

# Algoritmos para r-Arborescências Geradoras Mínimas em Digrafos: Uma Aplicação Web Interativa

Lorena Sampaio, Samira Haddad

Orientador: Prof. Dr. Mário Leston Rey

Universidade Federal do ABC  
Centro de Matemática, Computação e Cognição

30 de novembro de 2025

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds
- 3 Algoritmo de András Frank
- 4 Resultados Experimentais
- 5 Didática do Abstrato
- 6 Conclusões
- 7 Aplicação Web
- 8 Conclusões

# O Problema

Encontrar uma  $r$ -Arborescência Geradora de Peso Mínimo

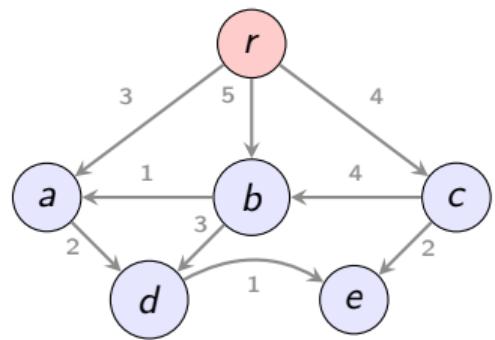
Dado um  $r$ -digrafo ponderado  $(D, w, r)$ :

- Encontrar uma  $r$ -arborescência geradora de peso mínimo de  $D$

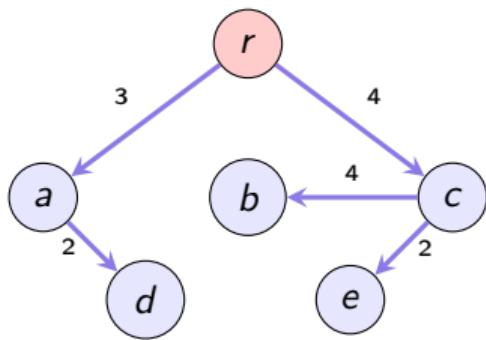
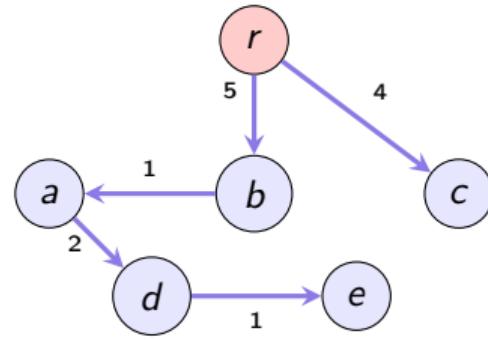
Algoritmos estudados:

- ① Chu-Liu-Edmonds (1965-67)
- ② András Frank (1981-2014)

# Exemplo: $r$ -Arborescência Geradora Mínima



Digrafo Original

 $r$ -Arborescência Geradora

Geradora Mínima

Peso: 16

Peso: 13

# Intermissão

## Algoritmo de Chu-Liu-Edmonds

# Chu-Liu-Edmonds

Algoritmo Recursivo: dado um r-digrafo ponderado  $(D, w, r)$

`chu-liu-edmonds( $(D, w, r)$ )`:

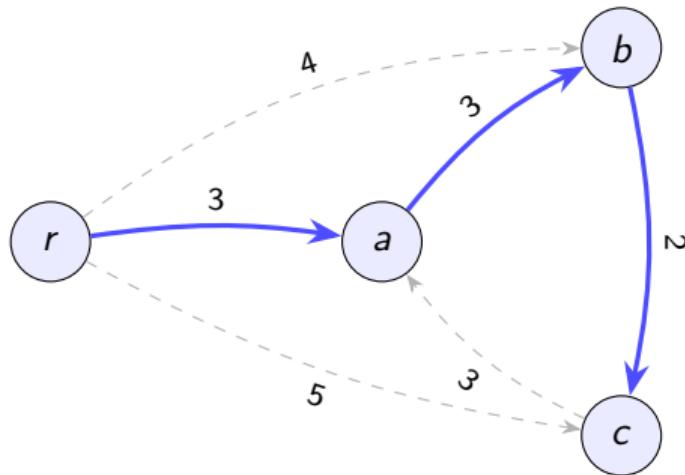
- ① **Reduzir pesos:** para cada vértice  $v \neq r$ , subtrair  $\lambda(v) = \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$
- ② **Construir  $D_0$ :** escolhendo um arco  $a_v$  de peso reduzido zero para cada  $v \neq r$
- ③ **Verificar:** se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência  $\Rightarrow$  devolver  $D_0$   
Caso contrário:
- ④ **Contração:** encontrar ciclo  $C$  em  $D_0$  e contrair
- ⑤ **Chamada recursiva:** Seja  $D' = D/C$  e  $w' = w_\lambda/C$ . Calcular  $T' = \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$
- ⑥ **Devolver:** expandir( $T'$ )

# Exemplo: Escolha Gulosa

## Definição:

Para cada  $v \neq r$ , escolher um arco  $a_v$  de peso mínimo que entra em  $v$ :

$$T := \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\}$$



## Propriedade:

Se  $T$  é uma  $r$ -arborescência, então  $T$  tem peso mínimo.

