

# Appunti di Analisi matematica 1

Paolo Acquistapace

7 aprile 2023

# Indice

<b>1 Numeri</b>	<b>1</b>
1.1 Alfabeto greco . . . . .	1
1.2 Insiemi . . . . .	1
1.3 Funzioni . . . . .	5
1.4 Il sistema dei numeri reali . . . . .	7
1.5 Assioma di completezza . . . . .	10
1.6 Numeri naturali, interi, razionali . . . . .	17
1.7 La formula del binomio . . . . .	27
1.8 Radici $n$ -sime . . . . .	37
1.9 Valore assoluto . . . . .	42
1.10 La funzione esponenziale . . . . .	46
1.11 Geometria nel piano . . . . .	56
1.12 Numeri complessi . . . . .	72
<b>2 Successioni</b>	<b>99</b>
2.1 Limiti di successioni . . . . .	99
2.2 Serie . . . . .	109
2.3 Successioni monotone . . . . .	113
2.4 Criteri di convergenza per le serie . . . . .	120
2.5 Convergenza assoluta e non . . . . .	127
2.6 Successioni di Cauchy . . . . .	135
2.7 Serie di potenze . . . . .	137
2.8 Riordinamento dei termini di una serie . . . . .	149
2.9 Moltiplicazione di serie . . . . .	156
<b>3 Funzioni</b>	<b>162</b>
3.1 Spazi euclidei $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{C}^m$ . . . . .	162
3.2 Funzioni reali di $m$ variabili . . . . .	174
3.3 Limiti . . . . .	181
3.4 Proprietà delle funzioni continue . . . . .	194
3.5 Asintoti . . . . .	204
<b>4 Calcolo differenziale</b>	<b>206</b>
4.1 La derivata . . . . .	206
4.2 Differenziabilità . . . . .	219

4.3	Proprietà delle funzioni derivabili . . . . .	230
4.4	Condizioni sufficienti per la differenziabilità . . . . .	238
4.5	Differenziabilità di funzioni composte . . . . .	240
4.6	Derivate successive . . . . .	244
4.7	Confronto di infinitesimi e infiniti . . . . .	249
4.8	Formula di Taylor . . . . .	256
4.9	Massimi e minimi relativi per funzioni di una variabile . . . . .	271
4.10	Forme quadratiche . . . . .	281
4.11	Massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili . . . . .	286
4.12	Convessità . . . . .	290
<b>5</b>	<b>Calcolo integrale</b>	<b>301</b>
5.1	L'integrale . . . . .	301
5.2	Proprietà dell'integrale . . . . .	310
5.3	Alcune classi di funzioni integrabili . . . . .	315
5.4	Il teorema fondamentale del calcolo integrale . . . . .	320
5.5	Metodi di integrazione . . . . .	325
5.6	Integrazione delle funzioni razionali . . . . .	334
5.7	Formula di Stirling . . . . .	349
5.8	Integrali impropri . . . . .	352
<b>6</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>361</b>
6.1	Generalità . . . . .	361
6.2	Alcuni tipi di equazioni del primo ordine . . . . .	372
6.3	Analisi qualitativa . . . . .	378
6.4	Equazioni lineari del secondo ordine . . . . .	392
<b>Indice analitico</b>		<b>398</b>

# Capitolo 1

## Numeri

### 1.1 Alfabeto greco

Un ingrediente indispensabile per lo studente che affronta un corso di analisi matematica è la conoscenza dell'alfabeto greco, di cui verranno usate a vario titolo gran parte delle lettere (minuscole e maiuscole). Eccolo:

alfa	$\alpha$	A	iota	$\iota$	I	ro	$\rho$	P
beta	$\beta$	B	cappa	$\kappa$	K	sigma	$\sigma$	$\Sigma$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	lambda	$\lambda$	$\Lambda$	tau	$\tau$	T
delta	$\delta$	$\Delta$	mu (mi)	$\mu$	M	iupsilon	$v$	$\Upsilon$
epsilon	$\varepsilon$	E	nu (ni)	$\nu$	N	fi	$\varphi$	$\Phi$
zeta	$\zeta$	Z	csi	$\xi$	$\Xi$	chi	$\chi$	X
eta	$\eta$	H	omicron	$\circ$	O	psi	$\psi$	$\Psi$
teta	$\vartheta$	$\Theta$	pi	$\pi$	$\Pi$	omega	$\omega$	$\Omega$

### Esercizi 1.1

1. Scrivere il proprio nome e cognome in lettere greche.

### 1.2 Insiemi

Il concetto di *insieme* è un concetto primitivo, che quindi non può essere definito se non ricorrendo a circoli viziosi; comunque in modo vago ma efficace possiamo dire che un insieme è una collezione di *elementi*. Indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole  $A, B, \dots$  e gli elementi di un insieme con lettere minuscole  $a, b, x, t, \dots$ .

Per evitare paradossi logici, è bene parlare di insiemi solo dopo aver fissato un insieme “universo”  $X$ , che è l’ambiente dentro al quale lavoriamo, e considerarne i vari *sottoinsiemi* (cioè gli insiemi  $A$  contenuti in  $X$ ). La scelta dell’ambiente  $X$  va fatta di volta in volta e sarà comunque chiara dal contesto.

Come si descrive un insieme? Se esso è *finito* (ossia ha un numero finito di elementi), e questi elementi sono “pochi”, la descrizione può avvenire semplicemente elencandoli; ma se l’insieme ha “molti” elementi, o ne ha addirittura una quantità infinita (si dice

allora che l'insieme è *infinito*), esso si può descrivere individuando una proprietà  $p(x)$  che gli elementi  $x$  dell'universo  $X$  possono possedere o no, e che *caratterizza* l'insieme che interessa. Per esempio, l'insieme

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

è altrettanto bene descritto dalla proprietà

$$p(x) = \text{"}x \text{ è divisore di } 12\text{"},$$

la quale, all'interno dei numeri naturali (che in questo caso costituiscono il nostro universo), contraddistingue esattamente gli elementi dell'insieme  $A$ .

Introduciamo alcuni simboli che useremo costantemente nel seguito.

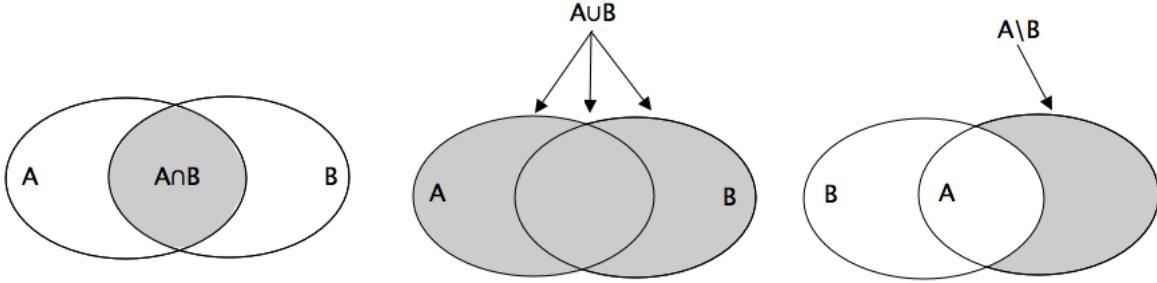
- $x \in A$  significa:  $x$  appartiene ad  $A$ , ovvero  $x$  è un elemento di  $A$ .
- $A \subseteq B, B \supseteq A$  significano:  $A$  è contenuto in  $B$ , ovvero  $B$  contiene  $A$ , ovvero ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$ , o anche  $A$  è sottoinsieme di  $B$ .
- $A = B$  significa:  $A$  coincide con  $B$ , ovvero  $A$  e  $B$  hanno gli stessi elementi, ovvero  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .
- $A \subset B, B \supset A$  significano:  $A$  è strettamente contenuto in  $B$ , ovvero  $A$  è sottoinsieme proprio di  $B$ , ovvero ogni elemento di  $A$  è elemento di  $B$  ma esiste almeno un elemento di  $B$  che non è elemento di  $A$ , ovvero  $A \subseteq B$  ma  $A$  non coincide con  $B$ .

Per negare le proprietà precedenti si mette una sbarretta sul simbolo corrispondente: ad esempio,  $x \notin A$  significa che  $x$  non appartiene all'insieme  $A$ ,  $A \neq B$  significa che gli insiemi  $A$  e  $B$  non hanno gli stessi elementi (e dunque vi è almeno un elemento che sta in  $A$  ma non in  $B$ , oppure che sta in  $B$  ma non in  $A$ ), eccetera.

Sia  $X$  un insieme e siano  $A, B$  sottoinsiemi di  $X$ . Definiamo:

- $A \cup B = \text{unione}$  di  $A$  e  $B$ , ossia l'insieme degli  $x \in X$  che appartengono ad  $A$  oppure a  $B$  (oppure ad entrambi).
- $A \cap B = \text{intersezione}$  di  $A$  e  $B$ , ossia l'insieme degli  $x \in X$  che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ .
- $A \setminus B = \text{differenza}$  fra  $A$  e  $B$ , ossia l'insieme degli  $x \in X$  che appartengono ad  $A$ , ma non a  $B$ .
- $A^c = X \setminus A = \text{complementare}$  di  $A$  in  $X$ , ossia l'insieme degli  $x \in X$  che non appartengono ad  $A$ .
- $\emptyset = \text{insieme vuoto}$ , ossia l'unico insieme privo di elementi.

Si noti che  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ , ma in generale  $A \setminus B \neq B \setminus A$ . Se  $A \cap B = \emptyset$ , gli insiemi  $A$  e  $B$  si dicono *disgiunti*.



Vi sono altre importanti proprietà degli insiemi e delle operazioni su di essi, di cui non ci occupiamo qui: ne parleremo di volta in volta quando ci occorreranno. Introduciamo ora alcuni insiemi importanti:

- $\mathbb{N}$  = insieme dei *numeri naturali* =  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ .
- $\mathbb{N}^+$  = insieme dei *numeri naturali diversi da 0* =  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ .
- $\mathbb{Z}$  = insieme dei *numeri interi* =  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$ .
- $\mathbb{Q}$  = insieme dei *numeri razionali*, cioè di tutte le frazioni  $\frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^+$ .
- $\mathbb{R}$  = insieme dei *numeri reali*: su questo insieme ci soffermeremo a lungo; esso contiene  $\mathbb{Q}$ , ma anche numeri *irrazionali* come  $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ .
- $\mathbb{C}$  = insieme dei *numeri complessi*, cioè i numeri della forma  $a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ; la quantità  $i$  si chiama *unità immaginaria* e verifica l'uguaglianza  $i^2 = -1$ : essa *non è* un numero reale. Anche su questo insieme avremo molto da dire.

Notiamo che valgono le inclusioni proprie

$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nelle nostre formule useremo alcuni altri simboli che sono delle vere e proprie abbreviazioni stenografiche, e che andiamo ad elencare.

- Il simbolo “ $\forall$ ” significa “per ogni”: dunque dire che “ $x \in B \ \forall x \in A$ ” equivale a dichiarare che ogni elemento di  $A$  sta anche in  $B$ , cioè che  $A \subseteq B$ .
- Il simbolo “ $\exists$ ” significa “esiste almeno un”: dunque affermare che “ $\exists x \in A$  tale che  $x \in B$ ” vuol dire che c’è almeno un elemento di  $A$  che sta anche in  $B$ , ossia che  $A \cap B$  non è vuoto. I due simboli  $\forall, \exists$  vengono detti “quantificatori esistenziali”.
- Il simbolo “ $\exists!$ ” significa “esiste un unico”: dunque la frase “ $\exists! x \in A$  tale che  $x \in B$ ” indica che c’è uno ed un solo elemento di  $A$  che sta in  $B$ , ossia che  $A \cap B$  è costituito da un solo elemento.
- Il simbolo “ $:$ ” significa “tale che”: dunque l’enunciato “ $\exists! x \in A : x \in B$ ” ha lo stesso significato dell’affermazione del punto precedente.

- Il simbolo “ $\Rightarrow$ ” significa “implica”: quindi la frase “ $x \in A \Rightarrow x \in B$ ” vuol dire che se  $x \in A$  allora  $x \in B$ , ossia che  $A \subseteq B$ . Useremo anche il simbolo contrario “ $\Leftarrow$ ” per indicare un’implicazione nel verso opposto: con la frase “ $x \in A \Leftarrow x \in B$ ” intendiamo dire che se  $x \in B$  allora  $x \in A$ , ossia che  $B \subseteq A$ .
- Il simbolo “ $\Leftrightarrow$ ” significa “se e solo se”: si tratta della doppia implicazione, la quale ci dice che i due enunciati a confronto sono equivalenti. Ad esempio la frase “ $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ ” indica che  $A = B$ .

Nel nostro corso non ci occuperemo di questioni di logica formale e non parleremo di predicati, proposizioni, variabili, tabelle di verità, eccetera; cercheremo di ragionare secondo il nostro buon senso, affinato (si spera) dalle passate esperienze scolastiche, rimandando al corso di logica la sistemazione rigorosa di questi aspetti. Ci limitiamo ad osservare che la pulizia formale è sempre fondamentale, ma non determinante al fine di dire cose giuste: l'affermazione di poco sopra “ $\exists x \in A : x \in B$ ” è formalmente perfetta ma, se ad esempio

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 > 25\},$$

essa risulta inequivocabilmente falsa.

Come si fa a negare un’affermazione della forma “ $\forall x \in A \exists y \in B : x = y$ ”? Dobbiamo formulare l’esatto contrario dell’enunciato precedente: dunque, a lume di naso, ci sarà almeno un  $x \in A$  per il quale, comunque si scelga  $y \in B$ , risulterà sempre  $x \neq y$ ; e dunque, “ $\exists x \in A : x \neq y \forall y \in B$ ”. Si noti come i quantificatori  $\exists$  e  $\forall$  si siano scambiati di posto: questa è una regola generale delle negazioni.

Un’altra importante operazione fra due insiemi  $X, Y$  è il *prodotto cartesiano*  $X \times Y$ : esso è definito come l’insieme di tutte le coppie  $(x, y)$  con  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Può anche succedere che  $Y = X$ , ed in tal caso scriveremo spesso  $X^2$  in luogo di  $X \times X$ ; in questo caso si noti che entrambe le coppie  $(x, y)$  e  $(y, x)$  appartengono all’insieme  $X^2$ , e che esse sono diverse l’una dall’altra.

## Esercizi 1.2

1. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Scrivere la negazione delle seguenti affermazioni:

- (i)  $\exists y \in \mathbb{R} : x < y \forall x \in A$ ,
- (ii)  $\forall x \in A \exists y \in A : x < y$ ,
- (iii)  $\exists y, z \in \mathbb{R} : y < x < z \forall x \in A$ ,
- (iv)  $\forall x \in A \exists y, z \in A : y < x < z$ .

2. Elencare gli elementi di ciascuno dei seguenti insiemi:

$$A = \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{1}{k} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$B = \{k \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{Z} : k = 6h\};$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m \leq 10, n = 6m\};$$

$$D = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+2} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = 3^m \right\};$$

$$F = \left\{ n \in \mathbb{N} : n + m > 25 \ \forall m \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Dimostrare che

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} > 0 \right\} = ] -\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[.$$

4. Sono vere le seguenti affermazioni?

- (i)  $1 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$ ,
- (ii)  $0 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$ ,
- (iii)  $-1 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$ ,
- (iv)  $-2 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$ .

5. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\},$$

$$B = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}.$$

6. Siano  $A, B, C, D$  sottoinsiemi di un insieme  $X$ . Provare le seguenti relazioni (*formule di de Morgan*):

- (i)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,
- (ii)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ,
- (iii)  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ ,
- (iv)  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ ,
- (v)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ,
- (vi)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

### 1.3 Funzioni

Uno dei concetti più importanti della matematica, e non solo dell'analisi, è quello di funzione. Una *funzione*  $f$  è una corrispondenza (di qualunque natura) fra due insiemi  $X$  e  $Y$ , con l'unica regola di associare *ad ogni* elemento  $x$  di  $X$  *uno e un solo* elemento di  $Y$ , che viene indicato con  $f(x)$ . Si suole scrivere  $f : X \rightarrow Y$  (si legge “ $f$  da  $X$  in  $Y$ ”) e si dice che  $f$  è *definita su*  $X$ , *a valori in*  $Y$ . L'insieme  $X$  è il *dominio* di  $f$ , mentre l'*immagine*, o *codominio*, di  $f$  è il sottoinsieme  $f(X)$  di  $Y$  costituito da tutti i punti di  $Y$  che sono “immagini” mediante  $f$  di punti di  $X$ , cioè sono della forma  $f(x)$  per qualche  $x \in X$ . Può benissimo capitare che uno stesso  $y$  sia immagine di diversi punti di  $X$ , ossia che si abbia  $y = f(x) = f(x')$  per  $x, x' \in X$  e  $x \neq x'$ ; quello che non può succedere è che ad un  $x \in X$  vengano associati due distinti elementi di  $Y$ , cioè che risulti  $f(x) = y$  e  $f(x) = y'$  con  $y \neq y'$ .

Esempi di funzioni appaiono dappertutto: a ciascun membro dell'insieme  $S$  degli studenti che sostengono un esame si può associare il relativo voto: questa è una funzione  $S \rightarrow \mathbb{N}$ . Ad ogni capoluogo d'Italia si possono associare le temperature minima e massima di una data giornata: questa è una funzione dall'insieme  $C$  delle città capoluogo italiane nel prodotto cartesiano  $\mathbb{Z}^2$ . Ad ogni corridore che porta a termine una data corsa ciclistica si può associare il tempo impiegato, misurato ad esempio in secondi: avremo una funzione a valori in  $\mathbb{R}$  (se teniamo conto dei decimi, centesimi, millesimi, eccetera).

Il *grafico* di una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è il sottoinsieme del prodotto cartesiano  $X \times Y$  costituito da tutte le coppie della forma  $(x, f(x))$ , cioè da tutte e sole le coppie  $(x, y) \in X \times Y$  che risolvono l'equazione  $y = f(x)$ .

Le funzioni si possono “comporre”: se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono funzioni, ha senso considerare la *funzione composta*  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , definita da  $g \circ f(x) = g(f(x))$  per ogni  $x \in X$ . Naturalmente, affinché la composizione abbia senso, occorre che il codominio di  $f$  sia contenuto nel dominio di  $g$ .

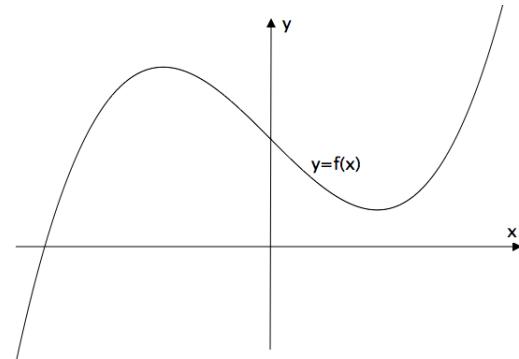
Una funzione si dice *iniettiva* se a punti distinti vengono associate immagini distinte, ovvero se

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

Una funzione si dice *surgettiva* se si ha  $f(X) = Y$ , cioè se ogni  $y \in Y$  è immagine di almeno un  $x \in X$ .

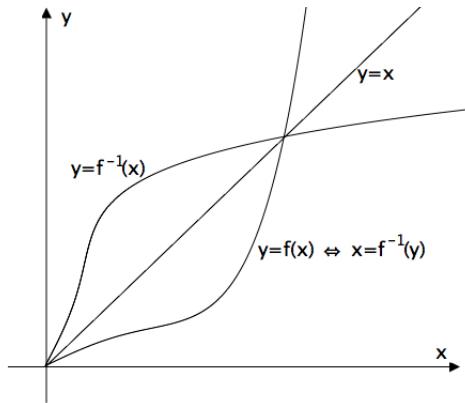
Una funzione si dice *bigettiva*, o *invertibile*, o *biunivoca*, se è sia iniettiva che surgettiva: in tal caso, per ogni  $y \in Y$  vi è un unico  $x \in X$  tale che  $f(x) = y$ . In questo caso è definita la *funzione inversa*  $f^{-1}$  (si legge “ $f$  alla meno uno”);  $f^{-1}$  è definita su  $Y$ , a valori in  $X$ , e ad ogni  $y \in Y$  associa quell'unico  $x$  per cui  $f(x) = y$ . Si dice allora che  $f$  definisce una *corrispondenza biunivoca* fra gli insiemi  $X$  e  $Y$ . In particolare, se  $f$  è bigettiva si ha  $f^{-1}(f(x)) = x$  per ogni  $x \in X$  ed anche  $f(f^{-1}(y)) = y$  per ogni  $y \in Y$ : in altre parole, risulta  $f^{-1} \circ f = I_X$ ,  $f \circ f^{-1} = I_Y$ , avendo indicato con  $I_X$  e  $I_Y$  le *funzioni identità* su  $X$  e su  $Y$ , definite da  $I_X(x) = x$  per ogni  $x \in X$  e  $I_Y(y) = y$  per ogni  $y \in Y$ .

**Osservazione 1.3.1** Se  $f : X \rightarrow X$  è una funzione invertibile e  $f^{-1} : X \rightarrow X$  è la sua funzione inversa, le equazioni  $y = f(x)$  e  $x = f^{-1}(y)$  sono equivalenti e descrivono entrambe il grafico di  $f$ . Invece, scambiando fra loro le variabili  $x, y$  (ossia effettuando una simmetria rispetto alla retta  $y = x$  nel piano cartesiano  $X \times X$ ), la seconda equazione diventa  $y = f^{-1}(x)$  e descrive il grafico di  $f^{-1}$ , il quale è dunque il simmetrico del grafico di  $f$  rispetto alla bisettrice del primo quadrante.



Si noti che è sempre possibile supporre che una data funzione  $f : X \rightarrow Y$  sia surgettiva: basta pensarla come funzione da  $X$  in  $f(X)$ . Il problema è che nei casi concreti è spesso difficile, e talvolta impossibile, caratterizzare il sottoinsieme  $f(X)$  di  $Y$ .

Vedremo innumerevoli esempi di funzioni e di grafici nel seguito del corso.



### Esercizi 1.3

- Posto  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$ , e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = -t^2$ , scrivere esplicitamente le funzioni composte

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(t) = f(g(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Quali di queste funzioni a valori in  $\mathbb{R}$  sono iniettive, quali surgettive e quali invertibili?

(i) $f(x) = 1/x$ , $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;	(ii) $f(x) = x^3 - x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;
(iii) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ , $x \in \mathbb{R}$ ;	(iv) $f(k) = (-1)^k$ , $k \in \mathbb{Z}$ ;
(v) $f(s) = s^2$ , $s \in \mathbb{R}$ ;	(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

- Sia  $f(x) = 2x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

(i) $f(x)$ ;	(ii) $f(-x)$ ;
(iii) $\max\{f(x), f(-x)\}$ ;	(iv) $f(f(x))$ ;
(v) $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ;	(vi) $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ;
(vii) $\min\{f(x), 0\}$ ;	(viii) $\max\{-f(-x), 0\}$ .

## 1.4 Il sistema dei numeri reali

Definire in modo rigoroso che cosa siano i numeri reali è un compito tutt'altro che elementare anche per un matematico di professione: non è il caso quindi di addentrarsi in questa problematica all'inizio di un corso di analisi. Ma anche senza avere pretese "fondazionali", per lavorare coi numeri reali occorre conoscerne le proprietà, e riflettere per un momento sul significato dei simboli e delle formule che siamo abituati a manipolare più o meno meccanicamente fin dalle scuole elementari.

Le proprietà dei numeri reali si possono classificare in tre gruppi:

- (a) *proprietà algebriche*, riguardanti le operazioni che si possono eseguire tra numeri reali;
- (b) *proprietà di ordinamento*, relative alla possibilità di confrontare tra loro i numeri reali per identificarne il “maggiorre”;
- (c) *proprietà di continuità*, più profonde e nascoste, legate all’idea che devono esistere “abbastanza numeri” per rappresentare grandezze che variano “con continuità”, quali il tempo o la posizione di un punto su una retta.

Tutte queste proprietà *caratterizzano* il sistema  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, nel senso che esse si possono assumere come *assiomi* che definiscono ed individuano in modo unico il sistema  $\mathbb{R}$ . Noi non entreremo in questa questione, limitandoci più modestamente a mettere in rilievo il fatto che le proprietà (a) e (b) sono alla base di tutte le regole di calcolo che abbiamo imparato ad usare fin dall’infanzia.

## Proprietà algebriche

Nell’insieme  $\mathbb{R}$  sono definite due operazioni, l’*addizione* e la *moltiplicazione*, le quali associano ad ogni coppia  $a, b$  di numeri reali la loro *somma*, che indichiamo con  $a + b$ , e il loro *prodotto*, che indichiamo con  $a \cdot b$  od anche con  $ab$ . Valgono le seguenti proprietà:

1. *associatività*:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,  $a(bc) = (ab)c$  per ogni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;
2. *commutatività*:  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$  per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
3. *distributività*:  $a(b + c) = ab + ac$  per ogni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;
4. *esistenza degli elementi neutri*: esistono (unici) due numeri reali distinti, che indichiamo con 0 e 1, tali che  $a + 0 = a$ ,  $a \cdot 1 = a$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ;
5. *esistenza degli opposti*: per ogni  $a \in \mathbb{R}$  esiste un (unico)  $b \in \mathbb{R}$  tale che  $a + b = 0$ , e tale numero  $b$ , detto *opposto* di  $a$ , si indica con  $-a$ ;
6. *esistenza dei reciproci*: per ogni  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  esiste un (unico)  $b \in \mathbb{R}$  tale che  $ab = 1$ ; tale numero  $b$  si dice *reciproco* di  $a$  e si indica con  $\frac{1}{a}$  od anche con  $a^{-1}$ .

Dalle proprietà precedenti seguono facilmente tutte le regole usuali dell’algebra elementare, quali:

- il fatto che  $a \cdot 0 = 0$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ;
- la semplificazione per l’addizione: se  $a + b = a + c$ , allora  $b = c$ ;
- la semplificazione per la moltiplicazione: se  $ab = ac$  e  $a \neq 0$ , allora  $b = c$ ;
- la definizione di *sottrazione*: per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  esiste un unico  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $a + c = b$ , e tale numero  $c$ , detto *differenza* fra  $b$  e  $a$ , si indica con  $b - a$ ;

- la definizione di *divisione*: per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$  esiste un unico  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $ac = b$ , e tale numero  $c$ , detto *quoziente*, si indica con  $\frac{b}{a}$ ;
- la *legge di annullamento del prodotto*: se  $ab = 0$  allora deve essere  $a = 0$  oppure  $b = 0$  (oppure entrambi).

Si provi a dimostrare gli enunciati precedenti utilizzando gli assiomi 1-6 !

## Proprietà di ordinamento

Nell'insieme dei numeri reali esiste un sottoinsieme  $P$ , i cui elementi sono detti *numeri positivi*, dotato delle proprietà seguenti:

7. se  $a, b$  sono numeri positivi, anche  $a + b$  e  $ab$  sono positivi;
8. per ogni  $a \in \mathbb{R}$  vale una e una sola di queste tre possibilità:  $a$  è positivo, oppure  $-a$  è positivo, oppure  $a = 0$ .

Si noti che, per l'assioma 8, il numero reale 0 non può essere positivo. I numeri diversi da 0 e non positivi si dicono *negativi*: dunque un numero reale  $a$  è negativo se e solo se  $-a$  è positivo. Si scrive  $a > 0$  quando  $a$  è positivo, e  $b > a$  (o equivalentemente  $a < b$ ) quando  $b - a$  è positivo, cioè  $b - a > 0$ ; in particolare,  $x < 0$  significa  $-x > 0$ , cioè  $x$  negativo. Si scrive poi  $a \geq 0$  quando  $a$  è positivo o uguale a 0, e  $b \geq a$  (o equivalentemente  $a \leq b$ ) quando  $b - a \geq 0$ . Si osservi che

$$a \geq b \quad \text{e} \quad a \leq b \quad \iff \quad a = b.$$

Dagli assiomi 7-8 discendono i seguenti altri fatti (esercizi 1.4.2 e 1.4.3).

- Il prodotto di due numeri negativi è positivo; in particolare, se  $x$  è un numero reale diverso da 0, il suo *quadrato*, ossia il numero reale  $x^2$  definito come  $x \cdot x$ , è sempre positivo:

$$x^2 = x \cdot x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Il numero 1 è positivo (e quindi  $\mathbb{N}^+ \subseteq P$ ).

Inoltre si deducono facilmente tutte le usuali regole di calcolo con le disuguaglianze: invitiamo il lettore a farlo.

Introduciamo adesso alcuni speciali sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  definiti mediante l'ordinamento: gli *intervalli*. Se  $a, b \in \mathbb{R}$  ed  $a \leq b$ , poniamo:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  = intervallo chiuso di estremi  $a, b$ ;
- $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  = intervallo aperto di estremi  $a, b$ ;
- $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  = intervallo semiaperto a destra di estremi  $a, b$ ;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  = intervallo semiaperto a sinistra di estremi  $a, b$ ;
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$  = semiretta chiusa di secondo estremo  $b$ ;

- $] -\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$  = semiretta aperta di secondo estremo  $b$ ;
- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$  = semiretta chiusa di primo estremo  $a$ ;
- $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$  = semiretta aperta di primo estremo  $a$ ;
- $] -\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  = retta reale.

(I simboli “ $-\infty$ ” e “ $+\infty$ ” si leggono “più infinito”, “meno infinito” e *non* sono numeri reali.)

## Esercizi 1.4

1. Provare che se  $u$  è un elemento di  $\mathbb{R}$  tale che  $a \cdot u = u$ , ove  $a$  è un fissato numero reale diverso da 1, allora  $u = 0$ .
2. Provare che il prodotto di due numeri negativi è positivo.
3. Provare che 1 è un numero positivo.
4. Sia  $a \leq b$ . Dimostrare che se  $c \geq 0$  allora  $ac \leq bc$ , mentre se  $c < 0$  si ha  $ac \geq bc$ .

## 1.5 Assioma di completezza

Le proprietà 1-8 sin qui viste non sono prerogativa esclusiva di  $\mathbb{R}$ , dato che sono ugualmente vere nell’insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ . Ciò che davvero caratterizza  $\mathbb{R}$  è la proprietà di continuità, che si esprime con il corrispondente *assioma di continuità*, detto anche *assioma di completezza*. Prima di enunciarlo in una delle sue numerose formulazioni equivalenti, conviene dare alcune definizioni.

**Definizione 1.5.1** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che  $A$  è limitato superiormente se esiste  $m \in \mathbb{R}$  tale che  $m \geq a$  per ogni  $a \in A$ . Tale numero  $m$  si dice maggiorante dell’insieme  $A$ .*

**Definizione 1.5.2** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che  $A$  è limitato inferiormente se esiste  $\mu \in \mathbb{R}$  tale che  $\mu \leq a$  per ogni  $a \in A$ . Tale numero  $\mu$  si dice minorante dell’insieme  $A$ .*

**Definizione 1.5.3** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che  $A$  è limitato se è sia limitato superiormente, sia limitato inferiormente.*

È chiaro che se  $A$  è limitato superiormente e  $m$  è un maggiorante di  $A$ , allora ogni numero reale  $x \geq m$  è ancora un maggiorante di  $A$ ; analogamente, se  $A$  è limitato inferiormente e  $\mu$  è un minorante di  $A$ , allora ogni numero reale  $x \leq \mu$  è ancora un minorante di  $A$ .

Ad esempio, se  $A = [0, 1]$  l’insieme dei minoranti di  $A$  è la semiretta  $] -\infty, 0]$  mentre l’insieme dei maggioranti di  $A$  è la semiretta  $[1, +\infty[$ . Se  $A = ]0, 1[$ , oppure  $[0, 1[$ , oppure  $]0, 1]$ , succede esattamente lo stesso. Invece, se  $A = [0, +\infty[$ , allora  $A$  non ha maggioranti, mentre sono minoranti di  $A$  tutti i numeri non positivi.

**Definizione 1.5.4** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme limitato superiormente. Diciamo che  $A$  ha massimo  $m$  se:

(i)  $m$  è un maggiorante di  $A$ ,

(ii)  $m \in A$ .

In tal caso, si scrive  $m = \max A$ .

**Definizione 1.5.5** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme limitato inferiormente. Diciamo che  $A$  ha minimo  $\mu$  se:

(i)  $\mu$  è un minorante di  $A$ ,

(ii)  $\mu \in A$ .

In tal caso, si scrive  $\mu = \min A$ .

Non è detto che un insieme limitato superiormente abbia massimo: per esempio,  $[0, 1[$  non ha massimo, perché esso è disgiunto dall'insieme dei suoi maggioranti. Analogamente, non è detto che un insieme limitato inferiormente abbia minimo. Notiamo anche che se  $A$  ha massimo, allora  $\max A$  è il minimo dell'insieme dei maggioranti di  $A$ , e che se  $A$  ha minimo, allora  $\min A$  è il massimo dell'insieme dei minoranti di  $A$ .

**Definizione 1.5.6** Due sottoinsiemi non vuoti  $A, B \subset \mathbb{R}$  si dicono separati se si ha

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

**Esempi 1.5.7** Sono coppie di insiemi separati:

$$]-\infty, 0], [0, \infty[; \quad ]-\infty, 0], ]0, \infty[; \quad ]-\infty, 0[, ]0, \infty[;$$

$$[0, 1[, [2, 3]; \quad [-2, -1], \mathbb{N}; \quad \{0\}, \{3\}; \quad \{0\}, \{0\}.$$

Sono coppie di insiemi non separati:

$$\{-1/2\}, \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \quad [0, 2], [1, 3]; \quad \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}, \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}.$$

Osserviamo inoltre che:

- se  $A, B$  sono insiemi separati, allora ogni elemento  $b \in B$  è un maggiorante di  $A$  e ogni elemento  $a \in A$  è un minorante di  $B$ ;
- se  $A$  è non vuoto e limitato superiormente, e se  $M$  è l'insieme dei maggioranti di  $A$ , allora  $A$  e  $M$  sono separati;
- similmente, se  $A$  è non vuoto e limitato inferiormente, e se  $N$  è l'insieme dei minoranti di  $A$ , allora  $N$  e  $A$  sono separati.

L'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$  asserisce la possibilità di interporre un numero reale fra gli elementi di qualunque coppia di insiemi separati: in sostanza, esso ci dice che i numeri reali sono in quantità sufficiente a riempire tutti i “buchi” fra coppie di insiemi separati. L'enunciato preciso è il seguente:

**9. (assioma di completezza)** per ogni coppia  $A, B$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  non vuoti e separati, esiste almeno un *elemento separatore*, cioè un numero reale  $\xi$  tale che

$$a \leq \xi \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Questo assioma sembra avere un carattere abbastanza intuitivo: in effetti è facile determinare esplicitamente gli elementi separatori in tutti i casi degli esempi 1.5.7 in cui essi esistono. Tuttavia, come vedremo, le conseguenze dell'assioma di completezza sono di larghissima portata.

Si osservi che in generale l'elemento separatore fra due insiemi separati  $A$  e  $B$  non è unico: se  $A = \{0\}$  e  $B = \{1\}$ , sono elementi separatori fra  $A$  e  $B$  tutti i punti dell'intervallo  $[0, 1]$ . Però se  $A$  è un insieme non vuoto limitato superiormente e scegliamo come  $B$  l'insieme dei maggioranti di  $A$ , allora vi è un *unico* elemento separatore fra  $A$  e  $B$ . Infatti ogni elemento separatore  $\xi$  deve soddisfare la relazione

$$a \leq \xi \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B;$$

in particolare, la prima diseguaglianza dice che  $\xi$  è maggiorante per  $A$ , ossia  $\xi \in B$ , e la seconda ci dice allora che  $\xi = \min B$ . Poiché il minimo di  $B$  è unico, ne segue l'unicità dell'elemento separatore.

In modo analogo, se  $B$  è non vuoto e limitato inferiormente e prendiamo come  $A$  l'insieme dei minoranti di  $B$ , allora vi è un unico elemento separatore fra  $A$  e  $B$ : il massimo dei minoranti di  $B$ .

**Definizione 1.5.8** *Sia  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto e limitato superiormente, sia  $M$  l'insieme dei maggioranti di  $A$ . L'unico elemento separatore fra  $A$  e  $M$  si dice estremo superiore di  $A$  e si denota con  $\sup A$ .*

Il numero reale  $\sup A$  è dunque il minimo dei maggioranti di  $A$ . In particolare, esso coincide con  $\max A$  quando quest'ultimo numero esiste.

**Definizione 1.5.9** *Sia  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto e limitato inferiormente, sia  $N$  l'insieme dei minoranti di  $A$ . L'unico elemento separatore fra  $N$  e  $A$  si dice estremo inferiore di  $A$  e si denota con  $\inf A$ .*

Il numero reale  $\inf A$  è dunque il massimo dei minoranti di  $A$  e coincide con  $\min A$  quando quest'ultimo numero esiste.

L'estremo superiore di un insieme  $A$  (non vuoto e limitato superiormente), la cui esistenza è conseguenza diretta dell'assioma di completezza, si caratterizza in questo modo:

**Proposizione 1.5.10** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e limitato superiormente, e sia  $m \in \mathbb{R}$ . Si ha  $m = \sup A$  se e solo se  $m$  verifica le seguenti due proprietà:*

(i)  $a \leq m$  per ogni  $a \in A$ ;

(ii) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{a} \in A$  tale che  $m - \varepsilon < \bar{a} \leq m$ .

**Dimostrazione** Se  $m = \sup A$ , allora  $m$  è un particolare maggiorante di  $A$ : quindi vale (i). D'altra parte, essendo  $m$  il minimo dei maggioranti di  $A$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  il numero  $m - \varepsilon$  non è un maggiorante per  $A$ : quindi c'è almeno un elemento  $\bar{a} \in A$  per il quale  $m - \varepsilon < \bar{a}$ , il che implica la condizione (ii).

Viceversa, se  $m$  verifica (i) e (ii), allora  $m$  è maggiorante di  $A$  mentre per ogni  $\varepsilon > 0$  il numero  $m - \varepsilon$  non può essere maggiorante di  $A$ . Ne segue che  $m$  è il minimo dei maggioranti di  $A$ , ossia  $m = \inf A$ .  $\square$

Una caratterizzazione analoga, la cui dimostrazione viene omessa essendo identica alla precedente, vale per l'estremo inferiore:

**Proposizione 1.5.11** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e limitato inferiormente, e sia  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si ha  $\mu = \inf A$  se e solo se  $\mu$  verifica le seguenti due proprietà:*

(i)  $\mu \leq a$  per ogni  $a \in A$ ;

(ii) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{a} \in A$  tale che  $\mu \leq \bar{a} < \mu + \varepsilon$ .  $\square$

**Esempi 1.5.12 (1)** Se  $A = [0, 1]$ , si ha  $\sup A = \max A = 1$ ,  $\inf A = \min A = 0$ .

(2) Se  $A = [0, 1[$ , si ha ancora  $\inf A = \min A = 0$ ,  $\sup A = 1$ , mentre  $\max A$  non esiste.

(3) Se  $A = \{-1, 7, 8\}$ , si ha  $\inf A = \min A = -1$ ,  $\sup A = \max A = 8$ .

(4) Questo esempio mostra l'importanza dell'assioma di completezza: esso permette di costruire, nell'ambito dei reali, il numero  $\sqrt{2}$ . Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\};$$

ovviamente  $A$  non è vuoto, perché  $1 \in A$ . Mostriamo che  $A$  è limitato superiormente: a questo scopo basta far vedere che sono maggioranti di  $A$  tutti i numeri positivi  $t$  tali che  $t^2 > 2$ . Infatti se  $t > 0$  e  $t^2 > 2$ , e se  $t$  non fosse un maggiorante di  $A$ , troveremmo un  $x \in A$  con  $x > t$ ; allora avremmo anche  $x > 0$  e quindi  $2 < t^2 < xt < x^2 < 2$ : ma la relazione  $2 < 2$  è assurda. Dunque  $A$  è limitato superiormente e per l'assioma di completezza esiste  $m = \sup A$ . Poiché  $1 \in A$ , si ha  $m \geq 1$ ; affermiamo che  $m^2 = 2$ .

Infatti, non può essere  $m^2 < 2$ , poiché in tal caso, scrivendo per ogni  $\varepsilon \in ]0, 1[$

$$(m + \varepsilon)^2 = m^2 + \varepsilon^2 + 2m\varepsilon < m^2 + \varepsilon + 2m\varepsilon,$$

avremmo  $(m + \varepsilon)^2 < m^2 + \varepsilon + 2m\varepsilon < 2$  pur di scegliere

$$\varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{2 - m^2}{2m + 1} \right\} :$$

tale scelta è sempre possibile, prendendo ad esempio come  $\varepsilon$  la metà del numero a secondo membro. Ciò significherebbe che  $m + \varepsilon$  appartiene ad  $A$ , contro il fatto che  $m$

è uno dei maggioranti di  $A$ .

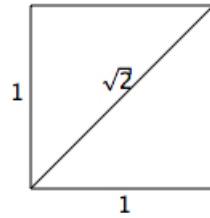
D'altra parte non può nemmeno essere  $m^2 > 2$ , poiché in tal caso avremmo per ogni  $\varepsilon \in ]0, m[$

$$(m - \varepsilon)^2 = m^2 + \varepsilon^2 - 2m\varepsilon > m^2 - 2m\varepsilon,$$

e dunque  $(m - \varepsilon)^2 > m^2 - 2m\varepsilon > 2$  pur di scegliere

$$\varepsilon < \frac{m^2 - 2}{2m}.$$

Ciò significherebbe, per quanto osservato all'inizio, che  $m - \varepsilon$  è un maggiorante di  $A$ ; ma allora  $m$  non può essere il minimo dei maggioranti di  $A$ , e ciò è assurdo. Pertanto l'unica possibilità è che sia  $m^2 = 2$ . Si noti che  $m$  è l'unica radice reale positiva dell'equazione  $x^2 = 2$ ; tale numero si dice *radice quadrata* di 2 e si denota con  $\sqrt{2}$ ; l'equazione  $x^2 = 2$  ha poi un'altra radice reale che è negativa: è il numero  $-\sqrt{2}$ .



**Osservazione 1.5.13** Si vede facilmente che il numero reale  $\sqrt{2}$  non può essere un numero razionale. Infatti supponiamo che sia  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{N}^+$ , e che la frazione sia stata ridotta ai minimi termini: allora si ha  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ , ossia  $p^2 = 2q^2$ . Ciò implica che  $p^2$ , e quindi anche  $p$ , è un numero pari: sarà dunque  $p = 2k$ , con  $k \in \mathbb{N}^+$ . Ma allora  $4k^2 = p^2 = 2q^2$ , da cui  $2k^2 = q^2$ : ne segue che  $q^2$  è pari e pertanto anche  $q$  è pari. Ciò però è assurdo, perché la frazione sarebbe ulteriormente semplificabile, cosa che era stata esclusa. Dunque  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale.

In modo assolutamente analogo (esercizio 1.5.2) si prova l'esistenza della radice quadrata di un arbitrario numero positivo  $x$ , che sarà in generale un numero irrazionale.

In definitiva, imponendo l'assioma 9 siamo necessariamente usciti dall'ambito dei numeri razionali, che sono "troppo pochi" per rappresentare tutte le grandezze: per misurare la diagonale del quadrato di lato unitario occorre il numero irrazionale  $\sqrt{2}$ . In altre parole, nell'insieme  $\mathbb{Q}$  *non vale* l'assioma di completezza.

**Osservazione 1.5.14** Nel seguito del corso useremo massicciamente, più che l'assioma di completezza in sé, il fatto che ogni insieme non vuoto e limitato superiormente è dotato di estremo superiore. Notiamo a questo proposito che se, invece,  $A \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato superiormente,  $A$  non ha maggioranti e dunque l'estremo superiore non esiste; in questo caso si dice per convenzione che  $A$  ha estremo superiore  $+\infty$  e si scrive  $\sup A = +\infty$ .

Analogamente, se  $A$  non è limitato inferiormente, si dice per convenzione che  $A$  ha estremo inferiore  $-\infty$  e si scrive  $\inf A = -\infty$ . In questo modo, *tutti* i sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{R}$  possiedono estremo superiore ed inferiore, eventualmente infiniti. Per l'insieme vuoto, invece, non c'è niente da fare!

## Esercizi 1.5

- Provare che

$$-\sqrt{2} = \inf \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}.$$

2. Provare che per ogni numero reale  $a > 0$ , l'equazione  $x^2 = a$  ha esattamente due soluzioni reali, una l'opposta dell'altra; quella positiva si chiama *radice quadrata* di  $a$  e si indica con  $\sqrt{a}$ . Si provi inoltre che

$$\sqrt{a} = \sup \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\}, \quad -\sqrt{a} = \inf \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\}.$$

Cosa succede quando  $a = 0$ ? E quando  $a < 0$ ?

3. Determinare l'insieme delle soluzioni reali delle seguenti equazioni:

$$(i) \quad \sqrt{x^2} = x, \quad (ii) \quad (\sqrt{x})^2 = -x, \quad (iii) \quad \sqrt{(-\sqrt{-x})^2} = \sqrt{\sqrt{x^2}}.$$

4. Dimostrare che  $\sqrt{3}$  è un numero irrazionale.
5. Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostrare che  $\sqrt{n}$  è un numero razionale se e solo se  $n$  è un quadrato perfetto.  
**[Traccia:** Si consideri dapprima il caso in cui  $n$  è un numero primo; si ricordi poi che ogni numero naturale  $n$  ha un'unica scomposizione in fattori primi.]
6. Siano  $m, n \in \mathbb{N}$  e supponiamo che almeno uno dei due non sia un quadrato perfetto. Provare che il numero  $\sqrt{m} + \sqrt{n}$  è irrazionale.
7. Provare che per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  il numero  $\sqrt{4n-1}$  è irrazionale.
8. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono separati e determinarne eventualmente gli elementi separatori:
- (i)  $[0, 1], [1, 7];$
  - (ii)  $[0, 2[, \{2, 3\};$
  - (iii)  $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 2\}, \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 2\};$
  - (iv)  $\{n \in \mathbb{N} : n < 6\}, \{n \in \mathbb{N} : n \geq 6\};$
  - (v)  $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}, ]\sqrt{2}, +\infty[;$
  - (vi)  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}, \{x \in \mathbb{R} : x^4 > 1\}.$
9. Una *sezione* di  $\mathbb{R}$  è una coppia  $(A, B)$  di sottoinsiemi separati di  $\mathbb{R}$ , tali che  $A \cup B = \mathbb{R}$ . Si dimostri che l'enunciato  
“per ogni sezione  $(A, B)$  di  $\mathbb{R}$  esiste un unico elemento separatore fra  $A$  e  $B$ ”  
è equivalente all'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$ .
10. Si provi che esistono sezioni  $(A, B)$  di  $\mathbb{Q}$  prive di elemento separatore in  $\mathbb{Q}$ .  
**[Traccia:** si considerino  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$  e  $B = \mathbb{Q} \setminus A$ .]
11. Provare che se  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  e  $A \neq \emptyset$ , allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B;$$

si forniscano esempi in cui una o più diseguaglianze sono strette.

12. Sia  $A$  un sottoinsieme non vuoto e limitato di  $\mathbb{R}$ , e poniamo

$$B = \{-x : x \in A\}.$$

Si provi che

$$\sup B = -\inf A, \quad \inf B = -\sup A.$$

13. Provare che se  $A, B$  sono sottoinsiemi non vuoti e limitati di  $\mathbb{R}$  si ha

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

14. Provare che se  $A, B$  sono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  con  $A \cap B \neq \emptyset$ , allora

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\};$$

si verifichi che le diseguaglianze possono essere strette.

15. Siano  $A, B$  sottoinsiemi non vuoti di  $]0, \infty[$ . Se esiste  $K > 0$  tale che  $xy \leq K$  per ogni  $x \in A$  e per ogni  $y \in B$ , si provi che

$$\sup A \cdot \sup B \leq K.$$

16. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , specificando se si tratta di massimi o di minimi:

- |       |   |        |  |
|-------|---|--------|--|
| (i)   | $\left\{ \frac{2x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\};$   | (ii)   | $\{x^2 + y^2 : x, y \in [-1, 1], x < y\};$                           |
| (iii) | $\left\{ x + \frac{1}{x} : x > 0 \right\};$               | (iv)   | $\{x^2 - y^2 : 0 < x < y < 4\};$                                     |
| (v)   | $\left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\};$    | (vi)   | $\left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\};$               |
| (vii) | $\left\{ \frac{(-1)^k}{k} : k \in \mathbb{N}^+ \right\};$ | (viii) | $\left\{ \frac{1}{k^3} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$ |

17. Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Mostrare che:

- (i)  $a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b = 0;$
- (ii)  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \iff a = b = c = 0;$
- (iii)  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} = 0 \iff a = b = c = d = 0.$

18. Per quali  $x \in \mathbb{R}$  sono vere le seguenti asserzioni?

- (i)  $(-x) \cdot x^2 > x;$
- (ii)  $\sqrt{x^2} = x;$
- (iii)  $(-x^2)^2 > 16.$

## 1.6 Numeri naturali, interi, razionali

A partire dagli assiomi di  $\mathbb{R}$ , ed in particolare dall'assioma di continuità, possiamo ora rivisitare in maniera più rigorosa alcuni concetti che abbiamo conosciuto e adoperato su base intuitiva fin dalla scuola dell'obbligo. Cominciamo ad esaminare l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali e le sue apparentemente ovvie proprietà.

Ci occorre anzitutto la seguente

**Definizione 1.6.1** *Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  si dice induttivo se verifica le seguenti condizioni:*

- (i)  $0 \in A$ ,
- (ii) per ogni  $x \in A$  si ha  $x + 1 \in A$ .

Ad esempio sono insiemi induttivi  $\mathbb{R}$ ,  $[a, +\infty[$  per ogni  $a \leq 0$ ,  $]b, +\infty[$  per ogni  $b < 0$ . Si noti che se  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  sono induttivi, anche la loro intersezione  $A \cap B$  lo è; anzi, dato un qualunque insieme di indici  $I$  e presa una arbitraria famiglia di insiemi induttivi  $\{A_i\}_{i \in I}$ , la loro intersezione

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_i \forall i \in I\}$$

è un insieme induttivo: infatti  $0 \in A_i$  per ogni  $i \in I$  in quanto ciascun  $A_i$  è induttivo, e se  $x \in A_i$  per ogni  $i \in I$ , lo stesso si ha per  $x + 1$ , sempre a causa dell'induttività di ciascun  $A_i$ .

**Definizione 1.6.2** *Chiamiamo insieme dei numeri naturali, e denotiamo con  $\mathbb{N}$ , l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di  $\mathbb{R}$ .*

Da questa definizione segue subito che  $\mathbb{N}$  è il più piccolo insieme induttivo: infatti se  $A \subseteq \mathbb{R}$  è induttivo, esso viene a far parte della famiglia di insiemi di cui  $\mathbb{N}$  è l'intersezione, cosicché  $\mathbb{N} \subseteq A$ . Dunque in  $\mathbb{N}$  c'è “il minimo indispensabile” di numeri che occorre per essere induttivo: perciò ci sarà  $0$ , ci sarà  $1 = 0+1$ , ci sarà  $2 = 1+1$ , ci sarà  $3 = 2+1$ , e così via. Questa definizione di  $\mathbb{N}$  è stata però introdotta proprio per evitare di far uso della locuzione “...e così via”: a questo scopo conviene introdurre il seguente fondamentale

**Teorema 1.6.3 (principio di induzione)** *Sia  $A \subseteq \mathbb{N}$  un insieme definito da una certa proprietà  $p(n)$ , ossia  $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ . Supponiamo di sapere che*

- (i)  $p(0)$  è vera, ovvero  $0 \in A$ ;
- (ii)  $p(n) \implies p(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ovvero se  $n \in A$  allora  $n+1 \in A$ .

Allora  $p(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; in altre parole, si ha  $\mathbb{N} \subseteq A$  e dunque  $A = \mathbb{N}$ .

**Dimostrazione** Si tratta di una immediata conseguenza della definizione di  $\mathbb{N}$ . In effetti, per ipotesi  $A$  è contenuto in  $\mathbb{N}$ ; le condizioni (i) e (ii) ci dicono d'altronde che l'insieme  $A$  è induttivo, e quindi  $A$  contiene  $\mathbb{N}$  per definizione di  $\mathbb{N}$ : se ne deduce che

$A = \mathbb{N}$ .  $\square$

Il principio di induzione è importante non solo come metodo dimostrativo, come vedremo, ma anche perché consente, nell'ambito della nostra teoria (dedotta dagli assiomi di  $\mathbb{R}$ ), di introdurre definizioni ricorsive in modo non ambiguo.

**Esempi 1.6.4 (1) (Fattoriale)** Consideriamo la sequenza di numeri così definiti:

$$\begin{cases} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= (n+1) \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si vede subito che  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2 \cdot 1$ ,  $a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ,  $a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , “e così via”; fissato  $n \in \mathbb{N}$ , il numero  $a_n$  così introdotto si chiama *fattoriale di n* e si scrive  $a_n = n!$  (si legge “n fattoriale”).

**(2) (Somme finite)** Data una famiglia infinita di numeri reali  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , consideriamo la sequenza di numeri così definita:

$$\begin{cases} s_0 &= a_0 \\ s_{n+1} &= a_{n+1} + s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si ha chiaramente

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

“e così via”; per il numero  $s_n$ , che è la somma di  $a_0, a_1, a_2$ , eccetera, fino ad  $a_n$ , si usa il simbolo

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Si noti che la variabile  $k$  dentro il simbolo di somma  $\Sigma$  è “muta”: ciò significa che  $s_n$  è un numero che dipende solo dall'estremo  $n$  della somma, e non da  $k$ , il quale è solo una lettera per denotare gli addendi della somma. In particolare, potremmo usare qualunque altro simbolo al posto di  $k$  senza alterare il valore di  $s_n$ :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{\&=0}^n a_{\&} = \sum_{pippo=0}^n a_{pippo} .$$

Naturalmente, è anche lecito considerare somme finite il cui primo estremo sia un numero diverso da 0: ad esempio

$$\sum_{k=30}^{34} k = 30 + 31 + 32 + 33 + 34 = 160.$$

**(3) (Prodotti finiti)** In modo analogo al caso delle somme, data una famiglia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali si definisce la seguente sequenza di numeri:

$$\begin{cases} p_0 &= a_0 \\ p_{n+1} &= a_{n+1} \cdot p_n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

si ha  $p_1 = a_0 a_1$ ,  $p_2 = a_0 a_1 a_2$ ,  $p_3 = a_0 a_1 a_2 a_3$ , e per il numero  $p_n$  si usa il simbolo

$$p_n = \prod_{k=0}^n a_k,$$

ove nuovamente  $k$  è una variabile muta. Si noti che, in particolare,

$$n! = \prod_{k=1}^n k \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(4) Sia  $q$  un numero reale. La somma

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k$$

si dice *progressione geometrica* di *ragione*  $q$ . Naturalmente,  $q^k$  significa 1 se  $k = 0$ , mentre se  $k > 0$  denota il prodotto di  $k$  fattori uguali a  $q$ ; nel caso speciale  $k = 0$  e  $q = 0$  il simbolo  $q^k$  deve intendersi come 1.

Proviamo che si ha

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{se } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Se  $q = 1$ , la dimostrazione è banale e si lascia per esercizio. Supposto  $q \neq 1$ , indichiamo con  $p(n)$  l'enunciato seguente:

$$p(n) = \text{"vale l'uguaglianza } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{"}.$$

Allora  $p(0)$  è vera in quanto

$$\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q};$$

*Supponiamo* adesso che  $p(n)$  sia vera per un dato  $n \in \mathbb{N}$ , e proviamo a *dedurre*  $p(n+1)$  (il che, di per sé, non significherà che  $p(n)$  e  $p(n+1)$  siano vere per davvero!). Si può scrivere, isolando l'ultimo addendo,

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1},$$

e poiché stiamo supponendo vera  $p(n)$ , otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},$$

che è proprio  $p(n+1)$ . Abbiamo così provato che  $p(n)$  implica  $p(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Poiché  $p(0)$  è vera, dal principio di induzione segue che  $p(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**(5)** Proviamo la diseguaglianza

$$2^n \leq (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posto  $p(n) = "2^n \leq (n+1)!"$ , vediamo che  $p(0)$  è vera in quanto  $2^0 = 1$  è effettivamente non superiore a  $1! = 1$ . Supposto ora che  $p(n)$  sia vera, si può scrivere

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot (n+1)!;$$

da qui ricaviamo, essendo ovviamente  $2 \leq n+2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$2^{n+1} \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!,$$

il che mostra che vale  $p(n+1)$ . Abbiamo così provato che  $p(n)$  implica  $p(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ : essendo anche  $p(0)$  vera, per il principio di induzione  $p(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**(6)** Proviamo la diseguaglianza

$$n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4.$$

Posto  $p(n) = "n^2 \leq 2^n"$ , osserviamo che  $p(0)$ ,  $p(1)$  e  $p(2)$  sono vere mentre  $p(3)$  è falsa; inoltre  $p(4)$  è vera. Proviamo adesso che  $p(n) \implies p(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ : usando l'ipotesi induttiva, si ha

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2;$$

la seconda diseguaglianza è vera in quanto equivale a  $n^2 - 2n + 1 > 2$ , ossia a  $(n-1)^2 > 2$ , e quest'ultima è verificata addirittura per ogni  $n \geq 3$ . Poiché  $p(4)$  è vera e  $p(n)$  implica  $p(n+1)$  per ogni  $n \geq 4$ , per il principio di induzione (applicato, per essere precisi, non a  $p(n)$  ma a  $q(n) = p(n+4)$ ) segue che  $p(n)$  è vera per ogni  $n \geq 4$ .

## Proprietà di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Anzitutto definiamo rigorosamente gli insiemi  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ .

**Definizione 1.6.5** L'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z}$  è  $\mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ ; l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  è  $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\}$  (ricordiamo che  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ).

Dalla definizione di  $\mathbb{N}$  seguono abbastanza facilmente alcune sue proprietà.

**Proposizione 1.6.6**  $\mathbb{N}$  è illimitato superiormente.

**Dimostrazione** Supponiamo per assurdo che  $\mathbb{N}$  sia limitato superiormente: in tal caso  $L = \sup \mathbb{N}$  è un numero reale, che per la proposizione 1.5.10 verifica

**(a)**  $L \geq n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

(b) per ogni  $\varepsilon \in ]0, 1[$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $L - \varepsilon < \nu \leq L$ .

Avendo scelto  $\varepsilon < 1$ , da (b) segue che il numero naturale  $\nu + 1$  verifica

$$L < \nu + \varepsilon < \nu + 1,$$

il che contraddice (a). Dunque  $L = +\infty$ .  $\square$

Di conseguenza,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  sono illimitati sia superiormente che inferiormente.

**Proposizione 1.6.7 (proprietà di Archimede)** *Per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali positivi esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $na > b$ .*

**Dimostrazione** Poiché  $\sup \mathbb{N} = +\infty$ , il numero  $\frac{b}{a}$  non è un maggiorante di  $\mathbb{N}$ ; quindi esiste  $n \in \mathbb{N}$  per cui risulta  $n > \frac{b}{a}$ . Moltiplicando per  $a$ , che è positivo, ne segue la tesi.  $\square$

Una conseguenza della proprietà di Archimede è la *densità* dei razionali in  $\mathbb{R}$ , cioè il fatto che in ogni intervallo  $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$  cade almeno un numero razionale (e quindi infiniti: vedere l'esercizio 1.6.4). Si ha infatti:

**Corollario 1.6.8** *Per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali con  $a < b$ , esiste  $r \in \mathbb{Q}$  tale che*

$$a < r < b.$$

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima  $a \geq 0$ . Per la proprietà di Archimede, esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n(b - a) > 1$ , ossia

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} \leq a \right\};$$

esso è ovviamente limitato superiormente ( $n \cdot a$  ne è un maggiorante) e non vuoto ( $0 \in A$ ). Posto  $L = \sup A$ , e fissato  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , dalla proposizione 1.5.10 segue che esiste  $\mu \in A$  tale che  $L - \varepsilon < \mu \leq L$ , ossia  $\mu \leq L < \mu + \varepsilon < \mu + 1$ ; pertanto  $\mu \in A$  mentre  $\mu + 1 \notin A$  (essendo  $\mu + 1 > \sup A$ ). Si ha allora

$$\frac{\mu}{n} \leq a < \frac{\mu + 1}{n} = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

Il numero razionale  $r = \frac{\mu+1}{n}$  soddisfa dunque la tesi.

Supponiamo ora  $a < 0$ . Se  $b > 0$ , si ha la tesi scegliendo  $r = 0$ . Se invece  $b \leq 0$ , per quanto già provato esiste un razionale  $r$  tale che  $-b < r < -a$ , e dunque il numero razionale  $-r$  appartiene ad  $]a, b[$ . La tesi è provata.  $\square$

**Osservazioni 1.6.9 (1)** Non è difficile dimostrare che il numero  $L$  della dimostrazione precedente è in realtà un massimo. Si dimostra anzi che ogni sottoinsieme limitato di  $\mathbb{N}$  ha massimo (esercizio 1.6.2).

**(2)** In modo del tutto analogo si dimostra che l'insieme dei *numeri decimali*, ossia l'insieme  $\{r \in \mathbb{Q} : r = m \cdot 10^{-n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ , è denso in  $\mathbb{R}$ .

Vi è un risultato di densità più fine, che è il seguente:

**Teorema 1.6.10** *Sia  $\alpha$  un numero reale. L'insieme*

$$E = \{k\alpha + h : k, h \in \mathbb{Z}\}$$

*è denso in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $\alpha$  è irrazionale.*

**Dimostrazione** Se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = \frac{m}{n}$ , allora

$$E = \left\{ \frac{km + hn}{n} : k, h \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z} \right\}$$

e quindi i punti di  $E$  distano fra loro almeno  $\frac{1}{n}$ : pertanto  $E$  non può essere denso in  $\mathbb{R}$ . Supponiamo invece  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : proveremo la densità di  $E$  in  $\mathbb{R}$  mostrando che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $k, h \in \mathbb{Z}$  tali che

$$x - \varepsilon < k\alpha + h < x + \varepsilon.$$

È chiaramente sufficiente provare la tesi per  $\alpha > 0$ . Sia dunque  $\varepsilon > 0$  e cominciamo con il caso  $x = 0$ . Fissiamo  $N \in \mathbb{N}$  e poniamo

$$E_N = \{k\alpha + h : k, h \in \mathbb{Z} \cap [-N, N]\}.$$

Poiché  $\alpha$  è irrazionale, gli elementi di  $E_N$  sono tutti distinti e sono esattamente in numero di  $(2N + 1)^2$ . Inoltre

$$E_N \subseteq [-N(1 + \alpha), N(1 + \alpha)].$$

Consideriamo adesso, per  $1 \leq m \leq \left[ \frac{4N(1+\alpha)}{\varepsilon} \right] + 1$ , gli intervalli chiusi adiacenti

$$I_m = \left[ -N(1 + \alpha) + (m - 1)\frac{\varepsilon}{2}, -N(1 + \alpha) + m\frac{\varepsilon}{2} \right],$$

la cui unione ricopre l'intervallo  $[-N(1 + \alpha), N(1 + \alpha)]$ , e quindi  $E_N$ . Scegliamo  $N$  sufficientemente grande, in modo che

$$\left[ \frac{4N(1 + \alpha)}{\varepsilon} \right] + 1 < (2N + 1)^2 :$$

ciò è certamente possibile, risolvendo la disequazione più forte

$$(2N + 1)^2 > \frac{4N(1 + \alpha)}{\varepsilon} + 1,$$

o quella ancora più forte, ma più facile,

$$(2N + 1)^2 > (2N + 1) \frac{2(1 + \alpha)}{\varepsilon} + (2N + 1).$$

Allora, necessariamente, almeno uno fra gli intervalli  $I_m$  dovrà contenere due diversi elementi di  $E_N$  (questo è il cosiddetto *principio dei cassetti*: se mettiamo  $p$  oggetti in  $q$  cassetti vuoti, e se  $p > q$ , allora esiste almeno un cassetto che contiene più di un oggetto). Quindi esistono quattro interi  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , non superiori a  $N$  in valore assoluto, tali che

$$p_1\alpha + q_1, \quad p_2\alpha + q_2 \in I_m$$

per un opportuno  $m$ . In particolare, poiché  $I_m$  ha ampiezza minore di  $\varepsilon$ ,

$$-\varepsilon < (p_1 - p_2)\alpha + (q_1 - q_2) < \varepsilon,$$

e ciò prova la tesi nel caso  $x = 0$ .

Sia ora  $x > 0$ : per quanto già provato, esistono  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che

$$-\varepsilon < m\alpha + n < \varepsilon,$$

e rimpiazzando eventualmente  $m, n$  con  $-m, -n$  possiamo supporre che

$$0 < m\alpha + n < \varepsilon.$$

Adesso scegliamo  $p \in \mathbb{N}$  tale che

$$p(m\alpha + n) \leq x < (p+1)(m\alpha + n)$$

(sarà quindi  $p = [\frac{x}{m\alpha+n}]$ ). Si ha allora

$$x - \varepsilon < x - (m\alpha + n) < p(m\alpha + n) \leq x < x + \varepsilon$$

e quindi abbiamo la tesi con  $k = mp, h = np$ .  $\square$

Una conseguenza della densità in  $\mathbb{R}$  dei numeri decimali è la possibilità di rappresentare ogni numero reale come estremo superiore di una famiglia numerabile di numeri decimali. A questo scopo, fissato  $x \geq 0$ , definiamo induttivamente le *cifre decimali* di  $x$ :

**Definizione 1.6.11** Posto per  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_0(x) = [x], \\ a_n(x) = \left[ 10^n \left( x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{10^k} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N}^+, \end{cases}$$

il numero  $a_n(x)$  è detto  $n$ -sima cifra decimale di  $x$  e la successione  $\{a_n(x)\}$  è detta *sviluppo decimale* di  $x$ .

Osserviamo che  $a_n(x) \in \mathbb{N}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e che  $a_n(x) < 10$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Infatti, per definizione di parte intera, risulta  $0 \leq a_0(x) \leq x < a_0(x) + 1$  e

$$\frac{a_n(x)}{10^n} \leq x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{10^k} < \frac{a_n(x) + 1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ovvero

$$0 \leq x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} < \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da questa relazione segue subito che  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre

$$a_n(x) \leq 10^n \left( x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{10^k} \right) < \frac{10^n}{10^{n-1}} = 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Vale allora il seguente risultato di rappresentazione:

**Teorema 1.6.12** Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  risulta:

(i) se  $x \geq 0$ , allora

$$x = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} \right\};$$

(ii) se  $x < 0$ , allora

$$x = -\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k(|x|)}{10^k} \right\}.$$

**Dimostrazione** Sia  $x \geq 0$  e poniamo

$$L = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} \right\}.$$

Dalla definizione 1.6.11, come si è visto poco fa, segue che

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, in particolare,

$$L \leq x, \quad x \leq L + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$L \leq x \leq L + \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = L.$$

Se  $x < 0$  allora  $|x| > 0$  e, per quanto visto,

$$x = -|x| = -\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k(|x|)}{10^k} \right\}. \quad \square$$

## Esercizi 1.6

1. Dimostrare, sulla base della definizione di  $\mathbb{N}$ , i seguenti enunciati:

- (i) Non esiste alcun numero naturale minore di 0.
- (ii) Se  $p, q \in \mathbb{N}$ , allora  $p + q, pq \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Se  $p \in \mathbb{N}^+$ , allora  $p - 1 \in \mathbb{N}$ .
- (iv) Se  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $p > q$ , allora  $p - q \in \mathbb{N}$ .
- (v) Se  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $p > q$ , allora  $p - q \in \mathbb{N}^+$ .

[**Traccia:** per (ii), mostrare che i due insiemi  $S = \{p \in \mathbb{N} : p + q \in \mathbb{N}\}$  e  $P = \{p \in \mathbb{N} : pq \in \mathbb{N}\}$  sono induttivi; per (iii), mostrare che  $T = \{0\} \cup \{p \in \mathbb{N} : p - 1 \in \mathbb{N}\}$  è induttivo; per (iv), mostrare che  $A = \{p \in \mathbb{N} : p - q \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} \cap [0, p[\}$  è induttivo; infine (v) segue da (iv).]

- 2. Si provi che ogni sottoinsieme non vuoto e limitato di  $\mathbb{N}$  ha massimo.
- 3. Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , trovare un numero irrazionale  $c$  tale che  $a < c < b$ .
- 4. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Provare che esistono infiniti numeri razionali compresi fra  $a$  e  $b$ .
- 5. Un numero intero  $k$  si dice *pari* se esiste  $m \in \mathbb{Z}$  tale che  $k = 2m$ , si dice *dispari* se  $k + 1$  è pari. Dimostrare che:
  - (i) nessun intero è simultaneamente pari e dispari;
  - (ii) ogni numero intero è o pari, o dispari;
  - (iii) la somma e il prodotto di numeri pari sono numeri pari;
  - (iv) la somma di due numeri dispari è pari mentre il prodotto è dispari.
- 6. Dimostrare le uguaglianze

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ a - \frac{1}{n}, b \right], \quad ]a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b \right].$$

7. Sia  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ . Provare che l'insieme delle “frazioni in base  $b$ ”, ossia

$$\left\{ \frac{m}{b^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

è denso in  $\mathbb{R}$ .

- 8. Quanti sono i sottoinsiemi distinti di un fissato insieme di  $n$  elementi?
- 9. Per quali  $n \in \mathbb{N}^+$  risulta  $2^n \cdot n! \leq n^n$  ?
- 10. Si consideri la seguente forma modificata del principio di induzione:  
“Sia  $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ . Supponiamo che valgano i seguenti fatti:

- (a)  $p(0)$  è vera,
- (b) se vale  $p(k)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ , allora vale  $p(n+1)$ .

Allora  $p(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ossia  $A = \mathbb{N}^*$ .

- (i) Si provi che questo enunciato implica il principio di induzione.
- (ii) Si provi che questo enunciato è implicato dal principio di induzione.

**[Traccia:** Per (ii), si applichi il principio di induzione all'affermazione  $q(n)$  definita da  $q(n) = "p(k)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n"$ .]

11. Si provi che ogni insieme non vuoto  $E \subseteq \mathbb{N}$  ha minimo.

**[Traccia:** se così non fosse, posto  $p(n) = "n \notin E"$ , si applichi a  $p(n)$  il principio di induzione nella forma dell'esercizio 1.6.10.]

12. Si dimostri che ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  è scomponibile in fattori primi.

**[Traccia:** Utilizzare il principio di induzione nella forma dell'esercizio 1.6.10.]

13. Provare che:

- (i)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (ii)  $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (iii)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (iv)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .

14. Siano  $a, b, c, d$  reali positivi. Provare che

$$\min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\}.$$

15. Sia  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $k > 1$ . Dati  $k$  numeri  $a_1, \dots, a_k$ , provare che

$$\left[ \sum_{i=1}^k a_i \right]^2 \leq k \sum_{i=1}^k a_i^2.$$

16. Stabilire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

- (i) la somma di due irrazionali è irrazionale;
- (ii) il prodotto di due irrazionali è irrazionale;
- (iii) la somma di un razionale e di un irrazionale è irrazionale;
- (iv) il prodotto di un razionale e di un irrazionale è irrazionale.

17. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Provare che se  $0 < a < b$  allora  $0 < a^n < b^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .

18. Provare che:

- (i)  $n \leq k(n+1-k) \leq \frac{1}{4}(n+1)^2$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  con  $1 \leq k \leq n$ ;
- (ii)  $(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n+1-k)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (iii)  $n^n \leq (n!)^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .
19. Siano  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  numeri reali. Denotiamo con  $\{\hat{a}_k\}$  il riordinamento crescente e con  $\{\check{a}_k\}$  il riordinamento decrescente della sequenza  $\{a_k\}$ , e similmente per  $\{b_k\}$ . Si provino le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^n \check{a}_k \hat{b}_k \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n \hat{a}_k \hat{b}_k, \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=1}^n \check{a}_k \hat{b}_k \leq \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n a_k) (\sum_{k=1}^n b_k) \leq \sum_{k=1}^n \hat{a}_k \hat{b}_k. \end{aligned}$$

**[Traccia:** si può supporre che  $\{b_k\}$  sia già riordinata in modo crescente. Consideriamo le due disuguaglianze di destra: per (i), si verifichi che se  $i < j$  e  $a_i > a_j$ , allora risulta  $a_i b_i + a_j b_j < a_j b_i + a_i b_j$ ; per (ii), si decomponga la quantità  $\sum_{k,h=1}^n (\hat{a}_k - \hat{a}_h)(\hat{b}_k - \hat{b}_h)$  e si noti che essa è non negativa. Le disuguaglianze di sinistra si ottengono applicando quelle di destra a  $\{a_k\}$  e a  $\{-b_k\}$ .]

## 1.7 La formula del binomio

Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $n \geq k$  definiamo i *coefficienti binomiali*  $\binom{n}{k}$  (si legge “ $n$  su  $k$ ”) nel modo seguente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si noti che  $\binom{n}{k} = 1$  quando  $k = n$  e quando  $k = 0$ ; negli altri casi si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

e questa espressione si presterà ad ulteriori generalizzazioni nel seguito del corso. Dalla definizione seguono subito queste proprietà:

- (*simmetria*)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,
- (*legge del triangolo di Tartaglia*)  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ .

			1							
			1	1	2	1				
			1	3	3	1				
			1	4	6	4	1			
			1	5	10	10	5	1		
			1	6	15	20	15	6	1	
			1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1		

Il triangolo di Tartaglia, qui sopra riprodotto, ha tutti 1 sui lati obliqui ed ogni suo elemento all'interno è la somma dei due elementi ad esso soprastanti. Gli elementi del triangolo sono appunto i coefficienti binomiali:  $\binom{n}{k}$  si trova al posto  $k$ -simo nella riga  $n$ -sima (cominciando sempre a contare da 0).

La denominazione “coefficiente binomiale” nasce dal fatto che questi numeri saltano fuori come coefficienti nella formula di Newton che dà lo sviluppo del binomio  $(a+b)^n$ , formula che adesso dimostreremo. Ricordiamo preliminarmente che se  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , la potenza  $x^n$ , il cui significato è comunque ovvio, andrebbe definita rigorosamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{n+1} = x \cdot x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

se invece  $x = 0$ , si pone  $0^n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ , mentre  $0^0$  non si definisce. Ciò posto, si ha:

**Teorema 1.7.1** *Se  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ , si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Dimostrazione** Utilizziamo il principio di induzione. Se  $n = 1$  la formula è vera perché

$$a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a.$$

Supponiamo vera la formula per un binomio di grado  $n$  e proviamola per un binomio di grado  $n+1$ . Si ha

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \end{aligned}$$

(ponendo  $h = k+1$  nella prima somma e  $h = k$  nella seconda)

$$= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} =$$

(isolando l'ultimo addendo nella prima somma e il primo addendo nella seconda)

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \left[ \binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} \right] a^h b^{n+1-h} = \end{aligned}$$

(per la legge del triangolo di Tartaglia)

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h} = \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h}.$$

Per il principio di induzione la formula è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .  $\square$

**Osservazioni 1.7.2 (1)** La formula del binomio vale più in generale per  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , se in tale formula si conviene di interpretare il simbolo  $0^0$  come 1.

(2) Scelti  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  si ottiene

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k},$$

cioè

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(3) Scelti  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  si ottiene

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questa uguaglianza ha una interpretazione combinatoria:  $2^n$  è il numero di sottoinsiemi distinti di un fissato insieme con  $n$  elementi (esercizio 1.6.8), mentre  $\binom{n}{k}$  è il numero di sottoinsiemi distinti aventi  $k$  elementi di un insieme con  $n$  elementi (esercizio 1.7.3). Si tratta dunque di contare tutti i sottoinsiemi raggruppandoli per numero di elementi.

(4) Un altro modo di enunciare la proprietà dell'esercizio 1.7.3 è il seguente:  $\binom{n}{k}$  è il numero di modi in cui si possono sistemare  $k$  palline indistinguibili in  $n$  scatole distinte, una per scatola: infatti ogni distribuzione di palline individua un sottoinsieme di  $k$  scatole (sulle  $n$  complessive). In termini probabilistici si può anche dire: data un'urna contenente  $k$  palline bianche e  $n - k$  palline nere, la *probabilità* dell'evento che consiste nell'estrarre le  $k$  palline bianche nelle prime  $k$  estrazioni (intesa come rapporto tra gli esiti favorevoli e gli esiti possibili) è pari a

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Infatti, nella prima estrazione ci sono  $k$  esiti favorevoli su  $n$  possibili, nella seconda  $k - 1$  su  $n - 1$ , e così via, finché nella  $k$ -sima si ha un solo esito favorevole su  $n - k + 1$  possibili: dunque la probabilità che l'evento considerato si verifichi è

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k - 1}{n - 1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n - k + 1} = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Ad esempio la probabilità di fare 6 al Superenalotto è

$$\frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{1}{622.614.630} \approx 0.000000016$$

(qui le “palline bianche” sono i 6 numeri prescelti e il simbolo “ $\approx$ ” significa “circa uguale a”).

(5) Dalla formula del binomio segue subito la seguente *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(basta osservare che tutti gli addendi nello sviluppo del binomio  $(1+x)^n$  sono non negativi); una versione più generale di questa disuguaglianza è enunciata nell'esercizio 1.7.6. Si può anche osservare che risulta

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Esempio 1.7.3** Sia  $A$  un insieme di  $k$  elementi e sia  $B$  un insieme di  $n$  elementi ( $k, n \geq 1$ ). Mentre è facile, come ora vedremo, determinare il numero delle applicazioni iniettive da  $A$  in  $B$ , il calcolo del numero delle applicazioni surgettive da  $A$  in  $B$  appare un po' più intricato, seppur sempre elementare.

Cominciamo con il caso delle applicazioni iniettive da  $A$  in  $B$ . È chiaro che se  $k > n$  non ce n'è neanche una. Se  $k \leq n$ , e denotiamo con  $x_1, \dots, x_k$  gli elementi di  $A$ , possiamo scegliere in  $n$  modi il valore  $f(x_1)$ ; fatto ciò, possiamo scegliere in  $n-1$  modi il valore  $f(x_2)$ , in  $n-2$  modi il valore  $f(x_3)$ , eccetera, finché per il valore di  $f(x_k)$  avremo a disposizione  $n-k+1$  scelte. Il totale delle applicazioni iniettive è dunque di  $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ . Si noti che in particolare quando  $k = n$  il numero delle applicazioni iniettive (dunque bigettive) da  $A$  in  $B$  è  $n!$ .

Calcoliamo adesso il numero  $S_{k,n}$  delle applicazioni surgettive da  $A$  in  $B$ : sarà necessario un procedimento alquanto più complicato. Ovviamente

$$S_{k,n} = 0 \quad \forall k < n, \quad S_{n,n} = n!;$$

vogliamo calcolare  $S_{k,n}$  per  $k > n \geq 1$ . Naturalmente

$$S_{k,1} = 1 \quad \forall k > 1.$$

Il numero di tutte le applicazioni da  $A$  in  $B$  è  $n^k$ , in quanto per ogni  $j \in \{1, \dots, k\}$  abbiamo  $n$  scelte per fissare il valore  $f(x_j)$ : possiamo allora arrivare a un calcolo induttivo di  $S_{k,n}$  nel modo seguente.

Raggruppiamo le  $n^k$  applicazioni  $f : A \rightarrow B$  secondo il numero di elementi dell'immagine  $f(A)$ , che indichiamo con  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Tutte le funzioni  $f$  tali che  $f(A)$  ha  $j$  elementi si distinguono, a loro volta, così: fissato un insieme di  $j$  elementi contenuto in  $B$ , vi sono (per definizione)  $S_{k,j}$  funzioni che hanno tale insieme come immagine; dato che i sottoinsiemi di  $B$  con  $j$  elementi sono  $\binom{n}{j}$ , il totale delle funzioni  $f : A \rightarrow B$  la cui immagine ha  $j$  elementi è dato da  $\binom{n}{j} S_{k,j}$ . Sommando rispetto a  $j$  otteniamo

$$n^k = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} S_{k,j} \quad \forall k > n \geq 1.$$

Questa relazione, risolta rispetto a  $S_{k,n}$ , dà la caratterizzazione induttiva cercata:

$$\begin{cases} S_{k,1} = 1 & \forall k \geq 1, \\ S_{k,n} = n^k - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} S_{k,j} & \forall n > 1, \quad \forall k \geq n. \end{cases}$$

Ma si può trovare anche una formula esplicita per  $S_{k,n}$ . A questo scopo è essenziale il seguente lemma.

**Lemma 1.7.4** *Siano  $a_1, \dots, a_N$  numeri reali o complessi. Posto*

$$b_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^j a_j, \quad 1 \leq n \leq N,$$

risulta

$$a_n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p b_p, \quad 1 \leq n \leq N.$$

In altre parole, l'applicazione  $(a_1, \dots, a_N) \rightarrow (b_1, \dots, b_N)$  sopra definita è l'inversa di se stessa.

**Dimostrazione** Per  $1 \leq n \leq N$  si ha

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p b_p &= \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} (-1)^j a_j = \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^p \binom{n}{p} \binom{p}{j} (-1)^{p+j} a_j. \end{aligned}$$

Adesso notiamo che risulta, come è facile verificare direttamente,

$$\binom{n}{p} \binom{p}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j};$$

inoltre la doppia somma si riferisce alle coppie di interi  $(p, j)$  tali che  $1 \leq j \leq p \leq n$ , e quindi essa può risciversi come  $\sum_{j=1}^n \sum_{p=j}^n$ . Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p b_p &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=j}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} (-1)^{p+j} a_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{p=j}^n (-1)^p \binom{n-j}{p-j} \right] (-1)^j a_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{q=0}^{n-j} (-1)^q \binom{n-j}{q} \right] (-1)^{2j} a_j. \end{aligned}$$

Ora si osservi che, ovviamente,  $(-1)^{2j} = 1$  per ogni  $j$ ; inoltre, per la formula di Newton,

$$\sum_{q=0}^{n-j} (-1)^q \binom{n-j}{q} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = j, \\ (-1+1)^{n-j} = 0 & \text{se } n > j; \end{cases}$$

e dunque nella somma esterna sopravvive solo l'addendo con  $j = n$ . Pertanto, come richiesto,

$$\sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p b_p = a_n. \quad \square$$

A questo punto applichiamo il lemma scegliendo  $N = k$  e

$$b_n = n^k, \quad a_n = (-1)^n S_{k,n} \quad n = 1, \dots, k.$$

L'ipotesi del lemma vale, in quanto, come sappiamo,

$$b_n = n^k = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} S_{k,j} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^j a_j;$$

dunque vale la tesi, che ci dà

$$(-1)^n S_{k,n} = a_n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p b_p = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p p^k.$$

Ne segue infine la formula cercata:

$$S_{k,n} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^k \quad \forall k > n \geq 1.$$

Si noti che, in particolare, per  $k = n$  le applicazioni surgettive da  $A$  in  $B$  sono tutte e sole le applicazioni iniettive: dunque si ha

$$n! = S_{n,n} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^n \quad \forall k > n \geq 1.$$

(si vedano anche gli esercizi 1.7.10, 1.7.11 e 1.7.12).

## Algoritmo della radice quadrata

Vogliamo giustificare rigorosamente il metodo di calcolo approssimato della radice quadrata di un numero razionale dato, che viene di solito esposto in modo meccanico agli studenti della scuola media inferiore. Il problema è il seguente: dato  $y \geq 0$ , si vuol trovare un numero  $x \geq 0$  il cui quadrato approssimi  $y$  per difetto; si richiede cioè che sia  $x^2 \leq y < (x+1)^2$ . Poiché  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ , equivalentemente si cerca  $x$  tale

che  $x^2 + r = y$ , con  $0 \leq r < 2x + 1$ .

Per affrontare questa questione, scriviamo  $y$  in base 100:

$$y = \sum_{h=1}^k b_h 100^{k-h} = 100^{k-1} b_1 + \dots + 100 b_{k-1} + b_k,$$

ove  $0 \leq b_h \leq 99$  per  $h = 1, \dots, k$ . Scriviamo invece il numero incognito  $x$  in base 10:

$$x = \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} = 10^{k-1} c_1 + \dots + 10 c_{k-1} + c_k,$$

con  $0 \leq c_h \leq 9$  per  $h = 1, \dots, k$ .

**Lemma 1.7.5** *Posto, per  $1 \leq p \leq k$ ,*

$$\begin{aligned} s_p &= \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} \right]^2 - \left[ \sum_{h=1}^{p-1} c_h 10^{p-h} \right]^2 = \left[ 2 \sum_{h=1}^{p-1} c_h 10^{p-h} + c_p \right] c_p, \\ r_p &= \sum_{h=1}^p b_h 100^{p-h} - \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} \right]^2, \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{cases} r_1 = b_1 - s_1 \\ r_p = 100r_{p-1} + b_p - s_p \quad \forall p \in \{2, \dots, k\}. \end{cases}$$

**Dimostrazione** Verifica diretta per induzione, noiosa ma facile.  $\square$

Andiamo a costruire gli interi  $c_h$  passo a passo. Scegliamo  $c_1$  imponendo che

$$c_1^2 \leq b_1 < (c_1 + 1)^2,$$

il che determina  $c_1$  univocamente, con  $0 \leq c_1 \leq 9$ . Essendo  $s_1 = c_1^2$  e  $r_1 = b_1 - s_1$ , la condizione si riscrive come

$$0 \leq r_1 < 2c_1 + 1.$$

Per ogni  $p \in \{2, \dots, k\}$ , supposti noti  $c_1, \dots, c_{p-1}$  scegliamo  $c_p$  imponendo che

$$\left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} \right]^2 \leq \sum_{h=1}^p b_h 100^{p-h} < \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} + 1 \right]^2,$$

il che determina  $c_p$  univocamente, con  $0 \leq c_p \leq 9$ . Sottraendo il primo membro dagli altri due, la condizione si può riscrivere nel modo seguente, per definizione di  $r_p$  e di  $s_p$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq r_p = \sum_{h=1}^p b_h 100^{p-h} - \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} \right]^2 < \\ &< \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} + 1 \right]^2 - \left[ \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} \right]^2 = 1 + 2 \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h}, \end{aligned}$$

ovvero

$$0 \leq r_p = 100r_{p-1} + b_p - s_p < 2 \sum_{h=1}^p c_h 10^{p-h} + 1.$$

In particolare, per  $p = k$ , la condizione che determina  $c_k$  è

$$x^2 = \left[ \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} \right]^2 \leq y = \sum_{h=1}^k b_h 100^{k-h} < \left[ \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} + 1 \right]^2 = (x+1)^2;$$

essa si riscrive, ponendo  $r = r_k$ , come

$$0 \leq r < 2 \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} + 1 = 2x + 1.$$

Il numero  $r$  risolve il nostro problema, dato che

$$x^2 + r = \left[ \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} \right]^2 + \sum_{h=1}^k b_h 100^{k-h} - \left[ \sum_{h=1}^k c_h 10^{k-h} \right]^2 = y.$$

**Osservazione 1.7.6** Se si vuole un'approssimazione fino alla  $m$ -sima cifra decimale, basterà considerare gli sviluppi di  $y$  in base 100 e di  $x$  in base 10 arrivando a  $h = k+m$  anziché a  $h = k$ , il che corrisponde a considerare gli sviluppi fino alla  $m$ -sima cifra “dopo la virgola” per  $x$  e  $y$  nelle rispettive basi.

**Esempi 1.7.7 (1)** Sia  $y = 4810$ : quindi  $y = 100 \cdot 48 + 10$ . Cerchiamo  $x$  della forma  $10c_1 + c_2$ . La condizione per  $c_1$  dà  $c_1 = 6$  (perché  $7^2 = 49 > 48 > 36 = 6^2$ ). Dunque  $s_1 = 36$  e  $r_1 = 48 - 36 = 12$ . Ne segue  $100r_1 + b_2 = 1210$ . Adesso si determina  $c_2$  in modo che  $s_2 = (20c_1 + c_2)c_2 < 10r_1 + b_2$ , ossia  $(120 + c_2)c_2 < 1210$ : dato che si trova  $(120 + 9) \cdot 9 = 129 \cdot 9 = 1161 < 1210$ , deve essere  $c_2 = 9$ , da cui  $s_2 = 1161$  e  $r = r_2 = 100r_1 + b_2 - s_2 = 1210 - 1161 = 49$ . Qui si termina. In definitiva si ha  $x = 69$ , ed infatti risulta  $x^2 + r = 69^2 + 49 = 4810 = y$ . Possiamo tradurre l'intero algoritmo nello schema seguente:

$\sqrt{100 \cdot 48 + 10} = \sqrt{48 \cdot 10}$  $s_1 = \quad 36$ $r_1 = 12; \quad 100r_1 + b_2 = \quad 12 \ 10$ $s_2 = \quad 11 \ 61$  $r = \quad \quad \quad 49$	$c_1 \ c_2$ $\downarrow \downarrow$ $6 \ 9$ <hr style="border-top: 1px solid black;"/> $c_1 = 6$ $s_2 = (120 + c_2)c_2$ $129 \cdot 9 = 1161 = s_2 < 1210, \ c_2 = 9$
--	--

**(2)** Sia  $y = 33333 = 3 \cdot 100^2 + 33 \cdot 100 + 33$ . Cerchiamo di conseguenza  $x = 10^2 c_1 + 10 c_2 + c_3$ .

Lo schema è:

$$\begin{array}{c} \sqrt{100^2 \cdot 3 + 100 \cdot 33 + 33} = \sqrt{3\ 33\ 33} \\ \\ \begin{array}{rcl} s_1 & = & 1 \\ & - & \\ r_1 = 2, 100r_1 + b_2 & = & 2\ 33 \\ s_2 & = & 2\ 24 \\ & - & \\ r_2 = 9, 100r_2 + b_3 & = & 9\ 33 \\ s_3 & = & 7\ 24 \\ & - & \\ r & = & 2\ 09 \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} c_1\ c_2\ c_3 \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 1\ 8\ 2 \\ \hline c_1 = 1 \\ s_2 = (20 + c_2)c_2 \\ 28 \cdot 8 = 224 = s_2 < 233, c_2 = 8 \\ s_3 = (360 + c_3)c_3 \\ 362 \cdot 2 = 724 = s_3 < 933, c_3 = 2 \\ \hline r = 2\ 09 \end{array} \right.$$

In conclusione si ha  $x = 182$  ed infatti  $x^2 + r = 182^2 + 209 = 33333 = y$ .

