

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca
de uma r -Arborescência Inversa de Custo Mínimo
em Grafos Dirigidos com Aplicação Didática
Interativa**

Brasil

2025

Lorena Silva Sampaio, Samira Haddad

**Análise e Implementação de Algoritmos de Busca de uma
r-Arborescência Inversa de Custo Mínimo em Grafos
Dirigidos com Aplicação Didática Interativa**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Universidade Federal do ABC

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston

Brasil

2025

Dedicatória (opcional).

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional).

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise e implementação de algoritmos de busca de uma r -arborescência inversa de custo mínimo em grafos dirigidos com aplicação didática interativa.

Palavras-chave: Grafos. Arborescência. Algoritmos. Visualização.

Abstract

This work presents an analysis and implementation of algorithms for finding a minimum cost inverse r -arborescence in directed graphs with interactive didactic application.

Keywords: Graphs. Arborescence. Algorithms. Visualization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma r -arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo.	12
Figura 2 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.	12
Figura 3 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.	12
Figura 4 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.	13
Figura 5 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.	14
Figura 6 – O caminho simples maximal P inicia em u e termina em v . A porção S de P entre u e w é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo.	15
Figura 7 – O digrafo D com o ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$. Os arcos azuis representam os arcos do ciclo, os tracejados representam os demais arcos do digrafo.	16
Figura 8 – digrafo com custos λ -reduzidos. Os arcos internos do ciclo C têm custo zero (em azul). Os arcos da raiz para o ciclo têm custos 1, 0 e 3 (tracejados).	16
Figura 9 – digrafo D' após a contração do ciclo C . O supervértice x_C substitui todos os vértices do ciclo. Originalmente, havia três arcos paralelos de r para o ciclo: (r, v_1) , (r, v_2) e (r, v_3) com custos reduzidos 1, 0 e 3; mantemos apenas o de menor custo 0. Os arcos que saíam do ciclo agora saem de x_C : (x_C, u) com custo 0 e (x_C, w) com custo 0. Note que havia dois arcos de vértices do ciclo para u ; mantemos apenas o de menor custo.	16
Figura 10 – Reexpansão da r -arborescência ótima T' em D' para obter a r -arborescência T em D	17
Figura 11 – Reexpansão da r -arborescência ótima T' em D' para obter a r -arborescência T em D . Os arcos selecionados em verde fazem parte de T	17
Figura 12 – digrafo D com custos originais. O ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ tem arcos com custos 5, 5 e 2. Existem dois arcos da raiz para o ciclo, ambos com custo 5: (r, v_1) e (r, v_3)	18
Figura 13 – digrafo D com custos λ -reduzidos. Todos os arcos do ciclo custo mínimo têm agora custo zero.	18
Figura 14 – Arborescência T' no digrafo contraído D' . O arco (r, x_C) pode corresponder ou ao arco (r, v_1) ou ao (r, v_3) em D e o arco (x_C, u) corresponde ao arco normalizado (v_2, u) em D	18

- Figura 15 – Duas r -arborescências ótimas distintas em D com custos c_λ -reduzidos. T_1 usa o arco (r, v_1) e os arcos do ciclo (v_1, v_2) e (v_2, v_3) . T_2 usa o arco (r, v_3) e os arcos do ciclo (v_3, v_1) e (v_1, v_2) . Ambas incluem o arco (v_2, u) e têm custo total zero. 19
- Figura 16 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice v com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar `reduce_weights(D, v)`: o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco (u_2, v) (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para A_0 25
- Figura 17 – Exemplo de construção de A_0 a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo D após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos um arco de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo A_0 resultante contém apenas os arcos de custo zero selecionados, um por vértice. Note que A_0 pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$) que serão tratados nas etapas subsequentes. 27
- Figura 18 – Exemplo de detecção de ciclo em A_0 . À esquerda, o subgrafo A_0 contém um ciclo formado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar o arco (v_4, v_2) , onde v_2 já está na pilha de recursão. À direita, a função devolve uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e os três arcos que formam o ciclo. 29
- Figura 19 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original D com ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ (em amarelo). Vértices externos r, v_1 e v_5 têm arcos conectando ao ciclo: r envia arco para v_2 (peso 2) e v_4 (peso 5); v_4 envia arco para v_5 (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice x_C (vermelho). Os arcos de entrada são redirecionados: (r, x_C) recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). O arco de saída (x_C, v_5) mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão. 32
- Figura 20 – Remoção de arco interno durante reexpansão. À esquerda, ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ após adicionar arco externo (u, v_2) vindouro da arborescência T' : o vértice v_2 tem grau de entrada 2 (arco externo vermelho de u e arco interno do ciclo vindo de v_4), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover o arco interno (v_4, v_2) : o vértice v_2 passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. O arco removido é mostrado tracejado em cinza. 35

Figura 21 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplos arcos com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arcos que entram na raiz, porém não há nenhum neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo.	38
Figura 22 – Normalização parcial dos arcos de entrada para o vértice 1. Os arcos de entrada são $(0 \rightarrow 1)$ com peso original 3 e $(2 \rightarrow 1)$ com peso original 1. Elegendo o arco $(2 \rightarrow 1)$ como o de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todos os arcos de entrada: $(0 \rightarrow 1)$ passa de peso 3 para 2, e $(2 \rightarrow 1)$ passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices.	39
Figura 23 – Grafo contraído após detecção do ciclo $C = \{1, 2\}$ em A_0 . O ciclo foi contraído no supervértice $n * 0$ (destacado em vermelho). Os arcos que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionados para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ para arcos de entrada e $c'(x_C, v) := c(w, v)$ para arcos de saída.	40
Figura 24 – Arborescência ótima F' obtida no grafo contraído. todos os arcos selecionados têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o grafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente um arco de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como F' é acíclico, alcançamos o caso base da recursão.	40
Figura 25 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice $n * 0$ foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com o arco externo $(0, 1)$ escolhido pela solução recursiva conectando ao ciclo. O arco interno $(2, 1)$ do ciclo original foi removido para manter a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arcos, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0.	41

Sumário

1	ALGORITMO DE CHU-LIU-EDMONDS	11
1.1	O algoritmo	11
1.2	Descrição do algoritmo	20
1.2.1	Corretude	21
1.2.2	Complexidade	22
1.3	Implementação em Python	22
1.3.1	Representação de digrafos e detecção de ciclos	23
1.3.2	Normalização por vértice	24
1.3.3	Construção de A_0 :	25
1.3.4	Detecção de ciclo:	27
1.3.5	Contração de ciclo:	29
1.3.6	Remoção de arcos que entram na raiz:	33
1.3.7	Remoção de arco interno:	34
1.3.8	Procedimento principal (recursivo):	35
1.3.8.1	Exemplo de execução do algoritmo	38
1.3.9	Correspondência entre teoria e implementação	41
1.3.10	Transição para a abordagem primal-dual	43
	REFERÊNCIAS	44
	ANEXOS	45
	ANEXO A – ANEXO A	46

1 Algoritmo de Chu–Liu–Edmonds

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de Chu–Liu–Edmonds, que determina uma arborescência de custo mínimo em um digrafo ponderado. O algoritmo baseia-se em duas operações fundamentais: (i) a redução gulosa dos custos dos arcos e (ii) a contração de ciclos, de modo a resolver recursivamente uma instância menor do problema e, em seguida, estender a solução para o problema original. O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição precisa tanto do algoritmo quanto da implementação desenvolvida neste trabalho.

1.1 O algoritmo

O algoritmo de Chu–Liu–Edmonds recebe uma tripla (D, c, r) , em que $D = (V, A)$ é um digrafo, $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função custo e $r \in V$ é a raiz, sob a hipótese de que D admite ao menos uma r -arborescência. O algoritmo devolve uma r -arborescência c -mínima de D .

Para evitar repetir essa hipótese, introduzimos a seguinte definição. Uma tripla (D, c, r) é um **r -digrafo ponderado** se (D, c) é um digrafo ponderado, r é um vértice de D , $\delta^-(r) = \emptyset$ e D possui uma r -arborescência. Note que a hipótese $\delta^-(r)$ é uma trivialidade, pois uma r -arborescência não contém nenhum arco que entra em r e, portanto, tais arcos podem ser eliminados de D sem nenhum prejuízo.

Vamos tecer algumas considerações para motivar o algoritmo.

Caráter Guloso

Suponha doravante que (D, c, r) é um r -digrafo ponderado. O algoritmo tem um caráter guloso. Note que, se T é uma r -arborescência de D , então, para cada vértice $v \neq r$, existe exatamente um arco de T que entra em v . Isso sugere a seguinte escolha gulosa: para cada vértice $v \neq r$, selecione um arco a_v de custo mínimo que entra em v e forme o conjunto $T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$.

Suponha que T é uma r -arborescência. Não é difícil verificar que T tem custo mínimo. De fato, seja F uma r -arborescência de D . Para cada vértice $v \neq r$, escreva b_v para o *único* arco de F que entra em v . Pela escolha gulosa,

$$c(a_v) \leq c(b_v) \quad \text{para todo } v \neq r.$$

Logo,

$$c(F) = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(b_v) \geq \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(a_v) = c(T).$$



Figura 1 – A figura ilustra a escolha gulosa quando esta produz uma r -arborescência. Os arcos em azul são os escolhidos; os cinza são os demais arcos do digrafo.

Portanto, T é uma r -arborescência de custo mínimo.

A seguinte figura ilustra que podemos não ter tanta sorte.

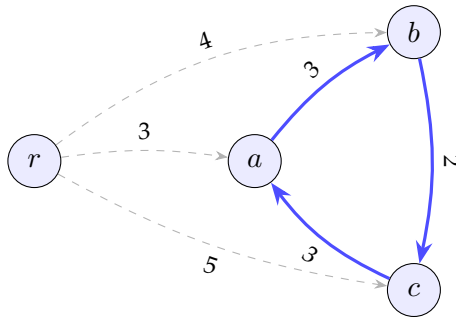


Figura 2 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Ora, se no lugar do arco (c, a) tivéssemos escolhido o arco (r, a) , então r -arborescência resultante seria de custo mínimo.

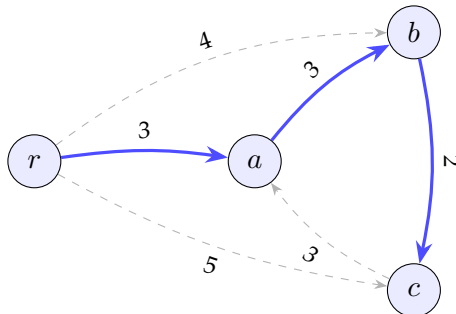


Figura 3 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

O exemplo acima sugere que devemos formar o subdigrafo H de D com $V(H) = V(D)$ e

$$A(H) := \bigcup_{v \in V \setminus \{r\}} \arg \min \{ c(a) : a \in \delta^-(v) \}.$$

Ou seja, para cada $v \neq r$ incluímos em H todos os arcos de custo mínimo que entram em v . Um argumento análogo ao anterior mostra que, se H contém uma r -arborescência, então ela é de custo mínimo.