## Resultado

$T = \{(r, a), (a, b), (a, c)\}$  é uma  $r$ -arborescência geradora mínima!

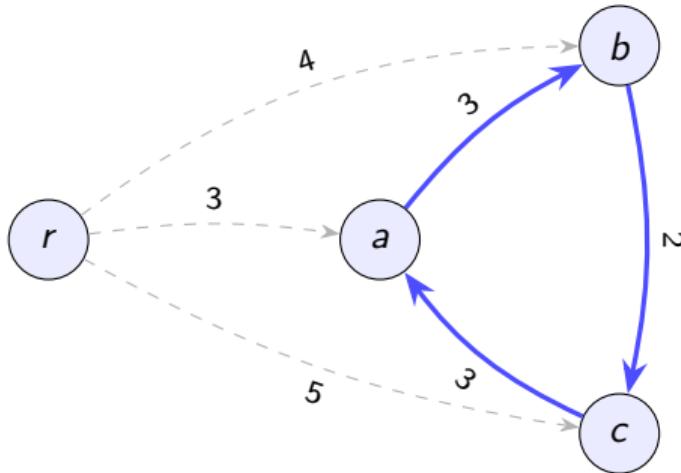
# E quando a escolha gulosa falha?

## Problema:

A escolha gulosa pode produzir um conjunto  $T$  que *não* é uma  $r$ -arborescência.

## Exemplo:

Os arcos de peso mínimo formam um ciclo  $(a, b, c, a)$  sem alcançar  $r$ .



Arcos azuis formam um **ciclo!**

# Passo 1: Redução de Pesos

## Definição:

Para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ :

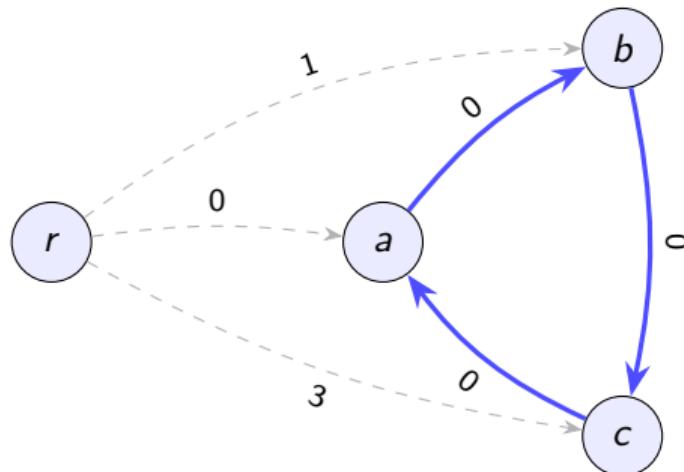
$$\lambda(v) := \min\{w(a) : a \in \delta^-(v)\}$$

Peso  $\lambda$ -reduzido:

$$w_\lambda(uv) := w(uv) - \lambda(v)$$

## Valores de $\lambda$ :

- $\lambda(a) = 3, \lambda(b) = 3, \lambda(c) = 2$



Arcos do ciclo têm peso zero!

Arcos com peso zero são candidatos para  $A_0$  em  $D_0$ .

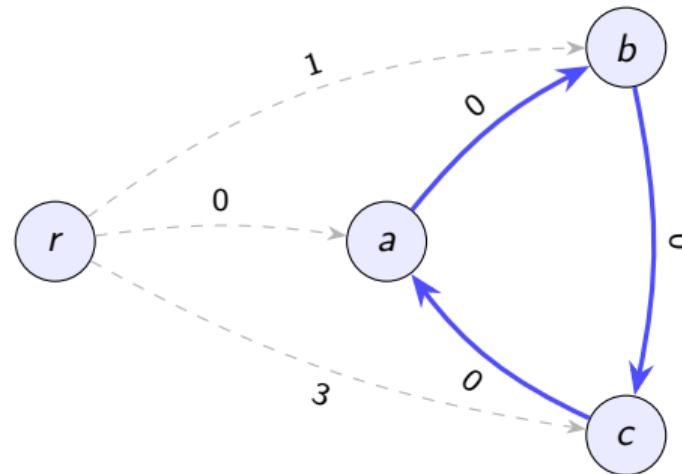
Passo 2: Construção de  $D_0$ 

**Formação de  $D_0$ :** Para cada  $v \neq r$ , escolher um arco  $a_v \in \delta^-(v)$  com  $w_\lambda(a_v) = 0$  formar:

