

Inhaltsverzeichnis

1	Deskriptive Statistik (Wahrscheinlichkeitstheorie)	2
1.1	Wahrscheinlichkeitsräume	3
2	Kombinatorik	3
2.1	Multiplikationsregel (Produktregel)	4
2.2	Summenregel	4
2.3	Permutation u. Kombinationen	4
3	Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung	6
3.1	Zähldichte	6
4	Wichtige diskrete Verteilungen	6
4.1	Binomialverteilung	6
4.2	Poisson-Verteilung	7
5	Wichtige stetige Verteilung	7
5.1	Normalverteilung	7
5.2	Exponential Verteilung	8
6	Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten	9
6.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	9
6.2	Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit	9
6.3	Satz von Bayes	9
7	Maßzahlen von Verteilungen	10
7.1	Erwartungswert	10
7.2	Varianz	11
7.3	Standardabweichung	11
8	Konfidenzintervall	12
9	Themenübersicht	13
9.1	Zusammenfassung vor den	14
10	Mitschrieb	14
10.1	05.04	14
10.2	03.05	15
10.3	10.05	15
10.4	31.05	15

11 Aufgaben	17
11.1 26.04	17
11.2 03.05	18
11.3 10.05	19
11.4 24.05	20
11.5 Probeklausur	20

1 Deskriptive Statistik (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Gegeben sei die Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ vom Umfang n mit Werten in \mathbb{R} .

$$\bar{x} := \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

heißt Stichproben-Mittel,

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

Stichproben-Varianz, wobei $n \geq 2$

$$s_x := +\sqrt{s_x^2}$$

Stichproben-Standardabweichung und

$$v_x := \frac{s_x}{x}$$

$$v_x := \frac{s_x}{\bar{x}}$$

für $x_1, \dots, x_n > 0$ heißt Stichproben-Varianzskoeffizient.

Der Stichproben-Median (Zentralwert) von x

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} * (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Stichproben $-\alpha$ -Quantil

Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $k := [n * \alpha]$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \begin{cases} x_{(k+1)}, & \text{falls } n * \alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} * (x_{(k)} + x_{(k+1)}), & \text{sonst} \end{cases}$$

α -getrimmte Stichproben-Mittel(kommt nicht dran)

Sei $\alpha \in [0, 0.5]$ und $k := \lceil n * \alpha \rceil$. Dann heißt

$$\tilde{x}_\alpha := \frac{1}{n - 2 * k} * (x_{(k+1)} + \dots + x_{(n-k)})$$

das α -getrimmte (gestutzte) Stichproben-Mittel.

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

auch Stochastisches Modell Zufallsexperiment

ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

i Grundraum $\Omega \neq \emptyset$

ii Ereignisraum \mathcal{E}

iii Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}

$\mathbb{P} : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ weist jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu.

Wie berechnet man das Wahrscheinlichkeitsmaß?

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) $\mathbb{P}(\sum_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$,falls A_1, \dots, A_n paarweise disjunkt (endliche Additivität)

c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\forall A : A \in \mathcal{A} \iff A^c \in \mathcal{A}$

d) $A \subset B \iff \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie)

e) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) Wegen $\Omega = A + A^c$ und b) gilt $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.
genauers wird in den Späteren Vorlesung erläutert.

2 Kombinatorik

Erscheint ein Laplace-Modell in einer Situation angemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ "günstigen" Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Die Lehre vom systematischen Abzählen endlicher "strukturierter" Mengen heißt Kombinatorik.

2.1 Multiplikationsregel (Produktregel)

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$$

Beispiele: Wie viele Möglichkeiten ggibt es jeweils?

- Auf der Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 10 Hauptgerichte und 2 Desserts. Wie viele 3-gängige Menüs kann man zusammenstellen? $\implies 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$
- Ein roter und ein blauer Würfel werden geworfen. $\implies 6 \cdot 6 = 36$
- Bei einem Neuwagen gibt es 8 aufpriespflichtige Zusatzoptionen, die in beliebiger Kombination zu- oder abbestellt werden können. $\implies 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8 = 256$

Wenn es Experimente sind in denen zurückgelegt wird kann die **Produktregel nicht angewendet** werden, da Werte nicht beliebig kombinierbar sind.