(3) Sia  $y = 39472.11 = 3 \cdot 100^2 + 94 \cdot 100 + 72 + 11 \cdot 100^{-1}$ . Cerchiamo

$$x = c_1 \cdot 10^2 + c_2 \cdot 10 + c_3 + c_4 \cdot 10^{-1}.$$

Lo schema è

$$\begin{array}{c} \sqrt{3\ 94\ 72.11} \\ \\ \begin{array}{rcl} s_1 & = & 1 \\ & - & \\ r_1 = 2, 100r_1 + b_2 & = & 2\ 94 \\ s_2 & = & 2\ 61 \\ & - & \\ r_2 = 33, 100r_2 + b_3 & = & 33\ 72 \\ s_3 & = & 31\ 04 \\ & - & \\ r_3 = 31, 100r_3 + b_4 & = & 2\ 68.11 \\ s_4 & = & 2\ 37.96 \\ & - & \\ r & = & 30.15 \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} c_1\ c_2\ c_3\ c_4 \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 1\ 9\ 8.6 \\ \hline c_1 = 1 \\ 29 \cdot 9 = 261 = s_2 < 294 \Rightarrow c_2 = 9 \\ 388 \cdot 8 = 3104 = s_3 < 3372 \Rightarrow c_3 = 8 \\ 3966 \cdot 6 = 23796 = s_4 < 26811 \Rightarrow c_4 = 6 \\ \hline r = 30.15 \end{array} \right.$$

In conclusione si ha  $x = 198.6$  ed infatti  $x^2 + r = (198.6)^2 + 30.15 = 39472.11 = y$ .

## Esercizi 1.7

1. Provare che:

- (i)  $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$  per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $n \geq k \geq 1$ ;

- (ii)  $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (iii)  $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ;
- (iv)  $\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $n \geq k$ .

2. Per  $n \in \mathbb{N}^+$  si dimostri la relazione

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt(1+t^{n-1}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- 3. Provare che un insieme di  $n$  elementi ha  $\binom{n}{k}$  sottoinsiemi distinti con  $k$  elementi ( $0 \leq k \leq n$ ).
- 4. Calcolare la probabilità di fare un terzo al lotto.
- 5. Calcolare la probabilità di fare 5 + 1 al Superenalotto.
- 6. (*Disuguaglianza di Bernoulli*) Provare che risulta

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall x \geq -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

7. Provare che

$$\sup \left\{ \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = 1 \quad \forall x \geq 0.$$

[Traccia: utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli.]

- 8. Si generalizzi la formula del binomio al caso di tre addendi.
- 9. Dimostrare per  $n \in \mathbb{N}^+$  le seguenti formule:

$$(i) \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} = 3^n, \quad (ii) \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^k \sum_{i=0}^h \binom{n}{k} \binom{k}{h} \binom{h}{i} = 4^n,$$

e trovare una formula analoga che dia come risultato  $p^n$ , ove  $p$  è un fissato numero naturale.

- 10. Si provi che la formula che fornisce il numero delle applicazioni surgettive  $S_{k,n}$  vale anche quando  $0 \leq k < n$ , allorché  $S_{k,n} = 0$ : in altre parole si mostri, per induzione, che

$$\sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^k = 0 \quad \text{per } 0 \leq k < n.$$

- 11. Si provi che

$$S_{n+1,n} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^{n+1} = \frac{n}{2}(n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

12. Si provi la formula ricorsiva

$$S_{k,n} = n [S_{k-1,n} + S_{k-1,n-1}] \quad \forall k, n \in \mathbb{N}^+.$$

13. Si mostri che

$$n! = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} (h+1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14. Determinare la radice quadrata approssimata per difetto dei seguenti numeri:

$$1200, \quad 35.99, \quad 123456.789, \quad 0.000678.$$

## 1.8 Radici $n$ -sime

Proviamo adesso un'altra conseguenza dell'assioma di continuità, vale a dire l'esistenza della radice  $n$ -sima di qualunque numero reale non negativo.

**Teorema 1.8.1** *Sia  $n \in \mathbb{N}^+$ . Per ogni numero reale  $a \geq 0$  esiste un unico numero reale  $r \geq 0$  tale che  $r^n = a$ ; tale numero si chiama radice  $n$ -sima di  $a$ , e si scrive  $r = \sqrt[n]{a}$  oppure  $r = a^{\frac{1}{n}}$ .*

**Dimostrazione** Supponremo  $n \geq 2$ , dato che per  $n = 1$  la tesi è ovvia. Se  $a = 0$ , allora l'unica soluzione dell'equazione  $x^n = 0$  è il numero 0 in virtù della legge di annullamento del prodotto. Supponiamo dunque  $a > 0$ .

Proviamo dapprima l'*unicità* della radice  $n$ -sima. Se vi fossero due numeri  $r$  e  $\rho$ , entrambi non negativi ed entrambi soluzioni dell'equazione  $x^n = a$ , uno dei due, ad esempio  $\rho$ , sarebbe maggiore dell'altro; ma da  $r < \rho$  segue (esercizio 1.6.17) che  $a = r^n < \rho^n = a$ , il che è assurdo. Dunque  $r = \rho$  e l'*unicità* è provata.

Per dimostrare l'*esistenza* della radice  $n$ -sima, consideriamo l'insieme

$$A = \{x \geq 0 : x^n < a\}$$

(ovviamente non vuoto, dato che  $0 \in A$ ) e mostriamo:

- (a) che  $A$  è limitato superiormente,
- (b) che  $r = \sup A$  è il numero che stiamo cercando, ossia che  $r^n = a$ .

Proviamo (a): se  $a \geq 1$ , facciamo vedere che il numero  $a$  è un maggiorante di  $A$ , mentre se  $0 < a < 1$  facciamo vedere che il numero 1 è un maggiorante di  $A$ . Sia  $a \geq 1$ : se per un  $x \in A$  risultasse  $x > a$ , moltiplicando questa diseguaglianza per  $x$  e per  $a$  avremmo  $x^2 > ax > a^2$ ; essendo  $a \geq 1$ , dedurremmo  $x^2 > a^2 \geq a$ . Procedendo per induzione, avremmo  $x^n > a$ , contraddicendo il fatto che  $x \in A$ : dunque si ha  $x \leq a$  per ogni  $x \in A$ . Sia ora  $0 < a < 1$ : se per un  $x \in A$  risultasse  $x > 1$ , procedendo analogamente troveremmo  $x^n > 1$ ; essendo  $1 > a$ , otterremmo  $x^n > a$ , nuovamente contraddicendo il fatto che  $x \in A$ . Quindi si ha  $x \leq 1$  per ogni  $x \in A$ . Se ne conclude che per ogni scelta di  $a$  l'insieme  $A$  ha maggioranti, e quindi è limitato superiormente.

Proviamo (b). Notiamo anzitutto che  $r = \sup A > 0$ . Infatti  $A$  contiene elementi non nulli: ad esempio, se  $a > 1$  si ha  $1 \in A$  in quanto  $1^n = 1 < a$ , mentre se  $0 < a < 1$  si ha  $a \in A$  poiché  $a^n < a$ ; infine se  $a = 1$  si ha  $\frac{1}{2} \in A$  dato che  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2} < 1 = a$ . Dobbiamo mostrare che  $r^n = a$ , e lo faremo provando che sono assurde entrambe le relazioni  $r^n > a$  e  $r^n < a$ . Supponiamo che sia  $r^n > a$ : vogliamo mostrare che, di conseguenza, deve essere

$$(r - \varepsilon)^n > a$$

per ogni  $\varepsilon$  positivo e sufficientemente piccolo; ciò implicherebbe che l'intervallo  $]r - \varepsilon, r[$  è costituito da punti che non appartengono ad  $A$ , contraddicendo il fatto che, essendo  $r$  il minimo dei maggioranti di  $A$ , in tale intervallo dovrebbero cadere punti di  $A$ . Invece di ricavare  $\varepsilon$  dalla diseguaglianza  $(r - \varepsilon)^n > a$ , che non sappiamo risolvere, ne dedurremo un'altra più restrittiva, ma più facile da risolvere. A questo scopo osserviamo che per  $\varepsilon \in ]0, r[$  si ha, grazie alla diseguaglianza di Bernoulli (esercizio 1.7.6; si noti che  $-\frac{\varepsilon}{r} > -1$ )

$$(r - \varepsilon)^n = r^n \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n \geq r^n \left(1 - n \frac{\varepsilon}{r}\right);$$

se ne deduce  $(r - \varepsilon)^n > a$  purché risulti

$$r^n \left(1 - n \frac{\varepsilon}{r}\right) > a.$$

Questa diseguaglianza, che segue da quella originale ed è quindi più restrittiva di essa, si risolve subito: essa è verificata se e solo se

$$\varepsilon < \frac{r}{n} \left(1 - \frac{a}{r^n}\right),$$

e dunque si deduce, come volevamo, che

$$(r - \varepsilon)^n > a \quad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{r}{n} \left(1 - \frac{a}{r^n}\right)\right[ \subset ]0, r[;$$

di qui, come si è detto, segue l'assurdo.

Supponiamo ora che sia  $r^n < a$ : vogliamo analogamente dedurre che

$$(r + \varepsilon)^n < a$$

per ogni  $\varepsilon$  positivo ed abbastanza piccolo; da ciò seguirà che  $A$  contiene numeri maggiori di  $r$ , contraddicendo il fatto che  $r$  è un maggiorante di  $A$ . Trasformiamo la diseguaglianza che ci interessa: si ha

$$(r + \varepsilon)^n = r^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^n < a \iff \frac{1}{r^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^n} > \frac{1}{a};$$

d'altronde, applicando nuovamente la diseguaglianza di Bernoulli (si noti che  $\frac{-\frac{\varepsilon}{r}}{1 + \frac{\varepsilon}{r}} > -1$ ), risulta

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^n} = \left(1 - \frac{\frac{\varepsilon}{r}}{1 + \frac{\varepsilon}{r}}\right)^n > 1 - n \frac{\frac{\varepsilon}{r}}{1 + \frac{\varepsilon}{r}} > 1 - n \frac{\varepsilon}{r};$$

quindi al posto della disegualanza  $(r + \varepsilon)^n > a$  si ottiene la disegualanza più restrittiva

$$\frac{1}{r^n} \left(1 - n \frac{\varepsilon}{r}\right) > \frac{1}{a}$$

che è vera se e solo se

$$0 < \varepsilon < \frac{r}{n} \left(1 - \frac{r^n}{a}\right).$$

Dunque si ottiene, come si voleva,

$$(r + \varepsilon)^n < a \quad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{r}{n} \left(1 - \frac{r^n}{a}\right)\right[ \subset ]0, r[,$$

e quindi, come si è osservato, l'assurdo.

In definitiva, non resta che dedurre l'uguaglianza  $r^n = a$ .  $\square$

## Disegualanza delle medie

Un risultato molto importante, utilissimo in svariate situazioni, è la disegualanza tra media geometrica e media aritmetica di  $n$  numeri non negativi. Se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono numeri non negativi, la loro *media geometrica* è il numero reale

$$G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k},$$

mentre la loro *media aritmetica* è il numero reale

$$A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si ha allora:

**Teorema 1.8.2** *Se  $n \in \mathbb{N}^+$  e se  $a_1, \dots, a_n$  sono numeri non negativi, allora*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k;$$

*inoltre vale il segno di uguaglianza se e solo se gli  $a_k$  sono tutti uguali fra loro.*

**Dimostrazione** Anzitutto, è chiaro che se gli  $a_k$  sono tutti uguali fra loro allora  $G = A$ . Per provare il viceversa, mostreremo che se gli  $a_k$  non sono tutti uguali allora risulta  $G < A$ ; ciò è ovvio se qualcuno degli  $a_k$  è nullo, perché in tal caso si ha  $G = 0 < A$ . Possiamo dunque supporre gli  $a_k$  strettamente positivi e non tutti uguali. Proveremo la disegualanza  $G < A$  per induzione.

Se  $n = 2$ , la tesi è vera perché

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \iff (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2 > 0,$$

ed essendo  $a_1 \neq a_2$ , la relazione a destra è vera.

Supponiamo che la disuguaglianza stretta sia vera per ogni  $n$ -pla di numeri positivi non tutti uguali, e dimostriamola nel caso di  $n+1$  numeri. Prendiamo dunque  $n+1$  numeri positivi  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$  non tutti uguali: allora ce ne sarà almeno uno diverso dalla media aritmetica  $A$ ; per simmetria, o meglio per definizione stessa di media aritmetica, di numeri diversi da  $A$  ce ne dovranno essere almeno due,  $a_i$  e  $a_j$ , dei quali uno sarà maggiore ed uno sarà minore di  $A$ . Quindi, a meno di riordinare gli  $a_k$ , non è restrittivo supporre che risulti

$$a_n < A < a_{n+1}.$$

Il fatto che  $A$  è la media aritmetica degli  $a_k$  si può riscrivere così:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + (a_n + a_{n+1} - A) = n \cdot A,$$

e questo ci dice che  $A$  è anche la media aritmetica degli  $n$  numeri non negativi  $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1} - A$ ; per ipotesi induttiva, la loro media geometrica è non superiore ad  $A$ , ossia

$$\sqrt[n]{(a_n + a_{n+1} - A) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k} \leq A.$$

Elevando alla  $n$ -sima potenza e moltiplicando per  $A$  si ricava allora

$$A \cdot (a_n + a_{n+1} - A) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n+1}.$$

D'altra parte risulta

$$a_n a_{n+1} < A(a_n + a_{n+1} - A)$$

in quanto

$$A(a_n + a_{n+1} - A) - a_n a_{n+1} = (A - a_n)(a_{n+1} - A) > 0;$$

quindi a maggior ragione otteniamo

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k < A \cdot (a_n + a_{n+1} - A) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n+1}.$$

La disuguaglianza per  $n+1$  numeri è dunque stretta se essi non sono tutti uguali. Per il principio di induzione, la tesi è provata.  $\square$

**Esempi 1.8.3 (1)** Applicando la disuguaglianza delle medie si dimostra questa basilare proprietà delle radici  $n$ -sime:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a \geq 1, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a \in ]0, 1].$$

(Si osservi la notazione:  $\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}}$  significa  $\inf \{a^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^+\}$ , e similmente  $\sup_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}}$  denota  $\sup \{a^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^+\}$ .)

Infatti la proprietà è evidente quando  $a = 1$ , poiché  $1^{\frac{1}{n}} = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Supponiamo adesso  $a > 1$ : allora, fissato  $n \geq 2$  e prendendo  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 1$  e  $a_n = a$ , dalla disuguaglianza delle medie si ha

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}(n-1+a) = 1 + \frac{a-1}{n} \quad \forall n \geq 2,$$

da cui

$$1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^+} \left(1 + \frac{a-1}{n}\right) = 1.$$

Ciò prova la tesi quando  $a > 1$ .

Se  $a < 1$ , si ha  $\frac{1}{a} > 1$  e, per quanto visto,

$$1 < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{1}{a}-1}{n} = 1 + \frac{1-a}{na} \quad \forall n \geq 2,$$

da cui

$$\frac{1}{1 + \frac{1-a}{na}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \forall n \geq 2;$$

ne segue

$$1 = \sup_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{1 + \frac{1-a}{na}} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

**(2)** Dimostriamo la seguente importante disuguaglianza:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ con } n > -x.$$

Essa segue dalla disuguaglianza delle medie, scegliendo  $a_1 = \dots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$  e  $a_{n+1} = 1$ : infatti

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \prod_{k=1}^{n+1} a_k < \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} \left[n \left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1\right]\right)^{n+1} = \\ &= \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

## Esercizi 1.8

- Provare che per ogni numero reale  $a > 0$  e per ogni intero *pari*  $n \geq 2$  l'equazione  $x^n = a$  ha le due soluzioni reali  $x = \pm a^{\frac{1}{n}}$ ; si provi inoltre che

$$-a^{\frac{1}{n}} = \inf \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}.$$

- Provare che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  e per ogni intero *dispari*  $n \geq 1$ , l'equazione  $x^n = a$  ha esattamente una soluzione reale, e cioè:

$$x = \begin{cases} a^{\frac{1}{n}} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)^{\frac{1}{n}} & \text{se } a < 0; \end{cases}$$

questo permette di estendere la definizione di radice  $n$ -sima, quando  $n$  è dispari, a tutti i numeri  $a \in \mathbb{R}$ .

3. Si dimostri la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

[**Traccia:** data l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ , si osservi che non è restrittivo supporre  $a > 0$ ; si “completi il quadrato” a primo membro scrivendola nella forma

$$\left( \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

e si analizzi il segno del *discriminante*  $b^2 - 4ac \dots$ ]

4. Sia  $n \in \mathbb{N}^+$ . Si provi la seguente diseguaglianza tra *media armonica* e media geometrica di  $n$  numeri positivi:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

5. Dimostrare che la media geometrica è *superadditiva*, nel senso che se  $n \in \mathbb{N}^+$  e se  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  sono numeri positivi, allora

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} + \left( \prod_{i=1}^n b_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

[**Traccia:** si dividano entrambi i membri per la quantità a secondo membro e si utilizzi opportunamente il teorema 1.8.2.]

## 1.9 Valore assoluto

In geometria la *retta* è un concetto primitivo, ossia non se ne fornisce la definizione ma la si considera come un ente intrinsecamente noto. Il sistema dei numeri reali costituisce il modello matematico dell'idea intuitiva di retta: si assume che ad ogni punto della retta corrisponda uno ed un solo numero reale (che viene detto *ascissa* del punto). Questo è un vero e proprio assioma, ma è peraltro un enunciato del tutto ragionevole; per realizzare tale corrispondenza, si fissa sulla retta un *sistema di riferimento*, costituito da un'*origine*, a cui associamo il numero reale 0, da un'*unità di misura*, che ci permette di identificare i punti a cui associare i numeri interi, e da un'*orientazione*, allo scopo di distinguere i punti corrispondenti a numeri positivi da quelli corrispondenti a numeri negativi.



Per misurare la “grandezza” di un numero, a prescindere dal fatto che esso sia positivo oppure negativo, è fondamentale la seguente

**Definizione 1.9.1** Il *valore assoluto*, o *modulo*, di un numero reale  $x$  è il numero non negativo  $|x|$  così definito:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si noti che risulta

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

od equivalentemente

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

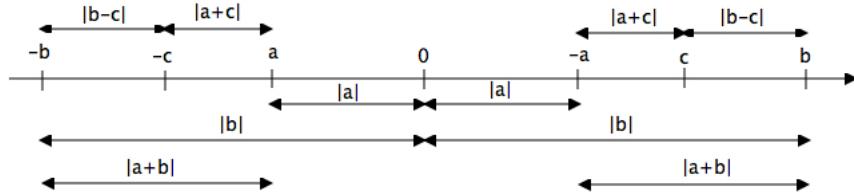
Si noti anche che

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

e, più generalmente (esercizio 1.9.4),

$$|x - u| \leq a \iff u - a \leq x \leq u + a.$$

Rappresentando  $\mathbb{R}$  come retta orientata,  $|x|$  è la *distanza* del numero reale  $x$  dall'origine 0, e analogamente  $|a - b|$  è la distanza fra i due numeri reali  $a$  e  $b$ .



La proposizione che segue riassume le principali proprietà del valore assoluto.

**Proposizione 1.9.2** *Valgono i seguenti fatti:*

- (i)  $|x| \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , e  $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- (ii)  $|x| \cdot |y| = |xy|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (iii) (subadditività)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (v)  $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$  per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- (vi)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Dimostrazione** La proprietà (i) è evidente. Per (ii) si osservi che dalla definizione segue subito  $x^2 = |x|^2$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ; quindi

$$(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 |y|^2 = x^2 y^2 = (xy)^2 = |xy|^2;$$

da qui segue la tesi estraendo la radice quadrata: infatti

$$t \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{t^2} = t \iff t \geq 0.$$

Proviamo (iii): usando (i) e (ii), si ha

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata.

La (iv) è conseguenza della subadditività: infatti

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

da cui  $|x| - |y| \leq |x - y|$ ; scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$  si ottiene anche  $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ , e quindi

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|.$$

Dimostriamo (v): da (ii) segue

$$|x| \cdot \left| \frac{1}{x} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{x} \right| = |1| = 1,$$

quindi  $\left| \frac{1}{x} \right|$  è l'inverso di  $|x|$ , ossia vale la tesi.

Infine (vi) è conseguenza evidente di (ii) e (v).  $\square$

## Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Un'altra importante disuguaglianza, che come si vedrà ha un rilevante significato geometrico, è la seguente:

**Teorema 1.9.3** *Fissato  $n \in \mathbb{N}^+$ , siano  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  numeri reali. Allora si ha*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

**Dimostrazione** Fissato  $t \in \mathbb{R}$ , consideriamo la quantità, certamente non negativa,  $\sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2$ . Si ha

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} :$$

Questa espressione è un trinomio di secondo grado nella variabile reale  $t$ . Il fatto che esso sia sempre non negativo implica che il discriminante

$$\Delta = 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

deve essere non positivo (esercizio 1.8.3). La condizione  $\Delta \leq 0$  implica la tesi.  $\square$

## Esercizi 1.9

1. Determinare sotto quali condizioni sui numeri reali  $x, y$  valgono le uguaglianze:

- |                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| (i) $ x  -  y  =  x - y ;$   | (ii) $ x + y  =  x - y ;$     |
| (iii) $ x  -  y  = x - y;$   | (iv) $ x  -  y  = x + y;$     |
| (v) $\ x  -  y\  =  x + y ;$ | (vi) $\ x  -  y\  =  x - y ;$ |
| (vii) $\ x  -  y\  = x + y;$ | (viii) $\ x  -  y\  = x - y.$ |

2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

- |  |   |
|--|---|
| (i) $ x  + 1 =  x + 1 ,$                                 | (ii) $ x  - x^2 = \ x  + x ,$           |
| (iii) $ x + 3  <  2x - 3 ,$                              | (iv) $\ x - 1  + 1  < 1,$               |
| (v) $\frac{1}{ x } - \frac{1}{ x+3 } > \frac{1}{ x+4 },$ | (vi) $\ 2x - 1  -  x + 3\  <  4x + 5 .$ |

3. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

- |  |  |
|--|--|
| (i) $ x - 1  < 3;$                             | (ii) $ 2 + 3x  =  4 - x ;$                                 |
| (iii) $ 10 - 3x  = 4;$                         | (iv) $ 1 + 2x  \geq 1;$                                    |
| (v) $ x + 2  \geq 5x;$                         | (vi) $ 5 + x^{-1}  < 1;$                                   |
| (vii) $ x^2 - 2  \leq 1;$                      | (viii) $x <  x^2 - 12  < 4x;$                              |
| (ix) $\frac{15x - 3}{x^2 - 5} \geq 3;$         | (x) $\begin{cases} x + 1 > -1 \\ -3x + 4 > 2 \end{cases};$ |
| (xi) $\frac{ x^2 - 2  + 3}{3x + 1} \geq 1;$    | (xii) $\frac{ x + 2  - 2x}{x^2 - 2x} \leq 1;$              |
| (xiii) $\frac{2}{x + 2} > \frac{2x}{x^2 - 1};$ | (xiv) $x^2 - 5 x  + 6 \geq 0.$                             |

4. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $b \geq 0$ . Verificare che

$$|x - a| < b \iff a - b < x < a + b.$$

5. Determinare un numero reale  $M$  tale che si abbia

$$|x| \leq 1 \implies |x^2 - x| \leq M.$$

6. Risolvere le seguenti disequazioni:

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| (i) $\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \geq 2;$ | (ii) $\sqrt{\frac{ x+2 }{ x-1 }} > 1;$        |
| (iii) $\sqrt{4x^2 - 1} < x - 3;$     | (iv) $\sqrt{3x^2 - 1} > \sqrt{x^2 - 3};$      |
| (v) $ x \sqrt{1 - 2x^2} > 2x^2 - 1;$ | (vi) $\frac{ x  - 3}{\sqrt{x-2}} > \sqrt{x}.$ |

7. Provare che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  si ha

$$\max\{a, 0\} = \frac{a + |a|}{2}, \quad \min\{a, 0\} = -\max\{-a, 0\} = \frac{a - |a|}{2}.$$

8. Si dimostri la disegualanza di Cauchy-Schwarz utilizzando il principio di induzione.

## 1.10 La funzione esponenziale

Vogliamo definire la funzione esponenziale  $a^x$  per ogni base  $a > 0$  e per ogni esponente  $x \in \mathbb{R}$ , naturalmente preservando le proprietà usuali, “notoriamente” vere quando gli esponenti sono numeri naturali. A questo scopo procederemo in vari passi.

Prima di cominciare, enunciamo un lemma che useremo a più riprese.

**Lemma 1.10.1 (dell’arbitrarietà di  $\varepsilon$ )** *Siano  $a, b$  numeri reali e  $M, \delta$  numeri reali positivi. Supponiamo che risulti*

$$a \leq b + M\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in ]0, \delta[;$$

allora si ha necessariamente  $a \leq b$ .

**Dimostrazione** Se fosse  $a > b$ , scegliendo

$$\varepsilon \in \left]0, \min \left\{ \delta, \frac{a-b}{M} \right\} \right[$$

si otterebbe  $a > b + M\varepsilon$ , contro l’ipotesi.  $\square$

**1º passo (esponenti naturali)** Ricordiamo che per  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{R}$  la potenza  $a^n$  è stata definita all’inizio del paragrafo 1.7; è facile verificare che se  $a, b > 0$  valgono i seguenti fatti:

- (i)  $a^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^0 = 1;$
- (ii)  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N};$
- (iii)  $a^{nm} = (a^n)^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N};$
- (iv)  $(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- (v)  $a < b \implies a^n < b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$
- (vi)  $\begin{cases} a < 1 \implies a^n < 1 \\ a > 1 \implies a^n > 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$
- (vii)  $\begin{cases} a^m < a^n & \text{se } a < 1 \\ a^m > a^n & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m > n.$

Le proprietà (i)-(vi) si verificano per induzione su  $n$  (esercizio 1.10.1), mentre la (vii) segue banalmente da (vi) scrivendo  $a^m = a^n \cdot a^{m-n}$ .

**2º passo (radici  $n$ -sime)** Per  $n \in \mathbb{N}^+$  e  $a > 0$  la quantità  $a^{\frac{1}{n}}$  è stata definita nel paragrafo 1.8 come l'unica soluzione positiva dell'equazione  $x^n = a$ ; dunque per definizione si ha

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Risulta anche

$$a^{\frac{1}{nm}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iii), i due membri risolvono entrambi l'equazione  $x^{mn} = a$ ),

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iii), i due membri risolvono entrambi l'equazione  $x^n = a^m$ ),

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iv), i due membri risolvono entrambi l'equazione  $x^n = ab$ ),

$$\begin{cases} a < 1 \implies a^{\frac{1}{n}} < 1 \\ a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

(per l'esercizio 1.10.2),

$$\begin{cases} a < 1 \implies a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} \\ a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{m}} \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+ \text{ con } m > n$$

(elevando entrambi i membri alla potenza  $mn$  ed usando (v), (vii)).

**3º passo (esponenti razionali)** Se  $r \in \mathbb{Q}$ , sarà  $r = \frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^+$ ; se  $a > 0$  poniamo allora, per definizione,

$$a^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p & \text{se } p \geq 0 \\ \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{-p}} & \text{se } p < 0. \end{cases}$$

Occorre però verificare che questa è una *buona definizione*, nel senso che essa non deve dipendere dal modo di rappresentare in frazione il numero razionale  $r$ : in altri termini, bisogna controllare che se  $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ , ossia  $np = mq$ , allora risulta  $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$ . Ed infatti, supposto ad esempio  $p \geq 0$ , utilizzando le proprietà precedenti si trova

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}})^p)^m = (a^{\frac{1}{np}})^{mp} = (a^{\frac{1}{mq}})^{mp} = (((a^{\frac{1}{q}})^{\frac{1}{m}})^m)^p = (a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}};$$

il discorso è del tutto analogo se  $p < 0$ .

Si ottengono allora facilmente le estensioni delle proprietà (i)-(vii) al caso di esponenti

razionali (vedere l'esercizio 1.10.3):

- (i)  $a^r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad a^0 = 1;$
- (ii)  $a^{r+s} = a^r \cdot a^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q};$
- (iii)  $a^{rs} = (a^r)^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q};$
- (iv)  $(ab)^r = a^r \cdot b^r \quad \forall r \in \mathbb{Q};$
- (v)  $a < b \implies a^r < b^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ con } r > 0;$
- (vi)  $\begin{cases} a < 1 \implies a^r < 1 & \forall r \in \mathbb{Q} \text{ con } r > 0; \\ a > 1 \implies a^r > 1 \end{cases}$
- (vii)  $\begin{cases} a^r < a^s \text{ se } a < 1 & \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r > s. \\ a^r > a^s \text{ se } a > 1 \end{cases}$

**4<sup>o</sup> passo (esponenti reali)** Manco a dirlo, nell'estensione da  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$  è essenziale l'assioma di continuità. Prima di definire la quantità  $a^x$  per  $x \in \mathbb{R}$ , dimostriamo il seguente risultato che ci illuminerà sul modo di procedere.

**Proposizione 1.10.2** *Siano  $a, x \in \mathbb{R}$  con  $a > 0$ , e poniamo*

$$A = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}, \quad B = \{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\}.$$

Allora gli insiemi  $A$  e  $B$  sono separati; in particolare, se  $a \geq 1$  si ha  $\sup A = \inf B$ , mentre se  $a \leq 1$  risulta  $\inf A = \sup B$ .

**Dimostrazione** Supponiamo  $a \geq 1$  e poniamo  $\lambda = \sup A$ ,  $\mu = \inf B$ ; questi numeri  $\lambda, \mu$  sono finiti (esercizio 1.10.4). Da (vii) segue che

$$a^r \leq a^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x < s,$$

quindi risulta  $\lambda \leq \mu$ . Dobbiamo provare che  $\lambda = \mu$ . Se fosse invece  $\lambda < \mu$ , dal fatto che

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

(esempio 1.8.3 (1)) segue che possiamo scegliere  $n \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} < \frac{\mu}{\lambda}.$$

Scelto poi  $r \in \mathbb{Q}$  tale che  $x - \frac{1}{n} < r < x$ , il che è lecito per la densità dei razionali in  $\mathbb{R}$  (corollario 1.6.8), si ha  $r + \frac{1}{n} > x$ ; dunque, usando (ii),

$$\mu \leq a^{r+\frac{1}{n}} = a^r \cdot a^{\frac{1}{n}} \leq \lambda \cdot a^{\frac{1}{n}} < \lambda \cdot \frac{\mu}{\lambda} = \mu.$$

Ciò è assurdo e pertanto  $\lambda = \mu$ .

Supponiamo adesso  $0 < a \leq 1$  e poniamo  $L = \inf A$ ,  $M = \sup B$ ; nuovamente, questi numeri  $L, M$  sono finiti (esercizio 1.10.4). Da (vii) segue stavolta

$$a^r \geq a^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x < s,$$

cosicché  $L \geq M$ . Se fosse  $L > M$ , preso  $n \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$\frac{M}{L} < a^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

(lecito, essendo  $\sup_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1$ ) e scelto  $s \in \mathbb{Q}$  con  $x < s < x + \frac{1}{n}$ , si ha  $s - \frac{1}{n} < x$  e dunque, per (ii),

$$L \leq a^{s-\frac{1}{n}} = \frac{a^s}{a^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{M}{a^{\frac{1}{n}}} < M \cdot \frac{L}{M} = L.$$

Ciò è assurdo e pertanto  $L = M$ .  $\square$

La precedente proposizione ci dice che la nostra scelta per definire  $a^x$  è obbligata: se vogliamo mantenere la proprietà (vii) siamo forzati a dare questa

**Definizione 1.10.3** Siano  $a, x \in \mathbb{R}$  con  $a > 0$ . Indichiamo con  $a^x$  il numero reale seguente:

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \inf\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\} & \text{se } a \geq 1 \\ \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \sup\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\} & \text{se } 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

Non è difficile verificare che nel caso in cui  $x$  è razionale questa definizione concorda con la precedente (esercizio 1.10.4).

**Osservazioni 1.10.4 (1)** Dalla definizione segue subito che  $1^x = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**(2)** Per ogni  $a > 0$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$  risulta  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ . Infatti, supposto ad esempio  $a \geq 1$ , si ha

$$\begin{aligned} a^{-x} &= \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < -x\} = (\text{posto } s = -r) \\ &= \sup\{a^{-s} : s \in \mathbb{Q}, s > x\} = (\text{per definizione nel caso di esponente razionale}) \\ &= \sup\left\{\frac{1}{a^s} : s \in \mathbb{Q}, s > x\right\} = (\text{per l'esercizio 1.10.5}) \\ &= \frac{1}{\inf\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\}} = \frac{1}{a^x}; \end{aligned}$$

il discorso è analogo se  $0 < a \leq 1$ .

Estendiamo adesso le proprietà (i)-(vii) al caso di esponenti reali. La (i) è evidente. Per la (ii) si ha:

**Proposizione 1.10.5** Per ogni  $a > 0$  si ha

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Dimostrazione** Supponiamo ad esempio  $a \geq 1$ . Poiché

$$a^{x+y} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x + y\},$$

per ogni  $r, s \in \mathbb{Q}$  con  $r < x$  e  $s < y$  si ha  $r + s < x + y$  e quindi

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \leq a^{x+y}.$$

Passando all'estremo superiore separatamente rispetto a  $r$  e rispetto a  $s$ , otteniamo (esercizio 1.5.15)

$$a^x a^y \leq a^{x+y}.$$

In modo del tutto analogo, usando il fatto che

$$a^{x+y} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x + y\},$$

si prova che  $a^x a^y \geq a^{x+y}$ . La tesi è così provata quando  $a \geq 1$ .

Nel caso  $0 < a \leq 1$  si procede esattamente come sopra: l'unica differenza è che dalla relazione

$$a^{x+y} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x + y\}$$

segue che  $a^x a^y \geq a^{x+y}$ , mentre dalla relazione

$$a^{x+y} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x + y\}$$

segue che  $a^x a^y \leq a^{x+y}$ .  $\square$

Proviamo ora (iv) e (iii); per le proprietà (v), (vi), (vii) si rimanda agli esercizi 1.10.6, 1.10.7 e 1.10.8.

**Proposizione 1.10.6** *Per ogni  $a, b > 0$  si ha*

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Dimostrazione** Supponiamo  $a, b \geq 1$ . Usando la caratterizzazione di  $a^x$ ,  $b^x$ ,  $(ab)^x$  mediante gli estremi superiori, si vede che per ogni  $r \in \mathbb{Q}$  con  $r < x$  si ha

$$a^r b^r = (ab)^r \leq (ab)^x.$$

D'altra parte fissato  $\varepsilon > 0$  esistono  $r, r' \in \mathbb{Q}$  con  $r < x$  e  $r' < x$  tali che

$$a^x - \varepsilon < a^r \leq a^x, \quad b^x - \varepsilon < b^{r'} \leq b^x;$$

quindi posto  $\rho = \max\{r, r'\}$  si ha a maggior ragione

$$a^x - \varepsilon < a^\rho \leq a^x, \quad b^x - \varepsilon < b^\rho \leq b^x.$$

Ne segue, scegliendo  $0 < \varepsilon < \min\{a^x, b^x\}$ ,

$$(a^x - \varepsilon)(b^x - \varepsilon) < a^\rho b^\rho = (ab)^\rho \leq (ab)^x$$

da cui, essendo  $\varepsilon^2 > 0$ ,

$$a^x b^x - \varepsilon(b^x + a^x) < (ab)^x$$

ossia

$$a^x b^x < (ab)^x + \varepsilon(a^x + b^x) \quad \forall \varepsilon \in ]0, \min\{a^x, b^x\}[;$$

per il lemma dell'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si deduce che  $a^x b^x \leq (ab)^x$ .

Utilizzando invece le caratterizzazioni di  $a^x, b^x, (ab)^x$  mediante gli estremi inferiori, si ottiene in modo analogo che  $a^x b^x \geq (ab)^x$ . La tesi è così provata quando  $a, b \geq 1$ .

Se  $a, b \leq 1$  si procede in modo simmetrico: usando le caratterizzazioni con gli estremi superiori si trova che  $a^x b^x \leq (ab)^x$ , usando quelle con gli estremi inferiori si trova l'altra disegualanza.

Infine se  $a > 1 > b$  e, ad esempio,  $ab \geq 1$ , allora usando le caratterizzazioni con gli estremi superiori avremo:

$$a^r b^r = (ab)^r \leq (ab)^x \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x,$$

e per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $r', s' \in \mathbb{Q}$ , con  $r' < x, s' > x$ , tali che

$$a^x - \varepsilon < a^{r'} \leq a^x, \quad b^x - \varepsilon < b^{s'} \leq b^x;$$

dunque se  $0 < \varepsilon < \min\{a^x, b^x\}$  si ricava, ricordando che  $b^{s'-r'} \leq 1$ ,

$$0 < (a^x - \varepsilon)(b^x - \varepsilon) < a^{r'} b^{s'} \leq a^{r'} b^{r'} = (ab)^{r'} \leq (ab)^x,$$

da cui, procedendo come prima,  $a^x b^x \leq (ab)^x$ . Similmente, usando le caratterizzazioni con gli estremi inferiori, si arriva alla disegualanza opposta. Se  $a > 1 > b$  e  $ab \leq 1$ , la procedura è la stessa, “mutatis mutandis”, e lasciamo i dettagli al lettore.  $\square$

**Osservazione 1.10.7** Dalla proposizione precedente segue, in particolare, che

$$a^x \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1^x = 1 \quad \forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cioè, ricordando l'osservazione 1.10.4,

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 1.10.8** *Per ogni  $a > 0$  si ha*

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Dimostrazione** È sufficiente considerare il caso  $x, y \geq 0$ : infatti, provata la tesi in questo caso, se  $\min\{x, y\} < 0$  ci si riconduce ad esso nel modo seguente:

$$(a^x)^y = \left(\frac{1}{a^{-x}}\right)^y = \frac{1}{a^{(-x)y}} = a^{xy} \quad \text{se } x < 0 \leq y;$$

$$(a^x)^y = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = \frac{1}{a^{-xy}} = a^{xy} \quad \text{se } y < 0 \leq x;$$

$$(a^x)^y = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-x}}\right)^{-y}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{(-x)(-y)}}} = a^{(-x)(-y)} = a^{xy} \quad \text{se } x, y < 0.$$

Siano dunque  $x, y \geq 0$ : se  $x = 0$  oppure  $y = 0$  la tesi è evidente, dunque possiamo assumere  $x, y > 0$ . Consideriamo dapprima il caso  $a \geq 1$ : in particolare avremo anche  $a^x \geq 1$ . Usando la caratterizzazione con gli estremi superiori, si ha

$$(a^r)^s = a^{rs} \leq a^{xy} \quad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x \text{ e } s < y,$$

e per ogni  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$  esistono  $r', s' \in \mathbb{Q}$  tali che  $0 < r' < x$ ,  $0 < s' < y$  e

$$a^x(1 - \varepsilon) < a^{r'} \leq a^x, \quad (a^x)^y(1 - \varepsilon) < (a^x)^{s'} \leq (a^x)^y.$$

Dunque, facendo uso della proposizione 1.10.8 e tenendo conto del fatto che  $s' \geq 0$  e  $0 < r's' < xy$ , si ottiene

$$(a^x)^y < \frac{(a^x)^{s'}}{1 - \varepsilon} = \frac{(a^x)^{s'}(1 - \varepsilon)^{s'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} = \frac{[a^x(1 - \varepsilon)]^{s'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} \leq \frac{a^{r's'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} \leq \frac{a^{xy}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}}.$$

Da qui, scegliendo  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $s'+1 \leq n$ , e osservando che da  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  segue  $\frac{1}{1-\varepsilon} < 1+2\varepsilon$ , concludiamo che

$$(a^x)^y < \frac{a^{xy}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} < a^{xy}(1 + 2\varepsilon)^n.$$

D'altra parte, dalla formula del binomio (teorema 1.7.1) e dall'osservazione 1.7.2 (3) segue che

$$(1 + 2\varepsilon)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2\varepsilon)^k < 1 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} < 1 + 2^{n+1}\varepsilon,$$

da cui finalmente

$$(a^x)^y < a^{xy} + a^{xy} \cdot 2^{n+1}\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,$$

e dunque  $(a^x)^y \leq a^{xy}$  in virtù dell'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

In modo analogo, usando la caratterizzazione con gli estremi inferiori, si prova la disegualanza opposta: ciò conclude la dimostrazione nel caso  $a \geq 1$ .

Se  $0 < a \leq 1$  si procede in modo analogo: la caratterizzazione con gli estremi superiori implicherà che  $(a^x)^y \geq a^{xy}$ , mentre quella con gli estremi inferiori porterà alla disegualanza opposta. La tesi è così provata.  $\square$

## Logaritmi

Abbiamo visto che la funzione esponenziale di base  $a$  (con  $a$  numero positivo e diverso da 1) è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ed è a valori in  $]0, \infty[$ . Essa è *strettamente monotona*, ossia verifica (esercizio 1.10.8)

$$x < y \implies a^x < a^y \quad \text{se } a > 1, \quad x < y \implies a^x > a^y \quad \text{se } a < 1 :$$

se  $a > 1$  è dunque una funzione *strettamente crescente* su  $\mathbb{R}$ , se  $a < 1$  è *strettamente decrescente* su  $\mathbb{R}$ . In particolare, essa è *iniettiva*: ciò significa che ad esponenti distinti corrispondono potenze distinte, ossia

$$a^x = a^y \implies x = y.$$

Inoltre la funzione esponenziale ha per codominio la semiretta  $]0, \infty[$ , vale a dire che ogni numero positivo è uguale ad una potenza di base  $a$ , per un opportuno esponente  $x \in \mathbb{R}$ ; ciò è garantito dal seguente risultato:

**Teorema 1.10.9** *Se  $a$  è un numero positivo diverso da 1, allora per ogni  $y > 0$  esiste un unico  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $a^x = y$ ; tale numero  $x$  si chiama logaritmo in base  $a$  di  $y$  e si indica con  $x = \log_a y$ .*

**Dimostrazione** L'unicità di  $x$  è conseguenza dell'iniettività della funzione esponenziale. Proviamo l'esistenza. Trattiamo dapprima il caso  $a > 1$ ,  $y > 1$ : consideriamo l'insieme

$$A = \{t \in \mathbb{R} : a^t < y\},$$

che è certamente non vuoto, essendo  $0 \in A$ . Notiamo che  $A$  è anche limitato superiormente. Infatti esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $a^n > y$ , dato che per la diseguaglianza di Bernoulli (esercizio 1.7.6) si ha  $a^n > 1 + n(a - 1) > y$  non appena  $n > \frac{y-1}{a-1}$ ; quindi risulta  $a^n > y > a^t$  per ogni  $t \in A$ , da cui  $n > t$  per ogni  $t \in A$ , ossia ognuno di tali  $n$  è un maggiorante di  $A$ . Poniamo allora  $x = \sup A$ , e mostriamo che  $a^x = y$ .

Se fosse  $a^x > y$ , scelto  $n \in \mathbb{N}$  in modo che  $a^{1/n} < a^x \cdot \frac{1}{y}$ , il che è possibile grazie all'esempio 1.8.3 (1), avremmo  $a^{x-1/n} > y > a^t$  per ogni  $t \in A$ , da cui  $x - \frac{1}{n} > t$  per ogni  $t \in A$ : ne seguirebbe che  $x - \frac{1}{n}$  sarebbe un maggiorante di  $A$ , il che contraddice la definizione di  $x$ . Se fosse  $a^x < y$ , scelto  $n$  in modo che  $a^{1/n} < y \cdot a^{-x}$ , avremmo  $a^{x+1/n} < y$ , cioè  $x + \frac{1}{n} \in A$ , nuovamente contraddicendo la definizione di  $x$ . Perciò  $a^x = y$ , e la tesi è provata nel caso  $a > 1$ ,  $y > 1$ .

Se  $a > 1$ ,  $y = 1$  allora chiaramente  $x = 0$ . Se  $a > 1$ ,  $0 < y < 1$ , allora  $\frac{1}{y} > 1$ , cosicché per quanto già visto esiste un unico  $x' \in \mathbb{R}$  tale che  $a^{x'} = \frac{1}{y}$ ; quindi, posto  $x = -x'$ , si ha  $a^x = a^{-x'} = y$ .

Infine, se  $0 < a < 1$  e  $y > 0$ , per quanto visto esiste un unico  $x' \in \mathbb{R}$  tale che  $(1/a)^{x'} = y$ ; posto  $x = -x'$ , ne segue  $a^x = y$ .  $\square$

La funzione esponenziale (con base positiva e diversa da 1) è dunque invertibile: la funzione inversa, che ad ogni  $y > 0$  associa l'unico esponente  $x \in \mathbb{R}$  per il quale si ha  $a^x = y$ , è il logaritmo di base  $a$ :

$$a^x = y \iff x = \log_a y.$$

La funzione logaritmo è definita su  $]0, \infty[$ , a valori in  $\mathbb{R}$ , ed è ovviamente anch'essa bigettiva: dunque per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esiste un unico  $y > 0$  tale che  $\log_a y = x$ , e tale  $y$  è precisamente  $a^x$ . Si hanno dunque le relazioni

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y > 0, \quad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalle proprietà dell'esponenziale seguono le corrispondenti proprietà dei logaritmi:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad \forall b, c > 0, \quad \forall a \in ]0, \infty[ \setminus \{1\}$$

(conseguenza di  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ , scegliendo  $x = \log_a b$ ,  $y = \log_a c$ );

$$\log_a \frac{1}{c} = -\log_a c \quad \forall c > 0, \quad \forall a \in ]0, \infty[ \setminus \{1\}$$

(conseguenza di  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ , scegliendo  $x = \log_a c$ );

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c \quad \forall c > 0, \quad \forall a, b \in ]0, \infty[ \setminus \{1\}$$

(conseguenza di  $(a^x)^y = a^{xy}$ , scegliendo  $x = \log_a b$ ,  $y = \log_b c$ ). In particolare:

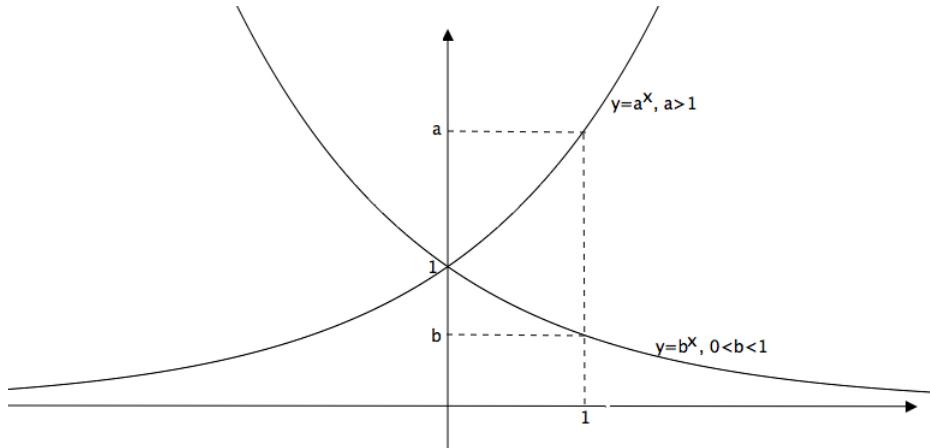
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \forall b, c > 0, \quad \forall a \in ]0, \infty[ \setminus \{1\},$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \forall a \in ]0, \infty[ \setminus \{1\},$$

$$\log_a b^c = c \log_a b \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall b > 0, \quad \forall a \in ]0, \infty[ \setminus \{1\},$$

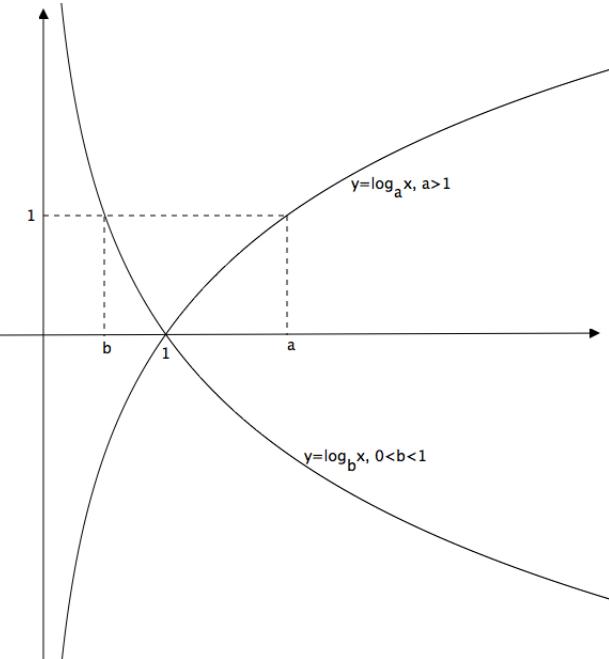
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \forall a, b \in ]0, \infty[ \setminus \{1\}.$$

I grafici approssimativi delle funzioni  $a^x$ ,  $\log_a x$  sono riportati di seguito.



L'andamento qualitativo del grafico di  $a^x$  è giustificato dalle seguenti considerazioni: se  $a > 1$ , l'incremento della quantità  $a^x$  nel passaggio da 0 a  $\varepsilon$  è pari a  $a^\varepsilon - 1$ , mentre nel passaggio da  $t$  a  $t + \varepsilon$  è pari a  $a^{t+\varepsilon} - a^t$ , ossia a  $a^t(a^\varepsilon - 1)$ . Dunque è lo stesso di prima, dilatato o contratto di un fattore  $a^t$  (che è maggiore di 1 se  $t > 0$ , minore di 1 se  $t < 0$ ). Se  $0 < a < 1$ , vale lo stesso discorso, ma rovesciato: si hanno incrementi dilatati se  $t < 0$ , contratti se  $t > 0$ .

Il grafico qualitativo di  $\log_a x$  si ottiene da quello di  $a^x$  per riflessione rispetto alla retta  $y = x$ , come sempre accade per le funzioni inverse (osservazione 1.3.1).



## Esercizi 1.10

1. Dimostrare le regole di calcolo con esponenti naturali, ossia le proprietà (i)-(vi) enunciate nel 1º passo.

2. Si provi che

$$a \geq 1 \iff a^{1/n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

$$0 < a \leq 1 \iff a^{1/n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

3. Dimostrare le regole di calcolo con esponenti razionali, ossia le proprietà (i)-(vii) enunciate nel 3º passo.

4. Per  $a > 0$  poniamo

$$A = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}, \quad B = \{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\}.$$

Si provi che  $A$  e  $B$  sono limitati inferiormente, e che:

- (i) se  $a \geq 1$ ,  $A$  è limitato superiormente, mentre, se  $a \leq 1$ ,  $B$  è limitato superiormente;
- (ii) supposto  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , se  $a \geq 1$  si ha  $a^{p/q} = \sup A = \inf B$ , mentre se  $a \leq 1$  si ha  $a^{p/q} = \inf A = \sup B$ .

5. Sia  $A$  un insieme non vuoto contenuto nella semiretta  $]0, \infty[$ . Si provi che

$$\sup \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \inf A = 0 \\ \frac{1}{\inf A} & \text{se } \inf A > 0, \end{cases}$$

$$\inf \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \sup A = +\infty \\ \frac{1}{\sup A} & \text{se } \sup A < +\infty. \end{cases}$$

6. Siano  $a, b > 0$  e  $x > 0$ . Si provi che se  $a < b$  allora  $a^x < b^x$ .
7. Siano  $a, x > 0$ . Si provi che se  $a < 1$  allora  $a^x < 1$ , mentre se  $a > 1$  allora  $a^x > 1$ .
8. Siano  $a > 0$  e  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$ . Si provi che se  $a < 1$  allora  $a^x > a^y$ , mentre se  $a > 1$  allora  $a^x < a^y$ .
9. Dimostrare che l'equazione  $37^x = (0.58)^{x^3}$  non ha soluzioni reali diverse da 0.

10. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \sqrt{8^x} = \frac{1}{4}; & \text{(ii)} \quad & 9^{1/(x-1)} = 3^{1/(3x-1)}; \\
\text{(iii)} \quad & 7^{x^2-5x+9} = 343; & \text{(iv)} \quad & \frac{(5^{2-x})^{3+x}}{25^{x-1}} = \frac{(5^{x-2})^{2x-3}}{25^{2x} \cdot 125^3}; \\
\text{(v)} \quad & \begin{cases} x+y=4 \\ 3^{xy}=27 \end{cases}; & \text{(vi)} \quad & \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ 5^{x+y}=125 \end{cases}; \\
\text{(vii)} \quad & 8^{\frac{5x^2-3}{x^2+1}} = 2^{\frac{15-3x^2}{3x^2+1}}; & \text{(viii)} \quad & 81^{2x-1} + 2 \cdot 9^{4x} + 711 = 81^{2x+1} + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

11. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & 7^{x+1} + 7^{x-1} = 5^x; & \text{(ii)} \quad & \sqrt{4^x} - 15\sqrt[4]{4^x} = 16; \\
\text{(iii)} \quad & 3^{x+1} \geq 5^{1-x}; & \text{(iv)} \quad & \frac{1}{2} < |2^x - 1| < 2; \\
\text{(v)} \quad & \log_3 x - \log_{1/3} x > 2; & \text{(vi)} \quad & \log_{1/2}(2x+3) \leq 3; \\
\text{(vii)} \quad & |\log_{10} |x|| = 100; & \text{(viii)} \quad & (3 - 2^x)(5^{x/2} - 2) > 0; \\
\text{(ix)} \quad & \log_3 (\log_4 (x^2 - 5)) < 0; & \text{(x)} \quad & \log_2 |x| \leq 3 - \log_4 |x|; \\
\text{(xi)} \quad & \log_4 x^2 - \log_8 \sqrt{x} = \frac{5}{3}; & \text{(xii)} \quad & \log_{2x} x < \frac{1}{2}; \\
\text{(xiii)} \quad & \begin{cases} y^x = 10^4 \\ y^{1/x} = 10; \end{cases} & \text{(xiv)} \quad & \begin{cases} xy = 1/2 \\ x^{\log_2 y} = \frac{1}{4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

12. Dimostrare che

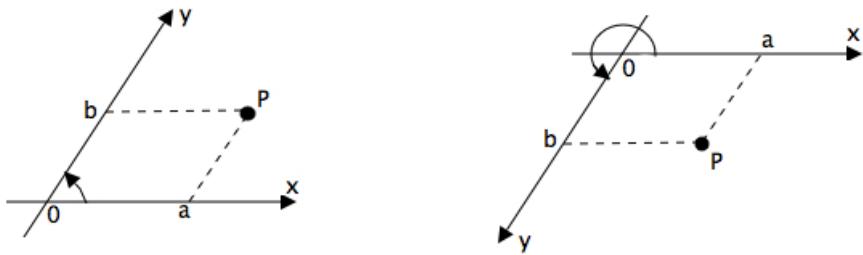
$$|a^x - 1| \leq a^{|x|} - 1 \quad \forall a \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 1.11 Geometria nel piano

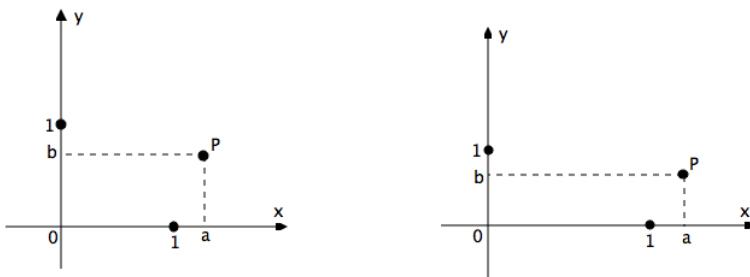
In geometria il *piano*, come la retta, è un concetto primitivo. L'assioma che permette di identificare una retta orientata con l'insieme dei numeri reali ci consente anche di rappresentare univocamente i punti del piano con *coppie* di numeri reali. Per fare ciò, si deve fissare il *sistema di riferimento*, che è costituito da tre oggetti: **(a)** un punto *origine*  $O$ , **(b)** due *direzioni*, ossia due rette orientate (non coincidenti e non opposte) passanti per  $O$ , e infine **(c)** un'*orientazione*: si deve decidere quale sia la prima direzione

e quale la seconda; la prima retta si chiama *asse delle ascisse*, o *asse x* e la seconda *asse delle ordinate*, o *asse y*. Si dice che il sistema è *orientato positivamente* se, partendo dal lato positivo dell’asse *x* e girando in verso antiorario, si incontra il lato positivo dell’asse *y* prima di quello negativo. Il sistema è *orientato negativamente* nel caso opposto. Noi considereremo soltanto sistemi di riferimento orientati positivamente.

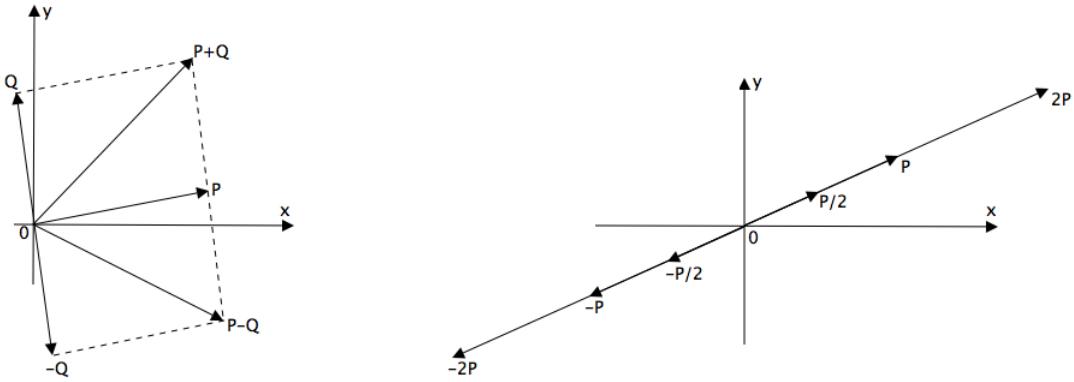
A questo punto si proietta  $P$  su ciascuna retta parallelamente all’altra: alle sue due proiezioni  $A$  sull’asse *x* e  $B$  sull’asse *y* corrispondono univocamente (per quanto visto) due numeri reali  $a, b$ , che si chiamano *coordinate* di  $P$  (rispettivamente, *ascissa* e *ordinata*). La coppia  $(a, b)$  determina allora in modo unico il punto  $P$ : si noti che se  $a \neq b$  le coppie  $(a, b)$  e  $(b, a)$  individuano punti diversi. In definitiva, il piano si può identificare con il prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Nel seguito questa identificazione sarà sistematica.



È comodo, anche se per nulla necessario, utilizzare sistemi di riferimento *ortogonali*, nei quali cioè le due direzioni sono perpendicolari fra loro; è anche utile (ma talvolta controindicato) scegliere la stessa unità di misura per le ascisse e per le ordinate: si parla allora di “coordinate cartesiane ortogonali monometriche”.



I punti di  $\mathbb{R}^2$  si possono *sommare* fra loro e *moltiplicare per una costante reale*, utilizzandone la rappresentazione in coordinate: se  $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$  e  $\mathbf{Q} = (x_Q, y_Q)$  sono punti di  $\mathbb{R}^2$ , la loro somma  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$  è il punto di coordinate  $(x_P + x_Q, y_P + y_Q)$ ; se  $\mathbf{P} = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda$  è un numero reale, il prodotto  $\lambda\mathbf{P}$  è il punto di coordinate  $(\lambda x_P, \lambda y_P)$ . Scriveremo in particolare  $-\mathbf{P}$  in luogo di  $(-1)\mathbf{P}$ , e questo permette di definire la *sottrazione*:  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  significa  $\mathbf{P} + (-1)\mathbf{Q}$  e dunque ha coordinate  $(x_P - x_Q, y_P - y_Q)$ . Così come il prodotto per scalari, la somma e la sottrazione si possono rappresentare graficamente, facendo uso della cosiddetta “regola del parallelogrammo”.



Per queste operazioni valgono le usuali proprietà della somma e del prodotto ordinari (associatività, commutatività, distributività, eccetera). La possibilità di effettuare queste operazioni sui punti del piano definisce in  $\mathbb{R}^2$  una struttura di *spazio vettoriale*, e per questo i punti di  $\mathbb{R}^2$  sono anche detti *vettori*.

## Distanza in $\mathbb{R}^2$

Il passo successivo è quello di rappresentare, e quindi definire mediante i numeri reali, le principali proprietà ed entità geometriche. Cominciamo con la fondamentale nozione di *distanza euclidea* nel piano.

**Definizione 1.11.1** Siano  $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$ ,  $\mathbf{Q} = (x_Q, y_Q)$  due punti di  $\mathbb{R}^2$ . La distanza euclidea fra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  è il numero non negativo

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Elenchiamo le proprietà di cui gode la distanza euclidea:

- (i) (*positività*)  $\overline{PQ} \geq 0$  e  $\overline{PQ} = 0$  se e solo se  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ ;
- (ii) (*simmetria*)  $\overline{PQ} = \overline{QP}$  per ogni  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2$ ;
- (iii) (*diseguaglianza triangolare*)  $\overline{PQ} \leq \overline{PR} + \overline{RQ}$  per ogni  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2$ .

Le proprietà (i) e (ii) sono ovvie per definizione; proviamo la (iii). Poniamo, al solito,

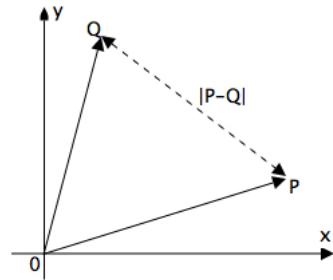
$$\mathbf{P} = (x_P, y_P), \quad \mathbf{Q} = (x_Q, y_Q), \quad \mathbf{R} = (x_R, y_R)$$

ed anche, per comodità,

$$\begin{aligned} u &= x_P - x_R, & v &= y_P - y_R, \\ w &= x_R - x_Q, & z &= y_R - y_Q. \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\sqrt{(u+w)^2 + (v+z)^2} \leq \sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{w^2 + z^2}.$$



In effetti si ha, utilizzando la disegualanza di Cauchy-Schwarz (teorema 1.9.3),

$$\begin{aligned}(u+w)^2 + (v+z)^2 &= u^2 + w^2 + v^2 + z^2 + 2(uw + vz) \leq \\ &\leq u^2 + v^2 + w^2 + z^2 + 2\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{w^2 + z^2} = \\ &= (\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{w^2 + z^2})^2.\end{aligned}$$

La distanza euclidea ha un'altra fondamentale proprietà: l'*invarianza per traslazioni*. Una *traslazione* è una trasformazione del piano (cioè una funzione da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ ) che manda ogni punto  $\mathbf{P}$  nel punto  $\mathbf{P} + \mathbf{U}$ , ove  $\mathbf{U}$  è un fissato punto di  $\mathbb{R}^2$ . Dalla definizione di distanza è evidente il fatto che

$$\overline{(P+U)(Q+U)} = \overline{PQ} \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2,$$

il che esprime appunto l'invarianza per traslazioni della distanza euclidea.

Invece la trasformazione del piano che manda ogni punto  $\mathbf{P}$  di  $\mathbb{R}^2$  nel punto  $\lambda\mathbf{P}$ , ove  $\lambda$  è un fissato numero reale, si dice *omotetia*; il comportamento della distanza rispetto alle omotetie è il seguente:

$$\overline{(\lambda P)(\lambda Q)} = |\lambda| \overline{PQ} \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La distanza fra due punti è anche, come suggerisce l'intuizione, invariante rispetto a rotazioni e simmetrie del piano (esercizi 1.11.22 e 1.11.23).

**Osservazione 1.11.2** La distanza euclidea  $\overline{PQ}$  fra due punti  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  coincide, come abbiamo visto, con la distanza di  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  dall'origine  $\mathbf{O}$ , cioè con  $\overline{O(P-Q)}$ ; in particolare, essa fornisce la *lunghezza* del segmento  $\mathbf{PQ}$ . Per questa ragione, in luogo della notazione  $\overline{PQ}$  si usa spessissimo la seguente:

$$|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| = \overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2;$$

se  $\mathbf{Q} = \mathbf{O}$ , si scriverà più semplicemente  $|\mathbf{P}|$  in luogo di  $|\mathbf{P} - \mathbf{O}|$  (si dice che  $|P|$  è il *modulo* del vettore  $\mathbf{P}$ ). Con questa notazione si può scrivere, in modo più naturale,

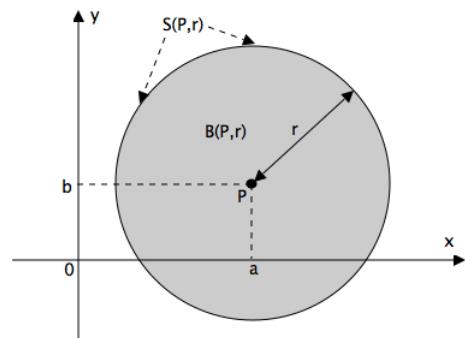
$$|(\mathbf{P} + \mathbf{U}) - (\mathbf{Q} + \mathbf{U})| = |\mathbf{P} - \mathbf{Q}| \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\lambda\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{P} - \mathbf{Q}| \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alla distanza euclidea si associano in modo naturale alcuni speciali sottoinsiemi del piano: i dischi e le circonferenze. Siano  $\mathbf{P} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$ . Il *disco*, o *cerchio*, di centro  $\mathbf{P}$  e raggio  $r$  è l'insieme

$$\begin{aligned}B(\mathbf{P}, r) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{X} - \mathbf{P}| < r\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\};\end{aligned}$$

il *disco chiuso* di centro  $\mathbf{P}$  e raggio  $r$  è



$$\overline{B(\mathbf{P}, r)} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{X} - \mathbf{P}| \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\};$$

la *circonferenza* di centro  $\mathbf{P}$  e raggio  $r$  è

$$S(\mathbf{P}, r) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{X} - \mathbf{P}| = r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

## Rette

Tutti i sottoinsiemi del piano, in linea di principio, possono essere descritti in termini delle coordinate dei propri punti, tramite equazioni e disequazioni. Vediamo come si rappresentano le *rette* in  $\mathbb{R}^2$ .

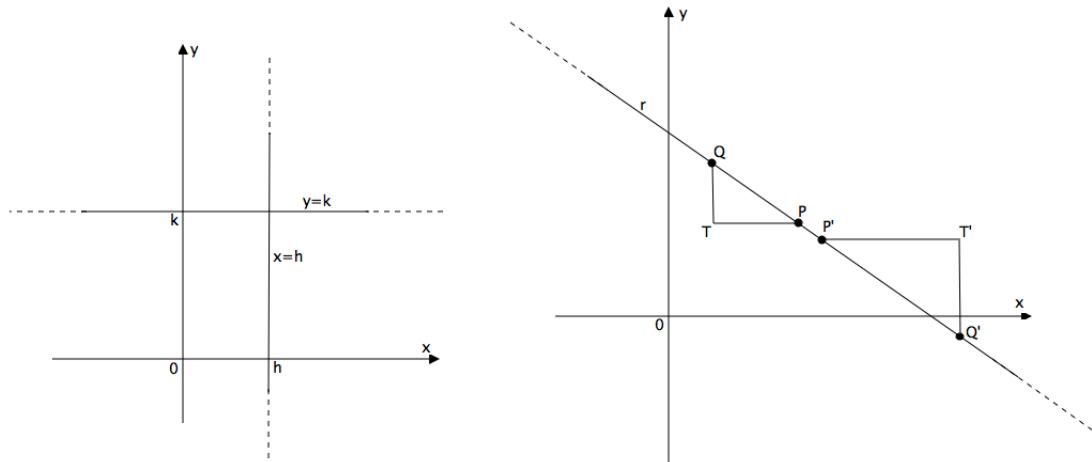
Se una retta è orizzontale (parallela all'asse  $x$ ), i suoi punti avranno ordinata  $y$  costante e quindi la retta sarà descritta dall'equazione

$$y = k,$$

ove  $k$  è un fissato numero reale. Analogamente, una retta verticale (parallela all'asse  $y$ ) è costituita da punti di ascissa costante e quindi la sua equazione sarà

$$x = h$$

con  $h$  fissato numero reale.



Consideriamo ora una retta  $r$  obliqua, ossia non parallela agli assi coordinati. Fissiamo due punti distinti  $P$  e  $Q$  in  $r$ . Siano poi  $r'$  la retta per  $P$  parallela all'asse  $x$  e  $r''$  la retta per  $Q$  parallela all'asse  $y$ : tali rette sono perpendicolari fra loro e quindi si incontrano in un punto  $T$ . Il triangolo  $PTQ$  è rettangolo, di cateti  $PT$  e  $QT$ . Se prendiamo due altri punti distinti  $P'$  e  $Q'$  su  $r$ , e ripetiamo la stessa costruzione, otteniamo un altro triangolo rettangolo  $P'T'Q'$ , di cateti  $P'T'$  e  $Q'T'$ , il quale è simile al precedente. Quindi fra le lunghezze dei rispettivi cateti vale la proporzione

$$\overline{QT} : \overline{PT} = \overline{Q'T'} : \overline{P'T'}.$$

Dato che, per costruzione,  $T = (x_Q, y_P)$  e  $T' = (x_{Q'}, y_{P'})$ , la proporzione sopra scritta diventa, dopo un cambiamento di segno,

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{y_{P'} - y_{Q'}}{x_{P'} - x_{Q'}}.$$

Questa relazione è valida per ogni coppia  $P', Q'$  di punti (distinti) di  $r$ . Ad esempio, scegliendo  $P' = P$ , pensando  $P$  fisso e facendo variare  $Q$ , si ottiene che

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{y_P - y_{Q'}}{x_P - x_{Q'}} \quad \forall Q, Q' \in r,$$

ossia il rapporto  $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$  è indipendente da  $\mathbf{Q}$  quando  $\mathbf{Q}$  varia in  $r$ . La quantità  $m$  sopra definita si chiama *pendenza* o *coefficiente angolare* della retta  $r$ . Se la retta è orizzontale si ha  $m = 0$ ; se la semiretta (di tale retta) corrispondente alle  $y$  positive forma con la direzione positiva dell'asse  $x$  un angolo acuto, si ha  $m > 0$ , mentre se tale angolo è ottuso si ha  $m < 0$ . Per le rette verticali il coefficiente angolare non è definito, ma si suole dire che esse hanno “pendenza infinita”.

Come abbiamo visto, se  $\mathbf{X} = (x, y)$  è un punto di  $\mathbb{R}^2$  si ha  $\mathbf{X} \in r$  se e solo se

$$\frac{y_P - y}{x_P - x} = m;$$

dunque l'equazione cartesiana della retta (obliqua)  $r$  è la seguente:

$$y - y_P = m(x - x_P),$$

o anche, posto  $q = y_P + mx_P$ ,

$$y = mx + q.$$

Il numero reale  $q$  è l'ordinata del punto di incontro di  $r$  con l'asse  $y$ .

Riepilogando ed unificando tutti i casi sopra visti, otteniamo che la più generale equazione cartesiana di una retta è

$$ax + by + c = 0$$

con  $a, b, c$  numeri reali tali che  $a$  e  $b$  non siano entrambi nulli. Se  $b = 0$  la retta è verticale (di equazione  $x = -\frac{c}{a}$ ), se  $a = 0$  la retta è orizzontale (di equazione  $y = -\frac{c}{b}$ ), e se  $a$  e  $b$  sono entrambi non nulli la retta è obliqua (di equazione  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ). Notiamo anche che una retta di equazione  $ax + by + c = 0$  passa per l'origine se e solo se il suo “termine noto”  $c$  è nullo.

Si noti che l'equazione cartesiana di una retta è unica a meno di un fattore di proporzionalità non nullo: se  $\lambda \neq 0$ , le equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad \lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$$

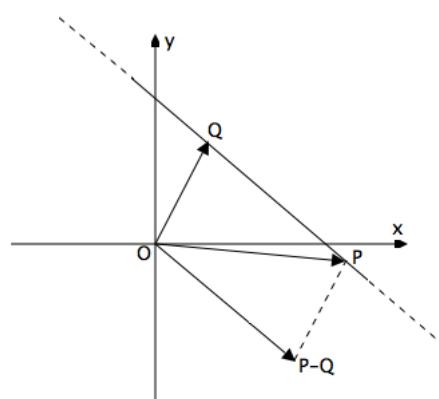
individuano la stessa retta.

Infine, la retta passante per due punti distinti assegnati  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  ha equazione

$$(x_Q - x_P)(y - y_P) = (y_Q - y_P)(x - x_P)$$

e, se si sa che  $x_Q \neq x_P$ , si può scrivere equivalentemente

$$y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P).$$



## Semirette, segmenti, semipiani

Se invece di una retta occorre descrivere una semiretta, basterà delimitare l'insieme di variabilità della  $x$  o della  $y$ : per esempio, la semiretta bisettrice del primo quadrante

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$  è descritta dall'equazione

$$y = x, \quad x \geq 0, \quad \text{oppure} \quad y = x, \quad x > 0,$$

a seconda che si consideri la semiretta *chiusa*, ossia comprendente il suo estremo, oppure *aperta*, cioè senza l'estremo.

Analogamente, il segmento (chiuso) di estremi **P** e **Q** sulla retta  $r$  di equazione  $ax + by + c = 0$  è descritto, supponendo  $x_P < x_Q$ , dalle condizioni

$$ax + by + c = 0, \quad x_P \leq x \leq x_Q.$$

Se risultasse invece  $x_P > x_Q$ , si scriverà  $x_Q \leq x \leq x_P$ ; se infine  $x_P = x_Q$ , sarà necessariamente  $y_P < y_Q$  oppure  $y_P > y_Q$  e scriveremo allora le limitazioni  $y_P \leq y \leq y_Q$  oppure  $y_Q \leq y \leq y_P$ .

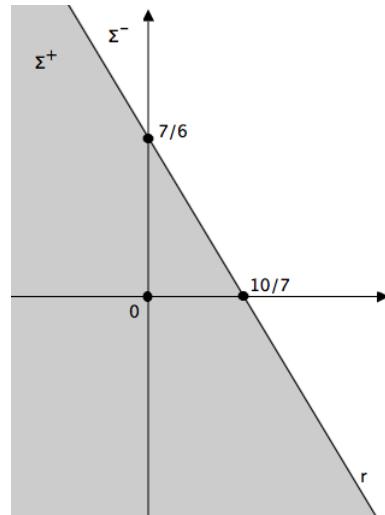
Se il segmento lo si vuole aperto, o semichiuso a destra, o semichiuso a sinistra, occorrerà rendere strette una o l'altra o entrambe le disuguaglianze.

Una retta  $r$  divide il piano in due semipiani. Se essa ha equazione  $ax + by + c = 0$  e se  $\mathbf{P} \notin r$ , si ha ovviamente  $ax_p + by_p + c \neq 0$ . I due insiemi

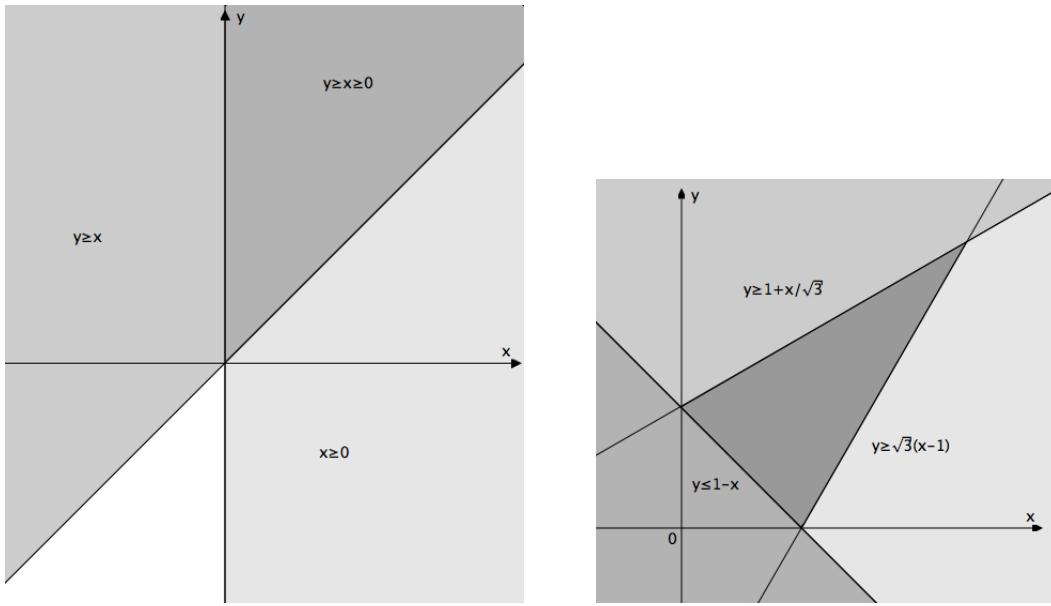
$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c \geq 0\}, \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c \leq 0\}$$

sono i due semipiani chiusi delimitati da  $r$ ; se i semipiani li si vuole aperti, basta mettere le disuguaglianze strette. Per disegnarli, basta tracciare la retta  $r$ , poi scegliere un punto **P** fuori di  $r$  e vedere il segno dell'espressione  $ax_p + by_p + c$ : se è positivo, il semipiano contenente **P** sarà  $\Sigma^+$ , se è negativo sarà  $\Sigma^-$ .

Ad esempio, il semipiano  $\Sigma^+$  relativo alla retta  $-10x - 6y + 7 = 0$  è quello che sta “al di sotto”: infatti la retta incontra l'asse  $y$  nel punto  $(0, \frac{7}{6})$  e quindi l'origine, che appartiene a  $\Sigma^+$ , sta sotto la retta.



L'intersezione di due rette non parallele è un punto, le cui coordinate si ottengono mettendo a sistema le equazioni delle due rette: il fatto che le pendenze delle rette siano diverse garantisce la risolubilità del sistema. Se invece le rette sono parallele, il sistema avrà infinite soluzioni o nessuna soluzione a seconda che le rette siano coincidenti o no.



L'intersezione di due semipiani è un *angolo convesso*, cioè minore dell'angolo piatto; un *angolo concavo* (maggiore dell'angolo piatto) si ottiene invece facendo l'unione di due semipiani. Un triangolo si ottiene intersecando tre (opportuni) semipiani; ogni poligono convesso di  $n$  lati si ottiene come intersezione di  $n$  semipiani. I poligoni non convessi si realizzano tramite opportune unioni e intersezioni di semipiani.

## Rette e segmenti in forma parametrica

Consideriamo il segmento  $S$  di estremi (distinti)  $\mathbf{A} = (x_A, y_A)$  e  $\mathbf{B} = (x_B, y_B)$  e supponiamo, per fissare le idee, che sia  $x_A < x_B$  e  $y_B \neq y_A$ . Come sappiamo, si ha

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), x \in [x_A, x_B] \right\}.$$

Se  $\mathbf{P} = (x, y) \in S$ , si ha, per ragioni di similitudine,

$$\frac{|\mathbf{P} - \mathbf{A}|}{|\mathbf{B} - \mathbf{A}|} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \in [0, 1].$$

Poniamo

$$t = \frac{|\mathbf{P} - \mathbf{A}|}{|\mathbf{B} - \mathbf{A}|} :$$

poiché  $\mathbf{P} \in S$ , si ha  $t \in [0, 1]$ . Le coordinate  $x, y$  di  $\mathbf{P}$  verificano allora

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A). \end{cases}$$

Quindi ogni  $\mathbf{P} \in S$  si rappresenta nella forma sopra descritta, con un opportuno  $t \in [0, 1]$ . Viceversa, sia  $\mathbf{P} = (x, y)$  dato dal sistema sopra scritto, per un certo  $t \in [0, 1]$ : allora si ha  $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t$ , cosicché  $\mathbf{P}$  appartiene alla retta passante per  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ; d'altra parte, essendo  $x - x_A = t(x_B - x_A)$ , si ha  $0 \leq x - x_A \leq x_B - x_A$ , ossia

$x \in [x_A, x_B]$ . Pertanto  $\mathbf{P}$  appartiene al segmento  $S$ .

Il sistema

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

fornisce le *equazioni parametriche* del segmento  $S$ . Alle stesse equazioni si perviene, come è facile verificare, quando  $x_A > x_B$  (basta scambiare i ruoli di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  ed effettuare la sostituzione  $s = (1 - t)$ ), ed anche quando  $y_A = y_B$  (segmento orizzontale) oppure  $x_A = x_B$  e  $y_A \neq y_B$  (segmento verticale). In forma vettoriale si può scrivere, in modo equivalente,

$$S = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}), t \in [0, 1]\}.$$

In modo analogo, il sistema

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ovvero, in forma vettoriale,

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}), \quad t \in \mathbb{R},$$

dà le equazioni parametriche della retta per  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Il vettore  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$  può essere interpretato come la velocità di avanzamento lungo la retta, mentre il parametro  $t$  rappresenta il tempo di percorrenza: all'istante  $t = 0$  ci troviamo in  $\mathbf{A}$ , all'istante  $t = 1$  transitiamo in  $\mathbf{B}$ , per valori  $t > 1$  ci spingiamo oltre  $\mathbf{B}$  mentre per  $t < 0$  siamo dall'altra parte, oltre  $\mathbf{A}$ .

## Parallelismo e perpendicolarità

Due rette  $r, r'$  sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, cosicché le rispettive equazioni cartesiane, a parte un'eventuale costante moltiplicativa, differiscono solamente per il termine noto. Se le rette hanno equazioni  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y + c' = 0$ , esse sono parallele se e solo se il sistema costituito dalle due equazioni non ha soluzioni (in tal caso le rette sono parallele e distinte) oppure ne ha infinite (e allora le due rette coincidono). Ciò equivale alla condizione

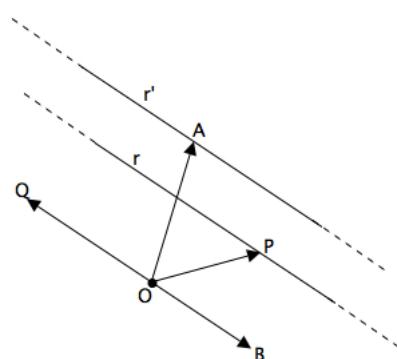
$$ab' - ba' = 0$$

(esercizio 1.11.1), la quale esprime appunto il fatto che il sistema costituito dalle equazioni delle due rette non è univocamente risolvibile.

Se le due rette sono scritte in forma parametrica:

$$\begin{aligned} r &= \{\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{Q}, t \in \mathbb{R}\}, \\ r' &= \{\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{B}, t \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

esse risultano parallele se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{B}$  (esercizio 1.11.13).



Due segmenti  $\mathbf{PQ}$ ,  $\mathbf{AB}$ , dunque di equazioni parametriche

$$\mathbf{PQ} = \{\mathbf{X} = \mathbf{P} + t(\mathbf{Q} - \mathbf{P}), t \in [0, 1]\}, \quad \mathbf{AB} = \{\mathbf{X} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}), t \in [0, 1]\},$$

sono paralleli se le rette che li contengono sono parallele: quindi se e solo se  $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$  è proporzionale a  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ .

Una retta  $r$  è parallela ad un segmento  $\mathbf{PQ}$  se è parallela alla retta che lo contiene. Scriviamo ora l'equazione cartesiana di una retta  $r'$  perpendicolare ad una retta  $r$  assegnata. È chiaro che se  $r$  è orizzontale allora  $r'$  è verticale, e se  $r$  è verticale allora  $r'$  è orizzontale. Supponiamo  $r$  obliqua: se  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  sono punti distinti di  $r$ , sappiamo che la pendenza di  $r$  è  $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ ; se ora  $\mathbf{P}'$  e  $\mathbf{Q}'$  sono punti distinti di  $r'$ , costruiamo i punti  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  di intersezione delle rette parallele agli assi passanti rispettivamente per  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  e per  $\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{Q}'$ , come si è fatto in precedenza. I triangoli rettangoli  $\mathbf{PTQ}$  e  $\mathbf{P}'\mathbf{T}'\mathbf{Q}'$  sono ancora simili, ma le coppie di cateti sono scambiate e si ha

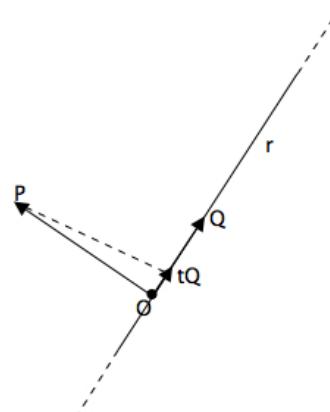
$$|\mathbf{Q} - \mathbf{T}| : |\mathbf{P} - \mathbf{T}| = |\mathbf{P}' - \mathbf{T}'| : |\mathbf{Q}' - \mathbf{T}'|,$$

da cui

$$\frac{y_{Q'} - y_{P'}}{x_{Q'} - x_{P'}} = -\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P} = -\frac{1}{m},$$

e in definitiva la pendenza di  $r'$  è  $m' = -\frac{1}{m}$ . Di conseguenza, se  $r$  ha equazione del tipo  $ax + by + c = 0$ , le rette perpendicolari a  $r$  hanno equazioni della forma  $-bx + ay + k = 0$ , con  $k \in \mathbb{R}$  arbitrario.

Vediamo ora come si esprime la perpendicolarità fra segmenti. Consideriamo due segmenti  $OP$ ,  $OQ$  con un vertice nell'origine  $O$ , ove  $P = (x_P, y_P)$  e  $Q = (x_Q, y_Q)$  sono punti distinti e diversi da  $O$ . Il fatto che  $OP$  sia perpendicolare ad  $OQ$  si può descrivere in termini di distanza: significa che  $O$ , fra tutti i punti della retta  $r$  contenente  $OQ$ , è quello situato a minima distanza da  $P$ . Traduciamo a questo in termini di coordinate: poiché i punti  $\{tQ, t \in \mathbb{R}\}$  descrivono la retta  $r$ , deve avversi



$$|P| \leq |P - tQ| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Elevando al quadrato i due membri si ricava, per definizione di distanza,

$$\begin{aligned} x_P^2 + y_P^2 &\leq (x_P - tx_Q)^2 + (y_P - ty_Q)^2 = \\ &= x_P^2 + y_P^2 - 2t(x_P x_Q + y_P y_Q) + t^2(x_Q^2 + y_Q^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ovvero

$$t^2(x_Q^2 + y_Q^2) - 2t(x_P x_Q + y_P y_Q) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ciò è possibile se e solo se il discriminante di questo polinomio di secondo grado è non positivo: dunque deve essere

$$(x_P x_Q + y_P y_Q)^2 \leq 0,$$

ossia

$$x_P x_Q + y_P y_Q = 0.$$

Questa condizione è pertanto equivalente alla perpendicolarità dei segmenti **OP** e **OQ**. Essa dipende solo dalle coordinate di **P** e di **Q**: dunque esprime una proprietà che riguarda intrinsecamente i punti **P** e **Q**, e che è naturale prendere come definizione di ortogonalità fra vettori di  $\mathbb{R}^2$  (e non più fra segmenti di  $\mathbb{R}^2$ ).

**Definizione 1.11.3** *Diciamo che due vettori  $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$  e  $\mathbf{Q} = (x_Q, y_Q)$  di  $\mathbb{R}^2$  sono fra loro ortogonali, se i segmenti **OP** e **OQ** sono perpendicolari, ossia se risulta*

$$x_P x_Q + y_P y_Q = 0.$$

Due segmenti qualunque **PQ** e **AB** sono perpendicolari se e solo se i vettori **Q** – **P** e **B** – **A** sono ortogonali, ossia se e solo se

$$(x_Q - x_P)(x_B - x_A) + (y_Q - y_P)(y_B - y_A) = 0.$$

Consideriamo ancora due rette  $r, r'$ , scritte stavolta in forma parametrica:

$$r = \{\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{Q}, t \in \mathbb{R}\}, \quad r' = \{\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{B}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Allora la direzione di  $r$  è quella del vettore **Q** e la direzione di  $r'$  è quella del vettore **B**: perciò esse sono perpendicolari se e solo se **Q** e **B** sono vettori ortogonali, vale a dire se e solo se  $x_Q x_B + y_Q y_B = 0$ .

Supponiamo invece, nuovamente, che  $r, r'$  siano scritte in forma cartesiana:

$$r = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}, \quad r' = \{(x, y) : a'x + b'y + c' = 0\},$$

e consideriamo le rette  $\rho, \rho'$  parallele a  $r$  ed a  $r'$  e passanti per l'origine:

$$\rho = \{(x, y) : ax + by = 0\}, \quad \rho' = \{(x, y) : a'x + b'y = 0\}.$$

Dalla definizione 1.11.3 segue subito che  $\rho$  è l'insieme dei vettori che sono ortogonali al vettore dei suoi coefficienti  $(a, b)$ , mentre  $\rho'$  è, analogamente, l'insieme dei vettori che sono ortogonali a  $(a', b')$ ; se ne deduce che  $\rho$  e  $\rho'$  (e quindi anche  $r$  e  $r'$ ) sono fra loro perpendicolari se e solo se i vettori  $(a, b)$  e  $(a', b')$  sono fra loro ortogonali, cioè se e solo se

$$aa' + bb' = 0.$$

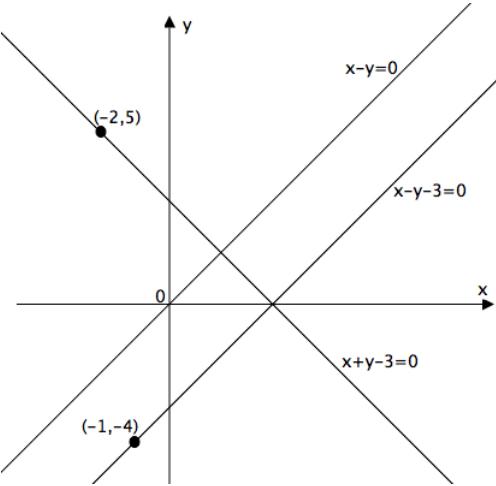
Ritroviamo così il fatto che le equazioni di  $r$  e  $r'$  sono, a meno di un fattore di proporzionalità, della forma

$$r = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}, \quad r' = \{(x, y) : bx - ay + c' = 0\}.$$

Si noti che comunque si fissi  $\mathbf{U} = (u, v) \in r$ , la retta  $r$  descrive l'insieme dei vettori  $\mathbf{X} = (x, y)$  tali che  $\mathbf{X} - \mathbf{U}$  è ortogonale al vettore dei coefficienti  $\mathbf{A} = (a, b)$ : infatti, essendo  $U \in r$  si ha  $c = -(au + bv)$ , da cui

$$(x - u)a + (y - v)b = ax + by + c = 0.$$

**Esempio 1.11.4** La retta  $r$  di equazione  $x - y = 0$  è la bisettrice degli assi coordinati. La perpendicolare a  $r$  passante per  $(-2, 5)$  è la retta  $r'$  di equazione  $-(x + 2) - (y - 5) = 0$ , ovvero, più semplicemente,  $x + y - 3 = 0$ . La parallela a  $r$  passante per  $(-1, -4)$  è la retta  $r''$  di equazione  $(x + 1) - (y + 4) = 0$ , ossia  $x - y + 5 = 0$ .



