, testar e exportar grafos arbitrários.
- **Disseminação Científica:** Página informativa sobre o projeto e a dissertação.

Arquitetura da Aplicação

Estrutura em três camadas:

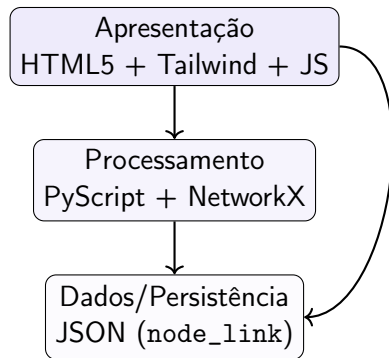
- **Apresentação:** Interface construída em HTML5, estilizada com Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript.
- **Processamento (PyScript):** Executa algoritmos em Python (NetworkX) diretamente no navegador, gerando visualizações estáticas com Matplotlib.
- **Dados e Persistência:** Utiliza JSON (node_link) para serializar grafos, armazenar pesos e permitir exportação/importação entre módulos.



Arquitetura da Aplicação

Benefícios:

- Processamento local e rápido
- Facilidade de uso e reprodutibilidade
- Modularidade e extensibilidade



Princípios de IHC Aplicados

Fundamentos para o Design da Ferramenta

O desenvolvimento da aplicação web foi guiado por oito princípios de Interação Humano-Computador (IHC), integrando heurísticas de usabilidade e teorias de aprendizagem:

- **Usabilidade:** Interface limpa, controles claros e navegação intuitiva.
- **Eficiência cognitiva:** Redução da carga mental, destaque para informações relevantes.
- **Feedback imediato:** Atualização visual e textual em tempo real a cada ação.
- **Engajamento ativo:** Usuário explora, manipula e prediz resultados.
- **Visão geral com detalhe sob demanda**
- **Consistência semântica:** Terminologia e estilos padronizados em toda a interface.
- **Múltiplos registros de representação:** Grafo visual, log textual e parâmetros simbólicos.
- **Prevenção e recuperação de erros**

Intermissão

Conclusões

Contribuições do Trabalho

1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

2 Análise experimental

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

Trabalhos Futuros

Extensões Possíveis

- Melhoria da versão recursiva do algoritmo de Chu-Liu-Edmonds usando pilha
- Melhoria da fase I do algoritmo de András Frank utilizando contração de componentes fonte
- Implementação de algoritmos para resolver o problema inverso da r-arborescência geradora mínima

Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos no passo a passo
- Geração automática de casos de teste
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

Atribuição de Tarefas

Orientador

Prof. Dr. Mário Leston Rey

Lorena Silva Sampaio - 11201812025

- Análise e implementação do Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- Análise e implementação do Algoritmo de András Frank versão com heap
- Testes experimentais e análise de desempenho

Samira Haddad - 11201812350

- Análise e implementação do Algoritmo de András Frank versão com lista
- Revisão bibliográfica sobre didática e IHC
- Desenvolvimento da interface da aplicação web interativa

Obrigado!

Perguntas?

`https://lorenypsum.github.io/graph-visualizer/pages/home.html`