Inhaltsverzeichnis

1 Deskriptive Statistik (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Gegeben sei die Stichprobe $x = (x_1, .., x_n)$ vom Umfang n mit Werten in $\mathbb{R}$.

$$\overline{x} := \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

heißt Stichproben-Mittel,

$$s_x{}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Stichproben-Varianz, wobei $n \geq 2$

$$s_x := +\sqrt{s_x{}^2}$$

Stichproben-Standaedabweichung und

$$v_x := \frac{s_x}{x}$$

für $x_1, ..., x_n > 0$ heißt Stichproben-Variantionskoeffizient.

Der Stichproben-Median (Zentralwert) von x

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} \text{ ,falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} * (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) \text{ ,falls n gerade} \end{cases}$$

Stichproben -α-Quantil

Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $k := [n * \alpha]$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \begin{cases} x_{(k+1)}\text{,falls } n * \alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} * (x_{(k)} + x_{(k+1)})\text{,sonst} \end{cases}$$

α-getrimmte Stichproben-Mittel(kommt nicht dran)

Sei $\alpha \in [0, 0.5]$ und $k := [n * \alpha]$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \frac{1}{n-2*k} * (x_{(k+1)} + ... + x_{(n-k)})$$

das α-getrimmte (gestutzte) Stichproben-Mittel.

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

auch Stochastisches Modell Zufallsexperiment
ist ein Tripel$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

i Grundraum $\Omega \neq \varnothing$

ii Ereignisraum ε

iii Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

$\mathbb{P} : \varepsilon \longleftarrow [0,1]$ weißt jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu.

Wie berechent man das Wahrscheinlichkeitsmaß?

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) $\mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$,falls $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt (endliche Additivität)

c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \forall A : A \in \mathcal{A} \longleftarrow A^c \in \mathcal{A}$

d) $A \subset B \longleftarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$(Monotonie)

e) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) Wegen $\Omega = A + A^c$ und b) gilt $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.
genauers wird in den Späteren Vorlesung erläutert.

2 Kombinatorik

Erscheint ein Laplace-Modell in einer Situation angemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\text{Anzal der für } A \text{ "günstigen "Fälle}}{\text{Anzal aller mölicen Fälle}}$$

Die Lere vom systematischen Abzlen endlicher "strukturierter "Mengen heißt Kombinatorik.

2.1 Multiplikationsregel (Produktregel)

$$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$$

Beispiele: Wie viele Möglichkeiten ggibt es jeweils?

- Auf der Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 10 Hauptgerichte und 2 Desserts. Wie viele 3-gängige Menüs kann man zusammenstellen? $\Longrightarrow 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$
- Ein roter und ein blauer Würfel werden geworfen.$\Longrightarrow 6 \cdot 6 = 36$
- Bei einem Neuwagen gibt es 8 aufpriespflichtige Zusatzoptionen, die in beliebiger Kombination zu- oder abbestellt werden können.$\Longrightarrow 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^8 = 256$

Wenn es Experminente sind in denen zurückgelegt wird kann die `Produktregel nicht angewendet` werden, da Werte nicht beliebig kombinierbar sind.

2.2 Summenregel

Wenn es mehrere Gruppen mit m_1 bzw. $...m_n$ verschiedenen Werte gibt, die sich gegenseitig ausschließen, dann gibt es insgesamt $m_1 + ... + m_n$ mögliche Werte.

`Beispiel`
Auf der Speisekarte sind als Hauptspeise 10 Fleischgerichte, 4 Fischgerichte und 2 vegetarische Gerichte zur Auswahl. Zusätzlich gibt es 3 Vorspeisen und 5 Desserts zur Auswahl. Wie viele 3 gängige Menüs kann man zusammenstellen?

$$3 \cdot (10 + 4 + 2) \cdot 5 = 240$$

2.3 Permutation u. Kombinationen

Tabelle wird nachgereicht solbald internet

Hier ist:

$$\binom{m}{l} := \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!} (m, l \in \mathbb{N}_0, l \leq m) \tag{1}$$

$$0! = 1 \tag{2}$$

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m. \tag{3}$$

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{4}$$

k-Permutation aus M ohne Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \frac{n!}{(n-k!)} = \binom{n}{k}k!$$