2.2 Summenregel

Wenn es mehrere Gruppen mit m_1 bzw. $\dots m_n$ verschiedenen Werte gibt, die sich gegenseitig ausschließen, dann gibt es insgesamt $m_1 + \dots + m_n$ mögliche Werte.

Beispiel

Auf der Speisekarte sind als Hauptspeise 10 Fleischgerichte, 4 Fischgerichte und 2 vegetarische Gerichte zur Auswahl. Zusätzlich gibt es 3 Vorspeisen und 5 Desserts zur Auswahl. Wie viele 3 gängige Menüs kann man zusammenstellen?

$$3 \cdot (10 + 4 + 2) \cdot 5 = 240$$

2.3 Permutation u. Kombinationen

Tabelle wird nachgereicht sobald internet

Hier ist:

$$\binom{m}{l} := \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!} (m, l \in \mathbb{N}_0, l \leq m) \quad (1)$$

$$0! = 1 \quad (2)$$

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m. \quad (3)$$

$$n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (4)$$

k-Permutation aus M ohne Wiederholung

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right]$$

k-Kombination aus M ohne Wiederholung

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

k-Kombination aus M mit Wiederholung

$$\Rightarrow |\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

Wdh?	Rhf?	Anzahl. Möglichkeiten	Beispiel
mit ¹	mit ³	n^k	k Personen werfen je einen Würfel(also $n = 6$)
ohne ²	mit ³	$n!$	Auf wie vielen Arten lassen sich n Objekte sortieren?
ohne ²	mit ³	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto " k aus n " mit Ziehungs-Reihenfolge .
ohne ²	ohne ⁴	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Normales Lotto " k aus n " .
mit ¹	ohne ⁴	$\binom{n+k-1}{k}$	k nicht unterscheidbare Würfel werden in einem Würfelbecher geworfen

Tabelle 1: Wann muss welche Formel angewendet werden?

¹Mehrmals die gleiche Wahl treffen (**mit Wdh.**)

³Es ist wichtig, in welcher Reihenfolge wie entschieden wurde(**mit Reihenf.**)

²Jedes Mal eine andere Wahl treffen muss(**o. Wdh.**)

⁴Es ist nur wichtig, wie oft welche Entscheidung getroffen wurde.**o. Reihenf.**

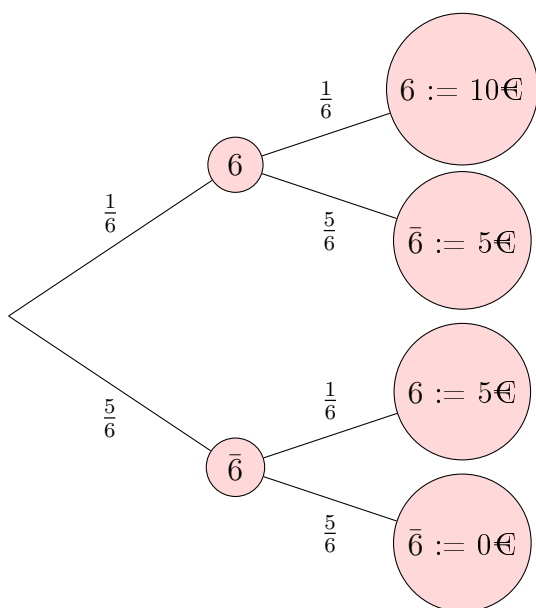
3 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$x = \text{sei } \dots \qquad x = x_i \qquad P(X = x_i) \qquad (5)$$

→ Würfel $2 \times$ werfen, 6 oder keine 6

→ 2×6 10€ Gewinn $2 \times \bar{6}$ 0€ Gewinn sonst 5€ Gewinn.



	x_1	x_2	x_3
$x = x_i$	10	5	0
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Tabelle 2:

3.1 Zähldichte

Muss sich seperrat angeschaut werden script unbrauchbar.

$$f_x(t) = P(X = t)$$

4 Wichtige diskrete Verteilungen

4.1 Binomialverteilung

Seien n eine natürliche Zahl und $0 \leq p \leq 1$. Die zur Zähldichte

$$k \longrightarrow f(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0, \dots, n,$$

gehörende Verteilung heißt **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p und wird mit $\text{Bin}(n, p)$ bezeichnet.

