Inhaltsverzeichnis

1 Deskriptive Statistik (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Gegeben sei die Stichprobe $x = (x_1, .., x_n)$ vom Umfang n mit Werten in $\mathbb{R}$.

$$\overline{x} := \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

heißt Stichproben-Mittel,

$$s_x{}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Stichproben-Varianz, wobei $n \geq 2$

$$s_x := +\sqrt{s_x{}^2}$$

Stichproben-Standaedabweichung und

$$v_x := \frac{s_x}{x}$$

für $x_1, ..., x_n > 0$ heißt Stichproben-Variantionskoeffizient.

Der Stichproben-Median (Zentralwert) von x

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} \text{ ,falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} * (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) \text{ ,falls n gerade} \end{cases}$$

Stichproben -α-Quantil

Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $k := [n * \alpha]$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \begin{cases} x_{(k+1)}\text{,falls } n * \alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} * (x_{(k)} + x_{(k+1)})\text{,sonst} \end{cases}$$

α-getrimmte Stichproben-Mittel(kommt nicht dran)

Sei $\alpha \in [0, 0.5]$ und $k := [n * \alpha]$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \frac{1}{n - 2 * k} * (x_{(k+1)} + ... + x_{(n-k)})$$

das α-getrimmte (gestutzte) Stichproben-Mittel.

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

auch Stochastisches Modell Zufallsexperiment
ist ein Tripel$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

i Grundraum $\Omega \neq \varnothing$

ii Ereignisraum ε

iii Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

$\mathbb{P} : \varepsilon \longleftarrow [0, 1]$ weißt jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu.

Wie berechent man das Wahrscheinlichkeitsmaß?

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) $\mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$,falls $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt (endliche Additivität)

c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \forall A : A \in \mathcal{A} \longleftarrow A^c \in \mathcal{A}$

d) $A \subset B \longleftarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$(Monotonie)

e) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) Wegen $\Omega = A + A^c$ und b) gilt $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.
genauers wird in den Späteren Vorlesung erläutert.

2 Kombinatorik

Erscheint ein Laplace-Modell in einer Situation angemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\text{Anzal der für } A \text{ "günstigen "Fälle}}{\text{Anzal aller mölicen Fälle}}$$

Die Lere vom systematischen Abzlen endlicher "strukturierter "Mengen heißt Kombinatorik.

2.1 Multiplikationsregel (Produktregel)

$$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$$

Beispiele: Wie viele Möglichkeiten ggibt es jeweils?

- Auf der Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 10 Hauptgerichte und 2 Desserts. Wie viele 3-gängige Menüs kann man zusammenstellen? $\Longrightarrow 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$
- Ein roter und ein blauer Würfel werden geworfen.$\Longrightarrow 6 \cdot 6 = 36$
- Bei einem Neuwagen gibt es 8 aufpriespflichtige Zusatzoptionen, die in beliebiger Kombination zu- oder abbestellt werden können.$\Longrightarrow 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^8 = 256$

Wenn es Experminente sind in denen zurückgelegt wird kann die `Produktregel nicht angewendet` werden, da Werte nicht beliebig kombinierbar sind.

2.2 Summenregel

Wenn es mehrere Gruppen mit m_1 bzw. $...m_n$ verschiedenen Werte gibt, die sich gegenseitig ausschließen, dann gibt es insgesamt $m_1 + ... + m_n$ mögliche Werte.

`Beispiel`
Auf der Speisekarte sind als Hauptspeise 10 Fleischgerichte, 4 Fischgerichte und 2 vegetarische Gerichte zur Auswahl. Zusätzlich gibt es 3 Vorspeisen und 5 Desserts zur Auswahl. Wie viele 3 gängige Menüs kann man zusammenstellen?

$$3 \cdot (10 + 4 + 2) \cdot 5 = 240$$

2.3 Permutation u. Kombinationen

Tabelle wird nachgereicht solbald internet

Hier ist:

$$\binom{m}{l} := \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!}(m, l \in \mathbb{N}_0, l \leq m) \tag{1}$$

$$0! = 1 \tag{2}$$

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m. \tag{3}$$

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{4}$$

k-Permutation aus M ohne Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \frac{n!}{(n-k!)} = \binom{n}{k} k!$$