## Prodotto scalare

In  $\mathbb{R}^2$ , oltre alla somma ed al prodotto per scalari, è definita un'altra operazione fra vettori: il “prodotto scalare”, che a due vettori assegnati fa corrispondere una quantità scalare, vale a dire un numero reale, e che come vedremo ha un rilevante significato geometrico.

**Definizione 1.11.5** Siano  $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$ ,  $\mathbf{Q} = (x_Q, y_Q)$  punti di  $\mathbb{R}^2$ . La quantità

$$x_P x_Q + y_P y_Q$$

si chiama prodotto scalare fra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  e si indica con  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle$ .

Le proprietà del prodotto scalare sono le seguenti: per ogni  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2$  si ha

- (i)  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle = |\mathbf{P}|^2$ ;
- (ii)  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle$ ;
- (iii)  $\langle \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{P}, \mathbf{R} \rangle + \langle \mathbf{Q}, \mathbf{R} \rangle$ ;
- (iv)  $|\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle| \leq |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|$ .

Le prime tre proprietà sono immediata conseguenza della definizione; la quarta è una riformulazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Vale anche il seguente “sviluppo del binomio”:

$$|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2 = |\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2 - 2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2$$

(esercizio 1.11.8).

Dalla definizione di prodotto scalare e dalla definizione 1.11.3 segue che due vettori  $\mathbf{P}$

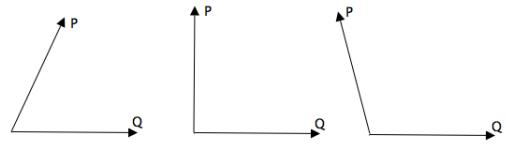
e  $\mathbf{Q}$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = 0$ .

Ma il significato geometrico del prodotto scalare non è tutto qui: data una retta  $r$  per l'origine, di equazione  $ax + by = 0$ , il vettore  $\mathbf{Q} = (a, b)$  appartiene al semipiano  $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \geq 0\}$ , come si verifica immediatamente. Poiché il segmento  $\mathbf{OQ}$  è perpendicolare alla retta, si deduce che  $\Sigma^+$  è l'insieme dei vettori  $\mathbf{P}$  tali che i segmenti  $\mathbf{OP}$  e  $\mathbf{OQ}$  formano un angolo acuto, mentre  $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \leq 0\}$  è l'insieme dei vettori  $\mathbf{P}$  tali che l'angolo fra i segmenti  $\mathbf{OP}$  e  $\mathbf{OQ}$  è ottuso. D'altra parte, si ha, per definizione di prodotto scalare,

$$\Sigma^+ = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle \geq 0\}, \quad \Sigma^- = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle \leq 0\};$$

se ne deducono le equivalenze

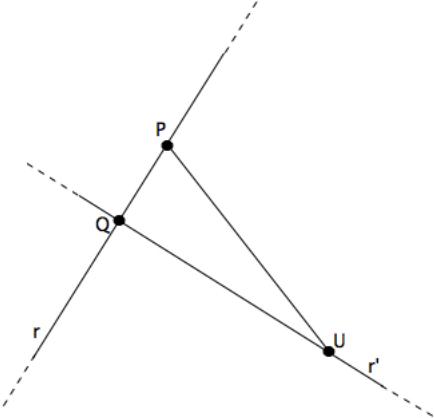
$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{QOP}} \text{ acuto} &\iff \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle > 0, \\ \widehat{\mathbf{QOP}} \text{ retto} &\iff \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = 0, \\ \widehat{\mathbf{QOP}} \text{ ottuso} &\iff \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle < 0.\end{aligned}$$



## Distanza di un punto da una retta

Sia  $r$  una retta di equazione  $ax + by + c = 0$ , e sia  $\mathbf{U} = (x_U, y_U)$  un punto di  $\mathbb{R}^2$ . Vogliamo calcolare la distanza del punto  $\mathbf{U}$  dalla retta  $r$ , ossia il minimo delle distanze  $|\mathbf{U} - \mathbf{P}|$  al variare di  $\mathbf{P} \in r$ ; denoteremo tale distanza con  $d(\mathbf{U}, r)$ . Supponiamo naturalmente  $\mathbf{U} \notin r$ , altrimenti la distanza cercata è 0. Consideriamo la retta  $r'$  passante per  $\mathbf{U}$  e perpendicolare a  $r$ : essa intersecherà  $r$  in un punto  $\mathbf{Q}$ , le cui coordinate  $(x, y)$  si determinano, come sappiamo, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -b(x - x_U) + a(y - y_U) = 0, \end{cases}$$



È facile, anche se un po' laborioso, dedurre che

$$x_Q = \frac{-ac + b^2 x_U - aby_U}{a^2 + b^2}, \quad y_Q = \frac{-bc - abx_U + a^2 y_U}{a^2 + b^2}.$$

La minima distanza  $|\mathbf{U} - \mathbf{P}|$  si ottiene per  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ : dunque basterà determinare  $|\mathbf{U} - \mathbf{Q}|$ . Sviluppando con pazienza i calcoli, si trova

$$\begin{aligned} |\mathbf{U} - \mathbf{Q}|^2 &= (x_U - x_Q)^2 + (y_U - y_Q)^2 = \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \left[ (x_U(a^2 + b^2) + ac - b^2 x_U + aby_U)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (y_U(a^2 + b^2) + bc + abx_U - a^2 y_U)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [a^2(ax_U + by_U + c)^2 + b^2(ax_U + by_U + c)^2] = \\ &= \frac{(ax_U + by_U + c)^2}{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$d(\mathbf{U}, r) = |\mathbf{U} - \mathbf{Q}| = \frac{|ax_U + by_U + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Quindi, ad esempio, la distanza del punto  $(32, -48)$  dalla retta di equazione  $x - 2y - 99 = 0$  è semplicemente

$$\frac{|32 + 96 - 99|}{\sqrt{1+4}} = \frac{29}{\sqrt{5}}.$$

## Lineare indipendenza

Siano  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$ . Come sappiamo, la somma  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  è il vettore di componenti  $(x_A + y_A, x_B + y_B)$ , e la sua posizione nel piano si determina mediante la regola del parallelogrammo, il cui nome deriva dal fatto che nel parallelogrammo di lati  $\mathbf{OA}$  e  $\mathbf{OB}$  il quarto vertice è  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ . Consideriamo l'insieme

$$M = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \mathbf{P} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}\},$$

che è il luogo dei quarti vertici di tutti i parallelogrammi, con primo vertice in  $\mathbf{O}$ , costruiti su multipli dei vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Le espressioni  $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}$ , al variare di  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , si chiamano *combinazioni lineari* dei vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ : quindi  $M$  è l'insieme dei vettori  $\mathbf{P}$  che sono combinazioni lineari di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . È chiaro che  $\mathbf{O} \in M$ , dato che per ottenere  $\mathbf{O}$  basta scegliere  $\lambda = \mu = 0$ . A seconda di come si fissano  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , può capitare che questo sia l'unico modo di ottenere  $\mathbf{O}$ , o possono invece esistere altri valori (non nulli) di  $\lambda$  e  $\mu$  tali che  $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} = \mathbf{O}$ .

**Definizione 1.11.6** Due vettori  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  di  $\mathbb{R}^2$  si dicono *linearmente indipendenti* se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore  $\mathbf{O}$  è quella con entrambi i coefficienti nulli: in altre parole,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono linearmente indipendenti quando vale l'implicazione

$$\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} = \mathbf{O} \implies \lambda = \mu = 0.$$

I due vettori si dicono *linearmente dipendenti* se non sono linearmente indipendenti, ossia se esistono  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , non entrambi nulli, tali che  $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} = \mathbf{O}$ .

È chiaro che  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono allineati con l'origine; in questo caso l'insieme  $M$  coincide con la retta per  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Quando invece  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  non sono allineati con  $\mathbf{O}$  (e in particolare sono entrambi non nulli), si può agevolmente mostrare che  $M = \mathbb{R}^2$ . Sia infatti  $\mathbf{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e proviamo che esistono  $\lambda$  e  $\mu$  tali che  $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$ . Questa uguaglianza si può tradurre nel sistema

$$\begin{cases} \lambda x_A + \mu x_B = x \\ \lambda y_A + \mu y_B = y \end{cases}$$

le cui incognite sono  $\lambda$  e  $\mu$ . Risolvendo si trovano  $\lambda$  e  $\mu$ :

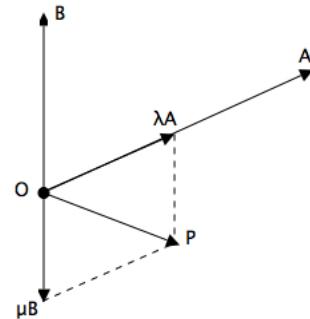
$$\lambda = \frac{yx_B - xy_B}{x_B y_A - y_B x_A},$$

$$\mu = \frac{xy_A - yx_A}{x_B y_A - y_B x_A},$$

il che dimostra che  $\mathbf{P} \in M$ , a patto però che risulti  $x_B y_A - y_B x_A \neq 0$ .

Ma se fosse  $x_B y_A - y_B x_A = 0$ , posto  $\mathbf{C} = (-y_B, x_B)$  avremmo  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle = 0$ , nonché  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle = 0$ . Di conseguenza, sia  $\mathbf{A}$  che  $\mathbf{B}$  apparterrebbero alla retta di equazione  $-y_B x + x_B y = 0$ , cioè sarebbero allineati con l'origine: ciò è assurdo.

In definitiva, data una *qualunque* coppia di vettori  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  linearmente indipendenti, le combinazioni lineari di tali vettori generano tutto il piano  $\mathbb{R}^2$ ; in tal caso ogni  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$  si può scrivere *in uno ed un sol modo* come combinazione lineare di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  (esercizio 1.11.24).



## Esercizi 1.11

1. Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

è risolubile univocamente se e solo se risulta  $ab' - ba' \neq 0$ ; in tal caso se ne scriva la soluzione  $(x, y)$ .

2. Determinare la retta passante per  $(2, -1)$  e perpendicolare alla retta di equazione  $4x - 3y + 12 = 0$ .
3. Determinare la retta passante per  $(0, 0)$  e per il centro della circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ .
4. Si calcoli la distanza del punto  $(-3, 2)$  dalla retta di equazione  $4x - 3y + 12 = 0$ .
5. Si suddivida il segmento di estremi  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  in quattro parti di egual lunghezza mediante i tre punti  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ . Si calcolino le coordinate di tali punti.
6. Dati  $\mathbf{P} = (-2, 5)$  e  $\mathbf{Q} = (4, 13)$ , trovare le coordinate di un punto  $\mathbf{R}$  sul segmento  $\mathbf{PQ}$  tale che  $|\mathbf{P} - \mathbf{R}| = 2 |\mathbf{Q} - \mathbf{R}|$ .

7. Sia  $\mathbf{R} = (2, 3)$  il punto medio del segmento  $\mathbf{PQ}$ , ove  $\mathbf{P} = (7, 5)$ . Determinare le coordinate di  $\mathbf{Q}$ .

8. Dimostrare che per ogni  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2$  si ha

$$|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2 = |\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2 - 2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle.$$

9. Provare che il triangolo di vertici  $(2, -1)$ ,  $(4, 2)$  e  $(5, 1)$  è isoscele.

10. Provare che il triangolo di vertici  $(-3, 3)$ ,  $(-1, 3)$  e  $(11, -1)$  è rettangolo.

11. Calcolare la lunghezza della mediana uscente dal punto  $\mathbf{A}$  relativa al triangolo  $\mathbf{ABC}$ , ove  $\mathbf{A} = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{B} = (0, -6)$ ,  $\mathbf{C} = (-10, -2)$ .

12. Scrivere l'equazione dell'*asse* del segmento di estremi  $(0, 2)$  e  $(2, 1)$  (l'asse di un segmento è il luogo dei punti che sono equidistanti dai vertici del segmento).

13. Si provi che le rette di equazioni parametriche  $\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{Q}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{X} = \mathbf{A} + s\mathbf{B}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  sono fra loro parallele se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$ , non nullo, tale che  $\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{B}$ .

14. Si provi che le rette di equazioni  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y + c' = 0$  sono fra loro parallele se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $a' = \lambda a$  e  $b' = \lambda b$ .

15. Si provi che le rette di equazioni  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y + c' = 0$  sono fra loro perpendicolari se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $\lambda a = -b'$ ,  $\lambda b = a'$ .

16. Si provi che le rette di equazioni  $\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{Q}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e  $ax + by + c = 0$  sono fra loro perpendicolari se e solo se i vettori  $\mathbf{Q}$  e  $(a, b)$  sono proporzionali, e sono parallele se e solo se i vettori  $\mathbf{Q}$  e  $(b, -a)$  sono proporzionali.

17. Si considerino i luoghi dei punti di  $\mathbb{R}^2$  descritti dalle seguenti equazioni:

(i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,	(v) $x^2 + y^2 + xy = 0$ ,
(ii) $x^2 + y^2 = 0$ ,	(vi) $x^2 - y^2 = 0$ ,
(iii) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ,	(vii) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ ,
(iv) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ ,	(viii) $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$ ,

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

- |                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| (a) nessun punto, | (d) una retta,         |
| (b) un punto,     | (e) due rette,         |
| (c) due punti,    | (f) una circonferenza. |

18. Si verifichi che ogni angolo convesso è l'intersezione di due semipiani.

19. Si provi che ogni triangolo in  $\mathbb{R}^2$  è l'intersezione di tre semipiani.

20. Si provi che ogni quadrilatero in  $\mathbb{R}^2$  è l'intersezione di quattro semipiani.

21. Verificare che gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

sono quadrati; determinarne i vertici e le lunghezze dei lati.

22. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a^2 + b^2 = 1$ . La funzione  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da

$$R(x, y) = (\xi, \eta), \quad \xi = ax + by, \quad \eta = -bx + ay,$$

definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

- (i) si ha  $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- (ii) posto  $\mathbf{U} = R(1, 0)$ ,  $\mathbf{V} = R(0, 1)$ , le rette per  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{U}$  e per  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{V}$  formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;
- (iii) posto  $(\xi', \eta') = R(x', y')$ , si ha  $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  per ogni  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ .

23. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a^2 + b^2 = 1$ . La funzione  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da

$$S(x, y) = (\xi, \eta), \quad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$$

definisce una *simmetria* del piano (rispetto a una retta). Si provi che:

- (i) si ha  $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- (ii) posto  $\mathbf{U} = S(1, 0)$ ,  $\mathbf{V} = S(0, 1)$ , le rette per  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{U}$  e per  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{V}$  formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;
- (iii) posto  $(\xi', \eta') = S(x', y')$ , si ha  $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  per ogni  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ;
- (iv) i punti  $(x, y)$  della bisettrice dell'angolo formato dall'asse  $x$  e dalla retta  $bx - ay = 0$  soddisfano la relazione  $S(x, y) = (x, y)$ .

24. Si provi che se  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  sono vettori linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^2$ , allora per ogni  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$  esiste un'unica coppia di numeri reali  $\lambda, \mu$  tali che  $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$ .

## 1.12 Numeri complessi

Una delle possibili motivazioni per ampliare il campo dei numeri reali con l'introduzione dei numeri complessi è il fatto che nell'ambito di  $\mathbb{R}$  non è possibile risolvere certe *equazioni algebriche* (cioè equazioni della forma  $P(x) = 0$ , con  $P(x)$  polinomio a coefficienti reali e  $x$  variabile reale). Ad esempio, l'equazione  $x^2 - 1 = 0$  ha le soluzioni reali  $x = \pm 1$ , ma l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  non è risolubile in  $\mathbb{R}$ . Per risolvere questa ed altre equazioni algebriche occorre dunque aggiungere nuovi numeri all'insieme dei numeri reali: il primo di essi è la quantità (certamente non un numero reale) che indichiamo con  $i$ , a cui attribuiamo per definizione la proprietà seguente:

$$i^2 = -1.$$

Il numero  $i$  è detto *unità immaginaria* (per pure ragioni storiche: non è meno reale di  $\sqrt{2}$ , né più immaginario di  $\sqrt{3}$ ). Si osservi allora che l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  ha le soluzioni  $x = \pm i$ .

Se però vogliamo mantenere, anche con l'aggiunta di questo nuovo numero, la possibilità di fare addizioni e moltiplicazioni, nonché ottenere che restino valide le regole di calcolo che valgono in  $\mathbb{R}$ , dovremo aggiungere, insieme a  $i$ , anche tutti i numeri che si generano facendo interagire, mediante tali operazioni, il numero  $i$  con se stesso o con i numeri reali: dunque nell'insieme allargato di numeri dovremo includere quelli della forma

$$a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

ed anche, più generalmente,

$$a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_n i^n \quad (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}),$$

cioè tutti i polinomi  $P(x)$  a coefficienti reali calcolati nel punto  $x = i$ . Fortunatamente, le regole di calcolo e la definizione di  $i$  ci dicono che

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & i^1 &= i, & i^2 &= -1 & i^3 &= -i, \\ i^4 &= 1, & i^5 &= i, & i^6 &= -1, & i^7 &= -i, \\ i^{4n} &= 1, & i^{4n+1} &= i, & i^{4n+2} &= -1, & i^{4n+3} &= -i \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e quindi è sufficiente prendere polinomi di grado al più 1. In definitiva, introduciamo l'insieme dei *numeri complessi*  $\mathbb{C}$ , definito da

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\};$$

in altre parole, assegnare un numero complesso  $a + ib$  equivale ad assegnare una *coppia*  $(a, b)$  di numeri reali. La quantità  $i$ , meglio scritta come  $0 + i1$ , appartiene a  $\mathbb{C}$  perché corrisponde alla scelta  $(a, b) = (0, 1)$ .

Introduciamo in  $\mathbb{C}$  le operazioni di somma e prodotto in modo formalmente identico a  $\mathbb{R}$ :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Si vede subito che gli assiomi di  $\mathbb{R}$  relativi a somma e prodotto valgono ancora; in particolare l'elemento neutro per la somma è  $0 + 0i$ , l'elemento neutro per il prodotto è  $1 + 0i$ , l'opposto di  $a + ib$  è  $-a - ib$ . Vale la legge di annullamento del prodotto:

$$(a + ib)(0 + i0) = (a \cdot 0 - b \cdot 0) + i(a \cdot 0 + b \cdot 0) = 0 + i0 \quad \forall a + ib \in \mathbb{C}.$$

La corrispondenza  $\Phi$  che ad ogni numero reale  $a$  associa la coppia  $(a, 0) = a + i0$ , è chiaramente biunivoca tra  $\mathbb{R}$  e il sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  costituito dalle coppie con secondo elemento nullo; inoltre essa preserva la somma e il prodotto, nel senso che  $\Phi(a) + \Phi(a') = \Phi(a + a')$  e  $\Phi(a)\Phi(a') = \Phi(aa')$  per ogni  $a, a' \in \mathbb{R}$ . È naturale allora *identificare* le coppie  $(a, 0) = a + i0$  con i corrispondenti numeri reali  $a$ , ottenendo la rappresentazione semplificata  $a + i0 = a$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ; analogamente scriviamo  $ib$  anziché  $0 + ib$ . Si

noti che la legge di annullamento del prodotto ci dice che, nelle notazioni semplificate, deve essere  $i0 = 0$ . In questa maniera si può scrivere  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , o più precisamente

$$\mathbb{R} = \{a + ib \in \mathbb{C} : b = 0\}.$$

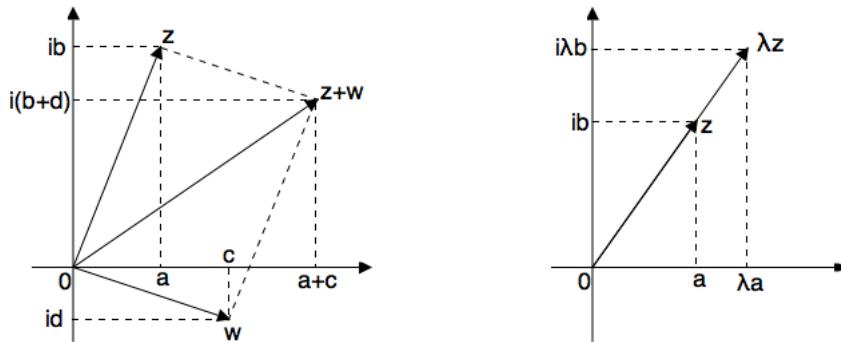
Se  $a + ib \neq 0$  (cioè è non nullo  $a$ , oppure è non nullo  $b$ , od anche sono non nulli entrambi), si può agevolmente verificare che il reciproco di  $a + ib$  esiste ed è dato da

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

In definitiva, in  $\mathbb{C}$  valgono le stesse proprietà algebriche di  $\mathbb{R}$ .

Non altrettanto si può dire delle proprietà di ordinamento: in  $\mathbb{C}$  non è possibile introdurre un ordinamento che sia coerente con le regole di calcolo valide per  $\mathbb{R}$ . Infatti, se ciò fosse possibile, per il numero  $i$  si avrebbe  $i > 0$ , oppure  $i < 0$  (non  $i = 0$ , in quanto  $i^2 = -1$ ): in entrambi i casi otterremmo  $-1 = i^2 > 0$ , il che è assurdo. Per questa ragione non ha senso scrivere diseguaglianze tra numeri complessi, né parlare di estremo superiore o inferiore di sottoinsiemi di  $\mathbb{C}$ .

Dal momento che assegnare un numero complesso equivale ad assegnare una coppia di numeri reali, vi è una ovvia corrispondenza biunivoca fra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$ , che associa ad  $a + ib$  la coppia  $(a, b)$ . È naturale allora rappresentare i numeri complessi su un piano cartesiano: il *piano complesso*, o *piano di Gauss*. L'asse delle ascisse è detto *asse reale*, quello delle ordinate è detto *asse immaginario*. Visualizzeremo i numeri complessi  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  come vettori di coordinate  $(a, b)$ ; nel seguito faremo sistematicamente uso di questa identificazione. Essa, fra l'altro, ci permette di rappresentare la somma di due numeri complessi, ed anche il prodotto  $\lambda z$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{C}$ , esattamente come si è fatto in  $\mathbb{R}^2$  (paragrafo 1.11).



Invece la rappresentazione grafica del prodotto  $z \cdot w$ , con  $z, w \in \mathbb{C}$ , non ha un analogo in  $\mathbb{R}^2$ ; come vedremo, tale rappresentazione sarà possibile con l'uso della forma trigonometrica dei numeri complessi, che introdurremo più avanti.

Se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , il numero reale  $a$  è detto *parte reale* di  $z$ , mentre il numero reale  $b$  è detto *parte immaginaria* di  $z$ ; si scrive

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z,$$

da cui

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , il *coniugato* di  $z$  è il numero complesso  $\bar{z}$  definito da  $\bar{z} = a - ib$ . Si ha quindi

$$\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re}z, \quad \operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im}z,$$

cioè

$$\bar{z} = \operatorname{Re}z - i \operatorname{Im}z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dunque  $\bar{z}$  è il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse reale. Invece, il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse immaginario è il numero  $-z$ .

Ricavando dalle relazioni precedenti  $z$  e  $\bar{z}$  in funzione di  $\operatorname{Re}z$  e  $\operatorname{Im}z$ , si trova

$$\operatorname{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

ed in particolare

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}z = 0 \iff z = \bar{z} = \operatorname{Re}z,$$

$$z = 0 \iff \operatorname{Re}z = \operatorname{Im}z = 0.$$

Vediamo le proprietà dell'operazione di *coniugio*, la dimostrazione delle quali è una semplice verifica:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} \bar{i} &= -i, & \overline{-i} &= i, & \overline{1} &= 1, \\ \overline{-1} &= -1, & \overline{5 - 3i} &= 5 + 3i, & \overline{\left(\frac{1}{i}\right)} &= -\frac{1}{i} = i. \end{aligned}$$

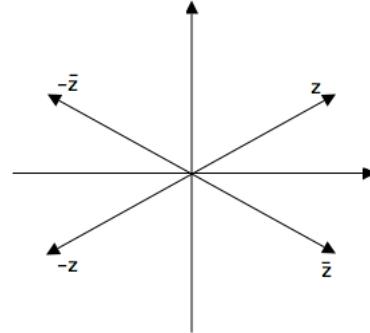
Se in  $\mathbb{C}$  non vi è un "buon" ordinamento, c'è però il modo di valutare quanto un numero complesso sia "grande": si può misurare la sua distanza, intesa nel senso di  $\mathbb{R}^2$ , dall'origine, cioè dal punto 0.

**Definizione 1.12.1** Il modulo di un numero complesso  $z = a + ib$  è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2}.$$

Il modulo di  $z$  è dunque la distanza del punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  dal punto  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ; ovvero, è la lunghezza del segmento di estremi 0 e  $z$  del piano complesso, cioè dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di vertici 0,  $\operatorname{Re}z$ ,  $z$ . Dalla definizione segue subito, per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$-|z| \leq \operatorname{Re}z \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im}z \leq |z|.$$

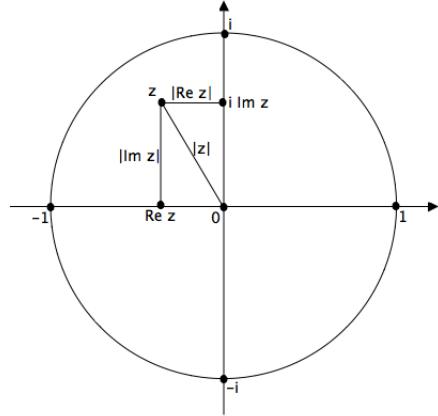


Si noti che queste sono disuguaglianze tra numeri reali, non tra numeri complessi!  
In particolare, l'equazione  $|z| = 1$  rappresenta la circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel piano complesso.

Vediamo le proprietà del modulo di numeri complessi:

**Proposizione 1.12.2** *Risulta per ogni  $z, w \in \mathbb{C}$ :*

- (i)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ;
- (ii)  $|z| \geq 0$ , e  $|z| = 0$  se e solo se  $z = 0$ ;
- (iii)  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ ;
- (iv)  $|z| \cdot |w| = |zw|$ ;
- (v) (subadditività)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ;
- (vi)  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ ;
- (vii) se  $z \neq 0$ , allora  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ ;
- (viii) se  $z \neq 0$ , allora  $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$ .



**Dimostrazione** Per (i) si ha, posto  $z = a + ib$ ,

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Le proprietà (ii) e (iii) sono evidenti.

Proviamo (iv): usando (i) si ha

$$|zw|^2 = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = (z\bar{z}) \cdot (w\bar{w}) = |z|^2 |w|^2,$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata.

Dimostriamo (v): usando (i) e (iv), si ha

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata.

Per (vi) osserviamo che, grazie a (v), si ha

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|, \quad |w| = |(w - z) + z| \leq |z - w| + |z|,$$

cosicché

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w|;$$

ne segue la tesi, per l'esercizio 1.9.4.

Proviamo (vii): si ha

$$\left| \frac{1}{z} \right|^2 = \frac{1}{z} \cdot \overline{\left( \frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2},$$

da cui la tesi.

Infine, (viii) segue da (iv) e (vii).  $\square$

## Il numero $\pi$

Prima di introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi, conviene parlare, appunto, di trigonometria. Preliminare a tutta la questione è il problema di dare una definizione il più possibile rigorosa del numero reale  $\pi$ .

Il nostro punto di partenza sarà l'*area* dei triangoli, che supponiamo elementarmente nota (metà del prodotto base per altezza!), insieme con le sue basilari proprietà, e cioè:

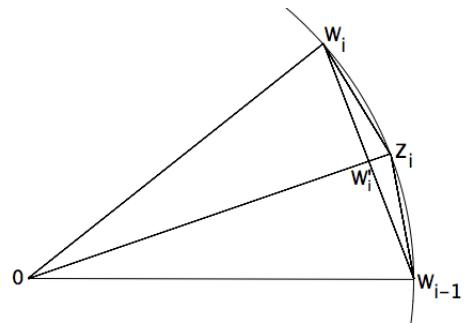
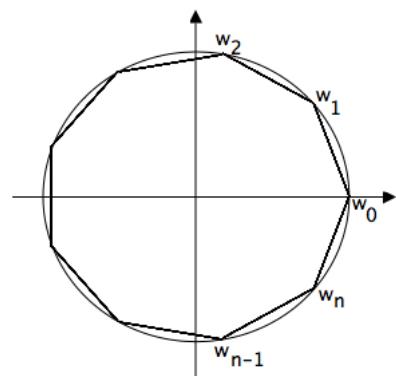
- se un triangolo è incluso in un altro triangolo, allora l'area del primo è non superiore all'area del secondo;
- se due triangoli sono congruenti, allora essi hanno la stessa area;
- l'area di una figura costituita da due triangoli disgiunti o adiacenti è pari alla somma delle aree dei due triangoli.

Fissato un intero  $n \geq 3$ , consideriamo un poligono regolare  $\mathcal{P}$  di  $n$  lati, inscritto nel cerchio  $B(0, 1)$  del piano complesso. I vertici di  $\mathcal{P}$  sono numeri complessi  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n \equiv w_0$  di modulo unitario. Denotiamo con  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{W}'_i$ ,  $\mathbf{Z}_i$  i punti del piano corrispondenti ai numeri complessi

$$0, \quad w_i, \quad w'_i = \frac{w_i + w_{i-1}}{2}, \quad z_i = \frac{w_i + w_{i-1}}{|w_i + w_{i-1}|}.$$

Calcoliamo l'area  $a(\mathcal{P})$  di  $\mathcal{P}$ : poiché il triangolo  $\mathbf{OW}_{i-1}\mathbf{W}_i$  è isoscele con base  $\mathbf{W}_i\mathbf{W}_{i-1}$  e altezza  $\mathbf{OW}'_i$ , si ottiene

$$\begin{aligned} a(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n a(\mathbf{OW}_{i-1}\mathbf{W}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |w'_i| \cdot |w_i - w_{i-1}| = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} |w_i - w_{i-1}| \cdot |w_i + w_{i-1}|. \end{aligned}$$



Invece il perimetro  $\ell(\mathcal{P})$  del poligono  $\mathcal{P}$  è semplicemente la somma delle lunghezze dei

segmenti  $\mathbf{W}_{i-1}\mathbf{W}_i$ : quindi

$$\ell(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n |w_i - w_{i-1}|.$$

Si noti che, essendo  $\left| \frac{w_i + w_{i-1}}{2} \right| < 1$ , si ha

$$2a(\mathcal{P}) < \ell(\mathcal{P}).$$

D'altra parte, detto  $\mathcal{P}'$  il poligono regolare inscritto di  $2n$  lati, di vertici  $w_0, z_0, w_1, z_1, \dots, w_{n-1}, z_{n-1}, w_n \equiv w_0$ , si riconosce facilmente che l'area di  $\mathcal{P}'$  è data dalla somma delle aree degli  $n$  quadrilateri  $\mathbf{OW}_{i-1}\mathbf{Z}_i\mathbf{W}_i$ ; poiché

$$a(\mathbf{OW}_{i-1}\mathbf{Z}_i\mathbf{W}_i) = 2a(\mathbf{OZ}_i\mathbf{W}_i) = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{|w_i - w_{i-1}|}{2} \cdot |z_i| \right) = \frac{1}{2} |w_i - w_{i-1}|,$$

si ottiene

$$a(\mathcal{P}') = \frac{1}{2} \ell(\mathcal{P}).$$

Questa relazione implica, in particolare:

**Proposizione 1.12.3** *Risulta*

$$\begin{aligned} \sup\{a(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono regolare inscritto in } B(0, 1)\} &= \\ &= \frac{1}{2} \sup\{\ell(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono regolare inscritto in } B(0, 1)\}. \quad \square \end{aligned}$$

Consideriamo ora un poligono regolare  $\mathcal{Q}$  di  $n$  lati circoscritto al cerchio  $B(0, 1)$ . Indichiamo con  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \equiv v_0$  i vertici di  $\mathcal{Q}$  e con  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  i punti in cui  $\mathcal{Q}$  tocca la circonferenza  $S(0, 1)$ . Come prima, denotiamo con  $\mathbf{O}, \mathbf{V}_i, \mathbf{Z}_i$  i punti del piano corrispondenti ai numeri complessi  $0, v_i, z_i$ . L'area di  $\mathcal{Q}$  è data da

$$a(\mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^n a(\mathbf{OV}_{i-1}\mathbf{V}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |z_i| \cdot |v_i - v_{i-1}| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |v_i - v_{i-1}|,$$

mentre il perimetro di  $\mathcal{Q}$  è semplicemente

$$\ell(\mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^n |v_i - v_{i-1}|.$$

Dunque

$$a(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2} \ell(\mathcal{Q}).$$

Pertanto:

**Proposizione 1.12.4** *Risulta*

$$\begin{aligned} \inf\{a(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono regolare circoscritto a } B(0, 1)\} &= \\ &= \frac{1}{2} \inf\{\ell(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono regolare circoscritto a } B(0, 1)\}. \quad \square \end{aligned}$$

Adesso notiamo che per ogni poligono regolare  $\mathcal{P}$  inscritto in  $B(0, 1)$  e per ogni poligono regolare  $\mathcal{Q}$  circoscritto a  $B(0, 1)$  si ha, evidentemente,  $\mathcal{P} \subset B(0, 1) \subset \mathcal{Q}$  e quindi  $a(\mathcal{P}) < a(\mathcal{Q})$ . Ciò mostra che i due insiemi

$$\{a(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono regolare inscritto in } B(0, 1)\},$$

$$\{a(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono regolare circoscritto a } B(0, 1)\}$$

sono separati: quindi per l'assioma di completezza esiste almeno un elemento separatore fra essi. Proveremo adesso che i due insiemi sono anche contigui, e che quindi l'elemento separatore è in effetti unico.

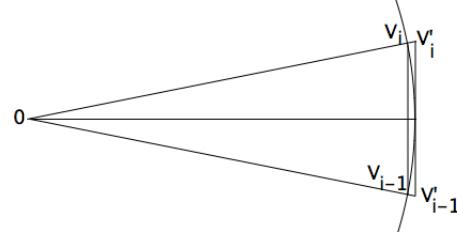
**Proposizione 1.12.5** *Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due poligoni regolari  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , uno inscritto e l'altro circoscritto a  $B(0, 1)$ , tali che*

$$a(\mathcal{Q}) - a(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

**Dimostrazione** Fissato  $n \geq 2$  siano  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{Q}_n$  poligoni regolari di  $2^n$  lati, il primo inscritto e il secondo circoscritto al cerchio  $B(0, 1)$ . Denotando con  $v_i$  i numeri complessi corrispondenti ai vertici di  $\mathcal{P}_n$  e con  $v'_i$  quelli relativi a  $\mathcal{Q}_n$ , supporremo (il che è lecito, a meno di un'opportuna rotazione attorno all'origine) che la posizione di  $\mathcal{Q}_n$  rispetto a  $\mathcal{P}_n$  sia tale che risulti  $\frac{v'_i}{|v'_i|} = v_i$  per ciascun vertice. Allora, utilizzando le formule precedenti, in questo caso si trova

$$a(\mathcal{P}_n) = 2^n \frac{|v_i - v_{i-1}| \cdot |v_i + v_{i-1}|}{4},$$

$$a(\mathcal{Q}_n) = 2^n \frac{|v_i - v_{i-1}|}{|v_i + v_{i-1}|},$$



da cui

$$a(\mathcal{Q}_n) - a(\mathcal{P}_n) = 2^n |v_i - v_{i-1}| \cdot |v_i + v_{i-1}| \left( \frac{4}{|v_i + v_{i-1}|^2} - 1 \right) = 4a(\mathcal{P}_n) \left( \frac{4}{|v_i + v_{i-1}|^2} - 1 \right).$$

Osserviamo adesso che, indicando con  $\ell_n$  la lunghezza del lato del poligono regolare inscritto  $\mathcal{P}_n$ , si ha  $\ell_n = |v_i - v_{i-1}|$  e quindi, essendo  $|v_1| = |v_{i-1}| = 1$ ,

$$|v_i + v_{i-1}|^2 = 2 + 2 \operatorname{Re} v_i \overline{v_{i-1}} = 2 + (2 - |v_i - v_{i-1}|^2) = 4 - |v_i - v_{i-1}|^2 = 4 - \ell_n^2;$$

di conseguenza

$$a(\mathcal{Q}_n) - a(\mathcal{P}_n) = 4a(\mathcal{P}_n) \frac{\ell_n^2}{4 - \ell_n^2} < a(\mathcal{Q}_2) \frac{4\ell_n^2}{4 - \ell_n^2}.$$

Al crescere di  $n$ , il lato  $\ell_n$  è sempre più piccolo e, in particolare,

$$\inf_{n \geq 2} \ell_n = 0;$$

ne segue che, fissato  $\varepsilon \in ]0, 4[$ , esiste  $\nu \geq 2$  sufficientemente grande in modo che  $\ell_\nu^2 < \varepsilon/2 < 2$ ; se ne deduce allora

$$a(\mathcal{Q}_\nu) - a(\mathcal{P}_\nu) < a(\mathcal{Q}_2) \frac{4\ell_\nu^2}{4 - \ell_\nu^2} < 4 \frac{\varepsilon/2}{4 - 2} = \varepsilon.$$

Ciò prova la tesi.  $\square$

Dalle proposizioni precedenti segue che esiste un unico numero reale, che denotiamo con  $\pi$ , il quale è l'unico elemento separatore fra l'insieme delle aree di tutti i poligoni regolari inscritti e l'insieme delle aree di tutti i poligoni regolari circoscritti al cerchio  $B(0, 1)$ . Si noti che, a maggior ragione,  $\pi$  è anche l'elemento separatore fra l'insieme delle aree di tutti i poligoni inscritti (non necessariamente regolari) e l'insieme delle aree di tutti i poligoni circoscritti al cerchio  $B(0, 1)$  (non necessariamente regolari). Ovvie considerazioni geometriche ci inducono a definire l'*area* di  $B(0, 1)$  attribuendole il valore  $\pi$ . In altre parole:

**Definizione 1.12.6** *Il numero reale  $\pi$  è l'area del cerchio  $B(0, 1)$ , ed è quindi dato da*

$$\begin{aligned} \pi = a(B(0, 1)) &= \sup\{a(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono inscritto in } B(0, 1)\} = \\ &= \inf\{a(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono circoscritto a } B(0, 1)\}. \end{aligned}$$

Si noti che  $\pi$  è compreso fra 2 e 4 (le aree del quadrato inscritto e di quello circoscritto). Dal fatto che l'area di un poligono regolare circoscritto al cerchio  $B(0, 1)$  è la metà del suo perimetro, anche l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari inscritti in  $B(0, 1)$  e quello dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti a  $B(0, 1)$  hanno un unico elemento separatore, il quale coincide esattamente con  $2\pi$  in virtù della proposizione 1.12.4. A maggior ragione,  $2\pi$  è anche l'elemento separatore fra l'insieme dei perimetri dei poligoni inscritti (non necessariamente regolari) e quello dei perimetri dei poligoni circoscritti a  $B(0, 1)$  (non necessariamente regolari). Nuovamente, evidenti considerazioni geometriche ci portano a definire il *perimetro* della circonferenza  $S(0, 1)$  attribuendole il valore  $2\pi$ . Si ha dunque:

**Corollario 1.12.7** *Il perimetro della circonferenza  $S(0, 1)$  è dato da*

$$\begin{aligned} \ell(S(0, 1)) &= \sup\{\ell(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono inscritto in } B(0, 1)\} = \\ &= \inf\{\ell(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono circoscritto a } B(0, 1)\} = 2\pi. \end{aligned}$$

**Osservazione 1.12.8** In modo del tutto analogo, per ogni  $r > 0$  si definiscono l'area del cerchio  $B(0, r)$  come

$$\begin{aligned} a(B(0, r)) &= \sup\{a(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono inscritto in } B(0, r)\} = \\ &= \inf\{a(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono circoscritto a } B(0, r)\} \end{aligned}$$

e il perimetro della circonferenza  $S(0, r)$  come

$$\begin{aligned} \ell(S(0, r)) &= \sup\{\ell(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligono inscritto in } B(0, r)\} = \\ &= \inf\{\ell(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ poligono circoscritto a } B(0, r)\}. \end{aligned}$$

Se  $\mathcal{P}$  è un poligono inscritto o circoscritto con vertici  $v_i$ , e  $\mathcal{P}_r$  è il poligono i cui vertici sono i punti  $rv_i$ , per ovvie ragioni di similitudine risulta

$$a(\mathcal{P}_r) = r^2 a(\mathcal{P}), \quad \ell(\mathcal{P}_r) = r \ell(\mathcal{P});$$

pertanto si ha

$$a(B(0, r)) = r^2 a(B(0, 1)) = \pi r^2,$$

$$\ell(S(0, r)) = r \ell(S(0, 1)) = 2\pi r.$$

Dunque il cerchio  $B(0, r)$  ha area  $\pi r^2$  e perimetro  $2\pi r$ , come era da aspettarsi.

## Area dei settori e lunghezza degli archi

Ogni coppia di numeri complessi  $v, w$  non nulli individua sulla circonferenza  $S(0, 1)$  due punti,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , corrispondenti ai numeri complessi  $\frac{v}{|v|}$  e  $\frac{w}{|w|}$ ; questi punti formano con l'origine  $\mathbf{O}$  due angoli. Attribuiamo un'orientazione a tali angoli: diciamo che **VOW** è positivo se la terna  $(\mathbf{V}, \mathbf{O}, \mathbf{W})$  è orientata come  $(1, 0, i)$  (ossia in verso antiorario); diciamo che **VOW** è negativo se la terna  $(\mathbf{V}, \mathbf{O}, \mathbf{W})$  è orientata come  $(i, 0, 1)$  (ossia in verso orario). È chiaro che **VOW** è positivo se e solo se **WOW** è negativo.

Denotiamo le intersezioni di  $S(0, 1)$  con le regioni interne ai due angoli rispettivamente con  $\gamma_+(v, w)$  e  $\gamma_-(v, w)$ : si tratta evidentemente di due archi. L'arco  $\gamma_+(v, w)$  va da  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{W}$  in verso antiorario, cioè con orientazione positiva, mentre l'arco  $\gamma_-(v, w)$  va da  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{W}$  in verso orario, cioè con orientazione negativa. Agli archi positivamente orientati attribuiremo una lunghezza positiva, a quelli negativamente orientati una lunghezza negativa.

Analogamente, ai corrispondenti settori circolari

$$\Sigma_+(v, w) = \{z \in \mathbb{C} : z = t\zeta, t \in [0, 1], \zeta \in \gamma_+(v, w)\},$$

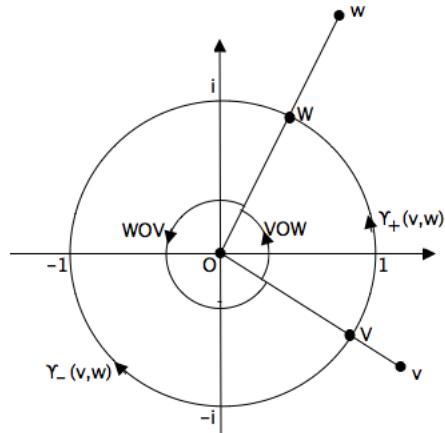
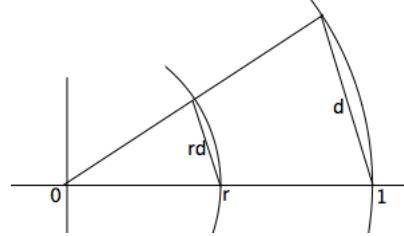
$$\Sigma_-(v, w) = \{z \in \mathbb{C} : z = t\zeta, t \in [0, 1], \zeta \in \gamma_-(v, w)\}$$

attribuiremo un'area rispettivamente positiva e negativa.

Notiamo esplicitamente che, per definizione,

$$\gamma_{\pm}(v, w) = \gamma_{\pm}\left(\frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|}\right), \quad \Sigma_{\pm}(v, w) = \Sigma_{\pm}\left(\frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|}\right) \quad \forall v, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}:$$

quindi non sarà restrittivo riferirsi ad archi  $\gamma_{\pm}(v, w)$  relativi a numeri  $v, w \in \mathbb{C}$  con  $|v| = |w| = 1$ .



Fissiamo dunque  $v, w \in S(0, 1)$ . Considereremo *linee spezzate* inscritte o circoscritte a  $\gamma_+(v, w)$ . Una linea spezzata è formata da una sequenza finita ordinata di vertici e dai segmenti che li congiungono; ci limiteremo a spezzate con primo vertice  $v$  e ultimo vertice  $w$ . Una tale spezzata è *inscritta* in  $\gamma_+(v, w)$  se tutti i suoi vertici appartengono a  $\gamma_+(v, w)$ ; è invece *circoscritta* se tutti i suoi vertici, tranne il primo e l'ultimo, sono esterni a  $B(0, 1)$  e tutti i suoi segmenti sono tangentemente esternamente a  $\gamma_+(v, w)$ , ossia toccano tale arco senza attraversarlo.

Considereremo anche i “settori”  $\Sigma_P$  associati a spezzate  $P$  inscritte o circoscritte: detti  $v_0 \equiv v, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \equiv w$  i vertici di  $P$ , il settore  $\Sigma_P$  è l’unione degli  $n$  triangoli  $OV_{i-1}V_i$  (ove al solito  $O, V_i$  sono i punti del piano corrispondenti ai numeri complessi  $0, v_i$ ).

Ciò premesso, con considerazioni analoghe a quelle svolte per il cerchio  $B(0, 1)$  e per la circonferenza  $S(0, 1)$ , si ottiene che

$$\begin{aligned} \sup\{a(\Sigma_P) : P \text{ spezzata inscritta in } \gamma_+(v, w)\} &= \\ &= \frac{1}{2} \sup\{\ell(P) : P \text{ spezzata inscritta in } \gamma_+(v, w)\} = \\ &= \frac{1}{2} \inf\{\ell(Q) : Q \text{ spezzata circoscritta a } \gamma_+(v, w)\} = \\ &= \inf\{a(\Sigma_Q) : Q \text{ spezzata circoscritta a } \gamma_+(v, w)\}. \end{aligned}$$

Siamo così indotti alla seguente

**Definizione 1.12.9** Siano  $v, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La lunghezza dell’arco positivamente orientato  $\gamma_+(v, w)$  è il numero reale non negativo

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_+(v, w)) &= \sup\{\ell(P) : P \text{ spezzata inscritta in } \gamma_+(v, w)\} = \\ &= \inf\{\ell(Q) : Q \text{ spezzata circoscritta a } \gamma_+(v, w)\}. \end{aligned}$$

L’area del settore positivamente orientato  $\Sigma_+(v, w)$  è il numero reale non negativo

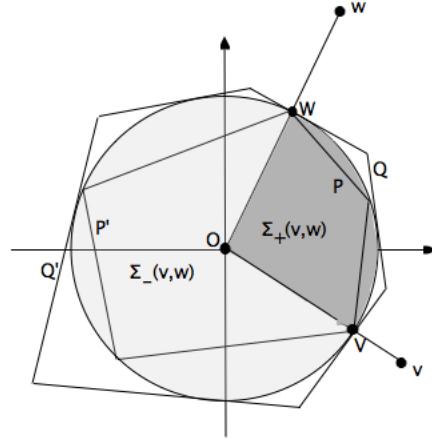
$$\begin{aligned} a(\Sigma_+(v, w)) &= \sup\{a(\Sigma_P) : P \text{ spezzata inscritta in } \gamma_+(v, w)\} = \\ &= \inf\{a(\Sigma_Q) : Q \text{ spezzata circoscritta a } \gamma_+(v, w)\} = \\ &= \frac{1}{2} \ell(\gamma_+(v, w)). \end{aligned}$$

La lunghezza dell’arco negativamente orientato  $\gamma_-(v, w)$  è il numero reale non positivo

$$\ell(\gamma_-(v, w)) = -2\pi + \ell(\gamma_+(v, w)).$$

L’area del settore negativamente orientato  $\Sigma_-(v, w)$  è il numero reale non positivo

$$a(\Sigma_-(v, w)) = -\pi + a(\Sigma_+(v, w)).$$



Una fondamentale proprietà delle lunghezze e delle aree sopra definite è la loro additività. A questo proposito vale la seguente

**Proposizione 1.12.10** *Siano  $v, w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se  $\frac{z}{|z|} \in \gamma_+(v, w)$ , allora*

$$\ell(\gamma_+(v, w)) = \ell(\gamma_+(v, z)) + \ell(\gamma_+(z, w)),$$

$$a(\Sigma_+(v, w)) = a(\Sigma_+(v, z)) + a(\Sigma_+(z, w)).$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per definizione, esistono due spezzate  $P, P'$ , l'una inscritta in  $\gamma_+(v, z)$  e l'altra inscritta in  $\gamma_+(z, w)$ , tali che

$$\ell(\gamma_+(v, z)) - \varepsilon < \ell(P) \leq \ell(\gamma_+(v, z)), \quad \ell(\gamma_+(z, w)) - \varepsilon < \ell(P') \leq \ell(\gamma_+(z, w)),$$

Indicata con  $P^*$  la spezzata i cui vertici sono tutti quelli di  $P$  seguiti da tutti quelli di  $P'$ , è chiaro che  $P^*$  è inscritta in  $\gamma_+(v, w)$ ; inoltre si ha  $\ell(P) + \ell(P') = \ell(P^*) \leq \ell(\gamma_+(v, w))$ . Quindi

$$\ell(\gamma_+(v, z)) + \ell(\gamma_+(z, w)) - 2\varepsilon < \ell(P^*) \leq \ell(\gamma_+(v, w)).$$

L'arbitrarietà di  $\varepsilon$  prova che

$$\ell(\gamma_+(v, z)) + \ell(\gamma_+(z, w)) \leq \ell(\gamma_+(v, w)).$$

Per provare la diseguaglianza inversa, sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $P$  una spezzata inscritta a  $\gamma_+(v, w)$  tale che

$$\ell(\gamma_+(v, w)) - \varepsilon < \ell(P) \leq \ell(\gamma_+(v, w)).$$

Se la spezzata  $P$  non ha come vertice il punto  $z$ , esisteranno due vertici consecutivi  $v_{i-1}, v_i$  tali che  $z \in \gamma_+(v_{i-1}, v_i)$ ; allora, sostituendo al segmento  $V_{i-1}V_i$  i due segmenti  $V_{i-1}Z$  e  $ZV_i$ , si ottiene una nuova spezzata  $P^*$  inscritta a  $\gamma_+(v, w)$  tale che  $\ell(P^*) > \ell(P)$ . Inoltre tale spezzata è l'unione di due spezzate  $P'$  e  $P''$ , l'una formata da tutti i vertici fra  $v$  e  $z$  (inclusi) e inscritta in  $\gamma_+(v, z)$ , l'altra formata da tutti i vertici fra  $z$  e  $w$  (inclusi) e inscritta in  $\gamma_+(z, w)$ . Si ha allora

$$\ell(\gamma_+(v, w)) - \varepsilon < \ell(P) < \ell(P^*) = \ell(P') + \ell(P'') \leq \ell(\gamma_+(v, z)) + \ell(\gamma_+(z, w)).$$

Nuovamente, l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  prova che

$$\ell(\gamma_+(v, w)) \leq \ell(\gamma_+(v, z)) + \ell(\gamma_+(z, w)).$$

La prima parte della tesi è provata. La seconda parte segue subito ricordando che l'area di un settore è la metà della lunghezza dell'arco corrispondente.  $\square$

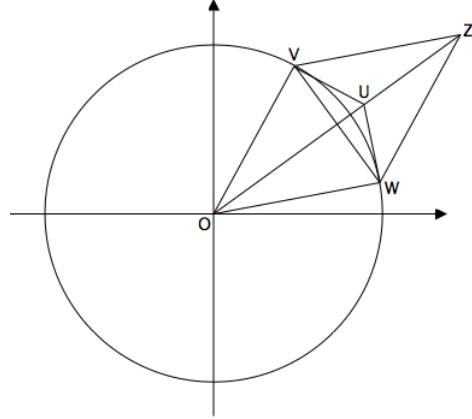
**Corollario 1.12.11** *Se  $v, w \in \gamma_+(1, i)$ , allora*

$$|v - w| < |\ell(\gamma_+(1, v)) - \ell(\gamma_+(1, w))| \leq \sqrt{2}|v - w|.$$

**Dimostrazione** Anzitutto notiamo che si ha  $v \in \gamma_+(1, w)$  oppure  $w \in \gamma_+(1, v)$ ; se siamo ad esempio nel secondo caso, allora per la proposizione 1.12.10

$$\ell(\gamma_+(1, v)) - \ell(\gamma_+(1, w)) = \ell(\gamma_+(w, v)),$$

cosicché la prima diseguaglianza è banale. Per provare la seconda, denotiamo, al solito, con  $\mathbf{O}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$  i punti corrispondenti ai numeri complessi  $0, v, w, v + w$ , e tracciamo la bisettrice dell'angolo  $\mathbf{VOW}$ ; sia  $\mathbf{U}$  il punto di intersezione delle perpendicolari ai segmenti  $\mathbf{OV}$  e  $\mathbf{OW}$  condotte da  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  rispettivamente. La spezzata  $P$  di vertici  $\mathbf{V}, \mathbf{U}, \mathbf{W}$  è allora circoscritta a  $\gamma_+(v, w)$  e la sua lunghezza è



$$\ell(P) = |v - u| + |u - w| = 2|u - v| = 2 \frac{|v - w|}{|v + w|};$$

ma poiché  $|v + w|$  è la lunghezza della diagonale maggiore  $\mathbf{OZ}$  del rombo  $\mathbf{OVZW}$ , tale quantità è certamente non inferiore a  $\sqrt{2}$  (la diagonale del quadrato di lato  $\mathbf{OV}$ ). Si ottiene allora

$$\ell(\gamma_+(v, w)) \leq \ell(P) \leq \sqrt{2}|v - w|. \quad \square$$

Il corollario appena dimostrato ci permette di enunciare il seguente fondamentale risultato, conseguenza dell'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.12.12** *Per ogni  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  esiste un unico numero  $\vartheta \in [0, 2\pi[$  tale che*

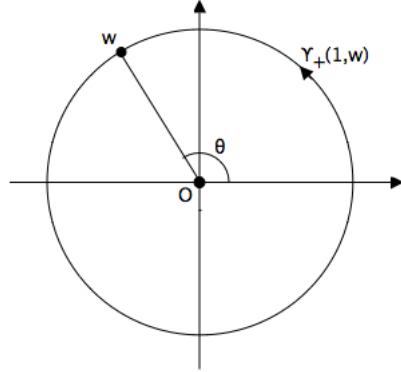
$$\ell(\gamma_+(1, w)) = 2a(\Sigma_+(1, w)) = \vartheta.$$

*La funzione  $g(w) = \ell(\gamma_+(1, w))$  è dunque surgettiva da  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  in  $[0, 2\pi[$  ed è bigettiva da  $S(0, 1)$  in  $[0, 2\pi[$ . Il numero  $\vartheta = \ell(\gamma_+(1, w))$  si dice misura in radianti dell'angolo individuato dai punti  $0, 1, w$ .*

Dimostreremo il teorema 1.12.12 più avanti nel corso, utilizzando la teoria delle funzioni continue.

Un radiante è quindi, per definizione, la misura dell'unico angolo (orientato in verso antiorario) il cui corrispondente arco della circonferenza unitaria ha lunghezza 1; un angolo misura  $\vartheta$  radianti se e solo se l'arco corrispondente su  $S(0, 1)$  ha lunghezza  $\vartheta$  e il settore corrispondente ha area  $\frac{\vartheta}{2}$ . In particolare, allora, l'angolo piatto misura  $\pm\pi$  (radianti), l'angolo retto  $\pm\frac{\pi}{2}$ , e l'angolo sotteso da un lato del poligono regolare di  $N$  lati misura  $\pm\frac{2\pi}{N}$ ; il segno davanti alla misura dipende dal verso di rotazione.

Naturalmente, facendo più di un giro in verso antiorario le aree e le lunghezze d'arco crescono di  $2\pi$ ,  $4\pi$ , eccetera, mentre se il verso è orario esse decrescono di  $-2\pi$ ,  $-4\pi$ , eccetera. D'altra parte dopo una rotazione di  $\vartheta + 2k\pi$ , con  $k$  intero arbitrario, l'estremo dell'arco è lo stesso di quello relativo ad una rotazione di  $\vartheta$ : ad ogni  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  corrispondono dunque le infinite misure  $\vartheta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Possiamo allora dare la seguente



**Definizione 1.12.13** Sia  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e sia  $\vartheta \in [0, 2\pi[$  la misura in radianti dell'arco  $\gamma_+(1, w)$ . Ognuno degli infiniti numeri  $\vartheta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si chiama argomento del numero complesso  $w$  e si denota con  $\arg w$ ; il numero  $\vartheta$ , cioè l'unico fra gli argomenti di  $w$  che appartiene a  $[0, 2\pi[$ , si chiama argomento principale di  $w$ .

Si osservi che  $\arg w$  denota uno qualsiasi degli infiniti argomenti di  $w$ , quindi è una quantità definita a meno di multipli interi di  $2\pi$ .

## Funzioni trigonometriche

Sulla base del teorema 1.12.12 e della conseguente definizione 1.12.13, siamo in grado di introdurre le funzioni trigonometriche. Infatti, fissato  $\vartheta \in [0, 2\pi[$ , tale risultato ci permette di scegliere  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tale che  $\arg w = \vartheta$ ; in particolare,  $\frac{w}{|w|}$  è l'unico elemento di  $S(0, 1)$  il cui argomento è  $\vartheta$ , cioè che verifica

$$l\left(\gamma_+\left(1, \frac{w}{|w|}\right)\right) = 2a\left(\Sigma_+\left(1, \frac{w}{|w|}\right)\right) = \vartheta.$$

Le coordinate di  $\frac{w}{|w|}$ , vale a dire  $\operatorname{Re}\frac{w}{|w|}$  e  $\operatorname{Im}\frac{w}{|w|}$ , sono quindi funzioni di  $\vartheta$ . Ha senso perciò la seguente definizione delle funzioni trigonometriche *coseno* e *seno*:

**Definizione 1.12.14** Per ogni  $\vartheta \in [0, 2\pi[$  si pone

$$\cos \vartheta = \operatorname{Re} \frac{w}{|w|}, \quad \sin \vartheta = \operatorname{Im} \frac{w}{|w|},$$

ove  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  è un qualsiasi numero complesso tale che  $\arg w = \vartheta$ .

In particolare, un generico numero complesso non nullo  $w$  si può scrivere in forma trigonometrica:

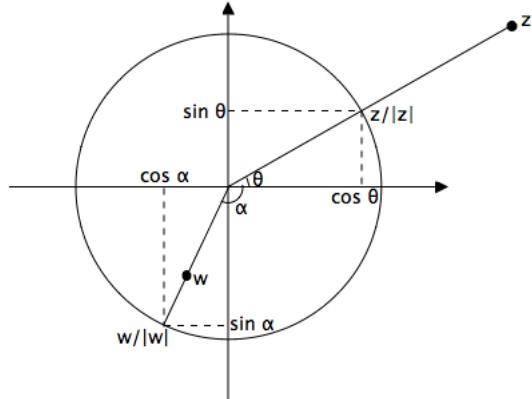
$$w = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

ove  $\rho = |w|$  e  $\vartheta = \arg w$ .

Poiché ad un numero complesso  $z$  di argomento principale  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  corrispondono anche gli argomenti  $\vartheta + 2k\pi$ , occorre che le funzioni coseno e seno siano *periodiche* di periodo  $2\pi$ : esse cioè devono verificare le relazioni

$$\cos(\vartheta + 2\pi) = \cos \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R},$$

$$\sin(\vartheta + 2\pi) = \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$



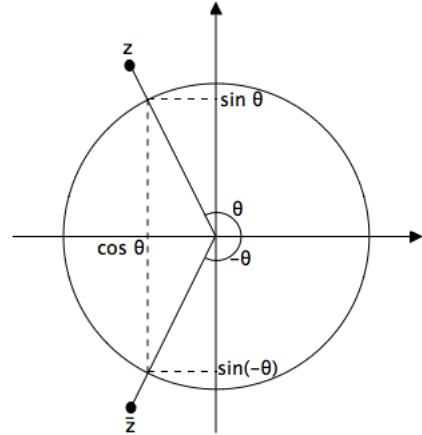
Immediata conseguenza della definizione sono poi le seguenti proprietà:

$$|\cos \vartheta| \leq 1, \quad |\sin \vartheta| \leq 1, \quad \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Poiché i punti  $z$  e  $\bar{z}$  sono simmetrici rispetto all'asse reale, ad essi corrispondono angoli opposti: dunque il seno ed il coseno di angoli opposti devono verificare

$$\cos(-\vartheta) = \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{|z|} = \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} = \cos \vartheta,$$

$$\sin(-\vartheta) = \operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{|z|} = -\operatorname{Im} \frac{z}{|z|} = -\sin \vartheta.$$



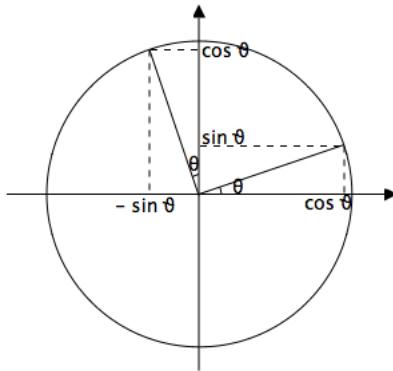
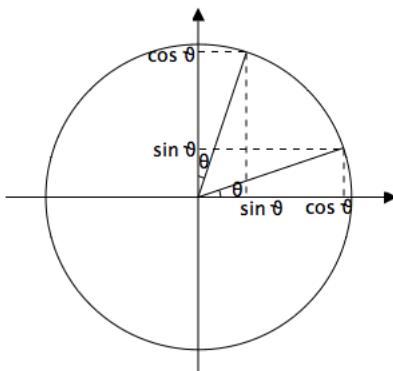
Si verifica poi facilmente, utilizzando le simmetrie illustrate nelle figure sottostanti, che

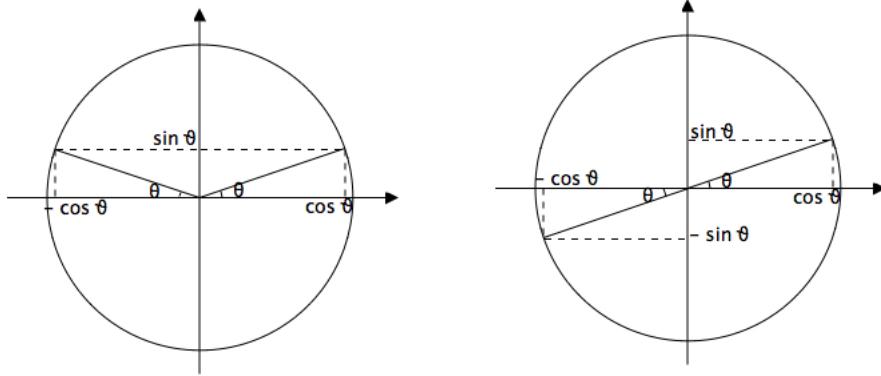
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin \vartheta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\sin \vartheta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R},$$

$$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta, \quad \sin(\pi - \vartheta) = \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R},$$

$$\cos(\pi + \vartheta) = -\cos \vartheta, \quad \sin(\pi + \vartheta) = -\sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$





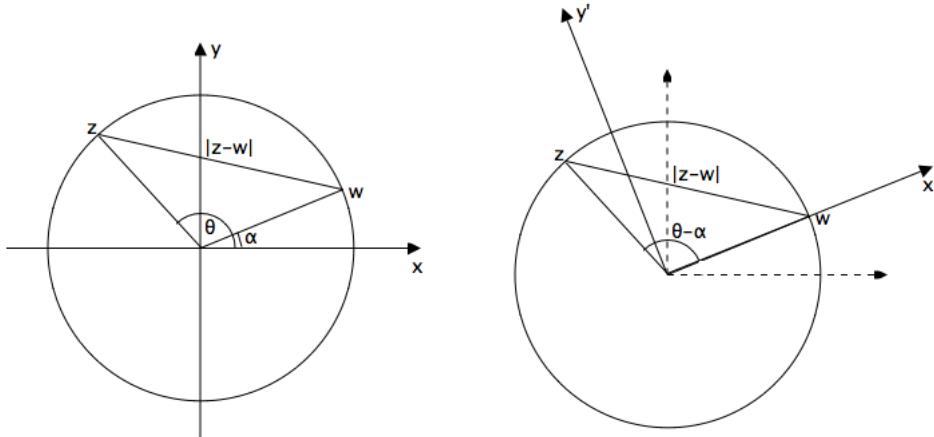
Più in generale si ha:

**Proposizione 1.12.15** *Per ogni  $\vartheta, \alpha \in \mathbb{R}$  valgono le formule di addizione*

$$\begin{aligned}\cos(\vartheta - \alpha) &= \cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha, \\ \cos(\vartheta + \alpha) &= \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha, \\ \sin(\vartheta - \alpha) &= \sin \vartheta \cos \alpha - \cos \vartheta \sin \alpha, \\ \sin(\vartheta + \alpha) &= \sin \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \sin \alpha.\end{aligned}$$

**Dimostrazione** Siano  $z, w$  numeri complessi di modulo 1, con  $\arg z = \vartheta$  e  $\arg w = \alpha$ : ciò significa che nel piano il punto  $z$  ha coordinate  $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$  mentre il punto  $w$  ha coordinate  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Calcoliamo la quantità  $|z - w|^2$ : si ha

$$|z - w|^2 = (\cos \vartheta - \cos \alpha)^2 + (\sin \vartheta - \sin \alpha)^2.$$



D'altra parte,  $|z - w|$  rappresenta la lunghezza del segmento di estremi  $z$  e  $w$ , quindi tale quantità non cambia se cambiamo sistema di riferimento. Scegliamo due nuovi assi ortogonali  $x'$ ,  $y'$  tali che la semiretta positiva dell'asse  $x'$  coincida con la semiretta uscente da 0 che contiene  $w$ . Dato che  $|z| = |w| = 1$ , le coordinate di  $w$  in questo nuovo sistema sono  $(1, 0)$  mentre quelle di  $z$  sono  $(\cos(\vartheta - \alpha), \sin(\vartheta - \alpha))$ . Pertanto

$$|z - w|^2 = (\cos(\vartheta - \alpha) - 1)^2 + (\sin(\vartheta - \alpha))^2.$$

Confrontando fra loro le due espressioni e svolgendo i calcoli, si ricava facilmente la prima uguaglianza.

La seconda uguaglianza segue dalla prima scambiando  $\alpha$  con  $-\alpha$ :

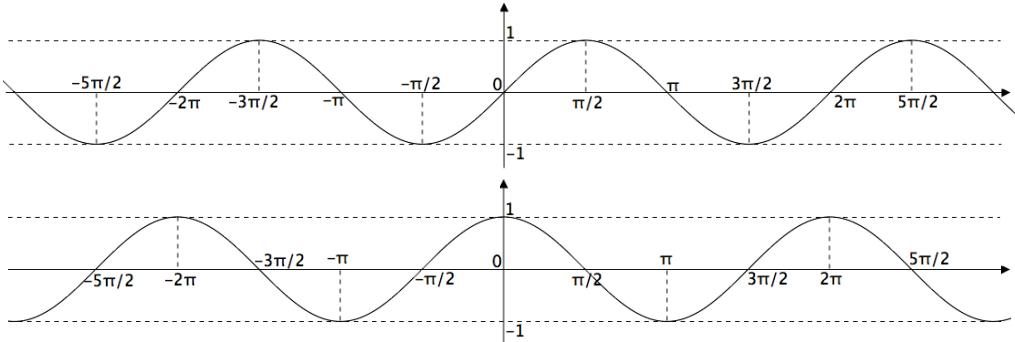
$$\cos(\vartheta - (-\alpha)) = \cos \vartheta \cos(-\alpha) + \sin \vartheta \sin(-\alpha) = \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha.$$

Per la terza e quarta uguaglianza si osservi che, per quanto già provato,

$$\begin{aligned}\sin(\vartheta - \alpha) &= -\cos\left(\vartheta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha - \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha = \\ &= \sin \vartheta \cos \alpha - \cos \vartheta \sin \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\vartheta + \alpha) &= -\cos\left(\vartheta + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha + \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha = \\ &= \sin \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \sin \alpha. \quad \square\end{aligned}$$

I grafici delle funzioni seno e coseno sono illustrati qui sotto.

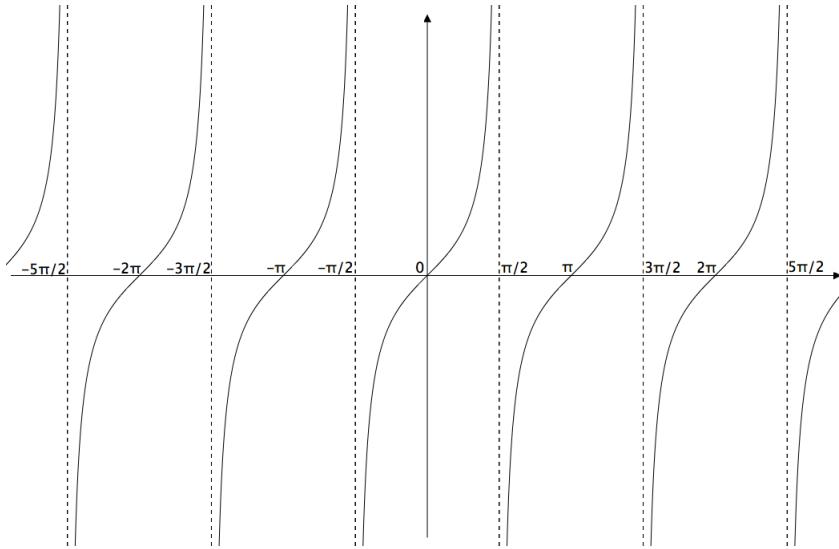


Si noti che il grafico del seno si ottiene da quello del coseno mediante una traslazione di  $+\frac{\pi}{2}$  lungo l'asse  $x$ , dato che, come sappiamo,  $\cos \vartheta = \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})$ .

Completiamo questa breve introduzione alle funzioni trigonometriche definendo la funzione *tangente*.

**Definizione 1.12.16** Se  $\vartheta \in \mathbb{R}$  e  $\vartheta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , poniamo

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}.$$



Questa funzione non è definita nei punti dove si annulla il coseno, ed è periodica di periodo  $\pi$ .

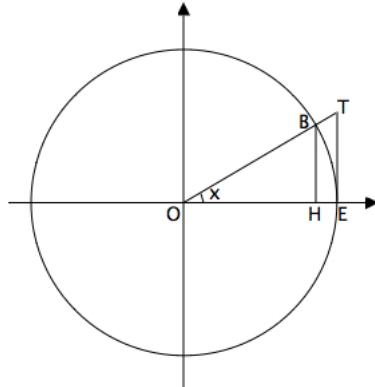
Vale questa importante diseguaglianza:

**Proposizione 1.12.17** *Risulta*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\};$$

di conseguenza si ha

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{\sin \frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



**Dimostrazione** Fissiamo  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e siano **O** l'origine ed **E**, **B** i punti corrispondenti ai numeri  $1$  e  $\cos x + i \sin x$ ; sia poi **T** il punto di incontro tra la perpendicolare ad **OE** passante per **E** ed il prolungamento di **OB**, e **H** il punto d'incontro con **OE** della perpendicolare ad **OE** passante per **B**. Dato che i triangoli **OHB** e **OET** sono simili, si ha

$$|\mathbf{H}| : |\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \mathbf{H}| : |\mathbf{T} - \mathbf{E}|,$$

da cui

$$|\mathbf{T} - \mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{B} - \mathbf{H}| \cdot |\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

D'altra parte, il triangolo **OEB** è contenuto nel settore di vertici **O,E,B** il quale a sua volta è contenuto nel triangolo **OET**: ne segue, calcolando le tre aree,

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

da cui la tesi quando  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Se  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , per quanto già visto si ha

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1;$$

dato che  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ , si ha la tesi anche in questo caso. Infine, se  $x = \pm\frac{\pi}{2}$  la tesi è banale.

Sia ora  $a > 0$ . Essendo

$$0 \leq 1 - \cos^2 \frac{a}{n} = \sin^2 \frac{a}{n} < \frac{a^2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

si ottiene (dato che  $\cos \frac{a}{n} > 0$  per  $n > \frac{2a}{\pi}$ )

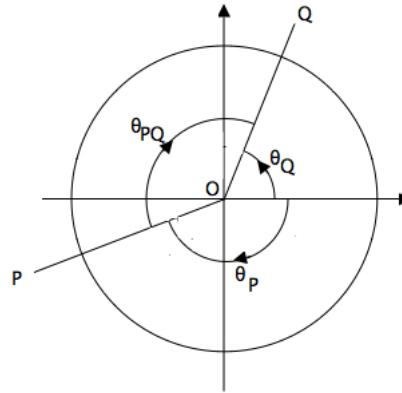
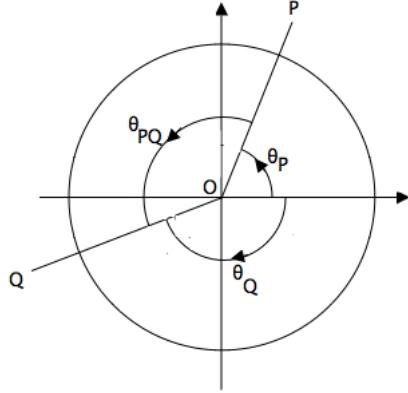
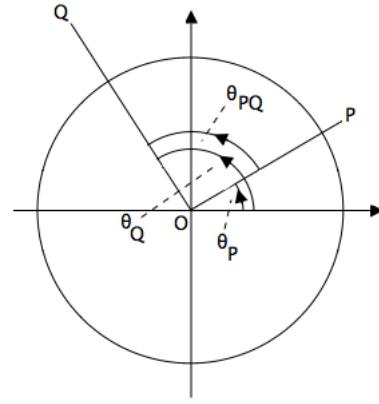
$$1 \geq \sup_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{\sin \frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}^+} \cos \frac{a}{n} \geq \sup_{n > 2a/\pi} \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \quad \square$$

## Seno e coseno in coordinate

Fissiamo due punti  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2$ , diversi dall'origine  $\mathbf{O}$ . Consideriamo l'angolo convesso  $\widehat{\mathbf{POQ}}$ , orientato da  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ : la sua ampiezza, misurata in radianti, è un numero  $\vartheta_{PQ} \in [-\pi, \pi]$ . Vogliamo esprimere i numeri reali  $\cos \vartheta_{PQ}$ ,  $\sin \vartheta_{PQ}$ , che denoteremo direttamente con  $\cos \widehat{\mathbf{POQ}}$  e  $\sin \widehat{\mathbf{POQ}}$ , in termini delle coordinate di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ .

Supponiamo dunque  $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$  e  $\mathbf{Q} = (x_Q, y_Q)$ , e poniamo per comodità  $\mathbf{E} = (1, 0)$ . Siano  $\vartheta_P$  e  $\vartheta_Q$  le misure in radianti degli angoli convessi orientati  $\widehat{\mathbf{EOP}}, \widehat{\mathbf{EOQ}}$ ; con l'aiuto delle figure è facile verificare che risulta

$$\vartheta_{PQ} = \begin{cases} \vartheta_Q - \vartheta_P & \text{se } |\vartheta_Q - \vartheta_P| < \pi \\ \vartheta_Q - \vartheta_P + 2\pi & \text{se } \vartheta_Q - \vartheta_P \leq -\pi \\ \vartheta_Q - \vartheta_P - 2\pi & \text{se } \vartheta_Q - \vartheta_P \geq \pi. \end{cases}$$



Di conseguenza, utilizzando le formule di addizione (proposizione 1.12.15), si ottiene

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\mathbf{POQ}} &= \cos(\vartheta_Q - \vartheta_P) = \\ &= \cos \vartheta_Q \cos \vartheta_P + \sin \vartheta_Q \sin \vartheta_P = \\ &= \frac{x_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} + \frac{y_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} \frac{y_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}} &= \sin(\vartheta_Q - \vartheta_P) = \\
&= \sin \vartheta_Q \cos \vartheta_P - \cos \vartheta_Q \sin \vartheta_P = \\
&= \frac{y_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} - \frac{x_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} \frac{y_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}.
\end{aligned}$$

Queste sono le espressioni del coseno e del seno che cercavamo. Si noti che, di conseguenza,

$$\cos \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}} = \frac{\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle}{|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|}, \quad \sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}} = \frac{1}{|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|} \det \begin{pmatrix} x_P & x_Q \\ y_P & y_Q \end{pmatrix},$$

ove il *determinante* della matrice  $\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}$  è, per definizione, il numero  $a\beta - b\alpha$ . Vale allora la seguente importante

**Proposizione 1.12.18** *Siano  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{O}\}$ .*

(i) *Risulta*

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \cos \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}};$$

(ii) *detto  $\mathcal{P}$  il parallelogrammo di vertici  $\mathbf{O}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ , la sua area  $a(\mathcal{P})$  è data da*

$$a(\mathcal{P}) = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \cdot |\sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}}| = |x_P y_Q - y_P x_Q|.$$

**Dimostrazione** (i) Segue dai discorsi precedenti.

(ii) La base di  $\mathcal{P}$  misura  $|\mathbf{P}|$  e la sua altezza misura  $|\mathbf{Q}| \sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}}$ ; poiché  $|\widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}}| \leq \pi$ , si ha  $|\sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}}| = |\sin \widehat{\mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{Q}}|$ , da cui la tesi.  $\square$

Se ne deduce immediatamente:

**Corollario 1.12.19** *Se  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^2$ , l'area del triangolo  $\mathcal{T}$  di vertici  $\mathbf{O}, \mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  è uguale a*

$$a(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} |x_P y_Q - y_P x_Q|. \quad \square$$

## Forma trigonometrica dei numeri complessi

Se  $z = a + ib$  è un numero complesso non nullo, come sappiamo esso può essere rappresentato, oltre che per mezzo delle sue coordinate cartesiane  $(a, b)$ , anche tramite il suo modulo ed il suo argomento (definizione 1.12.13): infatti, ricordando la definizione 1.12.14, posto  $\rho = |z|$  e  $\vartheta = \arg z$  vale la relazione

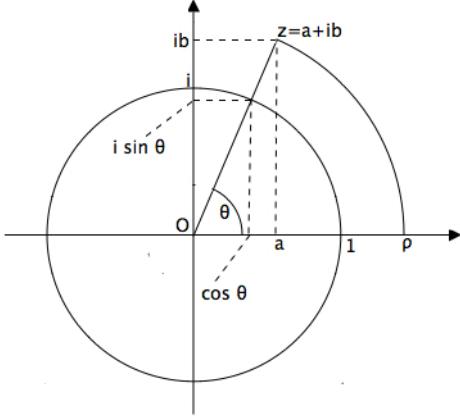
$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Questa è la scrittura di  $z$  in *forma trigonometrica*. Si noti che, noti  $\rho$  e  $\vartheta$ , si ha

$$\begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta, \end{cases}$$

mentre, noti  $a$  e  $b$ , si ha

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{a}{\rho} \\ \sin \vartheta = \frac{b}{\rho}, \end{cases}$$



il che equivale, com'è giusto, a determinare  $\vartheta$  a meno di multipli interi di  $2\pi$ .

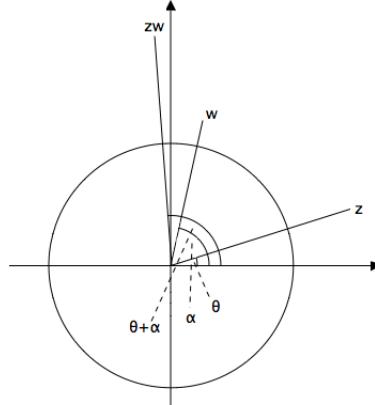
La forma trigonometrica dei numeri complessi è utile per rappresentare geometricamente il prodotto in  $\mathbb{C}$ . Siano infatti  $z, w \in \mathbb{C}$ : se uno dei due numeri è 0, allora il prodotto fa 0 e non c'è niente da aggiungere. Se invece  $z, w$  sono entrambi non nulli, scrivendoli in forma trigonometrica,

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

$$w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} zw &= \rho r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= \rho r [(\cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha) + \\ &\quad + i(\sin \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \sin \alpha)] = \\ &= \rho r [\cos(\vartheta + \alpha) + i \sin(\vartheta + \alpha)]. \end{aligned}$$



Dunque  $zw$  è quel numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare si ha la formula

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ovviamente si ha anche

$$z\bar{w} = \rho r [\cos(\vartheta - \alpha) + i \sin(\vartheta - \alpha)];$$

scelto poi  $w = z$ , troviamo

$$z^2 = r^2(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta),$$

e più in generale vale la *formula di de Moivre*:

$$z^n = r^n(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da questa formula, utilizzando lo sviluppo di Newton per il binomio (valido ovviamente anche in campo complesso, trattandosi di una relazione algebrica) è possibile dedurre

delle non banali relazioni trigonometriche che esprimono  $\sin n\vartheta$  e  $\cos n\vartheta$  in termini di  $\sin \vartheta$  e  $\cos \vartheta$  (esercizio 1.12.13).

Altre formule trigonometriche, che seguono facilmente dalle formule di addizione, sono illustrate negli esercizi 1.12.6, 1.12.7 e 1.12.8.

## Radici $n$ -sime di un numero complesso

Fissato  $w \in \mathbb{C}$ , vogliamo trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $z^n = w$  (con  $n$  intero maggiore di 1). Ricordiamo che proprio l'esigenza di risolvere le equazioni algebriche ci ha motivato ad introdurre i numeri complessi.

Se  $w = 0$ , naturalmente l'unica soluzione è  $z = 0$ ; se  $w \neq 0$ , risulta ancora utile usare la forma trigonometrica. Scriviamo  $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , e sia  $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  l'incognita: affinché sia  $z^n = w$  bisognerà avere

$$\begin{aligned} \rho^n &= r && \text{(uguagliando i moduli),} \\ n\vartheta &= \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} && \text{(uguagliando gli argomenti),} \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} & \text{(radice } n\text{-sima reale positiva)} \\ \vartheta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Sembra dunque che vi siano infinite scelte per  $\vartheta$ , cioè infinite soluzioni  $z$ . Però, mentre le prime  $n$  scelte di  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) forniscono  $n$  valori di  $\vartheta$  compresi fra 0 e  $2\pi$  (ossia  $\vartheta_0 = \frac{\alpha}{n}$ ,  $\vartheta_1 = \frac{\alpha+2\pi}{n}$ ,  $\dots$ ,  $\vartheta_{n-1} = \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}$ ), le scelte  $k \geq n$  e  $k \leq -1$  danno luogo a valori di  $\vartheta$  che si ottengono da quelli già trovati traslandoli di multipli interi di  $2\pi$ : infatti

$$\vartheta_n = \frac{\alpha + 2n\pi}{n} = \vartheta_0 + 2\pi, \quad \vartheta_{n+1} = \frac{\alpha + 2(n+1)\pi}{n} = \vartheta_1 + 2\pi,$$

ed in generale per  $j = 0, 1, \dots, n-1$

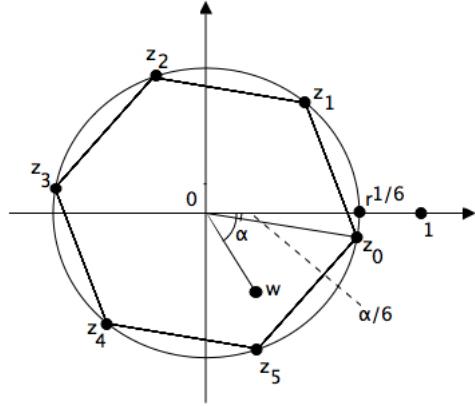
$$\vartheta_{mn+j} = \frac{\alpha + 2(mn+j)\pi}{n} = \vartheta_j + 2m\pi \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

In definitiva, le infinite scelte possibili per  $\vartheta$  forniscono solo  $n$  scelte distinte per  $z$ , e cioè

$$z_j = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\alpha + 2j\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2j\pi}{n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Quindi ogni numero complesso  $w \neq 0$  ha esattamente  $n$  radici  $n$ -sime distinte  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  che sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione  $z^n = w$ . I numeri  $z_0, \dots, z_{n-1}$  giacciono tutti sulla circonferenza di centro 0 e raggio  $|w|^{\frac{1}{n}}$ ; ciascuno forma un angolo di  $\frac{2\pi}{n}$  con il precedente, cosicché essi sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza. L'argomento del primo vertice  $z_0$  si trova dividendo per  $n$  l'argomento principale di  $w$ , cioè l'unico che sta in  $[0, 2\pi[$ .

Se, in particolare,  $w$  è reale positivo, si avrà  $\arg z_0 = \frac{1}{n} \arg w = 0$ , quindi  $z_0$  è reale positivo ed è la radice  $n$ -sima reale positiva di  $w$ . Dunque, se  $w$  è reale positivo, la sua radice  $n$ -sima reale positiva  $w^{\frac{1}{n}}$  è una delle  $n$  radici  $n$ -sime complesse di  $w$  (e tra queste ci sarà anche  $-w^{\frac{1}{n}}$  se  $n$  è pari).



## Esercizi 1.12

- Calcolare le quantità

$$(1-i)^{24}, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^{67}, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{45}, \quad \left(\frac{i+2i}{1-2i}\right)^5, \quad \frac{1+i}{|1+i|}.$$

- Quanti gradi sessagesimali misura un angolo di 1 radiante?
- Calcolare le aree del poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza di raggio 1 e di quello circoscritto alla medesima circonferenza.
- Dimostrare che:
  - $\ell(\gamma_-(v, w)) = -\ell(\gamma_+(w, v))$  per ogni  $v, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
  - $\ell(\gamma_-(1, w)) = -\ell(\gamma_+(1, \bar{w}))$  per ogni  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
  - $\ell(\gamma_+(i, w)) = \ell(\gamma_+(1, -iw))$  per ogni  $w \in \gamma_+(i, -1)$ ;
  - $\ell(\gamma_+(-1, w)) = \ell(\gamma_+(1, -w))$  per ogni  $w \in \gamma_+(-1, 1)$ .
- Completare la seguente tabella:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undefined	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	undefined	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Dimostrare le *formule di bisezione*:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Dimostrare le *formule di duplicazione*:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. (i) Dimostrare le *formule di Werner*:

$$\begin{cases} \sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \\ \sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]. \end{cases} \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Dedurre le *formule di prostaferesi*:

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

9. Provare che

$$|\cos \alpha - \cos \beta| \leq |\alpha - \beta|, \quad |\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

10. Dimostrare le relazioni

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

per tutti gli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  per i quali le formule hanno senso.

11. Dimostrare che se  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  si ha

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

12. Provare che

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

per tutti gli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  per i quali le formule hanno senso.

13. Utilizzando la formula del binomio, dimostrare che per ogni  $\vartheta \in \mathbb{R}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$\cos n\vartheta = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2h} (-1)^h \sin^{2h} \vartheta \cos^{n-2h} \vartheta,$$

$$\sin n\vartheta = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2h+1} (-1)^h \sin^{2h+1} \vartheta \cos^{n-2h-1} \vartheta,$$

ove  $[x]$  denota la *parte intera* del numero reale  $x$ , cioè

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

14. Dimostrare che

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^+.$$

**[Traccia:** usare le formule di Werner con  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = n$ .]

15. Calcolare:

$$\cos \frac{\pi}{12}, \quad \sin \frac{5\pi}{12}, \quad \tan \frac{\pi}{8}, \quad \cos \frac{5\pi}{8}, \quad \sin \frac{7\pi}{8}, \quad \tan \frac{11\pi}{12}.$$

16. (*Teorema di Carnot*) Sia **ABC** un triangolo. Detto  $\alpha$  l'angolo di vertice **A**, si provi che

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

ove  $a = |\mathbf{B} - \mathbf{C}|$ ,  $b = |\mathbf{C} - \mathbf{A}|$ ,  $c = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ .

17. (*Teorema dei seni*) Sia **ABC** un triangolo. Detti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  gli angoli ai vertici **A**, **B** e **C**, si provi che

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

ove  $a = |\mathbf{B} - \mathbf{C}|$ ,  $b = |\mathbf{C} - \mathbf{A}|$ ,  $c = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ .

18. Risolvere le equazioni:

- (i)  $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ ,
- (ii)  $\sin x + (2 + \sqrt{3}) \cos x = 1$ ,
- (iii)  $2 \sin^2 x - \sin x = 1$ ,
- (iv)  $\sin^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x = 0$ ,
- (v)  $\sin x + 3|\sin x| = 2$ ,
- (vi)  $\cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^4 x = 0$ .

19. Risolvere le disequazioni:

- (i)  $\sin x < \frac{1}{2}$ ,
- (ii)  $4 \sin x \tan x - \frac{3}{\cos x} > 0$ ,
- (iii)  $\cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,
- (iv) 
$$\begin{cases} \tan x > \sqrt{3} \\ \sin x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$
- (v)  $\frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1} > 0$ ,
- (vi)  $\sin x + (\sqrt{2} - 1) \cos x > \sqrt{2} - 1$ .