$$D_0 := (V, \{a_v : v \in V \setminus \{r\}\})$$

**Arcos escolhidos:**

- $(a, b)$
- $(b, c)$
- $(c, a)$



Passo 3: Verificação de  $D_0$ 

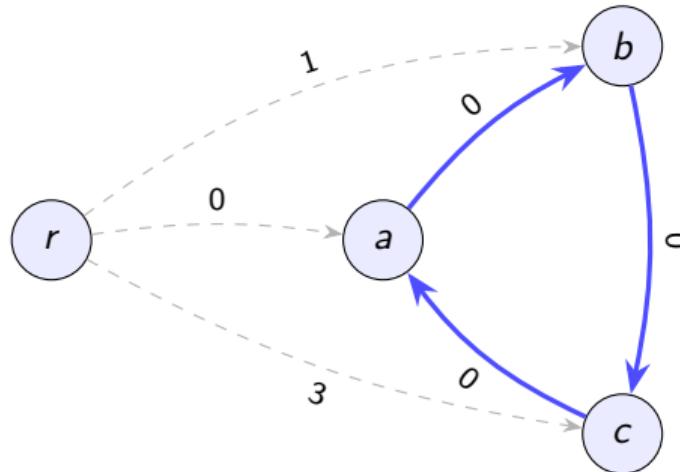
**Verificar:**

Se  $D_0$  é uma  $r$ -arborescência  $\Rightarrow$  **devolver**  $D_0$

**Caso contrário:**

$D_0$  contém algum ciclo  $C$ .

$\Rightarrow$  **prosseguir** para os passos 4 e 5.



$D_0$  não é uma  $r$ -arborescência!

Neste exemplo,  $A_0 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$  não forma uma  $r$ -arborescência pois contém o ciclo  $(a, b, c, a)$ .

## Passo 4: Contração de Ciclos

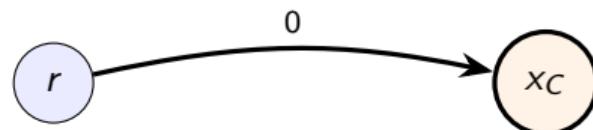
### Operação:

Contrair ciclo  $C$  em supervértice  $x_C$ .

**Novo problema:**  $(D', w', r)$  onde:

- $D' := D/C \mapsto x_C$
- $w' := w_\lambda/C \mapsto x_C$

O arco de  $D'$  que entra em  $x_C$  deve corresponder ao arco de  $D$  que entra em algum vértice de  $C$



Digrafo contraído  $D'$  - podem ter arcos saindo de  $x_C$  em  $D'$ .

### Propriedade

Uma solução ótima em  $D'$  pode ser expandida para uma solução ótima em  $D$ .

## Passo 5: Chamada Recursiva

**Novo problema:**  $(D', w', r)$

**Chamada recursiva:**

$$T' := \text{chu-liu-edmonds}(D', w', r)$$



*r*-arborescência ótima em  $D'$

**Resultado:**  $T'$  é uma  $r$ -arborescência geradora mínima em  $(D', w')$

# Passo 6: Reexpansão da Solução

**Dado:**  $T'$  ótima em  $(D', w')$

**Construir:**  $T$  ótima em  $(D, w)$

**Procedimento:**

- ① Seja  $uv$  o arco de  $D$  correspondente ao arco  $ux_C$  de  $T'$
- ② Incluir  $uv$  em  $T$
- ③ Incluir todos os arcos de  $C$  exceto aquele que entra em  $v$



**Resultado:**  $T$  é uma  $r$ -arborescência geradora mínima

$r$ -arborescência final no digrafo original

# Complexidade do Algoritmo

## Análise de Complexidade:

- Cada chamada recursiva reduz o número de vértices em pelo menos 1
- No pior caso, pode haver até  $O(n)$  chamadas recursivas
- Cada chamada envolve operações de redução de pesos, construção de  $D_0$ , detecção de ciclos e contração, cada uma com complexidade  $O(m)$

## Complexidade Total:

$$O(n \cdot m)$$

onde  $n$  é o número de vértices e  $m$  é o número de arcos no digrafo original.

# Intermissão

## Algoritmo de András Frank

# Algoritmo de András Frank

## Abordagem em Duas Fases

**Fase I (Fulkerson):** Construir cobertura de  $r$ -conjuntos via redução de pesos

**Fase II (Frank):** Extrair  $r$ -arborescência geradora da cobertura

### Objetivo da Fase I:

Construir uma sequência  $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  tal que:

- $F := \{f_i : i \in [k]\}$  é uma **cobertura de  $r$ -conjuntos**
- A sequência  $(R_i, \lambda_i)_{i \in [k]}$  é  **$w$ -disjunta**

### Objetivo da Fase II:

Extrair  $r$ -arborescência geradora mínima usando  $F$  e a propriedade  $w$ -disjunta.

# Fase I: Conceitos Fundamentais

## Coleção Laminar:

Uma coleção  $\mathcal{L}$  de conjuntos é **laminar** se, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{L}$ :

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset$$

## Sequência $w$ -disjunta:

Uma sequência  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é  **$w$ -disjunta** se:

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \leq w(a) \quad \forall a \in A(D)$$

O peso  $w(a)$  limita a soma das multiplicidades  $\lambda_i$  sobre os conjuntos que  $a$  entra.