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right]$$

k-Kombination aus M ohne Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \binom{n}{k}$$

k-Kombination aus M mit Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

Wdh?	**Rhf?**	**Anzahl. Möglichkeiten**	**Beispiel**
mit[1]	mit[3]	n^k	k Personen werfen je einen Würfel(also $n = 6$)
ohne[2]	mit[3]	$n!$	Auf wie vielen Arten lassen sich n Objekte sortieren?
ohne[2]	mit[3]	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto "k aus n"mit Ziehungs-Reihenfolge .
ohne[2]	ohne[4]	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	Normales Lotto "k aus n" .
mit[1]	ohne[4]	$\binom{n+k-1}{k}$	k nicht unterscheidbare Würfel werden in einem Würfelbecher geworfen

Tabelle 1: Wann muss welche Formel angewendet werden?

[1]Mehrmals die gleiche Wahhl treffen (**mit Wdh.**)
[3]Es ist wichtig, in welcher Reihenfolge wie endschieden wurde(**mit Reihenf.**)
[2]Jedes Mal eine andere Wahl treffen muss(**o. Wdh.**)
[4]Es ist nur wichtig, wie oft welche Entscheidung getroffen wurde.**o. Reihenf.**

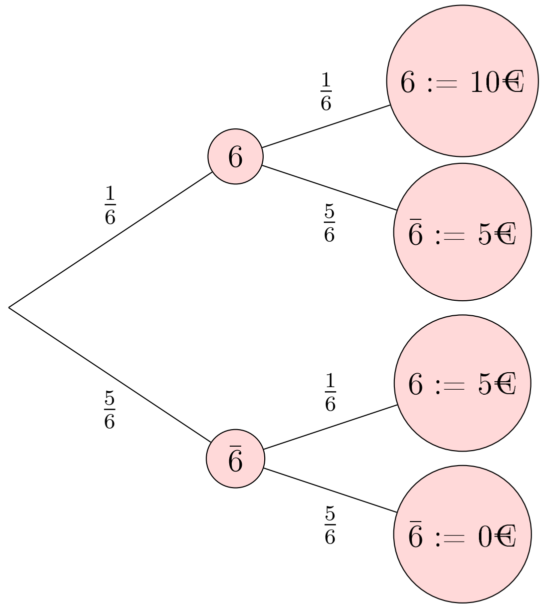
3 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$x = \text{sei} \ldots \qquad x = x_i \qquad P(X = x_i) \tag{5}$$

$\longrightarrow$ Würfel $2\times$ werfen, 6 oder keine 6

$\longrightarrow$ 2×6 10€ Gewinn $2 \times \overline{6}$ 0€ Gewinn sonst 5€ Gewinn.



	x_1	x_2	x_3
$x = x_i$	10	5	0
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Tabelle 2:

3.1 Zähldichte

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$f_x(t) = P(X = t)$$

4 Wichtige diskrete Verteilungen

4.1 Binomialverteilung

Seien n eine natürliche Zahl und $0 \leq p \leq 1$. Die zur Zähldichte

$$k \longrightarrow f(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0, ..., n,$$

gehörende Verteilung heißt `Binomialverteilung` mit den Parametern n und p und wird mit $Bin(n,p)$ bezeichnet.

4.2 Poisson-Verteilung

Ideales Zufallsexperiment mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit p werde n mal in unabhängiger Folge durchführt (n groß). Ist X die zufällige Anzahl von Treffern, so gilt mit $\lambda := n \cdot p$ näherungsweise

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

für $k \leq n$.

Wann es angewendet wird muss sic noc anescaut werden.

5 Wichtige stetige Verteilung

5.1 Normalverteilung

$$P(X \leq x) = F(x) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

Die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)$ der Normalverteilung ist **nicht als geschlossene Funktion** darstellbar(d.h. ohne Integral oder unendliche Reihe). Für die Standardnormalverteilung ist sie tabelliert.