20. Determinare l'area dei triangoli di vertici:

- (i)  $(0, 0), (-2, 5), (4, 2)$ ,
- (ii)  $(1, 1), (2, 6), (-1, 3)$ .

21. Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi:

$$1+i, \quad 3-3i, \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{3}+i, \quad -1+\sqrt{3}i, \quad \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}, \quad -\frac{7}{1+i}.$$

22. Calcolare:

- (i) le radici seste di  $-1$ ;
- (ii) le radici quadrate di  $i$ ;
- (iii) le radici quarte di  $1 + \sqrt{3}i$ ;
- (iv) le radici ottave di  $-i$ .

23. Dimostrare che se  $z \in \mathbb{R}$  le radici  $n$ -sime di  $z$  sono a due a due coniugate.

24. Siano  $z_1, \dots, z_n$  le radici  $n$ -sime di  $1$  che sono diverse da  $1$ . Provare che tali numeri sono le soluzioni dell'equazione

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

25. Provare che la somma delle  $n$  radici  $n$ -sime di un qualunque numero complesso  $z$  è uguale a  $0$ .

26. Risolvere in  $\mathbb{C}$  le seguenti equazioni:

- |   |   |
|---|---|
| (i) $z^4 - 2iz^2 + 3 = 0,$                      | (ii) $z^4 = \bar{z}^3,$                 |
| (iii) $z^3 - iz\bar{z} = 0,$                    | (iv) $z z  - 2\operatorname{Re} z = 0,$ |
| (v) $ z+2  -  z-2  = 2,$                        | (vi) $z^3 = \arg z + \frac{\pi}{6},$    |
| (vii) $z z ^2 +  z \bar{z}^2 - \bar{z}z^2 = 1,$ | (viii) $z^2 = -i z  - \sqrt{2},$        |
| (ix) $ z^2 + 1 ^2 +  z^2 - 1 ^2 = 8z^2 - 6,$    | (x) $z +  z  = 3i + 2,$                 |
| (xi) $z^5 - iz^3 - z = 0,$                      | (xii) $z^6 = \arg z + \arg z^2.$        |

27. Risolvere in  $\mathbb{C}$  i seguenti sistemi:

(i) $\begin{cases}  z^2 + 1  = 1 \\ \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} z ^2, \end{cases}$	(ii) $\begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2, \end{cases}$
(iii) $\begin{cases}  z + i - 1  = 2 \\  z ^2 - 3 z  + 2 = 0, \end{cases}$	(iv) $\begin{cases} z^2\bar{w}^3 = 1 + i \\ z^4 w ^2 = 3i, \end{cases}$
(v) $\begin{cases} z^2w = i - 1 \\  z w^2 + 2z = 0, \end{cases}$	(vi) $\begin{cases} z^3\bar{w}^3 - 1 = 0 \\ z^2\bar{w} + 1 = 0. \end{cases}$

28. Si provi che se  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , se  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  e  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , allora i punti  $z_1, z_2, z_3$  sono i vertici di un triangolo equilatero. Cosa succede nel caso di quattro punti soggetti ad analoghe condizioni?

29. Provare che l'area del triangolo di vertici  $0, z, w$  è data da  $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\bar{w})$ .  
**[Traccia:** ridursi con una rotazione al caso  $\arg w = 0$ .]

30. Provare che le equazioni della forma

$$\lambda z + \overline{\lambda z} + c = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R},$$

rappresentano le rette nel piano complesso.

31. Provare che le equazioni della forma

$$|z|^2 - \lambda z - \overline{\lambda z} + c = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c < |\lambda|^2,$$

rappresentano le circonferenze nel piano complesso.

32. Siano  $a, b \in \mathbb{C}$ : disegnare il luogo dei numeri  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$|z - a| > \frac{1}{2}|z - b|.$$

33. Sia  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ . Si verifichi che  $(z - 1)(\bar{z} + 1)$  è immaginario puro e si interpreti geometricamente questo fatto.

# Capitolo 2

## Successioni

### 2.1 Limiti di successioni

Si usa il termine “successione” per indicare una sequenza interminabile di elementi presi da un certo insieme. Più precisamente:

**Definizione 2.1.1** *Sia  $X$  un insieme. Una successione a valori in  $X$  è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Gli elementi  $a(0), a(1), a(2)$ , eccetera, si dicono termini della successione e si denotano più brevemente con  $a_0, a_1, a_2$ , e così via. Nel termine generico  $a_n$  è contenuta la legge di formazione della successione. La successione  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  si denota con  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o anche semplicemente con  $\{a_n\}$ , confondendola impropriamente con l’insieme dei suoi termini.*

A noi interesseranno per lo più (ma non solo) successioni a valori reali o complessi. Molto spesso sarà utile considerare successioni definite non su tutto  $\mathbb{N}$  ma solo per tutti i numeri naturali maggiori di un intero fissato, cioè funzioni  $a : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \rightarrow X$ .

**Esempi 2.1.2** (1)  $\{\frac{1}{n}\}$  è una successione reale, definita solo per  $n \in \mathbb{N}^+$ : si ha  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/2$ ,  $a_3 = 1/3$ , ..., dunque  $a_n = 1/n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .

(2) Se  $q \in \mathbb{C}$  è un numero fissato,  $\{q^n\}$  è una successione complessa (reale se  $q \in \mathbb{R}$ ) ed i suoi termini sono  $1, q, q^2, q^3$ , eccetera. In particolare: se  $q = 1$  la successione vale costantemente 1; se  $q = -1$  la successione prende solo i valori 1 e  $-1$  alternativamente, infinite volte; se  $q = i$ , analogamente, la successione  $\{i^n\}$  assume ciclicamente i quattro valori  $1, i, -1, -i$ .

(3)  $\{n!\}$  è la successione reale 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, ...; essa cresce molto rapidamente al crescere dell’indice  $n$ .

(4) Posto  $a_n = \sum_{k=0}^n q^k$ , con  $q \in \mathbb{C}$  fissato,  $\{a_n\}$  è una successione i cui termini, come sappiamo, sono (esempio 1.6.4 (4))

$$a_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1, \\ n+1 & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

**(5)** La legge di formazione di una successione può essere data induttivamente anziché in modo esplicito: ad esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1 & \text{se } n = 0 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

è una successione definita *per ricorrenza*, ove ciascun elemento (salvo  $a_0$ ) è definito in termini del precedente; si ha

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{8}{5}, \quad a_5 = \frac{13}{8}, \quad a_6 = \frac{21}{13},$$

e possiamo calcolarne quanti vogliamo, ma non è facile determinare una legge esplicita che esprima il termine generale  $a_n$  in funzione solo di  $n$ .

A noi interesserà il comportamento di una data successione per valori molto grandi di  $n$ . A questo scopo è fondamentale la nozione di limite:

**Definizione 2.1.3** Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ , sia  $L \in \mathbb{C}$ . Diciamo che  $L$  è il limite della successione  $\{a_n\}$  al tendere di  $n$  a  $+\infty$ , oppure che la successione  $\{a_n\}$  converge a  $L$  per  $n$  che tende a  $+\infty$ , se vale la condizione seguente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > \nu.$$

Ciò significa che comunque si fissi un margine di errore  $\varepsilon > 0$ , si può trovare una soglia  $\nu$  al di là della quale per ogni indice  $n$  il corrispondente elemento  $a_n$  differisce da  $L$  (in modulo) per meno di  $\varepsilon$ . In tal caso scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow L \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

**Osservazioni 2.1.4** **(1)** Se la successione  $\{a_n\}$  è reale e  $L$  è reale, la definizione di limite non cambia di una virgola: naturalmente il modulo  $|a_n - L|$  diventa un valore assoluto.

**(2)** Nella definizione non cambia nulla se si concede alla soglia  $\nu$  di essere un numero reale anziché un numero naturale: l'importante è che per tutti gli indici  $n \in \mathbb{N}$  che sono maggiori di  $\nu$  valga la diseguaglianza  $|a_n - L| < \varepsilon$ . In particolare, non è affatto necessario scegliere il minimo  $\nu$  possibile: ciò oltretutto può complicare terribilmente i conti.

**(3)** La condizione  $|a_n - L| < \varepsilon$  è tanto più vincolante e significativa quanto più  $\varepsilon$  è piccolo; minore è  $\varepsilon$ , più saremo costretti a scegliere una soglia  $\nu$  grande. Si noti che la condizione, apparentemente meno forte,

“esiste un numero  $K > 0$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  si può trovare una soglia  $\nu$  per cui risulta  $|a_n - L| < K\varepsilon$  per ogni  $n > \nu$ ”

è equivalente a dire che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ : infatti il numero  $K\varepsilon$  è un arbitrario numero positivo esattamente come lo era  $\varepsilon$ , per cui non c'è perdita di generalità (si ricordi il lemma dell'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , lemma 1.10.1).

Nel caso di successioni *reali*, c'è anche la nozione di successione divergente a  $+\infty$  oppure  $-\infty$ :

**Definizione 2.1.5** Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che la successione  $\{a_n\}$  ha limite  $+\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , ovvero che essa diverge positivamente per  $n \rightarrow +\infty$ , se

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad a_n > M \quad \forall n > \nu.$$

Analogamente, diciamo che la successione  $\{a_n\}$  ha limite  $-\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , ovvero essa diverge negativamente per  $n \rightarrow +\infty$ , se

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad a_n < -M \quad \forall n > \nu.$$

In altre parole, la successione è divergente se, fissato un numero  $M$  arbitrariamente grande, esiste sempre una soglia  $\nu$  al di là della quale tutti i termini della successione sono ancora più grandi di  $M$  (se il limite è  $+\infty$ ), ovvero ancora più piccoli di  $-M$  (se il limite è  $-\infty$ ).

**Esempi 2.1.6** (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$ , la relazione  $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$  è verificata non appena  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Quindi la definizione è soddisfatta se si sceglie  $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ ; se si vuole  $\nu \in \mathbb{N}$ , si potrà prendere  $\nu = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-10} = 1$  (questa successione è definita per  $n \geq 11$ ). Infatti, dato  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\left| \frac{n}{n-10} - 1 \right| < \varepsilon \iff \frac{n}{n-10} - 1 < \varepsilon \iff n > 10 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

per cui basta scegliere  $\nu = 10 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ , o anche  $\nu = \frac{20}{\varepsilon}$  (purché sia  $\varepsilon \leq 1$ ).

(3) Se  $q \in \mathbb{C}$  e  $|q| < 1$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Infatti, ciò è banale se  $q = 0$ ; se  $q \neq 0$ , dato  $\varepsilon > 0$  si ha  $|q^n| = |q|^n < \varepsilon$  se e solo se  $n > \log_{|q|} \varepsilon$  (si ricordi che la funzione  $\log_{|q|}$  è decrescente essendo  $|q| < 1$ ). Se, invece,  $|q| \geq 1$  e  $q \notin [1, +\infty[$ , la successione  $\{q^n\}$  non ha limite (esercizio 2.1.7). Osserviamo però che se  $q \in \mathbb{R}$  e  $q \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

Ciò è evidente se  $q = 1$ ; se  $q > 1$  basta osservare che  $q^n > M$  se e solo se  $n > \log_q M$ , dato che la funzione  $\log_q$  stavolta è crescente. Di conseguenza, se  $q \in \mathbb{C}$  e  $|q| > 1$  allora la successione reale  $\{|q|^n\}$  diverge a  $+\infty$ .

(4) Per ogni  $q \in \mathbb{C}$  con  $|q| < 1$  si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$ . Infatti

$$\left| \sum_{k=0}^n q^k - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|},$$

quindi

$$\left| \sum_{k=0}^n q^k - \frac{1}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} < \varepsilon \iff n+1 > \log_{|q|} (\varepsilon |1-q|).$$

Ma anche senza questo calcolo esplicito, che oltretutto non è sempre possibile, si poteva osservare che, per l'esempio 2.1.6 (3), si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ; quindi esiste certamente

un  $\nu$  tale che  $|q^{n+1}| < \varepsilon|1 - q|$  per ogni  $n > \nu$ . Di conseguenza risulta, per tutti gli  $n$  superiori a quel  $\nu$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n q^k - \frac{1}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} < \varepsilon.$$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$ . Infatti, ovviamente  $n! > M$  non appena, ad esempio,  $n > M$ .

(6) Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

Infatti se  $M > 0$  risulta

$$\begin{cases} \log_b n > M & \iff n > b^M & \text{se } b > 1, \\ \log_b n < -M & \iff n > b^{-M} & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

(7) Se  $a > 0$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ . La cosa è evidente se  $a = 1$ , perché in tal caso addirittura  $|a^{1/n} - 1| = |1 - 1| = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Se  $a > 1$ , ricordando l'esempio 1.8.3 (1) abbiamo  $\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{1/n} = 1$ ; dunque, dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$1 < a^{1/\nu} < 1 + \varepsilon.$$

D'altra parte, essendo  $a > 1$  si ha  $a^{1/n} < a^{1/\nu}$  per  $n > \nu$ : dunque a maggior ragione

$$|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1 < \varepsilon \quad \forall n > \nu,$$

che è la tesi. Infine se  $0 < a < 1$  si ha  $\frac{1}{a} > 1$  e quindi, per quanto già provato, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu$  tale che

$$\left| \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} - 1 \right| = \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} - 1 < \varepsilon \quad \forall n > \nu;$$

dunque, moltiplicando per  $a^{1/n}$ ,

$$|1 - a^{1/n}| = 1 - a^{1/n} < \varepsilon \cdot a^{1/n} < \varepsilon \quad \forall n > \nu,$$

e la tesi è provata anche in questo caso.

(8) Non è chiaro a priori se la successione  $\{n^{1/n}\}$  abbia limite per  $n \rightarrow \infty$ : l'esponente tende a rimpicciolire il numero, la base tende ad accrescerlo. Osserviamo intanto che  $n^{1/n} \geq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ ; d'altra parte, se per ogni  $n \geq 2$  applichiamo la diseguaglianza delle medie (teorema 1.8.2) agli  $n$  numeri positivi  $a_1 = \dots = a_{n-2} = 1$ ,  $a_{n-1} = a_n = \sqrt{n}$ , si ottiene

$$n^{\frac{1}{n}} = \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Da qui segue che, per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , risulta

$$n^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \quad \text{purché} \quad \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

ossia purché  $n > 4/\varepsilon^2$ . In conclusione,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

**Osservazione 2.1.7** Se una certa proprietà  $p(n)$  è verificata per ogni numero naturale maggiore di una data soglia  $\nu$  (ossia, in altri termini, se essa vale per tutti i naturali salvo al più un numero finito), diremo che tale proprietà è vera *definitivamente*. Così, nell'esempio 2.1.6 (8) si ha per ogni  $\varepsilon > 0$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

in quanto, come si è visto, tale condizione è vera per tutti gli  $n > 4/\varepsilon^2$ .

Analogamente, la definizione di limite può essere riformulata come segue: si ha  $a_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  risulta  $|a_n - L| < \varepsilon$  definitivamente, e si ha  $a_n \rightarrow +\infty$  oppure  $a_n \rightarrow -\infty$  per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se per ogni  $M > 0$  risulta  $a_n > M$  definitivamente, oppure  $a_n < -M$  definitivamente.

## Successioni limitate

Un'importante classe di successioni è quella delle successioni limitate (che *non* significa “dotate di limite”!).

**Definizione 2.1.8 (i)** Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Diciamo che  $\{a_n\}$  è limitata se esiste  $M > 0$  tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Sia  $\{a_n\}$  una successione reale. Diciamo che  $\{a_n\}$  è limitata superiormente (oppure limitata inferiormente) se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{oppure} \quad a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovviamente, una successione reale è limitata se e solo se è limitata sia superiormente che inferiormente. Inoltre, ricordando che

$$\max\{|Rez|, |Imz|\} \leq |z| \leq |Rez| + |Imz| \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

deduciamo che una successione complessa  $\{a_n\}$  è limitata se e solo se le due successioni reali  $\{Rea_n\}$ ,  $\{Ima_n\}$  sono entrambe limitate.

**Proposizione 2.1.9** Ogni successione convergente è limitata; il viceversa è falso.

**Dimostrazione** Sia  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . Allora, scelto  $\varepsilon = 1$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$|a_n - L| < 1 \quad \forall n > \nu;$$

quindi se  $n > \nu$  si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|,$$

mentre se  $n = 0, 1, 2, \dots, \nu$  risulta evidentemente

$$|a_n| \leq \max\{|a_k| : k \in \mathbb{N}, k \leq \nu\}.$$

In definitiva tutti i numeri  $|a_n|$  sono non superiori alla quantità

$$M = \max\{1 + |L|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_\nu|\}.$$

La successione  $\{(-1)^n\}$  mostra che il viceversa è falso.  $\square$

Per le successioni reali divergenti si ha un risultato della stessa natura (esercizio 2.1.8).

## Proprietà algebriche dei limiti

Proviamo anzitutto l'*unicità* del limite:

**Proposizione 2.1.10** *Il limite di una successione reale o complessa, se esiste, è unico.*

**Dimostrazione** Supponiamo per assurdo che  $\{a_n\}$  converga a  $L$  ed anche a  $M$ , con  $L \neq M$ ; supponiamo  $L$  e  $M$  entrambi finiti. Fissato  $\varepsilon < \frac{1}{2}|L - M|$ , si ha per ipotesi

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{definitivamente,} \quad |a_n - M| < \varepsilon \quad \text{definitivamente;}$$

quindi, scegliendo un  $n$  che superi la maggiore delle due soglie, si ha anche

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon < |L - M|,$$

e questo è assurdo. Pertanto deve essere  $L = M$ .

Lasciamo al lettore diligente l'analisi dei casi in cui  $L$ , o  $M$ , è  $\pm\infty$ .  $\square$

Vediamo ora come si comportano i limiti rispetto alle operazioni algebriche.

**Teorema 2.1.11** *Siano  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  successioni reali o complesse. Se  $a_n \rightarrow L$  e  $b_n \rightarrow M$  per  $n \rightarrow \infty$ , con  $L$  e  $M$  finiti, allora:*

(i)  $a_n + b_n \rightarrow L + M$  per  $n \rightarrow \infty$ ;

(ii)  $a_n \cdot b_n \rightarrow L \cdot M$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Supposto inoltre  $M \neq 0$ , si ha:

(iii)  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{M}$  per  $n \rightarrow \infty$ ;

(iv)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L}{M}$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Dimostrazione (i)-(ii)** Fissato  $\varepsilon > 0$ , si ha

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{definitivamente}, \quad |b_n - M| < \varepsilon \quad \text{definitivamente};$$

quindi risulta definitivamente

$$|a_n + b_n - L - M| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon,$$

e ciò prova (i), tenuto conto dell'osservazione 2.1.4 (3). Inoltre

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &= |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LM| \leq \\ &\leq |a_n - L| \cdot |b_n| + |L| \cdot |b_n - M| < \varepsilon(|b_n| + |L|). \end{aligned}$$

D'altra parte, la successione  $\{b_n\}$ , essendo convergente, è limitata da una costante  $K > 0$ , in virtù della proposizione 2.1.9; ne segue

$$|a_n b_n - LM| < \varepsilon(K + |L|) \quad \text{definitivamente},$$

il che prova (ii), tenuto nuovamente conto dell'osservazione 2.1.4 (3).

**(iii)** Osserviamo anzitutto che  $b_n$  è definitivamente diversa da 0 essendo  $M \neq 0$ , ed anzi si ha  $|b_n| \geq C > 0$  definitivamente (esercizio 2.1.9). Quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - b_n|}{|b_n| \cdot |M|} < \frac{\varepsilon}{C|M|} \quad \text{definitivamente},$$

da cui la tesi.

**(iv)** Segue da (ii) e (iii).  $\square$

Per un analogo risultato nel caso di successioni (reali) divergenti si rimanda all'esercizio 2.1.18.

## Limiti e ordinamento

Vediamo adesso come si comportano i limiti rispetto alla struttura d'ordine di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.1.12 (di confronto)** Siano  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  successioni reali. Se  $a_n \rightarrow L$  e  $b_n \rightarrow M$  per  $n \rightarrow \infty$ , e se

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente},$$

allora si ha  $L \leq M$ .

**Dimostrazione** Supponiamo, per fissare le idee, che  $L, M \in \mathbb{R}$  e, per assurdo, che  $L > M$ ; scegliamo  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(L - M)$ . Sia  $\nu$  la soglia tale che

$$a_n \leq b_n, \quad |L - a_n| < \varepsilon, \quad |M - b_n| < \varepsilon \quad \forall n > \nu.$$

Per tali  $n$  si ha anche

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n < M + \varepsilon,$$

da cui  $0 < L - M < 2\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Ciò è assurdo, per il lemma dell'arbitrarietà di  $\varepsilon$  (lemma 1.10.1).

Il caso  $L = \pm\infty$  oppure  $M = \pm\infty$  è analogo.  $\square$

## Esercizi 2.1

1. Si provi che si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , con  $L \in \mathbb{C}$ , se e solo se risulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$ .
2. Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ . Si provi che  $\{a_n\}$  ha limite  $L \in \mathbb{C}$  se e solo se le due successioni reali  $\{\operatorname{Re} a_n\}$  e  $\{\operatorname{Im} a_n\}$  convergono entrambe, con limiti  $\operatorname{Re} L$  e  $\operatorname{Im} L$  rispettivamente.
3. Si provi che se  $a_n \rightarrow L$ , allora  $|a_n| \rightarrow |L|$ . È vero il viceversa?
4. Si provi che se  $a_n \rightarrow 0$  e  $\{b_n\}$  è limitata, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .
5. Dimostrare che se  $a_n \rightarrow L$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

È vero il viceversa?

6. Dimostrare che se  $a_n \rightarrow L$  e  $L \neq 0$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

È vero il viceversa? Che succede se  $L = 0$ ?

7. Si dimostri che se  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| \geq 1$  e  $q \neq 1$  allora la successione  $\{q^n\}$  non ha limite.
8. Provare che se  $\{a_n\}$  è una successione reale divergente, allora  $\{a_n\}$  non è limitata, ma che il viceversa è falso.
9. (*Teorema della permanenza del segno*) Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ . Provare che:

- (i) se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|a_n| \geq \delta \quad \text{definitivamente};$$

- (ii) se  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$  e se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che

$$a_n \geq \delta \quad \text{definitivamente}.$$

10. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1,$$

e dedurre che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1, \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

11. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad \forall a > 0, \quad a \neq 1,$$

e dedurre che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0 \quad \forall a > 0, \quad a \neq 1, \quad \forall b > 0.$$

12. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1.$$

13. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

14. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

15. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

[Traccia: ricordare l'esercizio 1.6.18.]

16. Calcolare, se esistono:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-2)^n + 3^n}, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + (-1)^{n+1}}.$$

17. Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ove  $a_n = 1$  se  $n$  è pari e  $a_n = 2^{-n}$  se  $n$  è dispari.

18. Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  successioni reali. Dimostrare che:

- (i) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n$  è limitata inferiormente, allora  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (ii) se  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n$  è limitata superiormente, allora  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (iii) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \geq K > 0$  definitivamente, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (iv) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \leq K < 0$  definitivamente, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (v) se  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n \geq K > 0$  definitivamente, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (vi) se  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n \leq K < 0$  definitivamente, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (vii) se  $a_n \rightarrow +\infty$  oppure  $a_n \rightarrow -\infty$ , allora  $1/a_n \rightarrow 0$ ;
- (viii) se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n \neq 0$  definitivamente, allora  $1/|a_n| \rightarrow +\infty$  (questo vale anche se  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ );
- (ix) se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$  definitivamente, allora  $1/a_n \rightarrow +\infty$ ;
- (x) se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n < 0$  definitivamente, allora  $1/a_n \rightarrow -\infty$ ;
- (xi) negli altri casi, cioè per le cosiddette *forme indeterminate* seguenti:

- (a)  $+\infty - \infty$  (per il limite di  $a_n + b_n$  quando  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \rightarrow -\infty$ ),
- (b)  $0 \cdot (\pm\infty)$  (per il limite di  $a_n \cdot b_n$  quando  $a_n \rightarrow 0$  e  $b_n \rightarrow \pm\infty$ ),
- (c)  $\frac{\infty}{\infty}$  (per il limite di  $\frac{a_n}{b_n}$  quando  $a_n \rightarrow \pm\infty$  e  $b_n \rightarrow \pm\infty$ ),
- (d)  $\frac{0}{0}$  (per il limite di  $\frac{a_n}{b_n}$  quando  $a_n \rightarrow 0$  e  $b_n \rightarrow 0$ ),

si mostri con esempi che il corrispondente limite può essere un numero reale qualunque, oppure  $\pm\infty$ , oppure può non esistere.

19. (*Teorema dei carabinieri*) Siano  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  successioni reali tali che  $a_n \leq b_n \leq c_n$  definitivamente. Si provi che se  $a_n \rightarrow L$  e  $c_n \rightarrow L$  (con  $L \in \mathbb{R}$  oppure  $L = \pm\infty$ ), allora  $b_n \rightarrow L$ .

20. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n} - \sin 3^n 8^{-\sqrt{n}} \right), & \text{(ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{1}{n}, \\ \text{(iii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right), & \text{(iv)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \text{(v)} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n}, & \text{(vi)} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n^2} n!, \\ \text{(vii)} \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n + 10^n - 11^n), & \text{(viii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2+1}} \right). \end{array}$$

21. Dimostrare che se  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a_n \rightarrow L$  e  $L > 0$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

22. Si provi che se  $a_n \rightarrow L$ ,  $L \in \mathbb{C}$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = L.$$

È vero il viceversa? Che succede se  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$  e  $L = \pm\infty$ ?

23. Si provi che se  $\{a_n\} \subseteq ]0, \infty[$  e  $a_n \rightarrow L$ , con  $L \in [0, \infty[$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} = L.$$

È vero il viceversa? Che succede se  $L = +\infty$ ?

24. Sia  $\{b_n\}$  una successione di numeri positivi tale che  $b_n \rightarrow b$ , con  $b > 0$ . Si provi che  $b_n^x \rightarrow b^x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

25. (*Teorema di Cesàro*) Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Si provi che se  $a_n \rightarrow \lambda$ , allora

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow \lambda.$$

Si estenda questo risultato al caso  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  e  $\lambda = \pm\infty$ . **[Traccia:** fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - \lambda| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ . Si osservi che, per  $n$  grande, la quantità  $\frac{1}{n} \sum_{k=\nu+1}^n a_k$  è vicina a  $\lambda$ , mentre  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^\nu a_k$  è vicino a  $0\dots$ ]

## 2.2 Serie

Le serie numeriche sono semplicemente successioni reali o complesse di tipo particolare, che però, per la loro importanza pratica e teorica, meritano una trattazione a parte. Data una successione  $\{a_n\}$  reale o complessa, andiamo a costruire una nuova successione  $\{s_n\}$  in questo modo:

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si ha dunque

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Definizione 2.2.1** *Ogni successione  $\{s_n\}$  del tipo sopra definito si chiama serie e si indica con il simbolo  $\sum a_k$  (o, più pedantemente, con  $\sum_{k=0}^\infty a_k$ , quando si voglia precisare qual è l'indice iniziale: si possono infatti considerare anche serie del tipo  $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ,  $\sum_{k=50}^\infty a_k$ ,  $\sum_{k=p}^\infty a_k$  con  $p \in \mathbb{N}$  fissato ad arbitrio). I numeri  $a_k$  si dicono termini della serie ed i numeri  $s_n$  si dicono somme parziali della serie.*

Si noti che nel definire una serie ed il simbolo che la indica non si è fatto alcun riferimento alla convergenza della successione  $\{s_n\}$ , che può benissimo non verificarsi.

**Definizione 2.2.2** *Si dice che la serie  $\sum a_k$  è convergente ad un numero (reale o complesso)  $L$  se la successione delle sue somme parziali  $\{s_n\}$  è convergente ed ha limite  $L$ ; in tal caso il numero  $L$  si dice somma della serie e si scrive*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^\infty a_k.$$

Come si vede, c'è una certa ambiguità, perché lo stesso simbolo  $\sum_{k=0}^\infty a_k$  viene usato sia per indicare la serie (convergente o no), sia per indicarne la somma (se convergente). Purtroppo si tratta di una notazione di uso ormai consolidato, e non possiamo evitare di adottarla; sarà comunque chiaro di volta in volta dal contesto del discorso in quale dei due sensi va inteso il simbolo  $\sum_{k=0}^\infty a_k$ .

**Osservazione 2.2.3** Una serie è dunque una particolare successione, costruita a partire da un'altra successione assegnata. Però il punto di vista si può anche capovolgere: ogni successione  $\{a_n\}$  può essere vista come una serie  $\sum b_k$ , con  $\{b_n\}$  opportuna. Basta infatti definire

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_{n+1} = a_{n+1} - a_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ed è facile verificare che allora

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè  $\{a_n\}$  coincide con la serie  $\sum b_k$ .

Successioni e serie sono dunque concetti del tutto equivalenti. Tuttavia le serie si presentano spesso in modo naturale nelle applicazioni (geometriche, fisiche, meccaniche, ecc.); inoltre la teoria delle serie è per molti aspetti più maneggevole ed articolata di quella delle successioni. Ad esempio, vi sono svariati criteri di uso molto semplice che garantiscono la convergenza delle serie, i cui analoghi per le successioni non sono altrettanto comodi dal punto di vista pratico.

Nel caso di serie reali si può dare anche la nozione di serie divergente:

**Definizione 2.2.4** *Diciamo che la serie reale  $\sum b_k$  è divergente positivamente, oppure divergente negativamente, se le sue somme parziali  $s_n$  formano una successione che tende a  $+\infty$ , oppure a  $-\infty$ , per  $n \rightarrow \infty$ . In tal caso si scrive*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty, \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty.$$

**Definizione 2.2.5** *Diciamo che la serie  $\sum a_k$  (reale o complessa) è indeterminata se la successione delle sue somme parziali  $\{s_n\}$  non ha limite per  $n \rightarrow \infty$ .*

**Esempi 2.2.6 (1)** (*Serie geometrica*) Sia  $q \in \mathbb{C}$ . Se  $|q| < 1$ , allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

(esempio 2.1.6 (4)). Se  $|q| \geq 1$  e  $q \notin \mathbb{R}$ , la serie è indeterminata in virtù dell'esercizio 2.1.7, mentre se  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \geq 1$  la serie è reale e diverge positivamente.

**(2)** Risulta  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ . Infatti

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Questo è un esempio di *serie telescopica*: sono telescopiche le serie che si presentano nella forma  $\sum(b_k - b_{k+1})$ , cosicché  $s_n = b_0 - b_{n+1}$ . Ciò in effetti accade sempre, tenuto conto dell'osservazione 2.2.3, ma si parla di serie telescopiche soltanto quando questo modo di vederle porta ad una concreta semplificazione della situazione.

**(3)** (*Serie armonica*) La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  si chiama serie armonica perché ciascun termine (salvo il primo) è la *media armonica* del predecessore e del successore (la media armonica di due numeri positivi  $a, b$  è il numero  $\frac{2}{1/a+1/b}$ ; si veda anche l'esercizio 1.8.4). Osservando che i termini  $\frac{1}{k}$  sono positivi e decrescenti, si ha

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue che la serie armonica non può essere convergente, perchè in tal caso esisterebbe  $L \in \mathbb{R}$  tale che  $|s_n - L| < \frac{1}{4}$  definitivamente; ma allora, scelto  $n$  abbastanza grande, dedurremmo

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} - s_n \leq |s_{2n} - L| + |L - s_n| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

il che è assurdo. In effetti la stima precedente mostra che per ogni fissato  $m \in \mathbb{N}$  e per ogni  $n \geq 2^m$  si ha

$$\begin{aligned} s_n \geq s_{2^m} &= s_1 + (s_2 - s_1) + (s_4 - s_2) + (s_8 - s_4) + \cdots + (s_{2^m} - s_{2^{m-1}}) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \geq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

e ciò prova che  $s_n \rightarrow \infty$  (definizione 2.2.4), ossia che la serie armonica è divergente positivamente.

**Osservazione 2.2.7** Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  una serie convergente con somma  $L$ . Allora sottraendo  $s_m$  ad entrambi i membri dell'uguaglianza  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$  si ottiene che per ogni  $m \in \mathbb{N}$  la serie  $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$  è convergente e

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = L - s_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

In particolare, facendo tendere  $m$  a  $+\infty$ , si deduce che per ogni serie  $\sum a_k$  convergente si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k = 0.$$

La serie  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  si chiama *resto  $m$ -simo* della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

Vediamo ora una condizione necessaria per la convergenza di una serie.

**Proposizione 2.2.8** *Se  $\sum a_k$  è una serie convergente, allora i suoi termini  $a_n$  formano una successione infinitesima, ossia risulta  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ ; il viceversa è falso.*

**Dimostrazione** Se  $L$  è la somma della serie, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $|s_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n > \nu$ . Quindi

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - L| + |L - s_{n-1}| < 2\varepsilon \quad \forall n > \nu + 1,$$

cioè  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

La serie armonica (esempio 2.2.6 (3)) è una serie che non converge, benché i suoi termini  $\frac{1}{n}$  formino una successione infinitesima.  $\square$

**Osservazione 2.2.9** L'analogo della proposizione precedente per le successioni si può enunciare nel modo seguente (vedere esercizio 2.1.5): se  $\{a_n\}$  è una successione convergente, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+1}) = 0,$$

ma il viceversa è falso, come mostra la successione  $\{\sqrt{n}\}$ .

## Esercizi 2.2

1. Provare che se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sono serie convergenti, anche la serie  $\sum(a_n + b_n)$  è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n;$$

si provi anche che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  la serie  $\sum(\lambda a_n)$  è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Si generalizzino questi enunciati, per quanto possibile, al caso di serie reali divergenti.

2. (*Criterio del confronto*) Siano  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  serie reali tali che  $0 \leq a_n \leq b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i) Si provi che se  $\sum b_n$  converge, allora  $\sum a_n$  converge e  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ; in quale caso vale l'uguaglianza?
- (ii) Si provi che se  $\sum a_n$  diverge, allora  $\sum b_n$  diverge.

3. Sia  $\sum a_n$  una serie a termini reali non negativi. Si dimostri che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty.$$

4. Sia  $\sum a_n$  una serie a termini reali non negativi. Si dimostri che se  $\sum a_n$  è convergente, allora  $\sum(a_n)^p$  è convergente per ogni  $p \geq 1$ .

5. Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ . Si provi che se  $\sum a_{2m}$  e  $\sum a_{2m+1}$  sono convergenti, allora  $\sum a_n$  è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1};$$

è vero il viceversa?

6. Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ . Si provi che se  $\sum |a_n|^2$  è convergente, allora  $\sum \frac{a_n}{n}$  è convergente, ma che il viceversa è falso.

7. (i) Si provi che ogni numero razionale ha uno sviluppo decimale periodico(eventualmente di periodo nullo).  
(ii) Viceversa, sia  $x$  un numero reale con sviluppo decimale periodico, il cui antiperiodo sia un intero  $a = a_1 \dots a_p$  di  $p$  cifre e il cui periodo sia un intero  $b = b_1 \dots b_q$  con  $q$  cifre. Si provi che

$$x - [x] = \frac{a}{10^p} + \frac{b}{10^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{qn}};$$

dedurre che  $x$  è un numero razionale, e che  $x$  si può scrivere sotto forma di una frazione (la *frazione generatrice* di  $x$ ) il cui denominatore è fatto da  $q$  cifre 9 seguite da  $p$  cifre 0, e il cui numeratore è la differenza fra l'intero  $a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q$  e l'intero  $a_1 \dots a_p$ .

## 2.3 Successioni monotone

Un'importante classe di successioni *reali* è quella delle successioni monotòne (e non monòtöne!).

**Definizione 2.3.1** Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che  $\{a_n\}$  è monotona crescente se si ha

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diciamo che  $\{a_n\}$  è monotona decrescente se si ha

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diciamo che  $\{a_n\}$  è strettamente crescente o strettamente decrescente se la corrispondente disuguaglianza è stretta per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . In entrambi i casi precedenti, la successione si dirà strettamente monotona. Infine diciamo che  $\{a_n\}$  è definitivamente monotona (crescente o decrescente) se la corrispondente disuguaglianza è vera soltanto da una certa soglia  $\nu$  in poi.

**Esempi 2.3.2** (1)  $\{\frac{1}{n}\}$ ,  $\{-n\}$  sono successioni strettamente decrescenti.

(2)  $\{(n+1)!\}$ ,  $\{\frac{n-1}{n}\}$  sono successioni strettamente crescenti.

(3)  $\{(1 + \frac{x}{n})^n\}$  è una successione crescente per ogni  $x \geq -1$  (strettamente, se  $x \neq 0$ ), ed è definitivamente crescente per  $x < -1$  (esempio 1.8.3 (2)).

(4) Le somme parziali di una serie a termini di segno costante formano una successione monotona: crescente se il segno è positivo, decrescente se è negativo.

Il comportamento all'infinito delle successioni monotone è particolarmente semplice. Si ha infatti:

**Proposizione 2.3.3** Sia  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$  una successione monotona. Allora essa ha limite e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in ]-\infty, +\infty] & \text{se } \{a_n\} \text{ è crescente,} \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in [-\infty, +\infty[ & \text{se } \{a_n\} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

In particolare, una successione monotona è convergente se e solo se è limitata.

**Dimostrazione** Proveremo la tesi solamente nel caso in cui  $\{a_n\}$  è decrescente, lasciando l'altro caso al lettore. Sia  $L$  l'estremo inferiore della successione  $\{a_n\}$ , e supponiamo dapprima che  $L \in \mathbb{R}$ : allora, come sappiamo (proposizione 1.5.10), si ha

$$L \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad L \leq a_\nu < L + \varepsilon.$$

Poiché  $\{a_n\}$  è decrescente, deduciamo

$$L \leq a_n \leq a_\nu < L + \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

da cui segue che  $a_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Se invece  $L = -\infty$ , allora  $\{a_n\}$  non ha minoranti e quindi

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad a_\nu < -M;$$

per la decrescenza di  $\{a_n\}$  segue che

$$a_n \leq a_\nu < -M \quad \forall n \geq \nu,$$

cioè  $a_n \rightarrow -\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

L'ultima proprietà è banale: se  $\{a_n\}$  è monotona e limitata, allora ha estremo superiore ed estremo inferiore finiti, e quindi ha limite finito coincidente con uno dei due, cioè è convergente; viceversa, ogni successione convergente è limitata per la proposizione 2.1.9 (si noti che questo è vero anche se la successione non è monotona).  $\square$

Tornando alle serie, la proposizione precedente ci dice che per provare la convergenza delle serie a termini positivi è sufficiente far vedere che le somme parziali sono limitate superiormente: e questo è spesso abbastanza facile.

**Esempi 2.3.4 (1) (Serie armonica generalizzata)** Per  $\alpha > 0$  consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Se  $\alpha = 1$ , essa si riduce alla serie armonica e, come si è visto nell'esempio 2.2.6 (3), è divergente (positivamente). Dunque per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$  si ha a maggior ragione

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

cioè la serie diverge positivamente. Se  $\alpha = 2$ , tenuto conto dell'esempio 2.2.6 (2), si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} \rightarrow 2 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e per il teorema di confronto (teorema 2.1.12) la serie converge ed ha somma inferiore a 2. Se  $\alpha > 2$ , a maggior ragione,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

e, per confronto con il caso  $\alpha = 2$ , la serie converge (con somma minore di 2).

Resta il caso  $\alpha \in ]1, 2[$ : analogamente a quanto fatto per la serie armonica, andiamo a stimare la differenza  $s_{2n} - s_n$ : si ha

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n}{(n+1)^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

quindi, fissato  $m \in \mathbb{N}^+$  e scelto  $n = 2^m$ , la diseguaglianza precedente implica

$$\begin{aligned} s_n = s_{2^m} &= 1 + \sum_{k=1}^m (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1} + 1)^\alpha} < \\ &< 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} < 1 + \frac{1}{1 - 2^{-(\alpha-1)}}. \end{aligned}$$

Dato che  $m \leq 2^m$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , si conclude che

$$s_m \leq s_{2^m} < 1 + \frac{1}{1 - 2^{-(\alpha-1)}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

e pertanto la serie è convergente. In definitiva, la serie armonica generalizzata ha il seguente comportamento:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

**(2)** Consideriamo l'insieme  $P$  dei *numeri primi*, ossia di quei numeri naturali  $p$  che sono privi di divisori interi diversi da  $p$  e da 1. Ordiniamo  $P$  in modo crescente: dunque  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$  e  $p_n < p_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Vogliamo dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che la serie sia convergente: dunque le sue somme parziali  $s_n$  formano una successione convergente. Esiste allora un indice  $k \in \mathbb{N}$  tale che

$$s_m - s_k = \sum_{n=k+1}^m \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2} \quad \forall m > k.$$

Fissiamo ora un arbitrario  $m > k$  e consideriamo l'insieme

$$\begin{aligned} E_m &= \{h \in \mathbb{N}^+ : h \leq m, h \text{ non è divisibile per alcun } p_n \text{ con } n > k\} = \\ &= \{h \in \mathbb{N} : h \leq m, h \text{ è divisibile al più per } p_1, \dots, p_k\}. \end{aligned}$$

Ad esempio, se  $k = 4$  e se scegliamo  $m = 15$ , si ha

$$\begin{aligned} E_{15} &= \{h \in \mathbb{N} : h \leq 15, h \text{ è divisibile al più per } 2, 3, 5, 7\} = \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}. \end{aligned}$$

Indichiamo con  $c_m$  il numero degli elementi di  $E_m$ . Vogliamo dare una stima separata di  $c_m$  e di  $m - c_m$ . A questo scopo ricordiamo che ogni intero  $n > 1$  è fattorizzabile in modo unico nella forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s},$$

ove  $s \in \mathbb{N}^+$ ,  $p_1, \dots, p_s \in P$  mentre  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}$  (e qualcuno di questi può essere nullo). Se qualcuno degli  $\alpha_j$  è dispari, separiamo un fattore  $p_j$  dagli altri: in questo modo si ottiene

$$n = \left( p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s} \right) \cdot \left( p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_s^{b_s} \right),$$

ove  $\beta_1, \dots, \beta_s$  sono numeri naturali pari e  $b_1, \dots, b_s$  valgono 0 oppure 1. Per esempio, possiamo scrivere

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0) \cdot (2 \cdot 3^0 \cdot 5) = 6^2 \cdot 10;$$

in questo caso dunque  $s = 3$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 1$ .

Stimiamo  $c_m$ : se  $n \in E_m$ , allora con la decomposizione sopra descritta otteniamo  $n = u^2 \cdot v$ , dove  $u = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$  e  $v = p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$ . Variando  $n$ , abbiamo al più  $2^k$  scelte per  $v$  (in quanto  $b_1, \dots, b_k$  variano in  $\{0, 1\}$ ), mentre le scelte di  $u$  saranno al più  $[\sqrt{m}]$  (dato che  $u$  è un intero tale che  $u^2 \leq n \leq m$ ). Dunque

$$c_m \leq 2^k \sqrt{m}.$$

D'altra parte, se  $n \leq m$  e  $n \notin E_m$ , allora  $n$  è divisibile per qualche  $p_j$  con  $k < j \leq m$ , ove si usa il fatto che, ovviamente,  $m \leq p_m$  e quindi nessun  $p_j$  con  $j > m$  può essere divisore di  $n$ . Ma fra 1 e  $m$  il totale dei numeri  $n$  divisibili per un fissato  $p_j$ , con  $1 < j \leq m$ , non può essere maggiore di  $m/p_j$ : quindi il totale dei numeri  $n$  con  $1 < n \leq m$  che sono divisibili per almeno uno dei  $p_j$ , ossia  $m - c_m$ , deve verificare

$$m - c_m \leq \sum_{j=k+1}^m \frac{m}{p_j} = m \sum_{j=k+1}^m \frac{1}{p_j} < \frac{m}{2}.$$

Otteniamo così  $m/2 \leq c_m$ , da cui, ricordando la stima fatta per  $c_m$ ,

$$\frac{m}{2} \leq 2^k \sqrt{m},$$

ovvero

$$\sqrt{m} \leq 2^{k+1},$$

ed infine

$$m \leq 2^{2k+2}.$$

Questa relazione è però assurda, perché  $k$  è assegnato ma  $m$  è arbitrario e quindi può essere scelto maggiore di  $2^{2k+2}$ . Ciò prova che la serie  $\sum 1/p_n$  è divergente.

**(3) (Serie esponenziale)** Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

che è convergente in quanto

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \rightarrow 3 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Questa serie è un caso particolare della *serie esponenziale*  $\sum \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , che verrà analizzata in seguito.

Stabiliamo adesso un'importante relazione che ci darà modo di definire il fondamentale numero reale  $e$ .

**Proposizione 2.3.5** *Risulta*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Dimostrazione** Notiamo che il limite a destra esiste perché la successione  $(1 + \frac{1}{n})^n$  è crescente (esempio 1.8.3 (2)). Inoltre si ha, utilizzando la formula di Newton (teorema 1.7.1),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

quindi

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \end{aligned}$$

da cui, per il teorema di confronto (teorema 2.1.12),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

D'altra parte, per ogni fissato  $m \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \right] = \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}; \end{aligned}$$

aumentando nell'ultimo termine il numero degli addendi da  $m$  (che è fisso) a  $n$  (che è più grande, dato che sta tendendo a  $+\infty$ ) si ottiene

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

da cui finalmente, facendo tendere anche  $m$  a  $+\infty$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

il che prova l'uguaglianza richiesta.  $\square$

**Definizione 2.3.6** Indichiamo con  $e$  il numero reale definito dalla proposizione 2.3.5, ossia poniamo

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Il numero  $e$  si chiama *numero di Nepero* e riveste un'importanza fondamentale in tutta la matematica. Esso è un irrazionale (esercizio 2.3.1) ed è compreso fra 2 e 3: infatti

$$2 = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 3.$$

Il logaritmo in base  $e$  si dice *logaritmo naturale* e si scrive indifferentemente  $\log_e x = \log x = \ln x$ ; noi useremo di preferenza la scrittura  $\ln x$ .

## Esercizi 2.3

1. Provare che

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

e dedurne che  $e$  è irrazionale.

[**Traccia:** se fosse  $e = p/q$  con  $p, q \in \mathbb{N}^+$  primi tra loro, avremmo per ogni  $m \in \mathbb{N}$  la diseguaglianza  $0 < \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!}$ ; moltiplicando per  $q \cdot m!$  e scegliendo  $m > q$ , si deduca un assurdo.]

2. Dimostrare che se  $b > 1$  si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_b n} = +\infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_b n)^{\alpha}} < +\infty \quad \forall \alpha > 1.$$

[**Traccia:** stimare  $s_{2n} - s_n$  per  $n = 2^k$ , analogamente a quanto fatto per la serie armonica e per la serie armonica generalizzata negli esempi 2.2.6 (3) e 2.3.4 (1).]

3. Sia  $\{a_n\}$  una successione decrescente di numeri positivi. Provare che se  $\sum a_n$  è convergente, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$ , ma che il viceversa è falso.
4. Si provi che le successioni  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  e  $(1 - \frac{1}{n+1})^n$  sono decrescenti e se ne calcolino i limiti.
5. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

6. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n(1 + n^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

7. Dimostrare le disuguaglianze

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

8. (*Identità di Abel*) Siano  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$  numeri complessi. Posto  $s_k = \sum_{h=1}^k a_h$ , si provi che

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n s_k (b_{k+1} - b_k).$$

9. Determinare il comportamento delle seguenti serie:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), & \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}, & \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, \\ \text{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)^2}, & \text{(v)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, & \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}, \\ \text{(vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[7 + 3(-1)^n]^n}{2^{3n}}, & \text{(viii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+n^3}}, & \text{(ix)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{1+n^3}, \\ \text{(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n(1+n^2)}\right)^{\sqrt{n}}, & \text{(xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^n, & \text{(xii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{40^{\frac{1}{n}}}. \end{array}$$

10. Si verifichi l'identità

$$\frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1} \left( \frac{n!}{(n+k-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq 2,$$

e se ne deduca che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{(k-1)(k-1)!} \quad \forall k \geq 2,$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{n}} = 1 + \frac{1}{k-1} \quad \forall k \geq 2.$$

11. Si provi che se  $a > 1$  la serie  $\sum(a^{1/n^2} - 1)$  è convergente mentre la serie  $\sum(a^{1/n} - 1)$  è divergente. Che succede se  $0 < a \leq 1$ ?

[**Traccia:** si utilizzi l'identità  $(a^{1/k} - 1) \cdot \sum_{h=0}^{k-1} a^{h/k} = a - 1$ .]

12. Sia  $\{a_n\}$  definita per ricorrenza dalle relazioni

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\lambda + a_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ove  $\lambda$  è un fissato numero positivo. Si provi che  $\{a_n\}$  è decrescente e se ne calcoli il limite; si deduca che la serie  $\sum a_n$  è convergente se  $\lambda > 1$  e divergente se  $0 < \lambda \leq 1$ .

[Traccia: si trovi un'espressione esplicita per  $a_n$ .]

13. Sia  $\{F_n\}$  la successione dei *numeri di Fibonacci*, definiti da

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

si determini il comportamento della serie  $\sum \frac{1}{F_n}$ .

14. Si provi che risulta

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

## 2.4 Criteri di convergenza per le serie

Come si è già accennato in precedenza, spesso è facile accettare la convergenza di una serie senza conoscerne la somma. Ciò è reso possibile da alcuni comodi criteri che forniscono condizioni sufficienti per la convergenza delle serie. I più semplici di questi criteri riguardano le serie reali a termini di segno costante, ad esempio positivi; il più semplice in assoluto è il criterio del confronto, una versione del quale si trova nell'esercizio 2.2.2.

**Proposizione 2.4.1 (criterio del confronto)** *Siano  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  due serie reali, e supponiamo che risulti*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente;}$$

*in tal caso, se  $\sum b_n$  converge allora  $\sum a_n$  converge, mentre se  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$  allora  $\sum b_n$  diverge a  $+\infty$ .*

**Dimostrazione** Sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $0 \leq a_n \leq b_n$  per ogni  $n \geq \nu$ : allora

$$0 \leq \sum_{n=m}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n \quad \forall m \geq \nu,$$

cosicché i due enunciati seguono facilmente tenendo conto dell'osservazione 2.2.7.  $\square$

Si ha poi:

**Proposizione 2.4.2 (criterio del rapporto)** *Sia  $\sum a_n$  una serie con termini definitivamente positivi. Se esiste  $\lambda \in ]0, 1[$  tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda \quad \text{definitivamente,}$$

*allora la serie  $\sum a_n$  è convergente. Il viceversa è falso.*

**Dimostrazione** Sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > 0$  per ogni  $n \geq \nu$  ed inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda \quad \forall n \geq \nu;$$

allora si ha

$$a_n = a_\nu \cdot \prod_{k=\nu}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_\nu \cdot \prod_{k=\nu}^{n-1} \lambda = a_\nu \cdot \lambda^{n-\nu} \quad \forall n \geq \nu,$$

cioè

$$a_n \leq \frac{a_\nu}{\lambda^\nu} \cdot \lambda^n \quad \forall n \geq \nu.$$

Dal criterio del confronto, essendo  $\lambda \in ]0, 1[$ , segue che  $\sum a_n$  è convergente.

Viceversa, la serie  $\sum 1/n^2$  è una serie convergente, e malgrado ciò non verifica le ipotesi del criterio del rapporto: infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e quindi non esiste alcun  $\lambda \in ]0, 1[$  che possa soddisfare l'ipotesi richiesta.  $\square$

**Osservazione 2.4.3** Si noti che nell'ipotesi del criterio del rapporto non basta richiedere che sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{definitivamente:}$$

infatti questa condizione è meno restrittiva ed esistono serie divergenti che la soddisfano: per esempio la serie armonica  $\sum \frac{1}{n}$ .

**Esempi 2.4.4 (1)** La serie  $\sum \frac{n!}{n^n}$  è convergente: infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

cosicché si ha definitivamente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{e} + \varepsilon < 1$$

pur di scegliere  $0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{e}$ .

**(2)** La serie  $\sum n^\alpha b^n$  è convergente per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  e per ogni  $b \in [0, 1[$ : infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha \cdot b \rightarrow b \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e quindi si ha definitivamente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b + \varepsilon < 1$$

pur di scegliere  $0 < \varepsilon < 1 - b$ .

(3) La serie esponenziale  $\sum \frac{x^n}{n!}$  è convergente per ogni  $x > 0$ : infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

cosicché per qualunque  $\lambda \in ]0, 1[$  si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda \quad \text{definitivamente.}$$

(4) Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k}^{-1/2}$$

è a termini positivi, ma l'uso del criterio del rapporto non dà informazioni sul suo comportamento: infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{n+1}{n+k+1} \right)^{1/2} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

quindi la serie potrebbe convergere o divergere. Tuttavia se  $k \geq 3$  si ha

$$a_n = \sqrt[k]{\frac{k!n!}{(n+k)!}} \leq \sqrt[k]{\frac{k!}{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)}} \leq \frac{\sqrt{k!}}{n^{3/2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

quindi la serie converge per il criterio del confronto; se invece  $k = 2$ , e a maggior ragione se  $k = 0$  o  $k = 1$ , si vede subito che la serie diverge per confronto con la serie armonica.

**Proposizione 2.4.5 (criterio della radice)** *Sia  $\sum a_n$  una serie a termini non negativi. Se esiste  $\lambda \in ]0, 1[$  tale che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda \quad \text{definitivamente,}$$

*allora la serie  $\sum a_n$  è convergente; se invece esistono infiniti valori di  $n$  per i quali*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

*allora la serie  $\sum a_n$  è positivamente divergente.*

**Dimostrazione** Dalla prima ipotesi segue che si ha

$$a_n \leq \lambda^n \quad \text{definitivamente,}$$

quindi  $\sum a_n$  converge per il criterio del confronto, essendo  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Se invece vale la seconda ipotesi, allora si ha  $a_n \geq 1$  per infiniti valori di  $n$ : quindi la serie  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$ .  $\square$

**Osservazione 2.4.6** Si noti che, come per il criterio del rapporto, nell'ipotesi del criterio della radice non basta richiedere che sia

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \text{definitivamente,}$$

in quanto questa condizione meno restrittiva è verificata da alcune serie divergenti: per esempio la serie armonica  $\sum \frac{1}{n}$ .

**Esempi 2.4.7** (1) La serie  $\sum \frac{3^n}{4^n - 1}$  è convergente, perché

$$\left( \frac{3^n}{4^n - 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{1 - 4^{-n}} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3}{4} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

cosicché, scelto  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , si ha

$$\left( \frac{3^n}{4^n - 1} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{3}{4} + \varepsilon < 1 \quad \text{definitivamente.}$$

(2) La serie  $\sum (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$  è convergente: infatti, essendo  $(1 - \frac{1}{n})^n$  crescente,

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \leq \frac{1}{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(3) La serie  $\sum \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos n\frac{\pi}{2} \right)^n$  è a termini positivi e diverge a  $+\infty$  perché il termine generale  $a_n$  è

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \left(\frac{5}{4}\right)^n & \text{se } n \text{ è multiplo di 4,} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari ma non è multiplo di 4,} \end{cases}$$

cosicché  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  per infiniti indici  $n$ .

(4) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n(1 + n^2)} \right)^{\sqrt{n}}$$

è a termini positivi ma il criterio della radice non dà informazioni sulla convergenza, in quanto

$$\sqrt[n]{a_n} = \left( \frac{n^2 - 1}{n(1 + n^2)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

(esercizio 2.3.6); quindi per ogni  $\lambda \in ]0, 1[$  si ha definitivamente

$$\lambda < \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Tuttavia, in virtù del criterio del confronto la serie è convergente poiché

$$\left( \frac{n^2 - 1}{n(1 + n^2)} \right)^{\sqrt{n}} \leq \left( \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 4.$$

Il criterio di convergenza di uso più facile e frequente è il seguente:

**Proposizione 2.4.8 (criterio del confronto asintotico)** Siano  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  due serie a termini definitivamente positivi, e supponiamo che esista

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty].$$

Allora:

- (i) se  $L \in ]0, +\infty[$ , le due serie hanno lo stesso comportamento;
- (ii) se  $L = 0$ , la convergenza di  $\sum b_n$  implica la convergenza di  $\sum a_n$ ;
- (iii) Se  $L = +\infty$ , la divergenza di  $\sum b_n$  implica la divergenza di  $\sum a_n$ .

**Dimostrazione** (i) Sia  $L > 0$  e sia  $\varepsilon \in ]0, L[$ . Allora si ha

$$0 < L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

quindi

$$b_n(L - \varepsilon) < a_n < b_n(L + \varepsilon) \quad \text{definitivamente,}$$

e la tesi segue dal criterio del confronto.

(ii) Fissato  $\varepsilon > 0$  si ha definitivamente  $a_n \leq \varepsilon b_n$ , da cui la tesi.

(iii) Fissato  $M > 0$ , si ha definitivamente  $M b_n < a_n$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esempi 2.4.9 (1)** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}}$$

converge perché confrontandola con  $\sum n^{-3/2}$ , che è convergente, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{2}.$$

(2) La serie  $\sum \frac{1}{n}(\cos n^2 + \sqrt{n})$  è divergente a  $+\infty$  perché confrontandola con  $\sum n^{-1/2}$ , che è divergente, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n^2 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

(3) La serie  $\sum n^{-3+(-1)^n}$  è convergente perché a confronto con  $\sum n^{-3/2}$  dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3-(-1)^n}} = 0.$$

(4) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}},$$

ove  $\alpha \geq 1$ . Notiamo che si ha, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} < \frac{1}{n} \quad \text{definitivamente}$$

in quanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\varepsilon}}{(\ln n)^{\alpha}} = +\infty$  (esercizio 2.1.11). Quindi siamo in un caso intermedio fra  $\sum \frac{1}{n}$  (divergente) e  $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$  (convergente), ed il criterio del confronto asintotico non dà alcun aiuto. Tuttavia le somme parziali della serie verificano

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leq \frac{n}{(n+1)(\ln(n+1))^{\alpha}} \leq \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}} \quad \forall n \geq 2,$$

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \geq \frac{n}{2n(\ln(2n))^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\ln(2n))^\alpha} \quad \forall n \geq 2;$$

di conseguenza, con lo stesso ragionamento usato per la serie armonica e per la serie armonica generalizzata (esempi 2.2.6 (3) e 2.3.4 (1)), se  $\alpha \leq 1$  si ha per ogni  $m \geq 2$  e per ogni  $n \geq 2^m$

$$\begin{aligned} s_n \geq s_{2^m} &= \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \sum_{k=2}^m (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^m \frac{1}{(\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^\alpha}, \end{aligned}$$

mentre se  $\alpha > 1$  si ha per ogni  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n} &= \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \sum_{k=2}^n (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(\ln 2^{k-1})^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \left( \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Dal comportamento della serie armonica generalizzata si deduce che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1, \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

## Esercizi 2.4

1. Determinare il comportamento delle seguenti serie:

$$\begin{array}{lll} (\text{i}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}, & (\text{ii}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}}, & (\text{iii}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}, \\ (\text{iv}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}, & (\text{v}) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right), & (\text{vi}) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \\ (\text{vii}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-\sqrt{n}}, & (\text{viii}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{(\ln n)^n}, & (\text{ix}) \sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{1}{n}, \\ (\text{x}) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!} n^{-\sqrt{n}}, & (\text{xi}) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} (\sqrt{n})^{-n}, & (\text{xii}) \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n!-n^n}. \end{array}$$

2. (*Criterio di Raabe*) Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi. Si provi che se esiste  $K > 1$  tale che

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

allora la serie converge, mentre se risulta

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

allora la serie diverge a  $+\infty$ .

[Traccia: nel primo caso, posto  $d = K - 1$ , si mostri che

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{d}(na_n - (n+1)a_{n+1}),$$

e che quindi le somme parziali  $\sum_{k=1}^n a_{k+1}$  non superano  $\frac{a_1}{d}$ ; nel secondo caso si verifichi che  $a_{n+1} \geq \frac{a_1}{n+1}$ .]

3. Si determini il comportamento delle seguenti serie:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)} \right)^2.$$

[Traccia: utilizzare il criterio di Raabe.]

4. Verificare che il criterio di Raabe implica la divergenza della serie armonica.  
 5. Si provi che esiste un numero reale  $\gamma \in ]0, 1[$ , detto *costante di Eulero*, tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma.$$

[Traccia: utilizzare il risultato dell'esercizio 2.3.7.]

6. Quanti addendi occorre sommare affinché risulti

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 100?$$

7. Siano  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  i numeri naturali che, scritti in cifre decimali, non contengono la cifra 0. Provare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 90.$$

[Traccia: si determini quanti sono i numeri di  $n$  cifre fra le quali non c'è lo 0, e si osservi che essi sono tutti maggiori di  $10^{n-1} \dots$ ]

8. Si provi che

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e di conseguenza si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \cos \frac{x}{2^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{2}a_n, a_n - 1\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ove  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (i) Si provi che  $\{a_n\}$  è monotona e infinitesima per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Si determini il comportamento della serie  $\sum a_n$  al variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ .

10. Discutere la convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\ln n}}{n}$  al variare del parametro  $a > 0$ .

11. Provare che

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1, \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

12. Sia  $\{a_n\} \subseteq ]0, +\infty[$ . Si provi che

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

ma che il viceversa è falso; se ne deduca che il criterio della radice implica il criterio del rapporto, ma non vale il viceversa.

## 2.5 Convergenza assoluta e non

Per le serie a termini complessi, o a termini reali di segno non costante, i criteri di convergenza sin qui visti non sono applicabili. L'unico criterio generale, rozzo ma efficace, è quello della convergenza assoluta.

**Definizione 2.5.1** *Sia  $\sum a_n$  una serie a termini reali o complessi. Diciamo che la serie è assolutamente convergente se la serie  $\sum |a_n|$  è convergente.*

Si noti che per verificare la convergenza assoluta di una serie i criteri visti in precedenza sono tutti validi perché  $\sum |a_n|$  è una serie a termini positivi. Naturalmente, come suggerisce il loro nome, le serie assolutamente convergenti sono convergenti: vale infatti il risultato seguente:

**Proposizione 2.5.2** *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

**Dimostrazione** Sia  $\sum |a_n|$  convergente, e supponiamo dapprima che gli  $a_n$  siano tutti reali. Poniamo

$$b_n = |a_n| - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

chiaramente si ha  $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$  per ogni  $n$ , cosicché  $\sum b_n$  è convergente per il criterio del confronto. Essendo

$$a_n = |a_n| - b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la serie  $\sum a_n$  converge perché differenza di serie convergenti (esercizio 2.2.1). Supponiamo adesso che gli  $a_n$  siano numeri complessi. Dalle relazioni

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

segue, per il criterio del confronto, che le due serie reali  $\sum \operatorname{Re} a_n$  e  $\sum \operatorname{Im} a_n$  sono assolutamente convergenti; quindi, per quanto già dimostrato, esse convergono. Dunque, applicando alle somme parziali  $\sum_{k=0}^n a_k$  il risultato dell'esercizio 2.1.2, si ottiene che la serie  $\sum a_n = \sum \operatorname{Re} a_n + i \sum \operatorname{Im} a_n$  è convergente.  $\square$

Come vedremo fra poco, il viceversa della proposizione precedente è falso: esistono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti.

Per le serie a termini reali di segno alterno c'è uno speciale criterio di convergenza.

**Proposizione 2.5.3 (criterio di Leibniz)** *Sia  $\{a_n\}$  una successione reale decrescente ed infinitesima. Allora la serie  $\sum (-1)^n a_n$  è convergente e si ha*

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

**Dimostrazione** Siano  $s_n$  le somme parziali della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ; se  $n$  è pari,  $n = 2m$ , dalla decrescenza di  $\{a_n\}$  segue che

$$s_{2m+2} = s_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq s_{2m} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_0,$$

mentre se  $n$  è dispari,  $n = 2m + 1$ , si ha analogamente

$$s_{2m+1} = s_{2m-1} + a_{2m} - a_{2m+1} \geq s_{2m-1} \geq \cdots \geq s_3 \geq s_1.$$

Inoltre per la positività degli  $a_n$

$$s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \leq s_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N};$$

in definitiva

$$s_1 \leq s_{2m-1} \leq s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2m-2} \leq s_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

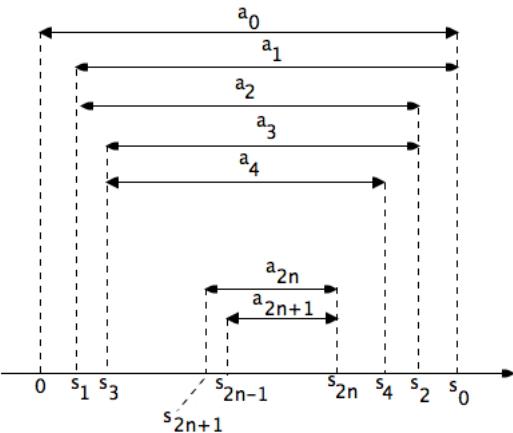
Dunque, le due successioni  $\{s_{2m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$  e  $\{s_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  sono monotone (crescente la prima e decrescente la seconda) e limitate; quindi convergono entrambe e, posto

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1}, \quad P = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m},$$

dal teorema di confronto (teorema 2.1.12) si ha

$$s_1 \leq D \leq P \leq s_0.$$

D'altra parte, essendo  $s_{2m+1} - s_{2m} = -a_{2m+1}$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , dall'ipotesi che  $\{a_n\}$  è



infinitesima segue, al limite per  $m \rightarrow \infty$ , che  $D = P$ . Poniamo allora  $S = D = P$ , e proviamo che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  ha somma  $S$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$|s_{2m} - S| < \varepsilon \quad \text{definitivamente}, \quad |s_{2m+1} - S| < \varepsilon \quad \text{definitivamente};$$

quindi se  $n$  è abbastanza grande, pari o dispari che sia, risulterà  $|s_n - S| < \varepsilon$ , e pertanto  $s_n \rightarrow S$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Notiamo poi che si ha

$$s_{2m+1} \leq S \leq s_{2m+2} \leq s_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

da cui se  $n$  è pari,  $n = 2m$ ,

$$0 \leq s_n - S = s_{2m} - S \leq s_{2m} - s_{2m+1} = a_{2m+1} = a_{n+1},$$

mentre se  $n$  è dispari,  $n = 2m + 1$ ,

$$0 \leq S - s_n = S - s_{2m+1} \leq s_{2m+2} - s_{2m+1} = a_{2m+2} = a_{n+1};$$

in ogni caso

$$|s_n - S| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.5.4** Il criterio di Leibniz è ancora vero per le serie che ne verificano le ipotesi soltanto definitivamente: ad esempio, la serie potrebbe essere a termini di segno alterno solo da un certo indice in poi, ed i termini stessi, in valore assoluto, potrebbero essere decrescenti solo da un certo altro indice in poi. In questo caso, però, la stima  $|s_n - S| \leq a_{n+1}$  va opportunamente modificata.

**Esempi 2.5.5 (1)** La serie  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  è convergente perché  $\{\frac{1}{n}\}$  è una successione decrescente ed infinitesima. Questo è un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente (dato che la serie dei valori assoluti è la serie armonica).

**(2)** La serie  $\sum (-1)^n n^{100} 2^{-n}$  è convergente perché  $\{n^{100} 2^{-n}\}$  è infinitesima e definitivamente decrescente (esercizio 2.5.6).

**(3)** La serie  $\sum (-1)^n \frac{10^n - n}{10^{n+1}}$  non converge: il suo termine generale non è infinitesimo.

**(4)** La serie  $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$  converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ : infatti è assolutamente convergente, per confronto con la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

Vi è un altro importante criterio di convergenza non assoluta, il quale generalizza il criterio di Leibniz; esso discende dall'identità di Abel (esercizio 2.3.8), che enunciamo qui in forma lievemente più generale:

**Proposizione 2.5.6 (Identità di Abel)** *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali o complessi. Fissati  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $q \leq p$  e posto  $B_N = \sum_{n=q}^N b_n$ , risulta*

$$\sum_{n=p}^N a_n b_n = a_N B_N - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \quad \forall N > p,$$

ove  $B_{p-1} = 0$  nel caso in cui  $q = p$ .

**Dimostrazione** Basta osservare che

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^N a_n b_n &= \sum_{n=p}^N a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=p}^N a_n B_n - \sum_{n=p-1}^{N-1} a_{n+1} B_n = \\ &= a_N B_N - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n. \quad \square\end{aligned}$$

Un'immediata conseguenza di questa identità è il seguente

**Lemma 2.5.7 (di Abel)** *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali. Posto  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , supponiamo che*

$$\text{(i)} |B_N| \leq K \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \text{(ii)} a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Allora la serie  $\sum a_n b_n$  converge e vale la stima

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n \right| \leq 2K a_N \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

**Dimostrazione** Per  $M > N$  poniamo  $s_{MN} = \sum_{n=N}^M a_n b_n$ . Dall'identità di Abel otteniamo

$$s_{MN} = a_M B_M - a_N B_{N-1} + \sum_{n=N}^{M-1} (a_n - a_{n+1}) B_n;$$

poiché  $|a_M B_M| \leq K a_M \rightarrow 0$  per  $M \rightarrow \infty$ , ed inoltre

$$\sum_{n=N}^{\infty} |(a_n - a_{n+1}) B_n| = \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) |B_n| \leq K \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = K a_N,$$

al limite per  $M \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n \right| \leq |a_N B_{N-1}| + K a_N \leq 2K a_N,$$

e dunque si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.5.8** Alla stessa conclusione si arriva quando  $|B_N| \leq M$  per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e, in luogo della decrescenza di  $\{a_n\}$ , si fa l'ipotesi che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$  sia convergente.

Più in generale, vale questo risultato:

**Proposizione 2.5.9** *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali non negativi, con  $\{a_n\}$  decrescente e infinitesima. Posto  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n < \infty.$$

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Dalla positività di  $a_N B_N$  e dall'identità di Abel

$$\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N = \sum_{n=0}^N a_n b_n \quad \forall N \in \mathbb{N}^+,$$

da cui la tesi per confronto.

( $\Leftarrow$ ) Dall'identità sopra scritta segue che  $a_N B_N$ , essendo differenza di due somme di termini positivi una delle quali convergente, ha limite  $\lambda \in [0, \infty]$ ; se proviamo che  $\lambda \in \mathbb{R}$  seguirà la tesi. A questo scopo basta osservare che

$$a_N B_N = B_N \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \leq \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n;$$

ma per ipotesi l'ultimo membro è infinitesimo per  $N \rightarrow \infty$ , e dunque  $\lambda = 0$ .  $\square$

**Osservazione 2.5.10** Si noti che dalla dimostrazione precedente segue addirittura l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n, \quad \text{ove } B_n = \sum_{k=1}^n b_k,$$

per ogni successione reale decrescente e infinitesima  $\{a_n\}$  e per ogni successione non negativa  $\{b_n\}$ .

Il lemma di Abel si può applicare, in particolare, a serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

supponendo naturalmente che  $\{a_n\}$  sia una successione reale, decrescente e infinitesima. Infatti le somme di funzioni trigonometriche hanno la proprietà di essere limitate per  $0 < |t| \leq \pi$ : risulta in effetti

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \cos nt \right| &= \left| \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N e^{int} \right| \leq \left| \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{2 - 2 \cos(N+1)t}{2 - 2 \cos t}} = \left| \frac{\sin \frac{N+1}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

e similmente

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nt \right| = \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N e^{int} \right| \leq \left| e^{it} \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \right| \leq \sqrt{\frac{1 - \cos Nt}{1 - \cos t}} = \left| \frac{\sin \frac{N}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}.$$

**Esempio 2.5.11** Consideriamo la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ , ove  $z$  è un parametro complesso: utilizzando il criterio del rapporto si vede subito che essa converge assolutamente quando  $|z| < 1$ , mentre certamente non converge, non essendo infinitesimo il suo termine generale, quando  $|z| > 1$ . Quando  $|z| = 1$  non vi è convergenza assoluta, ma la serie potrebbe convergere in certi punti: ciò è vero per  $z = -1$ , come sappiamo dall'esempio 2.5.5 (1), mentre non è vero per  $z = 1$ . Cosa succede per gli altri  $z$  di modulo unitario? Consideriamo le somme parziali

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

ove  $z \in \mathbb{C}$  e  $|z| = 1$ . Utilizziamo nuovamente l'identità di Abel: scegliamo

$$a_k = z^k, \quad b_k = \frac{1}{k},$$

ed osserviamo che se  $z \neq 1$  si ha

$$\sigma_k = \sum_{h=1}^k z^h = \frac{z(1-z^k)}{1-z}, \quad |\sigma_k| \leq \frac{2}{|1-z|} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+;$$

quindi la successione  $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$  è limitata. Sostituendo nell'identità di Abel otteniamo per  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ ,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{z^n}{n} = \frac{\sigma_n}{n+1} - \sum_{k=1}^n \sigma_k \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{\sigma_n}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{k(k+1)}.$$

Il primo addendo nell'ultimo membro tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$ , in virtù della limitatezza delle  $\sigma_k$ ; il secondo addendo è la somma parziale di una serie assolutamente convergente, per confronto con la serie  $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ . Se ne conclude che le somme parziali  $s_n$  formano una successione convergente, e in definitiva la serie  $\sum \frac{z^n}{n}$  converge per ogni  $z$  di modulo unitario, ad eccezione del punto  $z = 1$ .

Quando nessun criterio di convergenza è applicabile, non rimane che tentare uno studio diretto della serie e delle sue somme parziali, con il quale, in certi casi, si riesce a determinarne il comportamento. Consideriamo ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n},$$

che non è assolutamente convergente. Essa non è a segni alterni: infatti si ha  $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$  (esercizio 1.6.13), per cui la parità dell'esponente di  $-1$  cambia quando si somma un intero dispari e non cambia quando si somma un intero pari. Il risultato è che la sequenza dei segni è  $-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots$

Per studiare il comportamento della serie, analizziamone direttamente le somme parziali:

se  $N$  è pari,  $N = 2m$ , si ha (dato che gli interi  $\frac{2m(2m+1)}{2} = 2m^2 + m$  e  $\frac{(2m-1)2m}{2} = 2m^2 - m$  hanno la stessa parità di  $m$ )

$$\begin{aligned}s_{2m} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n} = \\&= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^m}{2m-1} + \frac{(-1)^m}{2m} = \\&= \sum_{h=1}^m (-1)^h \left( \frac{1}{2h-1} - \frac{1}{2h} \right).\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione è la somma parziale  $m$ -sima di una serie che verifica le ipotesi del criterio di Leibniz e quindi è convergente. Perciò la successione  $\{s_{2m}\}$  converge ad un numero reale  $S$ . Se ora  $N$  è dispari,  $N = 2m + 1$ , si ha

$$s_{2m+1} = s_{2m} + \frac{(-1)^{\frac{(2m+1)(2m+2)}{2}}}{2m+1} \rightarrow S \quad \text{per } m \rightarrow \infty;$$

quindi  $\{s_{2m+1}\}$  converge anch'essa a  $S$ . Se ne deduce, come nella dimostrazione del criterio di Leibniz, che l'intera successione  $\{s_n\}$  converge a  $S$ , e che quindi la serie data è convergente.

## Esercizi 2.5

1. Determinare il comportamento delle seguenti serie:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1}, & \text{(ii)} \sum_{n=-5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 101}, & \text{(iii)} \sum_{n=-47}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \sin n}, \\ \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/7}}, & \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1), & \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}, \\ \text{(vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}, & \text{(viii)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\sin n))^n, & \text{(ix)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sin(n+1)}{n^2 + 1} \right)^n. \end{array}$$

2. Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  convergono, e per quali  $x \in \mathbb{R}$  convergono assolutamente, le seguenti serie:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, & \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}, & \text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^n, \\ \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}, & \text{(v)} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n e^{-nx}, & \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{2\sqrt{n}}, \\ \text{(vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1/n}}{n^{1+1/n}}, & \text{(viii)} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-\sqrt{n}}, & \text{(ix)} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right), \\ \text{(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{n(3n)!}, & \text{(xi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 (4x)^n}{2\sqrt{n!}}, & \text{(xii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{3x}{n^2 + 1}. \end{array}$$

3. Quanti addendi occorre sommare per approssimare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

con un errore minore di  $\frac{1}{100}$ ?

4. Provare che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$  è convergente e calcolarne la somma.

5. Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la serie

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^\alpha} + \cdots$$

è convergente?

6. Si provi che la successione  $\{n^\alpha \beta^{-n}\}$  è definitivamente decrescente per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta > 1$ .

7. Sia  $x$  un numero reale. Si provi che:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx \iff x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**[Traccia:** si supponga che  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$  esista: usando la formula di duplicazione per il seno si mostri dapprima che  $L = 0$  oppure  $L = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; poi, usando la formula di addizione per  $\sin(n+1)x$ , si deduca che se  $L = 0$  allora  $x$  è multiplo di  $\pi$ , mentre se  $L \neq 0$  allora  $\cos x = \frac{1}{2}$ : da qui si ricavi un assurdo.]

8. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Provare che  $\{a_n\}$  è crescente e limitata e calcolarne il limite  $L$ .
- (ii) Provare che la serie  $\sum(L - a_n)^2$  è convergente e determinarne la somma.
- (iii) Discutere il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $\{a_n\}$  quando il valore di  $a_0$  è un numero  $\alpha > 0$  qualsiasi, anziché 0.

9. Descrivere il comportamento delle seguenti serie:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n}, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{2n+1}, \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + in}{n^2 - in}.$$

10. Stabilire il comportamento della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$  sul bordo del cerchio di convergenza.

**[Traccia:** utilizzare il procedimento dell'esempio 2.5.5 (6).]

## 2.6 Successioni di Cauchy

Un'importante proprietà delle successioni reali o complesse, strettamente legata alla nozione di limite, è quella espressa dalla definizione che segue.

**Definizione 2.6.1** *Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Diciamo che  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy se vale la condizione seguente:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > \nu.$$

Come si vede, la condizione di Cauchy è molto vicina alla definizione di successione convergente: invece che chiedere ai numeri  $a_n$  di essere definitivamente vicini al limite  $L$ , si chiede loro di avvicinarsi gli uni agli altri (sempre definitivamente). Ma il legame con la nozione di limite è strettissimo; infatti:

**Proposizione 2.6.2** *Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Allora  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy se e solo se essa è convergente.*

**Dimostrazione** Se  $\{a_n\}$  converge al numero complesso  $L$  allora, per definizione,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \nu.$$

Quindi per ogni  $n, m > \nu$  si ha

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e quindi vale la condizione di Cauchy. Viceversa, supponiamo che valga la condizione di Cauchy: allora, scelto  $\varepsilon = 2^{-k}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , risulta

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \nu_k \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_m| < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq \nu_k,$$

e non è restrittivo supporre che  $\nu_k > \nu_{k-1}$  per ogni  $k \geq 1$ : basta eventualmente sostituire la  $k$ -sima soglia  $\nu_k$  con la soglia  $\nu'_k = 1 + \max\{\nu_j : 0 \leq j \leq k\}$ . In particolare, avremo

$$|a_{\nu_{k+1}} - a_{\nu_k}| < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza la serie  $\sum(a_{\nu_{h+1}} - a_{\nu_h})$  è assolutamente convergente; pertanto

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\nu_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ a_{\nu_0} + \sum_{h=0}^{k-1} (a_{\nu_{h+1}} - a_{\nu_h}) \right] = a_{\nu_0} + \sum_{h=0}^{\infty} (a_{\nu_{h+1}} - a_{\nu_h}) = L;$$

in altre parole, la sottosequenza  $\{a_{\nu_k}\}$ , ottenuta da  $\{a_n\}$  prendendo solo gli indici  $n$  della forma  $\nu_k$  e scartando tutti gli altri, è convergente.

Proviamo adesso che l'intera successione  $\{a_n\}$  converge a  $L$ : fissato  $\varepsilon > 0$ , e scelto  $k$  in modo che risulti  $|a_{\nu_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  ed anche  $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ , dalla condizione di Cauchy segue che

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{\nu_k}| + |a_{\nu_k} - L| < 2^{-k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > \nu_k,$$

da cui la tesi.  $\square$

**Osservazioni 2.6.3** (1) Nel caso di una serie  $\sum a_n$  di numeri reali o complessi, la condizione di Cauchy si applica alle sue somme parziali ed equivale, per quanto visto, alla convergenza della serie. Essa ha la forma

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq \nu,$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq \nu, \quad \forall p \in \mathbb{N}^+.$$

(2) L'equivalenza tra la condizione di Cauchy e la convergenza è una proprietà legata all'insieme ambiente: è vera per successioni in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C}$ , ma non è vera in generale. Ad esempio, se ci limitiamo all'ambiente dei numeri razionali, ci sono successioni  $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$  le quali sono di Cauchy, ma non convergono in  $\mathbb{Q}$ . (Naturalmente ciò non toglie che esse abbiano limite in  $\mathbb{R}$ !) Un facile esempio è la successione  $(1 + \frac{1}{n})^n$ , che converge al numero reale  $e$ , il quale non è razionale (esercizio 2.3.1).

## Esercizi 2.6

1. Si provi che ogni successione di Cauchy è limitata, ma che il viceversa è falso.
2. Si provi che se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente ad un certo valore  $L \in \mathbb{C}$ , allora l'intera successione ha limite  $L$ .
3. Data una successione reale  $\{a_n\}$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo  $L_k = \sup_{n \geq k} a_n$  e  $\ell_k = \inf_{n \geq k} a_n$ . Provare che:
  - (i)  $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è decrescente,  $\{\ell_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è crescente, e  $-\infty \leq \ell_h \leq L_k \leq +\infty$  per ogni  $h, k \in \mathbb{N}$ .
  - (ii) Posto  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k$  e  $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_k$ , si ha  $-\infty \leq \ell \leq L \leq +\infty$ ; i numeri  $L$  e  $\ell$  sono chiamati *massimo limite* e *minimo limite* della successione  $\{a_n\}$ ; si scrive  $L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\ell = \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , o anche  $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\ell = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
  - (iii) Si ha  $L = \ell$  se e solo se esiste  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , e in tal caso  $\lambda = L = \ell$ ;
  - (iv)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = r \in \mathbb{R}$  se e solo se
    - (a) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n < r + \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ ,
    - (b) per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $r - \varepsilon < a_n$  per infiniti numeri  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (v)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \rho \in \mathbb{R}$  se e solo se
    - (a) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > \rho - \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ ,
    - (b) per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $\rho + \varepsilon > a_n$  per infiniti numeri  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Provare che da ogni successione reale  $\{a_n\}$  si possono estrarre due sottosuccessioni che tendono rispettivamente al massimo limite e al minimo limite di  $\{a_n\}$ .

## 2.7 Serie di potenze

Una *serie di potenze* è una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ove  $\{a_n\}$  è una arbitraria successione reale o complessa (fissata) e  $z$  è un parametro complesso (variabile). Quindi per ogni scelta di  $z \in \mathbb{C}$  si ha una serie numerica che potrà convergere oppure no; la somma della serie sarà dunque una *funzione di  $z$* , definita sull'insieme dei numeri  $z$  tali che la serie è convergente. Le somme parziali

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

sono quindi *polinomi* nella variabile  $z$  (cioè combinazioni lineari finite di *monomi*, vale a dire di potenze di  $z$ ). I numeri  $a_k$  si dicono *coefficienti* della serie di potenze.

**Osservazione 2.7.1** Quando  $z = 0$ , il primo termine della serie di potenze,  $a_0 \cdot 0^0$ , non ha senso; per  $z \neq 0$  esso è  $a_0 \cdot 1 = a_0$ . Allora *conveniamo* di porre  $a_0 z^0 = a_0$  anche quando  $z = 0$ ; avremo quindi, *per definizione*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Chiaramente allora *ogni* serie di potenze converge quando  $z = 0$ , con somma  $a_0$ . Il nostro obiettivo è trovare condizioni che implichino la convergenza della serie di potenze in altri punti  $z \neq 0$ , e caratterizzare l'insieme di tali  $z$ .

**Osservazione 2.7.2** Più in generale si possono considerare serie di potenze della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con  $z_0 \in \mathbb{C}$  fissato; ma con il cambiamento di variabile  $y = z - z_0$  ci si riconduce immediatamente al caso in cui  $z_0 = 0$ , e quindi basta considerare questo caso.

L'ambito naturale delle serie di potenze è il campo complesso; ciò non toglie che talvolta sia interessante considerare serie di potenze reali, cioè di variabile reale: per queste ultime verrà usata la variabile  $x$  al posto della  $z$ , scrivendole nella forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

**Esempi 2.7.3 (1)** La *serie geometrica*  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  è una serie di potenze (ove  $a_n = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ) che converge assolutamente per  $|z| < 1$  con somma  $\frac{1}{1-z}$  e non converge per  $|z| \geq 1$ .

(2) Ogni polinomio  $\sum_{n=0}^N a_n z^n$  è una serie di potenze in cui  $a_n = 0$  per ogni  $n > N$ , e ovviamente tale serie converge per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

(3) La serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  converge assolutamente per ogni  $z \in \mathbb{C}$  grazie al criterio del rapporto; calcoleremo la sua somma fra breve.

(4) La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$  converge per  $z = 0$  e non converge per alcun  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

(5) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  converge per tutti gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $|z| \leq 1$  e  $z \neq 1$ , mentre non converge per  $z = 1$  e per  $|z| > 1$  (esempio 2.5.5 (6)).

Vediamo qualche criterio di convergenza.

**Proposizione 2.7.4** Se i termini  $a_n z^n$  di una serie di potenze sono limitati per  $|z| = R$ , ossia esiste  $K > 0$  per cui risulta

$$|a_n| R^n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

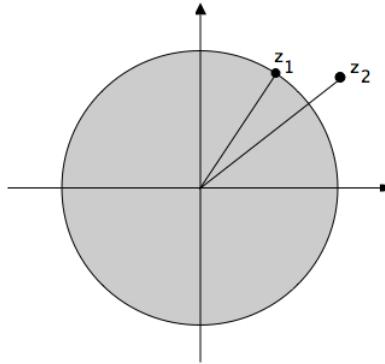
allora  $\sum a_n z^n$  è assolutamente convergente in ogni punto  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| < R$ .

**Dimostrazione** Se  $|z| < R$  possiamo scrivere

$$|a_n z^n| = |a_n| R^n \left( \frac{|z|}{R} \right)^n \leq K \left| \frac{z}{R} \right|^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui la tesi per confronto con la serie geometrica di ragione  $\frac{|z|}{R} < 1$ .  $\square$

**Corollario 2.7.5** Se una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge in un punto  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , essa converge assolutamente in ogni punto  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| < |z_1|$ ; se la serie non converge in un punto  $z_2 \in \mathbb{C}$ , essa non converge (ed anzi la serie dei moduli diverge a  $+\infty$ ) in ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > |z_2|$ .



**Dimostrazione** La prima parte dell'enunciato segue dalla proposizione precedente, perché, per ipotesi, la successione  $a_n z_1^n$  è infinitesima e quindi limitata. Se poi la serie convergesse in un punto  $z$  con  $|z| > |z_2|$ , per la parte già dimostrata avremmo la convergenza assoluta anche nel punto  $z_2$ , il che è assurdo.  $\square$

**Esempi 2.7.6** (1) I termini della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} z^n$  sono limitati per  $|z| = 1$ . Quindi la serie converge assolutamente per  $|z| < 1$ . D'altra parte essa non può convergere per  $|z| \geq 1$  perché il termine generale non è infinitesimo.

(2) La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ , pur non avendo i termini limitati per  $|z| = 1$ , è assolutamente convergente per  $|z| < 1$ , come mostra il criterio del rapporto, mentre non converge per  $|z| \geq 1$ .

I risultati e gli esempi precedenti fanno pensare che l'insieme dei numeri  $z \in \mathbb{C}$  tali che la serie  $\sum a_n z^n$  è convergente somigli ad un cerchio di centro l'origine, e motivano la seguente

**Definizione 2.7.7** Il raggio di convergenza di una serie di potenze  $\sum a_n z^n$  è il numero (appartenente a  $[0, +\infty]$ )

$$R = \sup \left\{ |z| : z \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ è convergente} \right\}.$$

Il cerchio di convergenza della serie è il cerchio di centro 0 e raggio pari al raggio di convergenza:

$$B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Si noti che  $B_\infty = \mathbb{C}$  e  $B_0 = \emptyset$ . Se la serie è reale, si parla di intervallo di convergenza  $] -R, R[$ ; risulta ovviamente  $] -R, R[ = B_R \cap \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.7.8** Sia  $R$  il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum a_n z^n$ . Allora:

- (i) se  $R = 0$ , la serie converge solo per  $z = 0$ ;
- (ii) se  $R = +\infty$ , la serie converge assolutamente per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ;
- (iii) se  $0 < R < +\infty$ , la serie converge assolutamente per ogni  $z \in B_R$  e non converge per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > R$ ;
- (iv) nulla si può dire in generale sulla convergenza della serie nei punti  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = R$ .

**Dimostrazione** (i) Se la serie convergesse in  $z \neq 0$  avremmo  $R = 0 < |z|$ , contro la definizione di raggio di convergenza.

(ii) Sia

$$A = \left\{ |z| : z \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ è convergente} \right\},$$

cosicché  $\sup A = R = +\infty$ . Sia  $z \in \mathbb{C}$ ; poiché  $|z|$  non è un maggiorante di  $A$ , esiste  $z_1 \in \mathbb{C}$  tale che  $|z_1| > |z|$  e  $|z_1| \in A$ , ossia  $\sum a_n z_1^n$  è convergente. Dal corollario 2.7.5 segue che  $\sum |a_n z^n|$  è convergente, cioè la tesi.

(iii) Sia  $A$  l'insieme sopra definito. Fissiamo  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| < R$ ; poiché  $|z|$  non è un maggiorante di  $A$ , esiste  $z_1 \in \mathbb{C}$  tale che  $|z| < |z_1| < R$  e  $|z_1| \in A$ , ossia  $\sum a_n z_1^n$  è convergente. Dal corollario 2.7.5 segue che  $\sum |a_n z^n|$  è convergente.

Fissiamo ora  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > R$ : se la serie convergesse nel punto  $z$ , avremmo  $z \in A$  e quindi  $|z| \leq R$ , il che è assurdo.