# Fase I: $r$ -conjunto Minimal

$r$ -conjunto minimal não coberto por  $F$

Um  $r$ -conjunto  $R$  é **minimal não coberto por  $F$**  se:

- $F$  não entra em  $R$  (i.e.,  $F \cap \delta^-(R) = \emptyset$ )
- Para todo  $\emptyset \subset R' \subset R$ , existe arco de  $F$  que entra em  $R'$

**Propriedade importante:**

Se  $S$  é uma fonte de  $\mathcal{C}(D_0)$  com  $r \notin S$ , então  $S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $A(D_0)$ .

# Fase I: Condições de Optimalidade

Seja  $F$  uma cobertura de  $r$ -conjuntos e  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  uma sequência  $w$ -disjunta.

Se  $w(F) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i$ , então valem as **condições de optimalidade**:

$$\forall a \in F : w(a) = \sum_{i \in [k]} \lambda_i [a \in \delta^-(R_i)] \quad (\text{CO1})$$

$$\forall i \in [k] : \varrho_F(R_i) = 1 \quad (\text{CO2})$$

## Consequência

Se  $F$  é uma  $r$ -arborescência geradora e as condições valem, então  $F$  tem peso mínimo e a sequência tem valor máximo.

# Fase I: Objetivo

**Construir uma sequência  $((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  que satisfaz:**

- ①  $\{f_i : i \in [k]\}$  é uma **cobertura de  $r$ -conjuntos** de  $D$
- ②  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma **sequência  $w$ -disjunta**
- ③  $\forall j \in [k] : \sum_{i \in [k]} \lambda_i [f_j \in \delta^-(R_i)] = w(f_j)$  (CO1)

**Interpretação:**

- A Fase I constrói uma cobertura  $F$  que satisfaz a condição de otimalidade (CO1)
- Cada arco  $f_j \in F$  tem peso "totalmente explicado" pelos  $\lambda_i$
- A coleção  $\{R_i\}$  é laminar e os  $\lambda_i$  respeitam os pesos dos arcos

# Fase I: Algoritmo de Fulkerson

## Processo iterativo

Dado: um  $r$ -digafo ponderado  $(D, w, r)$

**1 Inicializar:**

- $c := w$  (pesos correntes)
- $\sigma := \epsilon$  (sequência vazia)
- $F := \emptyset$  (conjunto de arcos selecionados)

**2 Enquanto** existir fonte  $R$  em  $\mathcal{C}(D_0)$  com  $r \notin R$ :

- Calcular  $\lambda := \min\{c(a) : a \in \delta^-(R)\}$
- Selecionar  $f \in \delta^-(R)$  com  $c(f) = \lambda$
- $\sigma := \sigma \cdot (f, R, \lambda)$
- $F := F \cup \{f\}$
- $c := c - \lambda 1_{\delta^-(R)}$  (reduzir pesos)
- $D_0 := (V, F)$  (atualizar digrafo auxiliar)

**3 Devolver:**  $\sigma$

# Fase I: Invariante do Algoritmo

Em cada iteração, a sequência  $\sigma = ((f_i, R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  satisfaz:

- ①  $c = w - \sum_{i \in [k]} \lambda_i 1_{\delta^-}(R_i)$  (pesos reduzidos)
- ②  $\forall i \in [k] : f_i$  entra em  $R_i$
- ③  $\forall i \in [k], \forall j \in [i) : f_j$  não entra em  $R_i$  (prioridade)
- ④  $\{R_i : i \in [k]\}$  é uma **coleção laminar** de  $r$ -conjuntos
- ⑤  $((R_i, \lambda_i))_{i \in [k]}$  é uma sequência  $w$ -disjunta
- ⑥  $\forall i \in [k] : c(f_i) = 0$  (peso reduzido zero)

A laminaridade garante estrutura hierárquica; a condição (6) garante a optimalidade.

# Fase I: Encontrando $r$ -conjuntos Minimais

## Como encontrar um $r$ -conjunto minimal não coberto?

Seja  $D_0 := (V, F)$  onde  $F = \{f_i : i \in [k]\}$ .

- ① Calcular a condensação  $\mathcal{C}(D_0)$
- ② Identificar componentes fortemente conexas (CFCs)
- ③ Encontrar uma fonte  $S$  em  $\mathcal{C}(D_0)$  tal que  $r \notin S$

## Proposição

Toda fonte  $S$  de  $\mathcal{C}(D_0)$  com  $r \notin S$  é um  $r$ -conjunto minimal não coberto por  $F$ .