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right]$$

k-Kombination aus M ohne Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \binom{n}{k}$$

k-Kombination aus M mit Wiederholung

$$\Longrightarrow |\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

Wdh?	**Rhf?**	**Anzahl. Möglichkeiten**	**Beispiel**
mit[1]	mit[3]	n^k	k Personen werfen je einen Würfel(also $n = 6$)
ohne[2]	mit[3]	$n!$	Auf wie vielen Arten lassen sich n Objekte sortieren?
ohne[2]	mit[3]	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto "k aus n"mit Ziehungs-Reihenfolge .
ohne[2]	ohne[4]	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	Normales Lotto "k aus n" .
mit[1]	ohne[4]	$\binom{n+k-1}{k}$	k nicht unterscheidbare Würfel werden in einem Würfelbecher geworfen

Tabelle 1: Wann muss welche Formel angewendet werden?

[1]Mehrmals die gleiche Wahl treffen (**mit Wdh.**)
[3]Es ist wichtig, in welcher Reihenfolge wie endschieden wurde(**mit Reihenf.**)
[2]Jedes Mal eine andere Wahl treffen muss(**o. Wdh.**)
[4]Es ist nur wichtig, wie oft welche Entscheidung getroffen wurde.**o. Reihenf.**

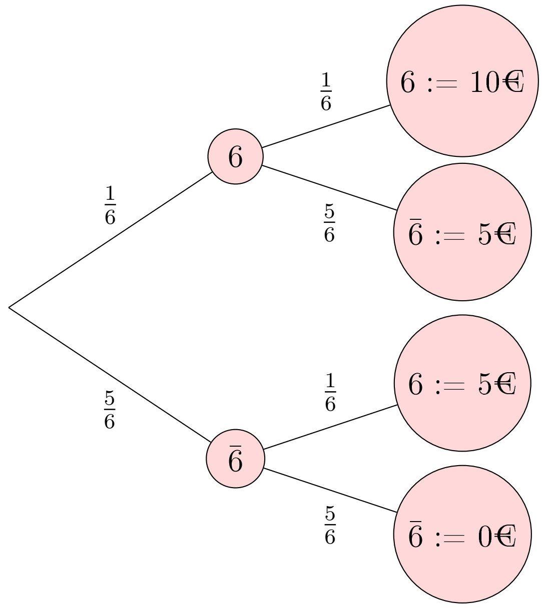
3 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$x = \text{sei ...} \qquad\qquad x = x_i \qquad\qquad P(X = x_i) \tag{5}$$

$\longrightarrow$ Würfel $2\times$ werfen, 6 oder keine 6

$\longrightarrow$ 2×6 10€ Gewinn $2 \times \overline{6}$ 0€ Gewinn sonst 5€ Gewinn.



	x_1	x_2	x_3
$x = x_i$	10	5	0
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Tabelle 2:

3.1 Zähldichte

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$f_x(t) = P(X = t)$$

4 Wichtige diskrete Verteilungen

4.1 Binomialverteilung

Seien n eine natürliche Zahl und $0 \leq p \leq 1$. Die zur Zähldichte

$$k \longrightarrow f(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0, ..., n,$$

gehörende Verteilung heißt `Binomialverteilung` mit den Parametern n und p und wird mit $Bin(n,p)$ bezeichnet.

4.2 Poisson-Verteilung

Ideales Zufallsexperiment mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit p werde n mal in unabhängiger Folge durchführt (n groß). Ist X die zufällige Anzahl von Treffern, so gilt mit $\lambda := n \cdot p$ näherungsweise

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

für $k \leq n$.

Wann es angewendet wird muss sic noc anescaut werden.

5 Wichtige stetige Verteilung

5.1 Normalverteilung

$$P(X \leq x) = F(x) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

Die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)$ der Normalverteilung ist **nicht als geschlossene Funktion** darstellbar(d.h. ohne Integral oder unendliche Reihe). Für die Standardnormalverteilung ist sie tabelliert.