(iv) L'ultima affermazione è provata dai seguenti esempi: le tre serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

hanno tutte raggio di convergenza 1; tuttavia:

- $\sum z^n$  non converge in alcun punto  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ ,

- $\sum \frac{z^n}{n^2}$  converge assolutamente in tutti gli  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ ,
- $\sum \frac{z^n}{n}$  converge (non assolutamente) in ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ , salvo che in  $z = 1$  (esempio 2.5.11).  $\square$

Come si determina il raggio di convergenza di una serie di potenze? Spesso è utile il seguente criterio:

**Proposizione 2.7.9** *Sia  $\sum a_n z^n$  una serie di potenze. Se esiste il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

*allora il raggio di convergenza della serie è*

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } L = 0 \\ 1/L & \text{se } 0 < L < \infty \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

**Dimostrazione** Sia, al solito,  $A = \{|z| : z \in \mathbb{C} \text{ e } \sum a_n z^n \text{ è convergente}\}$ . Utilizziamo il criterio della radice: per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \rightarrow L |z|.$$

Dunque se  $L = 0$  la serie è assolutamente convergente per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , cioè  $A = [0, +\infty[$  e pertanto  $R = +\infty$ . Se  $L = +\infty$ , la serie non converge per nessun  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , quindi  $A = \{0\}$  e  $R = 0$ . Se  $0 < L < +\infty$ , la serie è assolutamente convergente per gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $|z| < \frac{1}{L}$ , mentre non converge per gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $|z| > \frac{1}{L}$ ; la prima asserzione dice che  $[0, 1/L] \subseteq A$ , la seconda dice che  $A \cap ]1/L, \infty[ = \emptyset$ . Perciò  $[0, 1/L] \subseteq A \subseteq [0, 1/L]$ , ossia  $R = 1/L$ .  $\square$

La più generale versione della proposizione 2.7.9 è esposta nell'esercizio 2.7.1.

**Esempi 2.7.10 (1)** La serie  $\sum n^\alpha z^n$  ha raggio di convergenza 1 qualunque sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ : infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

**(2)** Se  $b > 0$ , la serie  $\sum (bz)^n$  ha raggio di convergenza  $1/b$ : infatti ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^n} = b.$$

**(3)** Per calcolare il raggio di convergenza della serie  $\sum \frac{(nz)^n}{n!}$  il criterio precedente è poco utile, perché richiede di calcolare il non facile limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Utilizziamo invece il criterio del rapporto: dato che (definizione 2.3.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n! |z|^{n+1}}{(n+1)! n^n |z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n |z| = e |z|,$$

avremo che la serie converge assolutamente per tutti gli  $z \in \mathbb{C}$  per cui risulta  $e|z| < 1$ , mentre non potrà convergere, essendo il suo termine generale definitivamente crescente in modulo, per gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $e|z| > 1$ . Se ne deduce che  $R = 1/e$ .

Si noti che dall'esercizio 2.4.12 segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} :$$

si confronti questo risultato con la stima dell'esercizio 1.6.18.

## La serie esponenziale

Come sappiamo, la serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  converge assolutamente in ogni punto  $z \in \mathbb{C}$ ; ci proponiamo di calcolarne la somma. Ricordiamo che se  $z = 1$  la somma della serie è, per definizione, il numero  $e$ .

**Teorema 2.7.11** *Per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  si ha:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

In particolare risulta

$$\cos y = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h}}{(2h)!}, \quad \sin y = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + i \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + i \frac{y}{n+x}\right)^n. \end{aligned}$$

**1º passo:** calcoliamo il limite della successione reale  $\{(1 + \frac{x}{n})^n\}$  per un arbitrario  $x \in \mathbb{R}$ .

Come sappiamo, tale successione è crescente non appena  $n > |x|$  (esempio 1.8.3 (2)). È chiaro che se  $x = 0$  la successione ha limite 1. Supponiamo  $x > 0$  e poniamo

$$k_n = \left[ \frac{n}{x} \right], \quad n \in \mathbb{N};$$

chiaramente  $k_n \leq k_{n+1}$  e  $k_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . Possiamo scrivere

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[ \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x} \right]^x,$$

e osservando che  $k_n \leq n/x < k_n + 1$ , deduciamo

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema dei carabinieri, ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x} = e;$$

dall'esercizio 2.1.24 segue allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x} \right]^x = e^x \quad \forall x > 0.$$

Sia ora  $x < 0$ . Possiamo scrivere

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[ \left(1 - \frac{1}{n/|x|}\right)^{n/|x|} \right]^{|x|},$$

e ponendo stavolta  $k_n = \left[\frac{n}{|x|}\right]$  si ha

$$\left(1 - \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} < \left(1 - \frac{1}{n/|x|}\right)^{n/|x|} < \left(1 - \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n/|x|}\right)^{n/|x|} = \frac{1}{e}$$

e, per l'esercizio 2.1.24,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{n/|x|}\right)^{n/|x|} \right]^{|x|} = \left(\frac{1}{e}\right)^{|x|} = e^x \quad \forall x < 0.$$

In definitiva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**2º passo:** calcoliamo il limite della successione complessa

$$b_n = \left(1 + i \frac{y}{n+x}\right)^n.$$

Poniamo

$$c_n = 1 + i \frac{y}{n+x} = |c_n|(\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n)$$

ove  $\alpha_n \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , dato che la parte reale di  $c_n$  è positiva. Allora dalla formula di de Moivre (paragrafo 1.12) si ottiene

$$b_n = |c_n|^n (\cos n\alpha_n + i \sin n\alpha_n).$$

Valutiamo il modulo di  $b_n$ , cioè  $|c_n|^n$ : si ha per  $n$  sufficientemente grande (in modo che  $n+x \geq n/2$ )

$$\begin{aligned} 1 \leq |b_n| &= \left(1 + \frac{y^2}{(n+x)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{y^2}{(n/2)^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\left(1 + \frac{4y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n}}\right]^{\frac{1}{2n}} \leq \left(e^{4y^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned}$$

e per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^n = 1.$$

Valutiamo ora l'argomento di  $b_n$ , cioè  $n\alpha_n$ : anzitutto, dato che

$$|c_n| \cos \alpha_n = 1, \quad |c_n| \sin \alpha_n = \frac{y}{n+x},$$

si ha  $\tan \alpha_n = \frac{y}{n+x} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Notiamo adesso che dalla proposizione 1.12.17 segue che

$$\cos x \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \quad \forall x \in ]-\pi/2, \pi/2[ \setminus \{0\};$$

inoltre ricordiamo che (esercizio 1.12.9)

$$|\cos x - 1| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal fatto che  $\tan \alpha_n$  è infinitesima si ricava allora

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \cos \alpha_n \rightarrow 1, \quad \frac{\alpha_n}{\tan \alpha_n} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e di conseguenza

$$n\alpha_n = (n \tan \alpha_n) \cdot \frac{\alpha_n}{\tan \alpha_n} = \frac{ny}{n+x} \cdot \frac{\alpha_n}{\tan \alpha_n} \rightarrow y \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

da cui finalmente

$$\cos n\alpha_n + i \sin n\alpha_n \rightarrow \cos y + i \sin y \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Pertanto si conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^n (\cos n\alpha_n + i \sin n\alpha_n) = \cos y + i \sin y.$$

Dai primi due passi della dimostrazione deduciamo che

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z (\cos y + i \sin y).$$

**3º passo:** mostriamo che la somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  coincide col precedente limite.

Ripeteremo, con qualche modifica, la dimostrazione della proposizione 2.3.5. Fissiamo  $m \in \mathbb{N}$ : allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Quindi se  $z \in \mathbb{C}$  possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^m \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}.$$

D'altra parte se  $n > m$  si ha, per la formula del binomio (teorema 1.7.1),

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k},$$

quindi per  $n > m$  si deduce

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} \frac{|z|^k}{n^k} = \\ &= \sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!}, \end{aligned}$$

pertanto quando  $n \rightarrow \infty$  segue che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m \frac{z^k}{k!} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Adesso facciamo tendere anche  $m$  a  $+\infty$ : tenuto conto dell'osservazione 2.2.7, si ottiene

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n^k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = 0,$$

cioè la tesi del 3° passo. Il teorema è completamente dimostrato.  $\square$

La funzione complessa  $z = x+iy \mapsto e^x(\cos y + i \sin y)$  è una estensione a  $\mathbb{C}$  della funzione esponenziale reale  $e^x$ . Essa si chiama *esponenziale complessa* e si indica con  $e^z$ . Dunque, per definizione e per quanto dimostrato,

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

In particolare, scegliendo  $z = iy$  immaginario puro, si ha la *formula di Eulero*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

ed anche

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2N} \frac{i^n y^n}{n!} \quad \forall y \in \mathbb{R};$$

poiché  $i^{2h} = (-1)^h$  e  $i^{2h+1} = i(-1)^h$ , decomponendo la somma in indici pari ed indici dispari si trova

$$e^{iy} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{h=0}^N (-1)^h \frac{y^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{N-1} (-1)^h \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} \right],$$

e dato che le somme parziali a secondo membro si riferiscono a due serie che sono entrambe assolutamente convergenti per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , si deduce

$$\cos y + i \sin y = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Infine, uguagliando fra loro parti reali e parti immaginarie, si ottengono gli sviluppi in serie per le funzioni seno e coseno:

$$\cos y = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h}}{(2h)!}, \quad \sin y = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Il teorema è completamente dimostrato.  $\square$

## Esercizi 2.7

1. Sia  $\sum a_n z^n$  una serie di potenze. Si provi che, posto

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(si veda l'esercizio 2.6.3), il raggio di convergenza  $R$  della serie è dato da

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } L = 0 \\ 1/L & \text{se } 0 < L < \infty \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

- (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ,
- (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n}$ ,
- (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{2+i} \right)^n z^n$ ,
- (iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^n$ ,
- (v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{4^n - 3^n} z^n$ ,
- (vi)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} z^n$ ,
- (vii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^n}}{n^n}$ ,
- (viii)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}} z^n$ ,
- (ix)  $\sum_{n=0}^{\infty} [(-2)^n + 1] z^n$ ,
- (x)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ ,
- (xi)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{n^2}$ ,
- (xii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} z^n$ .

3. Dimostrare le seguenti uguaglianze, specificando per quali  $z \in \mathbb{C}$  sono vere:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}; & \text{(ii)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}; \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}; & \text{(iv)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} i^n z^{2n} = \frac{iz^2}{1-iz^2}. \end{aligned}$$

4. Sia  $\sum a_n$  una serie convergente: si provi che il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum a_n z^n$  è non inferiore a 1.

5. (i) Trovare il raggio di convergenza  $R$  della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}$ .

(ii) Posto  $R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) z^{2k}$ , si verifichi che

$$(1-z)R_n(z) = nz^{2n} + \frac{z^{2n}}{1-z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| < R.$$

(iii) Si calcoli per  $|z| < R$  la somma della serie.

6. (i) Determinare il raggio di convergenza  $R$  della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1) \cdot (4n+1)}{4^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot (4n-4)^2 \cdot (4n)^2} x^n;$$

(ii) verificare che

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{3(4n+1)}{4(4n)} < a_n < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

(iii) descrivere il comportamento della serie nei punti  $x = R$  e  $x = -R$ .

7. Sia  $\{F_n\}$  la successione dei numeri di Fibonacci (esercizio 2.3.13).

(i) Determinare il raggio di convergenza  $R$  della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ .

(ii) Detta  $S(z)$  la somma della serie, provare che  $(1-z-z^2)S(z) = z$ , ossia

$$S(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| < R.$$

8. Trovare due serie di potenze nella variabile  $z$  che abbiano come somme, nei rispettivi cerchi di convergenza di cui si troveranno i raggi, le funzioni

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}, \quad G(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}.$$

9. Sia  $R$  il raggio di convergenza di  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ : provare che anche le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} z^n \text{ (con } m \in \mathbb{N} \text{ fissato)}$$

hanno raggio di convergenza  $R$ .

10. Trovare il raggio di convergenza della serie  $\sum a_n z^n$ , ove  $\{a_n\}$  è data da

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_{n+1} = a_n(1 - a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

11. Le “funzioni iperboliche” *coseno iperbolico* e *seno iperbolico* sono definite da

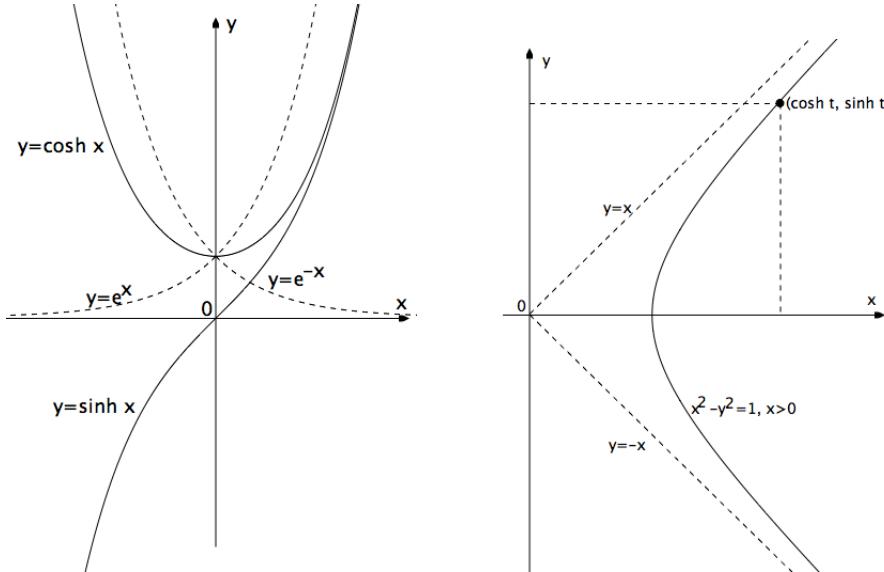
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Provare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(b) Provare che per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  si ha

- (i)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ;
- (ii)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ ;
- (iii)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ .



12. Calcolare la somma delle seguenti serie, specificando per quali  $z \in \mathbb{C}$  esse sono convergenti:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+2}}{n!}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n+1)!}.$$

13. Calcolare la somma delle seguenti serie, specificando per quali  $x \in \mathbb{R}$  esse sono convergenti:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n+1)!}, \quad (iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n-3)!}.$$

14. Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Si provi che se  $x \in ]-1, 1[$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos \alpha - x \cos(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin \alpha - x \sin(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}.$$

15. Calcolare la somma delle seguenti serie, ove  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha + n\beta)}{n!},$	(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\alpha + n\beta)}{n!},$
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(\alpha + n\beta)}{(2n)!},$	(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\alpha + n\beta)}{(2n)!},$
(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha + n\beta)}{(2n+1)!},$	(vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\alpha + n\beta)}{(2n+1)!},$
(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} (5i)^n \frac{\cos(\alpha - 3n\beta)}{(2n+2)!},$	(viii) $\sum_{n=0}^{\infty} (5i)^n \frac{\sin(\alpha - 3n\beta)}{(2n+2)!}.$

16. Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri:

$$e^{1-i}, \quad e^{3-2i}, \quad e^{(1+i)^4}, \quad ie^{|1+2i|}, \quad e^{i(i-1)}.$$

17. Determinare il luogo dei punti  $z \in \mathbb{C}$  in cui ciascuna delle due funzioni

$$f(z) = e^z, \quad g(z) = e^{z^2}$$

assume valori reali, ed il luogo ove ciascuna assume valori puramente immaginari.

18. Determinare il luogo dei punti  $z \in \mathbb{C}$  in cui ciascuna delle due funzioni

$$g(z) = e^{z^2}, \quad h(z) = e^{z^3}$$

ha modulo unitario.

19. Fissato  $k \in \mathbb{N}^+$ , si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n/k} z^{n+1+(-1)^n}$$

e se ne determini l'insieme di convergenza. Qual è la somma?

## 2.8 Riordinamento dei termini di una serie

Cosa succede se si modifica l'ordine degli addendi di una serie? Le proprietà di convergenza si mantengono o si alterano?

Intanto bisogna intendersi sul significato di questa operazione: ad esempio, “sommare i termini in ordine inverso” ha senso solo per somme finite. Andiamo allora a chiarire con una definizione ciò che intendiamo quando parliamo di “riordinamento” dei termini di una serie.

**Definizione 2.8.1** *Sia  $\sum a_n$  una serie a termini reali o complessi, e sia  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione bigettiva, cioè sia iniettiva che surgettiva: in altre parole, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste uno ed un solo  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\tau(n) = k$ . Posto  $b_n = a_{\tau(n)}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  si dice riordinamento della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .*

**Osservazioni 2.8.2** (1) Nella serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ciascun termine  $a_k$  compare esattamente una volta, e cioè quando  $n = \tau^{-1}(k)$ , ossia quando  $n$  assume l'unico valore  $n_k \in \mathbb{N}$  tale che  $\tau(n_k) = k$ . Quindi  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ha esattamente “gli stessi addendi” di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

(2) Se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  è un riordinamento di  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (costruito mediante la corrispondenza biunivoca  $\tau$ ), allora, viceversa,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  è un riordinamento di  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  (mediante la corrispondenza biunivoca  $\tau^{-1}$ , inversa di  $\tau$ ).

Il risultato che segue risponde alla domanda iniziale.

**Teorema 2.8.3 (di Dirichlet)** *Sia  $\sum a_n$  una serie reale o complessa assolutamente convergente. Allora ogni suo riordinamento  $\sum b_n$  è assolutamente convergente ed ha la stessa somma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

*Se la serie  $\sum a_n$  non è assolutamente convergente, allora nessun suo riordinamento lo è.*

Si osservi che, di conseguenza, per ogni serie  $\sum a_n$  e per ogni suo riordinamento  $\sum b_n$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

(questo valore potrà essere finito o  $+\infty$ ).

**Dimostrazione** Con le stesse considerazioni fatte alla fine della dimostrazione della proposizione 2.5.2, si verifica che possiamo limitarci al caso di serie a termini reali. Supponiamo dapprima  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e siano

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n , \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k , \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^n b_k .$$

Per ipotesi, si ha  $s_n \leq S$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; inoltre, posto

$$m_n = \max\{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(n)\},$$

si ha

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n a_{\tau(k)} \leq \sum_{h=0}^{m_n} a_h = s_{m_n} \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicché  $\sum b_n$  è convergente ed ha somma non superiore a  $S$ . D'altra parte, essendo  $\sum a_n$  a sua volta un riordinamento di  $\sum b_n$ , con ragionamento simmetrico si ha

$$S \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

e dunque vale l'uguaglianza.

Passiamo ora al caso generale: come si è fatto nella dimostrazione della proposizione 2.5.2, poniamo

$$\alpha_n = |a_n| - a_n, \quad \beta_n = |b_n| - b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicché

$$0 \leq \alpha_n \leq 2|a_n|, \quad 0 \leq \beta_n \leq 2|b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La serie  $\sum \alpha_n$  è a termini positivi e converge per il criterio del confronto; dunque, per la parte già dimostrata, il suo riordinamento  $\sum \beta_n$  è convergente e vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n.$$

Inoltre, sempre in virtù della parte già dimostrata, poiché la serie  $\sum |a_n|$  è convergente, il suo riordinamento  $\sum |b_n|$  è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|,$$

cosicché  $\sum b_n$  è assolutamente convergente. Ne segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Notiamo infine che se  $\sum a_n$  non è assolutamente convergente, non può esserlo nemmeno  $\sum b_n$ , perché se fosse  $\sum |b_n| < +\infty$ , per la parte già dimostrata dedurremmo  $\sum |a_n| = \sum |b_n| < +\infty$ , essendo a sua volta  $\sum a_n$  un riordinamento di  $\sum b_n$ .  $\square$

**Osservazione 2.8.4** Per le serie  $\sum a_n$  assolutamente convergenti si ha una proprietà di riordinamento ancora più forte di quella espressa dal teorema di Dirichlet: se  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi disgiunti di  $\mathbb{N}$ , la cui unione è tutto  $\mathbb{N}$ , allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n \in A} a_n + \sum_{n \in B} a_n$$

(esercizio 2.8.1). Si noti che questa proprietà non può valere senza l'ipotesi di assoluta convergenza: se  $A$  è l'insieme dei numeri naturali pari e  $B$  quello dei numeri naturali dispari, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  si decomporrebbe in due serie divergenti a  $+\infty$  ed a  $-\infty$ , la cui addizione non avrebbe senso.

Se una serie  $\sum a_n$  è convergente, ma non assolutamente convergente, l'operazione di riordinamento può alterare il valore della somma, come è mostrato dal seguente

**Esempio 2.8.5** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  è convergente ad un numero reale  $S$  (che è uguale a  $\ln 2$ , come vedremo più avanti), ma non è assolutamente convergente. Si ha quindi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = S,$$

e dividendo per 2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{S}{2}.$$

Dunque la serie  $\sum c_n$ , ove

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ -\frac{(-1)^{n/2}}{n} & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

è convergente con somma  $S/2$ , in quanto le sue somme parziali di indice  $2N$  coincidono con quelle di indice  $N$  della serie precedente: ossia

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \dots = \frac{S}{2}.$$

Sommmando ora questa serie con la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  si trova

$$\begin{aligned} (0+1) &+ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( 0 + \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left( 0 + \frac{1}{5} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) + \left( 0 + \frac{1}{7} \right) + \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) + \dots = \left( \frac{S}{2} + S \right), \end{aligned}$$

ovvero

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + 0 + \dots = \frac{3S}{2};$$

ora notiamo che la serie che si ottiene da questa sopprimendo i termini nulli (che sono quelli di indici  $1, 5, 9, \dots, 4n+1, \dots$ ) converge alla stessa somma  $\frac{3S}{2}$ : infatti, le sue somme parziali di indice  $3N+1$  coincidono con le somme parziali di indice  $4N+1$  della serie contenente anche i termini nulli. Tuttavia la serie così ottenuta, cioè

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots,$$

è evidentemente un riordinamento della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ , che convergeva a  $S$ . Non è difficile verificare che la corrispondenza  $\tau$  fra gli indici delle due serie è data da

$$\begin{cases} \tau(3n) = 4n \\ \tau(3n+1) = 4n+2 \\ \tau(3n+2) = 2n+1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per le serie non assolutamente convergenti vale questo risultato ancora più drastico:

**Teorema 2.8.6 (di Riemann)** *Sia  $\sum a_n$  una serie reale convergente, ma non assolutamente convergente. Allora:*

- (i) *per ogni  $L \in \mathbb{R}$  esiste un riordinamento di  $\sum a_n$  che ha somma  $L$ ;*
- (ii) *esiste un riordinamento di  $\sum a_n$  che diverge positivamente;*
- (iii) *esiste un riordinamento di  $\sum a_n$  che diverge negativamente;*
- (iv) *esiste un riordinamento di  $\sum a_n$  che è indeterminato.*

**Dimostrazione** (i) Osserviamo anzitutto che la serie  $\sum a_n$  contiene infiniti termini strettamente positivi e infiniti termini strettamente negativi, altrimenti essa avrebbe termini definitivamente a segno costante e quindi, essendo convergente, sarebbe anche assolutamente convergente. Poniamo

$$p_n = \max\{a_n, 0\}, \quad q_n = \max\{-a_n, 0\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicché

$$p_n \geq 0, \quad q_n \geq 0, \quad p_n - q_n = a_n, \quad p_n + q_n = |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

inoltre  $a_n$  coincide o con  $p_n$  (e allora  $q_n = 0$ ), o con  $-q_n$  (e allora  $p_n = 0$ ). Essendo in particolare

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N p_n - \sum_{n=0}^N q_n, \quad \sum_{n=0}^N |a_n| = \sum_{n=0}^N p_n + \sum_{n=0}^N q_n \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

dall'ipotesi sulla serie  $\sum a_n$  si deduce

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n = +\infty$$

(altrimenti, se entrambe queste due serie fossero convergenti, otterremmo che  $\sum |a_n|$  converge, mentre se convergesse solo una delle due otterremmo che  $\sum a_n$  diverge).

D'altra parte, essendo  $0 \leq p_n \leq |a_n|$  e  $0 \leq q_n \leq |a_n|$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0.$$

Ciò premesso, fissiamo  $L \in \mathbb{R}$ . Costruiremo adesso una serie, che si otterrà riordinando i termini di  $\sum a_n$ , e che soddisferà la tesi. Essa sarà formata da un certo numero di  $p_n$ , seguiti da un certo numero di  $q_n$ , poi ancora da un po' di  $p_n$ , poi di nuovo da un po' di  $q_n$ , e così di seguito, in modo da "oscillare" attorno al valore  $L$  prescelto. A questo scopo andiamo a costruire due opportune successioni crescenti di indici,  $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  e  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , e formiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \sum_{n=m_1+1}^{m_2} p_n - \sum_{n=k_1+1}^{k_2} q_n + \dots + \sum_{n=m_{h-1}+1}^{m_h} p_n - \sum_{n=k_{h-1}+1}^{k_h} q_n + \dots;$$

denoteremo con  $s_n$  la sua  $n$ -sima somma parziale.

Fissiamo due successioni  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , entrambe convergenti a  $L$  e tali che  $\alpha_n < L < \beta_n$ : ad esempio prenderemo senz'altro  $\alpha_n = L - \frac{1}{n}$  e  $\beta_n = L + \frac{1}{n}$ . Definiamo adesso gli indici  $m_n$  e  $k_n$ :  $m_1$  è il *minimo* numero naturale  $m$  per cui  $\sum_{n=0}^m p_n > L + 1$ , mentre  $k_1$  è il *minimo* numero naturale  $k$  per cui  $\sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^k q_n < L - 1$ . Questi indici esistono per la divergenza delle serie  $\sum p_n$  e  $\sum q_n$ . In generale, avendo costruito  $m_h$  e  $k_h$  come i minimi indici maggiori rispettivamente di  $m_{h-1}$  e  $k_{h-1}$  tali che

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \dots + \sum_{m_{h-1}+1}^{m_h} p_n > L + \frac{1}{h}, \\ \sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \dots + \sum_{m_{h-1}+1}^{m_h} p_n - \sum_{n=k_{h-1}+1}^{k_h} q_n < L - \frac{1}{h}, \end{cases}$$

definiremo  $m_{h+1}$  e  $k_{h+1}$  come i minimi indici maggiori rispettivamente di  $m_h$  e  $k_h$  tali che

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \dots + \sum_{m_h+1}^{m_{h+1}} p_n > L + \frac{1}{h+1}, \\ \sum_{n=0}^{m_1} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \dots + \sum_{m_h+1}^{m_{h+1}} p_n - \sum_{n=k_h+1}^{k_{h+1}} q_n < L - \frac{1}{h+1}. \end{cases}$$

Nuovamente, tali indici esistono in virtù della divergenza di  $\sum p_n$  e  $\sum q_n$ .

Indichiamo con  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  le somme parziali della serie così costruita, cioè  $\{s_n\}$ , gli ultimi termini delle quali sono rispettivamente  $p_{m_n}$  e  $-q_{k_n}$ : in altre parole,

$$\sigma_n = s_{m_1+k_1+\dots+m_n}, \quad \tau_n = s_{m_1+k_1+\dots+m_n+k_n}.$$

Allora otteniamo, per la minimalità di  $m_n$  e  $k_n$ ,

$$\sigma_n - p_{m_n} \leq L + \frac{1}{n} < \sigma_n, \quad \tau_n < L - \frac{1}{n} \leq \tau_n + q_{k_n},$$

cosicché  $\sigma_n \rightarrow L$  e  $\tau_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$ . D'altra parte, consideriamo una generica somma parziale  $s_n$ : esisterà un *unico* indice  $h$  tale che sia vera una delle due relazioni

$$m_1 + k_1 + \dots + m_h \leq n \leq m_1 + k_1 + \dots + m_h + k_h,$$

oppure

$$m_1 + k_1 + \dots + m_h + k_h \leq n \leq m_1 + k_1 + \dots + m_h + k_h + m_{h+1};$$

ne segue

$$\tau_h \leq s_n \leq \sigma_h, \quad \text{oppure} \quad \tau_h \leq s_n \leq \sigma_{h+1},$$

e dunque anche  $s_n$  converge a  $L$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ciò prova (i).

**(ii)-(iii)-(iv)** Questi enunciati si provano in modo del tutto simile: basta scegliere le successioni  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  entrambe divergenti a  $+\infty$ , o entrambe divergenti a  $-\infty$ , o convergenti a due valori  $L_1$  e  $L_2$  con  $L_1 < L_2$ .  $\square$

## Raggruppamento dei termini di una serie

Vale la proprietà associativa per i termini di una serie? Si possono mettere le parentesi per racchiudere un numero finito di addendi, senza alterare la somma? Vediamo.

**Definizione 2.8.7** Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie reale o complessa. Sia inoltre  $\{k_n\}$  una successione strettamente crescente di numeri naturali. Posto

$$b_0 = \sum_{h=0}^{k_0} a_h, \quad b_n = \sum_{h=k_{n-1}+1}^{k_n} a_h \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

si dice che la serie  $\sum b_n$  è ottenuta da  $\sum a_n$  raggruppandone i termini.

**Esempio 2.8.8** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$  è ottenuta da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  raggruppandone i termini a due a due: in questo caso  $\{k_n\}$  è definita da  $k_n = 2n$ .

Il risultato che segue stabilisce che il raggruppamento dei termini di una serie è un'operazione del tutto lecita.

**Teorema 2.8.9** Sia  $\sum a_n$  una serie reale o complessa, e sia  $\sum b_n$  una serie ottenuta da  $\sum a_n$  raggruppandone i termini. Se  $\sum a_n$  è convergente, allora anche  $\sum b_n$  lo è e in tal caso le due serie hanno la stessa somma. Se  $\sum a_n$  è assolutamente convergente, allora anche  $\sum b_n$  lo è e in tal caso si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

**Dimostrazione** Per  $m, n \in \mathbb{N}$  poniamo  $s_m = \sum_{k=0}^m a_k$  e  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n b_k$ ; si ha allora, per definizione di  $b_h$ ,

$$\sigma_n = s_{k_0} + \sum_{h=1}^n (s_{k_h} - s_{k_{h-1}}) = s_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché  $\{s_n\}$  è per ipotesi convergente ad un numero  $S$ , dato  $\varepsilon > 0$  si avrà  $|s_n - S| < \varepsilon$  per tutti gli  $n$  maggiori di un certo  $\nu$ . Ma allora, essendo  $k_n \geq n$ , sarà anche  $|\sigma_n - S| = |s_{k_n} - S| < \varepsilon$  per ogni  $n > \nu$ , cioè  $\sigma_n \rightarrow S$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Se poi  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ , allora a maggior ragione, per la parte già dimostrata,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{h=0}^{k_0} |a_h| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=k_{n-1}+1}^{k_n} |a_h| = \sum_{h=0}^{\infty} |a_h| < +\infty. \quad \square$$

**Osservazioni 2.8.10** (1) Il teorema vale anche nel caso di serie reali divergenti (esercizio 2.8.2).

**(2)** Non mantiene la convergenza, al contrario, l'operazione inversa al raggruppamento, che consiste nell'eliminare eventuali parentesi presenti: ad esempio, la serie

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

converge ed ha somma 0, mentre la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

è indeterminata. In generale, si può scrivere l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

solo quando ciascuna delle due serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  è convergente; in tal caso l'uguaglianza è conseguenza dell'esercizio 2.2.1. Più generalmente, si veda l'esercizio 2.8.3.

## Esercizi 2.8

1. Sia  $\sum a_n$  una serie assolutamente convergente. Si provi che se  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi disgiunti di  $\mathbb{N}$  tali che  $A \cup B = \mathbb{N}$ , allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n \in A} a_n + \sum_{n \in B} a_n.$$

2. Si provi che se  $\sum a_n$  è una serie divergente a  $+\infty$ , oppure a  $-\infty$ , allora ogni serie  $\sum b_n$  ottenuta da  $\sum a_n$  raggruppandone i termini è ancora divergente a  $+\infty$ , oppure a  $-\infty$ .
3. Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie reale o complessa, sia  $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$  una successione strettamente crescente e siano

$$b_0 = \sum_{h=0}^{k_0} a_h, \quad b_n = \sum_{h=k_{n-1}+1}^{k_n} a_h \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si provi che se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  è convergente, e se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=k_{n-1}+1}^{k_n} |a_h| = 0,$$

allora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  è convergente.

4. (i) Per  $n, k \in \mathbb{N}^+$  siano  $a_{nk}$  numeri non negativi. Si dimostri che se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right] = S,$$

allora si ha anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \right] = S.$$

- (ii) Verificare che il risultato di (i) è falso se gli  $a_{nk}$  hanno segno variabile, utilizzando i seguenti  $a_{nk}$ :

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n, \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ -\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} & \text{se } k = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## 2.9 Moltiplicazione di serie

A prima vista il problema di moltiplicare fra loro due serie sembra irrilevante. Fare il prodotto di due serie significa moltiplicare tra loro le successioni delle rispettive somme parziali; se queste convergono a  $S_1$  e  $S_2$ , il loro prodotto convergerà a  $S_1 \cdot S_2$ . Dov'è il problema?

Il punto è che noi vogliamo ottenere, come risultato del prodotto di due serie, una nuova *serie*. Il motivo di questo desiderio è legato alla teoria delle serie di potenze: due serie di potenze hanno per somma una funzione definita sul cerchio di convergenza di ciascuna serie; il prodotto di tali funzioni è una nuova funzione, definita sul più piccolo dei due cerchi di convergenza, e della quale si vorrebbe conoscere uno sviluppo in serie di potenze che ad essa converga. Dunque si vuole trovare una *serie di potenze* che sia il prodotto delle due serie di potenze date, ed abbia per somma il prodotto delle somme. Scrivendo il prodotto di due polinomi  $\sum_{n=0}^N a_n z^n$  e  $\sum_{n=0}^M b_n z^n$  (con  $N \leq M$ ) è naturale raggruppare i termini con la stessa potenza  $z^n$ : quindi si metteranno insieme i prodotti  $a_0 b_n, a_1 b_{n-1}, \dots, a_{n-1} b_1, a_n b_0$ . Il polinomio prodotto sarà quindi (ponendo  $a_n = 0$  per  $n = N + 1, \dots, M$ )

$$\sum_{n=0}^{N+M} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Passando dai polinomi alle serie di potenze o, più in generale, parlando di serie numeriche, siamo indotti alla seguente

**Definizione 2.9.1** Date due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  reali o complesse, e posto

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  si dice prodotto di Cauchy delle due serie.

Si potrebbe sperare di dimostrare che se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sono convergenti, allora la serie prodotto  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  è convergente, magari con somma uguale al prodotto delle somme. Ma non è così, come mostra il seguente esempio: se

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi

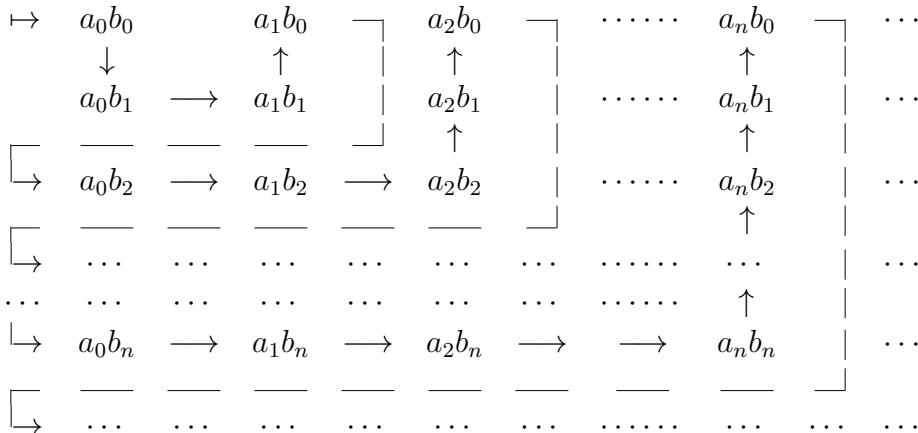
$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n+1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

per cui  $c_n$  non è infinitesima e  $\sum c_n$  non può convergere. Si ha però questo risultato:

**Teorema 2.9.2 (di Cauchy)** *Se le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sono assolutamente convergenti, allora il loro prodotto di Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  è assolutamente convergente; inoltre*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**Dimostrazione** Si consideri la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ , la cui legge di formazione è illustrata dallo schema che segue:



Si ha dunque

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d_n &= a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 + \\ &\quad + \dots + a_0b_n + a_1b_n + \dots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \dots + a_nb_1 + a_nb_0 + \dots \end{aligned}$$

e tale serie converge assolutamente, in quanto per ogni  $n \geq 2$  si ha

$$\sum_{k=0}^n |d_k| \leq \sum_{k=0}^{n^2-1} |d_k| = \left( \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \right) \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) < \infty.$$

Dunque  $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$  è convergente ad un numero  $S$ . D'altra parte, posto  $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e  $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , considerando la somma parziale della serie  $\sum d_k$  di indice  $n^2 - 1$  si ha per  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} d_k = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} b_k \right) \rightarrow A \cdot B.$$

Ne segue  $S = AB$  perché ogni sottosuccessione di una successione convergente deve convergere allo stesso limite.

Dalla serie  $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ , riordinando i termini “per diagonali”, si ottiene la serie

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \dots + a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0 + \dots,$$

la quale per il teorema di Dirichlet (teorema 2.8.3) è assolutamente convergente ed ha somma  $AB$ . Ma raggruppandone opportunamente i termini si ottiene proprio la serie prodotto di Cauchy di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , la quale dunque per il teorema 2.8.9 è una serie assolutamente convergente con somma  $AB$ .  $\square$

**Osservazione 2.9.3** Se le serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno indice iniziale 1, anziché 0, nella definizione di prodotto di Cauchy occorrerà prendere

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \text{anziché} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Esempi 2.9.4 (1)** Moltiplicando per se stessa la serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

si ottiene, sempre per  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n;$$

da qui si ricava anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

**(2)** Come sappiamo si ha, posto  $z = x + iy$ ,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Calcoliamo  $e^z e^w$  con la regola della moltiplicazione di serie: il termine generale della serie prodotto ha la forma

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!};$$

dunque

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Pertanto l'esponenziale complessa mantiene le proprietà algebriche dell'esponenziale reale. Si noti che  $e^z = e^{z+2\pi i}$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , cioè la funzione esponenziale è *periodica* di periodo  $2\pi i$ ; in particolare,  $e^z$  non è una funzione iniettiva su  $\mathbb{C}$ .

A titolo di curiosità, mostriamo una variante del teorema 2.9.2: il prodotto di Cauchy di due serie è convergente, a patto che almeno uno dei due fattori sia una serie assolutamente convergente. Si ha infatti:

**Teorema 2.9.5** *Siano  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  due serie, la prima assolutamente convergente e la seconda convergente. Allora il loro prodotto di Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  è convergente e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**Dimostrazione** Poniamo

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Scriviamo la somma parziale della serie prodotto nella forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^N a_k \sum_{n=k}^N b_{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^N a_k \left[ \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right] + B \sum_{k=0}^N a_k. \end{aligned}$$

Da questa relazione segue che vale la tesi del teorema, cioè risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$$

se e solo se

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_k \left[ \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right] = 0.$$

Proviamo dunque quest'ultima relazione. Sia  $\varepsilon > 0$  e scegliamo  $\nu_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\sum_{k=\nu_{\varepsilon}}^n |a_k| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{h=0}^n b_h - B \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu_{\varepsilon}.$$

Allora se  $N \geq 2\nu_\varepsilon$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^N a_k \left[ \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right] \right| &\leq \sum_{k=0}^N |a_k| \left| \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu_\varepsilon} |a_k| \left| \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right| + \sum_{k=\nu_\varepsilon+1}^N |a_k| \left| \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu_\varepsilon} |a_k| \sup_{n \geq N-\nu_\varepsilon} \left| \sum_{h=0}^n b_h - B \right| + \varepsilon \left[ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{h=0}^n b_h \right| + |B| \right] \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sup_{n \geq \nu_\varepsilon} \left| \sum_{h=0}^n b_h - B \right| + \varepsilon C_1 \leq \varepsilon C_2, \end{aligned}$$

ove

$$C_1 = \left[ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{h=0}^n b_h \right| + |B| \right], \quad C_2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + C_1.$$

Ciò prova che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_k \left[ \sum_{h=0}^{N-k} b_h - B \right] = 0,$$

come richiesto.  $\square$

## Esercizi 2.9

- Provare che se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$  per  $|z| < 1$ , allora posto  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{f(z)}{1-z} \quad \text{per } |z| < 1.$$

- Dimostrare che se  $|z| < 1$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[Traccia: utilizzare l'esercizio 1.7.1 (iv).]

- Verificare che per  $|z| < 1$  si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}.$$

- Poniamo per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1 + a_n b_0.$$

Si provi che se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ , allora  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = AB$ .

5. Per  $y \in \mathbb{R}$  si verifichi la relazione  $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ , utilizzando gli sviluppi in serie di potenze del seno e del coseno.

[Traccia: si verifichi preliminarmente che risulta

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. Dimostrare, usando le serie di potenze, le relazioni

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

7. Determinare il prodotto di Cauchy della serie  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  per se stessa. La serie che così si ottiene è convergente?
8. Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n})$ : calcolare esplicitamente  $c_n$  e provare che

$$3^{-n} \leq c_n \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

# Capitolo 3

## Funzioni

### 3.1 Spazi euclidei $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{C}^m$

Inizia qui la seconda parte del corso, in cui si passa dal “discreto” al “continuo”: lo studio delle successioni e delle serie lascerà il posto all’analisi delle proprietà delle funzioni di variabile reale o complessa. Ci occuperemo comunque ancora, qua e là, di successioni e serie, in particolare di serie di potenze.

Fissiamo  $m \in \mathbb{N}^+$  e consideriamo gli insiemi  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , cioè i prodotti cartesiani di  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  per se stessi  $m$  volte:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &= \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) : x^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m\}, \\ \mathbb{C}^m &= \{\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^m) : z^i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m\}.\end{aligned}$$

Introduciamo un po’ di terminologia. Indicheremo in neretto ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , eccetera) i punti generici, o *vettori*, di  $\mathbb{R}^m$  e di  $\mathbb{C}^m$ . Su tali insiemi sono definite le operazioni di *somma* e di *prodotto per scalari* che li rendono entrambi *spazi vettoriali*:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a^1 + b^1, \dots, a^m + b^m) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ (oppure } \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m), \\ \lambda \mathbf{a} &= (\lambda a^1, \dots, \lambda a^m) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \text{ (oppure } \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m).\end{aligned}$$

Naturalmente, per  $m = 2$  lo spazio  $\mathbb{R}^m$  si riduce al piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  mentre per  $m = 1$  lo spazio  $\mathbb{C}^m$  si riduce al piano complesso  $\mathbb{C}$ . Come sappiamo,  $\mathbb{R}^2$  è identificabile con  $\mathbb{C}$  mediante la corrispondenza biunivoca  $z = x + iy$ ; similmente, per ogni  $m \geq 1$  possiamo identificare gli spazi  $\mathbb{R}^{2m}$  e  $\mathbb{C}^m$ , associando al generico punto  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{2m-1}, x^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$  il punto  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{C}^m$ , ove

$$z^j = x^{2j-1} + i x^{2j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Estenderemo a  $m$  dimensioni tutta la struttura geometrica di  $\mathbb{R}^2$ .

### Prodotto scalare

In  $\mathbb{R}^m$  e in  $\mathbb{C}^m$  è definito un *prodotto scalare* fra vettori:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = \sum_{i=1}^m a^i b^i \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m,$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = \sum_{i=1}^m a^i \bar{b^i} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m.$$

Si noti che, essendo  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$  e  $\bar{x} = x$  per ogni  $x$  reale, il prodotto scalare dello spazio  $\mathbb{C}^m$ , applicato a vettori di  $\mathbb{R}^m$ , coincide col prodotto scalare dello spazio  $\mathbb{R}^m$ . Dunque il prodotto scalare associa ad ogni coppia di vettori di  $\mathbb{C}^m$  un numero complesso e ad ogni coppia di vettori di  $\mathbb{R}^m$  un numero reale. Se  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = 0$ , i due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  si dicono *ortogonali*. Il significato geometrico del prodotto scalare, nel caso reale, è illustrato nell'esercizio 3.1.1.

Notiamo che il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^m$  è una applicazione *lineare* nel primo e nel secondo argomento, ossia risulta

$$\begin{cases} \langle \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_m = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle_m + \mu \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_m \\ \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c} \rangle_m = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m + \mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle_m \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m;$$

invece il prodotto scalare di  $\mathbb{C}^m$  è *lineare* nel primo argomento ed *antilineare* nel secondo argomento, ossia

$$\begin{cases} \langle \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_m = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle_m + \mu \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_m \\ \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c} \rangle_m = \bar{\lambda} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m + \bar{\mu} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle_m \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$$

(le verifiche sono ovvie).

## Norma euclidea

La *norma euclidea* di un vettore  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$  è il numero reale non negativo

$$|\mathbf{z}|_m = \sqrt{\sum_{i=1}^m |z^i|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_m},$$

essendo  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z^1}, \dots, \bar{z^m})$ ; la norma di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  è la stessa cosa, ossia

$$|\mathbf{x}|_m = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x^i|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_m}.$$

La norma è l'analogo del modulo in  $\mathbb{C}$  e del valore assoluto in  $\mathbb{R}$ . Le sue proprietà fondamentali sono le seguenti:

- (i) (*positività*)  $|\mathbf{z}|_m \geq 0$  per ogni  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ , e  $|\mathbf{z}|_m = 0$  se e solo se  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ;
- (ii) (*omogeneità*)  $|\lambda \mathbf{z}|_m = |\lambda| \cdot |\mathbf{z}|_m$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ ;
- (iii) (*subadditività*)  $|\mathbf{z} + \mathbf{w}|_m \leq |\mathbf{z}|_m + |\mathbf{w}|_m$  per ogni  $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ .

Le prime due proprietà sono ovvie dalla definizione; la terza è meno evidente, e per dimostrarla è necessario premettere la seguente

**Proposizione 3.1.1 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)** *Risulta*

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m| \leq |\mathbf{a}|_m \cdot |\mathbf{b}|_m \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m.$$

**Dimostrazione** Ripetiamo l'argomentazione svolta nella dimostrazione del teorema 1.9.3. Per ogni  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathbf{a} + t\mathbf{b}|_m^2 = \sum_{j=1}^m (a^j + tb^j)(\overline{a^j + tb^j}) = \\ &= \sum_{j=1}^m a^j \overline{a^j} + 2t \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a^j \overline{b^j} + t^2 \sum_{j=1}^m b^j \overline{b^j} = \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_m + 2t \operatorname{Re} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m + t^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_m = |\mathbf{a}|_m^2 + 2t \operatorname{Re} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m + t^2 |\mathbf{b}|_m^2; \end{aligned}$$

dal momento che il trinomio di secondo grado all'ultimo membro è sempre non negativo, il suo discriminante deve essere non positivo, cioè

$$(\operatorname{Re} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m)^2 \leq |\mathbf{a}|_m^2 \cdot |\mathbf{b}|_m^2 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m.$$

Passando alle radici quadrate, ciò prova la tesi nel caso del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^m$ , poiché in tal caso  $\operatorname{Re} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m$ . Nel caso del prodotto scalare di  $\mathbb{C}^m$  osserviamo che il numero complesso  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m$  avrà un argomento  $\vartheta \in [0, 2\pi[$ , e si potrà dunque scrivere, ricordando la definizione di esponenziale complessa,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m|e^{i\vartheta};$$

da cui, grazie alla linearità del prodotto scalare nel primo argomento,

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m| = e^{-i\vartheta} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = \langle e^{-i\vartheta} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m,$$

e dunque

$$\operatorname{Re} \langle e^{-i\vartheta} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m|, \quad \operatorname{Im} \langle e^{-i\vartheta} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = 0;$$

pertanto, per quanto dimostrato sopra,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m|^2 &= [\operatorname{Re} \langle e^{-i\vartheta} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m]^2 = |\langle e^{-i\vartheta} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m|^2 \leq \\ &\leq |e^{-i\vartheta} \mathbf{a}|_m^2 \cdot |\mathbf{b}|_m^2 = |e^{-i\vartheta}|^2 \cdot |\mathbf{a}|_m^2 \cdot |\mathbf{b}|_m^2 = |\mathbf{a}|_m^2 \cdot |\mathbf{b}|_m^2 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m, \end{aligned}$$

cioè la tesi.  $\square$

Dimostriamo la subadditività della norma: per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|_m^2 &= |\mathbf{a}|_m^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m + |\mathbf{b}|_m^2 \leq |\mathbf{a}|_m^2 + 2 |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m| + |\mathbf{b}|_m^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{a}|_m^2 + 2 |\mathbf{a}|_m \cdot |\mathbf{b}|_m + |\mathbf{b}|_m^2 = (|\mathbf{a}|_m + |\mathbf{b}|_m)^2. \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.2** Si noti che se  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , allora vale l'uguaglianza

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|_m^2 = |\mathbf{a}|_m^2 + |\mathbf{b}|_m^2$$

se e solo se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono vettori fra loro ortogonali.

## Distanza euclidea

Tramite la norma si può dare la nozione di distanza fra due vettori di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ .

**Definizione 3.1.3** Una distanza, o metrca, su un insieme non vuoto  $X$  è una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  con queste proprietà:

- (i) (positività)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- (ii) (simmetria)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- (iii) (disuguaglianza triangolare)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in X$ .

Se su  $X$  è definita una distanza  $d$ , la coppia  $(X, d)$  è detta spazio metrico.

La nozione di spazio metrico è molto importante e generale, e la sua portata va molto al di là del nostro corso. Si può verificare assai facilmente che la funzione

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_m \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \text{ (oppure } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\text{)}$$

è una distanza su  $\mathbb{C}^m$  (oppure su  $\mathbb{R}^m$ ), che si chiama *distanza euclidea*: le proprietà (i), (ii) e (iii) sono evidenti conseguenze delle condizioni (i), (ii) e (iii) relative alla norma euclidea. La distanza euclidea gode inoltre di altre due proprietà legate alla struttura vettoriale di  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ :

- (iv) (*invarianza per traslazioni*)  $d(\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{y} + \mathbf{v}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$  (oppure  $\mathbb{R}^m$ ),
- (v) (*omogeneità*)  $d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  (oppure  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ).

Notiamo che  $d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_m$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  (oppure  $\mathbb{R}^m$ ); inoltre se  $m = 2$ , come già sappiamo, posto  $z = x + iy$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , si ha  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|_2$ , ossia  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  sono, dal punto di vista metrico, la stessa cosa.

Per un qualunque spazio metrico si definisce la *palla* di centro  $x_0 \in X$  e raggio  $r > 0$  come l'insieme  $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ ; quindi la palla di centro  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  e raggio  $r$  è

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < r\},$$

mentre analogamente la palla di centro  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^m$  e raggio  $r > 0$  sarà

$$B(\mathbf{z}_0, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|_m < r\}.$$

Nel caso  $m = 1$  la palla  $B(x_0, r)$  di  $\mathbb{R}$  è l'intervallo  $]x_0 - r, x_0 + r[$  mentre la palla  $B(z_0, r)$  di  $\mathbb{C}$  è il disco  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ . Un *intorno* di un punto  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^m$  o in  $\mathbb{C}^m$  è un insieme  $U$  tale che esista una palla  $B(\mathbf{x}_0, r)$  contenuta in  $U$ . Ogni palla di centro  $\mathbf{x}_0$  è essa stessa un intorno di  $\mathbf{x}_0$ ; talvolta però è comodo usare intorni di  $\mathbf{x}_0$  più generali delle palle (ad esempio intorni di forma cubica, se  $m = 3$ ).

Una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^m$  (oppure  $\mathbb{C}^m$ ) converge ad un elemento  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  (o  $\mathbb{C}^m$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_m = 0,$$

cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  per ogni  $n \geq \nu$ . Si noti che, essendo

$$|x_n^i - x^i| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_m \leq \sum_{j=1}^m |x_n^j - x^j|, \quad i = 1, \dots, m,$$

la condizione  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$  equivale alle  $m$  relazioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

## Aperti e chiusi

Definiremo adesso alcune importanti classi di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^m$ . Tutto ciò che verrà detto in questo paragrafo si può ripetere in modo completamente analogo per  $\mathbb{C}^m$ .

**Definizione 3.1.4** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ . Diciamo che  $A$  è un insieme aperto se è intorno di ogni suo punto, ossia se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$  esiste  $r > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq A$  (il raggio  $r$  dipenderà ovviamente dalla posizione di  $\mathbf{x}_0$  in  $A$ ).

Gli insiemi aperti formano una famiglia chiusa rispetto a certe operazioni insiemistiche:

**Proposizione 3.1.5** L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto. L'intersezione di una famiglia finita di aperti è un aperto.

**Dimostrazione** Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di aperti, e  $\mathbf{x} \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , vi sarà un indice  $j \in I$  tale che  $\mathbf{x} \in A_j$ ; quindi esiste  $r > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ . Pertanto  $\bigcup_{i \in I} A_i$  è un aperto.

Se  $\{A_1, \dots, A_k\}$  è una famiglia finita di aperti e  $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^k A_i$ , allora per ogni  $i$  fra 1 e  $k$  vi sarà  $r_i > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}, r_i) \subseteq A_i$ ; posto  $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ , si ha  $r > 0$  e  $B(\mathbf{x}, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^k B(\mathbf{x}, r_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^k A_i$ .  $\square$

**Esempi 3.1.6 (1)** Sono aperti in  $\mathbb{R}$ :

$$\emptyset, \quad \mathbb{R}, \quad ]a, b[, \quad ]-\infty, a[, \quad ]b, +\infty[, \quad \mathbb{R} \setminus \{34\}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ ]0, 1[ \cup ]2, 4[, \quad ]0, 1[ \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^+};$$

non sono aperti in  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad [a, b[, \quad [a, b], \quad ]a, b], \quad ]-\infty, a], \quad [b, +\infty[, \\ \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \quad [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

**(2)** Sono aperti in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbb{R}^2, \quad \emptyset, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}, \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad B((x, y), r);$$

non sono aperti in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbb{R} \times \{0\}, \quad \{(0, y) : y > 0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}.$$

**Definizione 3.1.7** Sia  $F \subseteq \mathbb{R}^m$ . Diciamo che  $F$  è un insieme chiuso in  $\mathbb{R}^m$  se il suo complementare  $F^c$  è un aperto.

Si ha subito la seguente proprietà:

**Proposizione 3.1.8** L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso. L'unione di una famiglia finita di chiusi è un chiuso.

**Dimostrazione** Se  $\{F_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di chiusi, allora tutti i complementari  $F_i^c$  sono aperti, quindi per la proposizione precedente  $(\bigcap_{i \in I} F_i)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$  è un aperto e dunque  $\bigcap_{i \in I} F_i$  è chiuso. Se  $\{F_1, \dots, F_k\}$  è una famiglia finita di chiusi, allora per la proposizione precedente  $(\bigcup_{i=1}^k F_i)^c = \bigcap_{i=1}^k F_i^c$  è un aperto e quindi  $\bigcup_{i=1}^k F_i$  è chiuso.  $\square$

Gli insiemi chiusi hanno una importante caratterizzazione che è la seguente:

**Proposizione 3.1.9** Sia  $F \subseteq \mathbb{R}^m$ . Allora  $F$  è chiuso se e solo se per ogni successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq F$ , convergente ad un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , risulta  $\mathbf{x} \in F$ .

**Dimostrazione** Supponiamo che  $F$  sia chiuso e sia  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq F$  tale che  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  per  $n \rightarrow \infty$ ; si deve provare che  $\mathbf{x} \in F$ . Se fosse  $\mathbf{x} \in F^c$ , dato che  $F^c$  è aperto esisterebbe una palla  $B(\mathbf{x}, r)$  contenuta in  $F^c$ ; ma siccome  $\mathbf{x}_n$  tende a  $\mathbf{x}$ , definitivamente si avrebbe  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq F^c$ , contro l'ipotesi che  $\mathbf{x}_n \in F$  per ogni  $n$ . Dunque  $\mathbf{x} \in F$ .

Supponiamo viceversa che  $F$  contenga tutti i limiti delle successioni che sono contenute in  $F$ , e mostriamo che  $F^c$  è aperto. Se non lo fosse, vi sarebbe un punto  $\mathbf{x} \in F^c$  per il quale ogni palla  $B(\mathbf{x}, r)$  interseca  $(F^c)^c$ , cioè  $F$ ; quindi, scegliendo  $r = 1/n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  esisterebbe un punto  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, 1/n) \cap F$ . La successione  $\{\mathbf{x}_n\}$ , per costruzione, sarebbe contenuta in  $F$ , e convergerebbe a  $\mathbf{x}$  dato che  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|_m < 1/n$ . Ma allora, per ipotesi, il suo limite  $\mathbf{x}$  dovrebbe stare in  $F$ : assurdo perché  $\mathbf{x} \in F^c$ . Dunque  $F^c$  è aperto e  $F$  è chiuso.  $\square$

**Esempi 3.1.10 (1)** Sono chiusi in  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}, \quad \emptyset, \quad [a, b], \quad [a, +\infty[, \quad ]-\infty, b], \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+} \cup \{0\}, \quad \{-65\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z};$$

non sono chiusi in  $\mathbb{R}$ :

$$[a, b[, \quad ]a, b[, \quad ]a, b], \quad ]-\infty, a[, \quad ]b, +\infty[, \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

**(2)** Sono chiusi in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, \quad \emptyset, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| + |y| \leq 3\}; \end{aligned}$$

non sono chiusi in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| + |y| < 3\}, \quad \mathbb{Q}^2, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2. \end{aligned}$$

Si noti che esistono insiemi aperti e non chiusi, insiemi chiusi ma non aperti, insiemi né aperti né chiusi ed insiemi sia aperti che chiusi (vedere però l'esercizio 3.1.18).

## Punti d'accumulazione

Nella teoria dei limiti di funzioni è di basilare importanza la definizione che segue.

**Definizione 3.1.11** *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ . Diciamo che  $\mathbf{x}_0$  è un punto d'accumulazione per  $E$  se esiste una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  che converge a  $\mathbf{x}_0$ .*

La condizione che  $\mathbf{x}_n$  non prenda mai il valore  $\mathbf{x}_0$  serve ad evitare il caso in cui  $\mathbf{x}_n$  è definitivamente uguale a  $\mathbf{x}_0$ ; si vuole cioè che intorno a  $\mathbf{x}_0$  si accumulino *infiniti* punti distinti della successione. E infatti è immediato verificare che  $\mathbf{x}_0$  è un punto d'accumulazione per  $E$  se e solo se ogni palla  $B(\mathbf{x}_0, r)$  contiene infiniti punti di  $E$ . Notiamo anche che un punto di accumulazione per  $E$  può appartenere o non appartenere a  $E$ : ad esempio, 0 è punto di accumulazione per  $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , ma  $0 \neq \frac{1}{n}$  per ogni  $n$ , mentre  $1/2$  è punto d'accumulazione per l'insieme  $[0, 1]$  al quale appartiene.

Mediante i punti d'accumulazione si può dare un'altra caratterizzazione degli insiemi chiusi:

**Proposizione 3.1.12** *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ . Allora  $E$  è chiuso se e solo se  $E$  contiene tutti i propri punti d'accumulazione.*

**Dimostrazione** Se  $E$  è chiuso, e  $\mathbf{x}$  è un punto d'accumulazione per  $E$ , allora esiste  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq E \setminus \{\mathbf{x}\} \subseteq E$  tale che  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  per  $n \rightarrow \infty$ ; per la proposizione 3.1.9 si ottiene  $\mathbf{x} \in E$ .

Viceversa, supponiamo che  $E$  contenga tutti i suoi punti d'accumulazione e prendiamo una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq E$  convergente a  $\mathbf{x}$ : dobbiamo mostrare che  $\mathbf{x} \in E$ , e la tesi seguirà nuovamente dalla proposizione 3.1.9. Il fatto che  $\mathbf{x} \in E$  è evidente nel caso in cui  $\mathbf{x}_n$  è definitivamente uguale a  $\mathbf{x}$ ; in caso contrario esisteranno infiniti indici  $n$  per i quali si ha  $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}$ : i corrispondenti infiniti valori  $\mathbf{x}_n$  sono dunque una successione contenuta in  $E \setminus \{\mathbf{x}\}$  e convergente a  $\mathbf{x}$ . Perciò  $\mathbf{x}$  è punto d'accumulazione per  $E$ , e di conseguenza  $\mathbf{x} \in E$ .  $\square$

Il fondamentale teorema che segue garantisce l'esistenza di punti d'accumulazione per una vastissima classe di insiemi. Diamo anzitutto la seguente

**Definizione 3.1.13** *Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  si dice limitato se esiste  $K \geq 0$  tale che*

$$|\mathbf{x}|_m \leq K \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

**Teorema 3.1.14 (di Bolzano-Weierstrass)** *Ogni sottoinsieme infinito e limitato di  $\mathbb{R}^m$  possiede almeno un punto d'accumulazione.*

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima  $m = 1$ . Faremo uso del seguente risultato:

**Proposizione 3.1.15** *Da ogni successione reale è possibile estrarre una sottosequenza monotona.*

**Dimostrazione** Sia  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  una successione. Poniamo

$$G = \{n \in \mathbb{N} : a_m < a_n \ \forall m > n\} :$$

$G$  è dunque l'insieme degli indici  $n$  tali che  $a_n$  è maggiore di tutti gli  $a_m$  successivi. Ovviamente,  $G$  sarà finito (eventualmente vuoto) oppure infinito.

Supponiamo  $G$  finito: allora esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $n \notin G$  per ogni  $n \geq n_0$ , ossia risulta

$$\forall n \geq n_0 \quad \exists m > n : \quad a_m \geq a_n .$$

Perciò, essendo  $n_0 \notin G$ , esiste  $n_1 > n_0$  (dunque  $n_1 \notin G$ ) tale che  $a_{n_1} \geq a_{n_0}$ ; esisterà allora  $n_2 > n_1$  (in particolare  $n_2 \notin G$ ) tale che  $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ , e così induttivamente si costruisce una sequenza crescente di interi  $n_k$  tale che  $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . La corrispondente sottosuccessione  $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ , per costruzione, è monotona crescente. Supponiamo invece che  $G$  sia infinito: poiché ogni sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  ha minimo (esercizio 1.6.11), possiamo porre successivamente

$$n_0 = \min G, \quad n_1 = \min(G \setminus \{n_0\}), \dots, \quad n_{k+1} = \min(G \setminus \{n_0, n_1, \dots, n_k\}), \dots$$

ottenendo una sequenza crescente di interi  $n_k \in G$  e dunque tali che  $a_m < a_{n_k}$  per ogni  $m > n_k$ ; in particolare  $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$  per ogni  $k$ . La corrispondente sottosuccessione  $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$  è perciò monotona decrescente.  $\square$

**Corollario 3.1.16** *Ogni successione limitata in  $\mathbb{R}$  ha una sottosuccessione convergente.*

**Dimostrazione** La sottosuccessione monotonica della proposizione precedente è limitata per ipotesi, dunque convergente (proposizione 2.3.3).  $\square$

Il corollario appena dimostrato prova anche il teorema nel caso  $m = 1$ : se un insieme  $E$  è infinito e limitato, esso contiene una successione limitata e costituita tutta di punti distinti, la quale, per il corollario, ha una sottosuccessione monotonica e limitata, dunque convergente; il limite di questa sottosuccessione è evidentemente un punto d'accumulazione per  $E$ .

Passiamo ora al caso  $m > 1$ . Sia  $\{\mathbf{x}_n\}$  una successione (costituita tutta di punti distinti) contenuta in  $E$  e proviamo che esiste una sottosuccessione che converge: il suo limite sarà il punto d'accumulazione cercato.

Poiché  $\{\mathbf{x}_n\}$  è limitata, le successioni reali  $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \dots, \{x_n^m\}$  sono limitate. Allora, per il caso  $m = 1$  già visto, esiste una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{n,(1)}\} \subseteq \{\mathbf{x}_n\}$  tale che  $x_{n,(1)}^1$  converge ad un limite  $x^1 \in \mathbb{R}$ ; da  $\{\mathbf{x}_{n,(1)}\}$  possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{n,(2)}\}$  tale che  $x_{n,(2)}^1 \rightarrow x^1$  (perchè estratta dalla successione  $\{x_{n,(1)}^1\}$  che già convergeva a  $x^1$ ) ed inoltre  $x_{n,(2)}^2 \rightarrow x^2$  (perchè estratta dalla successione  $\{x_{n,(1)}^2\}$  che già convergeva a  $x^2$ ). Continuando ad estrarre ulteriori sottosuccessioni  $\{\mathbf{x}_{n,(3)}\} \subseteq \{\mathbf{x}_{n,(2)}\}, \{\mathbf{x}_{n,(4)}\} \subseteq \{\mathbf{x}_{n,(3)}\}, \dots$ , dopo  $m$  passi otterremo una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{n,(m)}\}$  di tutte le precedenti, tale che  $x_{n,(m)}^1 \rightarrow x^1, x_{n,(m)}^2 \rightarrow x^2, \dots, x_{n,(m)}^m \rightarrow x^m$  in  $\mathbb{R}$ . Ne segue che, posto  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ , la successione  $\{\mathbf{x}_{n,(m)}\}$ , che è una sottosuccessione di  $\{\mathbf{x}_n\}$ , converge a  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^m$ .  $\square$

**Osservazioni 3.1.17 (1)** Il punto d'accumulazione costruito nel teorema di Bolzano-Weierstrass non è in generale unico!

**(2)** I punti d'accumulazione di un insieme  $E$  sono i limiti delle successioni di  $E$  che non sono definitivamente costanti.

**Esempi 3.1.18 (1)** L'insieme  $\mathbb{N}$  è infinito ma non limitato in  $\mathbb{R}$ , ed è privo di punti di accumulazione.

(2)  $\{1\}$  è un insieme limitato in  $\mathbb{R}$  ma non infinito, ed è privo di punti di accumulazione.

(3) La successione  $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$  costituisce un insieme infinito e limitato in  $\mathbb{R}$  che ha i due punti d'accumulazione  $+1$  e  $-1$ .

Dal teorema di Bolzano-Weierstrass segue la seguente importante caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi e limitati di  $\mathbb{R}^m$ .

**Teorema 3.1.19** *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ . Allora  $E$  è chiuso e limitato se e solo se da ogni successione contenuta in  $E$  si può estrarre una sottosuccessione che converge ad un elemento di  $E$ .*

**Dimostrazione** Sia  $E$  limitato e chiuso. Sia  $\{\mathbf{x}_n\}$  una successione contenuta in  $E$ ; se essa già converge ad un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , ogni sua sottosuccessione convergerà ancora a  $\mathbf{x}$ , il quale apparterrà al chiuso  $E$  in virtù della proposizione 3.1.9. Se non converge, essa è comunque limitata: per il teorema di Bolzano-Weierstrass avrà una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_n\}$  convergente ad un elemento  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ; poiché  $E$  contiene  $\{\mathbf{x}_n\}$  ed è chiuso, deve essere  $\mathbf{x} \in E$ .

Viceversa, se ogni successione contenuta in  $E$  ha una sottosuccessione che converge ad un punto di  $E$ , allora in particolare  $E$  contiene il limite di ogni successione convergente in esso contenuta, e quindi  $E$  è chiuso per la proposizione 3.1.9. Inoltre se  $E$  non fosse limitato allora per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  esisterebbe  $\mathbf{x}_n \in E$  tale che  $|\mathbf{x}_n|_m > n$ ; ma nessuna sottosuccessione della successione  $\{\mathbf{x}_n\}$  così costruita potrebbe convergere, essendo illimitata. Ciò contraddice l'ipotesi fatta su  $E$ , e quindi  $E$  è limitato.  $\square$

**Osservazione 3.1.20** Gli insiemi  $E$  tali che ogni successione contenuta in  $E$  ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di  $E$  si dicono *compatti*; quindi il teorema precedente caratterizza i sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^m$ .

**Esempi 3.1.21** Sono compatti in  $\mathbb{R}$ :

$$\{-3\}, \quad [a, b], \quad [a, b] \cup [c, d], \quad \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \quad \{(-1)\}_{n \in \mathbb{N}};$$

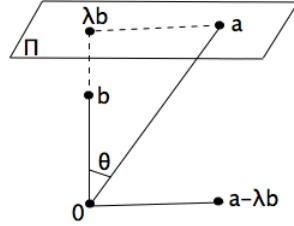
non sono compatti in  $\mathbb{R}$ :

$$]-\infty, a], \quad ]a, b], \quad ]a, b[, \quad [b, +\infty[, \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1], \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}.$$

## Esercizi 3.1

- Si provi che se  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  allora  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = |\mathbf{a}|_m \cdot |\mathbf{b}|_m \cos \vartheta$ , ove  $\vartheta$  è l'angolo convesso fra i due vettori.

[Traccia: Dati  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  in  $\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  e detto  $\Pi$  l'iperpiano  $(m-1)$ -dimensionale ortogonale a  $\mathbf{b}$  e passante per  $\mathbf{a}$ , si osservi che se  $\cos \vartheta \geq 0$  il piano  $\Pi$  interseca il segmento di estremi  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{b}$  in un punto della forma  $\lambda\mathbf{b}$  con  $\lambda \geq 0$ , e si avrà  $\langle \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_m = 0$ ; dunque, da una parte si ha  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_m = \lambda|\mathbf{b}|_m^2$  e dall'altra  $\lambda = \frac{|\mathbf{a}|_m}{|\mathbf{b}|_m} \cos \vartheta$ . Discorso analogo se  $\cos \vartheta \leq 0$ , lavorando con  $-\mathbf{b}$  al posto di  $\mathbf{b}$ .]



2. Provare che  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m |x^i|$  e  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x^i| : i = 1, \dots, m\}$  sono norme in  $\mathbb{R}^m$  e in  $\mathbb{C}^m$ , ossia sono funzioni positive, omogenee e subadditive a valori in  $[0, +\infty[$ .
3. Descrivere le palle  $B(\mathbf{0}, r)$  per le distanze

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_1 \quad \text{e} \quad d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_\infty,$$

ove le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  sono quelle dell'esercizio precedente.

4. Si provi che se  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  e  $r \geq 0$  l'insieme

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m \leq r\}$$

è chiuso in  $\mathbb{R}^m$  (esso si chiama *palla chiusa* di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $r$ ).

5. Si provi che ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  chiuso e limitato inferiormente ha minimo, e che ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  chiuso e limitato superiormente ha massimo. Vi è un risultato analogo in  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ ?
6. Provare che se  $A$  è aperto in  $\mathbb{C}$ , allora  $A \cap \mathbb{R}$  è aperto in  $\mathbb{R}$ . Vale il viceversa?
7. Provare che se  $F$  è chiuso in  $\mathbb{C}$  allora  $F \cap \mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$ . Vale il viceversa?
8. Sia  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ . Dimostrare o confutare i seguenti enunciati:
  - (i) se esiste  $\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n$ , allora  $\mathbf{x}$  è punto d'accumulazione per  $\{\mathbf{x}_n\}$ ;
  - (ii) se  $\mathbf{x}$  è punto d'accumulazione per  $\{\mathbf{x}_n\}$ , allora esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ .
9. Sia  $E \subset \mathbb{R}$  un insieme limitato superiormente e sia  $x = \sup E$ . Provare che se  $x \notin E$  allora  $x$  è punto d'accumulazione per  $E$ . Cosa può succedere se  $x \in E$ ?
10. Se  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  (oppure  $E \subseteq \mathbb{C}^m$ ) e  $\mathbf{x} \in E$ , diciamo che  $\mathbf{x}$  è *interno* a  $E$  se  $E$  è un intorno di  $\mathbf{x}$ . L'insieme dei punti interni a  $E$  si chiama *parte interna* di  $E$  e si indica con  $\overset{\circ}{E}$ .
  - (i) Si provi che  $\overset{\circ}{E}$  è il più grande insieme aperto contenuto in  $E$ .
  - (ii) Determinare  $\overset{\circ}{E}$  quando  $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, |\arg z| \leq \pi/3\}$ .

11. Se  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  (oppure  $E \subseteq \mathbb{C}^m$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ ), diciamo che  $\mathbf{x}$  è *aderente* a  $E$  se ogni palla  $B(\mathbf{x}, r)$  interseca  $E$ . L'insieme dei punti aderenti a  $E$  si chiama *chiusura* di  $E$  e si indica con  $\overline{E}$ .
- (i) Si provi che  $\overline{E}$  è il più piccolo insieme chiuso contenente  $E$ .
  - (ii) Si provi che  $\overline{E}$  contiene tutti i punti d'accumulazione per  $E$ .
  - (iii) Determinare  $\overline{E}$  quando  $E = \{i, -i\} \cup \{z = re^{i\pi/4} : 0 < r < \sqrt{2}\}$ .
12. Se  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  (oppure  $E \subseteq \mathbb{C}^m$ ), si chiama *frontiera* di  $E$ , e si indica con  $\partial E$ , l'insieme dei punti aderenti a  $E$  che non sono interni a  $E$ : in altre parole, si definisce  $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ .
- (i) Si provi che  $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ , che  $\partial E$  è chiuso e che risulta  $\overline{E} = E \cup \partial E$ ,  $\overset{\circ}{E} = E \setminus \partial E$ .
  - (ii) Determinare  $\partial E$  quando  $E = \{i, -i\} \cup \{z = re^{i\pi/4} : 0 < r < \sqrt{2}\}$ .
13. Se  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  (oppure  $E \subseteq \mathbb{C}^m$ ) e  $\mathbf{x} \in E$ ,  $\mathbf{x}$  si dice *punto isolato* per  $E$  se esiste una palla  $B(\mathbf{x}, r)$  tale che  $B(\mathbf{x}, r) \cap E = \{\mathbf{x}\}$ . Provare che un punto aderente a  $E$  o è punto d'accumulazione per  $E$ , oppure è punto isolato per  $E$ .
14. Sia  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k - \frac{1}{k+1}, k + \frac{1}{k+1}]$ . Determinare:
- (i) la chiusura di  $E$ ,
  - (ii) la frontiera di  $E$ ,
  - (iii) la parte interna di  $E$ .
15. Se  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  (oppure  $E \subseteq \mathbb{C}^m$ ), il *diametro* di  $E$  è definito da
- $$\text{diam } E = \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_m : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\}.$$
- Posto  $Q^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x^i \leq 1 \text{ per } i = 1, \dots, m\}$ , provare che  $\text{diam } Q^m = \sqrt{m}$ .
16. Dimostrare che risulta  $\overline{E} = \left[ (\overset{\circ}{E^c})^c \right]^c$ ,  $\overset{\circ}{E} = (\overline{E^c})^c$ .
17. (i) Esibire una successione  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$  che sia limitata e che non abbia alcuna sottosuccessione convergente in  $\mathbb{Q}$ .
- (ii) Esibire un sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$  infinito, limitato e privo di punti d'accumulazione in  $\mathbb{Q}$ .
18. Dimostrare che gli unici sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^m$  che sono simultaneamente aperti e chiusi sono  $\mathbb{R}^m$  e  $\emptyset$ .
- [Traccia:]** per assurdo, sia  $A$  aperto e chiuso in  $\mathbb{R}^m$  tale che  $A \neq \emptyset$  e  $A \neq \mathbb{R}^m$ ; allora  $B = A^c$  verifica le stesse condizioni. Scelti  $\mathbf{a} \in A$  e  $\mathbf{b} \in B$ , siano

$$C = \{t \in \mathbb{R} : \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in A\}, \quad D = \{t \in \mathbb{R} : \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in B\};$$

allora  $C$  e  $D$  sono non vuoti,  $C \cup D = \mathbb{R}$  e  $C \cap D = \emptyset$ . Si provi che  $C$  e  $D$  sono aperti, e quindi anche chiusi, in  $\mathbb{R}$ . In questo modo ci siamo ricondotti al caso  $m = 1$ . Adesso poniamo  $M = \{t \geq 0 : [0, t] \subseteq C\}$ . Si provi che  $M$  è non vuoto, contenuto in  $C$  e limitato superiormente; posto  $\mu = \sup M$ , si provi che deve essere  $\mu \in C \cap D$ , il che è assurdo.]

19. Sia  $E = \{x \in \mathbb{R} : p(x)\}$ , ove  $p(x)$  è una generica proprietà. Si dimostri che:
  - (i) l'insieme  $E$  è chiuso se e solo se per ogni  $\{x_n\}$  che converge a  $x$  vale l'implicazione
 
$$p(x_n) \text{ definitivamente vera} \implies p(x) \text{ vera};$$
  - (ii) l'insieme  $E$  è aperto se e solo se per ogni  $\{x_n\}$  che converge a  $x$  vale l'implicazione
 
$$p(x) \text{ vera} \implies p(x_n) \text{ definitivamente vera}.$$

20. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ . La *proiezione* di  $A$  lungo l'asse  $x^i$  è l'insieme

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{y} \in A : y^i = x\}.$$

Si provi che  $A$  è limitato se e solo se le sue proiezioni  $A_1, \dots, A_m$  sono insiemi limitati in  $\mathbb{R}$ .

21. Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ . Il *derivato* di  $E$  è l'insieme di tutti i punti di accumulazione per  $E$ ; esso si indica con  $\delta E$ .
  - (i) Si provi che  $\delta E$  è un insieme chiuso.
  - (ii) Si determinino  $\delta E$  e  $\delta E \setminus \overset{\circ}{E}$  quando  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k - \frac{1}{k+1}, k + \frac{1}{k+1}]$ .
22. (*Insieme di Cantor*) Dividiamo  $[0, 1]$  in tre parti uguali ed asportiamo l'intervallo aperto centrale di ampiezza  $1/3$ . Dividiamo ciascuno dei due intervalli chiusi residui in tre parti uguali e rimuoviamo i due intervalli aperti centrali di ampiezza  $1/9$ . Per ciascuno dei quattro intervalli residui ripetiamo la stessa procedura: al passo  $n$ -simo, avremo  $2^n$  intervalli chiusi  $I_{k,n}$  ( $k = 1, \dots, 2^n$ ), di ampiezza  $3^{-n}$ , di cui elimineremo le parti centrali aperte  $J_{k,n}$  di ampiezza  $3^{-n-1}$ . L'insieme

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{k,n}$$

si chiama *insieme ternario di Cantor*.

- (i) Si provi che  $C$  è chiuso e privo di punti interni.
- (ii) Si dimostri che tutti i punti di  $C$  sono punti d'accumulazione per  $C$ .
- (iii) Si calcoli la lunghezza complessiva degli intervalli  $J_{k,n}$  rimossi.

## 3.2 Funzioni reali di $m$ variabili

Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , oppure di  $\mathbb{C}^m$ ; considereremo funzioni  $f$  definite su  $A$  a valori reali. Introduciamo anzitutto un po' di terminologia, che d'altronde è analoga a quella usata per le successioni.

**Definizione 3.2.1** *Diciamo che una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata superiormente in  $A$  se l'insieme immagine di  $f$ , cioè*

$$f(A) = \{t \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = t\}$$

*è limitato superiormente; in ogni caso si pone*

$$\sup_A f = \begin{cases} \sup f(A) & \text{se } f(A) \text{ è limitato superiormente,} \\ +\infty & \text{se } f(A) \text{ non è limitato superiormente.} \end{cases}$$

*Similmente, diciamo che  $f$  è limitata inferiormente in  $A$  se l'insieme  $f(A)$  è limitato inferiormente; in ogni caso si pone*

$$\inf_A f = \begin{cases} \inf f(A) & \text{se } f(A) \text{ è limitato inferiormente,} \\ -\infty & \text{se } f(A) \text{ non è limitato inferiormente.} \end{cases}$$

*Diciamo infine che  $f$  è limitata in  $A$  se è sia limitata superiormente che inferiormente in  $A$ .*

Potrà accadere che  $\sup_A f$ , quando è un numero reale, sia un valore assunto dalla funzione, cioè sia un elemento di  $f(A)$ , oppure no; se esiste  $\mathbf{x} \in A$  tale che  $f(\mathbf{x}) = \sup_A f$ , diremo che  $\mathbf{x}$  è un *punto di massimo* per  $f$  in  $A$ , e scriveremo  $f(\mathbf{x}) = \max_A f$ . Analogamente, se  $\inf_A f$  è un numero reale, sia un valore assunto dalla funzione, cioè sia un elemento di  $f(A)$ , oppure no; se esiste  $\mathbf{x} \in A$  tale che  $f(\mathbf{x}) = \inf_A f$ , diremo che  $\mathbf{x}$  è un *punto di minimo* per  $f$  in  $A$ , e scriveremo  $f(\mathbf{x}) = \min_A f$ .

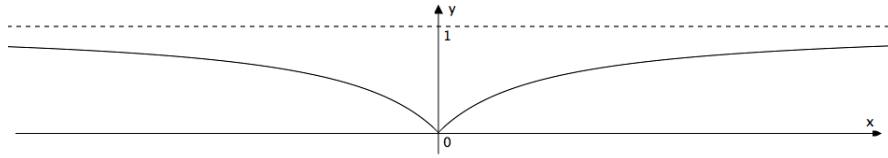
**Definizione 3.2.2** *Il grafico di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è l'insieme*

$$G = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in A, z = f(\mathbf{x})\}.$$

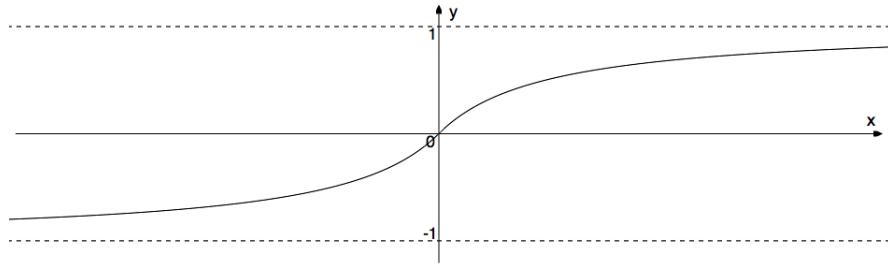
*Il sottograffico di  $f$  è l'insieme*

$$G = \{(\mathbf{x}, z) : \mathbf{x} \in A, z < f(\mathbf{x})\}.$$

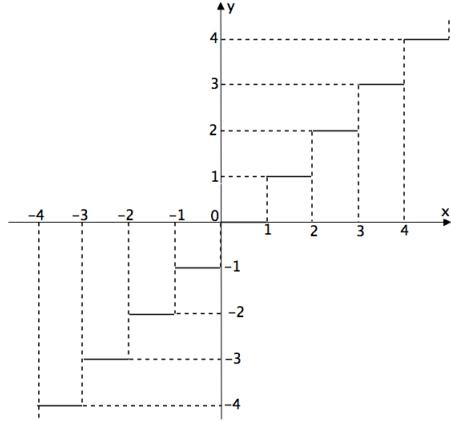
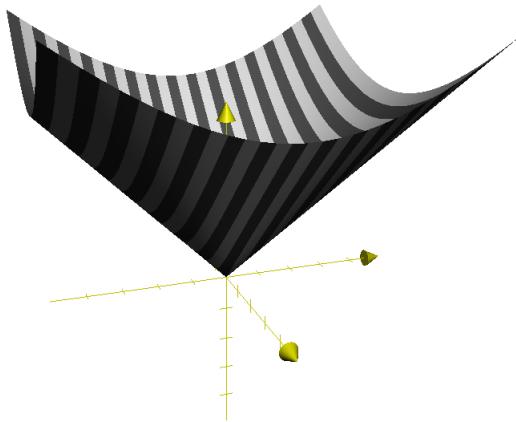
**Esempi 3.2.3 (1)** La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$  è limitata: infatti si ha  $0 \leq f(x) \leq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Risulta anzi  $0 = \inf_{\mathbb{R}} f$  e  $1 = \sup_{\mathbb{R}} f$ ; si noti che  $0$  è il minimo, raggiunto nel punto di minimo  $0$ , mentre  $1$  non appartiene a  $f(\mathbb{R})$  e la funzione  $f$  non ha massimo. Osserviamo anche che  $f$  è *pari*, ossia  $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ : il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'asse  $y$ .



- (2) La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  coincide con la precedente per  $x \geq 0$ , mentre è la precedente cambiata di segno per  $x < 0$ : si tratta di una funzione *dispari*, ossia  $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Risulta in particolare  $1 = \sup_{\mathbb{R}} f$ ,  $-1 = \inf_{\mathbb{R}} f$  e  $f$  non ha né massimo né minimo.



- (3) La funzione  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  è definita su  $\mathbb{R}^2$ , è illimitata superiormente ed è limitata inferiormente da 0. Si ha  $\sup f = +\infty$ , mentre  $\inf f = \min f = 0$ .

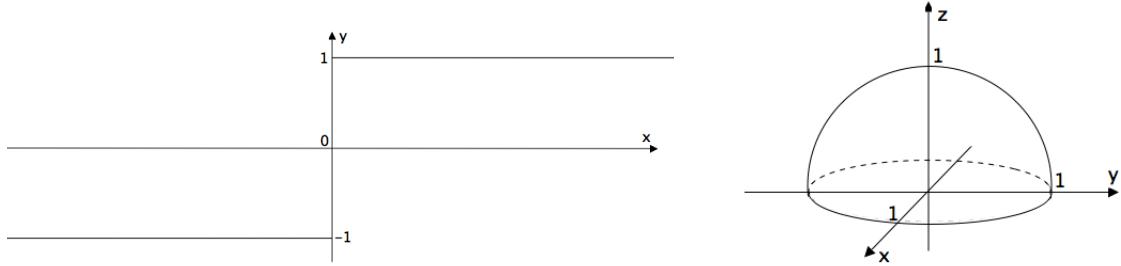


- (4) La funzione *parte intera*, definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  da

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\},$$

non è limitata né inferiormente, né superiormente, cosicché  $\sup f = +\infty$  e  $\inf f = -\infty$ ; il suo grafico presenta dei “salti” di ampiezza 1 in corrispondenza di ciascun punto di ascissa intera.

- (5) La funzione  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  è definita per  $x$  reale non nullo e assume solo i valori  $\pm 1$ . Quindi  $1 = \max f = \sup f$ ,  $-1 = \min f = \inf f$ . Si noti che questa funzione ha infiniti punti di massimo e infiniti punti di minimo.



(6) La funzione  $f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - |\mathbf{x}|_m^2}$  è definita sulla palla unitaria di  $\mathbb{R}^m$ , cioè

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{x}|_m \leq 1\},$$

a valori in  $\mathbb{R}$ . Essa ha massimo 1 (raggiunto per  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) e minimo 0 (raggiunto nei punti della frontiera di  $B$ ).

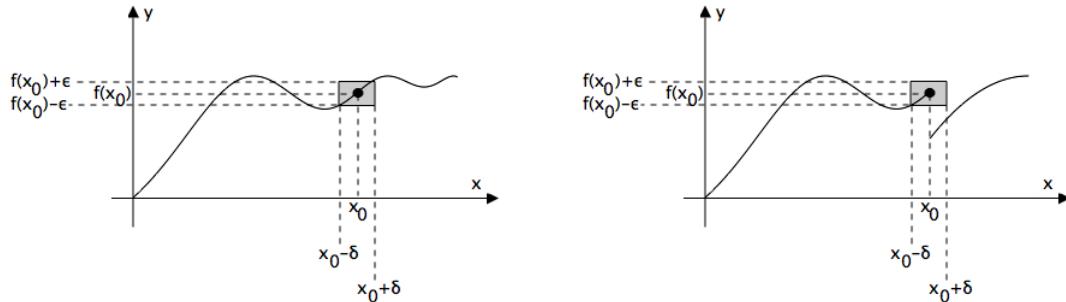
## Funzioni continue

La nozione di funzione continua è strettamente legata all'idea intuitiva della consequenzialità fra causa ed effetto. Ci aspettiamo che piccole variazioni di input provochino piccole variazioni di output: ad esempio, quando si pigia il pedale dell'acceleratore, piccoli incrementi di pressione del piede producono piccoli aumenti di velocità della macchina. Comunque nella nostra esperienza ci sono anche esempi di fenomeni di tipo impulsivo: piccoli aumenti di pressione del dito su un interruttore causano, oltre una certa soglia, un drastico aumento dell'intensità della luce presente in una stanza. Chiameremo continue quelle funzioni  $y = f(x)$  per le quali variando di poco la grandezza  $x$  si ottiene una piccola variazione della quantità  $y$ . Più precisamente:

**Definizione 3.2.4** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , oppure di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Diciamo che  $f$  è continua nel punto  $\mathbf{x}_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Diciamo che  $f$  è continua in  $A$  se è continua in ogni punto di  $A$ .



**Osservazione 3.2.5** La continuità di una funzione è un fatto *locale*: essa può esserci o no a seconda del punto  $\mathbf{x}_0$  che si considera. Per un generico punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  i casi sono due: o  $\mathbf{x}_0$  è punto d'accumulazione per  $A$  (definizione 3.1.11), oppure  $\mathbf{x}_0$  è punto isolato di  $A$ , nel senso che esiste un intorno  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $A \cap B(\mathbf{x}_0, \delta) = \{\mathbf{x}_0\}$

(esercizio 3.1.13). Nel secondo caso, *ogni* funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ , poiché qualunque sia  $\varepsilon > 0$  risulta

$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Nel primo caso, che è l'unico interessante, la definizione di continuità di una funzione si riconduce a quella più generale di limite di funzione, che daremo fra poco.

**(2)** Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in un punto  $(x_0, y_0)$ , allora le funzioni  $x \mapsto f(x, y_0)$  e  $y \mapsto f(x_0, y)$  sono continue rispettivamente nei punti  $x_0$  e  $y_0$ . Si noti però che il viceversa è falso: esistono funzioni  $f(x, y)$  tali che  $f(\cdot, y)$  è continua (rispetto a  $x$ ) per ogni fissato  $y$ ,  $f(x, \cdot)$  è continua (rispetto a  $y$ ) per ogni fissato  $x$ , ma  $f$  non è una funzione continua delle due variabili  $(x, y)$  (si veda l'osservazione 3.2.7 oppure l'esercizio 3.210).

Non tutte le funzioni più importanti sono continue! Vediamo qualche esempio.

**Esempi 3.2.6 (1)** Tutte le funzioni *affini* sono continue. Si tratta delle funzioni  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  della forma

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle_m + b = \sum_{i=1}^m a_i x^i + b,$$

ove  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  e  $b \in \mathbb{R}$  sono assegnati.