Infelizmente, só isso não é suficiente, como mostra a próxima figura.



Figura 4 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

O ideal, do ponto de vista algorítmico, é dispor de uma forma simples de identificar o subdigrafo H . Uma transformação nos custos fornece exatamente isso. Para tanto, introduzimos a noção de **custo q -reduzido**.

Seja $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$ (convencionamos $q(r) = 0$). Definimos o **custo q -reduzido** $c_q : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c_q(a) := c(a) - q(\text{head}(a)), \quad a \in A.$$

Para um conjunto $X \subseteq V$, escrevemos $q(X) := \sum_{u \in X} q(u)$.

A próxima proposição mostra que a transformação por custo q -reduzido preserva a otimalidade.

Proposição 1.1. *Para toda função $q : V \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$, uma r -arborescência T é c -mínima em D se, e somente se, T é c_q -mínima em D .*

Prova. Seja F uma r -arborescência. Para cada $u \in V \setminus \{r\}$, seja a_u o único arco de F que entra em u . Então

$$\begin{aligned} c_q(F) &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c_q(a_u) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} (c(a_u) - q(u)) \\ &= \sum_{u \in V \setminus \{r\}} c(a_u) - \sum_{u \in V \setminus \{r\}} q(u) \\ &= c(F) - q(V \setminus \{r\}). \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer r -arborescências T e F ,

$$c(T) \leq c(F) \iff c'(T) = c(T) - q(V \setminus \{r\}) \leq c(F) - q(V \setminus \{r\}) = c_q(F),$$

o que prova a proposição. \square

Para cada $v \in V \setminus \{r\}$, defina

$$\lambda(v) := \lambda_c(v) := \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}.$$

Note que λ está bem definida uma vez que D possui uma r -arborescência e, portanto, existe ao menos um arco que entra em cada vértice diferente de r . Então, para todo $v \in V \setminus \{r\}$,

$$\min\{c_\lambda(a) : a \in \delta^-(v)\} = 0,$$

isto é, precisamente os arcos de custo mínimo que entram em v passam a ter custo zero, e os demais ficam com custo positivo. Consequentemente, o subdigrafo H obtém-se simplesmente como o subdigrafo induzido pelos arcos de custo zero de c_λ :

$$V(H) = V(D) \quad \text{e} \quad A(H) = \{a \in A : c_\lambda(a) = 0\}.$$

A figura a seguir ilustra a redução de custos no digrafo da Figura 4.



Figura 5 – Os arcos azuis são os da escolha gulosa.

Podemos agora retomar o caso no qual o subdigrafo gerador H de D , cujos arcos são aqueles em que o custo λ -reduzido é zero, não possui uma r -arborescência. Vamos mostrar que H possui um ciclo.

Seja $v \neq r$ um vértice de V que *não* é alcançável a partir de r em H . Considere um caminho simples maximal¹ de H que termina em v . Seja u o início de P . Como v não é atingível a partir de r , temos que $u \neq r$. Logo, existe exatamente um arco, digamos wv , de H que entra em u . Pela maximalidade de P , o vértice w é um dos vértices de P (caso contrário, $w \cdot P$ é um caminho simples, o que contraria a escolha de P). Como P é um caminho simples que começa em u , o vértice w aparece em P após u ; portanto, P contém um subcaminho S de u até w . Consequentemente, $S \cdot u$ é um ciclo de H .

A solução consiste em *normalizar os custos por vértice*: para cada $v \neq r$, subtraímos de todo arco que entra em v o menor custo entre os arcos que chegam a v . Após esse

¹ Maximal aqui tem o seguinte sentido. Para cada vértice u de H , as sequências $P \cdot u$ e $u \cdot P$ não são caminhos simples.

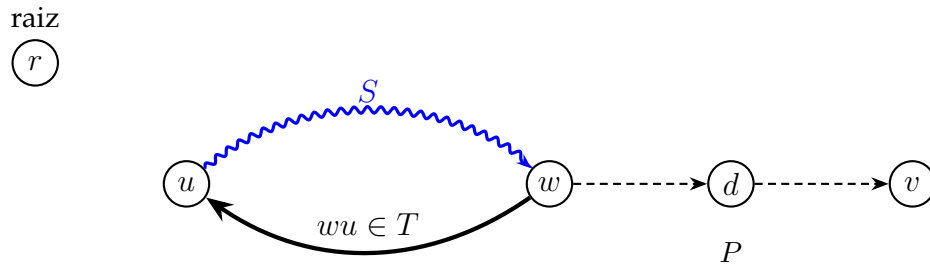


Figura 6 – O caminho simples maximal P inicia em u e termina em v . A porção S de P entre u e w é indicada pelo arco ondulado azul; o caminho $S \cdot u$ é um ciclo.

ajuste (custos reduzidos), cada $v \neq r$ passa a ter ao menos um arco de custo reduzido zero. Se os arcos de custo zero forem acíclicos, já temos a r -arborescência ótima. Se formarem um ciclo C , *contraímos* C em um **supervértice** x_C , ajustamos os custos dos arcos externos e resolvemos recursivamente no grafo menor.

A seguir, detalhamos essa operação de contração de ciclos.

Contração de ciclos

Vamos agora formalizar a operação de contração de ciclos. Seja (D, c, r) um r -digrafo ponderado e seja C um ciclo dirigido de D tal que $r \notin C$. A **contração de C** consiste em formar um novo digrafo $D' = (V', A')$ substituindo todos os vértices de C por um único **supervértice** x_C tal que $x_C \notin V$. Formalmente, o conjunto de vértices de D' é dado por

$$V' := (V \setminus C) \cup \{x_C\}.$$

O conjunto de arcos A' é construído a partir de A da seguinte forma: para cada arco $a = (u, v) \in A$, mantemos a inalterado em A' se ambos u e v estão fora de C ; descartamos a se ambos pertencem a C ; criamos um arco (u, x_C) se $u \notin C$ e $v \in C$; e criamos um arco (x_C, v) se $u \in C$ e $v \notin C$.

Ajustamos os custos dos arcos que entram e saem do supervértice x_C em D' para refletir a contração do ciclo C da seguinte forma: para cada arco (u, v) com $u \notin C$ e $v \in C$, o custo do arco contraído (u, x_C) é definido como $c_\lambda(u, v)$, onde $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$ é o custo mínimo de entrada em v e de forma semelhante, para cada arco (u, v) com $u \in C$ e $v \notin C$, o custo do arco contraído (x_C, v) é definido como $c_\lambda(u, v)$, onde $c_\lambda(u, v) = c(u, v) - \lambda(v)$ e $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$ é o custo mínimo de entrada em v .

Agora vamos ilustrar um exemplo de como essa contração é feita e os custos são ajustados.

Considere o digrafo D a seguir, com o ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$.



Figura 7 – O digrafo D com o ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$. Os arcos azuis representam os arcos do ciclo, os tracejados representam os demais arcos do digrafo.

Após a normalização dos custos, os arcos internos do ciclo passam a ter custo reduzido zero e os demais arcos são ajustados conforme a definição de custo λ -reduzido:



Figura 8 – digrafo com custos λ -reduzidos. Os arcos internos do ciclo C têm custo zero (em azul). Os arcos da raiz para o ciclo têm custos 1, 0 e 3 (tracejados).

Após a contração do ciclo C , obtemos o digrafo D' com o supervértice x_C .



Figura 9 – digrafo D' após a contração do ciclo C . O supervértice x_C substitui todos os vértices do ciclo. Originalmente, havia três arcos paralelos de r para o ciclo: (r, v_1) , (r, v_2) e (r, v_3) com custos reduzidos 1, 0 e 3; mantemos apenas o de menor custo 0. Os arcos que saíam do ciclo agora saem de x_C : (x_C, u) com custo 0 e (x_C, w) com custo 0. Note que havia dois arcos de vértices do ciclo para u ; mantemos apenas o de menor custo.

Por definição não admitimos gerar arcos paralelos entre um mesmo par de vértices, mantemos apenas o arco de menor custo, conforme ilustrado do vértice r para

o supervértice x_C e de x_C para u e isso não afeta a otimalidade, já que na reexpansão qualquer escolha entre arcos paralelos conduz à mesma solução ótima.

Reexpansão de arborescências

Após resolver o problema no digrafo contraído D' , obtemos uma r -arborescência ótima T' em D' . Para reexpandir T' em uma r -arborescência T em D , substituímos o supervértice x_C pelo ciclo C e adicionamos os arcos do ciclo que formam a arborescência dentro de C . Especificamente, se o arco (u, x_C) em T' corresponde a um arco (u, v_i) em D (onde $v_i \in C$), então incluímos esse arco em T . Em seguida, adicionamos os arcos do ciclo C que conectam os vértices de C de forma a manter a estrutura de arborescência. Note que, devemos escolher todos os arcos do ciclo C exceto aquele que entra em v_i , garantindo que cada vértice de C tenha grau de entrada igual a 1, exceto v_i .

Seguindo nosso exemplo anterior, ilustramos a reexpansão da r -arborescência, primeiramente adicionando novamente os vértices que pertenciam ao ciclo C e, em seguida, incluindo os arcos apropriados para formar a r -arborescência T em D :



Figura 10 – Reexpansão da r -arborescência ótima T' em D' para obter a r -arborescência T em D

Após isso reinserimos os pesos originais dos arcos. A figura a seguir ilustra esse processo:



Figura 11 – Reexpansão da r -arborescência ótima T' em D' para obter a r -arborescência T em D . Os arcos selecionados em verde fazem parte de T .

É importante observar que, ao depender da forma com a qual extraímos a arborescência ótima de D' a partir do nosso digrafo original, podemos obter múltiplas arborescências ótimas em D , o exemplo a seguir ilustra essa situação:

Considere o digrafo a seguir com custos originais:



Figura 12 – digrafo D com custos originais. O ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ tem arcos com custos 5, 5 e 2. Existem dois arcos da raiz para o ciclo, ambos com custo 5: (r, v_1) e (r, v_3) .

Após a normalização dos custos (subtraindo $\lambda(v_1) = 5$, $\lambda(v_2) = 2$, $\lambda(v_3) = 5$ e $\lambda(u) = 4$), obtemos:



Figura 13 – digrafo D com custos λ -reduzidos. Todos os arcos do ciclo custo mínimo têm agora custo zero.