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Sei X $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

Beispiel: Sei$X$ $\mathcal{N}(2,9)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 4) &= F_X(4) - F_X(1) && (6)\\
&= \Phi\left(\frac{4-2}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{9}}\right) && (7)\\
&= \Phi(0.67) - \Phi(-0.33) && (8)\\
&= 0.7486 - (1 - \Phi(0.33)) && (9)\\
&= 0.7486 - (1 - 0.6293) && (10)\\
&= 0.3779 && (11)
\end{aligned}$$

Beispiel: Angenommen das Gewicht G der Studenten der DHBW Karlsruhe sei normalverteilt mit $\mu = 75$kg und $\sigma = 5$kg.

Bestimmen sie $P(69kg < G < 81kg)$ rechnerisch mittels Tabelle.

$$P(69kg < G < 81kg) = \Phi_{75,5^2}(81) - \Phi_{75,5^2}(69)$$

Zwei Studenten werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist es das beide zwischen 69 und 81kg wiegen?

$$P(A) = P(B) = 76.9\% \text{ Ergebnis aus vorheriger Aufgabe} \tag{12}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.769^2 \approx \underline{59.1\%} \tag{13}$$

5.2 Exponential Verteilung

Sollte in der 6 Vorlesung sein habe ich aber noch nicht gefunden.

6 Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten

6.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$Wahrscheinlichkeitsraum,$A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|^1 B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

Allgemeine Rechenoperationen:

Wahrscheinlichkeiten ver**UND**en erstellt man durch Multiplikation.

$$P(O \cap M3) = P(O|M3) \cdot P(M3)$$

Ver**ODER**n erstellt man in dem man die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereigniss addiert und mit der Wahrscheinlichkeit der verundung der beiden ereignisse subtrahiert.

$$P(O \cup M3) = P(O) + P(M3) - P(O \cap M3)$$

[1]Der senkrechte Strich "|"steht also für "unter der Bedingung,dass".

6.2 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sind nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten des bedingenden Ereignisses bekannt, ergibt sich dei totale Wahrscheinlichkeit von A aus

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

wobei B^c das Gegenereignis zu B bezeichnet.

6.3 Satz von Bayes

Für den Zusammenhang zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$ ergibt sich direkt aus der Definition und der Multiplikationssatz der Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

.

Dabei kann $P(B)$ im Nenner mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Beispiel Aufgabe

Auf einem Mail-Server sind 96% der ankommenden Mails Spam.
a.)Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 90% das eine Mail als Spam erkannt wird(d.h. mit 10% das der Spam durch geht). Die Wahrscheinlichkeit das ein echte Mail als Spam erkannt wird liegt bei 2%. Welcher Anteil der Mails, sind im langfristigen Mittel Spam-Mails?

$$\begin{aligned} &S := \text{der eingehenden Mails sind Spam} && \overline{S} := \text{nicht Spam} \\ &P(S) = 0.96 && P(\overline{S}) = 0.04 \\ &P(S \cap L) = 0.96 \cdot 0.90 = 0.864 && P(S \cap \overline{L}) = 0.96 \cdot 0.10 = 0.096 \\ &P(\overline{S} \cap L) = 0.04 \cdot 0.02 = 0.0008 && P(\overline{S} \cap \overline{L}) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392 \end{aligned}$$

Es kommen 13.52% der einkommenden Mails durch

$$\begin{aligned} P(\overline{L}) &= 0.1352 \\ P(S \cap \overline{L}) &= 0.096 \\ P(S|\overline{L}) &= \frac{P(S \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{0.096}{0.1352} \approx 0.71 \end{aligned}$$

7 Maßzahlen von Verteilungen

7.1 Erwartungswert

$X(w_j)$: Gewinn bei Ausgang w_j
n Spiele, h_j mal triet der Ausgang w_j auf. Frage: Wie kommt man auf h_j?
Man macht ein paar versuche wenn n groß genug ist kann man die Wahrscheinlichkeit näherungsweise bestimmen.