Fissato  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  e scelto  $\varepsilon > 0$ , si ha

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m|;$$

in virtù della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 3.1.1) si ottiene

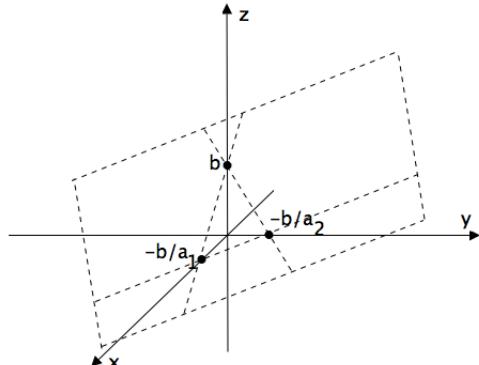
$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{a}|_m \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m.$$

Quindi se  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  basta prendere  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{|\mathbf{a}|_m}$  per avere

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{a}|_m \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < |\mathbf{a}|_m \delta < \varepsilon;$$

d'altronde se  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  si ha  $f(\mathbf{x}) = b$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , e la continuità è ovvia.

**(2)** La *somma di una serie di potenze* con raggio di convergenza  $R > 0$  è una funzione continua sul disco  $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ . Sia infatti  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  per  $|z| < R$ : fissati  $z_0$  con  $|z_0| < R$  e  $\varepsilon > 0$ , scegliamo un numero positivo  $\sigma < R - |z_0|$ ,



cosicché risulta  $B(z_0, \sigma) \subseteq B(0, R)$ . Allora per ogni  $z \in B(z_0, \sigma)$  si ha

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \right| = \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z - z_0| (|z|^{n-1} + |z|^{n-2} |z_0| + \dots + |z| |z_0|^{n-2} + |z_0|^{n-1}) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z - z_0| [n(|z_0| + \sigma)^{n-1}] = \frac{|z - z_0|}{|z_0| + \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| (|z_0| + \sigma)^n. \end{aligned}$$

Dato che la serie di potenze  $\sum n a_n z^n$  ha ancora raggio di convergenza  $R$  (esercizio 2.7.9), otteniamo che la serie all'ultimo membro è convergente, con somma uguale a un numero che dipende da  $z_0$  e da  $\sigma$ , cioè da  $z_0$  e da  $R$ ; in particolare, esiste  $K > 0$  tale che

$$|f(z) - f(z_0)| \leq K |z - z_0| \quad \forall z \in B(z_0, \sigma).$$

Adesso basta scegliere  $\delta$  positivo e minore sia di  $\sigma$  che di  $\varepsilon/K$ , e si ottiene

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

e ciò prova la continuità di  $f$  in  $z_0$ .

**(3)** Come conseguenza dell'esempio precedente, le funzioni trigonometriche  $\cos x$  e  $\sin x$  sono continue su  $\mathbb{R}$ , mentre l'esponenziale  $e^z$  è continua su  $\mathbb{C}$  (e in particolare su  $\mathbb{R}$ ). Se  $a > 0$ , anche la funzione  $a^x$  è continua su  $\mathbb{R}$ , essendo

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**(4)** La funzione parte intera  $f(x) = [x]$  è continua in ogni punto  $x \notin \mathbb{Z}$  ed è discontinua in ogni punto  $x \in \mathbb{Z}$ . Infatti, scelto  $x \notin \mathbb{Z}$ , sia  $\delta = \min\{x - [x], [x + 1] - x\}$ : allora qualunque sia  $\varepsilon > 0$  si ha

$$|t - x| < \delta \implies [t] = [x] \implies |[t] - [x]| = 0 < \varepsilon.$$

D'altra parte se  $x \in \mathbb{Z}$  allora, scelto  $\varepsilon \in ]0, 1]$  si ha

$$|[t] - [x]| = |[t] - x| = 1 \geq \varepsilon \quad \forall t \in ]x - 1, x[,$$

quindi è impossibile trovare un  $\delta > 0$  per cui si abbia

$$|t - x| < \delta \implies |[t] - [x]| < \varepsilon.$$

**(5)** Se  $b > 0$  e  $b \neq 1$ , la funzione logaritmo di base  $b$  è continua in  $]0, +\infty[$ . Sia infatti  $x_0 > 0$ : se  $\delta \in ]0, x_0[$  e  $|x - x_0| < \delta$ , si ha, supponendo ad esempio  $x < x_0$ :

$$|\log_b x - \log_b x_0| = \left| \log_b \frac{x}{x_0} \right| = |\log_b e| \ln \frac{x_0}{x} = |\log_b e| \ln \left[ 1 + \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right) \right].$$

Notiamo ora che vale l'importante diseguaglianza

$$\ln(1+t) \leq t \quad \forall t > -1 :$$

essa segue dalla crescenza del logaritmo e dal fatto, verificabile direttamente se  $t \geq 0$  e con il criterio di Leibniz (proposizione 2.5.3) se  $-1 < t < 0$ , che

$$1+t \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t \quad \forall t > -1.$$

Da tale diseguaglianza ricaviamo

$$|\log_b x - \log_b x_0| \leq |\log_b e| \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right) = |\log_b e| \frac{x_0 - x}{x} \leq |\log_b e| \frac{\delta}{x_0 - \delta};$$

quindi, fissato  $\varepsilon > 0$ , basterà prendere  $\delta$  abbastanza piccolo per ottenere che l'ultimo membro sia minore di  $\varepsilon$ . Nel caso in cui sia  $x_0 < x$ , il calcolo è del tutto simile.

**Osservazione 3.2.7** È importante sottolineare che una funzione delle  $m$  variabili  $x^1, \dots, x^m$  può essere continua separatamente in ciascuna variabile  $x^i$ , senza essere continua rispetto alla  $m$ -pla  $(x^1, \dots, x^m)$ . Ad esempio, consideriamo la funzione  $f$  così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ oppure } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0; \end{cases}$$

per essa si ha:

- per ogni  $y \in \mathbb{R}$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è continua su  $\mathbb{R}$ ;
- per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è continua su  $\mathbb{R}$ ;
- la funzione  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  è discontinua nel punto  $(0, 0)$ .

I primi due punti sono facili da verificare: per il primo, ad esempio, si noti che quando  $y = 0$  la funzione  $x \mapsto f(x, 0)$  è identicamente nulla e dunque continua; invece quando  $y \neq 0$  la funzione è il rapporto di due polinomi nella variabile  $x$ , il secondo dei quali sempre strettamente positivo, per cui la funzione è continua come conseguenza degli esercizi 3.2.5 e 3.2.6. Il terzo punto si verifica facilmente osservando che per  $(x, y) \neq (0, 0)$  si ha

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2};$$

se valesse la continuità nel punto  $(0, 0)$ , fissato  $\varepsilon > 0$  dovremmo trovare  $\delta > 0$  tale che risulti, per ogni  $(x, y)$  verificante  $x^2 + y^2 < \delta^2$ ,  $|f(x, y)| < \varepsilon$ . Ma fissando ad esempio  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  e scegliendo  $x = y$ , con  $y$  verificante  $2y^2 < \delta^2$ , si trova invece  $|f(y, y)| = \frac{1}{2}$ , quantità costante che ovviamente è maggiore del nostro  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ . Quindi la  $f$  non è continua in  $(0, 0)$ .

## Esercizi 3.2

1. Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(A) \subseteq B$ ; sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  e sia  $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ . Si provi che se  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  e se  $g$  è continua in  $y_0$ , allora la funzione composta  $g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .
2. Descrivere le funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  che in un fissato punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  verificano le seguenti proprietà, “parenti” della definizione di continuità:
  - (i) esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  risulta
 
$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon;$$
  - (ii) esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  risulta
 
$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon;$$
  - (iii) per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $\delta > 0$  risulta
 
$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon;$$
  - (iv) esistono  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tali che risulta
 
$$\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

3. (*Permanenza del segno*) Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Si provi che se  $f(\mathbf{x}_0) > 0$ , allora esiste una palla  $B(\mathbf{x}_0, R)$  tale che  $f(\mathbf{x}) > 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R) \cap A$ .

4. Si provi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lambda & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è discontinua nel punto 0, qualunque sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

5. Si provi che sono funzioni continue le combinazioni lineari di funzioni continue ed i prodotti di funzioni continue.
6. Si provi che se  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  e  $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , allora  $\frac{1}{f}$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .  
**[Traccia:** usare il teorema di permanenza del segno (esercizio 3.2.3).]
7. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Provare che la funzione  $f(x) = x^\alpha$  è continua su  $[0, +\infty[$  (se  $\alpha \geq 0$ ) oppure su  $]0, +\infty[$  (se  $\alpha < 0$ ).

8. (*Funzioni a valori vettoriali*) Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  e sia  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione: la funzione (vettoriale)  $\mathbf{f}$  associa ad ogni vettore  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in A$  un altro vettore  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $\mathbf{f}$  è *continua* in  $\mathbf{x}_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in A, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \quad \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|_n < \varepsilon.$$

Provare che  $\mathbf{f}$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  se e solo se le sue  $n$  *componenti scalari*  $f^1, \dots, f^n$  sono continue in  $\mathbf{x}_0$ .

9. Sia  $B$  una palla di  $\mathbb{R}^m$  oppure di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Per ogni coppia di elementi fissati  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$ , provare che la funzione

$$g(t) = f(t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}), \quad t \in [0, 1],$$

è ben definita e continua.

10. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione seguente:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4(x^2 - y)(2y - x^2)}{y^2} \vee 0 & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Si provi che:

- (i)  $f$  è continua in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ;
- (ii)  $f$  è discontinua in  $(0, 0)$ ;
- (iii) per ogni  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(\cdot, y)$  è continua su  $\mathbb{R}$ ;
- (iv) per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, \cdot)$  è continua su  $\mathbb{R}$ .

11. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  e siano  $f, g$  due funzioni reali limitate definite in  $A$ . Si provi che

$$\sup_A(f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g, \quad \inf_A(f + g) \geq \inf_A f + \inf_A g,$$

$$\sup_A(\lambda f) = \begin{cases} \lambda \sup_A f & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda \inf_A f & \text{se } \lambda \leq 0, \end{cases} \quad \inf_A(\lambda f) = \begin{cases} \lambda \inf_A f & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda \sup_A f & \text{se } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

### 3.3 Limiti

Estendiamo ora al caso delle funzioni reali la nozione di limite, che ci è già nota nel caso delle successioni. Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  oppure di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$ .

**Definizione 3.3.1** Sia  $L \in \mathbb{R}$ . Diciamo che  $L$  è il limite di  $f(\mathbf{x})$  per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$  in  $A$ , e scriviamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = L,$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Se, in particolare,  $L = 0$ , si dice che  $f$  è infinitesima per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

Se l'insieme  $A$  coincide con  $\mathbb{R}^m$  (o con  $\mathbb{C}^m$ ), oppure è sottinteso dal contesto, si scrive più semplicemente

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \quad \text{anziché} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Si noti che in generale  $\mathbf{x}_0$  non appartiene ad  $A$ , e che  $\mathbf{x}_0$  non è tra i valori di  $\mathbf{x}$  che sono coinvolti nella definizione di limite. Quindi, anche se per caso si avesse  $\mathbf{x}_0 \in A$ , non è lecito far prendere alla variabile  $\mathbf{x}$  il valore  $\mathbf{x}_0$ . Ad esempio, consideriamo la funzione

$$\text{pippo}(x) = \begin{cases} -19 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{130\} \\ 237 & \text{se } x = 130 \end{cases}$$

il punto 130 è di accumulazione per  $\mathbb{R}$ , e benché risulti  $\text{pippo}(130) = 237$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 130} \text{pippo}(x) = -19.$$

Il limite di una funzione può essere anche  $\pm\infty$ :

**Definizione 3.3.2** Diciamo che  $f(\mathbf{x})$  tende a  $+\infty$ , oppure a  $-\infty$ , per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  in  $A$ , se per ogni  $M > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies f(\mathbf{x}) > M,$$

oppure

$$\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies f(\mathbf{x}) < -M.$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = +\infty, \quad \text{oppure} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = -\infty.$$

Nel caso  $m = 1$  e  $A \subseteq \mathbb{R}$ , in particolare, si può fare anche il *limite destro*, oppure il *limite sinistro*, per  $x \rightarrow x_0$ ; nella definizione 3.3.1 questo corrisponde a prendere come  $A$  la semiretta  $]x_0, +\infty[$  oppure la semiretta  $]-\infty, x_0[$ . Si scrive in tali casi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda,$$

e ciò corrisponde a dire che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

oppure

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

Infine, sempre nel caso  $m = 1$  e  $A \subseteq \mathbb{R}$ , se  $A$  è illimitato superiormente, oppure inferiormente, si può fare il limite per  $x \rightarrow +\infty$ , oppure per  $x \rightarrow -\infty$ : si avrà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda,$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $M > 0$  tale che

$$x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{oppure} \quad x < -M \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

**Esempi 3.3.3 (1)** Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases} & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1; \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x &= \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1, \end{cases} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x &= \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**(2)** Se  $x_0 \in \mathbb{Z}$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0 - 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0;$$

in particolare, se  $x_0 \in \mathbb{Z}$  il limite di  $[x]$  per  $x \rightarrow x_0$  non esiste (esercizio 3.3.3). Si ha però

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty.$$

(I lettori sono invitati a verificare tutte queste affermazioni!)

**Osservazione 3.3.4** I limiti sono legati alla continuità nel modo seguente. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Il punto  $\mathbf{x}_0$  può appartenere o non appartenere ad  $A$ . Se  $\mathbf{x}_0 \in A$ , si ha

$$f \text{ continua in } \mathbf{x}_0 \iff \exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L = f(\mathbf{x}_0).$$

Se invece, caso più interessante,  $\mathbf{x}_0 \notin A$ , allora il fatto che il limite esista finito equivale a dire che possiamo estendere la funzione  $f$  all'insieme  $A \cup \{\mathbf{x}_0\}$  in modo che l'estensione sia continua in  $\mathbf{x}_0$ : basta assegnarle in tale punto il valore del limite. In altre parole, definendo

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ L & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

si ottiene l'equivalenza

$$\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \iff \bar{f} \text{ è continua in } \mathbf{x}_0$$

(si confronti con l'osservazione 3.2.5).

**Esempi 3.3.5 (1)** Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

ciò segue dalle disuguaglianze

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$$

e dal fatto che il primo e il terzo membro tendono a 1 per  $x \rightarrow 0$  (esempio 3.2.6 (3); si veda anche l'esercizio 3.3.8). Dunque la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua nel punto 0. D'altronde questo si poteva vedere anche ricordando che, per il teorema 2.7.11,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

la serie di potenze a secondo membro ha raggio di convergenza infinito, ed in particolare ha somma uguale a 1 per  $x = 0$ . La sua somma in  $\mathbb{R}$  è dunque la funzione  $\bar{f}$ , la quale risulta continua in virtù dell'esempio 3.2.6 (2).

**(2)** Proviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Si ha (teorema 2.7.11)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La serie a secondo membro ha raggio di convergenza infinito e nel punto 0 ha somma uguale a  $1/2$ ; ne segue che la somma della serie, cioè la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua per  $x = 0$ , e ciò prova la tesi.

Si noti che la stessa conclusione si poteva ottenere più semplicemente, osservando che

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x},$$

da cui, per l'esempio precedente e per la continuità del coseno, esempio 3.2.6 (3),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**(3)** In modo analogo, utilizzando la serie esponenziale, si prova che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \forall a > 0.$$

I limiti per funzioni di  $m$  variabili ( $m > 1$ ) costituiscono un problema alquanto difficile, più che nel caso di una sola variabile: è spesso più facile dimostrare che un dato limite non esiste, piuttosto che provarne l'esistenza quando esso esiste. Il motivo è che in presenza di più variabili il punto  $\mathbf{x}$  può avvicinarsi al punto d'accumulazione  $\mathbf{x}_0$  da varie direzioni, lungo una qualunque retta o anche lungo traiettorie più complicate. Gli esempi che seguono illustrano alcune delle possibili situazioni.

**Esempi 3.3.6 (1)** Vediamo se esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Osservato che  $x^2 \leq x^2 + y^2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , risulta

$$\frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \leq |(x, y)|_2^2$$

e quindi il limite proposto esiste e vale 0.

**(2)** Esaminiamo ora l'esistenza o meno del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

In questo caso sia il numeratore che il denominatore sono polinomi di secondo grado: se ci avviciniamo all'origine lungo la retta  $y = kx$ , si ottiene

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Quindi la funzione che stiamo esaminando assume valore costante su ogni retta per l'origine, ma la costante cambia da retta a retta: ciò significa che in ogni intorno dell'origine la funzione assume tutti i valori  $\frac{k}{1+k^2}$  con  $k \in \mathbb{R}$ , ossia tutti i valori compresi nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Dunque essa non ha limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

(3) Come si comporta la funzione  $\frac{yx^2}{y^2+x^4}$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ? Se, come nell'esempio precedente, ci restringiamo alle rette  $y = kx$ , otteniamo i valori

$$\frac{yx^2}{y^2+x^4} = \frac{kx^3}{k^2x^2+x^4} = \frac{kx}{k^2+x^2}$$

i quali, per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , tendono a 0 qualunque sia  $k \in \mathbb{R}$ . Dunque il limite della funzione per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , se esiste, deve essere 0. D'altra parte, se ci si restringe alle parabole  $y = cx^2$ , si ottiene il valore costante

$$\frac{yx^2}{y^2+x^4} = \frac{c}{c^2+1}$$

che varia da parabola a parabola. Di conseguenza, anche in questo caso, il limite della funzione non esiste.

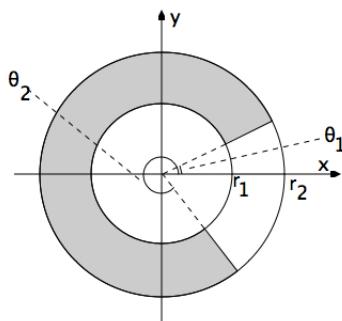
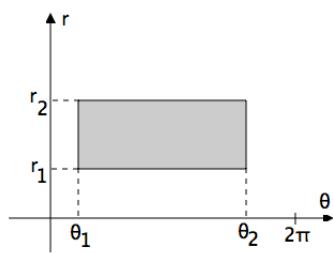
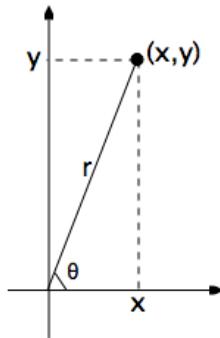
Dagli esempi precedenti si conclude che non esiste una ricetta sicura e universale per stabilire l'esistenza o la non esistenza di un limite in più variabili: ogni caso va studiato a parte.

**Osservazione 3.3.7** Nel caso speciale  $m = 2$  esiste un metodo abbastanza efficace in molti casi, basato sull'utilizzo delle *coordinate polari*, già incontrate nello studio della forma trigonometrica dei numeri complessi. Poniamo

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta, \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Geometricamente, nel piano  $xy$  la quantità  $r$  è la distanza del punto  $(x,y)$  dall'origine, mentre il numero  $\vartheta$  è l'ampiezza dell'angolo che il segmento di estremi  $(0,0)$  e  $(x,y)$  forma con il semiasse positivo delle ascisse (orientato in verso antiorario).

Si noti che la corrispondenza  $(r, \vartheta) \mapsto (x, y)$  non è biunivoca: infatti, tutte le coppie  $(0, \vartheta)$  rappresentano l'origine, mentre le coppie  $(r, 0)$  e  $(r, 2\pi)$  rappresentano lo stesso punto sul semiasse positivo delle ascisse. L'applicazione  $(r, \vartheta) \mapsto (x, y)$  trasforma rettangoli del piano  $r\vartheta$  in settori di corone circolari del piano  $xy$ .



Naturalmente, ricordando la corrispondenza  $(x, y) \mapsto x + iy$ , definita fra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ , la quale è bigettiva e preserva le distanze, si vede immediatamente che la rappresentazione in coordinate polari è la trasposizione in  $\mathbb{R}^2$  della rappresentazione in forma trigonometrica dei numeri complessi.

Consideriamo allora un limite della forma

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$$

ove  $f$  è una funzione reale definita in un intorno di  $(0, 0)$ , salvo al più  $(0, 0)$ . Vale il seguente risultato:

**Proposizione 3.3.8** *Risulta*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(i) per ogni  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  esiste il limite, indipendente da  $\vartheta$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = L;$$

(ii) tale limite è uniforme rispetto a  $\vartheta$ , vale a dire che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\rho > 0$  tale che

$$|f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) - L| < \varepsilon \quad \forall r \in ]0, \rho[ \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi].$$

**Dimostrazione** Supponiamo che  $f(x, y) \rightarrow L$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ : allora, per definizione, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\rho > 0$  tale che

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in B((0, 0), \rho).$$

Dato che  $(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \in B((0, 0), \rho)$  per ogni  $r \in ]0, \rho[$  e per ogni  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ , otteniamo

$$|f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) - L| < \varepsilon \quad \forall r \in ]0, \rho[, \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi],$$

cosicché valgono (i) e (ii).

Viceversa, per ogni punto  $(x, y) \in B((0, 0), \rho)$ , posto  $r \cos \vartheta = x$  e  $r \sin \vartheta = y$ , si ha  $r \in ]0, \rho[$  e dunque, per (i) e (ii),

$$|f(x, y) - L| = |f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) - L| < \varepsilon;$$

ne segue  $f(x, y) \rightarrow L$ .  $\square$

**Esempi 3.3.9 (1)** Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2 + y^2)}{\ln[1 + (x^2 + y^2)]}.$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r^2}{\ln(1 + r^2)} = 2,$$

ed il limite è ovviamente uniforme rispetto a  $\vartheta$ , dato che tale variabile è sparita. Si conclude che il limite cercato è 2.

(2) Consideriamo il limite molto simile

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2 + 3y^2)}{\ln[1 + (4x^2 + y^2)]}.$$

Con la stessa procedura arriviamo a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r^2(\cos^2 \vartheta + 3\sin^2 \vartheta)}{\ln[1 + r^2(4\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)]} = 2 \frac{\cos^2 \vartheta + 3\sin^2 \vartheta}{4\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 2 \frac{3 - 2\cos^2 \vartheta}{3\cos^2 \vartheta + 1},$$

e questo limite dipende da  $\vartheta$ . Ne segue che il limite proposto non esiste.

## Il “teorema-ponte”

Il collegamento fra i limiti di successioni ed i limiti di funzioni è fornito dal teorema che segue, il quale ci darà modo di dedurre senza colpo ferire tutta la teoria dei limiti di funzioni dai corrispondenti risultati già dimostrati nel capitolo 2 per le successioni.

**Teorema 3.3.10 (teorema-ponte)** *Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  oppure di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Sia inoltre  $L \in \mathbb{R}$  oppure  $L = \pm\infty$ . Si ha*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

*se e solo se per ogni successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , convergente a  $\mathbf{x}_0$  per  $n \rightarrow \infty$ , risulta*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = L.$$

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Sia ad esempio  $L \in \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f(\mathbf{x}) \rightarrow L$  per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ; sia poi  $\{\mathbf{x}_n\}$  una successione contenuta in  $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per ipotesi, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (A \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon;$$

d'altra parte, poiché  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$n \geq \nu \implies |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|_m < \delta.$$

Inoltre, dato che  $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$  per ogni  $n$ , si ha

$$\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (A \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \quad \forall n \geq \nu,$$

e pertanto

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Ciò prova che  $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$ . Se  $L = \pm\infty$  la tesi si prova in modo del tutto simile.

( $\impliedby$ ) Supponiamo che  $L \in \mathbb{R}$ , e che si abbia  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = L$  per qualunque successione  $\{\mathbf{x}_n\}$  contenuta in  $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  tendente a  $\mathbf{x}_0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Se, per assurdo, non

fosse vero che  $f(\mathbf{x})$  tende a  $L$  per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , esisterebbe  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  si troverebbe un punto  $\mathbf{x}_\delta \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  per il quale avremmo

$$|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0|_m < \delta \quad \text{ma} \quad |f(\mathbf{x}_\delta) - L| \geq \varepsilon.$$

Scegliendo  $\delta = 1/n$ , potremmo allora costruire una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  tale che

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|_m < \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad |f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Avremmo perciò  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ,  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$  ma  $f(\mathbf{x}_n)$  non tenderebbe a  $L$ , contro l'ipotesi. Dunque

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Il caso  $L = \pm\infty$  è del tutto analogo.  $\square$

**Osservazioni 3.3.11 (1)** Il teorema-ponte vale anche nel caso in cui  $m = 1$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $x \rightarrow \pm\infty$  (esercizio 3.3.11).

**(2)** Dal teorema-ponte si deduce che una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua nel punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  se e solo se per ogni successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq A$  convergente a  $\mathbf{x}_0$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0).$$

**Esempio 3.3.12** Calcoliamo il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+y)}{y},$$

ove  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . Utilizzeremo il teorema-ponte. Sia  $\{y_n\}$  una successione infinitesima tale che  $y_n \neq 0$  per ogni  $n$ . Posto, per ogni  $n$ ,  $x_n = \log_b(1 + y_n)$ , risulta

$$y_n = b^{x_n} - 1,$$

e quindi

$$\frac{\log_b(1+y_n)}{y_n} = \frac{x_n}{b^{x_n} - 1};$$

dalle proprietà di  $\{y_n\}$  segue (per la continuità del logaritmo, esempio 3.2.6 (5)) che  $\{x_n\}$  è infinitesima e che  $x_n \neq 0$  per ogni  $n$ . Tenuto conto dell'esempio 3.3.5 (3) e del teorema-ponte, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b(1+y_n)}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{b^{x_n} - 1} = \frac{1}{\log b},$$

e pertanto, ancora dal teorema-ponte,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+y)}{y} = \frac{1}{\log b}.$$

Per un altro modo di calcolare tale limite si veda l'esercizio 3.3.10.

Dal teorema-ponte e dai corrispondenti risultati esposti nel teorema 2.1.11 seguono le usuali proprietà algebriche dei limiti:

**Proposizione 3.3.13** *Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  oppure di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$  e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni tali che*

$$\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L, \quad \exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M,$$

con  $L, M \in \mathbb{R}$ . Allora:

- (i)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = L + M;$
- (ii)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = LM;$
- (iii) se  $M \neq 0$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L}{M}.$

Si tenga ben presente che nei casi in cui  $L$ , oppure  $M$ , o entrambi, valgono  $0$  e  $\pm\infty$ , ci si può imbattere in forme indeterminate del tipo  $+\infty - \infty$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ; in tutti questi casi può succedere letteralmente di tutto (esercizi 3.3.15, 3.3.16, 3.3.17 e 3.3.18).

### Esercizi 3.3

1. Si provi che la funzione  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  non ha limite per  $x \rightarrow 0$  (in  $\mathbb{R}$ ); si provi poi che, analogamente, la funzione  $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|_m}$  non ha limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  (in  $\mathbb{R}^m$ ).
2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6^x - 6^3}{x - 3}.$$

3. Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Provare che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ e } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

4. Dimostrare che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|;$$

è vero il viceversa?

5. In quali punti  $x_0 \in \mathbb{R}$  la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ha limite?

6. Posto

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{|x|} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

7. (*Teorema di permanenza del segno*) Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$ . Si provi che se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) > 0$$

allora esiste una palla  $B(\mathbf{x}_0, R)$  tale che

$$f(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R) \cap (A \setminus \{\mathbf{x}_0\}).$$

8. (*Monotonia dei limiti*) Siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$ . Si provi che se  $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  in una palla  $B(\mathbf{x}_0, R) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , allora si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}),$$

sempre che tali limiti esistano.

9. Provare che il limite di una funzione in un punto, se esiste, è unico.

10. (*Limiti di funzioni composte*) Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$  e sia

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

Sia poi  $B \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $B \supseteq f(A)$  e supponiamo che  $y_0$  sia punto d'accumulazione per  $B$ . Sia infine  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L \in [-\infty, +\infty].$$

Si provi che se vale una delle due condizioni seguenti:

- (a)  $g$  è continua in  $y_0$ , oppure (b)  $f(\mathbf{x}) \neq y_0$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ ,

allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = L.$$

Si provi inoltre che ciò è falso in generale se non valgono né (a) né (b).

11. Enunciare e dimostrare il teorema-ponte nel caso in cui  $A \subseteq \mathbb{R}$  sia illimitato superiormente o inferiormente e  $x$  tenda a  $+\infty$  oppure  $-\infty$ .

12. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3 \cos x}.$$

13. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^2, \quad \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x-2}, \quad \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right], \\
 & \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1-e^{2x}}, \quad \text{(v)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}, \quad \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{3x}, \\
 & \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1-e^{2x}}, \quad \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2}, \\
 & \text{(x)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}, \quad \text{(xi)} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}, \quad \text{(xii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{3x}.
 \end{aligned}$$

14. Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

15. Si costruiscano quattro coppie di funzioni  $f(x), g(x)$  tali che:

(a) valga  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ,

(b) per il limite della differenza  $f(x) - g(x)$  valga una delle seguenti quattro situazioni:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = -\infty, \\
 & \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] \text{ non esiste}.
 \end{aligned}$$

16. Analogamente all'esercizio 3.3.15, si forniscano esempi che illustrino tutti i casi possibili per il limite di  $f(x)g(x)$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ .

17. Analogamente all'esercizio 3.3.15, si forniscano esempi che illustrino tutti i casi possibili per il limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

18. Analogamente all'esercizio 3.3.15, si forniscano esempi che illustrino tutti i casi possibili per il limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ .

19. Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Diciamo che  $f$  è *crescente* in  $I$  se

$$x, x' \in I, \quad x < x' \implies f(x) \leq f(x');$$

diciamo che  $f$  è *strettamente crescente* in  $I$  se

$$x, x' \in I, \quad x < x' \implies f(x) < f(x').$$

Diciamo poi che  $f$  è *decrecente*, oppure *strettamente decrecente*, in  $I$ , se

$$x, x' \in I, \quad x < x' \implies f(x) \geq f(x') \quad \text{oppure} \quad f(x) > f(x').$$

Una funzione crescente, o decrescente, in  $I$  si dirà *monotona*; una funzione strettamente crescente, o strettamente decrescente, in  $I$  si dirà *strettamente monotona*. Si provi che se  $f$  è monotona in  $I$  allora per ogni  $x_0 \in I$  esistono (finiti) i limiti destro e sinistro

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

e che

$$\begin{cases} f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

20. Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di  $A$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Il *massimo limite* ed il *minimo limite* di  $f$  per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  sono i numeri  $m, \mu \in [-\infty, +\infty]$  così definiti:

$$m = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)} f(\mathbf{x}), \quad \mu = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)} f(\mathbf{x});$$

essi si denotano con le scritture

$$m = \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}), \quad \mu = \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}).$$

Si verifichi che

- (i)  $\liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ ;
- (ii) si ha  $\liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  se e solo se esiste, finito o infinito,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ , ed in tal caso

$$\liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}).$$

21. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{(x+y)^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 + x + y}{x^2 + |x| + |y|}. \end{aligned}$$

22. (i) Posto  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ , si provi che esistono, e sono diversi fra loro, i due limiti

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right], \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right].$$

- (ii) Posto invece  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , si provi che i due limiti esistono e sono uguali, ma che non esiste il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

(iii) Posto infine

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0, \end{cases}$$

si provi che esiste il terzo limite, ma non i primi due.

### 3.4 Proprietà delle funzioni continue

Le funzioni continue a valori reali hanno svariate proprietà legate all'ordinamento di  $\mathbb{R}$ . Il primo risultato riguarda funzioni definite su insiemi compatti (osservazione 3.1.20), i quali, visto che consideriamo funzioni definite in  $\mathbb{R}^m$  o  $\mathbb{C}^m$ , sono limitati e chiusi (teorema 3.1.19).

**Teorema 3.4.1 (di Weierstrass)** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  (oppure  $A \subseteq \mathbb{C}^m$ ) un insieme compatto non vuoto, e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è limitata in  $A$  ed assume massimo e minimo su  $A$ .*

**Dimostrazione** Sia  $L = \sup_A f$ ; può essere  $L = +\infty$ , oppure  $L \in \mathbb{R}$ . In ogni caso dalle proprietà dell'estremo superiore segue che esiste  $\{y_n\} \subseteq f(A)$  tale che  $y_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$ : infatti, se  $L = +\infty$  nessun  $n \in \mathbb{N}$  è maggiorante per  $f(A)$  e quindi esiste  $y_n \in f(A)$  tale che  $y_n > n$ , mentre se  $L \in \mathbb{R}$  nessun numero della forma  $L - \frac{1}{n}$  è maggiorante per  $f(A)$  e quindi esiste  $y_n \in f(A)$  tale che  $L - \frac{1}{n} < y_n \leq L$ .

Poiché  $\{y_n\} \subseteq f(A)$ , per ogni  $n$  esiste  $\mathbf{x}_n \in A$  tale che  $f(\mathbf{x}_n) = y_n$ . La successione  $\{\mathbf{x}_n\}$  è dunque contenuta in  $A$ . Dato che  $A$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$  estratta da  $\{\mathbf{x}_n\}$  che converge per  $k \rightarrow \infty$  ad un punto  $\mathbf{x} \in A$ : essendo  $f$  continua, si deduce che  $f(\mathbf{x}_{n_k}) = y_{n_k}$  converge a  $f(\mathbf{x})$  per  $k \rightarrow \infty$ .

D'altra parte, poiché  $\{y_{n_k}\}$  è una sottosuccessione della successione  $\{y_n\}$  che converge a  $L$ , anche  $y_{n_k}$  deve tendere a  $L$  per  $k \rightarrow \infty$ . Per l'unicità del limite (esercizio 3.3.9), si ha  $L = f(\mathbf{x})$ . In particolare, essendo  $f$  a valori in  $\mathbb{R}$ , si ha  $L \in \mathbb{R}$  e dunque  $f$  è limitata superiormente; inoltre  $L \in f(A)$ , cioè  $L$  è un massimo.

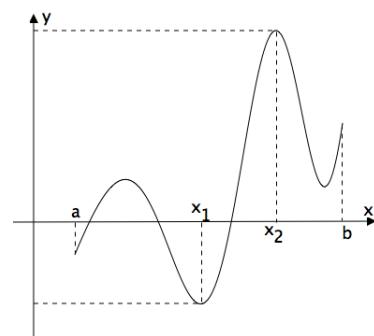
In modo del tutto analogo si prova che  $f$  è limitata inferiormente e che ha minimo in  $A$ .

□

**Osservazioni 3.4.2 (1)** Il punto di massimo, così come quello di minimo, non è necessariamente unico!

**(2)** Il teorema di Weierstrass è falso se togliamo una qualunque delle sue ipotesi:

- l'insieme  $A = [0, \infty[$  è chiuso ma non limitato e la funzione  $f(x) = x$  è continua in  $A$  ma non limitata;
- l'insieme  $A = ]0, 1]$  è limitato ma non chiuso e la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  è continua ma non limitata;



- nell'insieme compatto  $A = [0, 2]$  la funzione  $f(x) = x - [x]$  non è continua e non ha massimo.

Il risultato che segue riguarda funzioni definite su una palla  $B(\mathbf{x}_0, R)$  di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ .

**Teorema 3.4.3 (di esistenza degli zeri)** *Sia  $f : B(\mathbf{x}_0, R) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e supponiamo che esistano  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 \in B(\mathbf{x}_0, R)$  tali che  $f(\mathbf{a}_1) < 0, f(\mathbf{b}_1) > 0$ . Allora esiste almeno un punto  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R)$  tale che  $f(\mathbf{x}) = 0$ .*

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima  $m = 1$  e  $B(\mathbf{x}_0, R) \subseteq \mathbb{R}$ , cosicché  $B(\mathbf{x}_0, R) = ]x_0 - R, x_0 + R[$  (il fatto che tale intervallo sia aperto non ha comunque nessuna importanza nell'argomento che segue). Si ha  $f(a_1) < 0 < f(b_1)$  e possiamo anche supporre che  $a_1 < b_1$ , perché in caso contrario basta considerare  $-f$  al posto di  $f$ .

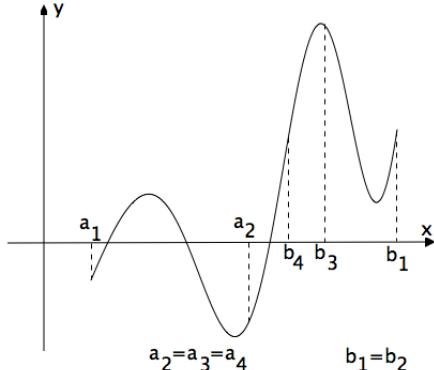
Dividiamo in due parti uguali l'intervallo  $[a_1, b_1]$  mediante il punto  $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ : se  $f$  si annulla proprio in tale punto abbiamo finito e la tesi è provata, altrimenti per uno (ed uno solo) dei due intervalli  $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)], [\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$  si avrà la stessa situazione di partenza, ossia la  $f$  sarà negativa nel primo estremo e positiva nel secondo. Indicheremo tale intervallo con  $[a_2, b_2]$ : dunque abbiamo costruito un intervallo  $[a_2, b_2]$  tale che

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1],$$

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1),$$

$$f(a_2) < 0 < f(b_2).$$

In modo analogo si divide in due parti l'intervallo  $[a_2, b_2]$ : se  $f$  si annulla nel punto medio  $\frac{1}{2}(a_2 + b_2)$  abbiamo finito, altrimenti si va avanti. Ci sono due possibilità:



(1) dopo un numero finito di suddivisioni, si trova che la  $f$  si annulla proprio nell' $n$ -simo punto medio  $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$  e in tal caso la tesi è provata;

(2) per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  si costruisce un intervallo  $[a_n, b_n]$  tale che

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \quad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Consideriamo, nel caso (2), le due successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ : esse sono limitate (sono contenute in  $]x_0 - R, x_0 + R[$ ) e monotone, crescente la prima e decrescente la seconda. Siano allora

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n :$$

poiché  $a_n < b_n$  per ogni  $n$ , sarà  $\ell \leq L$ ; dato che  $b_n - a_n = 2^{-n+1}(b_1 - a_1) \rightarrow 0$ , sarà  $\ell = L$ .

Poniamo  $x = \ell = L$  e proviamo che  $x$  è il punto cercato. Dalla continuità di  $f$  e dalle diseguaglianze  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  otteniamo, per  $n \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \leq 0 \leq f(x)$ , ossia  $f(x) = 0$ . La tesi è provata nel caso  $m = 1$ .

Se  $m > 1$ , o anche se  $m = 1$  e  $B(x_0, R) \subset \mathbb{C}$ , ci si riconduce al caso precedente introducendo la funzione

$$g(t) = f(t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{b}_1), \quad t \in [0, 1].$$

I punti  $t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{b}_1$  per  $t \in [0, 1]$  descrivono, come sappiamo (paragrafo 1.11), il segmento di estremi  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{b}_1$ : quindi sono contenuti in  $B(\mathbf{x}_0, R)$ . Inoltre  $g$  è continua (esercizio 3.2.1), e verifica  $g(0) = f(\mathbf{b}_1) > 0$ ,  $g(1) = f(\mathbf{a}_1) < 0$ . Per la parte già dimostrata, esiste  $t^* \in [0, 1]$  tale che  $g(t^*) = 0$ ; posto allora  $\mathbf{x}^* = t^*\mathbf{a}_1 + (1-t^*)\mathbf{b}_1$ , si ottiene  $\mathbf{x}^* \in B(\mathbf{x}_0, R)$  e  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ . La tesi è provata.  $\square$

**Osservazione 3.4.4** Il teorema di esistenza degli zeri vale in ipotesi molto più generali sull'insieme di definizione di  $f$ : basta che esso sia *connesso*, cioè “non fatto di due o più pezzi staccati”; più rigorosamente, un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$  è connesso se *non è possibile* trovare due aperti non vuoti e disgiunti  $A$  e  $B$  tali che  $E = (A \cup B) \cap E$ . Si può far vedere che  $E$  è connesso se, dati due punti  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ , ci si può muovere con continuità da  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  (non necessariamente in modo rettilineo) senza mai uscire dall'insieme  $E$ .

Se  $f$  è continua in  $A$  ma  $A$  non è connesso, il teorema 3.4.3 è ovviamente falso: per esempio, la funzione  $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

è continua, prende valori sia positivi che negativi ma non è mai nulla.

Dal teorema di esistenza degli zeri segue senza troppa fatica un risultato assai più generale:

**Corollario 3.4.5 (teorema dei valori intermedi)** *Se  $A$  è un sottoinsieme connesso di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$  e se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora  $f$  assume tutti i valori compresi fra il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore.*

**Dimostrazione** Sia  $y \in [\inf_A f, \sup_A f]$ ; dobbiamo provare che esiste  $\mathbf{x} \in A$  tale che  $f(\mathbf{x}) = y$ . Dato che  $\inf_A f < y < \sup_A f$ , per le proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore esistono  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$  tali che

$$\inf_A f \leq f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b}) \leq \sup_A f.$$

Poniamo ora  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - y$ : la funzione  $g$  è continua e verifica  $g(\mathbf{a}) < 0 < g(\mathbf{b})$ . Poiché  $A$  è connesso, per il teorema di esistenza degli zeri esiste  $\mathbf{x} \in A$  tale che  $g(\mathbf{x}) = 0$ , ossia  $f(\mathbf{x}) = y$ . La tesi è provata.  $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema 1.12.12 relativo alla misura in radianti degli angoli orientati, enunciato nel paragrafo 1.12, e che qui richiamiamo:

**Teorema 1.12.12** *Per ogni  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  esiste un unico numero  $\vartheta \in [0, 2\pi[$  tale che*

$$\ell(\gamma_+(1, w)) = 2 \quad a(\Sigma_+(1, w)) = \vartheta.$$

La funzione  $g(w) = \ell(\gamma_+(1, w))$  è dunque surgettiva da  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  in  $[0, 2\pi[$  ed è bigettiva da  $S(0, 1)$  in  $[0, 2\pi[$ . Il numero  $\vartheta$  si dice misura in radianti dell'angolo orientato individuato dai punti  $1, 0, w$ .

**Dimostrazione** Useremo le notazioni stabilite nel paragrafo 1.12. Poniamo

$$g(w) = \ell(\gamma_+(1, w)) = 2 a(\Sigma_+(1, w)), \quad w \in \gamma_+(1, i).$$

Dal corollario 1.12.11 segue che

$$|v - w| < |\ell(\gamma_+(1, v)) - \ell(\gamma_+(1, w))| \leq \sqrt{2} |v - w| \quad \forall v, w \in \gamma_+(1, i);$$

ciò mostra che  $g : \gamma_+(1, i) \rightarrow [0, \pi/2]$  è continua e iniettiva. Inoltre, l'arco  $\gamma_+(1, i)$  è un insieme connesso. In particolare,

$$g(1) = \ell(\gamma_+(1, 1)) = 0, \quad g(i) = \ell(\gamma_+(1, i)) = \frac{1}{4} \ell(S(0, 1)) = \frac{\pi}{2};$$

quindi, per il teorema dei valori intermedi,  $g$  è anche surgettiva. Notiamo che la disuguaglianza sopra scritta ci dice che l'inversa  $g^{-1} : [0, \pi/2] \rightarrow \gamma_+(1, i)$  è pure continua. La funzione  $g(w) = \ell(\gamma_+(1, w))$  è poi ben definita per ogni  $w \in S(0, 1)$ , a valori in  $[0, 2\pi[$ ; verifichiamo che essa è ancora continua (salvo che nel punto 1) e surgettiva. A questo scopo osserviamo che, in virtù della proposizione 1.12.10 e dell'esercizio 1.12.4, per  $w \in \gamma_+(i, -1)$  si ha

$$g(w) = \ell(\gamma_+(1, w)) = \ell(\gamma_+(1, i)) + \ell(\gamma_+(i, w)) = \frac{\pi}{2} + \ell(\gamma_+(1, -iw)) = \frac{\pi}{2} + g(-iw).$$

Poiché  $-iw \in \gamma_+(1, i)$ , per quanto già dimostrato (e per la continuità di  $w \mapsto -iw$ ) la funzione  $w \mapsto g(-iw)$  è continua, e vale  $\pi/2$  nel punto  $w = i$ ; dunque  $g$  è continua su  $\gamma_+(1, -1)$  e, in particolare,  $g(-1) = \pi$ .

Se, infine,  $w \in \gamma_+(-1, 1) \setminus \{1\}$ , allora

$$g(w) = \ell(\gamma_+(1, w)) = \ell(\gamma_+(1, -1)) + \ell(\gamma_+(-1, w)) = \pi + \ell(\gamma_+(1, -w)) = \pi + g(-w).$$

Essendo  $-w \in \gamma_+(1, -1)$ , la funzione  $w \mapsto g(-w)$  è continua; ne segue che anche  $g : S(0, 1) \setminus \{1\} \rightarrow [0, 2\pi[$  è continua. Poiché inoltre  $g$  assume il valore  $\pi$  nel punto  $w = -1$ , si ricava

$$\sup_{w \in S(0, 1)} g(w) = \sup_{z \in \gamma_+(1, -1)} g(z) + \pi = 2\pi.$$

Ciò prova che  $g : S(0, 1) \rightarrow [0, 2\pi[$  è surgettiva. Osserviamo che

$$\lim_{w \in \gamma_-(1, -i), w \rightarrow 1} g(w) = 2\pi, \quad \lim_{w \in \gamma_+(1, i), w \rightarrow 1} g(w) = 0,$$

cosicché  $g$  è discontinua nel punto  $1 \in S(0, 1)$ .

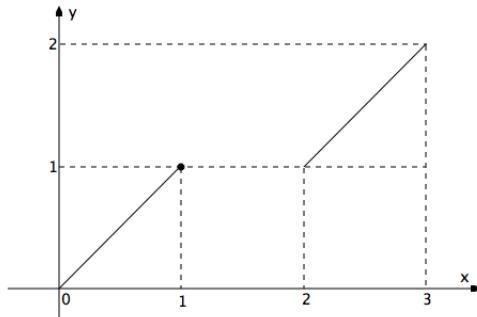
Il teorema 1.12.12 è completamente dimostrato.  $\square$

## Funzioni continue invertibili

Consideriamo una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e iniettiva; ci chiediamo se anche la funzione inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  è continua.

Si vede facilmente che in generale la risposta è no: ad esempio, sia  $A = [0, 1] \cup ]2, 3]$  e sia  $f(x) = x \cdot I_{[0,1]}(x) + (x - 1) \cdot I_{]2,3]}(x)$ . Analizzando il grafico di  $f$  si riconosce che  $f$  è iniettiva e  $f(A) = [0, 2]$ . Determiniamo la funzione inversa  $f^{-1}$  risolvendo rispetto a  $x$  l'equazione  $y = f(x)$ . Si ha

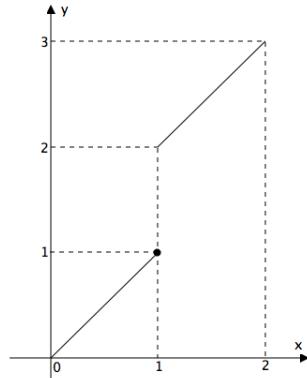
$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in ]2, 3] \end{cases}$$



$$\iff x = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0, 1] \\ y + 1 & \text{se } y \in ]1, 2], \end{cases}$$

e il grafico di  $f^{-1}$  si ottiene per simmetria rispetto alla bisettrice  $y = x$  (osservazione 1.3.1). Si riconosce allora che  $f$  è continua in tutti i punti, compreso  $x = 1$ , mentre  $f^{-1}$  è discontinua nel punto  $x = f(1) = 1$ .

Sotto opportune ipotesi sull'insieme  $A$ , però, l'esistenza e la continuità di  $f^{-1}$  sono garantite dal seguente risultato.



**Teorema 3.4.6** *Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  (limitato o no). Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e iniettiva, allora:*

- (i)  $f$  è strettamente monotonica;
- (ii)  $f(I)$  è un intervallo;
- (iii)  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  è ben definita e continua.

**Dimostrazione** (i) Siano  $a_0, b_0 \in I$  con  $a_0 < b_0$ , e confrontiamo  $f(a_0)$  con  $f(b_0)$ : se si ha  $f(a_0) < f(b_0)$ , proveremo che  $f$  è strettamente crescente in  $I$ , mentre se  $f(a_0) > f(b_0)$  proveremo che  $f$  è strettamente decrescente in  $I$ ; l'eventualità  $f(a_0) = f(b_0)$  è vietata dall'iniettività di  $f$ . Supponiamo ad esempio  $f(a_0) < f(b_0)$  (il caso opposto è del tutto analogo). Sia  $[a, b]$  un arbitrario sottointervallo di  $I$ , siano  $c, d$  punti di  $[a, b]$  tali che  $c < d$  e ammettiamo, per assurdo, che risulti  $f(c) \geq f(d)$ . Consideriamo le funzioni (ovviamente continue)

$$x(t) = a_0 + t(c - a_0), \quad y(t) = b_0 + t(d - b_0), \quad t \in [0, 1].$$

Osserviamo che

$$f(x(0)) = f(a_0) < f(b_0) = f(y(0)), \quad f(x(1)) = f(c) \geq f(d) = f(y(1)).$$

Quindi, introdotta la funzione

$$F(t) = f(y(t)) - f(x(t)), \quad t \in [0, 1],$$

si può agevolmente verificare (esercizio 3.2.1) che  $F$  è una funzione continua tale che  $F(0) > 0 \geq F(1)$ . Per il teorema di esistenza degli zeri (teorema 3.4.3), vi sarà allora un punto  $t^* \in ]0, 1]$  tale che  $F(t^*) = 0$ , vale a dire  $f(x(t^*)) = f(y(t^*))$ : dall'iniettività di  $f$  si deduce che  $x(t^*) = y(t^*)$ , ovvero  $t^*(d - c) + (1 - t^*)(b_0 - a_0) = 0$ . Dato che  $b_0 > a_0$  e  $d > c$ , ciò è assurdo.

Pertanto  $f(c) < f(d)$  e dunque  $f$  è strettamente crescente in  $[a, b]$ .

Per l'arbitrarietà di  $[a, b] \subseteq I$ , si ottiene allora che  $f$  è strettamente crescente in  $I$ .

**(ii)** Per il teorema dei valori intermedi (corollario 3.4.5) si ha

$$\left[ \inf_I f, \sup_I f \right] \subseteq f(I),$$

mentre, per definizione di estremo superiore ed estremo inferiore,

$$f(I) \subseteq \left[ \inf_I f, \sup_I f \right].$$

Dunque  $f(I)$  è un intervallo (che indicheremo con  $J$ ) di estremi  $\inf_I f$  e  $\sup_I f$ : esso può comprendere, o no, uno o entrambi gli estremi.

**(iii)** Anzitutto,  $f^{-1}$  è ovviamente ben definita su  $J$  ed è una funzione strettamente monotona (crescente se  $f$  è crescente, decrescente se  $f$  è decrescente), con  $f^{-1}(J) = I$ . Sia  $y_0$  un punto interno a  $J$ , e poniamo

$$\ell = \lim_{y \rightarrow y_0^-} f^{-1}(y), \quad L = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f^{-1}(y);$$

questi limiti esistono certamente poiché  $f^{-1}$  è monotona. Inoltre si ha (esercizio 3.3.19)

$$\begin{aligned} \ell &\leq f^{-1}(y_0) \leq L && \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \ell &\geq f^{-1}(y_0) \geq L && \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{aligned}$$

Dimostriamo che  $\ell = L$ : dato che  $f$  è continua nei punti  $\ell$  e  $L$ , si ha

$$f(\ell) = \lim_{y \rightarrow y_0^-} f(f^{-1}(y)) = \lim_{y \rightarrow y_0^-} y = y_0, \quad f(L) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f(f^{-1}(y)) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} y = y_0,$$

cosicché  $f(\ell) = f(L)$  e dunque, per iniettività,  $\ell = L = f^{-1}(y_0)$ , cioè

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0).$$

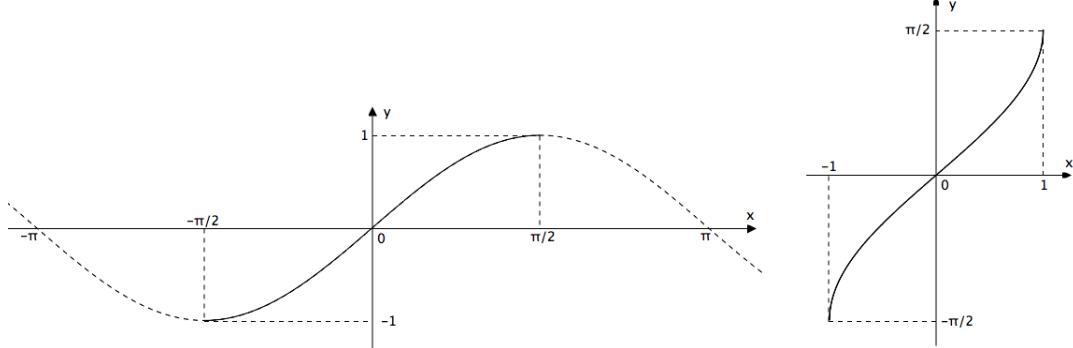
Quindi  $f^{-1}$  è continua in  $y_0$ .

Se  $y_0$  è un estremo di  $J$ , l'argomento sopra esposto si ripete in modo ancor più semplice.

□

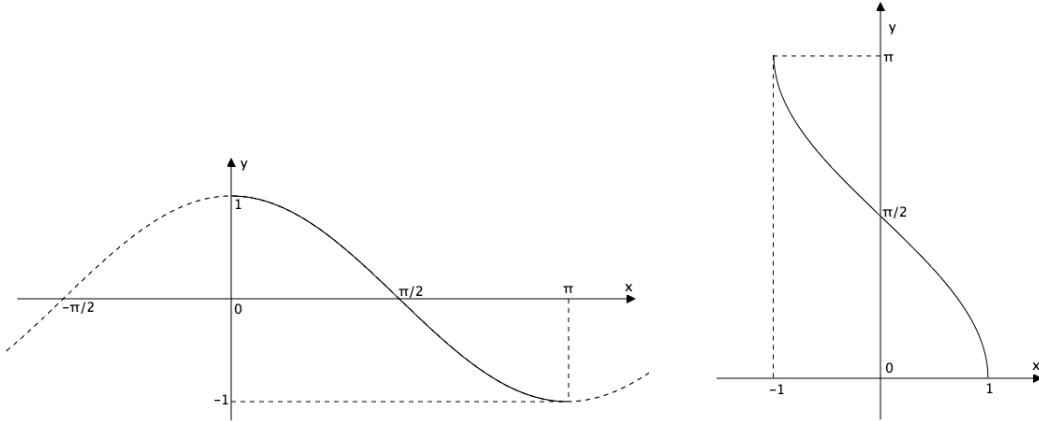
**Osservazione 3.4.7** Il teorema precedente è di gran lunga il caso più importante, ma la continuità di  $f^{-1}$  si ottiene anche nel caso in cui la funzione continua ed iniettiva  $f$  sia definita su un insieme  $A$  compatto: vedere l'esercizio 3.4.1.

**Esempi 3.4.8 (1)** La funzione  $f(x) = \sin x$  è continua ma non certo iniettiva; tuttavia la sua restrizione all'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$  è iniettiva, essendo strettamente crescente. La funzione inversa di tale restrizione si chiama *arcoseno* e si scrive  $f^{-1}(y) = \arcsin y$ . Essa è definita su  $[-1, 1]$ , è a valori in  $[-\pi/2, \pi/2]$  ed è continua per il teorema 3.4.6. Si noti che



$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x & \forall x \in [-1, 1], \\ \arcsin(\sin x) &= (-1)^k(x - k\pi) & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

**(2)** La restrizione della funzione  $\cos x$  all'intervallo  $[0, \pi]$  è continua e strettamente decrescente, quindi iniettiva. L'inversa di tale restrizione si chiama *arcocoseno* e si scrive  $\arccos x$ ; essa è definita su  $[-1, 1]$ , è a valori in  $[0, \pi]$  ed è continua per il teorema 3.4.6. Si noti che



$$\begin{aligned}\cos(\arccos x) &= x & \forall x \in [-1, 1], \\ \arccos(\cos x) &= (-1)^k(x - (k + \frac{1}{2})\pi) + \frac{\pi}{2} & \forall x \in [k\pi, (k + 1)\pi], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

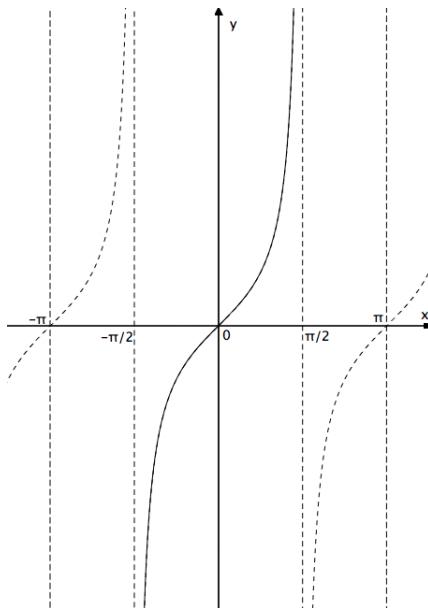
(3) La restrizione della funzione  $\tan x$  all'intervallo  $]-\pi/2, \pi/2[$  è continua e strettamente crescente, quindi è iniettiva (ed anche surgettiva su  $\mathbb{R}$ ). L'inversa di tale restrizione si chiama *arcotangente* e si scrive  $\arctan x$ ; essa è definita su  $\mathbb{R}$ , è a valori in  $]-\pi/2, \pi/2[$  ed è continua per il teorema 3.4.6. Si noti che

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mentre

$$\arctan(\tan x) = x - k\pi$$

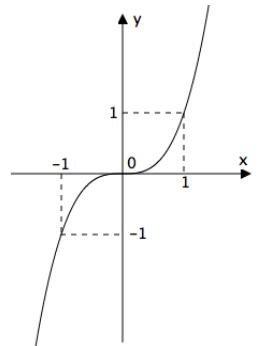
per  $x \in ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$  e per  $k \in \mathbb{Z}$ .



(4) Sia  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . La funzione  $\log_b x$ , inversa della funzione continua  $b^x$ , è continua per il teorema 3.4.6, ma lo sapevamo già (esempio 3.2.6 (5)).

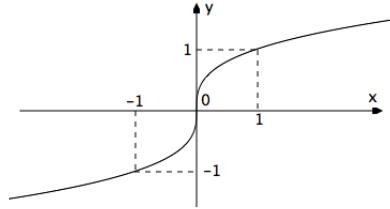
(5) Se  $n \in \mathbb{N}$ , la funzione  $x^{2n+1}$  è continua e strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ , dunque è iniettiva (ed anche surgettiva su  $\mathbb{R}$ ). La funzione inversa è quindi definita e continua su  $\mathbb{R}$ , a valori in  $\mathbb{R}$  ed è la funzione *radice (2n + 1)-sima*:

$$x = y^{\frac{1}{2n+1}} \iff y = x^{2n+1}.$$



La radice  $(2n+1)$ -sima ora definita è il prolungamento a tutto  $\mathbb{R}$  della funzione  $y \mapsto y^{\frac{1}{2n+1}}$ , che fu introdotta per  $y \geq 0$  nel paragrafo 1.8.

Ricordiamo a questo proposito che in campo complesso le radici  $(2n+1)$ -sime di un numero reale  $y$  sono  $2n+1$ : una è reale, ed è  $y^{\frac{1}{2n+1}}$ , le altre  $2n$  non sono reali e sono a due a due coniugate (esercizio 1.12.23).



### Esercizi 3.4

1. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che

$$\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0, \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0.$$

Provare che esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = 0$ .

2. Sia  $f$  una funzione continua definita in  $[0, 1]$  a valori in  $\mathbb{Q}$ , tale che  $f(0) = 23$ . Si calcoli  $f(e-2)$ .
3. Sia  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Si provi che  $f$  ha almeno un *punto fisso*, cioè esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = x_0$ .
4. Supponiamo che la temperatura all'equatore sia, ad un dato istante, una funzione continua della longitudine. Si dimostri che esistono infinite coppie di punti  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$  situati lungo l'equatore, tali che la temperatura in  $\mathbf{P}$  e la temperatura in  $\mathbf{P}'$  siano uguali fra loro; si provi inoltre che una almeno di tali coppie è formata da due località diametralmente opposte.
5. Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili oppure no:

- |   |  |
|---|--|
| (i) $f(x) = x + e^x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;                         | (ii) $f(x) = e^{-x} - x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;                      |
| (iii) $f(x) = x^2 + x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;                       | (iv) $f(x) = \sin \frac{x}{1+ x }$ , $x \in \mathbb{R}$ ;            |
| (v) $f(x) = \arctan^3 x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;                     | (vi) $f(x) = x^3 - x$ , $x \in \mathbb{R}$ ;                         |
| (vii) $f(x) = \sin^3 x$ , $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , | (viii) $f(x) = \sin x^3$ , $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . |

6. Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e iniettiva. Se  $A$  è compatto, si provi che  $f^{-1}$  è continua.

**[Traccia:** si mostri che per ogni  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f(A)$ , convergente ad un fissato  $y \in f(A)$ , risulta  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ .]

7. Sia  $f(x) = x^3 + x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Si provi che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è bigettiva e si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1} \left( \frac{3y}{y+4} \right).$$

8. Provare che

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1],$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0, \\ -\pi/2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

9. Dimostrare la relazione

$$\arctan u - \arctan v = \arctan \frac{u-v}{1+uv}$$

per ogni  $u, v \in \mathbb{R}$  con  $|\arctan u - \arctan v| < \frac{\pi}{2}$ .

[Traccia: utilizzare la formula di sottrazione per la funzione tangente.]

10. Provare che

$$\arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e calcolare di conseguenza la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ .

11. (i) Trovare una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'equazione  $f(x) = c$  abbia esattamente tre soluzioni.  
(ii) Provare che non esiste alcuna funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'equazione  $f(x) = c$  abbia esattamente due soluzioni.  
(iii) Per quali  $n \in \mathbb{N}$  è vero che esiste una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'equazione  $f(x) = c$  abbia esattamente  $n$  soluzioni?
12. (i) Provare che per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  l'equazione  $\tan x = x$  ha una e una sola soluzione  $x_k$  nell'intervallo  $]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ .  
(ii) Dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \left( x_k - k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( x_k - k\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

13. (i) Provare che per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  i grafici delle due funzioni  $e^{-x}$  e  $x^n$  si incontrano nel primo quadrante in un unico punto  $(x_n, y_n)$ , con  $x_n, y_n \in ]0, 1[$ .  
(ii) Mostrare che la successione  $\{x_n\}$  è crescente e che la successione  $\{y_n\}$  è decrescente.  
(iii) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

14. Provare che la funzione  $f(x) = \arccos \frac{x-1}{x}$  è iniettiva sull'insieme  $A$  dove è definita; determinare l'immagine  $f(A)$  e scrivere la funzione inversa  $f^{-1}$ .  
15. (i) Dimostrare che la funzione seno iperbolico è strettamente crescente e bigettiva da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , e che la sua inversa è la funzione  $y \mapsto \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

- (ii) Dimostrare che la funzione coseno iperbolico è strettamente crescente in e bigettiva da  $[0, \infty[$  in  $[1, \infty[$ , e che la sua inversa è la funzione  $y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ,  $y \geq 1$ .

16. Dimostrare che

$$\cos^2 \arctan t = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

17. (i) Verificare che le relazioni

$$\tan x = \frac{1}{x}, \quad k\pi < x < (k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

definiscono univocamente una successione reale  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

- (ii) Provare che

$$0 < x_{k+1} - x_k < \pi \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k - k\pi) = 0.$$

- (iii) Per quali  $\alpha > 0$  la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k - k\pi)^{\alpha}$  è convergente?

## 3.5 Asintoti

Sia  $[a, b]$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Data una funzione  $f$ , definita in  $[a, b] \setminus \{x_0\}$  e a valori reali, si dice che la retta di equazione  $x = x_0$  è un *asintoto verticale* di  $f$  per  $x \rightarrow x_0^+$ , oppure per  $x \rightarrow x_0^-$ , se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Data una funzione reale  $f$  definita sulla semiretta  $] -\infty, a]$ , oppure sulla semiretta  $[a, +\infty[$ , si dice che la retta di equazione  $y = px + q$  è un *asintoto obliquo* di  $f$  (ovvero un *asintoto orizzontale* di  $f$  quando  $p = 0$ ) per  $x \rightarrow -\infty$ , oppure per  $x \rightarrow +\infty$ , se risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - px - q] = 0, \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - px - q] = 0.$$

Per scoprire se una data funzione  $f$  ha un asintoto obliquo per, ad esempio,  $x \rightarrow +\infty$ , bisogna controllare l'esistenza di tre limiti, e cioè verificare se:

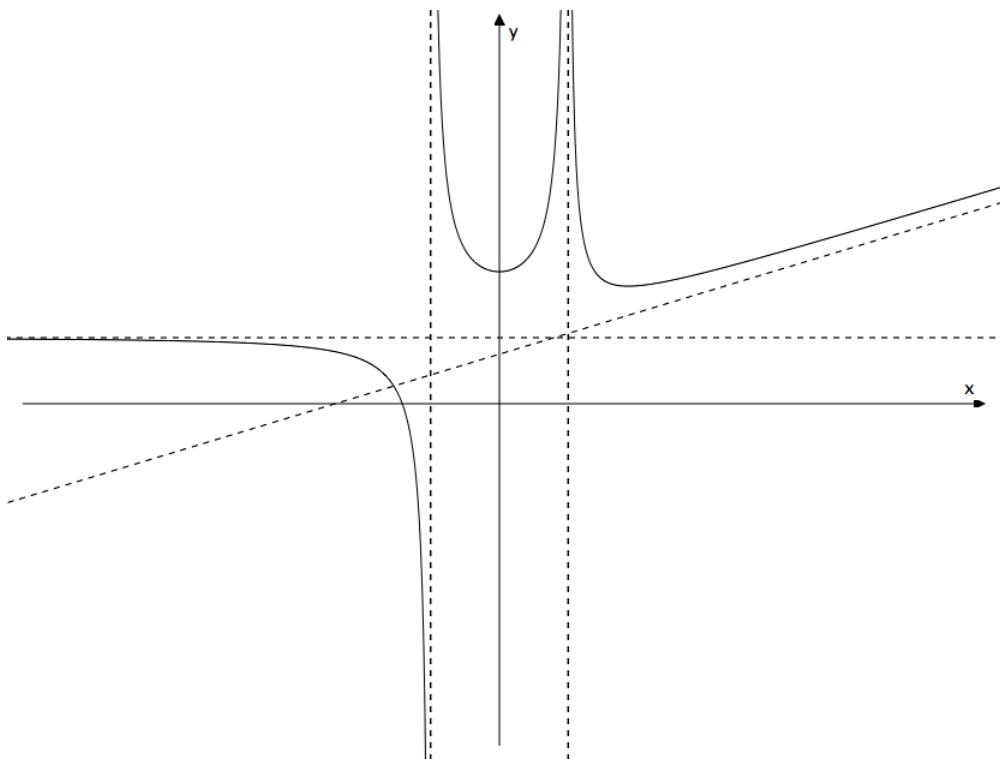
- (i)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- (ii)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- (iii)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - px] = q \in \mathbb{R}$ .

Se i tre limiti esistono, allora l'asintoto è la retta di equazione  $y = px + q$ . Viceversa, se  $f$  ha, per  $x \rightarrow \infty$ , l'asintoto obliqua di equazione  $y = px + q$ , allora ovviamente valgono (i), (ii) e (iii).

Invece, per vedere se la funzione  $f$  ha un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$ , è necessario e sufficiente che si abbia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

La verifica di queste proprietà è del tutto immediata e si lascia al lettore.



### Esercizi 3.5

1. Determinare, se esistono, gli asintoti delle seguenti funzioni:

- (i)  $\sqrt{1+x^2}$ ,    (ii)  $\ln x$ ,    (iii)  $\frac{x^4+1}{x^3}$ ,    (iv)  $\arcsin \frac{x^2}{x^2+1}$ ,
- (v)  $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ,    (vi)  $e^{1/x}$ ,    (vii)  $|x-2|$ ,    (viii)  $\arctan \frac{e^x}{e^x-1}$ ,
- (ix)  $\frac{\sin x}{x}$ ,    (x)  $x \ln x$ ,    (xi)  $\sqrt{|x^2-1|}$ ,    (xii)  $\arccos e^{-2|x|+x}$ .

2. Sia  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow p$  per  $x \rightarrow +\infty$ , con  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La funzione  $f$  ha necessariamente un asintoto obliqua per  $x \rightarrow +\infty$ ?

# Capitolo 4

## Calcolo differenziale

### 4.1 La derivata

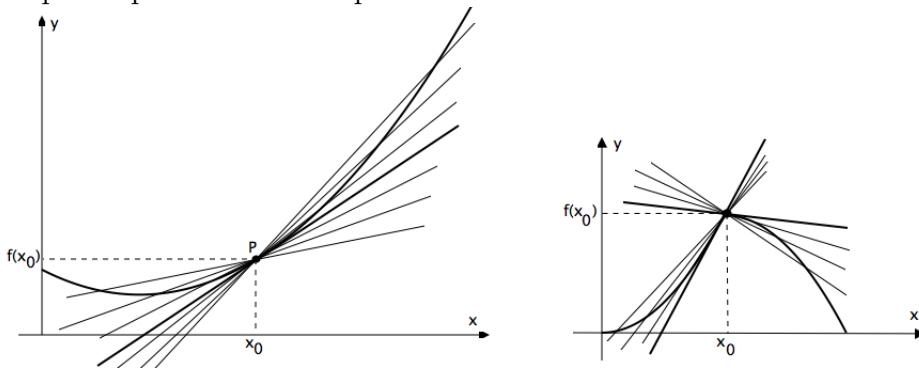
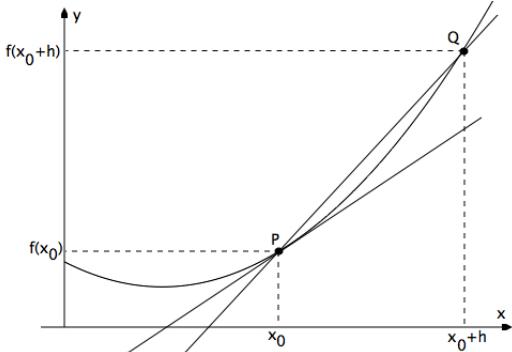
Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $G \subset \mathbb{R}^2$  il suo grafico:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in ]a, b[, y = f(x)\}.$$

Fissiamo  $x_0 \in ]a, b[$ : vogliamo dare un significato preciso alla nozione intuitiva di retta tangente a  $G$  nel punto  $\mathbf{P} = (x_0, f(x_0))$ , sempre che tale retta esista. Consideriamo un altro punto  $\mathbf{Q} = (x_0 + h, f(x_0 + h)) \in G$ , ove  $h$  è un numero reale abbastanza piccolo da far sì che  $x_0 + h \in ]a, b[$ . Tracciamo la retta passante per  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ : come si verifica facilmente, essa è in generale una secante del grafico ed ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Al tendere di  $h$  a 0, se  $f$  è continua in  $x_0$  il punto  $\mathbf{Q}$  tende, lungo il grafico  $G$ , al punto  $\mathbf{P}$ ; dunque l'intuizione geometrica ci dice che la retta secante “tende” verso una posizione limite che è quella della “retta tangente a  $G$  in  $\mathbf{P}$ ”. Ma sempre l'intuizione geometrica ci dice che questa posizione limite può anche non esistere.



La definizione che segue ci permetterà di attribuire un significato preciso al termine “retta tangente”.

**Definizione 4.1.1** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Diciamo che  $f$  è derivabile nel punto  $x_0$  se il rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$ , ossia la quantità

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ha limite finito per  $h \rightarrow 0$ . Tale limite si chiama derivata di  $f$  in  $x_0$  e si indica col simbolo  $f'(x_0)$ , oppure  $Df(x_0)$ :

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Diciamo poi che  $f$  è derivabile in  $]a, b[$  se  $f$  è derivabile in ogni punto di  $]a, b[$ .

**Osservazioni 4.1.2 (1)** Con notazione equivalente,  $f$  è derivabile nel punto  $x_0$  se e solo se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**(2)** Dire che  $f$  è derivabile nel punto  $x_0 \in ]a, b[$  è equivalente alla seguente affermazione: esistono un numero reale  $L$  ed una funzione  $h \mapsto \omega(h)$  definita in un intorno  $U$  di 0, tali che

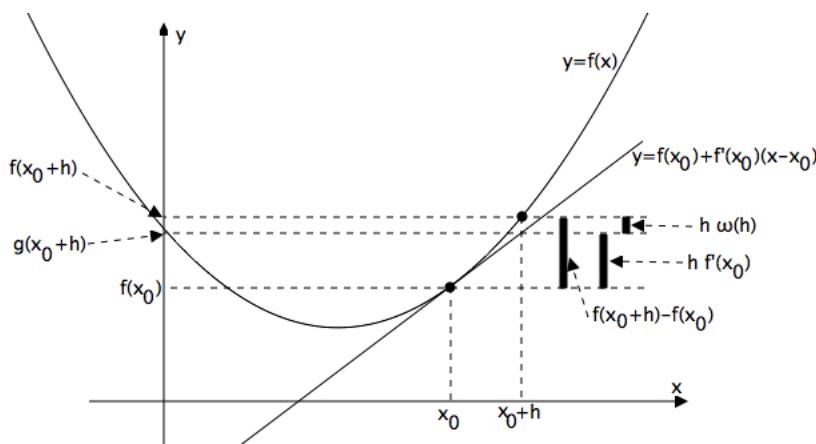
- (a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ ,      (b)  $f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + h \cdot \omega(h)$  per  $h \in U$ .

Infatti se  $f$  è derivabile in  $x_0$  basta porre  $L = f'(x_0)$  e

$$\omega(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

per ottenere (a) e (b) con  $U = ]a - x_0, b - x_0[$ ; viceversa se valgono (a) e (b) allora, dividendo in (b) per  $h$  e passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , in virtù di (a) si ottiene che  $f$  è derivabile in  $x_0$  con  $f'(x_0) = L$ .

Dall'osservazione 4.1.2 (2) segue che se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora l'*incremento* di  $f$ , ossia la quantità  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ , è somma di due addendi: il primo,  $f'(x_0)h$ , varia linearmente con  $h$ , mentre il secondo,  $h \cdot \omega(h)$ , è un *infinitesimo di ordine superiore* per  $h \rightarrow 0$ : ciò significa che esso, quando viene diviso per  $h$ , tende ancora a 0, e dunque tende a 0 più rapidamente di  $h$  per  $h \rightarrow 0$ .



La quantità  $h \cdot \omega(h)$  è l'errore che si commette volendo approssimare, in un intorno di  $x_0$ , l'incremento di  $f$  con la sua parte lineare  $f'(x_0)h$ . Questa approssimazione corrisponde a sostituire al grafico di  $f$ , in un intorno di  $(x_0, f(x_0))$ , quello della funzione *affine*

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

il cui grafico è la retta per  $(x_0, f(x_0))$  di coefficiente angolare  $f'(x_0)$ .

Si noti che questa retta, fra tutte le rette passanti per  $(x_0, f(x_0))$ , è quella che realizza la *miglior approssimazione rettilinea* del grafico di  $f$  nell'intorno di tale punto. Infatti, scelta una qualunque retta passante per  $(x_0, f(x_0))$ , quindi di equazione

$$y = g_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

e coefficiente angolare  $m \in \mathbb{R}$ , si verifica facilmente che risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g_m(x)) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R},$$

ma che d'altra parte si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g_m(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - m \quad \forall m \in \mathbb{R},$$

e che quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g_m(x)}{x - x_0} = 0 \iff m = f'(x_0) \iff g_m(x) \equiv g(x).$$

Le considerazioni precedenti giustificano la seguente

**Definizione 4.1.3** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile nel punto  $x_0 \in ]a, b[$ . La retta di equazione  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  si chiama retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

La derivata  $f'(x_0)$  è dunque il coefficiente angolare della retta che meglio approssima il grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ , e quindi ne misura la *pendenza*, ossia la rapidità con cui  $f$  cresce o decresce intorno a tale punto.

**Osservazione 4.1.4** Se  $f$  è definita su un intervallo chiuso  $[a, b]$ , possiamo definire la derivata nei punti estremi come segue (se i limiti esistono):

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \\ f'(b) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \end{aligned}$$

Il significato geometrico è del tutto analogo.

Chiarito il significato geometrico della derivata, vediamo ora il nesso fra derivabilità e continuità.

**Proposizione 4.1.5** *Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ . Il viceversa è falso.*

**Dimostrazione** Dall'osservazione 4.1.2 (2) segue subito che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

e ciò prova la continuità. Viceversa, la funzione  $f(x) = |x|$  è continua su  $\mathbb{R}$ , ma scelto  $x_0 = 0$  si ha

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0, \end{cases}$$

quindi il limite del rapporto incrementale di  $f$  nel punto 0 non esiste.  $\square$

**Esempi 4.1.6 (1)** Sia  $n \in \mathbb{N}$  e consideriamo la funzione  $f(x) = x^n$ . Per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$  si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

cosicché quando  $x \rightarrow x_0$  ricaviamo

$$f'(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ n x_0^{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases} = n x_0^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In definitiva, scrivendo  $x$  al posto di  $x_0$ , troviamo che

$$Dx^n = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(intendendo, nel caso  $x = 0$  e  $n = 1$ , che la derivata vale 1).

**(2)** La derivata è un'applicazione lineare: ciò significa che se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili nel punto  $x$ , e se  $\lambda$  e  $\mu$  sono due numeri reali, allora la funzione  $\lambda f + \mu g$  è derivabile nel punto  $x$  e

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

In particolare, quindi, da (1) segue che ogni polinomio è derivabile in  $\mathbb{R}$ : se

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

allora

$$P'(x) = \sum_{k=1}^N k a_k x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**(3)** Prodotti e quozienti di funzioni derivabili (questi ultimi, naturalmente, nei punti dove sono definiti) sono funzioni derivabili: si vedano gli esercizi 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4.

**(4)** Se  $n \in \mathbb{N}^+$ , la funzione  $f(x) = x^{-n}$  è definita per  $x \neq 0$  ed è derivabile. Infatti si ha per ogni  $x \neq 0$  e  $h \neq 0$  tale che  $x + h \neq 0$

$$\frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \frac{x^n - (x+h)^n}{h x^n (x+h)^n},$$

e per quanto visto nell'esempio (1),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdot \frac{1}{x^n (x+h)^n} = - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}},$$

ossia

$$Dx^{-n} = -n x^{-n-1} \quad \forall x \neq 0.$$

**(5)** Fissato  $k \in \mathbb{N}^+$ , la funzione  $f(x) = x^{1/k}$  è definita per  $x \geq 0$  ed è derivabile per ogni  $x > 0$ . Infatti, per tutti gli  $h \neq 0$  tali che  $x + h > 0$  si ha

$$\frac{(x+h)^{1/k} - x^{1/k}}{h} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} (x+h)^{(k-1-j)/k} x^{j/k}},$$

da cui

$$Dx^{1/k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{1/k} - x^{1/k}}{h} = \frac{1}{k x^{(k-1)/k}} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} \quad \forall x > 0.$$

**(6)** Sia  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . La funzione  $f(x) = x^r$ , definita per  $x \geq 0$  se  $r > 0$  e per  $x > 0$  se  $r < 0$ , è derivabile in ogni punto  $x > 0$ . Infatti, sarà  $r = p/q$ , con  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $q \in \mathbb{N}^+$  e  $p, q$  primi fra loro; quindi, decomponendo gli incrementi come in (5), per ogni  $x > 0$  e per ogni  $h \neq 0$  tale che  $x + h > 0$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^r - x^r}{h} &= \frac{(x+h)^{p/q} - x^{p/q}}{h} = \frac{1}{h} ((x+h)^{1/q} - x^{1/q}) \sum_{j=0}^{p-1} (x+h)^{(p-1-j)/q} x^{j/q} = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{p-1} (x+h)^{(p-1-j)/q} x^{j/q}}{\sum_{i=0}^{q-1} (x+h)^{(q-1-i)/q} x^{i/q}}, \end{aligned}$$

da cui

$$Dx^r = \frac{p x^{(p-1)/q}}{q x^{(q-1)/q}} = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1} = r x^{r-1} \quad \forall x > 0.$$

**(7)** Fissato  $b > 0$ , la funzione esponenziale  $f(x) = b^x$  è derivabile in ogni punto  $x \in \mathbb{R}$ . Infatti per ogni  $h \neq 0$  si ha

$$\frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \frac{b^h - 1}{h},$$

da cui (esempio 3.3.5 (3))

$$Db^x = b^x \ln b \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e in particolare, se la base dell'esponenziale è il numero  $b = e$ ,

$$De^x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**(8)** Le funzioni seno e coseno sono derivabili in ogni punto di  $\mathbb{R}$ : infatti, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  si ha dalle formule di prostaferesi (esercizio 1.12.8)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}, \\ \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= -\frac{2}{h} \sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2},\end{aligned}$$

da cui

$$D \sin x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad D \cos x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per avere un quadro completo delle tecniche di derivazione occorre imparare a derivare le funzioni composte e le funzioni inverse. Ciò è quanto viene esposto nei risultati che seguono.

**Teorema 4.1.7 (di derivazione delle funzioni composte)** *Siano  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni derivabili, tali che  $f(]a, b[) \subseteq ]c, d[$ . Allora la funzione composta  $g \circ f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile e*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \forall x \in ]a, b[.$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $x \in ]a, b[$  e poniamo  $y = f(x)$ . Poiché  $f$  è derivabile in  $x$ , si ha per  $|h|$  abbastanza piccolo (osservazione 4.1.2 (2))

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + h \cdot \omega(h), \quad \text{ove } \lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0.$$

Similmente, poichè  $g$  è derivabile in  $y$ , si ha per  $|k|$  abbastanza piccolo

$$g(y+k) - g(y) = g'(y) \cdot k + k \cdot \eta(k), \quad \text{ove } \lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = 0.$$

Fissiamo  $h$  (sufficientemente piccolo), e scegliamo  $k = f(x+h) - f(x)$ : dato che  $f$  è continua in  $x$  (proposizione 4.1.5), risulta  $k \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ ; anzi, essendo  $f$  derivabile in  $x$ , si ha più precisamente che  $\frac{k}{h} \rightarrow f'(x)$  non appena  $h \rightarrow 0$ . Quindi

$$\begin{aligned}g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y) = \\ &= g'(y) \cdot k + k \cdot \eta(k) = g'(y)(f(x+h) - f(x)) + k \cdot \eta(k) = \\ &= g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot h + h \cdot \omega(h)) + k \cdot \eta(k) = \\ &= h \cdot \left[ g'(f(x)) \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot \omega(h) + \frac{k}{h} \cdot \eta(k) \right].\end{aligned}$$

Ora, ponendo

$$\sigma(h) = g'(f(x)) \cdot \omega(h) + \frac{k}{h} \cdot \eta(k),$$

risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = g'(f(x)) \cdot 0 + f'(x) \cdot 0 = 0,$$

e pertanto abbiamo ottenuto, per  $|h|$  sufficientemente piccolo,

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot h + h \cdot \sigma(h)$$

con  $\sigma(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . La tesi segue allora dall'osservazione 4.1.2 (2).  $\square$

**Esempi 4.1.8 (1)**  $D e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

(2)  $D \sqrt{1+x^2} = D(1+x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

(3)  $D [\sin(e^{\cos x^2})] = \cos(e^{\cos x^2}) \cdot e^{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.1.9 (di derivazione delle funzioni inverse)** *Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente monotona e derivabile. Se  $f'(x) \neq 0$  in ogni punto  $x \in ]a, b[$ , allora la funzione inversa  $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow ]a, b[$  è derivabile e si ha*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in f([a, b]).$$

**Dimostrazione** Ricordiamo anzitutto che  $f([a, b])$  è un intervallo, che denotiamo con  $J$ , e che  $f^{-1}$  è continua su  $J$  per il teorema 3.4.6, essendo per ipotesi  $f$  derivabile e dunque continua in  $[a, b]$ .

Ciò premesso, sia  $y \in J$  e sia  $k \neq 0$  tale che  $y+k \in J$ . Allora sarà  $y = f(x)$  e  $y+k = f(x+h)$  per opportuni punti  $x, x+h \in [a, b]$ ; avremo quindi  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x+h = f^{-1}(y+k)$  e dunque  $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ ; in particolare,  $h \neq 0$  essendo  $f^{-1}$  iniettiva. Potremo perciò scrivere

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)},$$

e notiamo che da  $k \neq 0$  segue  $f(x+h) \neq f(x)$ , quindi la scrittura ha senso. Se  $k \rightarrow 0$ , la continuità di  $f^{-1}$  implica che  $h \rightarrow 0$ , da cui

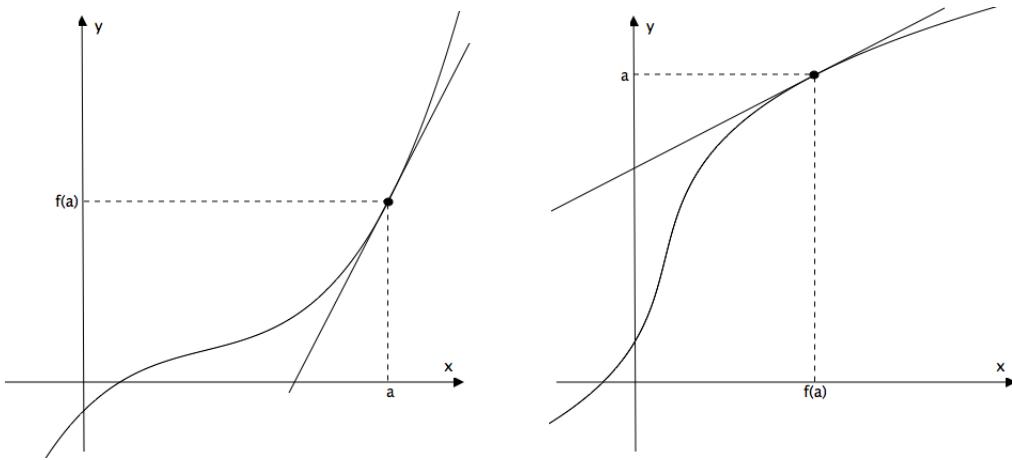
$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)} \rightarrow \frac{1}{f'(x)};$$

se ne deduce che

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

e la tesi è provata.  $\square$

**Osservazione 4.1.10** Il teorema precedente ci dice che il coefficiente angolare della retta tangente, nel generico punto  $(f(a), a)$ , al grafico di  $f^{-1}$  (pensata come funzione della  $x$ , dunque con  $x$  e  $y$  scambiati rispetto alle notazioni del teorema:  $y = f^{-1}(x)$  invece che  $x = f^{-1}(y)$ ) è il reciproco del coefficiente angolare della retta tangente, nel punto corrispondente  $(a, f(a))$ , al grafico di  $f$ . Ciò è naturale, dato che i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice  $y = x$ .



**Esempi 4.1.11 (1)** La funzione  $\sin x$  è bigettiva e derivabile nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , ma la derivata si annulla agli estremi. L'immagine dell'intervallo aperto  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  è  $] -1, 1[$ ; quindi, per il teorema 4.1.9, la funzione arcoseno è derivabile in  $] -1, 1[$  e si ha per  $x \in ] -1, 1[$ :

$$\begin{aligned} D(\arcsin x) &= \frac{1}{(D\sin)(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \\ &\quad (\text{poiché } \arcsin x \text{ è un numero compreso fra } -\pi/2 \text{ e } \pi/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Similmente, poiché la funzione coseno ha derivata diversa da 0 nell'intervallo  $]0, \pi[$  la cui immagine è  $] -1, 1[$ , la funzione arcocoseno è derivabile in tale intervallo e si ha per  $x \in ] -1, 1[$

$$\begin{aligned} D(\arccos x) &= \frac{1}{(D\cos)(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin \arccos x} = \\ &\quad (\text{poiché } \arccos x \text{ è un numero compreso fra } 0 \text{ e } \pi) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \arccos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'esercizio 3.4.8, il secondo risultato era deducibile dal primo.

**(2)** Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Essendo

$$D(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ ,$$

troviamo

$$D(\arctan x) = \frac{1}{(D\tan)(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

**(3)** Sia  $b$  un numero positivo e diverso da 1. Allora per ogni  $x > 0$  si ha, indicando (per comodità di notazione) con  $\exp_b(x)$  la funzione esponenziale  $b^x$ ,

$$D(\log_b x) = \frac{1}{(\exp_b)'(\log_b x)} = \frac{1}{b^{\log_b x} \cdot \ln b} = \frac{1}{x \ln b}.$$

Ciò si poteva ottenere anche direttamente, utilizzando l'esempio 3.3.12:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_b \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_b \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+t)}{t} = \frac{1}{x \ln b}. \end{aligned}$$

Osserviamo che, in particolare, per  $b = e$  si ha

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

## Derivazione delle serie di potenze

Un'altra importante classe di funzioni derivabili è quella delle somme di serie di potenze. Si ha infatti:

**Teorema 4.1.12** *Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ . Della  $f(x)$  la sua somma, la funzione  $f$  è derivabile in  $] -R, R[$  e risulta*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad \forall x \in ] -R, R[.$$

**Dimostrazione** Anzitutto osserviamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$  ha ancora raggio di convergenza  $R$  (esercizio 2.7.9). Di conseguenza, anche la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$  (che interverrà nel seguito) ha raggio di convergenza  $R$ .