Após a contração do ciclo C , ambas as arborescências T_1 e T_2 mapeiam para a mesma arborescência T' no digrafo contraído D' :

Arborescência T' em D'



Figura 14 – Arborescência T' no digrafo contraído D' . O arco (r, x_C) pode corresponder ou ao arco (r, v_1) ou ao (r, v_3) em D e o arco (x_C, u) corresponde ao arco normalizado (v_2, u) em D .

No processo de reexpansão, existem duas r -arborescências ótimas distintas em D , ilustradas a seguir:

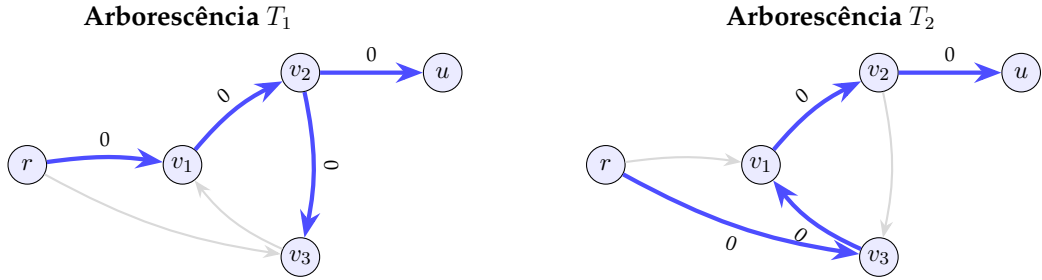


Figura 15 – Duas r -arborescências ótimas distintas em D com custos c_λ -reduzidos. T_1 usa o arco (r, v_1) e os arcos do ciclo (v_1, v_2) e (v_2, v_3) . T_2 usa o arco (r, v_3) e os arcos do ciclo (v_3, v_1) e (v_1, v_2) . Ambas incluem o arco (v_2, u) e têm custo total zero.

Assim, vemos que a correspondência entre as r -arborescências de D e D' não é bijetiva, pois duas arborescências distintas em D podem corresponder à mesma arborescência em D' . Isso ocorre porque ambos os arcos (r, v_1) e (r, v_3) têm o mesmo custo λ -reduzido (zero) e ambos entram no ciclo C ; após a contração, ambos são representados pelo único arco (r, x_C) no digrafo contraído.

A seguir, apresentamos a proposição que estabelece a correspondência entre as r -arborescências de D e D' após a contração do ciclo C .

Proposição 1.2. *Seja C um ciclo dirigido em D com $r \notin C$, e seja D' o digrafo obtido pela contração de C . Para cada vértice $v \in C$, seja a_v o único arco de C que entra em v , e suponha que $c_\lambda(a_v) = 0$ para todo $v \in C$, onde $\lambda(v) = \min\{c(a) : a \in \delta^-(v)\}$. Defina os custos $c' : A' \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$c'(a') := \begin{cases} c_\lambda(a) & \text{se } a' = a \text{ e } a \text{ não envolve } C, \\ c_\lambda(u, w) & \text{se } a' = (u, x_C) \text{ corresponde a } (u, w) \text{ com } w \in C, \\ c_\lambda(u, v) & \text{se } a' = (x_C, v) \text{ corresponde a } (u, v) \text{ com } u \in C. \end{cases}$$

Então existe uma correspondência bijetiva entre as r -arborescências de D' com custos c' e as r -arborescências de D com custos c_λ que contêm exatamente um arco entrando em C . Note que, em geral, podem haver múltiplas arborescências ótimas de D que são mapeadas para uma mesma arborescência ótima de D' , ou seja, a correspondência entre arborescências ótimas pode não ser bijetiva.

Prova. Seja T' uma r -arborescência de D' . Como x_C é um vértice de D' e $x_C \neq r$, existe exatamente um arco de T' que entra em x_C . Seja (u, x_C) esse arco. No digrafo original D , o arco (u, x_C) corresponde a um arco (u, w) para algum $w \in C$.

Definimos $T \subseteq A$ da seguinte forma: para cada arco $a' \in T'$ que não envolve x_C , incluímos o arco correspondente $a \in A$ em T ; para o arco $(u, x_C) \in T'$, incluímos

$(u, w) \in A$ em T ; e incluímos todos os arcos de C , com exceção do arco a_w que entra em w .

Afirmamos que T é uma r -arborescência de D . De fato, para cada vértice $v \in V \setminus \{r\}$, se $v \notin C$, então $v \in V'$ e há exatamente um arco de T' entrando em v , logo há exatamente um arco de T entrando em v . Se $v \in C$ e $v \neq w$, então o único arco de T entrando em v é o arco a_v do ciclo C . Finalmente, se $v = w$, o único arco de T entrando em w é precisamente (u, w) .

Além disso, como T' é acíclico em D' e os arcos do ciclo C formam um caminho de w até seus predecessores em C (exceto o arco removido a_w), o conjunto T permanece acíclico. Portanto, T é uma r -arborescência de D .

Reciprocamente, seja T uma r -arborescência de D que contém exatamente um arco entrando em C , digamos (u, w) com $u \notin C$ e $w \in C$. Definimos $T' \subseteq A'$ mantendo cada arco de T que não envolve vértices de C , substituindo o arco (u, w) por (u, x_C) , e descartando os arcos internos de C presentes em T . É direto verificar que T' é uma r -arborescência de D' e que essa correspondência é bijetiva.

Finalmente, como todos os arcos a_v do ciclo C têm custo c_λ -reduzido zero, temos

$$c_\lambda(T) = \sum_{a \in T \setminus C} c_\lambda(a) + c_\lambda(u, w) = c'(T'),$$

o que estabelece a correspondência entre custos. \square

Essa proposição justifica a estratégia recursiva do algoritmo: resolver o problema no grafo contraído D' com custos ajustados c' e, em seguida, expandir a solução para o grafo original D .

A seguir, apresentamos a implementação completa do algoritmo de Chu–Liu e Edmonds para encontrar uma r -arborescência de custo mínimo em um r -digrafo ponderado (D, c, r) .

1.2 Descrição do algoritmo

A seguir apresentamos uma descrição formal do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds. Detalhes de implementação serão discutidos na próxima seção.

Algoritmo 1.1: Chu–Liu/Edmonds (visão operacional)

Entrada: digrafo $D = (V, A)$, custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, raiz r .^a

1. Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \operatorname{argmin}_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.

2. Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0 . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r-arborescência de custo mínimo.

3. Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). **Contração:** contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

4. **Recursão:** compute uma r-arborescência ótima T' de D' com custos c' .

5. **Expansão:** seja $(u, x_C) \in T'$ o único arco que entra em x_C . No grafo original, ele corresponde a (u, w) com $w \in C$. Forme

$$T := (T' \setminus \{\text{arcos incidentes a } x_C\}) \cup \{(u, w)\} \cup ((A_0 \cap A(C)) \setminus \{a_w\}).$$

Então T tem grau de entrada 1 em cada $v \neq r$, é acíclico e tem o mesmo custo de T' ; logo, é uma r-arborescência ótima de D (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

^a Se algum $v \neq r$ não possui arco de entrada, não existe r-arborescência.

1.2.1 Corretude

A corretude do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds baseia-se em três pilares principais:

1. *Normalização por custos reduzidos:* para cada $v \neq r$, defina $y(v) := \min\{c(u, v) : (u, v) \in A\}$ e $c'(u, v) := c(u, v) - y(v)$. Para qualquer r-arborescência T , vale

$$\sum_{a \in T} c'(a) = \sum_{a \in T} c(a) - \sum_{v \neq r} y(v),$$

pois há exatamente um arco de T entrando em cada $v \neq r$. O termo $\sum_{v \neq r} y(v)$ é constante (independe de T); assim, minimizar $\sum c$ equivale a minimizar $\sum c'$ (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.37). Em particular, os arcos a_v de menor custo que entram em v têm custo reduzido zero e formam A_0 .

2. *Caso acíclico:* se (V, A_0) é acíclico, então já é uma r-arborescência e, por realizar o mínimo custo de entrada em cada $v \neq r$, é ótima (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36).

3. *Caso com ciclo (contração/expansão)*: se A_0 contém um ciclo dirigido C , todos os seus arcos têm custo reduzido zero.

Contraia C em x_C e ajuste apenas arcos que *entram* em C : $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w)$.

Resolva o problema no grafo contraído D' , obtendo uma r -arborescência ótima T' sob c' . Na expansão, substitua o arco $(u, x_C) \in T'$ pelo correspondente (u, w) (com $w \in C$) e remova a_w de C .

Considerando que os arcos de C têm custo reduzido zero e $c'(u, x_C) = c(u, w) - y(w)$, a soma dos custos reduzidos é preservada na ida e na volta; logo, T' ótimo em D' mapeia para T ótimo em D para c' . Pela equivalência entre c e c' , T também é ótimo para c . Repetindo o argumento a cada contração, obtemos a corretude por indução (KLEINBERG; TARDOS, 2006; SCHRIJVER, 2003, Sec. 4.9).

Em termos intuitivos, y funciona como um potencial nos vértices: torna “apertados” (custo reduzido zero) os candidatos corretos; ciclos de arcos apertados podem ser contraídos sem perder otimalidade.

1.2.2 Complexidade

Na implementação direta, selecionar os a_v , detectar/contrair ciclos e atualizar estruturas custa $O(m)$ por nível; como o número de vértices decresce a cada contração, temos no máximo $O(n)$ níveis e tempo total $O(mn)$, com $n = |V|$, $m = |A|$.

O uso de memória é $O(m + n)$, incluindo mapeamentos de contração/expansão e as filas de prioridade dos arcos de entrada. A implementação a seguir adota a versão $O(mn)$ por simplicidade e está disponível no repositório do projeto (<https://github.com/lorenypsum/GraphVisualizer>).

1.3 Implementação em Python

Esta seção descreve a implementação do algoritmo de Chu–Liu–Edmonds em Python, estruturada para refletir com precisão as etapas formais discutidas anteriormente. Cada operação fundamental — normalização dos custos, construção do subgrafo gerador, contração de ciclos e reexpansão — é traduzida em procedimentos sobre digrafos orientados, utilizando a biblioteca `networkx`.

A entrada consiste em um digrafo orientado $D = (V, A)$, com custos dos arcos registrados no atributo “w”, e uma raiz $r \in V$. As hipóteses adotadas são: (i) o grafo é conexo a partir de r , isto é, todo vértice $v \neq r$ é alcançável a partir da raiz; (ii) para todo subconjunto $X \subseteq V \setminus \{r\}$, existe ao menos um arco entrando em X (condições de Edmonds, cf. (SCHRIJVER, 2003)); e (iii) todos os custos são não negativos.

