Funktion	Ableitung	Regel
$(f(x)+g(x))$	$f'(x)+g'(x)$	*Summenregel*
$(f(x)\cdot g(x))$	$(f'(x)\cdot g(x))+(f(x)\cdot g'(x))$	*Produktregel*
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g(x)^2}$	*Quotientenregel*
$[f(g(x))]$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$	*Kettenregel*

Eigenschaften

Definition 1.3

Eine Funktion $z=f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$ ist

- linear, wenn $f(ax+by)=a\,f(x)+b\,f(y)$ mit $x,y\in\mathbb{R}^n,\ a,b\in\mathbb{R}$
- separabel, wenn $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),\quad x=(x_i),\ i=1,2,\cdots,n,\quad x\in D$
- konvex, wenn $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$
- konkav, wenn $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\ge \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$ $\quad\alpha\in[0,\,1]$
- homogen vom Grad p, wenn $f(ax)=a^p f(x)$ (a ist fixiert)

Berechnung der partiellen Ableitung

Die partielle Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ nach der Variable x_k, berechnet man, indem man alle anderen Variablen konstant hält und f nach x_k „normal", also als Funktion ableitet.

Beispiel

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y,z)=x^2+e^{yz}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=ze^{yz},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=ye^{yz}$$

$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $g(x,y,z)=\sin^3(xyz)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=3yz\sin^2(xyz)\cos(xyz),\quad \frac{\partial g}{\partial y}=3xz\sin^2(xyz)\cos(xyz),$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=3xy\sin^2(xyz)\cos(xyz)$$

Definition 2.5

Die Ebene durch den Punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ mit den Steigungen

$$f_x(x_0,y_0),\qquad f_y(x_0,y_0)$$

in Richtung x und y nennt man die Tangentialebene der Funktion f an der Stelle (x_0,y_0).
Sie existiert, falls f_x und f_y an der Stelle (x_0,y_0) stetig sind.

Die **Tangentialebenengleichung**:

$$g(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt P bedeutet, dass die Funktion in einer Umgebung von P hinreichend gut durch die entsprechende Tangentialebene angenähert werden kann.

Satz 2.6
Eine Funktion $f(x,y)$ ist genau dann differenzierbar auf einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn beiden partiellen Ableitungen auf B existieren und stetig sind.

Definition 2.7
Der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt p ist der Vektor der partiellen Ableitungen in diesem Punkt:

$$\nabla f(p) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) \\ \vdots \\ f_{x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Manchmal schreibt man für den Gradienten auch

$$\nabla f = grad\ f$$

Allgemeine Kettenregel

Die verkettete Funktion $g(t) = f(x(t),\ y(t))$ mit der Variable t hat die Ableitung

$$g'(t) = f_x(x(t),\ y(t))x'(t) + f_y(x(t),\ y(t))y'(t).$$

Die verkettete Funktion $g(u,v) = f(x(u,v),\ y(u,v))$ mit den Variablen u,v hat die Ableitung

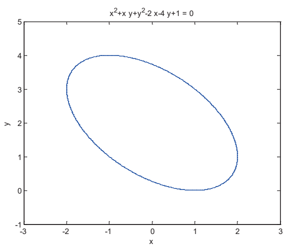
$$g_u(u,v) = f_x(x(u,v),\ y(u,v))x_u(u,v) + f_y(x(u,v),\ y(u,v))y_u(u,v)$$
$$g_v(u,v) = f_x(x(u,v),\ y(u,v))x_v(u,v) + f_y(x(u,v),\ y(u,v))y_v(u,v)$$

Implizite Differenziation

Beim Ableiten einer impliziten Gleichung $F(x,y)=0$ in den Variablen x und y nach x erhält man $y'(x)$ mit der allgemeinen Kettenregel in der Form

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,\ y(x))}{F_y(x,\ y(x))}.$$

Beispiel: $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$



$$y'(x) = -\frac{2x+y-2}{x+2y-4}$$

$$(x,y) = (1,0), (-1,4) \Rightarrow y' = 0$$

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix einer Funktion f ist eine Matrix, die aus allen zweiten partiellen Ableitungen von f besteht:

$$H(x,\ y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,\ y) & f_{xy}(x,\ y) \\ f_{yx}(x,\ y) & f_{yy}(x,\ y) \end{bmatrix}.$$

Beispiel: $f(x,y) = x^3 + \sin(xy) + y^2 + \cos(x) + y$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + y\cos(xy) - \sin(x), \quad f_y(x,y) = x\cos(xy) + 2y + 1,$$
$$\Longrightarrow \quad f_{xx}(x,y) = 6x - y^2\sin(xy) - \cos(x), \quad f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$f_{yx}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy), \quad f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(xy) + 2$$

$$\Longrightarrow \quad H(x,\ y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,\ y) & f_{xy}(x,\ y) \\ f_{yx}(x,\ y) & f_{yy}(x,\ y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - y^2\sin(xy) - \cos(x) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) + 2 \end{bmatrix}.$$