Adesso, fissati  $x \in ] -R, R[$  e  $h \in \mathbb{R}$  sufficientemente piccolo in valore assoluto in modo che  $|x| + |h| < \frac{1}{2}(|x| + R)$ , calcoliamo il rapporto incrementale di  $f$  nel punto  $x$ :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(x+h)^n - x^n] =$$

(usando la formula di Newton, teorema 1.7.1)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n \right] = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \right] = \end{aligned}$$

(isolando nella somma interna l'ultimo termine, che è anche l'unico quando  $n = 1$ )

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \right].$$

Poniamo

$$\omega(h) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}, \quad |h| < \frac{1}{2}(R - |x|) :$$

se proveremo che  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ , seguirà la tesi del teorema. In effetti si ha

$$|\omega(h)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |x|^k |h|^{n-k-1} \right] = |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |x|^k |h|^{n-k-2} \right],$$

e tenendo conto che per  $k = 0, 1, \dots, n-2$  risulta

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k-1)} \binom{n-2}{k} \leq \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \binom{n-2}{k},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} |\omega(h)| &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k} |x|^k |h|^{n-k-2} \right] = \\ &= \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|x| + |h|)^{n-2} \leq \\ &\leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| \left( \frac{|x| + R}{2} \right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Dato che, per quanto osservato all'inizio della dimostrazione, la serie all'ultimo membro è convergente, si deduce che  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

**Esempi 4.1.13 (1)** Dagli sviluppi in serie di potenze di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  (teorema 2.7.11), derivando termine a termine si ritrovano le note formule (esempio 4.1.6 (8))

$$De^x = e^x, \quad D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**(2)** Similmente, dagli sviluppi in serie di  $\cosh x$  e  $\sinh x$  (esercizio 2.7.11), si deducono facilmente le relazioni

$$D \sinh x = \cosh x, \quad D \cosh x = \sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

le quali del resto seguono ancor più semplicemente dalle identità

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**(3)** Derivando la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , il teorema precedente ci dice che

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Dx^n = D \sum_{n=0}^{\infty} x^n = D \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

(4) Derivando la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ , ancora per il teorema precedente si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \sum_{n=1}^{\infty} D(nx^{n-1}) = D \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \\ &= D \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \forall x \in ]-1, 1[;\end{aligned}$$

iterando questo procedimento di derivazione, troviamo dopo  $m$  passi:

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

Dividendo per  $m!$  otteniamo

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

e posto  $n-m=h$ , si ha anche, equivalentemente,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \binom{m+h}{h} x^h = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

## Esercizi 4.1

1. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *pari*, ossia tale che  $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $f$  è derivabile in 0, si provi che  $f'(0) = 0$ .
2. Si provi che se  $f$  e  $g$  sono funzioni derivabili in  $x_0$ , allora  $fg$  è derivabile in  $x_0$  e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

**[Traccia:** si scriva il rapporto incrementale di  $fg$  in  $x_0$  nella forma seguente:  

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

3. Sia  $g$  derivabile in  $x_0$  con  $g(x_0) \neq 0$ . Si provi che  $\frac{1}{g}$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

4. Siano  $f$  e  $g$  funzioni derivabili in  $x_0$  con  $g(x_0) \neq 0$ . Si provi che  $\frac{f}{g}$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 4 \\ ax + b & \text{se } x < 4, \end{cases}$$

determinare  $a, b \in \mathbb{R}$  in modo che  $f$  sia derivabile nel punto  $x_0 = 4$ .

6. Sia  $f$  derivabile in  $]a, b[$ . Si scriva l'equazione della retta perpendicolare al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .
7. Sia  $f$  derivabile in  $]a, b[$ . Provare che la funzione  $g(x) = f(\lambda x + \mu)$  è derivabile in  $\left]\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right[$  e che

$$g'(x) = \lambda f'(\lambda x + \mu) \quad \forall x \in \left]\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right[.$$

8. Sia  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Consideriamo il *prolungamento pari* di  $f$ , definito da

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0, \\ f(-x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e il *prolungamento dispari* di  $f$ , definito da

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0, \\ -f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Provare che:

- (i)  $F$  è continua su  $\mathbb{R}$ ;  
(ii)  $F$  è derivabile in 0 se e solo se

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

e in tal caso  $F'(0) = 0$ ;

- (iii)  $G$  è continua in 0 se e solo se  $f(0) = 0$ ;  
(iv)  $G$  è derivabile in 0 se e solo se  $f(0) = 0$  e inoltre

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = L \in \mathbb{R},$$

e in tal caso  $G'(0) = L$ .

9. Scrivere la derivata delle seguenti funzioni, nei punti dove essa esiste:

- |                                   |                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| (i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$ ,      | (ii) $f(x) = x^2 - x x $ ,           |
| (iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ,   | (iv) $f(x) = \log_x 3$ ,             |
| (v) $f(x) = x x^2 - 1 $ ,         | (vi) $f(x) = \arcsin  2x - \pi $ ,   |
| (vii) $f(x) = e^{ x }$ ,          | (viii) $f(x) =  \cos x $ ,           |
| (ix) $f(x) =   x + 2  -  x^3  $ , | (x) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{ x }}$ . |

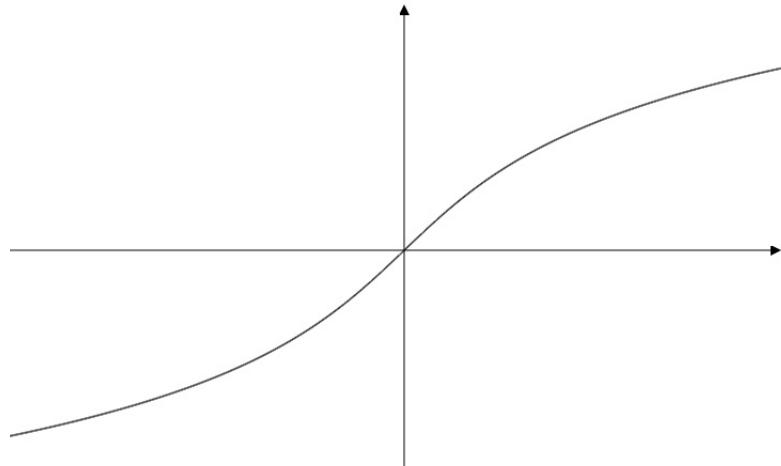
10. Le funzioni

$$f(x) = (x - 2|x|)^2, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sono derivabili in  $\mathbb{R}$ ?

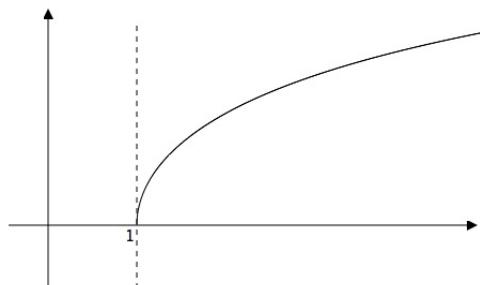
11. Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  monotona crescente e derivabile; si provi che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in ]a, b[$ . Se  $f$  è strettamente crescente, è vero che  $f'(x) > 0$  in  $]a, b[$ ?
12. Si provi che  $f(x) = 4x + \ln x$ ,  $x > 0$ , è strettamente crescente ed ha inversa derivabile, e si calcoli  $(f^{-1})'(4)$ .
13. L'inversa della funzione  $\sinh x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , che esiste per l'esercizio 3.4.15 ed è data da  $\ln(y + \sqrt{1 - y^2})$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , si chiama *settore seno iperbolico* per motivi che saranno chiari quando sapremo fare gli integrali, e si indica con  $\text{settsinh } y$ . Si provi che

$$D(\text{settsinh } y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$



14. L'inversa della funzione  $\cosh x$ ,  $x \geq 0$ , che esiste per l'esercizio 3.4.15 ed è  $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ,  $y \geq 1$ , si chiama *settore coseno iperbolico* e si indica con  $\text{settcosh } y$ . Si provi che

$$D(\text{settcosh } y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y > 1.$$



15. Calcolare, dove ha senso, la derivata delle seguenti funzioni:

- (i)  $f(x) = x^x$ ,
- (ii)  $f(x) = (x \ln x)^{\sin \sqrt{x}}$ ,
- (iii)  $f(x) = \ln \sin \sqrt{x}$ ,
- (iv)  $f(x) = 3^{3^x}$ ,
- (v)  $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ ,
- (vi)  $f(x) = \ln |\ln |x||$ ,
- (vii)  $f(x) = x^{1/x}$ ,
- (viii)  $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ ,
- (ix)  $f(x) = \log_x(2^x - x^2)$ ,
- (x)  $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ .

16. Dimostrare che la formula di derivazione di un quoziente è conseguenza della sola formula di derivazione del prodotto di due funzioni.

[Traccia: Si scriva  $D_g^1$  come  $D \left[ g \cdot \left( \frac{1}{g} \right)^2 \right] \dots$ ]

17. Scrivere l'equazione della tangente all'ellisse definita da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ove  $a$  e  $b$  sono fissati numeri reali non nulli) nel generico punto  $(x_0, y_0)$ .

18. Scrivere l'equazione della tangente all'iperbole definita da

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ove  $a$  e  $b$  sono fissati numeri reali non nulli) nel generico punto  $(x_0, y_0)$ .

19. Scrivere l'equazione della tangente alla parabola definita da

$$y - ax^2 = 0$$

(ove  $a$  è un fissato numero reale) nel generico punto  $(x_0, y_0)$ .

20. Si provi che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  l'equazione  $x^3 + x^5 = a$  ha un'unica soluzione reale  $x = x_a$ . Si provi poi che la funzione  $g(a) = x_a$  è continua su  $\mathbb{R}$ , e si dica in quali punti è derivabile. Si calcolino infine, se esistono, i valori  $g'(2)$  e  $g'(-2)$ .

## 4.2 Differenziabilità

Vogliamo estendere l'operazione di derivazione alle funzioni di più variabili. Se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^m$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione, il grafico di  $f$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{m+1}$ : vorremmo determinare quali condizioni assicurano che esso sia dotato di piano tangente ( $m$ -dimensionale) in un suo punto.

**Definizione 4.2.1** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . La derivata parziale  $i$ -sima di  $f$  nel punto  $\mathbf{x}_0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) è il numero reale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

(ove  $\mathbf{e}_i$  è il vettore con tutte le componenti nulle tranne la  $i$ -sima che vale 1), sempre che tale limite esista finito. Indicheremo le derivate parziali di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  con uno qualunque dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \quad D_i f(\mathbf{x}_0), \quad f_{x^i}(\mathbf{x}_0) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Le regole di calcolo per le derivate parziali sono semplicissime: basta considerare le altre variabili (quelle rispetto alle quali non si deriva) come costanti.

**Esempio 4.2.2** Per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $|x| > |y|$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 - y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 - y^2} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Sfortunatamente, a differenza di ciò che accade con le funzioni di una sola variabile, una funzione di più variabili può avere le derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto. La ragione è che l'esistenza di  $D_1 f(\mathbf{x}_0), \dots, D_m f(\mathbf{x}_0)$  fornisce informazioni sul comportamento della *restrizione* di  $f$  alle rette parallele agli assi  $x^1, \dots, x^m$  e passanti per  $\mathbf{x}_0$ ; d'altra parte, come sappiamo (esercizi 3.3.21 e 3.3.22), il comportamento di  $f$  può essere molto differente se ci si avvicina a  $\mathbf{x}_0$  da un'altra direzione.

**Esempio 4.2.3** Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  la parabola di equazione  $y = x^2$ : posto

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}, \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}, \\ L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\},$$

ed osservato che  $G$  è disgiunto da  $H \cup L$  e che  $G \cup H \cup L = \mathbb{R}^2$ , definiamo

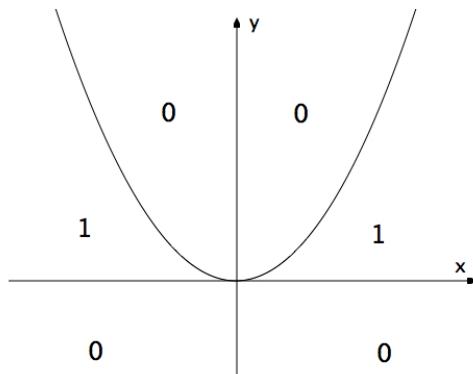
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in G \\ 0 & \text{se } (x, y) \in H \cup L. \end{cases}$$

Questa funzione non è continua nell'origine, poiché

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Tuttavia le due derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$  nell'origine esistono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$



Qual è, allora, l'estensione "giusta" della nozione di derivata al caso di funzioni di più variabili? Sotto quali ipotesi il grafico di una funzione di  $2, 3, \dots, m$  variabili ha piano tangente in un suo punto?

**Definizione 4.2.4** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Diciamo che  $f$  è differenziabile nel punto  $\mathbf{x}_0$  se esiste  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle_m}{|\mathbf{h}|_m} = 0.$$

Diciamo che  $f$  è differenziabile in  $A$  se è differenziabile in ogni punto di  $A$ .

Osserviamo che in questa definizione l'incremento  $\mathbf{h}$  è un (piccolo) vettore non nullo di  $\mathbb{R}^m$  di direzione arbitraria: dunque l'informazione fornita sul comportamento di  $f$  intorno al punto  $\mathbf{x}_0$  è ben più completa di quella fornita dall'esistenza delle derivate parziali. E infatti:

**Proposizione 4.2.5** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora:

- (i)  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  (e il viceversa è falso);
- (ii) esistono le derivate parziali  $D_i f(\mathbf{x}_0)$  e si ha

$$D_i f(\mathbf{x}_0) = a^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

ove  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^m)$  è il vettore introdotto nella definizione 4.2.4 (e il viceversa è falso). Di conseguenza, il vettore  $\mathbf{a}$  è univocamente determinato (quando esiste).

**Dimostrazione** (i) Si ha

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = [f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle_m] + \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle_m;$$

per  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$  il primo termine è infinitesimo a causa della differenziabilità, mentre il secondo è infinitesimo per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 1.9.3). Quindi  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} [f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)] = 0$ , ossia  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .

(ii) Dalla definizione di differenziabilità, prendendo  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$  si ricava

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) - t\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle_m}{|t|} = 0;$$

moltiplicando per la quantità limitata  $\frac{|t|}{t}$  (cioè per  $\pm 1$ ), si ottiene

$$D_i f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle_m, \quad i = 1, \dots, m.$$

La funzione  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_m$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^m$  (in conseguenza della diseguaglianza  $||\mathbf{x}|_m - |\mathbf{x}_0|_m| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m$ , che a sua volta segue dalla proprietà triangolare della norma), ma non è differenziabile nell'origine: infatti, se esistesse  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  tale che

$$\frac{f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle_m}{|\mathbf{h}|_m} = \frac{|\mathbf{h}|_m - \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle_m}{|\mathbf{h}|_m} = 1 - \left\langle \mathbf{a}, \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|_m} \right\rangle_m \rightarrow 0 \text{ per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

scegliendo  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$  con  $t > 0$  otterremmo  $a^i = 1$ , mentre scegliendo  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$  con  $t < 0$  dedurremmo  $a^i = -1$ . Ciò è contraddittorio e dunque il viceversa di (i) è falso.

La funzione dell'esempio 4.2.3 mostra che il viceversa di (ii) è anch'esso falso: tale funzione infatti ha le derivate parziali in  $(0, 0)$  ma, non essendo continua in tale punto, a causa di (i) non può essere ivi differenziabile.  $\square$

**Definizione 4.2.6** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ha le derivate parziali nel punto  $\mathbf{x}_0$ , il vettore

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^m$$

si chiama gradiente di  $f$  nel punto  $\mathbf{x}_0$  e si indica con  $\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)$ , o con  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ .

**Osservazione 4.2.7** La condizione che  $f$  sia differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  equivale alla proprietà seguente: esiste una funzione reale  $\omega(\mathbf{h})$ , definita in un intorno  $U$  di  $\mathbf{0}$  e infinitesima per  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ , tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m = |\mathbf{h}|_m \cdot \omega(\mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{h} \in U.$$

Si noti che quando  $m = 1$  la differenziabilità in un punto  $x_0$  equivale alla derivabilità in  $x_0$  (osservazione 4.1.2 (2)); in tal caso il gradiente è un vettore a una sola componente, cioè una quantità scalare (vale a dire, è un numero: precisamente il numero  $f'(x_0)$ ).

## Piano tangente

La nozione di differenziabilità è ciò che ci vuole affinché il grafico di una funzione abbia piano tangente.

**Definizione 4.2.8** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , e supponiamo che  $f$  sia differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Il piano ( $m$ -dimensionale) in  $\mathbb{R}^{m+1}$ , passante per  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ , di equazione

$$x^{m+1} = f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m$$

è detto piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ .

**Osservazione 4.2.9** L'aggettivo “tangente” nella definizione è giustificato dal fatto seguente: il generico piano passante per  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  ha equazione

$$x^{m+1} = \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m$$

con  $\mathbf{a}$  fissato vettore di  $\mathbb{R}^m$ . Quindi, per ciascuno di tali piani, ossia per ogni  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ , vale la relazione

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) - \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})] = 0.$$

Il piano tangente, quello per cui  $\mathbf{a} = \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)$ , è l'unico fra questi piani per il quale vale la condizione più forte

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m} = 0.$$

Ciò è conseguenza della proposizione 4.2.5 (ii).

**Esempio 4.2.10** Scriviamo l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

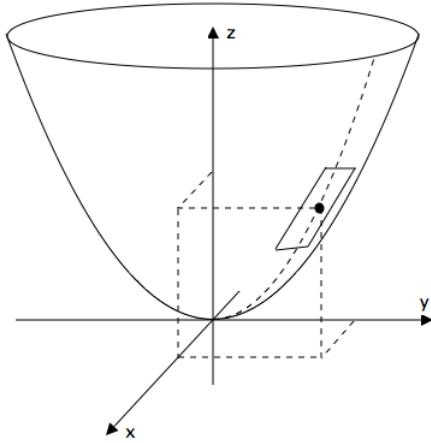
nel punto  $(-1, 2, f(-1, 2))$ . Si ha  $f(-1, 2) = 5$ , e inoltre

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y,$$

da cui  $f_x(-1, 2) = -2$ ,  $f_y(-1, 2) = 4$ . Ne deriva che il piano cercato ha equazione

$$z = 5 - 2(x + 1) + 4(y - 2),$$

ovvero  $z = -2x + 4y - 5$ .



## Derivate direzionali

Le derivate parziali di una funzione  $f$  in un punto  $\mathbf{x}_0$  sono i limiti dei rapporti incrementali delle restrizioni di  $f$  alle rette per  $\mathbf{x}_0$  parallele agli assi coordinati; ma queste  $m$  direzioni non hanno nulla di speciale rispetto alle infinite altre direzioni, ciascuna delle quali è individuata da un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  di norma unitaria (gli assi cartesiani corrispondono ai vettori  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^i$ ). La retta per  $\mathbf{x}_0$  parallela al vettore  $\mathbf{v}$  è l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^m$  di coordinate

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Definizione 4.2.11** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . La derivata direzionale di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  secondo la direzione  $\mathbf{v}$  (con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ) è il numero reale

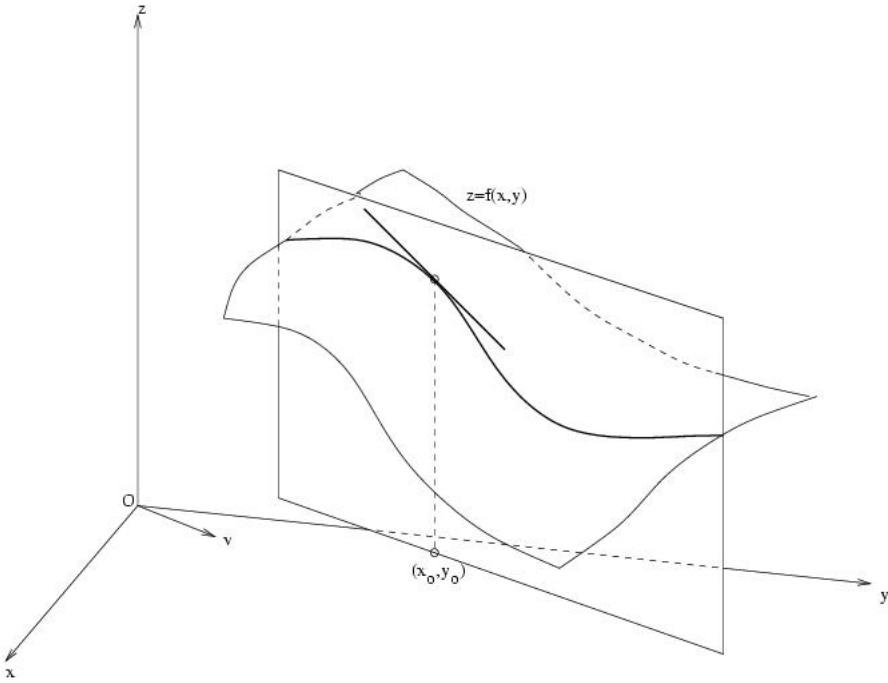
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t},$$

se tale limite esiste finito. Essa si indica con i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0), \quad D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0), \quad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0).$$

La derivata  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$  rappresenta la derivata in  $\mathbf{x}_0$  della restrizione di  $f$  alla retta per  $\mathbf{x}_0$  parallela a  $\mathbf{v}$ : essa dunque rappresenta la pendenza, nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ , del grafico di tale restrizione, cioè dell'intersezione del grafico di  $f$  con il piano parallelo all'asse

$x^{m+1}$  che contiene la retta per  $\mathbf{x}_0$  parallela a  $\mathbf{v}$ .



**Osservazioni 4.2.12** (1) Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  allora esiste in  $\mathbf{x}_0$  la derivata di  $f$  secondo ogni direzione  $\mathbf{v}$ , e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m$$

(esercizio 4.2.8).

(2) L'esistenza di tutte le derivate direzionali di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  non implica la differenziabilità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Ciò segue nuovamente dall'esempio 4.2.3: si vede facilmente che quella funzione, discontinua in  $(0, 0)$ , ha in tale punto tutte le derivate direzionali nulle. Il motivo è che le sue discontinuità hanno luogo lungo la parabola  $y = x^2$ , la quale attraversa tutte le rette per  $(0, 0)$  prima che queste raggiungano l'origine.

(3) La nozione di derivata direzionale ha senso per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ , ma è particolarmente significativa quando  $\mathbf{v}$  è una *direzione unitaria*, ossia quando  $|\mathbf{v}|_m = 1$ . Si noti che se  $\mathbf{v}$  è un vettore unitario e  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dalla definizione 4.2.11 segue subito che

$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda \mathbf{v})} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}.$$

**Esempio 4.2.13** La funzione  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  è differenziabile nell'aperto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$ . Fissato  $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ , calcoliamo  $D_{\mathbf{v}}f$  in un generico punto  $(x, y) \in A$ : si ha

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(x, y) &= \langle \mathbf{grad}f(x, y), \mathbf{v} \rangle_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x + 2y}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Quando  $f$  è differenziabile, l'applicazione  $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m$  è ovviamente lineare da  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}$ : essa si chiama *differenziale* di  $f$  nel punto  $\mathbf{x}_0$  e si denota con il simbolo  $df(\mathbf{x}_0)$ . Pertanto

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} = \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m,$$

ed in particolare

$$\mathbf{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m$$

è un'applicazione lineare. Tuttavia se  $f$  non è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , ma le derivate direzionali in  $\mathbf{x}_0$  esistono, la linearità dell'applicazione  $\mathbf{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$  non è più garantita (esercizio 4.2.9).

**Osservazione 4.2.14** Si può dimostrare questo risultato collaterale e piuttosto fine. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione lipschitziana di costante  $L$ , ossia tale che

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_m \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A;$$

supponiamo poi che esistano  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  con  $|\mathbf{v}|_m = 1$ , tali che  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = L$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0) = L\mathbf{v}$ .

Per provare questo enunciato, fissiamo  $r > 0$  in modo che  $B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq A$  e osserviamo che, per ipotesi,

$$f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = Ls + \omega(s) \quad \forall s \in ]-r, r[,$$

dove  $\omega(s) = \omega(-s)$  è tale che  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega(s)}{s} = 0$ . Similmente, essendo la funzione  $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|_m$  differenziabile nel punto  $\mathbf{v}$ , si ha

$$|\mathbf{v} + \mathbf{y}|_m - 1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle_m + \sigma(|\mathbf{y}|_m) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,$$

dove  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma(t)}{t} = 0$ . Per  $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, r)$  e  $0 < \lambda < r$  si ha allora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0 - \lambda\mathbf{v}) + f(\mathbf{x}_0 - \lambda\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \leq \\ &\leq L|\mathbf{h} + \lambda\mathbf{v}|_m - L\lambda + \omega(\lambda) = L\lambda \left| \mathbf{v} + \frac{\mathbf{h}}{\lambda} \right|_m - L\lambda + \omega(\lambda) = \\ &= L\lambda \left[ 1 + \frac{1}{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m + \sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) \right] - L\lambda + \omega(\lambda) = \\ &= L\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m + L\lambda\sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) + \omega(\lambda), \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{v}) + f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \\ &\geq -L|\mathbf{h} - \lambda\mathbf{v}|_m + L\lambda + \omega(\lambda) = -L\lambda \left| \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\lambda} \right|_m + L\lambda + \omega(\lambda) = \\ &= -L\lambda \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m + \sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) \right] + L\lambda + \omega(\lambda) = \\ &= L\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m - L\lambda\sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) + \omega(\lambda). \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m| \leq L\lambda \left| \sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) \right| + |\omega(\lambda)|,$$

da cui, se  $0 < |\mathbf{h}|_m < r$  e  $0 < \lambda < r$ ,

$$\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m|}{|\mathbf{h}|_m} \leq L \frac{\left| \sigma \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda} \right) \right|}{\frac{|\mathbf{h}|_m}{\lambda}} + \frac{|\omega(\lambda)|}{|\mathbf{h}|_m}.$$

Sia adesso  $\varepsilon > 0$ . Scegliamo  $\delta_\varepsilon > 0$  e  $\tau_\varepsilon \in ]0, r[$  tali che

$$\frac{|\sigma(\delta_\varepsilon)|}{\delta_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \frac{|\omega(t)|}{|t|} < \frac{\varepsilon \delta_\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon].$$

Allora per  $0 < |\mathbf{h}|_m < \min\{r, \delta_\varepsilon \tau_\varepsilon\}$ , prendendo  $\lambda = \frac{|\mathbf{h}|_m}{\delta_\varepsilon}$  si ottiene  $0 < \lambda < \tau_\varepsilon$  e pertanto

$$\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_m|}{|\mathbf{h}|_m} \leq L \frac{|\sigma(\delta_\varepsilon)|}{\delta_\varepsilon} + \frac{\left| \omega \left( \frac{|\mathbf{h}|_m}{\delta_\varepsilon} \right) \right|}{|\mathbf{h}|_m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\delta_\varepsilon} \frac{\varepsilon \delta_\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ciò prova la tesi.

## Curve di livello

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^m$ . Consideriamo le curve di livello di  $f$ , cioè gli insiemi (eventualmente, ma non sempre, vuoti)

$$Z_c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\}.$$

In realtà si tratta di curve vere e proprie solo quando  $m = 2$ , ossia  $f$  è una funzione di due sole variabili; altrimenti si dovrebbe parlare di “superfici di livello” ( $(m-1)$ -dimensionali).

Vogliamo far vedere che se  $Z_c$  è non vuoto e se il gradiente di  $f$  è non nullo nei punti di  $Z_c$ , allora in tali punti esiste il piano ( $(m-1)$ -dimensionale) tangente a  $Z_c$  e tale piano è ortogonale al gradiente di  $f$ .

Anzitutto, supposto  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ , osserviamo che fra tutti i vettori unitari  $\mathbf{v}$ , la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$  è massima quando  $\mathbf{v}$  ha direzione e verso coincidenti con  $\nabla f(\mathbf{x})$ , ed è minima quando  $\mathbf{v}$  ha direzione coincidente con  $\nabla f(\mathbf{x})$  ma verso opposto: infatti, dall'osservazione 4.2.12 (1) e dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz segue che

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})| = |\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle_m| \leq |\nabla f(\mathbf{x})|_m \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \text{ con } |\mathbf{v}|_m = 1,$$

e si ha  $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \pm |\nabla f(\mathbf{x})|_m$  scegliendo rispettivamente

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|_m} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = -\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|_m}.$$

Dunque, sempre che  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ , la direzione individuata da questo vettore è quella di *massima pendenza* del grafico di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ .

Ciò premesso, fissiamo  $\mathbf{x}_0 \in Z_c$  e consideriamo un qualunque piano  $\Pi$  passante per  $\mathbf{x}_0$ , quindi di equazione

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m = 0,$$

con  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Se  $\mathbf{x}$  è un altro punto di  $Z_c$ , la sua distanza dal piano  $\Pi$ , che denotiamo con  $d(\mathbf{x}, \Pi)$ , è data da

$$d(\mathbf{x}, \Pi) = \inf\{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|_m : \mathbf{x}' \in \Pi\} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m |\cos \vartheta|,$$

ove  $\vartheta$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{a}$ , ossia (proposizione 1.12.18)

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{a} \rangle_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m |\mathbf{a}|_m};$$

quindi

$$d(\mathbf{x}, \Pi) = \frac{|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{a} \rangle_m|}{|\mathbf{a}|_m}.$$

Se ne deduce che quando  $\mathbf{x} \in Z_c$  e  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  si ha

$$d(\mathbf{x}, \Pi) \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m.$$

Ma se in particolare si sceglie  $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ , cosicché  $\Pi$  è il piano per  $\mathbf{x}_0$  ortogonale al gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ , allora

$$d(\mathbf{x}, \Pi) = \frac{|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \nabla f(\mathbf{x}_0) \rangle_m|}{|\nabla f(\mathbf{x}_0)|_m}.$$

D'altra parte, poiché  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  si ha

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

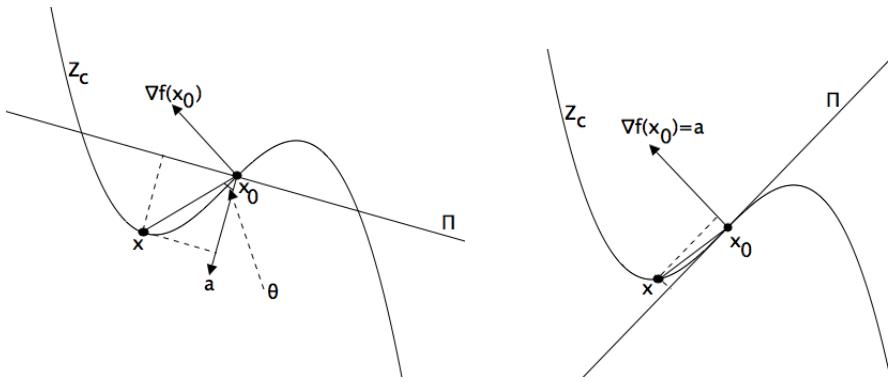
ove la funzione  $\omega$  è definita in un intorno di  $\mathbf{0}$  e verifica

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|_m} = 0.$$

Dunque, essendo  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) = c$ , otteniamo

$$\frac{d(\mathbf{x}, \Pi)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m} = \frac{|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \nabla f(\mathbf{x}_0) \rangle_m|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m |\nabla f(\mathbf{x}_0)|_m} = \frac{|\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m |\nabla f(\mathbf{x}_0)|_m} \rightarrow 0 \quad \text{per } \mathbf{x} \in Z_c \text{ e } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Pertanto se  $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$  non solo la distanza fra  $\mathbf{x}$  e  $\Pi$  è infinitesima quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  in  $Z_c$ , ma addirittura tale distanza resta infinitesima quando viene divisa per  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m$ . Ciò mostra, in accordo con l'osservazione 4.2.9, che il piano per  $\mathbf{x}_0$  perpendicolare a  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è il *piano tangente* a  $Z_c$  in  $\mathbf{x}_0$ .



L'equazione di questo piano è dunque

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m = 0.$$

Essendo  $\nabla f(\mathbf{x})$  ortogonale a  $Z_c$  in ogni  $\mathbf{x} \in Z_c$ , se  $\mathbf{v}$  è una direzione tangente alla curva di livello  $Z_c$  nel punto  $\mathbf{x} \in Z_c$ , si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle_m = 0$$

in quanto, come abbiamo visto,  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\nabla f(\mathbf{x})$ . Ciò corrisponde all'intuizione: se ci muoviamo lungo una curva di livello, il valore di  $f$  resta costante e quindi la derivata in una direzione tangente a tale curva deve essere nulla.

## Esercizi 4.2

1. Determinare i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in cui esistono le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(x, y) = |xy|, \\ \text{(ii)} & f(x, y) = |x - y|(x + y), \\ \text{(iii)} & f(x, y) = \sqrt{x^2 + |y|}, \\ \text{(iv)} & f(x, y) = x \arcsin xy, \\ \text{(v)} & f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{xy}), \\ \text{(vi)} & f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}, \\ \text{(vii)} & f(x, y) = y^x + x^y, \\ \text{(viii)} & f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{x - y}, \\ \text{(ix)} & f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\ \text{(x)} & f(x, y) = \tan e^{-|xy|}. \end{array}$$

2. Determinare i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in cui le seguenti funzioni sono differenziabili:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(x, y) = |\ln x^2 y|, \\ \text{(ii)} & f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \text{(iii)} & f(x, y) = |xy|, \\ \text{(iv)} & f(x, y) = x \sqrt{1 + |\sin y|}. \end{array}$$

3. Per quali  $\alpha > 0$  la funzione  $|xy|^\alpha$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

4. Per quali  $\alpha, \beta > 0$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

5. Scrivere le equazioni dei piani tangenti ai grafici delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati:

- (i)  $f(x, y) = \arctan(x + 2y)$       in  $(1, 0, \frac{\pi}{4})$ ,
- (ii)  $f(x, y) = \sin x \cos y$       in  $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4})$ .

6. Determinare i punti del grafico di  $f(x, y) = x^2 - y^2$  tali che il piano tangente in tali punti passi per il punto  $(0, 0, -4)$ .

7. Sia  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_m^4 - 3\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_m,$$

ove  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i = (1, 1, \dots, 1)$ . Si provi che  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^m$  e se ne calcolino le derivate parziali  $D_i f$ .

8. (i) Provare che se  $f$  è una funzione differenziabile nel punto  $\mathbf{x}_0$  allora esiste  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  e che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m.$$

(ii) Si calcolino le derivate direzionali sotto specificate:

- (a)  $D_{\mathbf{v}}(x + y)^3$ , ove  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;
- (b)  $D_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle_m$ , ove  $\mathbf{v} = \mathbf{b}$  (con  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ).

9. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 - y^2} & \text{se } |y| \leq |x| \\ 0 & \text{se } |y| > |x|. \end{cases}$$

Si verifichi che, posto  $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , risulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{0}) \neq \frac{\partial f}{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{v})}(\mathbf{0}).$$

10. Disegnare approssimativamente le curve di livello delle seguenti funzioni:

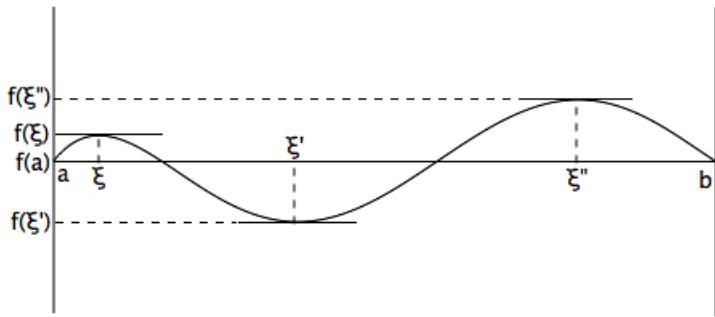
- (i)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,
- (ii)  $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ,
- (iii)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ,
- (iv)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,
- (v)  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ,
- (vi)  $f(x, y) = \ln \frac{|x|}{|y|}$ .

## 4.3 Proprietà delle funzioni derivabili

Esponiamo alcuni risultati relativi a funzioni derivabili definite su un intervallo di  $\mathbb{R}$ , risultati che, come vedremo, hanno svariate applicazioni.

**Teorema 4.3.1 (di Rolle)** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Se  $f(a) = f(b)$ , allora esiste  $\xi \in ]a, b[$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .*

Dunque, se  $f(a) = f(b)$  in almeno un punto  $(\xi, f(\xi))$  del grafico di  $f$  la tangente al grafico è orizzontale.



**Dimostrazione** Se  $f$  è costante in  $[a, b]$ , allora  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$  e la tesi è provata. Supponiamo dunque che  $f$  non sia costante in  $[a, b]$ ; poiché  $f$  è continua in  $[a, b]$ , per il teorema di Weierstrass (teorema 3.4.1)  $f$  assume massimo  $M$  e minimo  $m$  su  $[a, b]$ , e si ha necessariamente  $m < M$ . Dato che  $f(a) = f(b)$ , almeno uno tra i valori  $m$  e  $M$  è assunto in un punto  $\xi$  interno ad  $[a, b]$ ; se ad esempio si ha  $m = f(\xi)$ , allora, scelto  $h \in \mathbb{R}$  in modo che  $x + h \in [a, b]$ , risulta

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } h > 0 \\ \leq 0 & \text{se } h < 0, \end{cases}$$

dato che il numeratore è sempre non negativo. Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , si ottiene  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Corollario 4.3.2 (teorema di Cauchy)** *Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue in  $[a, b]$  e derivabili in  $]a, b[$ , con  $g' \neq 0$  in  $]a, b[$ . Allora esiste  $\xi \in ]a, b[$  tale che*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Si noti che risulta  $g(b) - g(a) \neq 0$  in virtù dell'ipotesi  $g' \neq 0$  e del teorema di Rolle.

**Dimostrazione** Basta applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]. \quad \square$$

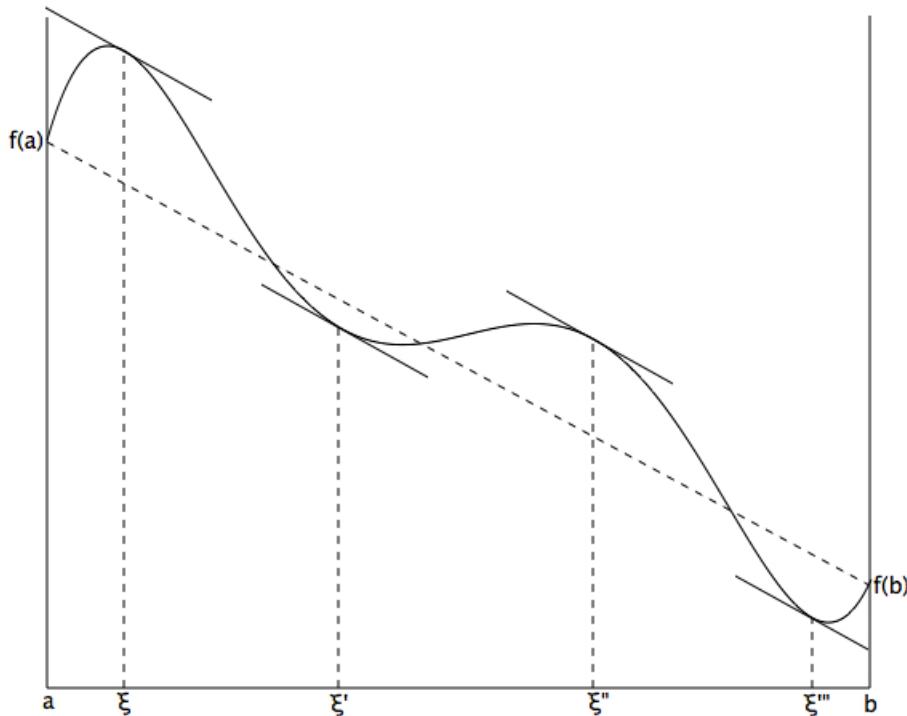
Il risultato più importante è però il seguente:

**Corollario 4.3.3 (teorema di Lagrange)** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Allora esiste  $\xi \in ]a, b[$  tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dunque in almeno un punto  $(\xi, f(\xi))$  del grafico di  $f$  la tangente al grafico è parallela alla retta passante per i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , l'equazione della quale è

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$



**Dimostrazione** Basta applicare il teorema di Cauchy con  $g(x) = x$ .  $\square$

Vediamo alcune applicazioni del teorema di Lagrange.

**Proposizione 4.3.4** *Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Allora  $f$  è costante in  $]a, b[$  se e solo se risulta  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in ]a, b[$ .*

**Dimostrazione** Se  $f$  è costante in  $]a, b[$  allora ovviamente  $f' = 0$  in  $]a, b[$ .

Viceversa, sia  $f' = 0$  in  $]a, b[$ . Fissiamo un punto  $x_0$  in  $[a, b]$ , ad esempio  $x_0 = a$ , e sia  $x$  un altro punto di  $]a, b[$ . Per il teorema di Lagrange applicato nell'intervallo  $[a, x]$ , esiste  $\xi \in ]a, x[$  tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

ma per ipotesi  $f'(\xi) = 0$ , e quindi  $f(x) = f(a)$ . Ne segue che  $f(x) = f(a)$  per ogni  $x \in ]a, b[$ . Dunque  $f$  è costante in  $]a, b[$ .  $\square$

Con l'aiuto della proposizione precedente possiamo scrivere alcune funzioni elementari come somme di serie di potenze in opportuni intervalli.

**Esempi 4.3.5 (1) (Serie logaritmica)** La funzione  $\log(1+x)$  è derivabile in  $] -1, +\infty [$ , e si ha

$$D \log(1+x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in ] -1, +\infty [;$$

d'altra parte, come sappiamo (esempio 2.2.6 (1)),

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in ] -1, 1 [.$$

Ora si riconosce subito che

$$(-1)^n x^n = D \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

quindi dal teorema di derivazione delle serie di potenze (teorema 4.1.12) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = D \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right) \quad \forall x \in ] -1, 1 [.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$D \log(1+x) = D \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right) \quad \forall x \in ] -1, 1 [.$$

La funzione derivabile

$$g(x) = \log(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

ha dunque derivata nulla in  $] -1, 1 [$ , e quindi per la proposizione precedente è costante in tale intervallo. Ma per  $x = 0$  si ha  $g(0) = (\log 1) - 0 = 0$ , cosicché  $g$  è nulla su  $] -1, 1 [$ : in altre parole

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall x \in ] -1, 1 [.$$

Si noti che la serie a secondo membro soddisfa, per  $x \in [0, 1 [$ , le ipotesi del criterio di Leibniz (proposizione 2.5.3); dunque

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \quad \forall x \in [0, 1 [, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Per  $x \rightarrow 1$  si ricava allora

$$\left| \log 2 - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

cosicché l'uguaglianza già scritta vale anche per  $x = 1$ :

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall x \in ]-1, 1].$$

**(2) (Serie dell'arcotangente)** La funzione  $\arctan x$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ , e si ha

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha inoltre

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = D \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right) \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

Procedendo come nell'esempio precedente si deduce

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

ed applicando nuovamente il criterio di Leibniz si trova stavolta che la stessa uguaglianza vale in entrambi gli estremi  $x = \pm 1$ :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

**(3) (Serie binomiale)** Consideriamo la funzione  $(1+x)^\alpha$ , ove  $\alpha$  è un parametro reale fissato, la quale è derivabile in  $] -1, +\infty [$ . Proveremo che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

ove

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

I numeri  $\binom{\alpha}{n}$  si chiamano *coefficienti binomiali generalizzati*; se  $\alpha \in \mathbb{N}$  essi coincidono con gli usuali coefficienti binomiali quando  $0 \leq n \leq \alpha$ , mentre sono tutti nulli quando  $n \geq \alpha$ . La serie  $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$  è detta *serie binomiale* e quando  $\alpha \in \mathbb{N}$  essa si riduce ad una somma finita che coincide con la formula di Newton per il binomio  $(1+x)^\alpha$ .

Per provare la formula sopra scritta cominciamo con l'osservare che il raggio di convergenza della serie  $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$  è 1, come si verifica facilmente mediante il criterio del rapporto. Sia  $g(x)$  la somma, per ora incognita, di tale serie in  $] -1, 1[$ : dobbiamo provare che  $g(x) = (1+x)^\alpha$  per ogni  $x \in ] -1, 1[$ .

Mostriamo anzitutto che

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x) \quad \forall x \in ] -1, 1[.$$

In effetti, per il teorema di derivazione delle serie di potenze (teorema 4.1.12) si ha

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= (1+x)D\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\right) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = \\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = \\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} \right] x^k;
\end{aligned}$$

d'altra parte risulta per ogni  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
(k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} &= \\
&= (k+1) \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k)}{(k+1)!} + k \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} = \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} (\alpha - k + k) = \alpha \binom{\alpha}{k},
\end{aligned}$$

cosicché

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \right] = \alpha g(x) \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

Consideriamo allora la derivata del prodotto  $g(x)(1+x)^{-\alpha}$ : si ha

$$\begin{aligned}
D(g(x)(1+x)^{-\alpha}) &= g'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha g(x)(1+x)^{-\alpha-1} = \\
&= (1+x)^{-\alpha-1} [(1+x)g'(x) - \alpha g(x)] = 0 \quad \forall x \in ]-1, 1[;
\end{aligned}$$

per la proposizione 4.3.4 si deduce

$$g(x)(1+x)^{-\alpha} = \text{costante} \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

e poiché  $g(0) = 1$ , si conclude che

$$(1+x)^\alpha = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Concludiamo il paragrafo illustrando un'interessante proprietà di cui godono tutte le funzioni derivate, ossia tutte le funzioni  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $g = f'$  per qualche funzione  $f$  derivabile in  $[a, b]$ : tali funzioni, pur non essendo necessariamente continue, hanno la proprietà di assumere tutti i valori intermedi fra il loro estremo inferiore e il loro estremo superiore. Vale infatti il seguente

**Teorema 4.3.6 (di Darboux)** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile e poniamo  $M = \sup_{[a, b]} f'$ ,  $m = \inf_{[a, b]} f'$ . Allora per ogni  $\eta \in ]m, M[$  esiste  $\bar{x} \in [a, b]$  tale che  $f'(\bar{x}) = \eta$ .

**Dimostrazione** Fissato  $\eta \in ]m, M[$ , esistono  $y \in ]m, \eta[$  e  $z \in ]\eta, M[$  tali che  $y = f'(c)$  e  $z = f'(d)$ , con  $c, d \in [a, b]$ . Indichiamo con  $I$  l'intervallo chiuso di estremi  $c, d$  (non sappiamo se è  $c < d$  o il contrario): ovviamente  $I$  è contenuto in  $[a, b]$ . Posto  $h(x) = f(x) - \eta x$ , la funzione  $h$  è derivabile e quindi continua in  $I$ ; pertanto  $f$  assume massimo e minimo in  $I$ , in due punti  $x_0$  e  $\xi_0$ . Osserviamo che

$$h'(c) = f'(c) - \eta < 0, \quad h'(d) = f'(d) - \eta > 0;$$

dunque se risulta  $c < d$  si deduce, utilizzando l'esercizio 4.3.3, che il punto di massimo  $x_0$  non può coincidere né con  $c$ , né con  $d$ ; se invece è  $c > d$ , analogamente si ricava che il punto di minimo  $\xi_0$  non può coincidere né con  $c$ , né con  $d$ . Pertanto vi è sempre un punto  $\bar{x}$ , interno ad  $I$ , nel quale la funzione  $h$  assume massimo oppure minimo: dalla dimostrazione del teorema di Rolle (teorema 4.3.1) segue allora che  $h'(\bar{x}) = 0$ , ovvero  $f'(\bar{x}) = \eta$ .  $\square$

### Esercizi 4.3

- Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R};$$

provare che esiste  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .

- Siano  $f, g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni derivabili, con  $g' \neq 0$  in  $[a, +\infty[$ ; se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \mu,$$

si dimostri che esiste  $\xi > a$  tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - \lambda}{g(a) - \mu}.$$

- Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Se  $x_0 \in [a, b]$  è un punto di massimo per  $f$  e  $\xi_0$  è un punto di minimo per  $f$ , si provi che

$$f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 = a \\ = 0 & \text{se } a < x_0 < b \\ \geq 0 & \text{se } x_0 = b, \end{cases} \quad f'(\xi_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } \xi_0 = a \\ = 0 & \text{se } a < \xi_0 < b \\ \leq 0 & \text{se } \xi_0 = b. \end{cases}$$

- Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lambda,$$

si provi che  $f$  è prolungabile con continuità nel punto  $a$ , che  $f$  è derivabile in tale punto e che  $f'(a) = \lambda$ .

[**Traccia:** si provi che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  per ogni  $x, y \in [a, a + \delta[$ , e se ne deduca la continuità dell'estensione di  $f$ ; poi si provi che la stessa proprietà vale per  $f'$  e se ne deduca la derivabilità di  $f$  ed il fatto che  $f'(a) = \lambda$ .]

5. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che  $f(0) = 0$  e  $|f'(x)| \leq |f(x)|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ; provare che  $f$  è identicamente nulla in  $\mathbb{R}$ .
- [**Traccia:** se  $x_0$  è punto di massimo per  $f$  in  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , si provi che esiste  $\xi \in I$  tale che  $|f'(x)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x_0|$  per ogni  $x \in I$ ; se ne deduca che  $f$  è costante, quindi nulla, in  $I$ . Poi ci si allarghi a  $[-1, 1]$ ,  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ , eccetera...]
6. Si provi che l'equazione  $x^{1000} + ax + b = 0$  ha al più due soluzioni reali per ogni scelta di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$ .
7. Si provi che l'equazione  $x^{999} + ax + b = 0$  ha al più tre soluzioni reali per ogni scelta di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$ , ed al più una per ogni scelta di  $a \geq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

8. Si provi che

$$\log(1-x) \geq -\frac{x}{1-x} \quad \forall x \in [0, 1[.$$

9. Si provi che

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in ]-1, 1[;$$

scelto  $x = \frac{1}{2m+1}$  se ne deduca che

$$\log \frac{m+1}{m} = \frac{2}{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(2m+1)^{2n}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

10. Si provi che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

è divergente, mentre la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]$$

è convergente.

11. Si provi che

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

ove si è indicato con  $m!!$  il prodotto di tutti i naturali fra 1 e  $m$  aventi la stessa parità di  $m$ , e si è posto  $m!! = 1$  per  $m \leq 0$ .

12. Determinare una serie di potenze la cui somma sia  $\sqrt{2 - x^2}$  in un opportuno intervallo di centro 0.
13. Provare che valgono gli sviluppi in serie di potenze

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{settsinh} x &= \log \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in ]-1, 1[.\end{aligned}$$

[Traccia: ripetere il ragionamento fatto per  $\log(1+x)$  e  $\arctan x$  negli esempi 4.3.5.]

14. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si provi che la serie binomiale  $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ :

- (i) converge assolutamente per  $x = \pm 1$ , se  $\alpha \geq 0$ ;
- (ii) converge puntualmente per  $x = 1$  e non converge per  $x = -1$ , se  $-1 < \alpha < 0$ ;
- (iii) non converge per  $x = \pm 1$ , se  $\alpha \leq -1$ .

[Traccia: se  $\alpha \leq -1$  si provi che  $|\binom{\alpha}{n}| \leq |\binom{\alpha}{n+1}|$ ; se  $\alpha \geq 1$  si provi che  $|\binom{\alpha}{n}| \leq \frac{c}{n(n-1)}$  per ogni  $n$  sufficientemente grande e  $c$  costante opportuna; se  $|\alpha| < 1$  si osservi che  $|\binom{\alpha}{n+1}| < |\binom{\alpha}{n}| = |\alpha| \cdot \prod_{k=2}^n |1 - \frac{\alpha+1}{k}|$ , e sfruttando le relazioni

$$\begin{aligned}-\frac{b}{k-b} &< \log \left( 1 - \frac{b}{k} \right) < -\frac{b}{k} \quad \forall b \in ]0, 2[, \quad \forall k \geq 2, \\ \log \frac{n}{2} &< \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n \quad \forall n \geq 2,\end{aligned}$$

si deducano le diseguaglianze  $\frac{c}{n^{\alpha+1}} < |\binom{\alpha}{n}| < \frac{c'}{n^{\alpha+1}}$  per ogni  $n \geq 2$  e per opportune costanti  $c, c'$ .]

15. Si verifichi che  $\frac{x}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$  per ogni  $x \in [0, 1]$ ; se ne deduca, utilizzando le diseguaglianze fra media armonica, geometrica e aritmetica (teorema 1.8.2 ed esercizio 1.8.4), che

$$\left( \frac{n}{2 \ln(n+1)} \right)^n < n! < \left( \frac{n+1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Si confronti questo risultato con quello ottenuto nell'esempio 2.7.10 (3).

## 4.4 Condizioni sufficienti per la differenziabilità

Torniamo alle funzioni di più variabili: con l'ausilio del teorema di Lagrange si può provare la differenziabilità di un'ampia classe di tali funzioni.

**Teorema 4.4.1 (del differenziale totale)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione con le seguenti proprietà:*

- (i) *vi è una palla  $B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq A$  tale che esistano le derivate parziali  $D_i f(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in ogni punto  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ ;*
- (ii) *le derivate parziali  $D_i f$  sono continue in  $\mathbf{x}_0$ .*

Allora  $f$  è differenziabile nel punto  $\mathbf{x}_0$ .

**Dimostrazione** Facciamo la dimostrazione nel caso  $m = 2$ : il caso generale è del tutto analogo ma formalmente più complicato (esercizio 4.4.2). Poniamo dunque  $(x_0, y_0) = \mathbf{x}_0$ ,  $(h, k) = \mathbf{h}$ . Sia poi  $\rho = |\mathbf{h}|_2$ . Se  $\rho < r$ , ossia  $h^2 + k^2 < r^2$ , allora i punti  $(x_0, y_0 + k)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  appartengono ancora a  $B(\mathbf{x}_0, r)$ . Dobbiamo provare che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \left[ f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right] = 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \\ &= [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)], \end{aligned}$$

ed applicando il teorema di Lagrange alle due funzioni

$$\begin{aligned} t &\rightarrow f(t, y_0 + k), \quad t \text{ compreso fra } x_0 \text{ e } x_0 + h, \\ t &\rightarrow f(x_0, t), \quad t \text{ compreso fra } y_0 \text{ e } y_0 + k, \end{aligned}$$

otteniamo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)k$$

con  $\xi$  punto opportuno compreso fra  $x_0$  e  $x_0 + h$ , e  $\eta$  punto opportuno compreso fra  $y_0$  e  $y_0 + k$ . Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right| &\leq \\ &\leq \frac{|h|}{\rho} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \frac{|k|}{\rho} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|; \end{aligned}$$

quando  $\rho \rightarrow 0$  si ha  $h \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow 0$ , dunque  $\xi \rightarrow x_0$  e  $\eta \rightarrow y_0$ : perciò l'ultimo membro tende a 0 in virtù della continuità delle derivate parziali di  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Ne segue la tesi.  $\square$

Osserviamo che il teorema precedente esprime una condizione soltanto *sufficiente* per la differenziabilità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ : nell'esercizio 4.4.1 si esibisce una funzione che è differenziabile benché non soddisfi le ipotesi del teorema del differenziale totale.

## Esercizi 4.4

1. Provare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos \frac{1}{y} & \text{se } x \in \mathbb{R}, y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, y = 0 \end{cases}$$

è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ , ma non soddisfa in tale punto le ipotesi del teorema del differenziale totale.

2. Dimostrare il teorema del differenziale totale nel caso generale (funzioni di  $m$  variabili anziché di due).
3. Sia  $A$  un *cono* di  $\mathbb{R}^m$  (cioè un insieme tale che se  $\mathbf{x} \in A$  allora  $t\mathbf{x} \in A$  per ogni  $t > 0$ ). Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *omogenea* di grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  se verifica l'identità

$$f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall t > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Provare che:

- (i) se  $f$  è differenziabile in  $A$ , allora le derivate parziali  $D_i f$  sono funzioni omogenee di grado  $\alpha - 1$ ;
- (ii) vale l'*identità di Eulero*

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle_m = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

4. Sia  $\mathbf{H}$  una matrice reale e simmetrica  $m \times m$ . Si verifichi che la funzione  $\Phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{H}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m$  è una funzione omogenea di grado 2 su  $\mathbb{R}^m$  (essa si chiama *forma quadratica* associata alla matrice  $\mathbf{H}$ ), e se ne calcoli il gradiente.

5. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, y = 0 \\ y e^{-(\frac{x-y}{y})^2} & \text{se } x \in \mathbb{R}, y \neq 0. \end{cases}$$

- (i) Si verifichi che  $f$  è continua in  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Si provi che esistono le derivate parziali di  $f$  in ogni punto di  $\mathbb{R}^2$ .
- (iii) Si scriva il vettore  $\mathbf{grad}f(0, 0)$ .
- (iv) Si dimostri che  $f$  non è differenziabile nell'origine, mentre lo è negli altri punti di  $\mathbb{R}^2$ .

6. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln y^2}{y^2 - 1} & \text{se } x \in \mathbb{R}, y \neq 1 \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R}, y = 1. \end{cases}$$

- (i) Determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua.
- (ii) Determinare l'insieme dei punti ove esistono le derivate parziali e calcolare tali derivate.
- (iii) Determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è differenziabile e calcolarne il differenziale.

7. Sia  $f$  una funzione differenziabile con derivate parziali continue in  $\mathbb{R}^2$ , e tale che

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta,$$

ove  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ .

- (i) Provare che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta.$$

- (ii) Provare che la funzione

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x - y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$$

è estendibile con continuità a  $\mathbb{R}^2$ .

## 4.5 Differenziabilità di funzioni composte

Estenderemo al caso di funzioni di più variabili il teorema di derivazione delle funzioni composte (teorema 4.1.7). Cominciamo dal caso più semplice: sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, e sia  $\mathbf{u} : [a, b] \rightarrow A$  una funzione a valori vettoriali: ciò significa che  $\mathbf{u}(t)$  è un vettore  $(u^1(t), \dots, u^m(t))$  di  $\mathbb{R}^m$ , il quale appartiene ad  $A$  per ogni scelta di  $t \in [a, b]$ . Ha dunque senso considerare la funzione composta  $F(t) = f(\mathbf{u}(t))$ , che è definita su  $[a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 4.5.1** *Nelle ipotesi sopra dette, se  $f$  è differenziabile in  $A$  e  $\mathbf{u}$  è derivabile in  $[a, b]$  (ossia le funzioni  $u^1, \dots, u^m$  sono derivabili in  $[a, b]$ ), allora  $F$  è derivabile in  $[a, b]$  e si ha*

$$F'(t) = \langle ([\nabla f] \circ \mathbf{u})(t), \mathbf{u}'(t) \rangle_m = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{u}(t)) (u^i)'(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Le  $u^i$  sono funzioni derivabili: quindi, fissato  $t \in [a, b]$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $t + k \in [a, b]$  si può scrivere

$$u^i(t + k) - u^i(t) = (u^i)'(t)k + k w^i(k), \quad i = 1, \dots, n,$$

ove le funzioni  $w^i$  sono infinitesime per  $k \rightarrow 0$ ; ossia, in forma vettoriale,

$$\mathbf{u}(t + k) - \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'(t)k + k \mathbf{w}(k),$$

ove  $|\mathbf{w}(k)|_m \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow 0$ .

D'altra parte, essendo la funzione  $f$  differenziabile nel punto  $\mathbf{u}(t)$ , dall'osservazione 4.2.7 segue, prendendo come incremento vettoriale  $\mathbf{h}$  la quantità  $\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)$ , che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}(t+k)) - f(\mathbf{u}(t)) - \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t) \rangle_m &= \\ &= |\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)|_m \omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

ove  $\omega(\mathbf{h})$  è un infinitesimo per  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Ne segue

$$\begin{aligned} F(t+k) - F(t) - \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) \rangle_m k &= \\ &= f(\mathbf{u}(t+k)) - f(\mathbf{u}(t)) - \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) \rangle_m k = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t) \rangle_m - \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) \rangle_m k + \\ &\quad + |\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)|_m \omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)) = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(k) k \rangle_m + |\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)|_m \omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)) = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(k) k \rangle_m + |(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{w}(k)) k|_m \omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)); \end{aligned}$$

poiché

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{1}{k} \left[ \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(k) k \rangle_m + |(\mathbf{u}'(t) + \mathbf{w}(k)) k|_m \cdot \omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t)) \right] \right| &\leq \\ \leq \lim_{k \rightarrow 0} \left[ |\nabla f(\mathbf{u}(t))|_m |\eta(k)|_m + |\mathbf{u}'(t) + \mathbf{w}(k)|_m |\omega(\mathbf{u}(t+k) - \mathbf{u}(t))| \right] &= 0, \end{aligned}$$

si conclude che

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(t+k) - F(t)}{k} = \langle \nabla f(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) \rangle_m. \quad \square$$

Il risultato che segue prova la differenziabilità delle funzioni composte nel caso più generale.

**Teorema 4.5.2** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^p$  e consideriamo due funzioni  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ . Se  $f$  è differenziabile in  $A$  e se  $\mathbf{g}$  è differenziabile in  $B$  (ossia le componenti scalari  $g^1, \dots, g^m$  di  $\mathbf{g}$  sono differenziabili in  $B$ ), allora la funzione composta  $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = f(g^1(\mathbf{x}), \dots, g^m(\mathbf{x}))$  è differenziabile in  $B$  e risulta*

$$\frac{\partial F}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^k}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \frac{\partial g^k}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B, \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

**Dimostrazione** Le funzioni  $g^1, \dots, g^m$  sono differenziabili in  $B$ , quindi si ha

$$g^i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g^i(\mathbf{x}) = \langle \nabla g^i(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle_p + |\mathbf{h}|_p w^i(\mathbf{h}), \quad i = 1, \dots, m,$$

ove le funzioni  $w^i$  sono infinitesime per  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Introducendo la matrice Jacobiana  $\mathbf{Dg}(\mathbf{x})$ , la cui riga  $i$ -sima è il vettore  $\nabla g^i(\mathbf{x})$ , e che quindi è  $m \times p$ , possiamo scrivere le relazioni precedenti in forma vettoriale:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Dg}(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|_p \mathbf{w}(\mathbf{h}),$$

ove  $|\mathbf{w}(\mathbf{h})|_m \rightarrow 0$  per  $|\mathbf{h}|_p \rightarrow 0$ . D'altronde, siccome  $f$  è differenziabile nel punto  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , scelto l'incremento  $\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$  si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - \langle [\nabla f](\mathbf{g}(\mathbf{x})), \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle_m &= \\ &= |\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})|_m \omega(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

ove  $\omega(\mathbf{k})$  è un infinitesimo per  $|\mathbf{k}|_p \rightarrow 0$ . Ne segue

$$\begin{aligned} f(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - \langle [\nabla f](\mathbf{g}(\mathbf{x})), \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{h} \rangle_m &= \\ &= \langle [\nabla f](\mathbf{g}(\mathbf{x})), |\mathbf{h}|_p \mathbf{w}(\mathbf{h}) \rangle_m + |\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})|_m \omega(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \\ &= \langle [\nabla f](\mathbf{g}(\mathbf{x})), |\mathbf{h}|_p \mathbf{w}(\mathbf{h}) \rangle_m + |\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|_p \mathbf{w}(\mathbf{h})|_m \omega(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})); \end{aligned}$$

denotando l'ultimo membro con  $\omega(\mathbf{h})$ , osserviamo che risulta

$$\lim_{|\mathbf{h}|_p \rightarrow 0} \frac{\omega(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|_p} = 0.$$

Dunque si conclude che  $f \circ \mathbf{g}$  è differenziabile nel generico punto  $\mathbf{x}$  e si ha

$$\langle \nabla(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle_p = \langle [\nabla f](\mathbf{g}(\mathbf{x})), \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{h} \rangle_p \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^p,$$

il che implica in particolare

$$D_i f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^m [D_k f](\mathbf{g}(\mathbf{x})) D_i g^k(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m. \quad \square$$

**Esempi 4.5.3 (1) (Coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$ )** Poniamo, come si è fatto nell'osservazione 3.3.7,

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Se  $f(x, y)$  è una funzione differenziabile, posto  $u(r, \vartheta) = f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \vartheta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r \cos \vartheta, \end{aligned}$$

e in particolare

$$|[\nabla f](r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)|_2^2 = \left[ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \vartheta) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) \right]^2 \quad \forall r > 0, \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi].$$

**(2) (Coordinate polari in  $\mathbb{R}^3$ )** Poniamo

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

La quantità  $r$  rappresenta la distanza del punto  $\mathbf{P} = (x, y, z)$  dall'origine  $\mathbf{O}$ ; il numero  $\vartheta$  è la “colatitudine”, ossia l'angolo convesso che il segmento  $\mathbf{OP}$  forma con il segmento  $\mathbf{ON}$ , ove  $\mathbf{N}$  è il “polo nord”  $(0, 0, r)$ ; infine, il numero  $\varphi$  è la longitudine, cioè l'angolo (orientato) fra la semiretta delle  $x \geq 0$  e la proiezione di  $\mathbf{OP}$  sul piano  $xy$ .

Come nel caso bidimensionale, la corrispondenza  $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z)$  non è biunivoca poiché tutte le terne  $(0, \vartheta, \varphi)$  rappresentano l'origine, tutte le terne  $(r, 0, \varphi)$  e  $(r, 0, \pi)$  rappresentano i due “poli”  $(0, 0, r)$  e  $(0, 0, -r)$  rispettivamente, ed infine le terne  $(r, \vartheta, 0)$  e  $(r, \vartheta, 2\pi)$  rappresentano lo stesso punto sul piano  $xz$ . L'applicazione  $\Phi$  trasforma parallelepipedi dello spazio  $r\vartheta\varphi$  in settori sferici dello spazio  $xyz$ .

Se  $f(x, y, z)$  è una funzione differenziabile e  $v = f \circ \Phi$ , si puo' verificare che (omettendo, per brevità, la dipendenza delle funzione dalle variabili):

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi \right) \sin \vartheta \cos \varphi + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \Phi \right) \sin \vartheta \sin \varphi + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \circ \Phi \right) \cos \vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi \right) r \cos \vartheta \cos \varphi + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \Phi \right) r \cos \vartheta \sin \varphi - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \circ \Phi \right) r \sin \vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi \right) r \sin \vartheta \sin \varphi + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \Phi \right) r \sin \vartheta \cos \varphi.\end{aligned}$$

In particolare si verifica facilmente che

$$|[\nabla f] \circ \Phi|_3^2 = \left[ \frac{\partial v}{\partial r} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right]^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left[ \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right]^2$$

per ogni  $r > 0$ ,  $\vartheta \in ]0, \pi[$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

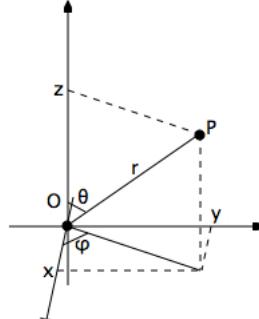
## Esercizi 4.5

1. Scrivere la derivata rispetto a  $t$  delle funzioni composte  $f(\mathbf{u}(t))$  seguenti:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathbf{u}(t) = (1 + t, 1 - t)$ ;
- (b)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ ,  $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \sin t)$ ;
- (c)  $f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$ ,  $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $0 < t < \frac{\pi}{4}$ ;
- (d)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4}$ ,  $\mathbf{u}(t) = (3t^2, 2t)$  con  $t \neq 0$ .

2. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , e se tutto il segmento  $I$  di estremi  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è contenuto in  $A$ , si provi che

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \langle \nabla f(\mathbf{v}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_m,$$



ove  $\mathbf{v}$  è un punto opportuno del segmento  $I$ .

[**Traccia:** si applichi il teorema di Lagrange alla funzione  $F(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .]

3. Sia  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile; posto

$$u(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|_m^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m,$$

si provi che  $u$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^m$  e se ne calcoli il gradiente.

## 4.6 Derivate successive

Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Allora per ogni  $x \in ]a, b[$  esiste la derivata  $f'(x)$ : dunque resta definita la *funzione derivata*  $f' : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Se questa funzione è a sua volta derivabile in  $]a, b[$ , la sua derivata  $(f')'$  si dice *derivata seconda* di  $f$  e si indica con i simboli

$$f''(x), \quad D^2 f(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

(la  $f'$ , per analogia, si dirà *derivata prima* di  $f$ ). In particolare

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Analogamente si definiscono, quando è possibile, la derivata terza, quarta,  $\dots$ ,  $n$ -sima di  $f$ , che si indicano con  $f^{(3)}$ ,  $f^{(4)}$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}$ ; si ha

$$f^{(k)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x+h) - f^{(k-1)}(x)}{h} \quad \forall x \in ]a, b[, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

In tal caso si dice che  $f$  è *derivabile  $n$  volte* in  $]a, b[$ .

**Esempi 4.6.1** (1) Se  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ , si ha  $f'(x) = 2x + 3$ ,  $f''(x) = 2$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$  per ogni  $n > 2$ .

(2) Se  $f(x) = x|x|$ , si ha  $f'(x) = 2|x|$  e

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

mentre  $f''(0)$  non esiste.

(3) Se  $f(x) = b^x$ , si ha  $f^{(n)}(x) = b^x (\ln b)^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Per le funzioni di più variabili valgono considerazioni analoghe. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ; se  $f$  è differenziabile in  $A$ , allora esistono le  $m$  derivate parziali prime  $D_i f(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Se ciascuna di queste funzioni, a sua volta, è differenziabile in  $A$ , esisteranno le  $m^2$  derivate parziali seconde  $D_j(D_i f)(\mathbf{x})$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ ; per tali funzioni useremo i simboli

$$D_j D_i f(\mathbf{x}), \quad f_{x^j x^i}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\mathbf{x}),$$

e se  $i = j$

$$D_j^2 f(\mathbf{x}), \quad f_{x^j x^j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^j}(\mathbf{x}).$$

In generale,  $f$  avrà  $m^k$  derivate parziali  $k$ -sime (se queste esistono tutte).

**Definizione 4.6.2** *Diciamo che una funzione  $f$  è di classe  $C^k$  in  $A$ , e scriviamo  $f \in C^k(A)$ , se  $f$  possiede tutte le derivate parziali fino all'ordine  $k$  incluso, e inoltre  $f$  e le sue derivate sono continue in  $A$ ; in particolare, denotiamo con  $C^0(A)$ , o semplicemente con  $C(A)$ , l'insieme delle funzioni continue in  $A$ . Poniamo inoltre*

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

In modo analogo si definisce  $C^k([a, b])$  nel caso di funzioni di una sola variabile.

**Esempi 4.6.3** (1) Ogni polinomio in  $m$  variabili è una funzione di classe  $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ .

(2) La funzione  $f(x) = |x|^{k+1/2}$  è di classe  $C^k$ , ma non di classe  $C^{k+1}$ , su  $\mathbb{R}$ .

**Osservazione 4.6.4** Dato un intervallo chiuso  $[a, b]$ , indichiamo con  $C^k[a, b]$  l'insieme delle funzioni derivabili  $k$  volte in  $[a, b]$ , con tutte le derivate continue in  $[a, b]$ ; negli estremi  $a, b$  tali derivate sono calcolate come nell'osservazione 4.1.4. Si noti che, nel caso  $m$ -dimensionale, per  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^m$  la definizione dello spazio  $C^k(\overline{A})$  è non banale, come si vedrà nel corso di Analisi 2.

In generale, può darsi il caso che esistano le derivate seconde  $D_i D_j f$  e  $D_j D_i f$  di una funzione  $f$  di  $m$  variabili, ma che queste due derivate siano diverse fra loro: un esempio è fornito nell'esercizio 4.6.5. Tuttavia sotto ipotesi assai ragionevoli vale il seguente risultato sull'invertibilità dell'ordine di derivazione:

**Teorema 4.6.5 (di Schwarz)** *Se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^m$  e  $f \in C^2(A)$ , allora per ogni  $i, j = 1, \dots, m$  si ha*

$$D_j D_i f(\mathbf{x}) = D_i D_j f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

**Dimostrazione** Si vedano gli esercizi 4.6.6 e 4.6.7.  $\square$

Di conseguenza, se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^2$  sull'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , la sua *matrice Hessiana*, definita da

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1^2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_m f(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_m D_1 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_m^2 f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in A,$$

è una matrice  $m \times m$  reale e simmetrica; ritorneremo a parlare di essa quando studieremo i massimi e i minimi di funzioni di più variabili (paragrafo 4.11).

## Principio di identità delle serie di potenze

Per i polinomi vale il *principio di identità*, ben noto in algebra, secondo il quale due polinomi che coincidono per ogni valore della variabile devono avere gli stessi coefficienti. Le serie di potenze condividono questa fondamentale proprietà: in altre parole, i loro coefficienti sono univocamente determinati dalla somma della serie. Ciò è conseguenza del seguente

**Teorema 4.6.6** *Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze reale con raggio di convergenza  $R > 0$ , e sia  $f(x)$  la sua somma per  $|x| < R$ . Allora:*

(i)  *$f$  appartiene a  $C^\infty(]-R, R[)$  (cioè esiste  $f^{(n)}(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in ]-R, R[$ );*

(ii) *risulta*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k x^{k-n} \quad \forall x \in ]-R, R[;$$

(iii) *in particolare,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*ove  $f^{(0)}$  significa  $f$ .*

**Dimostrazione** Dal teorema 4.1.12 sappiamo che  $f$  è derivabile e che

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \forall x \in ]-R, R[.$$

Ma allora  $f'$  è a sua volta somma di una serie di potenze in  $]-R, R[$ : dunque, applicando nuovamente il teorema 4.1.12 segue che  $f'$  è derivabile e che

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \quad \forall x \in ]-R, R[.$$

Iterando il procedimento si ottengono (i) e (ii). In particolare, scegliendo  $x = 0$  nella serie di  $f^{(n)}$ , tutti gli addendi con  $k > n$  spariscono e pertanto

$$f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdots (n-n+1) a_n = n! a_n. \quad \square$$

**Corollario 4.6.7 (principio di identità delle serie di potenze)** *Siano  $\sum a_n x^n$  e  $\sum b_n x^n$  due serie di potenze reali con raggi di convergenza  $R, R' > 0$ . Posto  $r = \min\{R, R'\}$ , se risulta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \forall x \in ]-r, r[,$$

*allora si ha  $a_n = b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Dimostrazione** Basta applicare il teorema 4.6.6 alla serie differenza, cioè  $\sum (a_n - b_n)x^n$ , la quale per ipotesi ha somma 0 in  $]-r, r[$ .  $\square$

## Esercizi 4.6

1. Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f$  sia derivabile due volte in  $]a, b[$ . Siano  $x_1, x_2, x_3$  punti di  $]a, b[$ , con  $x_1 < x_2 < x_3$  e  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ . Si provi che esiste  $\xi \in ]x_1, x_3[$  tale che  $f''(\xi) = 0$ .
2. Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte in  $]a, b[$ . Si provi che

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \quad \forall x \in ]a, b[.$$

3. Calcolare  $f^{(n)}(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  nei casi seguenti:

(i)  $f(x) = \log_b x$ , (ii)  $f(x) = \cos bx$ , (iii)  $f(x) = b^{-x}$ , (iv)  $f(x) = x^b$ .

4. Si dimostri la *formula di Leibniz* per la derivata  $n$ -sima di un prodotto:

$$D^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x) \cdot D^{n-k} g(x).$$

[Traccia: si ragioni per induzione.]

5. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } y = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si provi che  $f_{xy}(0, 0) = 0$  e  $f_{yx}(0, 0) = 1$ .

6. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , sia  $f \in C^2(A)$  e sia  $(x_0, y_0) \in A$ . Posto

$$A(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0),$$

si provi che esiste  $\xi$ , intermedio fra  $x_0$  e  $x_0 + h$ , tale che

$$A(h, k) = h[f_x(\xi, y_0 + k) - f_x(\xi, y_0)];$$

si provi poi che esiste  $\eta$ , intermedio fra  $y_0$  e  $y_0 + k$ , tale che

$$A(h, k) = hk \cdot f_{yx}(\xi, \eta).$$

Infine, in modo analogo si verifichi che esistono  $\eta'$ , intermedio fra  $y_0$  e  $y_0 + k$ , e  $\xi'$ , intermedio fra  $x_0$  e  $x_0 + h$ , tali che

$$A(h, k) = hk \cdot f_{xy}(\xi', \eta'),$$

e se ne deduca il teorema di Schwarz nel caso  $m = 2$ .

[Traccia: si applichi opportunamente il teorema di Lagrange.]

7. Si generalizzi l'argomentazione dell'esercizio precedente al caso di  $m$  variabili, provando che se  $f \in C^2(A)$  allora  $D_i D_j f = D_j D_i f$  in  $A$ .  
**[Traccia:** ci si riconduca al caso di due variabili osservando che il ragionamento coinvolge solo le due variabili  $x^i$  e  $x^j$ .]
8. Sia  $f \in C^k(A)$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^m$ . Si verifichi che le derivate distinte di  $f$  di ordine  $k$  sono  $\binom{m+k-1}{k}$ .
9. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ . Se esiste  $n \in \mathbb{N}^+$  tale che  $f^{(n)} \equiv 0$ , si provi che  $f$  è un polinomio di grado non superiore a  $n - 1$ .
10. Si provi che se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in ]-R, R[,$$

allora per ogni  $x_0 \in ]-R, R[$  la funzione  $f$  è somma di una serie di potenze di centro  $x_0$  in  $]x_0 - r, x_0 + r[$ , ove  $r = R - |x_0|$ .

**[Traccia:** usando la formula di Newton per il binomio, si scriva  $x^n = [(x - x_0) + x_0]^n$  e

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(x - x_0) + x_0]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k = \\ &\quad (\text{poiché la somma è estesa agli indici } (k, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ con } n \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right] (x - x_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n x_0^{n-k} \right] (x - x_0)^k = \\ &\quad (\text{per il teorema 4.6.6}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Occorre però verificare la validità della terza uguaglianza: cioè, bisogna verificare che se  $\{a_{nk} : n, k \in \mathbb{N}, n \geq k\}$  è una famiglia di numeri reali o complessi tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n |a_{nk}| \right] = L < +\infty,$$

allora le serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n a_{nk} \right], \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} \right]$$

sono assolutamente convergenti e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n a_{nk} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} \right].$$

A questo scopo si utilizzi l'esercizio 2.8.4.]

11. (*Convoluzione di Vandermonde*) Siamo  $m, n, p \in \mathbb{N}$  con  $m \geq p$ ,  $n \geq p$ ,  $p \geq 0$ . Si provi che

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

[Traccia: Utilizzare la formula del binomio per  $(1+x)^{m+n}$ ,  $(1+x)^m$ ,  $(1+x)^n$ .]

## 4.7 Confronto di infinitesimi e infiniti

Nel calcolo di limiti di funzioni di una variabile, il più delle volte ci si trova a dover determinare l'effettivo comportamento di una forma indeterminata del tipo  $0/0$  oppure  $\infty/\infty$ . A questo scopo è utile la seguente terminologia.

Siano  $f, g$  funzioni definite in un intorno di  $x_0$ , ove  $x_0 \in \mathbb{R}$  oppure  $x_0 = \pm\infty$ , e *infinitesime* per  $x \rightarrow x_0$ , cioè (definizione 3.3.1) tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Supporremo, per semplicità, che  $f$  e  $g$  siano diverse da 0 in un intorno di  $x_0$  (salvo al più  $x_0$ ).

Diremo che  $f$  è un *infinitesimo di ordine superiore* a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  (oppure, equivalentemente, che  $g$  è un *infinitesimo di ordine inferiore* a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

in tal caso useremo la scrittura

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

che si legge “ $f$  è  $o$ -piccolo di  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ ”.

Diciamo che  $f$  e  $g$  sono *infinitesimi dello stesso ordine* per  $x \rightarrow x_0$  se esiste  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

**Esempi 4.7.1** (1)  $\sin^2 x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  di ordine superiore a  $x$ , dello stesso ordine di  $x^2$ , e di ordine inferiore a  $x^3$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin^2 x} = 0.$$

(2)  $e^{-x}$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow +\infty$  di ordine superiore a  $x^{-n}$  qualunque sia  $n \in \mathbb{N}^+$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(3)  $1/\ln x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0^+$  di ordine inferiore a  $x^\varepsilon$  qualunque sia  $\varepsilon > 0$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(4) Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora l'osservazione 4.1.2 (2) ci dice che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

(5) Dire che  $f(x) = o(1)$  per  $x \rightarrow x_0$  significa semplicemente che  $f(x)$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$ .

(6) È facile costruire due infinitesimi *non confrontabili* fra loro: tali sono ad esempio, per  $x \rightarrow 0$ , le funzioni  $f(x) = x$  e  $g(x) = x(2 + \sin \frac{1}{x})$ .

**Osservazione 4.7.2** Accanto alla notazione “ $o$ -piccolo” esiste anche la scrittura “ $O$ -grande”: se  $f$  e  $g$  sono infinitesimi per  $x \rightarrow x_0$ , dire

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(che si legge “ $f(x)$  è  $O$ -grande di  $g(x)$ ” per  $x \rightarrow x_0$ ) significa che esiste  $K > 0$  tale che

$$|f(x)| \leq K|g(x)| \quad \text{in un intorno di } x_0.$$

Dunque

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \implies f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

ma il viceversa è falso: basta pensare a due infinitesimi dello stesso ordine.

Il risultato che segue aiuta a semplificare il calcolo del limite di una forma indeterminata  $0/0$ .

**Proposizione 4.7.3 (principio di sostituzione degli infinitesimi)** *Siano  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  funzioni infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ , diverse da 0 per  $x \neq x_0$  (con  $x_0 \in \mathbb{R}$  oppure  $x_0 = \pm\infty$ ). Se*

$$\varphi(x) = o(f(x)) \quad \text{e} \quad \psi(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

e se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

allora si ha anche

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + \varphi(x)}{g(x) + \psi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Dimostrazione** Basta osservare che

$$\frac{f(x) + \varphi(x)}{g(x) + \psi(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)}}{1 + \frac{\psi(x)}{g(x)}},$$

e che il secondo fattore tende a 1 per  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Esempi 4.7.4** (1) Si ha, in base al principio di sostituzione,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x^2}{x + x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(2) Calcoliamo (se esiste) il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \ln(1 + x^2)}{x^2}.$$

La funzione  $\ln(1+x^2)$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  di ordine superiore sia rispetto a  $\sin x$ , sia rispetto a  $x$ ; tuttavia essa *non* è un infinitesimo di ordine superiore a  $h(x) = \sin x - x$ , in quanto  $h(x)$  è dello stesso ordine di  $x^3$  (esercizio 3.3.12) mentre  $\ln(1+x^2)$  è dello stesso ordine di  $x^2$ . Sarebbe perciò sbagliato concludere che il limite proposto coincide con

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0;$$

esso invece coincide con

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = 1.$$

(3) Vediamo se esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2}.$$

Utilizzando lo sviluppo in serie del logaritmo, possiamo scrivere

$$\ln(1+t) = t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

da cui

$$\frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{(1+t)(t + o(t)) - t}{t^2} = \frac{t^2 + o(t) + o(t^2)}{t^2}.$$

Sarebbe sbagliato dedurre da qui che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + o(t)}{t^2} = 1,$$

perché non è detto che il termine  $o(t)$  sia trascurabile rispetto al denominatore  $t^2$ , cioè sia anche  $o(t^2)$ . Occorre invece scrivere più precisamente

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

da cui, correttamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Discorsi analoghi, come ora vedremo, valgono per gli *infiniti* per  $x \rightarrow x_0$ , cioè per le funzioni  $f$  definite in un intorno di  $x_0$  (salvo al più  $x_0$ ) e tali che  $\frac{1}{f(x)}$  sia infinitesimo

per  $x \rightarrow x_0$ .

Siano  $f, g$  due infiniti per  $x \rightarrow x_0$ : diciamo che  $f$  è un *infinito di ordine superiore* a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ , ovvero che  $g$  è un *infinito di ordine inferiore* a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ , se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0;$$

in tal caso useremo ancora la scrittura

$$g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Diciamo che  $f$  e  $g$  sono *infiniti dello stesso ordine* per  $x \rightarrow x_0$  se esiste un numero reale  $\lambda \neq 0$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Si noti che, in conseguenza delle definizioni di “*o-piccolo*” e “*O-grande*”,  $f$  è un infinito di ordine *superiore* a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  se e solo se  $1/f$  è un infinitesimo di ordine *superiore* a  $1/g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

**Esempi 4.7.5** (1)  $\sqrt{1+x^3}$  è un infinito di ordine superiore a  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} = 0.$$

(2)  $\tan x$  è un infinito dello stesso ordine di  $\frac{1}{\pi+2x}$  per  $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$ , in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} (\pi + 2x) \tan x &= \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} 2 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} 2 \frac{\left( \frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right)} \sin x = -2. \end{aligned}$$

(3) Le funzioni  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x}(2 + \sin \frac{1}{x})$  sono infiniti non confrontabili per  $x \rightarrow 0$ .

**Proposizione 4.7.6 (principio di sostituzione degli infiniti)** Siano  $f, g, \varphi, \psi$  funzioni infinite per  $x \rightarrow x_0$ , ove  $x_0 \in \mathbb{R}$  oppure  $x_0 = \pm\infty$ . Se

$$\varphi(x) = o(f(x)) \quad \text{e} \quad \psi(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

e se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

allora si ha anche

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + \varphi(x)}{g(x) + \psi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Dimostrazione** Analoga a quella del principio di sostituzione degli infinitesimi.  $\square$

Un utile strumento per lo studio delle forme indeterminate (non il più importante, però: spesso è più utile la formula di Taylor, come mostreranno l'esempio 4.8.8 (2) e l'esercizio 4.8.7) è il seguente

**Teorema 4.7.7 (di de l'Hôpital)** Sia  $x_0 \in [a, b]$  e siano  $f, g$  funzioni derivabili in  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ . Se:

- (i)  $f, g$  sono entrambe infinitesimi, oppure infiniti, per  $x \rightarrow x_0$ ,
- (ii)  $g' \neq 0$  in un intorno di  $x_0$  (salvo al più in  $x_0$ ),
- (iii) esiste, finito o infinito, il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Dimostrazione** Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano infinitesimi per  $x \rightarrow x_0$ . Anzitutto, prolunghiamo oppure ri-definiamo  $f$  e  $g$  nel punto  $x_0$  ponendo  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . (Ciò è necessario se  $f$  e  $g$  non sono definite in  $x_0$ , come ad esempio nel caso di  $\frac{1-\cos x}{x}$  nel punto 0, oppure se  $f$  e  $g$  sono definite in  $x_0$  con valori reali non nulli e quindi, per (i), sono discontinue in tale punto.) In questo modo,  $f$  e  $g$  risultano continue in  $]a, b[$  e derivabili in  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ .

Dobbiamo calcolare il limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$  per  $x \rightarrow x_0$ . Detto  $\lambda$  il limite di  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  per  $x \rightarrow x_0$ , e supposto per fissare le idee  $\lambda \in \mathbb{R}$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Sia  $x \in ]a, b[$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$ : allora  $f$  e  $g$  soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy (teorema 4.3.2) nell'intervallo  $I$  di estremi  $x$  e  $x_0$ ; quindi esiste  $\xi$  interno ad  $I$ , tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dato che  $|\xi - x_0| < |x - x_0| < \delta$ , si ha

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Ciò prova che  $\frac{f(x)}{g(x)}$  converge a  $\lambda$  per  $x \rightarrow x_0$ . Discorso analogo se  $\lambda = \pm\infty$ .

Passiamo ora a considerare il caso in cui  $f$  e  $g$  sono infiniti per  $x \rightarrow x_0$ . In questo caso la dimostrazione è meno semplice. Proveremo la tesi solamente nel caso in cui  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; per il caso  $\lambda = \pm\infty$  si rimanda all'esercizio 4.7.5.

Fissati due punti distinti  $x, \eta \in ]a, b[ \setminus \{x_0\}$ , entrambi minori o entrambi maggiori di  $x_0$ , per il teorema di Cauchy possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(\eta)}{g(x) - g(\eta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

con  $\xi$  opportuno punto intermedio fra  $x$  e  $\eta$ . Questa scrittura ha senso se i punti  $x, \eta$  sono sufficientemente vicini a  $x_0$ , poiché in tal caso vale l'ipotesi (ii), che assicura l'iniettività di  $g$ . La relazione sopra scritta equivale, con facili calcoli, a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\eta)}{f(x)}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

scrittura che a sua volta ha senso per  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , visto che  $f$  e  $g$  tendono a  $\pm\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ . Sia ora  $\varepsilon > 0$  e sia  $\varepsilon' \in ]0, 1[$  un altro numero, che fissereemo in seguito. Per l'ipotesi (iii), esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\left| \frac{f'(u)}{g'(u)} - \lambda \right| < \varepsilon' \quad \text{per } u \in ]a, b[, 0 < |u - x_0| < \delta.$$

Scegliamo  $\eta = x_0 \pm \frac{\delta}{2}$ , a seconda che sia  $x > x_0$  oppure  $x < x_0$ . Allora quando  $0 < |x - x_0| < \delta$  si avrà anche  $0 < |\xi - x_0| < \delta$  e dunque

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon'.$$

Adesso osserviamo che, con la nostra scelta di  $\eta$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\eta)}{f(x)}} = 1,$$

e dunque esiste  $\sigma \in ]0, \delta[$  tale che

$$\left| \frac{1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\eta)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon' \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \sigma.$$

Valutiamo allora la quantità  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right|$  quando  $0 < |x - x_0| < \sigma$ : si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| &= \left| \frac{1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\eta)}{f(x)}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\eta)}{f(x)}} - 1 \right| \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| \leq \varepsilon'(|\lambda| + 2) + \varepsilon'. \end{aligned}$$

Essendo  $\varepsilon' < 1$ , deduciamo

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < (|\lambda| + 2)\varepsilon' \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \sigma,$$

e scegliendo infine  $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 2}$  si conclude che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \sigma,$$

che è la tesi.  $\square$

**Osservazioni 4.7.8** (1) Il teorema di de L'Hôpital vale anche nel caso di rapporti di infinitesimi, o di infiniti, per  $x \rightarrow x_0^+$ , o per  $x \rightarrow x_0^-$ , o anche per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Le dimostrazioni sono essenzialmente analoghe (esercizio 4.7.5).

(2) La soppressione di una qualunque delle tre ipotesi rende falso il teorema: si vedano gli esercizi 4.7.2, 4.7.3 e 4.7.4.