A saída é um subgrafo T de D com $|A_T| = |V| - 1$ arcos, tal que cada vértice $v \neq r$ possui grau de entrada igual a 1, todos os vértices são alcançáveis a partir de r , e o custo total $\sum_{a \in A_T} c(a)$ é mínimo.

Por limitações da representação com `networkx.DiGraph`, a implementação elimina arcos paralelos durante a contração de ciclos.

A estrutura do código é modular: funções auxiliares tratam cada etapa do algoritmo — normalização dos custos, detecção e contração de ciclos, construção do subgrafo gerador e reexpansão da solução. Todas operam sobre objetos `nx.DiGraph` e são coordenadas por uma função principal que gerencia o fluxo recursivo. As subseções seguintes detalham cada função auxiliar, abordando lógica, parâmetros, saídas e complexidade.

1.3.1 Representação de digrafos e detecção de ciclos

A implementação utiliza a biblioteca `NetworkX`², especificamente a classe `nx.DiGraph` para representar digrafos $D = (V, A)$. Internamente, usa dicionários aninhados do Python para armazenar vértices, arcos e atributos, garantindo operações eficientes: adicionar/remover arco $O(1)$ amortizado, iterar vizinhos $O(\deg(u))$, percorrer todos os arcos $O(m)$.

Métodos da API NetworkX

Os métodos da API `NetworkX` utilizados na implementação dividem-se em três categorias funcionais, cada uma correspondendo a uma fase específica do algoritmo:

Consulta de estrutura

- `D.nodes()`: devolve visão iterável sobre V , permitindo percorrer todos os vértices.
- `D.in_edges(v, data="w")`: devolve arcos entrantes em v com pesos, produzindo tuplas (u, v, w) .
- `D.out_edges(u, data="w")`: devolve arcos saíntes de u com pesos, análogo a `in_edges`.
- `D[u][v]["w"]`: acessa diretamente o peso do arco (u, v) para leitura ou modificação.

Modificação de estrutura

- `D.add_edge(u, v, w=peso)`: adiciona arco (u, v) com peso especificado, criando vértices automaticamente se não existirem.

² `NetworkX` é uma biblioteca Python para criação, manipulação e estudo de redes. Disponível em <https://networkx.org/>.

- `D.remove_edges_from(edges)`: remove múltiplos arcos em lote.
- `D.remove_nodes_from(nodes)`: remove vértices e todos os seus arcos incidentes.

1.3.2 Normalização por vértice

Esta função implementa a normalização de custos reduzidos: calcula $y(v) = \min\{w(u, v)\}$ e substitui cada peso $w(u, v)$ por $w(u, v) - y(v)$, garantindo que ao menos um arco de entrada tenha custo zero. Como cada r -arborescência possui exatamente um arco entrando em cada vértice não-raiz, a soma total dos valores $y(v)$ subtraídos é constante para qualquer solução, preservando assim a ordem de otimalidade entre diferentes arborescências.

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo `node` do vértice a ser normalizado. A implementação coleta todos os arcos de entrada de `node` com seus pesos usando o método `D.in_edges(node, data="w")`, que devolve uma lista de tuplas $(u, node, w)$ (linha 2). Em seguida, verifica se a lista está vazia e se estiver devolve imediatamente sem fazer alterações (linhas 3–4). Caso contrário, calcula o peso mínimo y_v através de uma compreensão de gerador que extrai o terceiro elemento de cada tupla (linha 5) e, para cada predecessor u , subtrai y_v do peso armazenado em `D[u][node]["w"]` (linha 6).

Não devolve nenhum valor, pois a operação é realizada modificando diretamente a estrutura: o grafo D passado como parâmetro é modificado diretamente, e ao menos um arco de entrada de `node` terá custo reduzido zero após a execução. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, pois cada operação percorre os arcos de entrada uma única vez.

Normalização por vértice: custos reduzidos

Normaliza os pesos dos arcos que entram em `node`, subtraindo de cada uma o menor peso de entrada. Modifica o grafo D no próprio objeto.

```
1 def reduce_weights(D: nx.DiGraph, node: str):
2     predecessors = list(D.in_edges(node, data="w"))
3     yv = min((w for _, _, w in predecessors))
4     D[u][node]["w"] -= yv
```

A Figura 16 ilustra o funcionamento da normalização:

Antes: $y(v) = \min\{5, 3, 7\} = 3$ **Depois:** ao menos uma entrada tem custo 0

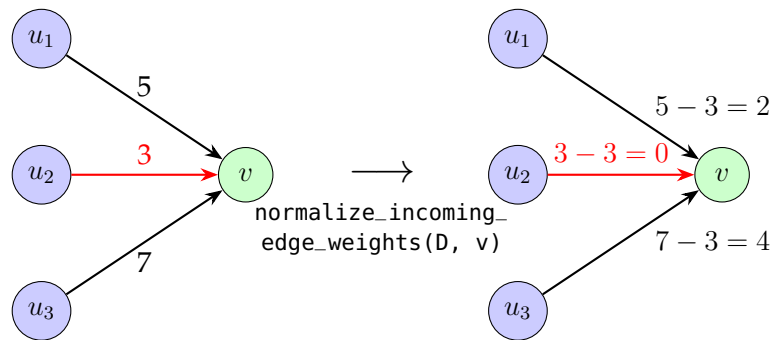


Figura 16 – Exemplo de normalização de custos reduzidos. À esquerda, vértice v com três arcos de entrada (pesos 5, 3 e 7). À direita, após aplicar `reduce_weights(D, v)`: o menor peso $y(v) = 3$ é subtraído de todas as entradas, resultando em custos reduzidos 2, 0 e 4. O arco (u_2, v) (em vermelho) tem custo zero e será selecionado para A_0 .

Observe que as diferenças relativas são preservadas: o arco mais caro permanece 4 unidades acima da mais barata, e a intermediária mantém sua posição relativa. Como cada r -arborescência contém exatamente um arco entrando em cada vértice não-raiz, a soma $\sum_{w \neq r} y(w)$ é constante para qualquer solução, garantindo que a ordem de otimalidade seja preservada.

1.3.3 Construção de A_0 :

Esta função constrói o subdigrafo A_0 selecionando, para cada vértice $v \neq r_0$, um único arco de custo reduzido zero que entra em v .

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo `r0` da raiz. A implementação cria um novo digrafo vazio `A_zero` (linha 2) em vez de modificar D diretamente; essa escolha de criar uma estrutura separada é fundamental porque A_0 é um subgrafo conceitual usado para detecção de ciclos, e preservar D inalterado permite que as operações subsequentes (como contração) trabalhem com o grafo original completo, evitando perda de informação sobre arcos não selecionados que podem ser necessários após reexpansões.

Em seguida, para cada vértice v diferente de `r0` (linhas 3–4), utilizando o método `D.nodes()`, coleta todos os arcos de entrada de v com seus pesos em uma lista e armazena na variável `in_edges` (linha 5); a materialização em lista é necessária porque a subsequente iteração sobre os arcos para encontrar aqueles de peso zero poderia causar problemas se trabalhássemos diretamente com a visão devolvida por `in_edges`, especialmente em cenários de modificação concorrente. Se não houver arcos de entrada, prossegue para o próximo vértice (linhas 6–7) usando `continue`, pois um vértice isolado

ou inacessível não contribui para A_0 e sua ausência será detectada posteriormente como violação das hipóteses de conectividade.

Caso contrário, utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o primeiro predecessor u cujo arco (u, v) tem peso zero (linha 8); a escolha de `next` com gerador em vez de uma busca exaustiva é eficiente porque interrompe a iteração assim que encontra o primeiro arco de custo zero, evitando processamento desnecessário dos arcos restantes (embora teoricamente todos os arcos de custo zero sejam equivalentes, na prática apenas um é necessário para A_0). A função `next` devolve `None` se nenhum arco de peso zero existir, o que teoricamente não deveria ocorrer após a normalização correta (que garante ao menos um arco de custo zero por vértice), mas o tratamento defensivo evita erros em casos degenerados. Se tal arco existir, adiciona-o a A_{zero} com peso zero usando o método `add_edge` (linhas 9–10); a especificação explícita de $w=0$ garante que A_0 contenha apenas arcos de custo reduzido zero, propriedade fundamental para a corretude do algoritmo.

Devolve o digrafo A_{zero} contendo exatamente um arco entrando em cada $v \neq r_0$, todos com custo reduzido zero. O grafo original D não é modificado, preservando o estado para operações futuras. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois cada arco é considerado no máximo uma vez durante a iteração sobre todos os vértices: para cada um dos $n - 1$ vértices não-raiz, examina-se seus arcos de entrada (totalizando no máximo m arcos ao longo de todas as iterações), e para cada vértice a busca por arco de peso zero é interrompida no primeiro match, resultando em tempo linear no tamanho do grafo.

Construção de A_{zero}

Constrói o subdigrafo A_0 a partir do digrafo D , selecionando para cada vértice (exceto a raiz r_0) um arco de custo reduzido zero que entra nele.

```

1 def get_Azero(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     A_zero = nx.DiGraph()
3     for v in D.nodes():
4         if v != r0:
5             in_edges = list(D.in_edges(v, data="w"))
6             u = next((u for u, _, w in in_edges if w == 0), None)
7             if u:
8                 A_zero.add_edge(u, v, w=0)
9     return A_zero

```

A Figura 17 ilustra a construção de A_0 :

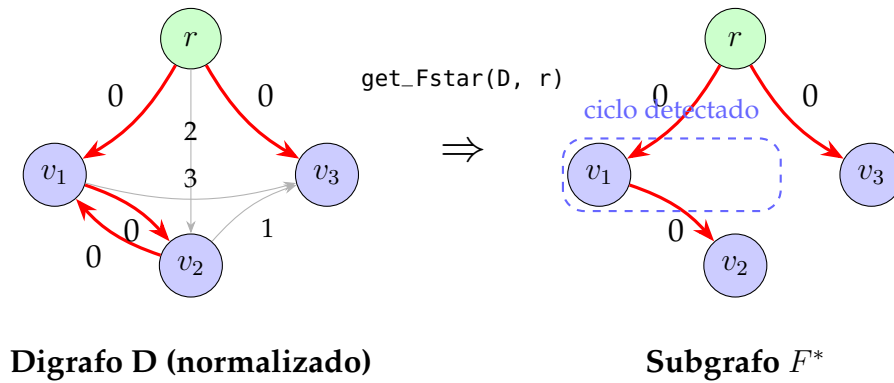


Figura 17 – Exemplo de construção de A_0 a partir de um digrafo normalizado. À esquerda, o digrafo D após normalização, onde cada vértice não-raiz possui ao menos um arco de entrada com custo zero (em vermelho). À direita, o subgrafo A_0 resultante contém apenas os arcos de custo zero selecionados, um por vértice. Note que A_0 pode conter ciclos (como $\{v_1, v_2\}$) que serão tratados nas etapas subsequentes.