**Complexidade:** identificação de CFCs em  $O(|A|)$  usando Kosaraju.

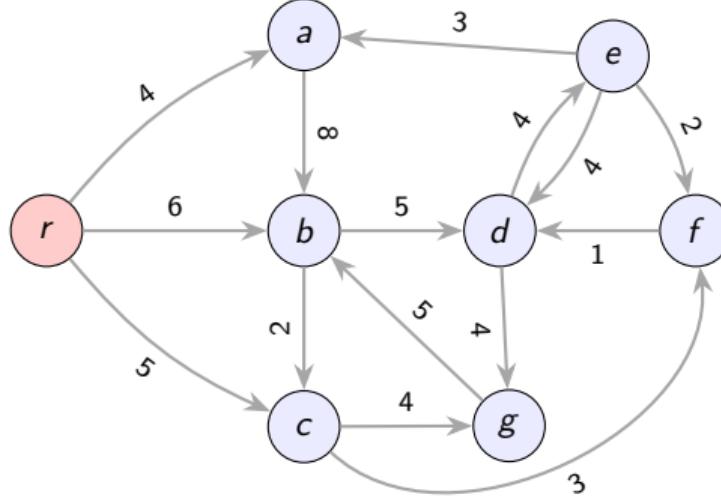
# Exemplo: Digrafo Inicial

Digrafo ponderado  $(D, w, r)$ :

- Vértices:  $\{r, a, b, c, d, e, f, g\}$
- Raiz:  $r$

Pesos dos arcos:

- $(r, a) : 4, (r, b) : 6, (r, c) : 5$
- $(a, b) : 8, (b, c) : 2, (b, d) : 5$
- $(c, g) : 4, (c, f) : 3, (d, g) : 4$
- $(d, e) : 4, (e, d) : 4, (e, a) : 3$
- $(e, f) : 2, (f, d) : 1$



## Problema

Aplicar o algoritmo de András Frank para encontrar a  $r$ -arborescência geradora de peso mínimo.

# Fase I: Iteração 1 - Encontrar $r$ -conjunto Minimal

Estado inicial:

- $F = \emptyset$  (nenhum arco selecionado)
- $D_0 = (V, \emptyset)$
- $\mathcal{C}(D_0)$  tem 8 fontes

Fontes que são  $r$ -conjuntos:

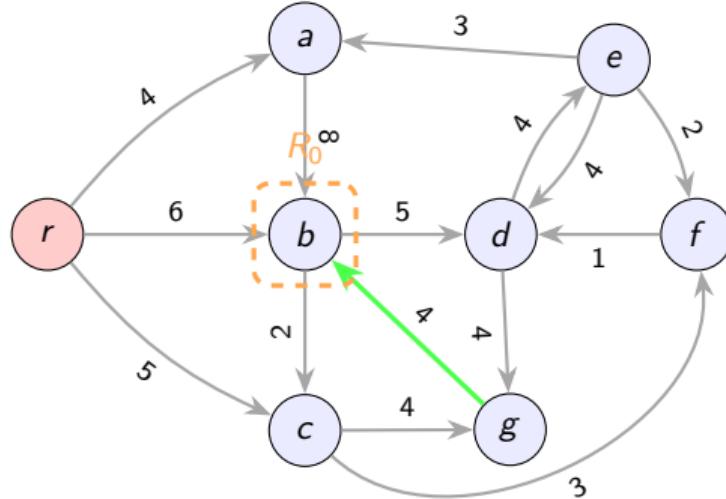
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$

Escolha:

$$R_0 = \{b\} \text{ (minimal)}$$

Arcos que entram em  $\{b\}$ :

- $(r, b) : 6$
- $(g, b) : 5 \leftarrow \text{mínimo}$
- $(a, b) : 8$



$$\lambda_0 = 5,$$

$$f_0 = (g, b)$$

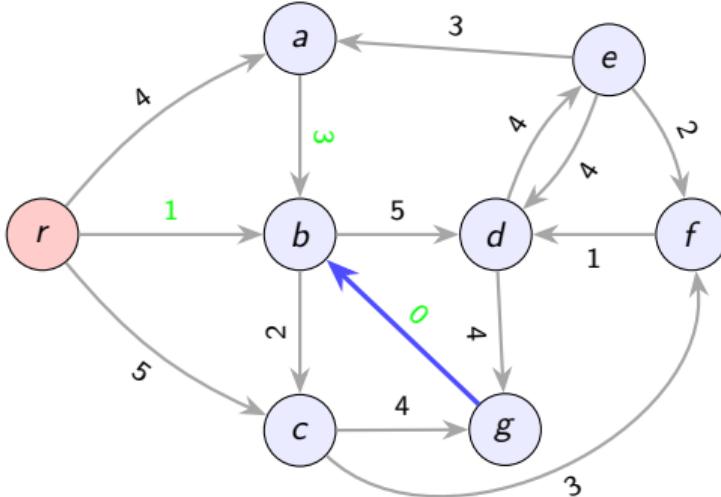
# Fase I: Iteração 2 - Redução de Pesos

## Atualização:

- $\sigma = [(f_0, R_0, \lambda_0)]$
- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, \{(r, a)\})$

## Redução de pesos:

- $c(r, b) = 6 - 5 = 1 \checkmark$
- $c(g, b) = 5 - 5 = 0 \checkmark$
- $c(a, b) = 8 - 5 = 3 \checkmark$



azul tem peso zero

Arco em

## Observação

Pesos não são reduzidos para garantir que  $\sigma$  seja  $w$ -disjunta

# Fase I: Iteração 3 - Redução de Pesos

Atualização:

- $F = \{(r, a)\}$
- $D_0 = (V, F)$

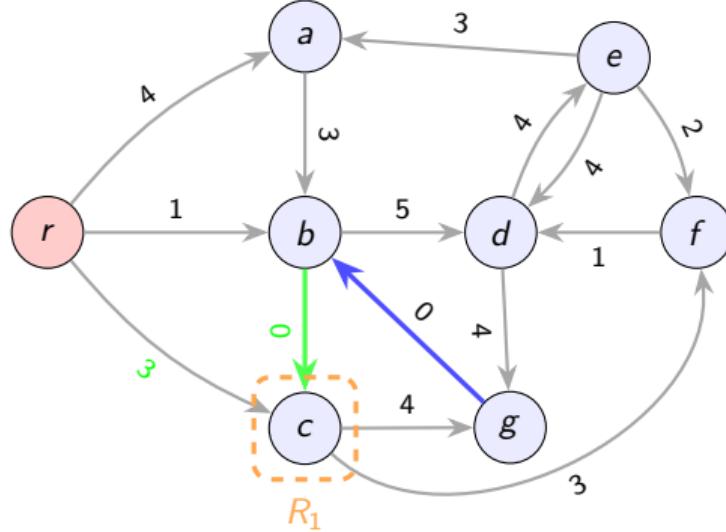
Escolha:  $R_1 = \{c\}$

Redução:

- $(r, c) : 5, (b, c) : 2 \leftarrow \text{mínimo: } 2$
- $c(r, c) = 5 - 2 = 3, c(b, c) = 2 - 2 = 0$

$\mathcal{C}(D_0)$  com  $F = \{(g, b), (b, c)\}$ :

- CFCs:  
 $\{r\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$
- Fontes em  $D_0$ :  $\{r\}, \{b\}$



azul tem peso zero

Arco em

# Fase I: Iteração 4 - Redução de Pesos

Estado:  $F = \{(g, b), (b, c)\}$

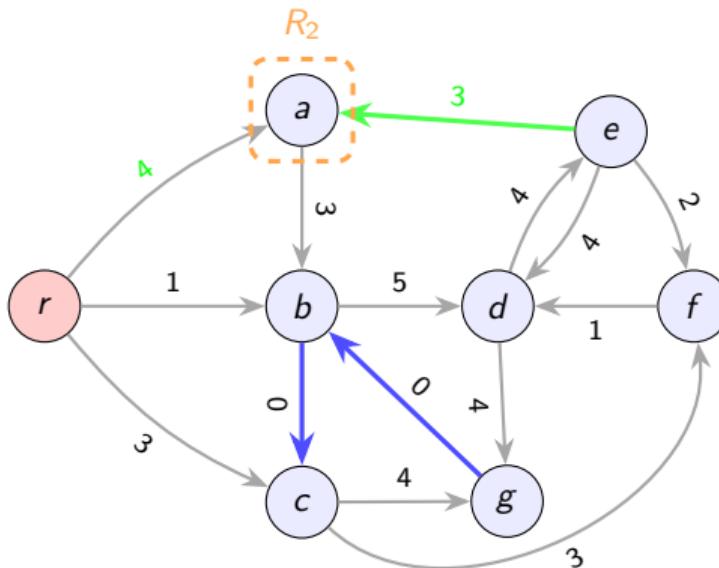
Escolha:  $R_2 = \{a\}$

Arcos que entram em  $\{a\}$ :

- $(r, a) : 4$
- $(e, a) : 3 \leftarrow \text{mínimo}$

Seleção:

- $\lambda_2 = 3$
- $f_2 = (e, a)$



# Intermissão

## Chu-Liu-Edmonds vs András Frank

# Comparação de Desempenho

Experimentos: 2000 digrafos aleatórios,  $|V| \in [101, 4996]$

Algoritmo	Tempo Mediano	Tempo Médio
Chu-Liu-Edmonds	0,25 s	0,58 s
Frank Fase I	8,93 s	12,40 s
Frank Fase II (lista)	0,98 s	1,34 s
Frank Fase II (heap)	<b>0,016 s</b>	<b>0,020 s</b>