$$X(w_1) \cdot \underbrace{\frac{h_1}{n}}_{\rightsquigarrow p(w_1)}$$

Satz 12.3: Eigenschaften des Erwartungswert

a. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

b. $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X, a \in \mathbb{R}$ Linearität der Erwartungswertbildung

c. Der Rest so nicht wichtig aus falls interrese siehe Vorlesung 8 Seite 8

Verteilung	Erwartungswert
$Bin(n,p)$	$n \cdot p$
$Po(\lambda)$	λ
$N(\mu, \sigma^2)$	μ
$U(a,b)$	$(a+b)/2$
$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$

Tabelle 3: Erwartungswerte wichtiger Verteilungen

7.2 Varianz

Satz 12.6 Eigenschaften der Varianz

b. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

c. $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X), a, b \in \mathbb{R}$

Satz 12.7
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow V(X) = \sigma^2$,d.h$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ besitzt den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2. Speziell besitzt die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ den Erwartungswert 0 und die Varianz 1.

Verteilung	Varianz
$Bin(n,p)$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
$Po(\lambda)$	λ
$N(\mu,\sigma^2)$	σ
$U(a,b)$	$(b-a)^2/12$
$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tabelle 4: Varianzen wichtiger Verteilungen

7.3 Standardabweichung

Hat die Zufallsvariable X den Erwartungswert $\mathbb{E}X$, so heißt

$$\sigma_X^2 := V(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

die Varianz(der Verteilung) von X.
$\sigma_X := \sqrt{V(X)}$ heißt die **Standardabweichung**(der Verteilung) von X.

8 Konfidenzintervall

Sigmaumgebung mit einer festen prozentualen Richtgröße

$$P(\mu - 1.64\sigma \leq x \leq \mu + 1.64\sigma) = 90\%$$
$$40\% \text{ mögen Mathe}, n = 100, \mu = 40, \sigma = 4.9$$
$$[31.96; 48.04]$$

Darin liegen 90% aller Möglichkeiten das sie sagen das sie Mathe mögen
Vertrauensintervall

$$400 = n; 120\text{sagen Mathe ist Ok}$$
$$\text{Relative Trefferhäufigkeit} : h = \frac{120}{400} = 0.3$$
$$90\% : [h - 1.64\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}; h + 1.64\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}]$$
$$[0.26; 0.34]$$

In welchem Bereich die Wahrscheinlichkeit liegt das jemand Matht mag.

9 Themenübersicht

Die Themenübersicht ist temporär bis sich das in halts verzeichnis selbst erzeugt Rot heißt klausurrelevant

- Wahrscheinlichkeitsräume Wahrscheinlichkeitsverteilung, Laplace-Modell Satz 3.2
- Kombinatorik
  - Multiplikationsregel
  - Summenregel
  - k-Permutation & k-Kombination mit / ohne Wiederholung
- Zähldichte
- Wichtige diskrete Verteilungen
  - Binomialvertelung
  - Poission-Verteilung
- Wichtige stetige Verteilungen
  - Exponential-Verteilung
  - Normalverteilung
- Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung
  - Bedingte Wahrscheinlichkeits
  - Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
  - Formel von Bayes
- Maßzahlen von Verteilungen
  - Erwartungswert
  - Varianz
  - Standardabweichung Satz 12.3 Satz 12.7
- Parameterschätzung Konfidenzintervall

10 Mitschrieb

10.1 05.04

Themenüberblick

- Deskriptive Statistik
- Merkmalräume und Ereignisse

- Wahrscheinlichkeitsräume
- Kombinatorik
- Zufallsvariablen

Deskriptive Statistik ist Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gibt Regeln für Zufallsexperimente.

absolute/relative Häufigkeit
$H_x(a_j)$:= Anzahl der in der Stichprobe x vorkommenden Stichprobenelement

10.2 03.05

seite 21,22 sind nicht klausurrelevant aufgabe 12,13,14 nicht klausurrelevant

10.3 10.05

10.4 31.05

Die Aufgaben wurden am Anfang besprochen.