A detecção de ciclos é crucial, pois a presença de um ciclo em A_0 indica que a escolha de arcos de custo reduzido zero não formou uma arborescência válida. Esses ciclos precisam ser tratados nas etapas subsequentes do algoritmo.

As funções de normalização por vértice e construção de A_0 juntas implementam o passo 1 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passo 1 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 1: Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.

1.3.4 Detecção de ciclo:

Esta função detecta a presença de um ciclo dirigido em A_0 e devolve um subgrafo que o contém; se A_0 for acíclico, devolve None.

Recebe como entrada um digrafo `A_zero` (objeto `nx.DiGraph`). A implementação utiliza um bloco `try` (linha 2) para capturar exceções caso não haja ciclo; esta escolha de tratamento por exceção é necessária porque a API do NetworkX adota o padrão EAFP (*Easier to Ask for Forgiveness than Permission*), onde `nx.find_cycle` não devolve um valor especial (como None) quando o grafo é acíclico, mas sim lança a exceção `NetworkXNoCycle` para sinalizar a ausência de ciclos.

Em seguida a função inicializa um conjunto vazio `nodes_in_cycle` (linha 3) e emprega a função `nx.find_cycle` do NetworkX (linha 4), que realiza uma busca em profundidade para detectar ciclos. A função `nx.find_cycle` ou lança uma exceção devolve um iterador sobre todos os arcos que compõem esse ciclo. O laço na linha

4 itera sobre esses arcos devolvidos, desempacotando cada uma na forma $(u, v, _)$ (ignorando o terceiro elemento com $_$, que contém metadados de orientação), e para cada arco (u, v) adiciona ambos os vértices ao conjunto `nodes_in_cycle` (linha 5); a escolha de usar conjunto em vez de lista garante que cada vértice seja adicionado apenas uma vez mesmo que o ciclo tenha múltiplos arcos incidentes, e a operação de adição tem complexidade $O(1)$ amortizada.

Após coletar todos os vértices do ciclo, constrói e devolve uma cópia do subgrafo induzido por eles (linha 7); a cópia é necessária porque o método `subgraph` devolve apenas uma visão dinâmica sobre o grafo original.

Se nenhum ciclo existir, a exceção `nx.NetworkXNoCycle` é capturada no bloco `except` (linha 8) e a função devolve `None` (linha 9);

No final, um subgrafo contendo os vértices e arcos do ciclo detectado é devolvido, ou `None` se não houver ciclo. O grafo original `A_zero` não é modificado. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois a DFS visita cada arco no máximo uma vez.

Detecção de ciclo dirigido em A_0

Detecta um ciclo dirigido em A_0 e devolve um subgrafo contendo seus vértices e arcos, ou `None` se for acíclico.

```

1 def find_cycle(A_zero: nx.DiGraph):
2     try:
3         nodes_in_cycle = set()
4         for u, v, _ in nx.find_cycle(A_zero, orientation="original"):
5             nodes_in_cycle.update([u, v])
6         return A_zero.subgraph(nodes_in_cycle).copy()
7     except nx.NetworkXNoCycle:
8         return None

```

A Figura 18 ilustra o processo de detecção de ciclo:

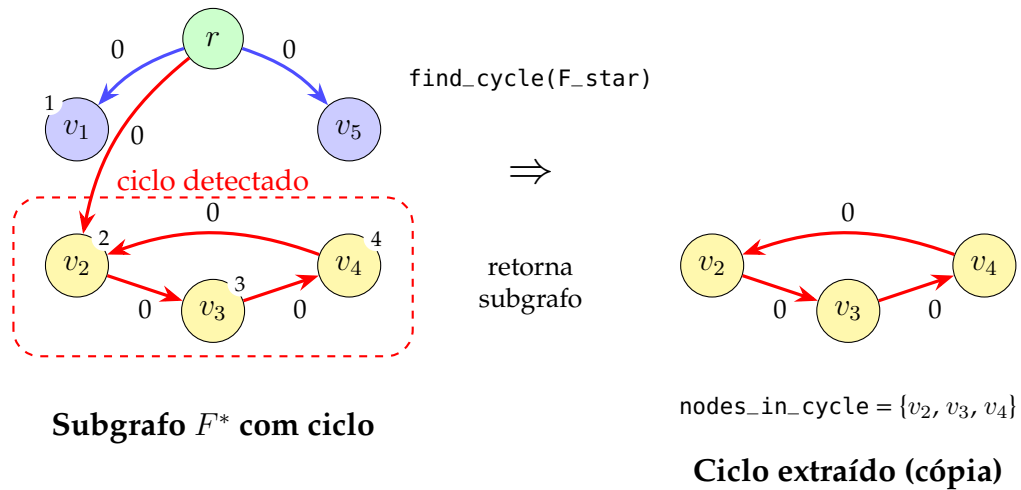


Figura 18 – Exemplo de detecção de ciclo em A_0 . À esquerda, o subgrafo A_0 contém um ciclo formado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ (destacados em amarelo). A DFS percorre o grafo e detecta o ciclo ao encontrar o arco (v_4, v_2) , onde v_2 já está na pilha de recursão. À direita, a função devolve uma cópia do subgrafo induzido pelos vértices do ciclo, contendo apenas os três vértices e os três arcos que formam o ciclo.

Ao detectar um ciclo, a função permite que o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds prossiga para a etapa de contração, onde o ciclo será reduzido a um supervértice, facilitando a resolução do problema no grafo modificado.

1.3.5 Contração de ciclo:

Esta função contrai um ciclo dirigido C em um supervértice x_C , redirecionando arcos incidentes e ajustando custos segundo a regra de custos reduzidos. Devolve dicionários auxiliares para reexpansão.

Recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`), o ciclo C a ser contraído e o rótulo `label` do novo supervértice. A implementação coleta os vértices de C em um conjunto (linha 2) para permitir verificações de pertinência em tempo $O(1)$, essencial dado que essa operação é realizada repetidamente nos laços seguintes. Inicializa `in_to_cycle` (linha 3), um dicionário que tem como chave vértices externos ao ciclo e como valor tuplas (v, w) , onde v é o vértice do ciclo conectado a u e w é o peso do arco (u, v) ; essa estrutura preserva não apenas o peso mínimo, mas também o ponto exato de entrada no ciclo, informação crucial para a reexpansão posterior.

Para cada vértice u no digrafo D (linha 4), se u não pertence ao ciclo (linha 5), identifica o arco de menor peso que sai de u e entra em C (linhas 6–9) usando uma compreensão de gerador: a expressão `((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in cycle_nodes)` itera sobre todos os arcos que saem de u , desempacota cada arco na forma $(_, v, w)$ (ignorando a origem com `_`, capturando o destino v e o peso w),

filtra apenas aquelas cujo destino v pertence ao ciclo, e produz tuplas (v, w) ; a função `min` (linha 6) então seleciona a tupla de menor peso usando `key=lambda x: x[1]` (linha 7) para comparar pelo segundo elemento (o peso), e devolve `None` se não houver arcos (linha 8). A escolha de selecionar apenas o arco de *menor peso* reflete a propriedade fundamental do algoritmo: qualquer solução ótima que conecta um vértice externo ao ciclo contraído usará necessariamente o arco de custo mínimo, pois todas as outras seriam subótimas. Se tal arco existir, armazena em `in_to_cycle` (linhas 9–10).

Em seguida, a implementação itera sobre `in_to_cycle` usando o método `items()`, desempacotando cada entrada na forma $(u, (v, w))$, onde u é o vértice externo e (v, w) é a tupla com o vértice do ciclo e o peso (linhas 11–12). Para cada par, cria um arco de `u` para `label` com peso w , efetivamente redirecionando os arcos de entrada para o supervértice. A separação entre coleta (linhas 4–10) e criação (linhas 11–12) é necessária porque modificar o grafo durante a iteração sobre seus vértices causaria comportamento indefinido; ao coletar primeiro todos os dados em estruturas auxiliares, garantimos que as modificações posteriores sejam seguras.

De forma análoga, constrói o dicionário `out_from_cycle` (linha 13) para mapear arcos que saem do ciclo. Para cada vértice v em D (linha 14), se v não pertence ao ciclo (linha 15), identifica o arco de menor peso que sai de C e entra em v (linhas 16–17) usando uma compreensão de gerador análoga: a expressão `((u, w) for u, w in D.in_edges(v, data="w") if u in cycle_nodes)` itera sobre todos os arcos que entram em v , desempacota cada arco na forma (u, w) (capturando a origem u , ignorando o destino com `_`, e capturando o peso w), filtra apenas aqueles cuja origem u pertence ao ciclo, e produz tuplas (u, w) ; a função `min` seleciona o arco de menor peso pela mesma razão de otimalidade. Se existir, armazena em `out_from_cycle` (linhas 18–19). Depois, itera sobre `out_from_cycle` e cria arcos de `label` para cada vértice v com os respectivos pesos (linhas 20–21). Por fim, remove todos os vértices de C do grafo (linha 22); essa remoção é realizada por último para garantir que todas as operações de consulta (linhas 4–21) tenham acesso aos dados originais antes da modificação estrutural.

Devolve dois dicionários: `in_to_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de entrada no ciclo original, e `out_from_cycle` mapeia vértices externos aos pontos de saída. Esses dicionários são essenciais para a fase de reexpansão, onde será necessário determinar exatamente qual arco interno do ciclo deve ser removido para restaurar a propriedade de arborescência. O digrafo D é modificado sem criar uma cópia: os vértices de C são removidos e substituídos por `label`. A escolha de modificação no próprio objeto (em vez de criar uma cópia) reduz significativamente o uso de memória e o tempo de execução, especialmente em grafos grandes ou com múltiplos níveis de recursão, embora exija atenção cuidadosa ao gerenciamento de referências. A complexidade é $O(m)$, onde m é o número de arcos, pois cada arco incidente ao ciclo é processado uma

vez: os laços nas linhas 4–10 e 14–19 examinam cada arco no máximo uma vez, e as operações de adição (linhas 11–12, 20–21) e remoção (linha 22) têm custo proporcional ao número de arcos afetados.