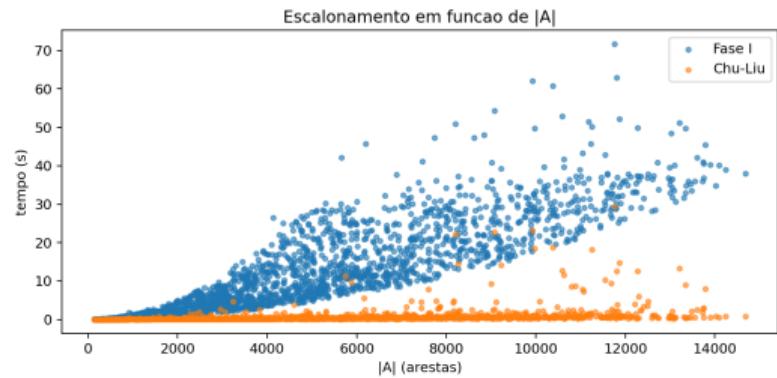
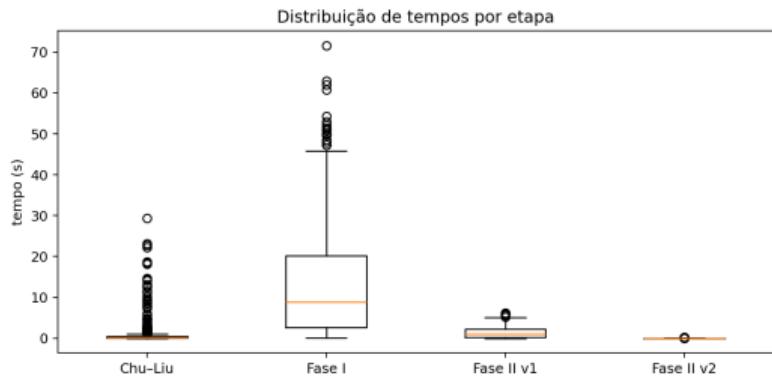
## Speedup Fase II

Heap vs Lista: aceleração de **58,12 vezes** (mediana)

# Escalonamento e Consumo de Memória

## Escalonamento temporal:

- Tempo cresce linearmente com o número de arestas
- Fase I de Frank domina o tempo total
- Fase II (heap) é residual e muito rápida



# Principais Resultados

- **Corretude validada:** pesos idênticos em todas as instâncias
- **Chu-Liu-Edmonds** mais rápido para construção direta
  - Mediana: 0,25 s vs 8,93 s (Fase I Frank)
- **Otimização heap** fundamental na Fase II
  - Speedup: 58× (mediana), 61× (média)
- **Comportamento prático** muito melhor que limites teóricos
  - Contrações: mediana 2 (limite  $O(n)$ )
  - Memória modesta: 11,5 MB

# Conclusões dos Experimentos

- Equivalência teórica e prática dos algoritmos confirmada
- Chu-Liu/Edmonds é mais eficiente
- Fase I de Frank é o gargalo computacional
- Heap na Fase II traz ganhos práticos expressivos
- Algoritmos são escaláveis e viáveis para grandes digrafos

# Intermissão

# Didática do Abstrato

# Fundamentos Cognitivos e Didáticos

## Desafios do Ensino de Matemática Abstrata

- Conhecimento abstrato exige transitar entre registros: intuitivo, visual, simbólico e formal.
- **Carga cognitiva:**
  - Intrínseca: complexidade dos conceitos e pré-requisitos.
  - Extrínseca: forma de apresentação e coordenação entre texto, fórmulas e figuras.
  - Pertinente: esforço dedicado à organização dos esquemas mentais.
- Combinar representações verbais e visuais reduz sobrecarga e favorece integração semântica.

# Desafios na Ensino de Algoritmos de Grafos

## Três Eixos de Dificuldade

- ① **Decisões locais vs. coerência global:** Escolhas localmente ótimas podem gerar ciclos, dificultando a compreensão da solução global.
- ② **Contração e expansão:** Transitar entre grafo original, condensado e reexpansão exige rastreabilidade e clareza sobre o que muda e o que permanece.
- ③ **Relação com a teoria primal-dual:** Dificuldade em conectar ações operacionais do algoritmo com fundamentos teóricos e certificados de optimização.

**Solução:** Visualização e interação bem projetadas facilitam a integração entre prática e teoria.

# O Ecossistema de Ferramentas para Ensino de Grafos

## Categorias de Ferramentas Digitais

- **Diagramas programáveis:** Visualização estável e integrada ao texto matemático (*Graphviz*, *TikZ*).
- **Exploração e edição de grafos:** Manipulação gráfica e análise estrutural (*Gephi*, *yEd*, *Cytoscape*).
- **Visualização de algoritmos:** Animações e explicações dinâmicas (*VisuAlgo*).
- **Ambientes programáveis:** Integração de código, texto e visualização para exemplos reproduzíveis (*Jupyter*, *NetworkX*).

Nenhuma ferramenta cobre todos os aspectos didáticos de forma integrada. A aplicação proposta busca preencher essa lacuna.

# Objetivos da Ferramenta Didática

- Facilitar a compreensão dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank
- Permitir aos usuários interagir com grafos e observar o funcionamento dos algoritmos
- Fornecer feedback imediato sobre as operações realizadas
- Ser acessível via navegador web, sem necessidade de instalação

# Intermissão



## Aplicação Web

# Aplicação web

Ferramenta web interativa para ensino de algoritmos de arborescências dirigidas, permitindo visualização passo a passo, edição livre de grafos e exportação de resultados, com arquitetura modular e foco didático.