Beispiel: Der Tetraeder wird 4 Mal geworfen. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

- Jedes Mal die "1" = $\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^0 \approx 0.0039$
- Zweimal die "1" = $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-2} \approx 0.2109$
- Alle Augenzahlen verschieden = $\frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx 0.09375$

4.2 Poisson-Verteilung

Ideales Zufallsexperiment mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit p werde n mal in unabhängiger Folge durchführt (n groß). Ist X die zufällige Anzahl von Treffern, so gilt mit $\lambda := n \cdot p$ näherungsweise

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

für $k \leq n$.

Wann es angewendet wird muss sich noch anschauen werden.

5 Wichtige stetige Verteilung

5.1 Normalverteilung

$$P(X \leq x) = F(x) = \Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

Die Dichte ist

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu, \sigma^2}(x)$ der Normalverteilung ist **nicht als geschlossene Funktion** darstellbar (d.h. ohne Integral oder unendliche Reihe). Für die Standardnormalverteilung ist sie tabelliert.

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \Phi_{\mu, \sigma^2}(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

Beispiel: Sei $X \sim \mathcal{N}(2, 9)$. Dann ist

$$P(1 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(1) \quad (6)$$

$$= \Phi\left(\frac{4-2}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{9}}\right) \quad (7)$$

$$= \Phi(0.67) - \Phi(-0.33) \quad (8)$$

$$= 0.7486 - (1 - \Phi(0.33)) \quad (9)$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) \quad (10)$$

$$= 0.3779 \quad (11)$$

Beispiel: Angenommen das Gewicht G der Studenten der DHBW Karlsruhe sei normalverteilt mit $\mu = 75\text{kg}$ und $\sigma = 5\text{kg}$.

Bestimmen sie $P(69\text{kg} < G < 81\text{kg})$ rechnerisch mittels Tabelle.

$$P(69\text{kg} < G < 81\text{kg}) = \Phi_{75,5^2}(81) - \Phi_{75,5^2}(69)$$

Zwei Studenten werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist es das beide zwischen 69 und 81kg wiegen?

$$P(A) = P(B) = 76.9\% \text{ Ergebnis aus vorheriger Aufgabe} \quad (12)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.769^2 \approx \underline{59.1\%} \quad (13)$$

Satz 9.8

$$a) \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies a + b \cdot X \sim \mathcal{N}(a + b \cdot \mu, b^2 \cdot \sigma^2), \text{ falls } b \neq 0.$$

$$b) \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$c) \quad X \sim \mathcal{N}(0, 1) \implies a + b \cdot X \sim \mathcal{N}(a, b^2), \text{ falls } b \neq 0.$$

5.2 Exponential Verteilung

Ist in Vorlesung 5 muss sich noch angeschaut werden.

Wahrscheinlichkeit $P < X = F_1(X)$

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}, t \geq 0$$

und der Dichte

$$f_1(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, x \geq 0$$

Beispiel: Die Zeit T , die Sie für Ihre tägliche Laufstrecke brauchen, sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.1$. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie

- weniger als 27 Minuten brauchen? $P(T < 27) = F(27)$
- mehr als 27 Minuten brauchen? $P(T > 27) = 1 - P(T < 27)$
- höchstens 24 Minuten brauchen? $P(T)$

6 Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten

6.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B .

Allgemeine Rechenoperationen:

Wahrscheinlichkeiten ver**UND**en erstellt man durch Multiplikation.

$$P(O \cap M3) = P(O|M3) \cdot P(M3)$$

Ver**ODER**n erstellt man in dem man die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereigniss addiert und mit der Wahrscheinlichkeit der verundung der beiden ereignisse subtrahiert.

$$P(O \cup M3) = P(O) + P(M3) - P(O \cap M3)$$

6.2 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sind nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten des bedingenden Ereignisses bekannt, ergibt sich die totale Wahrscheinlichkeit von A aus

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

wobei B^c das Gegenereignis zu B bezeichnet.

6.3 Satz von Bayes

Für den Zusammenhang zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$ ergibt sich direkt aus der Definition und der Multiplikationssatz der Satz von Bayes:

¹Der senkrechte Strich "|" steht also für "unter der Bedingung, dass".