Contração de ciclo

Contraí o ciclo C em um supervértice $label$, redirecionando arcos incidentes e ajustando custos. Modifica D no próprio objeto e devolve dicionários para reexpansão.

```

1 def contract_cycle(D: nx.DiGraph, C: nx.DiGraph, label: str):
2     cycle_nodes: set[str] = set(C.nodes())
3     in_to_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
4     for u in D.nodes:
5         if u not in cycle_nodes:
6             min_weight_edge_to_cycle = min(
7                 ((v, w) for _, v, w in D.out_edges(u, data="w") if v in
8                     cycle_nodes),
9                 key=lambda x: x[1],
10                default=None,)
11             if min_weight_edge_to_cycle:
12                 in_to_cycle[u] = min_weight_edge_to_cycle
13     for u, (v, w) in in_to_cycle.items():
14         D.add_edge(u, label, w=w)
15     out_from_cycle: dict[str, tuple[str, float]] = {}
16     for v in D.nodes:
17         if v not in cycle_nodes:
18             min_weight_edge_from_cycle = min(
19                 ((u, w) for u, _, w in D.in_edges(v, data="w") if u in
20                     cycle_nodes), key=lambda x: x[1], default=None,)
21             if min_weight_edge_from_cycle:
22                 out_from_cycle[v] = min_weight_edge_from_cycle
23     for v, (u, w) in out_from_cycle.items():
24         D.add_edge(label, v, w=w)
25     D.remove_nodes_from(cycle_nodes)
26     return in_to_cycle, out_from_cycle

```

A Figura 19 ilustra o processo de contração de ciclo:

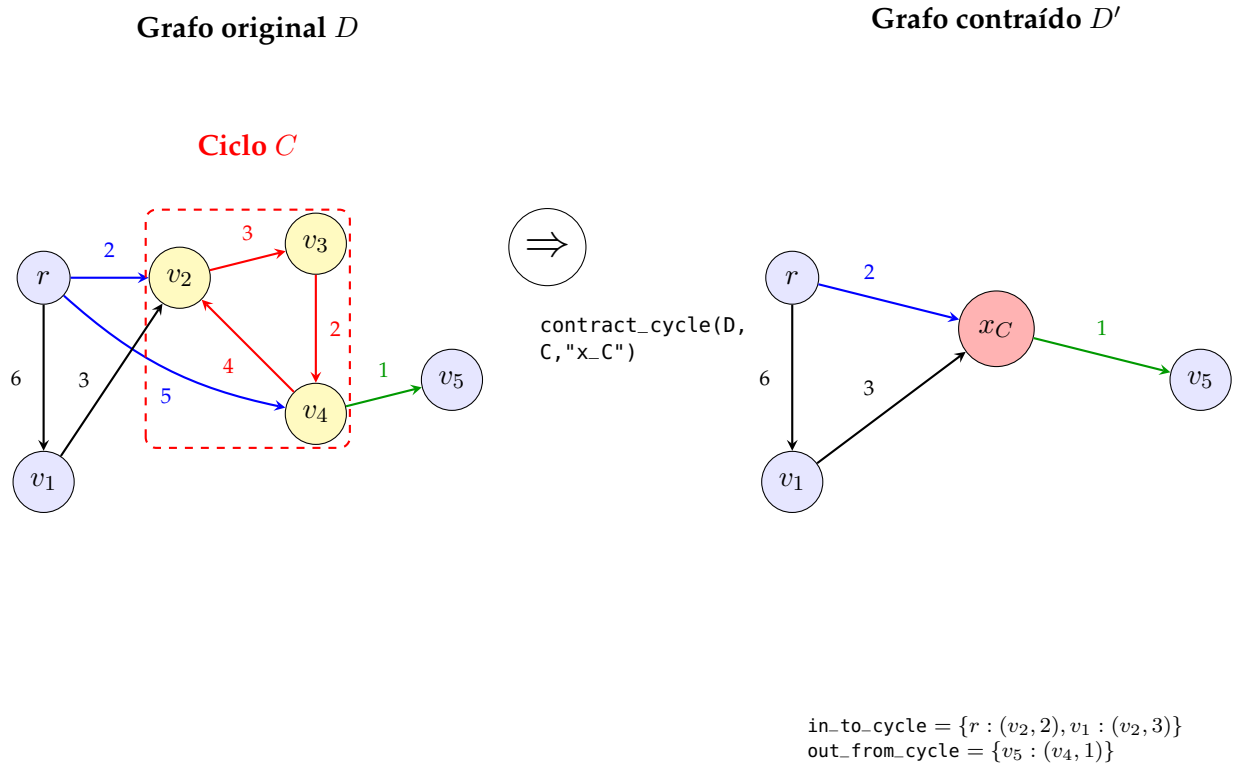


Figura 19 – Exemplo de contração de ciclo. À esquerda, grafo original D com ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ (em amarelo). Vértices externos r , v_1 e v_5 têm arcos conectando ao ciclo: r envia arco para v_2 (peso 2) e v_4 (peso 5); v_4 envia arco para v_5 (peso 1). À direita, após a contração: o ciclo é substituído pelo supervértice x_C (vermelho). Os arcos de entrada são redirecionados: (r, x_C) recebe peso 2 (menor entre 2 e 5). O arco de saída (x_C, v_5) mantém peso 1. Os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle` armazenam os mapeamentos originais para posterior reexpansão.

A função de detecção de ciclo e a de contração juntas implementam os passos 2 e 3 da descrição do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds:

Passos 2 e 3 do Algoritmo de Chu–Liu/Edmonds

Passo 2: Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0 . Por (KLEINBERG; TARDOS, 2006, Obs. 4.36), trata-se de uma r -arborescência de custo mínimo.

Passo 3: Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). **Contração:**

contraia C em um supervértice x_C e defina custos c' por

$$\begin{aligned} c'(u, x_C) &:= c(u, w) - y(w) = c(u, w) - c(a_w) && \text{para } u \notin C, w \in C, \\ c'(x_C, v) &:= c(w, v) && \text{para } w \in C, v \notin C, \end{aligned}$$

descartando laços em x_C e permitindo paralelos. Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.

1.3.6 Remoção de arcos que entram na raiz:

Esta função remove todos os arcos que entram no vértice raiz r_0 , garantindo que a raiz não tenha predecessores. A remoção é necessária porque, por definição, uma *r-arborescência* é uma arborescência enraizada em r_0 onde todo vértice $v \neq r_0$ deve ser alcançável a partir de r_0 , mas a própria raiz não pode ter predecessores (grau de entrada zero). Se o grafo original contiver arcos entrando em r_0 , esses arcos violariam a definição de arborescência enraizada e poderiam criar ciclos envolvendo a raiz, o que tornaria impossível obter uma estrutura válida. Além disso, a presença de arcos entrando na raiz interfere na normalização: ao tentar normalizar custos de entrada para r_0 , criaríamos custos reduzidos artificiais que não fazem sentido no contexto do problema, já que nenhuma solução válida pode incluir tais arcos. Portanto, esta função atua como um passo de pré-processamento essencial que prepara o grafo para os passos subsequentes do algoritmo.

A escolha de implementar esta operação como uma função auxiliar separada (em vez de incluí-la apenas inline na função principal) segue princípios de design de software: (1) *modularidade*, encapsulando uma responsabilidade específica e bem definida (remover entradas na raiz) em uma unidade testável independente; (2) *reutilização*, permitindo que outras partes do código ou implementações alternativas possam chamar esta operação quando necessário sem duplicar lógica; (3) *clareza semântica*, dando um nome descritivo (`remove_edges_to_r0`) que documenta a intenção da operação no ponto de chamada, tornando a função principal mais legível ao abstrair detalhes de implementação; e (4) *facilidade de teste*, possibilitando escrever testes unitários focados exclusivamente nesta operação de pré-processamento, verificando casos extremos (como grafos onde a raiz já não tem predecessores ou onde todos os arcos entram na raiz) sem precisar testar toda a complexidade do algoritmo recursivo.

Em detalhes, ela recebe como entrada um digrafo D (objeto `nx.DiGraph`) e o rótulo r_0 da raiz. A implementação armazena em uma lista todos os arcos que entram em r_0 usando o método `in_edges` (linha 2). Se a lista não estiver vazia (linha 3), remove todos esses arcos usando o método `remove_edges_from` (linha 4). Este método da biblioteca `NetworkX` recebe como parâmetro uma lista de tuplas representando arcos na forma

(u, v) e remove cada uma delas do grafo. A operação é realizada em lote: NetworkX itera sobre a lista fornecida e, para cada tupla (u, v) , remove o arco correspondente da estrutura interna de adjacência. Se algum arco especificado não existir no grafo, ele é silenciosamente ignorado sem gerar erro. A complexidade de `remove_edges_from` é $O(k)$, onde k é o número de arcos na lista de entrada, pois cada remoção individual tem custo $O(1)$ em média devido ao uso de dicionários aninhados para armazenar arcos.

Por fim, a função devolve o grafo `D` atualizado no próprio objeto com todos os arcos de entrada em `r0` são removidos (linha 5). A complexidade total da função é $O(\deg^-(r_0))$, pois a operação coleta e remove cada arco de entrada uma única vez.

Remoção de arcos que entram na raiz

Remove todos os arcos que entram na raiz `r0`, modificando `D` ao invés de criar uma cópia e devolve o grafo atualizado.

```
1 def remove_edges_to_r0(D: nx.DiGraph, r0: str):
2     in_edges = list(D.in_edges(r0))
3     if in_edges:
4         D.remove_edges_from(in_edges)
5     return D
```

1.3.7 Remoção de arco interno:

Esta função é invocada durante a fase de reexpansão do ciclo contraído, após a chamada recursiva devolver com a arborescência ótima T' do grafo contraído. Quando o supervértice x_C é expandido de volta para o ciclo original C , um arco externo (u, v) é adicionado conectando um vértice externo u a um vértice v dentro do ciclo. Como o ciclo C originalmente continha exatamente um arco entrando em cada um de seus vértices (formando um ciclo fechado), e agora v recebe um arco adicional vindo do exterior, esse vértice teria grau de entrada 2, violando a propriedade fundamental de arborescência (cada vértice não-raiz deve ter exatamente uma entrada). Para restaurar essa propriedade, a função remove o arco interno que anteriormente entrava em v , mantendo apenas o novo arco externo. Essa remoção "quebra" o ciclo no ponto de entrada, transformando-o em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore.

A função recebe como entrada o subgrafo do ciclo C (objeto `nx.DiGraph`) e o vértice de entrada v . A implementação utiliza uma compreensão de gerador combinada com `next` para encontrar o predecessor de v dentro do ciclo (linha 2): a expressão `(u for u, _ in C.in_edges(v))` itera sobre os arcos de entrada de v , extraindo apenas o vértice origem u (ignorando metadados com `_`), e `next` devolve o primeiro (e teoricamente

único) predecessor. Em seguida, remove o arco (predecessor, v) do ciclo usando o método `remove_edge` (linha 3).