Hinreichende Bedingungen für einen Extremwert

Eine Funktion f mit zwei Variablen besitzt an der Stelle (x_0, y_0) einen Extremwert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Beide partiellen Ableitungen erster Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) sind null:

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

- Die Determinante der Hesse-Matrix mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) ist positiv:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

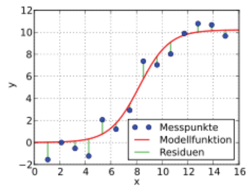
Ein lokales Maximum ergibt sich, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ und ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Eine Messung liefert zu den n verschiedenen Punkten $x_1, \cdots, x_n$ die jeweiligen Messwerte $y_1, \cdots, y_n$.
Gesucht ist eine Funktion f, welche die gegebenen Messwerte an den Stellen $x_1, \cdots, x_n$ *möglichst gut annähert.*

Bei der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate minimiert man die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den Messpunkten y_i und den Funktionswerten an den Messstellen $f(x_i)$ für $i = 1, \cdots, n$.

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \to \min.$$



Als Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ erhalten wir somit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nun berechnen wir $A^T\mathbf{y}$ und $A^T A$:

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Zu lösen bleibt nun das System

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir als die beste lineare Annäherung die Gerade

$$f = \frac{2}{5}x + \frac{13}{10}.$$

Definition 4.3

Eine lineare Ausgleichsfunktion ist eine Funktion, die linear in den Modellparametern $c_1, \cdots, c_m$ ist:

$$f(x, c_1, c_2, \cdots, c_m) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_m g_m(x).$$

Normalengleichungen für lineare Ausgleichsprobleme

Die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu den Messpunkten (x_i, y_i) mit $i = 1, \cdots, n$ für ein lineares Ausgleichsproblem mit Komponenten $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ und Koeffizienten $c_1, \cdots, c_m$ lauten

$$A^T A\mathbf{c} = A^T\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_m(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \ldots & g_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \ldots & g_m(x_n) \end{bmatrix}.$$

Ableitung vektorwertiger Funktionen, Jakobi-Matrix

Unter der **Ableitung einer vektorwertigen Funktion** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ versteht man die von $x_1, \cdots, x_n$ abhängige Matrix

$$J_f\big|_p := \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

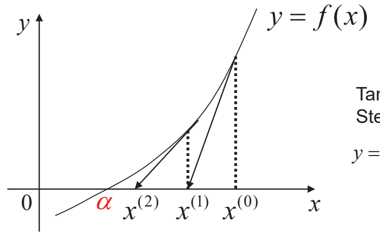
Sie enthält alle partiellen Ableitungen der Komponenten $f_1, \cdots, f_m$ von f.

Diese Matrix nennt man **Jacobi-Matrix**.

Mehrdimensionales Newton-Verfahren

1D-Newton-Verfahren

$$\boxed{x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}}$$



Tangente Gerade an der Stelle $(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$:

$$y = f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + f(x^{(n)})$$

Welche Norm sollen wir verwenden?

Es sei V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, mit $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbf{K}=\mathbb{C}$.

Ferner sei $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

N1) (Definitheit) $\|u\| \geq 0$, und $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, für alle $u \in V$.

N2) (Homogenität) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ für alle $u \in V, \lambda \in \mathbf{K}$.

N3) (Dreiecksungleichung) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$.

Dann heißt $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum oder normierter linearer Raum oder normierter Raum. Die Abbiludng $\|\cdot\|$ heißt Norm auf V.

Beispiel: $V = \mathbf{K}^n$ wird mit

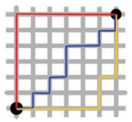
$$\|u\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left(u = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbf{K}^n\right)$$

und festem $p \in [1, \infty)$ zu einem normierten Raum $\left(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p\right)$. Auch mit

$$\|u\|_\infty := \max_{k=1,\cdots,n} |u_k| \qquad \left(u = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbf{K}^n\right)$$

wird $\mathbf{K}^n$ zu einem normierten Raum $\left(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty\right)$.