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Dabei kann $P(B)$ im Nenner mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Beispiel Aufgabe

Auf einem Mail-Server sind 96% der ankommenden Mails Spam.

a.) Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 90% das eine Mail als Spam erkannt wird (d.h. mit 10% das der Spam durch geht). Die Wahrscheinlichkeit das ein echte Mail als Spam erkannt wird liegt bei 2%. Welcher Anteil der Mails, sind im langfristigen Mittel Spam-Mails?

S := der eingehenden Mails sind Spam

\bar{S} := nicht Spam

$$P(S) = 0.96$$

$$P(\bar{S}) = 0.04$$

$$P(S \cap L) = 0.96 \cdot 0.90 = 0.864$$

$$P(S \cap \bar{L}) = 0.96 \cdot 0.10 = 0.096$$

$$P(\bar{S} \cap L) = 0.04 \cdot 0.02 = 0.0008$$

$$P(\bar{S} \cap \bar{L}) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

Es kommen 13.52% der einkommenden Mails durch

$$P(\bar{L}) = 0.1352$$

$$P(S \cap \bar{L}) = 0.096$$

$$P(S|\bar{L}) = \frac{P(S \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0.096}{0.1352} \approx 0.71$$

7 Maßzahlen von Verteilungen

7.1 Erwartungswert

$X(w_j)$: Gewinn bei Ausgang w_j

n Spiele, h_j mal triert der Ausgang w_j auf. Frage: Wie kommt man auf h_j ?

Man macht ein paar versuche wenn n groß genug ist kann man die Wahrscheinlichkeit näherungsweise bestimmen.

$$X(w_1) \cdot \underbrace{\frac{h_1}{n}}_{\rightsquigarrow p(w_1)}$$

Satz 12.3: Eigenschaften des Erwartungswert

a. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

b. $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X, a \in \mathbb{R}$ Linearität der Erwartungswertbildung

c. Der Rest so nicht wichtig aus falls interesse siehe Vorlesung 8 Seite 8

Verteilung	Erwartungswert
$Bin(n, p)$	$n \cdot p$
$Po(\lambda)$	λ
$N(\mu, \sigma^2)$	μ
$U(a, b)$	$(a + b)/2$
$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$

Tabelle 3: Erwartungswerte wichtiger Verteilungen

7.2 Varianz

Satz 12.6 Eigenschaften der Varianz

b. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

c. $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X), a, b \in \mathbb{R}$

Satz 12.7

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies V(X) = \sigma^2$, d.h. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ besitzt den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 .
Speziell besitzt die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ den Erwartungswert 0 und die Varianz 1.

Verteilung	Varianz
$Bin(n, p)$	$n \cdot p \cdot (1 - p)$
$Po(\lambda)$	λ
$N(\mu, \sigma^2)$	σ
$U(a, b)$	$(b - a)^2/12$
$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tabelle 4: Varianzen wichtiger Verteilungen

7.3 Standardabweichung

Hat die Zufallsvariable X den Erwartungswert $\mathbb{E}X$, so heißt

$$\sigma_X^2 := V(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

die Varianz(der Verteilung) von X .

$\sigma_X := \sqrt{V(X)}$ heißt die **Standardabweichung**(der Verteilung) von X .

8 Konfidenzintervall

Beschreibt die Genauigkeit eines Schätzwertes mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens γ (Konfidenzniveau) enthält geschätztes Intervall den wahren Werte

$$KI = \bar{x} \pm \underbrace{\overbrace{Z}^{\text{Z-Wert für das Konfidenzniveau}}} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{\sigma}^{\text{Standardabweichung}}}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\text{Stichprobengröße}}}}_{\text{Stichprobengröße}}$$

$$\mu \in \left[\bar{x} - Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \text{ Wird aber meist aus der Tabelle abgelesen}$$

Bestimmen des **symmetrische Konfidenzintervall**

$$q := \frac{1 + \gamma}{2}$$

Bestimme das **einseitige Konfidenzintervall** mit oberer Schranke welches nach **unten** offen ist.