Disjunkt heißt das sich zwei wahrscheinlichkeiten gegenseitig ausschließen. Siehe Lösungsvorschlag 7L.
Wahrscheinlichkeiten verunden erstellt man durch Multiplikation.

$$P(O \cap M3) = P(O|M3) \cdot P(M3)$$

Verodern erstellt man in dem man die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereigniss addiert und mit der Wahrscheinlichkeit der verundung der beiden ereignisse subtrahiert.

$$P(O \cup M3) = P(O) + P(M3) - P(O \cap M3)$$

Aufgabe 18 ist ein gute Übung für bedingte wahrscheinlichkeit. Antworten müssen genau hinzuschrieben werden nicht einfahc raten auch wenn es vielleicht richtig ist.
Aufgabe 20a als Beispiel in die Zusammenfassung. Bedingte Wahrscheinlichkeit!!!!
Aufgabe 20b ist auch sehr interresant.
Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Erwartungswert $X(w_j)$: Gewinn bei Ausgang w_j
n Spiele, h_j mal triet der Ausgang w_j auf. Frage: Wie kommt man auf h_j?
Man macht ein paar versuche wenn n groß genug ist kann man die Wahrscheinlichkeit nähe-

rungsweise bestimmen.

$$X(w_1) \cdot \underbrace{\frac{h_1}{n}}_{\rightsquigarrow p(w_1)}$$

Tabelle auf Seite 12 ist wichtig für den Erwartungswert sinnvoll in die Zusammenfassung zu machen. Frage: Was heißt diskrekt und nicht diskrekt?
Was kann mal alles mitnehmen in die Prüfung?
Seite 24,25,26 ist nicht klausurrelevant.

11 Aufgaben

11.1 26.04

Dr. Kaori Nagato-Plum
Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie
kaori.nagatou@kit.edu

Statistik

4. Übungsblatt

Aufgabe 10:

An einer E-Mail-Adresse treffen täglich X Spam-Mails ein. Aus Erfahrung weiß man, dass X eine Zufallsvariable ist mit der Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Weiter treffen täglich genau c erwünschte E-Mails ein, $c \in \mathbb{N}$.

a) Drücken Sie Y := „Gesamtzahl der E-Mails, die täglich an der E-Mail-Adresse eintreffen" mit Hilfe von X und c aus. Welche Werte kann Y annehmen? Bestimmen Sie die Zähldichte von Y.

b) Bestimmen Sie $P(Y \leq 6)$ für den Fall $\lambda = 6$ und $c = 4$.

c) Angenommen, X sei eine Zufallsvariable mit der Binomialverteilung $Bin(100, 0.06)$. Bestimmen Sie wieder $P(Y \leq 6)$ für den Fall $c = 4$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus b), d.h. wie groß ist der prozentuale Unterschied beider Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 11:

Ein Programm soll (auf Korrektheit) getestet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Testdurchlauf ein (Laufzeit-) Fehler gefunden wird, sei $p > 0$. X sei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe ohne Fehler, bis der erste Fehler gefunden wird.

a) Welche Verteilung hat X ?

b) Tabellieren und skizzieren Sie für den Bereich $0 \leq t \leq 6$ die Zähldichte $t \mapsto f_X(t)$ für $p = 0.2$.

c) Das Programm wird so lange getestet, bis ein Fehler gefunden wird, höchstens jedoch c mal. Sei Y dabei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe. Berechnen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen Y für $p = 0.1$ und $c = 7$.

d) $Z := 50 \cdot Y + 100$ seien die zufälligen Kosten für den Test. Berechnen Sie $P(Z \geq 200)$ für $p = 0.1$ und $c = 7$.

e) Wie groß muss $c \in \mathbb{N}$ mindestens sein, damit für den Fall $p = 0.1$ ein Laufzeitfehler mindestens mit Wahrscheinlichkeit 90% gefunden wird?

Nur AUfgabe 10 war klausurrelevant.

Aufgabe 10 a.

Die Zähldichte für Y ist folgend definiert $Y = X + c$. Da X die Werte 0,1... annehmen kann, nimmt Y die Werte c,c+1,c+2,... an.

$$f_Y(k) = P(Y = k) = P(X + c = k) = P(X = k - c)$$

$$f_X(k-c) = \begin{cases} e^{\lambda} * \frac{\lambda^{k-c}}{(k-c)!}, k \geq c \\ 0 \end{cases}$$

Aufgabe 10 b.