A função modifica diretamente o subgrafo C e não devolve valor. A complexidade é $O(\deg^-(v))$, dominada pela operação de busca dos arcos de entrada, embora em ciclos simples isso seja tipicamente $O(1)$ pois cada vértice tem exatamente um predecessor.

Remover arco interno na reexpansão	
<i>Remove o arco interno que entra no vértice de entrada v do ciclo C durante a reexpansão, pois v passa a receber um arco externo, e manter ambos violaria a propriedade de arborescência.</i>	
<pre> 1 def remove_internal_edge_to_cycle_entry(C: nx.DiGraph, v): 2 predecessor = next((u for u, _ in C.in_edges(v)), None) 3 C.remove_edge(predecessor, v) </pre>	

A Figura 20 ilustra o objetivo da função:

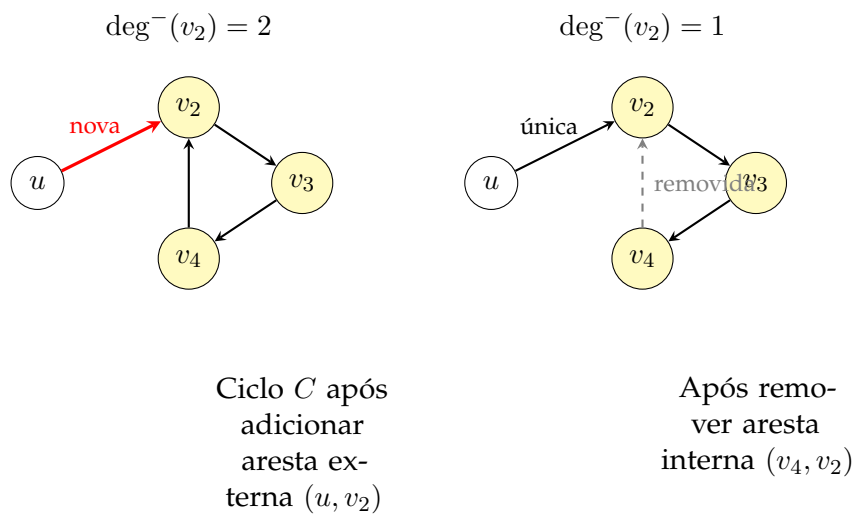


Figura 20 – Remoção de arco interno durante reexpansão. À esquerda, ciclo $C = \{v_2, v_3, v_4\}$ após adicionar arco externo (u, v_2) vindouro da arborescência T' : o vértice v_2 tem grau de entrada 2 (arco externo vermelho de u e arco interno do ciclo vindo de v_4), violando a propriedade de arborescência. À direita, após remover o arco interno (v_4, v_2) : o vértice v_2 passa a ter grau de entrada 1, o ciclo é "quebrado" no ponto de entrada, transformando-se em um caminho que se integra corretamente à estrutura de árvore. O arco removido é mostrado tracejado em cinza.

1.3.8 Procedimento principal (recursivo):

Esta função implementa o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds de forma recursiva, orquestrando todas as funções auxiliares descritas anteriormente. Recebe como entrada

um digrafo ponderado D (objeto `nx.DiGraph`), o vértice raiz r_0 , e um parâmetro `level` (padrão 0) usado para rotular supervértices em níveis recursivos distintos.

A implementação segue a estrutura do algoritmo:

Preservação do grafo original (linha 2):

Cria uma cópia $D_copy = D.copy()$ para preservar os pesos originais. Como as operações de normalização e contração modificam os pesos dos arcos diretamente, a cópia é necessária para restaurar os custos corretos na arborescência final. Complexidade: $O(m + n)$.

Normalização e construção de A_0 (linhas 3–6):

Itera sobre todos os vértices não-raiz (linhas 3–5), chamando `reduce_weights(D_copy, v)` para cada um. Após normalizar todos os vértices, constrói A_0 (linha 6) chamando `get_Azero(D_copy, r0)`, que seleciona um arco de custo reduzido zero entrando em cada vértice não-raiz.

Verificação de aciclicidade — caso base (linhas 7–10):

Verifica se A_0 é uma arborescência válida usando `nx.is_arborescence(A_zero)` (linha 7). Se sim, restaura os pesos originais de D para cada arco de A_0 (linhas 8–9) e devolve A_zero como solução (linha 10). A função `nx.is_arborescence` testa conectividade, aciclicidade e grau de entrada correto simultaneamente.

Contração e resolução recursiva — caso recursivo (linhas 11–16):

Caso A_0 contenha um ciclo, detecta C chamando `find_cycle(A_zero)` (linha 12). Cria um rótulo único `contracted_label = f"contracted_{level}"` para o supervértice (linha 13). Contrai o ciclo chamando `contract_cycle(D_copy, C, contracted_label)` (linhas 14–15), que modifica D_copy diretamente criando o digrafo contraído D' e devolve os dicionários `in_to_cycle` e `out_from_cycle`. Chama-se recursivamente (linha 16) com `chuliu(D_copy, r0, level+1)`, obtendo F' .

Reexpansão do ciclo contraído (linhas 17–30):

Identifica o arco externo que entra no supervértice em F' (linha 17) e extrai o vértice externo u (linha 18). Consulta $v = in_to_cycle[u]$ para determinar o vértice do ciclo que recebe a conexão (linha 19). Remove o arco interno que entrava em v chamando `remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)` (linha 20), quebrando o


```

19     v, _ = in_to_cycle[u]
20     remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v)
21     F_prime.add_edge(u, v)
22     for u_c, v_c in C.edges:
23         F_prime.add_edge(u_c, v_c)
24     for _, z, _ in F_prime.out_edges(contracted_label, data=True):
25         u_cycle, _ = out_from_cycle[z]
26         F_prime.add_edge(u_cycle, z)
27     F_prime.remove_node(contract_label)
28     for u, v in F_prime.edges:
29         F_prime[u][v]["w"] = D[u][v]["w"]
30     return F_prime

```

A seguir, ilustramos o funcionamento do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo de teste. Mostramos o grafo original, os principais passos do algoritmo e a arborescência final encontrada.

1.3.8.1 Exemplo de execução do algoritmo

A seguir, demonstramos a execução completa do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds em um grafo exemplo, ilustrando cada fase do processo: normalização, construção de A_0 , detecção de ciclos, contração, resolução recursiva e reexpansão.

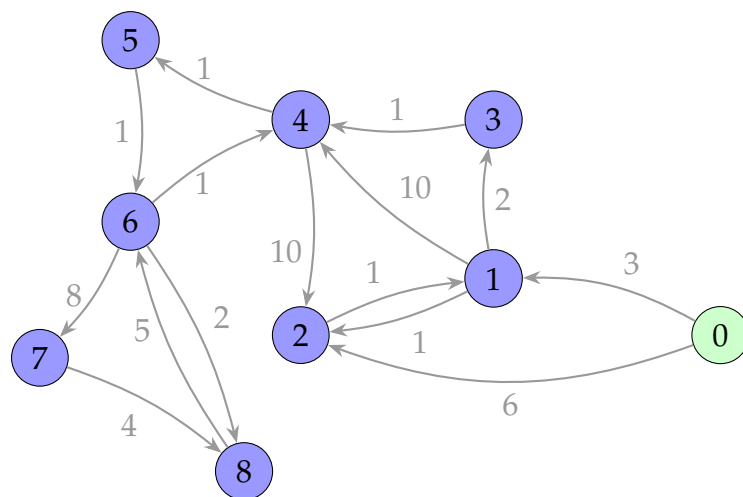


Figura 21 – Grafo direcionado ponderado inicial com raiz no vértice 0. O grafo contém 9 vértices e múltiplos arcos com pesos variados. O primeiro passo do algoritmo seria remover arcos que entram na raiz, porém não há nenhum neste caso, logo não existe necessidade de alterar o grafo.

O primeiro passo do nosso algoritmo seria remover os arcos que entram na raiz (vértice 0), porém não há nenhum nesse caso, logo não existe a necessidade de alterar o

grafo.

O próximo passo é normalizar os pesos dos arcos de entrada para cada vértice. Nessa etapa, para cada vértice v (exceto a raiz), o algoritmo encontra o arco de menor peso que entra em v e subtrai esse menor peso de todos os arcos que entram em v (isso serve para zerar o peso do arco mínimo de entrada em cada vértice).

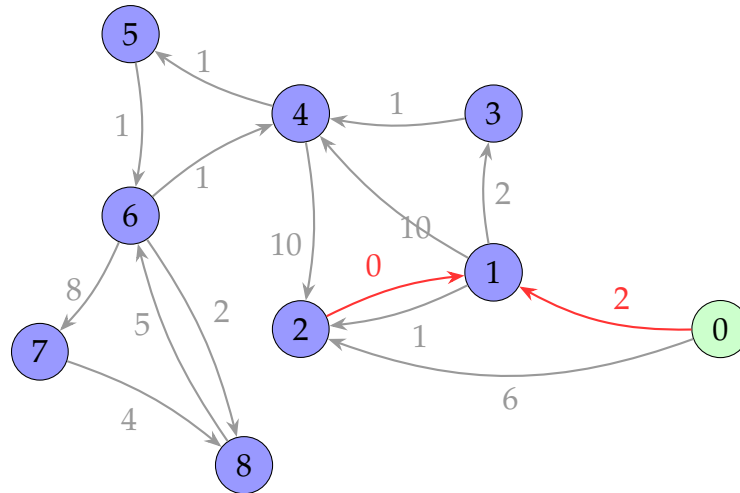


Figura 22 – Normalização parcial dos arcos de entrada para o vértice 1. Os arcos de entrada são $(0 \rightarrow 1)$ com peso original 3 e $(2 \rightarrow 1)$ com peso original 1. Elegendo o arco $(2 \rightarrow 1)$ como o de menor peso (peso mínimo = 1), subtraímos este valor de todos os arcos de entrada: $(0 \rightarrow 1)$ passa de peso 3 para 2, e $(2 \rightarrow 1)$ passa de peso 1 para 0 (destacadas em vermelho). Esse processo é repetido para todos os demais vértices.

Com os pesos normalizados, o próximo passo é construir A_0 : para isso, selecionamos para cada vértice o arco de custo reduzido zero de entrada. Detectamos um ciclo em A_0 , formado pelos vértices $\{1, 2\}$. Portanto, precisamos contrair esse ciclo em um supervértice $n * 0$.