$$P(Z \geq q) = \gamma \Leftrightarrow 1 - \Phi(q) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(-q) = 0.95 \xrightarrow[\text{Tabelle}]{\Leftrightarrow} -q = 1.65 \Leftrightarrow q = -1.65$$

$$(-\infty, \bar{x} + q \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Sigmaumgebung mit einer festen prozentualen Richtgröße

$$P(\mu - 1.64\sigma \leq x \leq \mu + 1.64\sigma) = 90\%$$

$$40\% \text{ mögen Mathe, } n = 100, \mu = 40, \sigma = 4.9$$

$$[31.96; 48.04]$$

Darin liegen 90% aller Möglichkeiten das sie sagen das sie Mathe mögen

Vertrauensintervall

$$400 = n; 120 \text{ sagen Mathe ist Ok}$$

$$\text{Relative Trefferhäufigkeit : } h = \frac{120}{400} = 0.3$$

$$90\% : \left[h - 1.64 \sqrt{\frac{h \cdot (1 - h)}{n}}; h + 1.64 \sqrt{\frac{h \cdot (1 - h)}{n}} \right]$$

$$[0.26; 0.34]$$

In welchem Bereich die Wahrscheinlichkeit liegt das jemand Matht mag.

9 Themenübersicht

Die Themenübersicht ist temporär bis sich das Inhaltsverzeichnis selbst erzeugt. Rot heißt klausurrelevant.

- Wahrscheinlichkeitsräume Wahrscheinlichkeitsverteilung, Laplace-Modell Satz 3.2
- Kombinatorik
 - Multiplikationsregel
 - Summenregel
 - k -Permutation & k -Kombination mit / ohne Wiederholung
- Zähldichte
- Wichtige diskrete Verteilungen
 - Binomialverteilung
 - Poisson-Verteilung
- Wichtige stetige Verteilungen
 - Exponential-Verteilung
 - Normalverteilung
- Übergangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung
 - Bedingte Wahrscheinlichkeit
 - Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
 - Formel von Bayes
- Maßzahlen von Verteilungen
 - Erwartungswert
 - Varianz
 - Standardabweichung Satz 12.3 Satz 12.7
- Parameterschätzung Konfidenzintervall

Kurz vor den Prüfungen

- Wahrscheinlichkeitsraum
- Binomialverteilung
- Poisson-Verteilung

- Exponential-Verteilung
- Konfidenzintervall
-

9.1 Zusammenfassung vor den

1 Vorlesung ist nicht so wichtig für die Prüfung 2 Vorlesung Wie wird die Varianz berechnet wenn sie stochastisch abhängig sind? Aufgabe 3 ist nicht klausurrelevant Aufgabe 4 ist wichtig Aufgabe 5 eher nicht Aufgabe 6 ist nicht so wichtig aber gute Übung Aufgabe 7 ist wichtig 3 Vorlesung Wichtig ist konkrete Zufallsvariable (Diskrete Zufallsvariable) Zähdichte ist interessant wenn müssen alle Ereignisse für B addieren Ab Seite 30 nicht mehr wichtig Aufgabe 8 ist sehr wichtig Laplace-Experimente Aufgabe 9 nicht wirklich wichtig 4 Vorlesung Binomialverteilung und Poissonverteilung ist sehr wichtig

Aufgabe 10 wichtig Aufgabe 11 nicht wichtig 5 Vorlesung Aufgabe 12 nicht Aufgabe 13 nicht Nur Aufgabe 15 ist wichtig

6 Vorlesung Aufgabe 16 sehr wichtig Aufgabe 17 ist wichtig

7 Vorlesung Gedächtnislosigkeit kann verwendet werden

Aufgabe 18 wichtig Aufgabe 19 nicht interessant Aufgabe 20 wichtig

Aufgabe 21 ist wichtig Aufgabe 23 ist wichtig

9 Vorlesung

Ab Seite 13 Auf Seite 20 steht wie die Intervalle geöffnet sein können und es ist wie bei Daniel Jung !!

Bis 22 ist es wichtig

Seite 23 ist nicht wichtig

Aufgabe 24 ist sinnvoll für das Verständnis

Aufgabe 25 ist sehr wichtig

Seite

10 Mitschrift

10.1 05.04

Themenüberblick

- Deskriptive Statistik
- Merkmalsräume und Ereignisse
- Wahrscheinlichkeitsräume
- Kombinatorik

- Zufallsvariablen

Deskriptive Statistik ist Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gibt Regeln für Zufallsexperimente.

absolute/relative Häufigkeit

$H_x(a_j)$:= Anzahl der in der Stichprobe x vorkommenden Stichprobenelement

10.2 03.05

seite 21,22 sind nicht klausurrelevant aufgabe 12,13,14 nicht klausurrelevant

10.3 10.05

10.4 31.05

Die Aufgaben wurden am Anfang besprochen.