Wegen $Y \geq c = 4$ gilt $P(Y \leq 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$
Die verteilung ist

11.2 03.05

Aufgabe 15 a.

Bestimme die Dichtefunktion:

$$F(x) = 1 - e^{-kx}$$

$$f(x) = k * e^{-kx}$$

Für einen bestimmten Bauteil ist k = 1. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer b. höchstens 1 Jahr

$$\Longrightarrow P(L \leq 1) = F_1(1) - F_1(0) = 1 - e^{-1*1} - 0 = 0.6321$$

c. zwischen 1 und 2 Jahren

$$\Longrightarrow P(1 \leq L \leq 2) = F_1(2) - F_1(1) = (1 - e^{-1*2}) - 0.6321 = 0.2325$$

d. größer als 2 Jahre ist?

$$\Longrightarrow P(L \geq 2) = 1 - (F_1(2) - F_1(0)) = 0.13533$$

11.3 10.05

Aufgabe 16 a.

$$Y = N(0, 16)$$

$$X = \tau + Y$$

$$Y \sim N(0, 4^2)$$

$$\implies X = \tau + Y = (\tau/a) + (1/b) * Y$$

$$\sim N(\overbrace{a + b\mu}^{=\tau}, \overbrace{b^2 * \sigma^2}^{=4^2})$$

$$X \sim N(\tau, 4^2)$$

$$\implies P(X \leq 100)$$

b.

$$\Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{\tau}}{\sigma})$$

$$\mu_0 = 1 - (P \leq 100) = p_0 = \Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{100}}{\sigma}) = \Phi(0) = 0.5$$

$$\mu_1 = 1 - (P \leq 102) = p_1 = \Phi(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{102}}{\sigma}) = \Phi(-0.5) = 0.6915$$

c.

Jeder der vier Fühler hat die Wahrscheinlichkeit von 50% anzuschlagen bei der Temperatur 100 Grad es braucht zwei damit der Ventiator angeht.

$$N \sim Bin(4, p) = P(N = k) = \binom{4}{k} * 0.5^k * 0.5^{4-k}$$

$$P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$$

Die Wahrscheinlichkeit das der Ventilator angeht liegt bei 43.75 Prozent.

d.

$$p = 0.6915$$

$$P(N \geq 1)$$

Aufgabe 17

a.

$$\mu = 2 | \sigma = 0.5 | P(X \leq 3)$$

$$P(N > 3) = 1 - (X \leq 3) = 1 - \Phi_{2,0.5^2}(3) = 1 - \Phi(\frac{3-2}{0.5}) = \Phi(2) = 1 - 0.97 = 0.03$$

11.4 24.05

Aufgabe 18 ist ein gute Übung für bedingte wahrscheinlichkeit.

Aufgaben 20a

Als Beispiel für bedingte wahrscheinlichkeit nutzen

Auf einem Mail-Server sind 96% der ankommenden Mails Spam.

a.)Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 90% das eine Mail als Spam erkannt wird(d.h. mit 10% das der Spam durch geht). Die Wahrscheinlichkeit das ein echte Mail als Spam erkannt wird liegt bei 2%. Welcher Anteil der Mails, sind im langfristigen Mittel Spam-Mails?

$$\begin{aligned}
&S := \text{der eingehenden Mails sind Spam} && \overline{S} := \text{nicht Spam} \\
&P(S) = 0.96 && P(\overline{S}) = 0.04 \\
&P(S \cap L) = 0.96 \cdot 0.90 = 0.864 && P(S \cap \overline{L}) = 0.96 \cdot 0.10 = 0.096 \\
&P(\overline{S} \cap L) = 0.04 \cdot 0.02 = 0.0008 && P(\overline{S} \cap \overline{L}) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392
\end{aligned}$$

Es kommen 13.52% der einkommenden Mails durch

$$\begin{aligned}
P(\overline{L}) &= 0.1352 \\
P(S \cap \overline{L}) &= 0.096 \\
P(S|\overline{L}) &= \frac{P(S \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{0.096}{0.1352} \approx 0.71
\end{aligned}$$