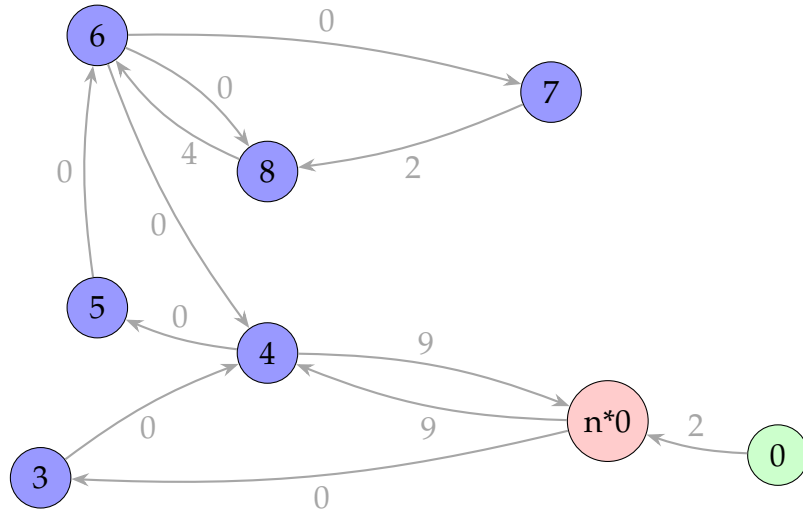


Figura 23 – Grafo contraído após detecção do ciclo $C = \{1, 2\}$ em A_0 . O ciclo foi contraído no supervértice $n * 0$ (destacado em vermelho). Os arcos que entravam ou saíam do ciclo foram redirecionados para o supervértice, com custos ajustados segundo as fórmulas $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ para arcos de entrada e $c'(x_C, v) := c(w, v)$ para arcos de saída.

Agora, repetimos o processo recursivamente no grafo contraído até obter uma arborescência válida.

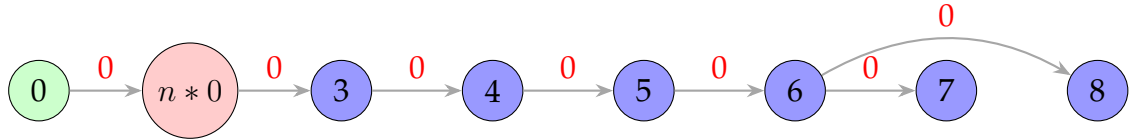


Figura 24 – Arborescência ótima F' obtida no grafo contraído. todos os arcos selecionados têm custo reduzido 0 (destacados em vermelho), e o grafo forma uma arborescência válida enraizada em 0: cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente um arco de entrada, não há ciclos, e todos os vértices são alcançáveis a partir da raiz. Como F' é acíclico, alcançamos o caso base da recursão.

Após validarmos que A_0 não possui mais ciclos e forma uma arborescência, iniciamos o processo de reexpansão do ciclo contraído para obter a arborescência final no grafo original. Adicionamos o arco de entrada ao ciclo $(0, 1)$, os arcos internos do ciclo modificado $(1, 2)$, e os arcos de saída $(1, 3)$, chegando a uma arborescência válida.

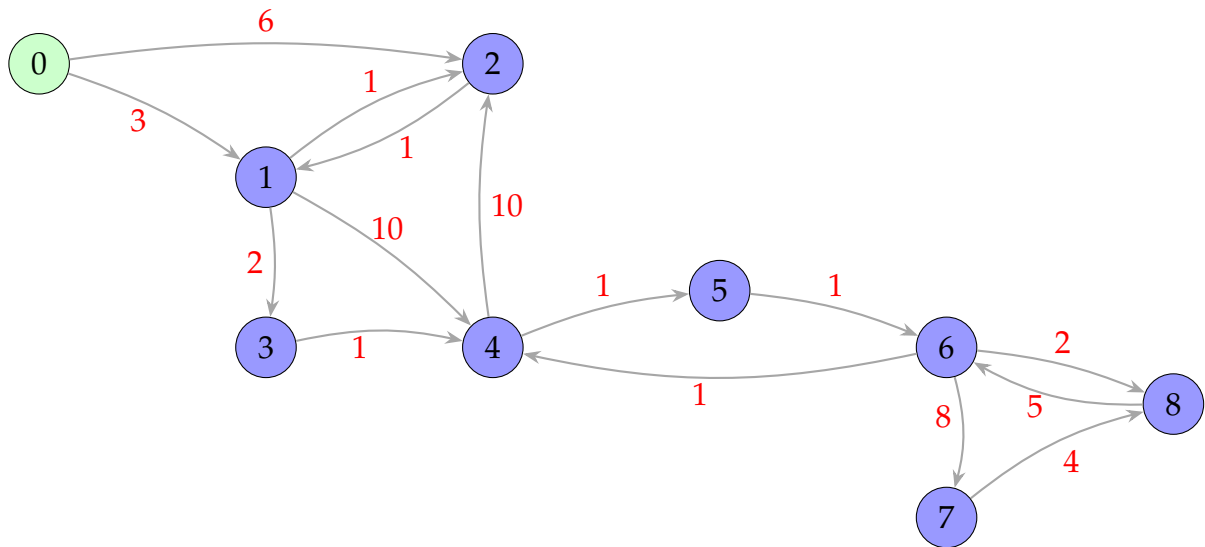


Figura 25 – Arborescência ótima final no grafo original com pesos restaurados. O supervértice $n * 0$ foi expandido de volta para os vértices 1 e 2, com o arco externo $(0, 1)$ escolhido pela solução recursiva conectando ao ciclo. O arco interno $(2, 1)$ do ciclo original foi removido para manter a propriedade de arborescência ($\deg^-(v) = 1$). O resultado é uma 0-arborescência de custo mínimo com exatamente 8 arcos, onde cada vértice não-raiz tem grau de entrada 1 e todos são alcançáveis a partir da raiz 0.

1.3.9 Correspondência entre teoria e implementação

A implementação em Python segue fielmente os cinco passos da descrição teórica do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds apresentada na Seção anterior. A tabela abaixo estabelece o paralelo direto entre cada passo teórico e sua realização no código:

Descrição Teórica	Implementação Python
Passo 1: Normalização e construção de A_0 Para cada $v \neq r$, escolha $a_v \in \arg \min_{(u,v) \in A} c(u, v)$. Defina $y(v) := c(a_v)$ e $A_0 := \{a_v : v \neq r\}$.	Linhas 3–6: <pre>for v in D_copy.nodes: reduce_weights(D_copy, v) A_zero = get_Azero(D_copy, r0)</pre> Calcula $y(v)$ e cria custos reduzidos, depois constrói A_0 selecionando arcos de custo zero.
Passo 2: Verificação de aciclicidade (caso base) Se (V, A_0) é acíclico, devolva A_0 . Por Obs. 4.36 de (KLEINBERG; TARDOS, 2006), trata-se de uma r -arborescência de custo mínimo.	Linhas 7–10: <pre>if nx.is_arborescence(A_zero): [restaura pesos originais] return A_zero</pre> Testa conectividade, aciclicidade e grau de entrada correto simultaneamente.
Passo 3: Contração de ciclo Caso contrário, seja C um ciclo dirigido de A_0 (com $r \notin C$). Contraia C em supervértice x_C e defina custos c' por: $c'(u, x_C) := c(u, w) - y(w)$ $c'(x_C, v) := c(w, v)$ Denote o digrafo contraído por $D' = (V', A')$.	Linhas 11–15: <pre>C = find_cycle(A_zero) label = f"contracted_{level}" in_to_cycle, out_from_cycle = contract_cycle(D_copy, C, label)</pre> Implementa as fórmulas de ajuste de custos e modifica D_copy para criar D' .
Passo 4: Resolução recursiva Resolva recursivamente em D' , obtendo arborescência ótima F' .	Linha 16: <pre>F_prime = chuliu(D_copy, r0, level+1)</pre> Chamada recursiva resolve o problema no grafo contraído.
Passo 5: Reexpansão Expanda x_C para o ciclo original C . Se $(u, x_C) \in F'$, adicione (u, v) onde v é o vértice do ciclo mapeado por u , remova o arco interno entrando em v , e reintegre demais arcos de C . Restaure custos originais.	Linhas 17–30: <pre>v = in_to_cycle[u] remove_internal_edge_to_cycle_entry(C, v) F_prime.add_edge(u, v) F_prime.add_edges_from(C.edges) [processa saídas, remove supervértice] [restaura pesos originais]</pre>

Tabela 1 – Correspondência entre os cinco passos teóricos do algoritmo de Chu–Liu/Edmonds e sua implementação em Python. Cada linha da coluna direita mostra a tradução direta dos conceitos matemáticos da coluna esquerda em operações concretas sobre grafos.

Esta correspondência demonstra que a implementação não é uma aproximação ou interpretação livre da teoria, mas uma tentativa de traduzir fielmente a descrição teórica. As funções auxiliares (`reduce_weights`, `get_Azero`, `find_cycle`, `contract_cycle`, `remove_internal_edge_to_cycle_entry`) encapsulam exatamente as operações descritas na formulação teórica, preservando as propriedades de correção e complexidade do algoritmo original.

1.3.10 Transição para a abordagem primal-dual

Embora o algoritmo de Chu–Liu/Edmonds seja elegante e eficiente, sua mecânica operacional — normalizar custos, selecionar mínimos, contrair ciclos — pode parecer um conjunto de heurísticas bem-sucedidas sem uma justificativa teórica unificadora aparente. Por que escolher a melhor entrada para cada vértice garante otimalidade global após o tratamento de ciclos? A resposta reside na *dualidade em programação linear*.

No capítulo seguinte, revisitaremos o mesmo problema sob uma ótica primal–dual em duas fases, proposta por András Frank. Essa perspectiva organiza a normalização via potenciais³ $y(\cdot)$, explica os custos reduzidos e introduz a noção de cortes apertados (família laminar) como guias das contrações. Veremos como a mesma mecânica operacional (normalizar \rightarrow contrair \rightarrow expandir) emerge de condições duais que também sugerem otimizações e generalizações.

³ No contexto primal–dual, “potenciais” são valores escalares $y(v)$ atribuídos aos vértices para definir custos reduzidos $c'(u, v) = c(u, v) - y(v)$. Ajustar y desloca uniformemente os custos dos arcos que entram em v , sem mudar a otimalidade global: preserva a ordem relativa entre entradas e torna “apertadas” (custo reduzido zero) as candidatas corretas, habilitando contrações e uma prova de corretude via cortes apertados.

Referências

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. *Algorithm Design*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2006. Citado 4 vezes nas páginas [21](#), [22](#), [32](#) e [42](#).

SCHRIJVER, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [22](#).

Anexos

ANEXO A – Anexo A

Conteúdo do anexo A.