Disjunkt heißt das sich zwei Wahrscheinlichkeiten gegenseitig ausschließen. Siehe Lösungsvorschlag 7L.

Wahrscheinlichkeiten verunden erstellt man durch Multiplikation.

$$P(O \cap M3) = P(O|M3) \cdot P(M3)$$

Verodern erstellt man in dem man die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereigniss addiert und mit der Wahrscheinlichkeit der verundung der beiden ereignisse subtrahiert.

$$P(O \cup M3) = P(O) + P(M3) - P(O \cap M3)$$

Aufgabe 18 ist ein gute Übung für bedingte Wahrscheinlichkeit. Antworten müssen genau hinzuschrieben werden nicht einfahc raten auch wenn es vielleicht richtig ist.

Aufgabe 20a als Beispiel in die Zusammenfassung. Bedingte Wahrscheinlichkeit!!!!

Aufgabe 20b ist auch sehr interresant.

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Erwartungswert $X(w_j)$: Gewinn bei Ausgang w_j

n Spiele, h_j mal triert der Ausgang w_j auf. Frage: Wie kommt man auf h_j ?

Man macht ein paar versuche wenn n groß genug ist kann man die Wahrscheinlichkeit näherungsweise bestimmen.

$$X(w_1) \cdot \underbrace{\frac{h_1}{n}}_{\rightsquigarrow p(w_1)}$$

Tabelle auf Seite 12 ist wichtig für den Erwartungswert sinnvoll in die Zusammenfassung zu machen. Frage: Was heißt diskrekt und nicht diskrekt?

Was kann mal alles mitnehmen in die Prüfung?

Seite 24,25,26 ist nicht klausurrelevant.

11 Aufgaben

11.1 26.04

Dr. Kaori Nagato-Plum
Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie
kaori.nagatou@kit.edu

Statistik

4. Übungsblatt

Aufgabe 10:

An einer E-Mail-Adresse treffen täglich X Spam-Mails ein. Aus Erfahrung weiß man, dass X eine Zufallsvariable ist mit der Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Weiter treffen täglich genau c erwünschte E-Mails ein, $c \in \mathbb{N}$.

a) Drücken Sie $Y :=$ „Gesamtzahl der E-Mails, die täglich an der E-Mail-Adresse eintreffen“ mit Hilfe von X und c aus. Welche Werte kann Y annehmen? Bestimmen Sie die Zähldichte von Y .

b) Bestimmen Sie $P(Y \leq 6)$ für den Fall $\lambda = 6$ und $c = 4$.

c) Angenommen, X sei eine Zufallsvariable mit der Binomialverteilung $Bin(100, 0.06)$. Bestimmen Sie wieder $P(Y \leq 6)$ für den Fall $c = 4$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus b), d.h. wie groß ist der prozentuale Unterschied beider Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 11:

Ein Programm soll (auf Korrektheit) getestet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Testdurchlauf ein (Laufzeit-) Fehler gefunden wird, sei $p > 0$. X sei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe ohne Fehler, bis der erste Fehler gefunden wird.

a) Welche Verteilung hat X ?

b) Tabellieren und skizzieren Sie für den Bereich $0 \leq t \leq 6$ die Zähldichte $t \mapsto f_X(t)$ für $p = 0.2$.

c) Das Programm wird so lange getestet, bis ein Fehler gefunden wird, höchstens jedoch c mal. Sei Y dabei die zufällige Anzahl der Testdurchläufe. Berechnen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen Y für $p = 0.1$ und $c = 7$.

d) $Z := 50 \cdot Y + 100$ seien die zufälligen Kosten für den Test. Berechnen Sie $P(Z \geq 200)$ für $p = 0.1$ und $c = 7$.

e) Wie groß muss $c \in \mathbb{N}$ mindestens sein, damit für den Fall $p = 0.1$ ein Laufzeitfehler mindestens mit Wahrscheinlichkeit 90% gefunden wird?

Nur Aufgabe 10 war klausurrelevant.

Aufgabe 10 a.