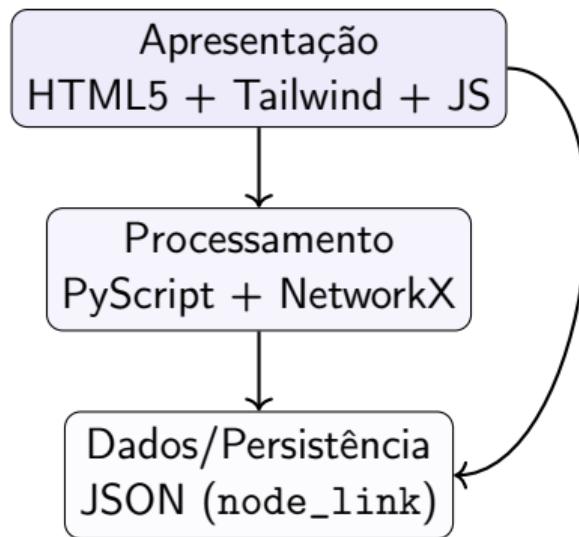
## Módulos principais:

- **Visualização Algorítmica:** Páginas para execução passo a passo dos algoritmos Chu-Liu-Edmonds e András Frank.
- **Modelagem Livre:** Editor sandbox para desenhar, testar e exportar grafos arbitrários.
- **Disseminação Científica:** Página informativa sobre o projeto e a dissertação.

# Arquitetura da Aplicação

## Estrutura em três camadas:

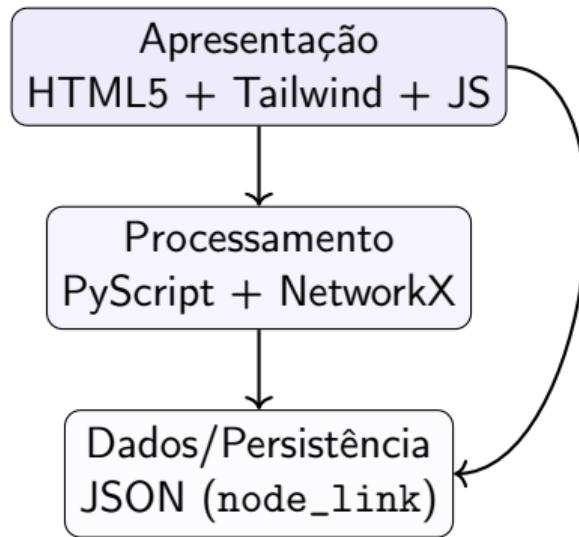
- **Apresentação:** Interface construída em HTML5, estilizada com Tailwind CSS e dinamizada por JavaScript.
- **Processamento (PyScript):** Executa algoritmos em Python (NetworkX) diretamente no navegador, gerando visualizações estáticas com Matplotlib.
- **Dados e Persistência:** Utiliza JSON (node\_link) para serializar grafos, armazenar pesos e permitir exportação/importação entre módulos.



# Arquitetura da Aplicação

## Benefícios:

- Processamento local e rápido
- Facilidade de uso e reproduzibilidade
- Modularidade e extensibilidade



# Princípios de IHC Aplicados



## Fundamentos para o Design da Ferramenta

O desenvolvimento da aplicação web foi guiado por oito princípios de Interação Humano-Computador (IHC), integrando heurísticas de usabilidade e teorias de aprendizagem:

- **Usabilidade:** Interface limpa, controles claros e navegação intuitiva.
- **Eficiência cognitiva:** Redução da carga mental, destaque para informações relevantes.
- **Feedback imediato:** Atualização visual e textual em tempo real a cada ação.
- **Engajamento ativo:** Usuário explora, manipula e prediz resultados.
- **Visão geral com detalhe sob demanda**
- **Consistência semântica:** Terminologia e estilos padronizados em toda a interface.
- **Múltiplos registros de representação:** Grafo visual, log textual e parâmetros simbólicos.
- **Prevenção e recuperação de erros**

# Intermissão

# Conclusões

# Contribuições do Trabalho

## 1 Implementação completa de dois algoritmos clássicos

- Chu-Liu-Edmonds: recursivo com contração
- András Frank: duas fases com otimização heap

## 2 Análise experimental detalhada

- 2000 instâncias aleatórias
- Comparação de desempenho e características estruturais

## 3 Aplicação web interativa

- Ferramenta didática para visualização
- Execução passo a passo dos algoritmos
- Design centrado no usuário

# Trabalhos Futuros

## Extensões Possíveis

- Implementação de algoritmos para resolver o problema da r-arborescência inversa geradora mínima
- Análise em grafos com estruturas especiais
- Paralelização dos algoritmos
- Extensão para grafos dinâmicos

## Melhorias na Aplicação

- Modo de edição visual de grafos
- Geração automática de casos de teste
- Exercícios interativos com correção automática
- Integração com plataformas de ensino (Moodle, Jupyter)

# Obrigado!

Perguntas?

<https://github.com/lorenypsum/graph-visualizer>