$p=1$ (Taxi-cab norm, Manhattan Distanz)



Auf beliebigen endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent, also
$\exists c, C > 0,\ c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$

Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 2\sin x \cos x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \left(J_f(\mathbf{x}^{(n)})\right)^{-1} f(\mathbf{x}^{(n)})}$$

$\Updownarrow$

$$\left[J_f(\mathbf{x}^{(n)})\right]\mathbf{y}^{(n)} = -f(\mathbf{x}^{(n)}) \quad \text{LGS}$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{y}^{(n)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0.708073 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.708073 \\ 0.508793 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.767891 \\ 0.482494 \end{pmatrix}$$

$$(x^*, y^*) \approx (0.767538, 0.482143)$$

Bogenlänge eines Graphen

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist die Bogenlänge L, der durch den Graphen $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}\subseteq\mathbb{R}^2$ beschriebenen Kurve, gegeben durch

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Hilfsmittel: **Der Mittelwertsatz**

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist, dann gibt es eine Zwischenstelle $z\in(a,b)$ mit

$$f(b)-f(a)=f'(z)(b-a).$$

Volumen von Rotationskörpern

Das Volumen V eines Körpers im Anschauungsraum, der durch Rotation des Graphen einer stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ um die x-Achse entsteht, ist gegeben durch

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Analog erhält man bei Rotation einer Funktion g mit $g(y)=x$ um die y-Achse in einem Intervall $[c,d]$ das Volumen

$$V=\pi\int_c^d g(y)^2\,dy.$$

Definition 9.3 (Differentialgleichung n-ter Ordnung)

Unter einer **Differentialgleichung n-ter Ordnung** $(n\in\mathbb{N})$ auf einem Intervall $I\subset\mathbb{R}$ versteht man eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(x)=f(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)),\quad x\in I.$$

Hierbei ist $f:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Funktion von $n+1$ Variablen, $y:I\to\mathbb{R}$ ist eine gesuchte Funktion.

Beispiel

$$y''(x)+y(x)=\sin(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Wir werden später herausfinden, dass sich jede Lösung dieser Differentialgleichung in der Form

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

schreiben lässt. Hierbei sind c_1 und c_2 zwei beliebige Integrationskonstanten.

Die Anzahl der Integrationskonstanten in der Lösung einer Differentialgleichung entspricht gerade der Ordnung der Gleichung.

Definition 9.4 (Anfangswertproblem)

Ist zusätzlich zu der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x)=f(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)),\quad x\in I.$$

noch ein Satz von n Bedingungen

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

gegeben, so sprechen wir von einem **Anfangswertproblem** für die gesuchte Funktion y.
Dabei muss x_0 eine Stelle aus dem Abschluss des Intervalls I sein.

Beispiel

$$\begin{cases}y''(x)+y(x)=\sin(x),\quad x\in\mathbb{R},\\ y(0)=0,\ y'(0)=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x),\quad y'(x)=-c_1\sin(x)+c_2\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{x}{2}\sin(x)$$

$$\Rightarrow c_1=0,c_2=1\Rightarrow y(x)=\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x)$$

Bei einer separablen Gleichung kann nach x und y getrennt integriert werden.

$$y'(x) = y(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

Da uns die triviale Lösung nicht interessiert, nehmen wir $y(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 1\, dx$$

Durch unbestimmte Integrale können wir zur Stammfunktion übergehen.

$$\Rightarrow \ln|y| = x + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Logarithmische Integration

$$\Rightarrow |y| = e^{x+d} = e^d e^x$$

$$\Rightarrow y = \pm e^d e^x = c e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

$c := \pm e^d$

Lösungen $y \equiv 0, \quad y = ce^x \ (c \in \mathbb{R})$

$$y'(x) = g(y(x))h(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int h(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(z)} dz = \int h(x)dx$$

Substitutionsmethode
$z = y(x) \Rightarrow dz = y'(x)dx$

Man muss nun hoffen, dass die Integrale über h und $1/g$ berechnet werden können und die resultierende Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden kann. Falls dies gelingt, hat man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung explizit bestimmt.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'(x) = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

lässt sich mit der Substitution

$$u = ax + by + c$$

in eine separierbare Differentialgleichung transformieren.

Beispiel $y'(x) = (x+y)^2$

$$u := x + y \Rightarrow u' = 1 + y' = 1 + u^2$$

separable Differenzialgleichung!

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2} dx = \int 1\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int 1\, dx \quad (z = u(x))$$

$$\Rightarrow \arctan(z) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z = \tan(x + c)$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan(x+c) - x$$

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

lässt sich mit der Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

in eine separierbare Differentialgleichung transformieren.

$$u := \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$\Rightarrow u + xu' = f(u)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

separable Differenzialgleichung!

Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die Idee ist, die Lösung durch einen **Ansatz** zu bestimmen.

Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

$$\Downarrow \quad y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\left(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Dieses Polynom nennt man das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung.

Nullstellen Bestimmung des charakteristischen Polynoms

$$\longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

1) Einfache reelle Nullstellen

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \cdots, n)$$

Beispiel $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$.

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$