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Sei X $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

Beispiel: Sei$X$ $\mathcal{N}(2,9)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 4) &= F_X(4) - F_X(1) && (6)\\
&= \Phi\left(\frac{4-2}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{9}}\right) && (7)\\
&= \Phi(0.67) - \Phi(-0.33) && (8)\\
&= 0.7486 - (1 - \Phi(0.33)) && (9)\\
&= 0.7486 - (1 - 0.6293) && (10)\\
&= 0.3779 && (11)
\end{aligned}$$

Beispiel: Angenommen das Gewicht G der Studenten der DHBW Karlsruhe sei normalverteilt mit $\mu = 75$kg und $\sigma = 5$kg.

Bestimmen sie $P(69kg < G < 81kg)$ rechnerisch mittels Tabelle.

$$P(69kg < G < 81kg) = \Phi_{75,5^2}(81) - \Phi_{75,5^2}(69)$$

Zwei Studenten werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist es das beide zwischen 69 und 81kg wiegen?

$$P(A) = P(B) = 76.9\% \text{ Ergebnis aus vorheriger Aufgabe} \tag{12}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.769^2 \approx \underline{59.1\%} \tag{13}$$

5.2 Exponential Verteilung

Sollte in der 6 Vorlesung sein habe ich aber noch nicht gefunden.

6 Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten

6.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$Wahrscheinlichkeitsraum,$A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|^1 B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

6.2 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sind nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten des bedingenden Ereignisses bekannt, ergibt sich dei totale Wahrscheinlichkeit von A aus

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

wobei B^c das Gegenereignis zu B bezeichnet.

[1]Der senkrechte Strich "|"steht also für "unter der Bedingung,dass".

6.3 Satz von Bayes

Für den Zusammenhang zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$ ergibt sich direkt aus der Definition und der Multiplikationssatz der Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

.

Dabei kann $P(B)$ im Nenner mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

7 Themenübersicht

Die Themenübersicht ist temporär bis sich das in halts verzeichnis selbst erzeugt Rot heißt klausurrelevant

- Wahrscheinlichkeitsräume Wahrscheinlichkeitsverteilung, Laplace-Modell Satz 3.2
- Kombinatorik
  - Multiplikationsregel
  - Summenregel
  - k-Permutation & k-Kombination mit / ohne Wiederholung
- Zähldichte
- Wichtige diskrete Verteilungen
  - Binomialvertelung
  - Poission-Verteilung
- Wichtige stetige Verteilungen
  - Exponential-Verteilung
  - Normalverteilung
- Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung
  - Bedingte Wahrscheinlichkeits
  - Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
  - Formel von Bayes
- Maßzahlen von Verteilungen

  - Erwartungswert
  - Varianz
  - Standardabweichung Satz 12.3 Satz 12.7
- Parameterschätzung Konfidenzintervall

8 Mitschrieb

8.1 05.04

Themenüberblick

- Deskriptive Statistik
- Merkmalräume und Ereignisse
- Wahrscheinlichkeitsräume
- Kombinatorik
- Zufallsvariablen

Deskriptive Statistik ist Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gibt Regeln für Zufallsexperimente.

absolute/relative Häufigkeit
$H_x(a_j)$:= Anzahl der in der Stichprobe x vorkommenden Stichprobenelement

8.2 03.05

seite 21,22 sind nicht klausurrelevant aufgabe 12,13,14 nicht klausurrelevant

8.3 10.05

9 Aufgaben

9.1 26.04

Dr. Kaori Nagato-Plum
Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie
kaori.nagatou@kit.edu

Statistik

4. Übungsblatt

Aufgabe 10:

An einer E-Mail-Adresse treffen täglich X Spam-Mails ein. Aus Erfahrung weiß man, dass X eine Zufallsvariable ist mit der Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Weiter treffen täglich genau c erwünschte E-Mails ein, $c \in \mathbb{N}$.

a) Drücken Sie Y := „Gesamtzahl der E-Mails, die täglich an der E-Mail-Adresse eintreffen“ mit Hilfe von X und c aus. Welche Werte kann Y annehmen? Bestimmen Sie die Zähldichte von Y.

b) Bestimmen Sie $P(Y \leq 6)$ für den Fall $\lambda = 6$ und $c = 4$.

c) Angenommen, X sei eine Zufallsvariable mit der Binomialverteilung $Bin(100, 0.06)$. Bestimmen Sie wieder $P(Y \leq 6)$ für den Fall $c = 4$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus b), d.h. wie groß ist der prozentuale Unterschied beider Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 11:

Ein Programm soll (auf Korrektheit) getestet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Testdurchlauf ein (Laufzeit-) Fehler gefunden wird, sei $p > 0$. X sei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe ohne Fehler, bis der erste Fehler gefunden wird.

a) Welche Verteilung hat X ?

b) Tabellieren und skizzieren Sie für den Bereich $0 \leq t \leq 6$ die Zähldichte $t \mapsto f_X(t)$ für $p = 0.2$.

c) Das Programm wird so lange getestet, bis ein Fehler gefunden wird, höchstens jedoch c mal. Sei Y dabei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe. Berechnen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen Y für $p = 0.1$ und $c = 7$.

d) $Z := 50 \cdot Y + 100$ seien die zufälligen Kosten für den Test. Berechnen Sie $P(Z \geq 200)$ für $p = 0.1$ und $c = 7$.

e) Wie groß muss $c \in \mathbb{N}$ mindestens sein, damit für den Fall $p = 0.1$ ein Laufzeitfehler mindestens mit Wahrscheinlichkeit 90% gefunden wird?

Nur AUfgabe 10 war klausurrelevant.

Aufgabe 10 a.

Die Zähldichte für Y ist folgend definiert $Y = X + c$. Da X die Werte 0,1... annehmen kann, nimmt Y die Werte c,c+1,c+2,... an.

$$f_Y(k) = P(Y = k) = P(X + c = k) = P(X = k - c)$$

$$f_X(k - c) = \begin{cases} e^{\lambda} * \frac{\lambda^{k-c}}{(k-c)!}, k \geq c \\ 0 \end{cases}$$

Aufgabe 10 b.

Wegen $Y \geq c = 4$ gilt $P(Y \leq 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$

Die verteilung ist

9.2 03.05

Aufgabe 15 a.

Bestimme die Dichtefunktion:

$$F(x) = 1 - e^{-kx}$$

$$f(x) = k * e^{-kx}$$

Für einen bestimmten Bauteil ist k = 1. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer b. höchstens 1 Jahr

$$\implies P(L \leq 1) = F_1(1) - F_1(0) = 1 - e^{-1*1} - 0 = 0.6321$$

c. zwischen 1 und 2 Jahren

$$\implies P(1 \leq L \leq 2) = F_1(2) - F_1(1) = (1 - e^{-1*2}) - 0.6321 = 0.2325$$

d. größer als 2 Jahre ist?

$$\implies P(L \geq 2) = 1 - (F_1(2) - F_1(0)) = 0.13533$$

9.3 10.05

Aufgabe 16 a.

$$Y = N(0, 16)$$

$$X = \tau + Y$$

$$Y \sim N(0, 4^2)$$

$$\implies X = \tau + Y = (\tau/a) + (1/b) * Y$$

$$\sim N(\overbrace{a + b\mu}^{=\tau}, \overbrace{b^2 * \sigma^2}^{=4^2})$$

$$X \sim N(\tau, 4^2)$$

$$\implies P(X \leq 100)$$

b.

$$\Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{\tau}}{\sigma})$$

$$\mu_0 = 1 - (P \leq 100) = p_0 = \Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{100}}{\sigma}) = \Phi(0) = 0.5$$

$$\mu_1 = 1 - (P \leq 102) = p_1 = \Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{102}}{\sigma}) = \Phi(-0.5) = 0.6915$$

c.

Jeder der vier Fühler hat die Wahrscheinlichkeit von 50% anzuschlagen bei der Temperatur 100 Grad es braucht zwei damit der Ventiator angeht.

$$N \sim Bin(4, p) = P(N = k) = \binom{4}{k} * 0.5^k * 0.5^{4-k}$$

$$P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$$

Die Wahrscheinlichkeit das der Ventilator angeht liegt bei 43.75 Prozent.

d.

$$p = 0.6915$$

$$P(N \geq 1)$$

Aufgabe 17

a.

$$\mu = 2 | \sigma = 0.5 | P(X \leq 3)$$

$$P(N > 3) = 1 - (X \leq 3) = 1 - \Phi_{2,0.5^2}(3) = 1 - \Phi(\frac{3-2}{0.5}) = \Phi(2) = 1 - 0.97 = 0.03$$

9.4 24.05

Aufgabe 18 und Aufgabe 20a