Die Zähldichte für Y ist folgend definiert $Y = X + c$. Da X die Werte $0, 1, \dots$ annehmen kann, nimmt Y die Werte $c, c+1, c+2, \dots$ an.

$$f_Y(k) = P(Y = k) = P(X + c = k) = P(X = k - c)$$

$$f_X(k - c) = \begin{cases} e^{-\lambda} * \frac{\lambda^{k-c}}{(k-c)!}, & k \geq c \\ 0 & \end{cases}$$

Aufgabe 10 b.

Wegen $Y \geq c = 4$ gilt $P(Y \leq 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$

Die verteilung ist

11.2 03.05

Aufgabe 15 a.

Bestimme die Dichtefunktion:

$$F(x) = 1 - e^{-kx}$$

$$f(x) = k * e^{-kx}$$

Für einen bestimmten Bauteil ist $k = 1$. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer b. höchstens 1 Jahr

$$\implies P(L \leq 1) = F_1(1) - F_1(0) = 1 - e^{-1*1} - 0 = 0.6321$$

c. zwischen 1 und 2 Jahren

$$\implies P(1 \leq L \leq 2) = F_1(2) - F_1(1) = (1 - e^{-1*2}) - 0.6321 = 0.2325$$

d. größer als 2 Jahre ist?

$$\implies P(L \geq 2) = 1 - (F_1(2) - F_1(0)) = 0.13533$$

11.3 10.05

Aufgabe 16 a.

$$Y = N(0, 16)$$

$$X = \tau + Y$$

$$Y \sim N(0, 4^2)$$

$$\Rightarrow X = \tau + Y = (\tau/a) + (1/b) * Y$$

$$\sim N(\overbrace{a + b\mu}^{=\tau}, \overbrace{b^2 * \sigma^2}^{=4^2})$$

$$X \sim N(\tau, 4^2)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 100)$$

b.

$$\Phi\left(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{\tau}}{\sigma}\right)$$

$$\mu_0 = 1 - (P \leq 100) = p_0 = \Phi\left(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{100}}{\sigma}\right) = \Phi(0) = 0.5$$

$$\mu_1 = 1 - (P \leq 102) = p_1 = \Phi\left(\frac{\overbrace{t}^{100} - \overbrace{\mu}^{102}}{\sigma}\right) = \Phi(-0.5) = 0.6915$$

c.

Jeder der vier Fühler hat die Wahrscheinlichkeit von 50% anzuschlagen bei der Temperatur 100 Grad es braucht zwei damit der Ventilator angeht.

$$N \sim Bin(4, p) = P(N = k) = \binom{4}{k} * 0.5^k * 0.5^{4-k}$$

$$P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$$

Die Wahrscheinlichkeit das der Ventilator angeht liegt bei 43.75 Prozent.

d.

$$p = 0.6915$$

$$P(N \geq 1)$$

Aufgabe 17

a.

$$\mu = 2 | \sigma = 0.5 | P(X \leq 3)$$

$$P(N > 3) = 1 - (X \leq 3) = 1 - \Phi_{2,0.5^2}(3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{0.5}\right) = \Phi(2) = 1 - 0.97 = 0.03$$

11.4 24.05

Aufgabe 18 ist ein gute Übung für bedingte wahrscheinlichkeit.

Aufgaben 20a

Als Beispiel für bedingte wahrscheinlichkeit nutzen

Auf einem Mail-Server sind 96% der ankommenden Mails Spam.

a.) Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 90% das eine Mail als Spam erkannt wird (d.h. mit 10% das der Spam durch geht). Die Wahrscheinlichkeit das ein echte Mail als Spam erkannt wird liegt bei 2%. Welcher Anteil der Mails, sind im langfristigen Mittel Spam-Mails?

S := der eingehenden Mails sind Spam

\bar{S} := nicht Spam

$$P(S) = 0.96$$

$$P(\bar{S}) = 0.04$$

$$P(S \cap L) = 0.96 \cdot 0.90 = 0.864$$

$$P(S \cap \bar{L}) = 0.96 \cdot 0.10 = 0.096$$

$$P(\bar{S} \cap L) = 0.04 \cdot 0.02 = 0.0008$$

$$P(\bar{S} \cap \bar{L}) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

Es kommen 13.52% der einkommenden Mails durch

$$P(\bar{L}) = 0.1352$$

$$P(S \cap \bar{L}) = 0.096$$

$$P(S|\bar{L}) = \frac{P(S \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0.096}{0.1352} \approx 0.71$$

11.5 Probeklausur