(3) In pratica la sostituzione di  $\frac{f}{g}$  con  $\frac{f'}{g'}$  porta sovente ad un'ulteriore forma indeterminata. In questi casi, se le funzioni  $f'$  e  $g'$  verificano le tre ipotesi (i)-(ii)-(iii), si può applicare il teorema di de L'Hôpital a  $f'$  e  $g'$ , e considerare i limiti per  $x \rightarrow x_0$  di  $\frac{f''}{g''}$ , e poi magari anche di  $\frac{f^{(3)}}{g^{(3)}}$ , eccetera, finché non si trova un  $n \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lambda;$$

si avrà allora (e solo allora, cioè solo quando tale limite esiste)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

**Esempio 4.7.9** Si ha, usando due volte il teorema di de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + \cos x}{2} = -\frac{3}{2}.$$

## Esercizi 4.7

1. Nell'enunciato del teorema di de L'Hôpital, nel caso del confronto di due infinitesimi, non si fa l'ipotesi che la funzione  $g$  sia diversa da 0 in un intorno di  $x_0$  (salvo al più  $x_0$ ): si provi che ciò è conseguenza delle altre ipotesi del teorema.
2. Posto  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = x$ , si verifichi che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Come mai?

3. Posto  $f(x) = x + \cos^2(\frac{\pi}{4} - x)$  e  $g(x) = e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)$ , si verifichi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ non esiste.}$$

Come mai?

4. Calcolare, se esistono, i limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin x}.$$

5. Dimostrare il teorema di de L'Hôpital nel caso in cui  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ , e nel caso di forme indeterminate  $0/0$  e  $\infty/\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ .
6. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, sia  $x_0 \in ]a, b[$  e supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ . Si provi che se esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  è derivabile anche nel punto  $x_0$ , con  $f'(x_0) = \alpha$ .
7. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\tan x}; \quad \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\ln \sin 2x}; \\
 & \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_x(e^x - 1); \quad \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 2e^x)}{\sqrt{1 + x^2}}; \\
 & \text{(v)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x - \ln x}; \quad \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln \sin x; \\
 & \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}; \quad \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2}\right); \\
 & \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x}; \quad \text{(x)} \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) \ln \ln x; \\
 & \text{(xi)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)e^{1/x}; \quad \text{(xii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right); \\
 & \text{(xiii)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}; \quad \text{(xiv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{1/x} \sqrt{1 + x} - e}{x^2}; \\
 & \text{(xv)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^x; \quad \text{(xvi)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}; \\
 & \text{(xvii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x; \quad \text{(xviii)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\ln x)^{2/3} + (1 - x^2)^{3/4}}{(\sin(x - 1))^{2/3}}; \\
 & \text{(xix)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x}; \quad \text{(xx)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x + x^2) + \ln(1 + x + x^2)}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

## 4.8 Formula di Taylor

Consideriamo una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissiamo un punto  $x_0 \in ]a, b[$ . Come sappiamo, se  $f$  è continua allora

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

mentre se  $f$  è derivabile allora

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Il risultato che segue generalizza questa proprietà di approssimabilità.

**Teorema 4.8.1 (formula di Taylor)** *Sia  $f$  una funzione derivabile  $k$  volte in  $]a, b[$ , ove  $k \in \mathbb{N}$ , e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Allora esiste un unico polinomio  $P_k(x)$  di grado al più  $k$ , tale che*

$$f(x) - P_k(x) = o((x - x_0)^k) \quad \text{per } x \rightarrow x_0;$$

*tale polinomio è dato da*

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*e si chiama  $k$ -simo polinomio di Taylor di  $f$  di centro  $x_0$ .*

**Dimostrazione** Se  $k = 0$  si vede immediatamente che  $P_0(x) = f(x_0)$  è l'unico polinomio che verifica la tesi. Possiamo quindi supporre  $k \geq 1$ .

Tutto il ragionamento è basato sul seguente lemma:

**Lemma 4.8.2** *Sia  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile  $k$  volte, con  $k \geq 1$ , e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Si ha*

$$g(x) = o((x - x_0)^k) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

*se e solo se*

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(k)}(x_0) = 0.$$

**Dimostrazione del lemma ( $\Leftarrow$ )** Poiché, per ipotesi, per  $h = 0, 1, \dots, k-1$  la funzione  $g^{(h)}(x)$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ , usando ripetutamente il teorema di de L'Hôpital (teorema 4.7.7) si ha la catena di implicazioni

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^k} = \lambda &\iff \\ \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{k(x - x_0)^{k-1}} = \lambda &\iff \dots \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(k-1)}(x)}{k!(x - x_0)} = \lambda; \end{aligned}$$

ma quest'ultimo limite vale 0, poiché, per definizione di derivata  $k$ -sima,

$$\frac{g^{(k-1)}(x)}{k!(x - x_0)} = \frac{1}{k!} \frac{g^{(k-1)}(x) - g^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

( $\Rightarrow$ ) Definiamo

$$Z = \{h \in \mathbb{N} : 0 \leq h \leq k, g^{(h)}(x_0) \neq 0\} :$$

dobbiamo provare che  $Z = \emptyset$ . Dall'ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^k} = 0$$

si deduce in particolare che  $g(x)$  deve essere infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ , quindi  $g(x_0) = 0$  e pertanto  $0 \notin Z$ . Supponiamo per assurdo che  $Z$  non sia vuoto: allora esso avrà un minimo  $p \geq 1$ , e si avrà dunque

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(p-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(p)}(x_0) \neq 0.$$

Consideriamo allora la forma indeterminata  $\frac{g(x)}{(x-x_0)^p}$ : per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^p} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{p(x-x_0)^{p-1}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(p-1)}(x)}{p!(x-x_0)} = \frac{g^{(p)}(x_0)}{p!} \neq 0,$$

mentre invece, per ipotesi,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^p} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} \cdot (x-x_0)^{k-p} = 0.$$

Ciò è assurdo e pertanto  $Z = \emptyset$ .  $\square$

Dimostriamo ora la formula di Taylor. Sia  $P(x)$  un arbitrario polinomio di grado  $k$ , che possiamo sempre scrivere nella forma

$$P(x) = \sum_{n=0}^k a_n (x-x_0)^n$$

(esercizio 4.8.1). Applicando il lemma 4.8.2 alla funzione  $f(x) - P(x)$ , avremo

$$\begin{aligned} f(x) - P(x) &= o((x-x_0)^k) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \iff \\ \iff f^{(n)}(x_0) &= P^{(n)}(x_0) \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, k; \end{aligned}$$

d'altra parte si vede subito che

$$P(x_0) = a_0, \quad P'(x_0) = a_1, \quad P''(x_0) = 2a_2, \quad \dots, \quad P^{(k)}(x_0) = k! a_k,$$

e dunque

$$\begin{aligned} f(x) - P(x) &= o((x-x_0)^k) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \iff \\ \iff a_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, k, \end{aligned}$$

cioè  $P(x) \equiv P_k(x)$ .  $\square$

**Osservazioni 4.8.3 (1)** Il grado del  $k$ -simo polinomio di Taylor  $P_k(x)$  è al più  $k$ ; è esattamente  $k$  se e solo se  $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ .

**(2)** Il  $(k+1)$ -simo polinomio di Taylor (ammesso che esista, cioè che  $f$  sia derivabile  $k+1$  volte) si ottiene dal  $k$ -simo semplicemente aggiungendo un termine:

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) (x-x_0)^{k+1}.$$

**(3)** Se  $f$  è derivabile  $k+1$  volte in  $]a, b[$ , si può precisare meglio il modo di tendere a 0 del *resto di Taylor*, ossia della differenza  $f(x) - P_k(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ : si ha in tal caso

$$f(x) - P_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) (x-x_0)^{k+1},$$

ove  $\xi$  è un opportuno punto compreso fra  $x$  e  $x_0$ . Questo risultato potrebbe chiamarsi “teorema di Lagrange di grado  $k+1$ ”. Se in particolare la funzione  $f^{(k+1)}$  è limitata, esso ci dice che

$$f(x) - P_k(x) = O((x - x_0)^{k+1}) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Per provare il “teorema di Lagrange di grado  $k+1$ ”, basta applicare ripetutamente il teorema di Cauchy (teorema 4.3.2):

$$\frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \frac{f'(\xi_1) - P'_k(\xi_1)}{(k+1)(\xi_1 - x_0)^k} = \dots = \frac{f^{(k)}(\xi_k) - P_k^{(k)}(\xi_k)}{(k+1)!(\xi_k - x_0)} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!},$$

ove  $\xi_1$  è intermedio fra  $x$  e  $x_0$ ,  $\xi_2$  è intermedio fra  $\xi_1$  e  $x_0$ , ...,  $\xi_k$  è intermedio fra  $\xi_{k-1}$  e  $x_0$ , e infine  $\xi$  è intermedio fra  $\xi_k$  e  $x_0$ ; nell’ultimo passaggio si è usato il fatto che  $P_k$  ha grado non superiore a  $k$  e dunque  $P_k^{(k+1)} \equiv 0$ .

(4) Per scrivere il  $k$ -simo polinomio di Taylor di una data funzione  $f$  non è sempre obbligatorio calcolare le derivate di  $f$  nel punto  $x_0$ ; talvolta conviene invece far uso della sua proprietà di “miglior approssimazione”: se riusciamo a trovare un polinomio  $P$ , di grado non superiore a  $k$ , tale che

$$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^k) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

necessariamente esso sarà il  $k$ -simo polinomio di Taylor cercato. Ad esempio, data  $f(x) = \sin x^5$ , chi è il suo quattordicesimo polinomio di Taylor di centro 0? Ricordando che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}$$

(esercizio 3.3.12), avremo anche

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^5 - x^5}{x^{15}} = -\frac{1}{6}$$

(esercizio 3.3.10); in particolare

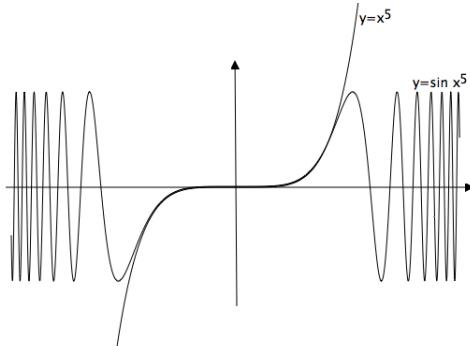
$$\sin x^5 - x^5 = O(x^{15}) = o(x^{14}) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e dunque  $P_{14}(x) = x^5$ . Naturalmente si ha anche  $P_{13}(x) = P_{12}(x) = \dots = P_5(x) = x^5$ , mentre, essendo

$$\sin x^5 = O(x^5) = o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

si ha  $P_4(x) = P_3(x) = P_2(x) = P_1(x) = P_0(x) = 0$ .

Le funzioni  $f$  che sono somma di una serie di potenze in un certo intervallo  $I$  si dicono *funzioni analitiche* in  $I$ . Vediamo quali sono le strettissime relazioni che intercorrono



fra una funzione analitica  $f$ , la serie di potenze che converge a  $f$  e i polinomi di Taylor di  $f$ . Supponiamo che risulti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in ]-R, R[,$$

ove  $R \in ]0, +\infty]$ . Come sappiamo (teorema 4.1.12), si ha

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la somma parziale  $k$ -sima della serie coincide con il  $k$ -simo polinomio di Taylor di  $f$  di centro 0. Abbiamo perciò per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , in virtù della formula di Taylor,

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n x^n = o(x^k) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Le somme parziali di una serie di potenze godono quindi di una *duplice* proprietà:

**(a)** in quanto tali, esse verificano, per definizione di serie convergente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ f(x) - \sum_{n=0}^k a_n x^n \right] = 0 \quad \forall x \in ]-R, R[,$$

cioè forniscono un'approssimazione globale del grafico di  $f$  in  $] -R, R[$  tanto più accurata quanto più  $k$  è grande;

**(b)** in quanto polinomi di Taylor di centro 0, verificano

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} \left[ f(x) - \sum_{n=0}^k a_n x^n \right] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

cioè forniscono un'approssimazione locale del grafico di  $f$  nell'intorno di 0, tanto più accurata quanto più  $x$  è vicino a 0.

Si noti che esistono funzioni di classe  $C^\infty$ , per le quali dunque i  $P_k(x)$  sono definiti per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , e (per definizione) soddisfano la condizione

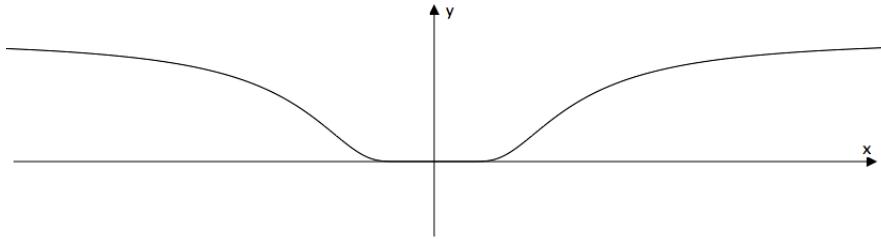
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e che tuttavia verificano

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x) - P_k(x)] \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$$

**Esempio 4.8.4** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



Allora si verificano i fatti seguenti:

- (i)  $f$  è infinite volte derivabile in  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) per ogni  $k \in \mathbb{N}$  il  $k$ -simo polinomio di Taylor di  $f$  di centro 0 è  $P_k(x) \equiv 0$ ;
- (iii) per ogni  $R > 0$  non esiste alcuna serie di potenze che abbia somma uguale a  $f(x)$  in  $] -R, R [$ .

Infatti si vede facilmente per induzione che

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

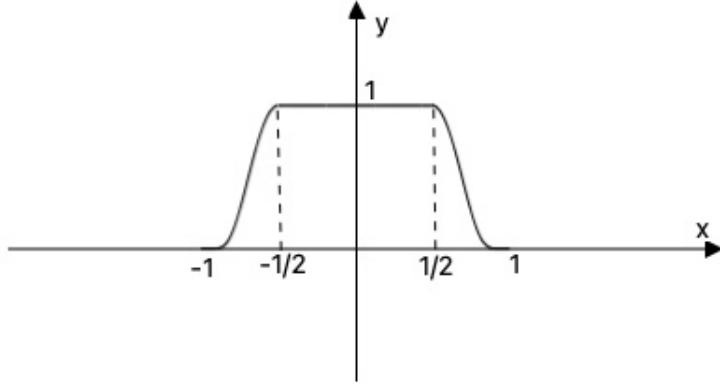
ove  $Q_n(x)$  è un'opportuna *funzione razionale*, cioè è il quoziente di due polinomi. Di conseguenza,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicché ogni derivata  $f^{(n)}$  è continua in 0, e dunque su  $\mathbb{R}$ . Quindi i coefficienti dei polinomi di Taylor di  $f$  centrati in 0 sono tutti nulli. Se dunque esistesse una serie di potenze con somma uguale a  $f(x)$  in  $] -R, R [$ , essa avrebbe somme parziali tutte nulle e quindi sarebbe nulla, mentre  $f(x) \neq 0$  per  $x \neq 0$ .

**Esempio 4.8.5** Procedendo sulla falsariga dell'esempio precedente è facile costruire funzioni  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ , nulle fuori da un intervallo  $[a, b]$ , comprese fra 0 e 1 in  $[a, b]$  e costantemente uguali a 1 in un sottointervallo  $[c, d] \subset ]a, b[$ . Ad esempio, se  $[a, b] = [-1, 1]$  e  $[c, d] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , una funzione con questi requisiti è

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ \exp\left(4 - \frac{1}{\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2}\right) & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \exp\left(4 - \frac{1}{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}\right) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$



Descriviamo adesso un teorema di grande utilità, che ci dà un’idea dell’importanza dello spazio  $C^\infty(\mathbb{R})$  nelle questioni di approssimazione.

**Teorema 4.8.6 (di Borel)** *Sia  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale. Esiste una funzione  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$  tale che*

$$F^{(k)}(0) = \gamma_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si noti che di funzioni siffatte ne esistono infinite: ad esempio, tutte quelle della forma  $F + cf$ , con  $c \in \mathbb{R}$  e  $f$  la funzione dell’esempio 4.8.4.

**Dimostrazione** Sia  $g$  la funzione dell’esempio 4.8.5, e poniamo

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ove

$$g_j(t) = \gamma_j g(\mu_j t) \frac{t^j}{j!}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

e  $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  è una successione di numeri positivi divergente a  $+\infty$ , che sceglieremo opportunamente tra poco.

Notiamo anzitutto che la serie è ben definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ : in effetti, per  $t = 0$  si ha  $F(0) = \gamma_0 g(0)$ , mentre per  $t \neq 0$ , a causa della divergenza di  $\mu_j$ , essa è costituita da un numero finito di termini: quelli per i quali  $\mu_j t < 1$ . In altre parole, per ogni  $t \neq 0$  esiste un indice  $j_t \in \mathbb{N}$  tale che  $g_j(t) = 0$  per ogni  $j > j_t$ . È immediato verificare che  $j_t \geq j_\tau$  se e solo se  $|t| \leq |\tau|$ , e che  $j_t \rightarrow +\infty$  per  $|t| \rightarrow 0$ . Si può anche osservare che per ogni  $t_0 \neq 0$  e per ogni intorno chiuso  $I$  di  $t_0$ , non contenente 0, esiste un indice  $t_I$  tale che  $g_j(t) = 0$  per ogni  $t \in I$  e per ogni  $j > j_I$ .

Inoltre gli addendi della serie sono ovviamente funzioni di classe  $C^\infty$ , dato che le  $g_j$  sono il prodotto di  $g$  per un monomio. Perciò, fissato  $t_0 \neq 0$  e scelto un intorno chiuso  $I$  di  $t_0$ , non contenente 0, si ha

$$F(t) = \sum_{j=0}^{t_I} g_j(t), \quad t \in I,$$

e dunque

$$\exists D^k F(t_0) = \sum_{j=0}^{t_I} D^k g_j(t_0), \quad \forall t_0 \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

pertanto  $F$  è derivabile infinite volte in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Per provare che  $F$  è derivabile infinite volte anche in 0 occorre un altro tipo di considerazione. Osserviamo intanto che per ogni  $k \leq j - 1$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$  risulta

$$D^k g_j(t) = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h \frac{t^j}{j!} D^{k-h}[g(\mu_j + jt)] = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \frac{t^{j-h}}{(j-h)!} \gamma_j g^{(k-h)}(\mu_j t) \mu_j^{k-h};$$

di conseguenza

$$|D^k g_j(t)| \leq \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \frac{\gamma_j}{(j-h)!} \left[ \sup_{s \in \mathbb{R}} g(s) s^{j-h} \right] \mu_j^{-(j-k)} = C_{kj} \mu_j^{-(j-k)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, se  $\mu_j$  diverge abbastanza rapidamente (basta che sia  $\mu_j > 2^j \max_{k \leq j-1} C_{kj}$ ), si ha

$$|D^k g_j(t)| \leq 2^{-j} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \leq j-1.$$

Possiamo allora scrivere, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $h \geq k$  e  $t \neq 0$ ,

$$D^k F(t) = \sum_{j=0}^h D^k g_j(t) + \sum_{j=h+1}^{\infty} D^k g_j(t), \quad k \in \mathbb{N},$$

ricordando che comunque la somma è finita per ogni  $t \neq 0$ . Inoltre,

$$\left| \sum_{j=h+1}^{\infty} D^k g_j(t) \right| \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} 2^{-j} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, per  $|t| \rightarrow 0$ ,

$$\left| \lim_{|t| \rightarrow 0} D^k F(t) - \sum_{j=0}^h D^k g_j(0) \right| \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} 2^{-j} \quad \forall k, h \in \mathbb{N},$$

ed infine, per  $h \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} D^k F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} D^k g_j(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

La serie a destra converge perché, come vedremo fra poco, essa ha un numero finito di termini. Quindi il limite a primo membro è finito. Ricordando l'esercizio 4.3.4, concludiamo che

$$\exists D^k F(0) = \lim_{|t| \rightarrow 0} D^k F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} D^k g_j(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo infine  $D^k F(0)$ , verificando in particolare che la serie precedente ha addirittura un solo addendo: essendo  $[D^{k-h}g](0) = 0$  per  $k > h$ , si ha per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D^k F(0) &= \sum_{j=0}^{\infty} D^k g_j(0) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h \frac{t^j}{j!} \gamma_j D^{k-h} g(\mu_j t) \right]_{t=0} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ D^k \frac{t^j}{j!} \gamma_j g(\mu_j t) \right]_{t=0}; \end{aligned}$$

essendo poi  $[D^k t^j]_{t=0} = 0$  per  $k > j$ , otteniamo

$$D^k F(0) = \left[ D^k \frac{t^k}{k!} \gamma_k g(\mu_k t) \right]_{t=0} = \gamma_k g(0) = \gamma_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e il teorema è provato.  $\square$

Per le funzioni analitiche, il teorema 4.8.6 non vale. Infatti, una condizione sufficiente affinché una funzione di classe  $C^\infty$  sia analitica è data dal seguente enunciato:

**Proposizione 4.8.7** *Sia  $f \in C^\infty(]a, b[)$ . Se esistono  $B, M > 0$  tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq B k! M^k \quad \forall x \in ]a, b[, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

*allora per ogni  $x_0 \in ]a, b[$  si ha, per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

*e dunque  $f$  è analitica in  $]a, b[$ .*

**Dimostrazione** Scriviamo la formula di Taylor per  $f$  in  $x_0$  di ordine  $n$ , utilizzando il teorema di Lagrange di grado  $n+1$  (osservazione 4.8.3 (3)):

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1},$$

ove  $\xi$  è un punto opportuno, tale che  $|\xi - x_0| < |x - x_0|$ . Allora dall'ipotesi otteniamo

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq B (M\delta)^{n+1},$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per  $n \rightarrow \infty$  purché  $\delta < \min\{\frac{1}{M}, x_0 - a, b - x_0\}$ . Dunque

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

ovvero  $f$  è analitica in  $]a, b[$ .  $\square$

Osserviamo infine che la formula di Taylor è utilissima nel calcolo dei limiti di forme indeterminate, come mostrano i seguenti esempi.

**Esempi 4.8.8 (1)** Per calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2} - \cos x - x^2}{x^2}$$

si può osservare che per  $x \rightarrow 0$  risulta

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

e che dunque

$$e^{x^2/2} - \cos x - x^2 = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0;$$

pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2} - \cos x - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

Invece per calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2} - \cos x - x^2}{x^4}$$

occorre scrivere anche i termini del quarto ordine: poiché

$$\begin{aligned} e^{x^2/2} - \cos x - x^2 &= \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right) - x^2 = \\ &= \frac{x^4}{12} + o(x^4), \end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2} - \cos x - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

**(2)** Per il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sin x^4}$$

l'uso del teorema di de L'Hôpital appare poco pratico, perché derivando numeratore e denominatore compaiono espressioni alquanto complicate. Invece, usando la formula di Taylor, per  $x \rightarrow 0$  risulta (esempio 4.3.5 (3))

$$\begin{aligned} \sin x^4 &= x^4 + o(x^{11}), \\ \sqrt{1 + x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \\ \sqrt{1 + \sin^2 x} &= 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x + o(\sin^5 x) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{8}(x + o(x^2))^4 + o(x^5) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^5), \end{aligned}$$

e pertanto, grazie al principio di sostituzione degli infinitesimi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sin x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{7}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^5)}{x^4 + o(x^7)} = -\frac{1}{6}.$$

## Formula di Taylor per funzioni di più variabili

La formula di Taylor si può enunciare anche per le funzioni di  $m$  variabili. A questo scopo occorre introdurre alcune comode notazioni. Un vettore  $\mathbf{p}$  a componenti intere non negative, ossia un elemento di  $\mathbb{N}^m$ , si chiama *multi-indice*. Dato un multi-indice  $\mathbf{p}$ , di componenti  $(p_1, \dots, p_m)$ , si definiscono l'operatore di derivazione  $D^\mathbf{p}$

$$D^\mathbf{p} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \dots D_m^{p_m}$$

ed il monomio  $\mathbf{x}^\mathbf{p}$

$$\mathbf{x}^\mathbf{p} = (x^1)^{p_1} \cdot \dots \cdot (x^m)^{p_m}.$$

Inoltre si pone

$$\mathbf{p}! = p_1! \cdot \dots \cdot p_m!, \quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^m p_i.$$

Altre notazioni di uso comune sono quelle che seguono: se  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}^m$ , si scrive  $\mathbf{q} \leq \mathbf{p}$  se risulta  $q_i \leq p_i$  per  $i = 1, \dots, m$ ; in tal caso si definisce

$$\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdot \dots \cdot \binom{p_m}{q_m}.$$

Ciò premesso, vale un risultato del tutto analogo al caso delle funzioni di una sola variabile (teorema 4.8.1).

**Teorema 4.8.9 (formula di Taylor in più variabili)** *Sia  $f$  una funzione di classe  $C^k$  definita in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^m$ , e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Allora esiste un unico polinomio  $P_k(\mathbf{x})$  di grado al più  $k$ , tale che*

$$f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m^k) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0;$$

tale polinomio è dato da

$$P_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^\mathbf{p} f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\mathbf{p}$$

e si chiama  $k$ -simo polinomio di Taylor di  $f$  di centro  $\mathbf{x}_0$ .

**Dimostrazione** Se  $k = 0$  non c'è niente da dimostrare: il polinomio  $P_0$  è la costante  $f(\mathbf{x}_0)$ . Sia dunque  $k \geq 1$ . Fissata una generica direzione  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  con  $|\mathbf{v}|_m = 1$ , per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo è certamente ben definita la funzione

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}), \quad t \in [-\delta, \delta].$$

Essa è di classe  $C^k$  e si ha

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^m D_i f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) v^i, \\ F''(t) &= \sum_{i,j=1}^m D_j D_i f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) v^i v^j, \end{aligned}$$

e in generale, per  $1 \leq h \leq k$ ,

$$F^{(h)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_h=1}^m D_{i_1} \dots D_{i_h} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) v^{i_1} \dots v^{i_h}.$$

La somma relativa a  $F''$  si può scrivere nella forma

$$F''(t) = \sum_{|\mathbf{p}|=2} \frac{2!}{\mathbf{p}!} D^\mathbf{p} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \mathbf{v}^\mathbf{p} :$$

infatti, in virtù del teorema di Schwarz (teorema 4.6.5), le derivate  $D_i D_j$  con  $i \neq j$ , ossia le  $D^\mathbf{p}$  con  $\mathbf{p} = \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j$ , compaiono due volte, mentre le  $D_i^2$ , ossia le  $D^\mathbf{p}$  con  $\mathbf{p} = 2\mathbf{e}^i$ , compaiono una volta sola. Similmente, per  $1 \leq h \leq k$  possiamo riscrivere  $F^{(h)}(t)$  come

$$F^{(h)}(t) = \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{h!}{\mathbf{p}!} D^\mathbf{p} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \mathbf{v}^\mathbf{p} :$$

questo si vede nel modo seguente. A ciascun fissato multi-indice  $\mathbf{p}$  con  $|\mathbf{p}| = h$  corrispondono tutte le possibili sequenze (ordinate) di  $h$  derivazioni successive rispetto alle variabili  $x^1, \dots, x^m$ , nelle quali compaiono esattamente  $p_1$  derivazioni rispetto a  $x^1$ ,  $p_2$  derivazioni rispetto a  $x^2, \dots, p_m$  derivazioni rispetto a  $x^m$ . Quante sono tutte queste sequenze? Il problema è analogo a quello di distribuire in sequenza  $h$  palline (le derivazioni parziali) in  $m$  urne (le variabili), mettendone esattamente  $p_1$  nella prima urna,  $p_2$  nella seconda,  $\dots, p_m$  nell' $m$ -sima. Inserendo le  $h$  palline secondo tutte le possibili sequenze, la prima urna riceverà  $p_1$  palline in  $\binom{h}{p_1}$  modi, la seconda urna riceverà  $p_2$  palline in  $\binom{h-p_1}{p_2}$  modi,  $\dots$ , la penultima urna riceverà  $p_{m-1}$  palline in  $\binom{h-p_1-\dots-p_{m-2}}{p_{m-1}}$  modi, e infine ci resta un solo modo di inserire le residue  $p_m$  palline nell'ultima urna, e per l'appunto si ha  $\binom{h-p_1-\dots-p_{m-1}}{p_m} = \binom{p_m}{p_m} = 1$ . Il numero di sequenze complessive associate al  $\mathbf{p}$  fissato è allora il prodotto dei coefficienti binomiali, vale a dire

$$\prod_{j=1}^m \binom{h - p_1 - \dots - p_{j-1}}{p_j} = \prod_{j=1}^m \frac{(h - p_1 - \dots - p_{j-1})!}{(p_j)! (h - p_1 - \dots - p_{j-1} - p_j)!} = h! \prod_{j=1}^m \frac{1}{(p_j)!} = \frac{h!}{\mathbf{p}!}.$$

Scriviamo adesso la formula di Taylor per  $F$  nel punto  $t = 0$ , di ordine  $k-1$ , esprimendo il resto in forma di Lagrange (teorema 4.8.1 ed osservazione 4.8.3 (3)): risulta

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = F(t) = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{F^{(h)}(0)}{h!} t^h + \frac{1}{k!} F^{(k)}(\xi) t^k, \quad t \in [-\delta, \delta],$$

dove  $\xi$  è un punto opportuno compreso fra 0 e  $t$ .

Sostituendo le espressioni trovate per le derivate di  $F$ , otteniamo

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{t^h}{h!} \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{h!}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}^{\mathbf{p}} + \frac{t^k}{k!} \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{k!}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{v}) \mathbf{v}^{\mathbf{p}},$$

ovvero, semplificando e ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{|\mathbf{p}| \leq k-1} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} + \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} = \\ &= \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} + \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{1}{\mathbf{p}!} [D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}') - D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0)] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Adesso sfruttiamo il fatto che le derivate di ordine  $k$  di  $F$  sono continue: fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq A$  e

$$|\mathbf{u} - \mathbf{x}_0|_m < \delta \implies \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{1}{\mathbf{p}!} |D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{u}) - D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Ne segue che per ogni  $|t| < \delta$  e  $|\mathbf{v}|_m = 1$  si ha  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|_m < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta$  e quindi

$$\left| \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{1}{\mathbf{p}!} [D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}') - D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0)] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} \right| < \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m^k.$$

Pertanto per ogni  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$  risulta

$$\left| f(\mathbf{x}) - \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} \right| < \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m^k,$$

e ciò prova che il polinomio  $P_k(\mathbf{x})$  definito nell'enunciato verifica la tesi.

Proviamo l'unicità di  $P_k(\mathbf{x})$ : sia  $P(\mathbf{x})$  un altro polinomio di grado al più  $k$ , sviluppato secondo le potenze di  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , che verifica la tesi. Allora, posto  $Q = P_k - P$ , possiamo scrivere

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} c_{\mathbf{p}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{Q(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m^k} = 0.$$

Ne deduciamo che, posto nuovamente  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ , si ha

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t^k} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \text{ con } |\mathbf{v}|_m = 1.$$

Ottieniamo dunque, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  con  $|\mathbf{v}|_m = 1$ ,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \sum_{h=0}^k \gamma_h t^h,$$

ove

$$\gamma_h = \sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{p}}.$$

Possiamo scrivere la relazione precedente nella forma

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} (\gamma_0 + o(1)),$$

il che implica  $\gamma_0 = 0$ ; dunque si ha, semplificando  $t$ ,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k-1}} (\gamma_1 + o(1)),$$

da cui  $\gamma_1 = 0$ , e iterando si ricava  $\gamma_2 = \dots = \gamma_{k-1} = 0$ , arrivando infine a

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_k,$$

ossia  $\gamma_k = 0$ . In definitiva abbiamo ottenuto

$$\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \text{ con } |\mathbf{v}|_m = 1, \quad \forall h \in \{0, 1, \dots, k\},$$

da cui, per omogeneità,

$$\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall h \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Da queste relazioni segue, applicando la derivata  $D^{\mathbf{q}}$ ,

$$\mathbf{q}! c_{\mathbf{q}} = D^{\mathbf{q}} \sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{N}^m \text{ con } |\mathbf{q}| = h, \quad \forall h \in \{0, 1, \dots, k\},$$

ossia  $c_{\mathbf{q}} = 0$  per  $|\mathbf{q}| \leq k$ : ciò significa  $Q(\mathbf{x}) \equiv 0$ . Pertanto  $P = P_k$ .  $\square$

## Esercizi 4.8

- Sia  $P(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$  un polinomio. Si provi che per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$  esistono unici  $b_0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$  tali che

$$P(x) = \sum_{h=0}^k b_h (x - x_0)^h \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[Traccia: scrivere  $x = (x - x_0) + x_0$  e usare la formula di Newton per il binomio.]

- Scrivere il decimo polinomio di Taylor di centro 0 per le funzioni:

$$(a) x \sin x^2; \quad (b) x \sin^2 x; \quad (c) \ln(1 + 3x^3); \quad (d) \sqrt{1 - 2x^4}.$$

3. Scrivere il  $k$ -simo polinomio di Taylor di centro  $\frac{\pi}{4}$  per le funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$ .
4. Sia  $f(x) = x + x^4$ ; scrivere tutti i polinomi di Taylor di  $f$  di centro 1.
5. Si calcoli una approssimazione di  $\sin 1$  a meno di  $10^{-4}$ .
6. Scrivere il secondo polinomio di Taylor di centro 0 per la funzione  $f(x) = \ln(1 + e^x) - \frac{x}{2}$ , e calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^4}.$$

7. Calcolare, usando la formula di Taylor, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}; \quad \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}; \\
& \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right); \quad \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln \cos x}{x^4}; \\
& \text{(v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1 - x^2}{x^4}; \quad \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right); \\
& \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (5^x - 2^x)}{\sin x - \log(1-x)}; \\
& \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}; \quad \text{(x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -2x^2 - x^3 \ln \left( 1 + \sin \frac{2}{x} \right) \right]; \\
& \text{(xi)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/n} - 1}{\ln n^{1/n}}; \quad \text{(xii)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \frac{1}{1 + e^{1/n}} - \frac{2n-1}{4n} \right); \\
& \text{(xiii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1/n} - 1}{\ln n^{1/n}}; \quad \text{(xiv)} \lim_{n \rightarrow \infty} ((n^4 + n^3 + 1)^{1/4} - n); \\
& \text{(xv)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\ln x}; \quad \text{(xvi)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{x-1}.
\end{aligned}$$

8. Si costruisca una funzione  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ , nulla fuori dell'intervallo  $[a, b]$ , compresa fra 0 e 1 in  $[a, b]$  e uguale a 1 nel sottointervallo  $[c, d] \subset ]a, b[$ .
9. Sia  $f \in C^k[a, b]$  una funzione invertibile; provare che  $f^{-1}$  è di classe  $C^k$ .
10. Posto  $f(x) = x - e^{-x}$ , si verifichi che la funzione inversa  $f^{-1}$  esiste e se ne scrivano esplicitamente il secondo e terzo polinomio di Taylor di centro  $-1$ .
11. Si determini il terzo polinomio di Taylor di centro  $(0, 0)$  per le funzioni

$$f_1(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \quad f_2(x, y) = ye^{xy}, \quad f_3(x, y) = \ln \frac{1+x^2}{1+y^2}.$$

12. Provare che se  $f$  è una funzione di classe  $C^{k+1}$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^m$ , e se  $\mathbf{x}_0 \in A$ , allora il  $k$ -simo resto di Taylor di  $f$  può essere scritto nella forma

$$f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}},$$

ove  $\mathbf{u}$  è un punto del segmento di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

[**Traccia:** applicare il “teorema di Lagrange di grado  $k+1$ ” alla funzione  $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ .]

13. Dimostrare la *formula di Leibniz* per la derivata di ordine  $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^m$  del prodotto di due funzioni:

$$D^{\mathbf{p}}(fg) = \sum_{\mathbf{q} \leq \mathbf{p}} \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} D^{\mathbf{q}} f D^{\mathbf{p}-\mathbf{q}} g.$$

[**Traccia:** Si scriva  $D^{\mathbf{p}}(fg) = D_m^{p_m} \cdots D_1^{p_1}(fg)$  e si utilizzi  $m$  volte l’esercizio 4.6.4.]

## 4.9 Massimi e minimi relativi per funzioni di una variabile

La forma del grafico di una funzione  $f$  nell’intorno di un punto è strettamente legata al comportamento delle derivate di  $f$  in tale punto. Andiamo ad analizzare la questione, cominciando dal caso delle funzioni di una variabile.

**Proposizione 4.9.1** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Allora:*

- (i)  *$f$  è crescente in  $[a, b]$  se e solo se  $f' \geq 0$  in  $[a, b]$ ;*
- (ii)  *$f$  è decrescente in  $[a, b]$  se e solo se  $f' \leq 0$  in  $[a, b]$ ;*
- (iii) *se  $f' > 0$  in  $[a, b]$  allora  $f$  è strettamente crescente in  $[a, b]$ , ma il viceversa è falso;*
- (iv) *se  $f' < 0$  in  $[a, b]$  allora  $f$  è strettamente decrescente in  $[a, b]$ , ma il viceversa è falso.*

**Dimostrazione (i)** Se  $f$  è crescente in  $[a, b]$ , allora fissato  $x_0 \in [a, b]$  si ha  $f(x) \geq f(x_0)$  se  $x > x_0$  e  $f(x) \leq f(x_0)$  se  $x < x_0$ ; quindi il rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$  è sempre non negativo. Facendone il limite per  $x \rightarrow x_0$  si ottiene  $f'(x_0) \geq 0$  per ogni  $x_0 \in [a, b]$ . Viceversa, sia  $f' \geq 0$  in  $[a, b]$  e siano  $x', x'' \in [a, b]$  con  $x' < x''$ . Applicando il teorema di Lagrange (teorema 4.3.3) nell’intervallo  $[x', x'']$  si trova che esiste  $\xi \in ]x', x''[$  tale che

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(\xi) \geq 0,$$

da cui segue  $f(x') \leq f(x'')$ . Quindi  $f$  è crescente.

- (ii) Segue da (i) applicata a  $-f$ .

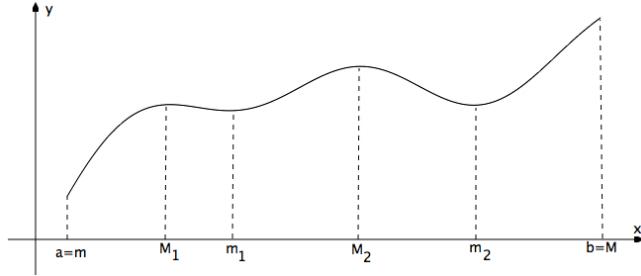
(iii) La prima affermazione si ottiene ragionando come nel viceversa di (i), osservando che stavolta si ha  $f'(\xi) > 0$ . La seconda affermazione si ricava dall'esempio  $f(x) = x^3$ : questa funzione è strettamente crescente ma la sua derivata prima è nulla per  $x = 0$ .

(iv) Entrambi gli enunciati seguono da (iii) applicata a  $-f$ .  $\square$

**Definizione 4.9.2** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , ove  $m \in \mathbb{N}^+$ , e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione qualunque; sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Diciamo che  $\mathbf{x}_0$  è punto di massimo relativo (oppure punto di minimo relativo) per  $f$ , se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^m$  tale che

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap A \quad (\text{oppure} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap A).$$

Naturalmente, i punti di massimo assoluto o di minimo assoluto di  $f$  sono anche punti di massimo relativo o di minimo relativo, mentre il viceversa non è vero. La figura accanto illustra il caso  $m = 1$ ,  $A = [a, b]$ .



**Teorema 4.9.3 (di Fermat)** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile, e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $x_0$  è punto di massimo o di minimo relativo per  $f$ , allora  $f'(x_0) = 0$ . Il viceversa è falso.

**Dimostrazione** Si ragiona come nella dimostrazione del teorema di Rolle (teorema 4.3.1): se  $x_0$  è punto di massimo relativo esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \in I \cap [a, x_0[ \\ \leq 0 & \text{se } x \in I \cap ]x_0, b], \end{cases}$$

quindi passando al limite per  $x \rightarrow x_0$  si trova  $f'(x_0) = 0$ . L'esempio  $f(x) = x^3$ , con  $x_0 = 0$ , mostra che il viceversa è falso.

Discorso analogo per i punti di minimo relativo.  $\square$

Osserviamo che se il punto di massimo o di minimo relativo è un estremo dell'intervallo, la precedente proposizione non vale (esercizio 4.9.7).

Il seguente risultato caratterizza i punti di massimo e di minimo relativo per funzioni di una variabile.

**Teorema 4.9.4** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile due volte, e sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Valgono i seguenti fatti:

- (i) se  $x_0$  è punto di massimo relativo per  $f$ , allora  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \leq 0$ , ma il viceversa è falso;
- (ii) se  $x_0$  è punto di minimo relativo per  $f$ , allora  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \geq 0$ , ma il viceversa è falso;

- (iii) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , allora  $x_0$  è punto di massimo relativo per  $f$ , ma il viceversa è falso;
- (iv) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , allora  $x_0$  è punto di minimo relativo per  $f$ , ma il viceversa è falso.

**Dimostrazione** (i) Già sappiamo (proposizione 4.9.3) che  $f'(x_0) = 0$ ; proviamo che  $f''(x_0) \leq 0$ . Supponendo, per assurdo, che  $f''(x_0) > 0$ , per il teorema di permanenza del segno (esercizio 3.2.3) risulta

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

in un intorno  $I$  di  $x_0$ , e dunque

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in I \cap [a, x_0[ \\ > 0 & \text{se } x \in I \cap ]x_0, b]. \end{cases}$$

Ma allora, per la proposizione 4.9.1,  $f$  decresce in  $I \cap [a, x_0[$  e cresce in  $I \cap ]x_0, b]$ , cosicché  $x_0$  non può essere un punto di massimo relativo per  $f$ .

(ii) Analogo a (i).

(iii) Lo stesso ragionamento di (i) mostra che se  $f''(x_0) < 0$  e  $f'(x_0) = 0$ , allora  $f$  cresce in  $I \cap [a, x_0[$  e decresce in  $I \cap ]x_0, b]$ , e quindi  $x_0$  è punto di massimo relativo.

(iv) Analogo a (iii).

Infine, la funzione  $f(x) = x^4$  nel punto 0 verifica  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 0$ , ma 0 non è punto di massimo relativo (il che rende falso il viceversa di (i)), ed è, anzi, punto di minimo assoluto, il che rende falso il viceversa di (iv). La funzione  $f(x) = -x^4$  nel punto 0 rende falsi i viceversa degli altri due enunciati.  $\square$

## Applicazione alle successioni definite per ricorrenza

Vogliamo determinare il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  di successioni della forma

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove  $f : I \rightarrow I$  è una funzione continua assegnata,  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ , limitato o no, e  $\lambda \in I$ .

In generale il comportamento della successione  $\{a_n\}$  può essere molto difficile da determinare; ma se essa converge ad un limite  $L \in \mathbb{R}$ , allora si ha necessariamente  $L = f(L)$ , come si verifica subito passando al limite nella relazione di ricorrenza ed utilizzando la continuità di  $f$ .

**Definizione 4.9.5** Sia  $f : I \rightarrow I$ , sia  $L \in I$ . Diciamo che  $L$  è un punto fisso di  $f$  se risulta  $L = f(L)$ .

Dunque, se la successione  $\{a_n\}$  converge, il suo limite è un punto fisso di  $f$ ; pertanto, se  $f$  non ha punti fissi la successione  $\{a_n\}$  non può avere limite finito.

**Esempio 4.9.6** Se  $\{a_n\}$  è definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = 2^{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

allora  $a_n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . Infatti  $f(x) = 2^x$  è definita su  $I = \mathbb{R}$  e non ha alcun punto fisso. D'altra parte, essendo  $f$  crescente, è immediato verificare per induzione che  $\{a_n\}$  è crescente: infatti si ha  $a_1 = 2^\lambda > \lambda = a_0$ , e se  $a_n > a_{n-1}$  allora  $a_{n+1} = 2^{a_n} > 2^{a_{n-1}} = a_n$ . Quindi  $a_n$  ha limite, e tale limite, non potendo essere finito, vale  $+\infty$ .

Discuteremo il comportamento di  $\{a_n\}$  in due casi semplici ma importanti: (a) quando  $f$  è una contrazione, (b) quando  $f$  è monotona. Naturalmente, se non siamo in uno di questi casi, ciò non significa che non si sappia dire nulla: il problema è che bisogna esaminare il singolo caso.

**Definizione 4.9.7** Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow I$ . Diciamo che  $f$  è una contrazione su  $I$  se esiste  $K \in ]0, 1[$  tale che

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad \forall x, x' \in I.$$

Si noti che ogni contrazione è una funzione continua.

**Esempi 4.9.8 (1)**  $f(x) = ax + b$  è una contrazione su  $\mathbb{R}$  se e solo se  $|a| < 1$ . Infatti, ovviamente,

$$|f(x) - f(x')| = |a| \cdot |x - x'| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

**(2)**  $f(x) = \sin x$  non è una contrazione su  $\mathbb{R}$ . Infatti, benché

$$|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R},$$

non esiste alcun numero  $K \in ]0, 1[$  tale che  $|\sin x - \sin x'| \leq K|x - x'|$  per ogni  $x' \in \mathbb{R}$ : altrimenti, scelto  $x' = 0$ , otterremmo  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq K < 1$ , il che è assurdo.

**(3)** Se  $f : I \rightarrow I$  è derivabile con  $|f'(x)| \leq K < 1$  per ogni  $x \in I$ , allora  $f$  è una contrazione in  $I$ : infatti, per il teorema di Lagrange (teorema 4.3.3),

$$|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)| \cdot |x - x'| \leq K|x - x'| \quad \forall x, x' \in I.$$

Il teorema che segue risolve il nostro problema nel caso (a), ma la sua importanza è ben maggiore: opportunamente generalizzato, ha svariatissime applicazioni in tutti i campi dell'analisi matematica.

**Teorema 4.9.9 (delle contrazioni)** Sia  $I$  un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  (limitato o no) e sia  $f$  una contrazione su  $I$ . Allora  $f$  ha uno ed un sol punto fisso  $L \in I$ . Inoltre per ogni  $\lambda \in I$  la successione  $\{a_n\}$  definita all'inizio converge a  $L$ , e vale la seguente stima dell'errore:

$$|a_n - L| \leq K^n |\lambda - L| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dimostrazione** Proviamo l'unicità del punto fisso: Se  $L, L'$  sono punti fissi di  $f$ , allora si ha  $L = f(L)$  e  $L' = f(L')$ , da cui

$$|L - L'| = |f(L) - f(L')| \leq K|L - L'|;$$

poiché  $K < 1$ , ciò implica  $|L - L'| = 0$ , ossia  $L = L'$ .

Proviamo ora l'esistenza di un punto fisso  $L$ , e che si ha  $a_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq K|a_n - a_{n-1}|,$$

e iterando “all'indietro” questa disegualanza si trova che

$$|a_{n+1} - a_n| \leq K^n |a_1 - a_0| = K^n |a_1 - \lambda| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siano allora  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m > n$ . Si ha

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)| \leq \\ &= \sum_{p=n}^{m-1} |a_{p+1} - a_p| \leq \sum_{p=n}^{m-1} K^p |a_1 - \lambda|; \end{aligned}$$

dato che la serie geometrica di ragione  $K$  è convergente, fissato  $\varepsilon > 0$  esisterà  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{p=n}^{m-1} K^p < \varepsilon$  per ogni  $m > n \geq \nu$ . Ne segue

$$|a_m - a_n| \leq \varepsilon |a_1 - \lambda| \quad \forall m, n \geq \nu,$$

cioè la successione  $\{a_n\}$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ , e dunque convergente. Dunque essa ha un limite  $L \in \mathbb{R}$ , il quale appartiene a  $I$  perché  $I$  è chiuso; per quanto già osservato,  $L$  deve essere un punto fisso di  $f$ .

Proviamo infine la stima dell'errore. Si ha

$$|a_n - L| = |f(a_{n-1}) - f(L)| \leq K|a_{n-1} - L| \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ed iterando il ragionamento si ottiene

$$|a_n - L| \leq K^n |a_0 - L| = K^n |\lambda - L|. \quad \square$$

**Esempi 4.9.10 (1)** Sia  $\{a_n\}$  definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

la funzione  $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$  è una contrazione su  $\mathbb{R}$ , essendo

$$\left| D \left( \frac{1}{2} \arctan x \right) \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi  $\{a_n\}$  converge al punto fisso di  $f$ , vale a dire alla soluzione dell'equazione  $L = \frac{1}{2} \arctan L$ , che è  $L = 0$ .

**(2)** Sia  $\{a_n\}$  definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

In questo caso il comportamento di  $\{a_n\}$  dipende dalla scelta del valore iniziale  $\lambda$ . Infatti la funzione  $f(x) = x^2$ , che è ovviamente definita su  $\mathbb{R}$ , è una contrazione sull'intervallo  $[-a, a]$  per ogni  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$ , dato che  $f([-a, a]) = [a^2, a] \subset [-a, a]$  e  $|f'(x)| = 2|x| \leq 2a < 1$  per ogni  $x \in [-a, a]$ . Quindi, se  $|\lambda| < \frac{1}{2}$ , scelto  $a = |\lambda|$  si ha  $a_n \rightarrow 0$ , poiché 0 è l'unico punto fisso di  $f$  in  $[-|\lambda|, |\lambda|]$ .

Più in generale, se  $|\lambda| < 1$  la successione  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  è contenuta in  $[0, 1[$ , intervallo nel quale  $f$  è crescente; essendo  $a_1 = \lambda^2 < |\lambda|$ , è facile vedere che  $a_n > a_{n+1}$  per ogni  $n \geq 1$ , e dunque  $\{a_n\}$  è convergente. Il limite sarà allora, necessariamente, l'unico punto fisso di  $f$  in  $[0, 1[$ , cioè 0.

Poi, se  $|\lambda| = 1$  si ha  $a_n = 1$  per ogni  $n \geq 1$ , e dunque  $a_n \rightarrow 1$ : si noti che 1 è l'altro punto fisso di  $f$  in  $[0, 1]$ .

Infine, se  $|\lambda| > 1$ , dalla relazione  $a_1 = \lambda^2 > |\lambda|$  e dalla crescenza di  $f$  in  $]1, \infty[$  si deduce che  $a_n < a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ : dunque  $a_n$  ha limite, e tale limite è obbligatoriamente  $+\infty$  in quanto  $f$  non ha punti fissi in  $]1, \infty[$ . In conclusione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |\lambda| < 1 \\ 1 & \text{se } |\lambda| = 1 \\ +\infty & \text{se } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Veniamo ora al caso in cui  $f$  è monotona. Come nel caso di  $f(x) = x^2$  in  $[0, \infty[$ ,  $f$  può avere più di un punto fisso, e come nel caso di  $f(x) = e^x$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f$  può non averne nemmeno uno.

La situazione è differente a seconda che  $f$  sia crescente o decrescente; in tutti i casi il comportamento di  $\{a_n\}$  dipenderà, oltre che da  $f$ , dalla scelta del valore iniziale  $a_0 = \lambda$ .

**Teorema 4.9.11** *Sia  $I$  un intervallo chiuso e sia  $f : I \rightarrow I$  continua e crescente. Allora per la successione  $\{a_n\}$  definita dal punto iniziale  $\lambda \in I$  e dall'iterazione  $a_{n+1} = f(a_n)$  valgono i fatti seguenti:*

- (i) se  $f(\lambda) \geq \lambda$  la successione  $\{a_n\}$  è crescente, mentre se  $f(\lambda) \leq \lambda$  la successione  $\{a_n\}$  è decrescente;
- (ii) se  $f(\lambda) > \lambda$  e se  $f$  possiede almeno un punto fisso maggiore di  $\lambda$ , allora  $\{a_n\}$  converge al minimo punto fisso di  $f$  che è maggiore di  $\lambda$ ;
- (iii) se  $f(\lambda) > \lambda$  e se  $f$  non ha alcun punto fisso maggiore di  $\lambda$ , allora  $\{a_n\}$  diverge a  $+\infty$ ;
- (iv) se  $f(\lambda) < \lambda$  e se  $f$  possiede almeno un punto fisso minore di  $\lambda$ , allora  $\{a_n\}$  converge al massimo punto fisso di  $f$  che è minore di  $\lambda$ ;

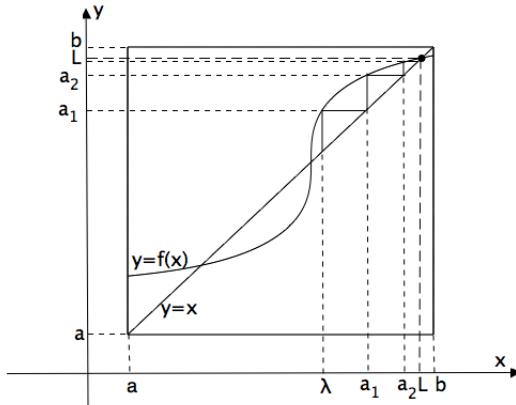
(v) se  $f(\lambda) < \lambda$  e se  $f$  non ha alcun punto fisso minore di  $\lambda$ , allora  $\{a_n\}$  diverge a  $-\infty$ ;

(vi) Se  $f(\lambda) = \lambda$  allora  $a_n = \lambda$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Dimostrazione (i)** Se  $f(\lambda) \geq \lambda$ , ossia  $a_1 \geq a_0$ , allora per la crescenza di  $f$  si ha  $a_2 = f(a_1) \geq f(a_0) = a_1$ , e per induzione segue subito che  $\{a_n\}$  è crescente. Discorso analogo se  $f(\lambda) \leq \lambda$ .

(ii) Proviamo che l'insieme, non vuoto per ipotesi, dei punti fissi di  $f$  che sono maggiori di  $\lambda$ ,

$$F = \{\ell \in ]\lambda, \infty[ : \ell = f(\ell)\},$$



ha minimo. Detto  $L = \inf F$ , dalle proprietà dell'estremo inferiore segue che esiste una successione di punti fissi  $\{\ell_n\} \subseteq ]\lambda, \infty[$  tale che  $\ell_n \rightarrow L$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ma dalla relazione  $\ell_n = f(\ell_n)$ , valida per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e dalla continuità di  $f$ , segue che  $L = f(L)$ . Dunque  $L$  è un punto fisso non inferiore a  $\lambda$ , ma non si ha  $L = \lambda$  perché, per ipotesi,  $f(\lambda) > \lambda$ . Dunque  $L \in F$  ed è il minimo di  $F$ . Ora, poiché  $\lambda < L$ , si ha  $a_0 = \lambda < a_1 = f(\lambda) \leq f(L) = L$ , da cui induttivamente  $a_n \leq a_{n+1} \leq L$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . In particolare,  $a_n \rightarrow L$  perché  $f$  non ha punti fissi in  $]\lambda, L[$ .

(iii) Poiché  $f$  non ha punti fissi maggiori di  $\lambda$ , la successione crescente  $\{a_n\}$  ha necessariamente limite  $+\infty$ . Si noti che in questo caso, essendo  $f(x) > x$  per ogni  $x \in I \cap [\lambda, \infty[$ , l'intervallo  $I$  deve contenere la semiretta  $[\lambda, \infty[$ .

(iv)-(v) Dimostrazioni analoghe a (ii)-(iii).

(vi) Evidente.  $\square$

**Esempio 4.9.12** Sia

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

La funzione  $f(x) = x + \sin x$ , definita su  $\mathbb{R}$ , è crescente, dato che  $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$  in  $\mathbb{R}$ . I suoi punti fissi sono  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Perciò si ha

$$\lambda \in ](k-1)\pi, k\pi[, \text{ } k \text{ pari} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (k-1)\pi,$$

mentre

$$\lambda \in ](k-1)\pi, k\pi[, \text{ } k \text{ dispari} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k\pi.$$

**Teorema 4.9.13** Sia  $I$  un intervallo chiuso e sia  $f : I \rightarrow I$  continua e decrescente. Allora per la successione  $\{a_n\}$  definita dal punto iniziale  $\lambda \in I$  e dall'iterazione  $a_{n+1} = f(a_n)$  valgono i fatti seguenti:

- (i) se  $f(f(\lambda)) \geq \lambda$ , allora  $\{a_{2n}\}$  è crescente e  $\{a_{2n+1}\}$  è decrescente;
- (ii) se  $f(f(\lambda)) \leq \lambda$ , allora  $\{a_{2n}\}$  è decrescente e  $\{a_{2n+1}\}$  è crescente;
- (iii) se  $f(\lambda) \geq \lambda$ , allora  $a_{2n} \leq a_{2n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv) se  $f(\lambda) \leq \lambda$ , allora  $a_{2n} \geq a_{2n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (v) se esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in [-\infty, +\infty]$ , allora  $L \in I$  con  $L = f(L)$  ed inoltre  $f(f(\lambda))$  è compreso fra  $\lambda$  e  $f(\lambda)$ , ma il viceversa è falso;
- (vi) esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ .

**Dimostrazione (i)-(ii)** Supponiamo che  $f(f(\lambda)) \geq \lambda$ , ossia che  $a_2 \geq a_0$ : la decrescenza di  $f$  implica via via che  $a_3 \leq a_1$ ,  $a_4 \geq a_2$ , e in generale  $a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$  e  $a_{2n+2} \geq a_{2n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Discorso analogo se  $f(f(\lambda)) \leq \lambda$ .

**(iii)-(iv)** Se  $f(\lambda) \geq \lambda$ , cioè  $a_1 \geq a_0$ , allora la decrescenza di  $f$  implica via via  $a_2 \leq a_1$ ,  $a_3 \geq a_2$ , e in generale  $a_{2n} \leq a_{2n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Discorso analogo se  $f(\lambda) \leq \lambda$ .

**(v)** Supponiamo che esista  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ : allora in particolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L$ . Ne deriva che non può essere  $L = \pm\infty$  perché delle due successioni  $\{a_{2n}\}$  e  $\{a_{2n+1}\}$  una è crescente e l'altra è decrescente. Dunque  $L \in I$ , dato che  $I$  è chiuso, e  $L = f(L)$ . Inoltre, se risulta  $f(f(\lambda)) = a_2 \geq a_0 = \lambda$ , allora da (i) segue  $a_{2n-1} \geq a_{2n+1} \geq L \geq a_{2n+2} \geq a_{2n}$ ; in particolare  $a_1 \geq L \geq a_2 \geq a_0$ , cosicché  $f(\lambda) \geq f(f(\lambda)) \geq \lambda$ . Analogamente, se risulta  $f(f(\lambda)) = a_2 \leq a_0 = \lambda$ , allora da (ii) segue  $a_{2n} \geq a_{2n+2} \geq L \geq a_{2n+1} \geq a_{2n-1}$  e in particolare  $a_0 \geq a_2 \geq L \geq a_1$ , cosicché  $\lambda \geq f(f(\lambda)) \geq f(\lambda)$ . Viceversa, si consideri  $a_0 = 2$  e  $a_{n+1} = 1/a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ : per questa successione si ha  $2 = \lambda = f(f(\lambda)) \geq f(\lambda) = \frac{1}{2}$ , ed il limite non esiste.

**(vi)** Come sappiamo da (i)-(ii), esistono  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ ,  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ . Se esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in I$ , allora come si è visto  $P = D = L = f(L)$  e dunque  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = |P - D| = 0$ . Viceversa, supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ : allora

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [(a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2k+1}] = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{2k} - a_{2k+1}) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = D,$$

Quindi  $P = D$ , e pertanto esiste  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Ciò prova la tesi.  $\square$

**Esempi 4.9.14 (1)** Sia  $a_0 = \lambda > 0$ ,  $a_{n+1} = 1/a_n^2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . La funzione  $f(x) = 1/x^2$  è decrescente e bigettiva da  $]0, \infty[$  in  $]0, \infty[$ . Si ha

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \geq \lambda \iff \lambda \in ]0, 1],$$

mentre  $f(f(\lambda)) = \lambda^4$ . Dunque l'unico punto fisso di  $f \circ f$  in  $]0, \infty[$  è  $\lambda = 1$ : quindi se la successione  $\{a_n\}$  converge, il suo limite deve essere 1. Tuttavia non è difficile provare per induzione che

$$a_{2n} = \lambda^{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{2^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \lambda < 1 \\ 1 & \text{se } \lambda = 1 \\ +\infty & \text{se } \lambda > 1, \end{cases}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\lambda^{2^{2n+1}}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{2^{2n+1}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \lambda < 1 \\ 1 & \text{se } \lambda = 1 \\ 0 & \text{se } \lambda > 1. \end{cases}$$

Perciò si conclude che  $\{a_n\}$  non ha limite, a meno che non sia  $\lambda = 1$ , nel qual caso la successione è costante.

(2) Sia  $a_0 = \lambda \geq 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{2a_n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . La funzione  $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$  è positiva e decrescente in  $I = [0, \infty[$ , in quanto  $f'(x) = -\frac{3}{(2x+1)^2} < 0$  in  $I$ . Si verifica facilmente che  $f(f(x)) = \frac{5x+4}{4x+5}$ ; inoltre si ha

$$f(\lambda) \geq \lambda \iff \lambda \in [0, 1], \quad f(f(\lambda)) \geq \lambda \iff \lambda \in [0, 1],$$

ed in particolare  $f(f(x)) = x$  se e solo se  $x = 1$ . Quindi, quando  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\{a_{2n}\}$  cresce,  $\{a_{2n+1}\}$  decresce e  $a_{2n} \leq a_{2n+1}$ : perciò entrambe tendono a 1. Similmente, quando  $\lambda \geq 1$ ,  $\{a_{2n}\}$  decresce,  $\{a_{2n+1}\}$  cresce e  $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ : perciò, nuovamente, entrambe tendono a 1. Si conclude che per ogni  $\lambda \geq 0$  l'intera successione  $\{a_n\}$  ha limite 1.

## Esercizi 4.9

- Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati:
  - $|x^2 - 1|$ ,  $x \in [-2, 12]$ ;
  - $\sqrt{1 + \sin e^x}$ ,  $x \geq 0$ ;
  - $\ln(e^x - x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;
  - $14x^{2/3} - x^2$ ,  $x \in [-5, 5]$ ;
  - $e^{-x^4} \sin x^{1/4}$ ,  $x \geq 0$ ;
  - $\arctan x - \frac{x}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Dato un foglio rettangolare di cartone, ritagliare da esso 4 quadrati in modo da costruire una scatola parallelepipedo di volume massimo.
- Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza, determinare quello di area massima.
- Fra tutti i cilindri a base rotonda inscritti in una sfera, determinare quello di volume massimo.

5. Dimostrare che per ogni  $x, y \geq 0$  si ha

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p) \quad \text{se } p \geq 1, \quad (x + y)^p \leq x^p + y^p \quad \text{se } 0 \leq p \leq 1.$$

6. Provare che:

$$(i) \quad x e^{\sqrt{1/x}} > 1 \quad \forall x > 0;$$

$$(ii) \quad 2 \sin x + \tan x > 3x \quad \forall x \in ]0, \pi/2[;$$

$$(iii) \quad \frac{2x}{2 - x^2} > \tan x \quad \forall x \in ]0, \sqrt{2}[;$$

$$(iv) \quad 0 \leq \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Provare che se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile ed ha un massimo (minimo) relativo nell'estremo  $a$ , allora  $f'(a) \leq 0$  ( $f'(a) \geq 0$ ). Enunciare l'analogo risultato nel caso in cui  $f$  ha un massimo (minimo) relativo nell'estremo  $b$ .

8. Sia  $I$  un intervallo chiuso e limitato. Si provi che se  $f : I \rightarrow I$  è continua, allora  $f$  ha almeno un punto fisso in  $I$ .

9. Sia  $I$  un intervallo qualunque. Si provi che se  $f : I \rightarrow I$  è continua e decrescente, allora  $f$  ha un unico punto fisso in  $I$ .

10. Sia  $I$  un intervallo aperto. Si provi che esistono contrazioni  $f : I \rightarrow I$  che non hanno punti fissi.

11. Si verifichi che  $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$  è una contrazione in  $[1, 3]$ , e se ne determini la relativa costante  $K$ .

12. Descrivere il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

$$(a) \begin{cases} a_0 = \lambda \geq 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 - \ln a_n \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n - a_n^2 + 2) \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} a_0 = \lambda \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = \frac{|a_n+1|}{2} \end{cases}, \quad (d) \begin{cases} a_0 = \lambda \in [-1, 1] \\ a_{n+1} = a_n^3 \sin \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} a_0 = \lambda \in [0, 1] \\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n(1 - a_n) \end{cases}, \quad (f) \begin{cases} a_0 = \lambda \in ]0, 1[ \\ a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n(1 - a_n) \end{cases},$$

$$(g) \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{\ln(1+a_n)}{\ln 2} \end{cases}, \quad (h) \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = e^{a_n} - 1 \end{cases},$$

$$(i) \begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases}, \quad (j) \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \cos a_n \end{cases},$$

$$(k) \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{4}{a_n+2} \end{cases}, \quad (l) \begin{cases} a_0 = \lambda \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+2|a_n|}{3} \end{cases}.$$

## 4.10 Forme quadratiche

Nel caso delle funzioni di più variabili, le condizioni perché un punto  $\mathbf{x}_0$  sia di massimo o di minimo relativo per una funzione  $f$  sono opportune generalizzazioni di quelle del teorema 4.9.4, e coinvolgono, in luogo di  $f'$  e di  $f''$ , il gradiente di  $f$  e la matrice Hessiana (cioè la matrice delle derivate seconde) di  $f$  nel punto  $\mathbf{x}_0$ ; per enunciare tali condizioni, è però necessario uno studio preliminare delle cosiddette “forme quadratiche” in  $\mathbb{R}^m$ . Data una matrice  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ ,  $m \times m$ , reale e simmetrica, la funzione  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\Phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{Av}, \mathbf{v} \rangle_m = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} v^i v^j, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m,$$

è detta *forma quadratica* associata ad  $\mathbf{A}$ .

Si noti che se  $\mathbf{A}$  è una matrice reale  $m \times m$  non simmetrica, la forma quadratica  $\Phi$  è ben definita, ed è quella associata alla matrice simmetrica  $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ , ove  $\mathbf{A}^t$  è la matrice trasposta di  $\mathbf{A}$ , data da

$$\mathbf{A}^t = \{a_{ji}\} \quad \text{se } \mathbf{A} = \{a_{ij}\}.$$

Una forma quadratica è dunque un polinomio di secondo grado in  $m$  variabili, privo di termini di grado inferiore. Viceversa, un qualunque polinomio di questo tipo è una forma quadratica la cui matrice (reale e simmetrica) associata  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  è univocamente determinata dai coefficienti del polinomio (esercizio 4.10.5). In particolare, risulta

$$\Phi(t\mathbf{v}) = t^2 \Phi(\mathbf{v}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m,$$

cosicché  $\Phi$  è una funzione omogenea di grado 2 (esercizio 4.4.3). Inoltre, ovviamente, si ha  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ; verifichiamo che risulta

$$\nabla \Phi(\mathbf{v}) = 2\mathbf{Av} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

In effetti, indicato con  $\delta_{ij}$  il generico elemento della matrice identità  $\mathbf{I}$  (cosicché  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ ), se  $k = 1, 2, \dots, m$  si ha per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} D_k \Phi(\mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^m a_{ij} D_k(v^i v^j) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} (\delta_{ik} v^j + v^i \delta_{jk}) = \\ &= \sum_{j=1}^m a_{kj} v^j + \sum_{i=1}^m a_{ik} v^i = \sum_{j=1}^m a_{kj} v^j + \sum_{j=1}^m a_{jk} v^j = 2 \sum_{j=1}^m a_{jk} v^j = 2(\mathbf{Av})^k. \end{aligned}$$

**Definizione 4.10.1** Una forma quadratica  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

- definita positiva, se  $\Phi(\mathbf{v}) > 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- definita negativa, se  $\Phi(\mathbf{v}) < 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- semidefinita positiva, se  $\Phi(\mathbf{v}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ;
- semidefinita negativa, se  $\Phi(\mathbf{v}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ;

- indefinita, se  $\Phi$  assume sia valori positivi che negativi.

**Esempi 4.10.2** Poniamo

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e indichiamo con  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  e  $\Phi_5$  le forme quadratiche corrispondenti:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= x^2 + y^2, & \Phi_2(x, y) &= -x^2 - y^2, & \Phi_3(x, y) &= y^2, \\ \Phi_4(x, y) &= -x^2, & \Phi_5(x, y) &= -x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Allora  $\Phi_1$  è definita positiva,  $\Phi_2$  è definita negativa,  $\Phi_3$  è semidefinita positiva,  $\Phi_4$  è semidefinita negativa,  $\Phi_5$  è indefinita.

Qualunque sia la matrice  $\mathbf{A}$  reale e simmetrica, la forma quadratica associata ad  $\mathbf{A}$ , essendo una funzione di classe  $C^\infty$ , per il teorema di Weierstrass assume massimo  $M_0$  e minimo  $m_0$  sulla frontiera  $\Gamma$  della palla unitaria di  $\mathbb{R}^m$ , la quale è un insieme compatto. Esistono dunque  $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \in \Gamma$  tali che

$$m_0 = \Phi(\mathbf{v}_0) \leq \Phi(\mathbf{v}) \leq \Phi(\mathbf{w}_0) = M_0 \quad \forall \mathbf{v} \in \Gamma.$$

Dato che  $\Phi$  è una funzione omogenea di grado 2, possiamo scrivere

$$\Phi(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|_m^2 \Phi\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_m}\right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\},$$

e di conseguenza si ottiene

$$m_0 |\mathbf{v}|_m^2 \leq \Phi(\mathbf{v}) \leq M_0 |\mathbf{v}|_m^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Ricordiamo ora che un numero complesso  $\lambda$  si dice *autovalore* per la matrice  $\mathbf{A}$  se esiste un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  (detto *autovettore* relativo all'autovalore  $\lambda$ ) tale che  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ . Dato che tale equazione vettoriale è un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $x^1, \dots, x^m$ , l'esistenza di una sua soluzione  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , ossia il fatto che  $\lambda$  sia autovalore per la matrice  $\mathbf{A}$ , equivale alla condizione  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ . Quindi gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono le  $m$  soluzioni (in  $\mathbb{C}$ , ciascuna contata con la sua molteplicità) dell'equazione  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ .

Si vede facilmente, però, che se  $\mathbf{A}$  è reale e simmetrica tutti i suoi autovalori sono *reali*: infatti se  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ , allora moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{x}$  (rispetto al prodotto scalare di  $\mathbb{C}^m$ ) si ha, essendo  $\mathbf{A}$  reale e simmetrica:

$$\lambda |\mathbf{x}|_m^2 = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle_m = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^* \mathbf{x} \rangle_m = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle_m = \overline{\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle_m},$$

ove  $\mathbf{A}^* = \{b_{ij}\}$  è la matrice i cui elementi sono  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ . In particolare  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle_m$  è un numero reale e quindi  $\lambda = \frac{\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle_m}{|\mathbf{x}|_m^2}$  è reale. Si noti che, di conseguenza, l'autovettore  $\mathbf{x}$  appartiene a  $\mathbb{R}^m$ , dato che il sistema  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$  è a coefficienti reali.

**Proposizione 4.10.3** *Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $m \times m$  reale e simmetrica e sia  $\Phi$  la forma quadratica associata ad  $\mathbf{A}$ . I numeri  $m_0 = \Phi(\mathbf{v}_0) = \min_{\Gamma} \Phi$  e  $M_0 = \Phi(\mathbf{w}_0) = \max_{\Gamma} \Phi$ , ove  $\Gamma = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{v}|_m = 1\}$ , sono rispettivamente il minimo ed il massimo autovalore di  $\mathbf{A}$ . In particolare si ha*

$$m_0|\mathbf{v}|_m^2 \leq \Phi(\mathbf{v}) \leq M_0|\mathbf{v}|_m^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

**Dimostrazione** Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(\mathbf{v}) = \frac{\Phi(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_m^2}.$$

In virtù dell'omogeneità di  $\Phi$ , si ha

$$m_0 = F(\mathbf{v}_0) \leq F(\mathbf{v}) \leq F(\mathbf{w}_0) = M_0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dall'esercizio 4.11.2 segue che

$$\nabla F(\mathbf{v}_0) = \nabla F(\mathbf{w}_0) = \mathbf{0};$$

d'altra parte se  $k = 1, \dots, m$  si ha per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ :

$$\begin{aligned} D_k F(\mathbf{v}) &= \frac{D_k \Phi(\mathbf{v}) |\mathbf{v}|_m^2 - \Phi(\mathbf{v}) D_k |\mathbf{v}|_m^2}{|\mathbf{v}|_m^4} = \\ &= 2 \frac{(\mathbf{A}\mathbf{v})^k}{|\mathbf{v}|_m^2} - \frac{\Phi(\mathbf{v}) \cdot 2v^k}{|\mathbf{v}|_m^4} = \frac{2}{|\mathbf{v}|_m^2} ((\mathbf{A}\mathbf{v})^k - F(\mathbf{v})v^k), \end{aligned}$$

ossia

$$\nabla F(\mathbf{v}) = \frac{2}{|\mathbf{v}|_m^2} (\mathbf{A}\mathbf{v} - F(\mathbf{v})\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dunque, ricordando che  $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \in \Gamma$ ,

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2} \nabla F(\mathbf{v}_0) = \mathbf{A}\mathbf{v}_0 - F(\mathbf{v}_0)\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}\mathbf{v}_0 - m_0\mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2} \nabla F(\mathbf{w}_0) = \mathbf{A}\mathbf{w}_0 - F(\mathbf{w}_0)\mathbf{w}_0 = \mathbf{A}\mathbf{w}_0 - M_0\mathbf{w}_0.$$

Ciò prova che  $m_0, M_0$  sono autovalori di  $\mathbf{A}$ . Resta da far vedere che se  $\lambda$  è autovalore di  $\mathbf{A}$  risulta  $m_0 \leq \lambda \leq M_0$ : sia  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  tale che  $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \lambda\mathbf{u}_0$ ; moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{u}_0$  otteniamo

$$\Phi(\mathbf{u}_0) = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle_m = \lambda|\mathbf{u}_0|_m^2$$

e pertanto

$$m_0|\mathbf{u}_0|_m^2 \leq \Phi(\mathbf{u}_0) = \lambda|\mathbf{u}_0|_m^2 \leq M_0|\mathbf{u}_0|_m^2.$$

Dato che  $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ , ne segue la tesi.  $\square$

**Corollario 4.10.4** *La forma quadratica  $\Phi$ , generata da una matrice reale e simmetrica  $\mathbf{A}$ , è:*

- *definita positiva*, se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono positivi;
- *definita negativa*, se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono negativi;
- *semidefinita positiva*, se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono non negativi;
- *semidefinita negativa*, se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono non positivi;
- *indefinita*, se e solo se  $\mathbf{A}$  ha sia autovalori positivi, sia autovalori negativi.

**Dimostrazione** Se  $\Phi$  è definita positiva, si ha  $\Phi(\mathbf{v}) > 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ; in particolare  $m_0 = \min_{\Gamma} \Phi$  è positivo, e quindi tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$ , che per la proposizione 4.10.3 sono non inferiori a  $m_0$ , sono positivi. Viceversa, se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono positivi, il minimo  $m_0$  della forma quadratica  $\Phi$  su  $\Gamma$  è positivo in quanto, sempre per la proposizione 4.10.3,  $m_0$  è un autovalore di  $\mathbf{A}$ . Per omogeneità, si ha allora  $\Phi(\mathbf{v}) \geq m_0 |\mathbf{v}|_m^2 > 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ , ossia  $\Phi$  è definita positiva.

Discorso analogo per le altre proprietà.  $\square$

**Osservazione 4.10.5** Una forma quadratica è semidefinita positiva e non definita positiva se e solo se il minimo autovalore di  $\mathbf{A}$  è esattamente 0. Similmente, una forma quadratica è semidefinita negativa e non definita negativa se e solo se il massimo autovalore di  $\mathbf{A}$  è esattamente 0.

**Osservazione 4.10.6** Per il calcolo del segno degli autovalori della forma quadratica  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m$  è di grande utilità il *criterio di Sylvester*: se gli  $m$  minori principali della matrice  $\mathbf{A}$ , cioè

$$a_{11}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,m-1} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A},$$

sono tutti positivi, allora  $\Phi$  è definita positiva. Se invece i segni di tali minori sono alternati (positivi quelli di ordine pari, negativi quelli di ordine dispari) allora  $\Phi$  è definita negativa. In tutti gli altri casi in cui i minori sono non nulli, la forma è indefinita. La dimostrazione di questo criterio è suggerita nell'esercizio 4.10.2. Una sua applicazione nel caso  $m = 2$  è fornita nell'esercizio 4.10.3; invece nell'esercizio 4.10.4 è indicato un altro metodo per stabilire la natura di una forma quadratica senza calcolare gli autovalori.

## Esercizi 4.10

- Sia  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  una matrice  $m \times m$ , sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ . Provare che  $|\mathbf{A}\mathbf{v}|_m \leq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{v}|_m$ , ove

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^2}.$$

[Traccia: utilizzare la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.]

2. Dimostrare (per induzione sulla dimensione  $N$ ) il criterio di Sylvester.
3. Sia  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , e sia  $\Phi$  la forma quadratica associata ad  $\mathbf{A}$ :
- $$\Phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$
- Si provi che:
- (i)  $\Phi$  è definita positiva se e solo se  $ac - b^2 > 0$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$ ;
  - (ii)  $\Phi$  è definita negativa se e solo se  $ac - b^2 > 0$ ,  $a < 0$ ,  $c < 0$ ;
  - (iii)  $\Phi$  è semidefinita positiva se e solo se  $ac - b^2 \geq 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ;
  - (iv)  $\Phi$  è semidefinita negativa se e solo se  $ac - b^2 \geq 0$ ,  $a \leq 0$ ,  $c \leq 0$ ;
  - (v)  $\Phi$  è indefinita se e solo se  $ac - b^2 < 0$ .
4. Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $m \times m$  reale e simmetrica, siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  i suoi autovalori (non necessariamente tutti distinti). Si provi che:
- (i) risulta
- $$(-1)^m \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i) = \lambda^m + \sum_{i=1}^m a_i \lambda^{m-i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$
- ove
- $$a_1 = -\sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j,$$
- $$a_3 = -\sum_{1 \leq i < j < h \leq m} \lambda_i \lambda_j \lambda_h, \quad \dots, \quad a_m = (-1)^m \prod_{i=1}^m \lambda_i;$$
- (ii) la forma quadratica  $\Phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m$  è:
    - definita negativa se e solo se  $a_i > 0$  per  $i = 1, \dots, m$ ;
    - definita positiva se e solo se  $(-1)^i a_i > 0$  per  $i = 1, \dots, m$ ;
    - semidefinita negativa se e solo se  $a_i \geq 0$  per  $i = 1, \dots, m$ ;
    - semidefinita positiva se e solo se  $(-1)^i a_i \geq 0$  per  $i = 1, \dots, m$ ;
    - indefinita in tutti gli altri casi.
5. Sia  $P(\mathbf{v})$  un polinomio di secondo grado in  $\mathbb{R}^m$ , privo di termini di grado inferiore. Provare che  $P(\mathbf{v})$  è la forma quadratica associata alla matrice simmetrica  $\mathbf{A}$  di coefficienti  $a_{ij} = \frac{1}{2}D_i D_j P$ .
6. Determinare, al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , la natura delle seguenti forme quadratiche:
- (i)  $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2axy + y^2 + 2axz + z^2$ ,
  - (ii)  $\Phi(x, y, z, t) = -2x^2 + ay^2 - z^2 - t^2 + 2xz + 4yt + 2azt$ .

## 4.11 Massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili

Per le funzioni di più variabili la ricerca dei massimi e dei minimi relativi si basa su risultati che sono in stretta analogia con quelli validi per funzioni di una variabile (teorema 4.9.4). Si ha infatti:

**Teorema 4.11.1** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , una funzione derivabile 2 volte; sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Vengono i seguenti fatti:*

- (i) *se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ , allora  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e la forma quadratica definita dalla matrice Hessiana  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è semidefinita negativa, ma il viceversa è falso;*
- (ii) *se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ , allora  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e la forma quadratica definita dalla matrice Hessiana  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è semidefinita positiva, ma il viceversa è falso;*
- (iii) *se  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e se la forma quadratica definita da  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è definita negativa, allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di massimo relativo per  $f$ , ma il viceversa è falso;*
- (iv) *se  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e se la forma quadratica definita da  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  è definita positiva, allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo relativo per  $f$ , ma il viceversa è falso.*

Ricordiamo che la matrice Hessiana  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  non è necessariamente simmetrica, perché non stiamo supponendo che  $f$  sia di classe  $C^2$ .

Premettiamo alla dimostrazione del teorema due risultati che useremo ripetutamente anche in seguito.

**Lemma 4.11.2** *Sia  $B(\mathbf{x}_0, r)$  una palla di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $f$  una funzione derivabile 2 volte definita in  $B(\mathbf{x}_0, r)$ . Fissato  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ , la funzione  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da*

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

*è derivabile 2 volte e*

$$\begin{aligned} F'(t) &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m \quad \forall t \in [-1, 1], \\ F''(t) &= \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m \quad \forall t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

**Dimostrazione** Poiché  $f$  è derivabile 2 volte, per il teorema di derivazione delle funzioni composte (teorema 4.1.7) lo stesso vale per  $F$  e si ha

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x^i - x_0^i) = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m, \\ F''(t) &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) = \\ &= \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m. \end{aligned}$$

Ciò prova la tesi.  $\square$

**Lemma 4.11.3** *Sia  $B(\mathbf{x}_0, r)$  una palla di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $f$  una funzione derivabile 2 volte definita in  $B(\mathbf{x}_0, r)$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$  esiste  $\xi \in ]0, 1[$  tale che*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m.$$

**Dimostrazione** Consideriamo nuovamente la funzione  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

Per il “teorema di Lagrange di grado 2” (osservazione 4.8.3 (3)) esiste  $\xi \in ]0, 1[$  tale che

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\xi).$$

Sostituendo in questa espressione i valori di  $F$ ,  $F'$  e  $F''$  forniti dal lemma 4.11.2, si ha la tesi.  $\square$

**Dimostrazione del teorema 4.11.1 (i)** Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di massimo relativo per  $f$  e sia  $B(\mathbf{x}_0, r)$  una palla contenuta in  $A$ . Fissato arbitrariamente  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ , la funzione

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad t \in [-1, 1],$$

è derivabile 2 volte e ha massimo nel punto  $t = 0$ : per il teorema 4.9.1 si ha dunque  $F'(0) = 0$ ,  $F''(0) \leq 0$ . Dal lemma 4.11.2 otteniamo

$$F'(0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m = 0, \quad F''(0) = \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m \leq 0.$$

Dato che  $\mathbf{x}$  era stato scelto arbitrariamente in  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  è un arbitrario elemento di  $B(\mathbf{0}, r)$ ; scrivendo nuovamente  $\mathbf{v}$  al posto di  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , per omogeneità le due relazioni precedenti equivalgono a

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m = 0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

La prima di queste due condizioni, scelto  $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ , dice che  $f$  ha gradiente nullo nel punto  $\mathbf{x}_0$ ; la seconda condizione dice che la forma quadratica definita da  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è semidefinita negativa. Ciò prova (i).

(ii) Analoga a (i).

(iii) Sia  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e  $\langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m < 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Allora la forma quadratica  $\Phi(\mathbf{v})$  definita dalla matrice  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è una funzione strettamente negativa su  $\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ : quindi essa ha massimo negativo  $-\delta$  sul compatto  $\Gamma$ , frontiera della palla unitaria di  $\mathbb{R}^m$ : dunque

$$\langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m \leq -\delta \quad \forall \mathbf{v} \in \Gamma.$$

Consideriamo allora, fissato  $\mathbf{v} \in \Gamma$ , la funzione

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}), \quad |t| < r,$$

ove  $r > 0$  è scelto piccolo in modo che  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \in A$ . La funzione  $g$  verifica, come abbiamo visto in precedenza,

$$g(0) = f(\mathbf{x}_0), \quad g'(0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_m, \quad g''(0) = \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m.$$

Per la formula di Taylor, si ha per  $t \rightarrow 0$

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

ossia, dalle ipotesi fatte,

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{t^2}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m + o(t^2),$$

da cui

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{t^2}{2} \left( -\delta + \frac{o(t^2)}{t^2} \right).$$

Pertanto, se  $0 < |t| < r$  con  $r$  sufficientemente piccolo, otteniamo

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) < 0.$$

Dato che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  descrive, al variare di  $\mathbf{v} \in K$  e  $t \in ]-r, r[$ , l'intera palla  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , si conclude che  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$  per ogni punto  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$  diverso da  $\mathbf{x}_0$ : dunque  $\mathbf{x}_0$  è punto di massimo relativo per  $f$ .

**(iv)** Analogo a (iii).

Infine, il viceversa di (ii) è falso: infatti la funzione  $f(x, y) = x^2 - y^4$  ha gradiente nullo nell'origine e Hessiana  $\mathbf{H}(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , cosicché la forma quadratica associata è semidefinita positiva; tuttavia l'origine non è punto di minimo relativo perché  $f(0, 0) = 0$  e  $f(0, y) < 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La funzione  $-f$  rende falso il viceversa di (i). Le funzioni  $\pm(x^4 + y^4)$  rendono falsi i viceversa di (iv) e (iii), in quanto nell'origine hanno rispettivamente minimo e massimo assoluto pur avendo le rispettive matrici Hessiane nulle.  $\square$

**Osservazione 4.11.4** Un punto  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  si dice *punto stazionario* per  $f$ . Se  $\mathbf{x}_0$  è stazionario per  $f$ , il piano tangente al grafico di  $f$  in  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  è “orizzontale”, ossia ortogonale all'asse  $x^{n+1}$ . Un punto stazionario può non essere né di massimo né di minimo relativo: in tal caso esso si dice *punto di sella*. Ciò accade se la forma  $\langle \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m$  è indefinita, ma non solo, come mostra l'esempio della funzione  $f(x, y) = x^2 - y^4$  visto sopra, in cui la forma è semidefinita.

**Esempio 4.11.5** Sia  $f(x, y) = 2x^3 + x^2 + y^2 - 2y^3$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Cerchiamo gli eventuali massimi e minimi relativi di  $f$ . I punti stazionari si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 6x^2 + 2x = 0 \\ f_y(x, y) = 2y - 6y^2 = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $(x, y) = (-\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(x, y) = (0, \frac{1}{3})$  e  $(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Poiché  $f_{xx}(x, y) = 12x + 2$ ,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$ ,  $f_{yy}(x, y) = 2$ , si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}\left(-\frac{1}{3}, 0\right) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}\left(0, \frac{1}{3}\right) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

quindi le rispettive forme quadratiche sono definita positiva la prima, indefinite la seconda e la terza, definita negativa la quarta. Conclusione:  $(0, 0)$  è punto di minimo relativo,  $(-\frac{1}{3}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{3})$  sono punti di sella e  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  è punto di massimo relativo.

## Esercizi 4.11

1. Fra tutti i coni circolari circoscritti ad una sfera, determinare quello di superficie laterale minima.
2. Provare che se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile e se  $f$  ha un massimo o minimo relativo in  $\mathbf{x}_0 \in A$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è punto stazionario per  $f$ , cioè  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ; si mostri anche che il viceversa è falso.
3. (*Teorema di Rolle multidimensionale*) Sia  $K \subset \mathbb{R}^m$  un insieme compatto con parte interna non vuota e sia  $f$  continua su  $K$  e differenziabile nei punti interni di  $K$ . Provare che se  $f$  è costante su  $\partial K$  allora esiste un punto stazionario per  $f$  interno a  $K$ .  
**[Traccia:** adattare la dimostrazione del teorema di Rolle (teorema 4.3.1).]
4. Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi delle seguenti funzioni:
  - (i)  $f(x, y) = |y| \arctan(xe^y)$  in  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ ;
  - (ii)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sul chiuso delimitato dal triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(1, 3)$ .
5. Determinare il triangolo inscritto in un cerchio che ha area massima.
6. Dati tre punti  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  ai vertici di un triangolo equilatero, determinare un quarto punto  $\mathbf{P}$  in modo che la somma delle distanze di  $\mathbf{P}$  da  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sia minima.
7. Dati  $k$  punti  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  con ascisse distinte, trovare una retta  $y = ax + b$  tale che l'*errore quadratrico totale*

$$E(a, b) = \sum_{j=1}^k |ax_j + b - y_j|^2$$

sia minimo.

8. Determinare la minima distanza in  $\mathbb{R}^3$  del punto  $(1, 2, 3)$  dalla retta  $r$  di equazioni

$$x = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

9. Determinare la minima distanza fra le rette  $r_1$  e  $r_2$  di  $\mathbb{R}^3$  definite rispettivamente da

$$x - 1 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 2}{2}, \quad \frac{x}{4} = y = \frac{z}{2}.$$

10. Trovare i massimi relativi ed assoluti (se esistono) delle seguenti funzioni:

- |   |   |
|---|---|
| (i) $x^2(x - y)$ ,  | (ii) $x^4 + y^4 - 4xy$ ,                  |
| (iii) $(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ ,   | (iv) $\cos x \sinh y$ ,                   |
| (v) $\sin(x + y) - \cos(x - y)$ ,   | (vi) $x^2(y - 1)^3(z + 2)^2$ ,            |
| (vii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$ (con $x, y, z > 0$ ),   | (viii) $\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ , |
| (ix) $\cos x + \cos y + \cos(x + y)$ ,  | (x) $e^{x-3y} - e^{y+2x}$ ,               |
| (xi) $x + \frac{y^2}{4x} + \frac{x^2}{y} + \frac{2}{z}$ (con $x, y, z > 0$ ), | (xii) $xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ ,              |
| (xiii) $x^2 \ln(1 + y) + x^2y^2$ ,  | (xiv) $(x^2 + 3xy^2 + 2y^4)^2$ ,          |
| (xv) $2x^4 - x^2e^y + e^{4y}$ ,   | (xvi) $\frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 + 1}$ .  |

## 4.12 Convessità

Un'importante proprietà geometrica degli insiemi di  $\mathbb{R}^m$ , che si descrive bene analiticamente, è quella della *convessità*.

**Definizione 4.12.1** Un sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^m$  oppure di  $\mathbb{C}^m$  si dice convesso se per ogni coppia di punti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$  si ha  $(1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v} \in K$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . In altre parole:  $K$  è convesso se e solo se, dati due punti di  $K$ , il segmento che li unisce è interamente contenuto in  $K$ .

Ad esempio, sono convesse le palle  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , sia aperte che chiuse. Se  $K \subseteq \mathbb{R}$  è facile vedere che  $K$  è convesso se e solo se  $K$  è un intervallo (limitato o no, o eventualmente ridotto a un solo punto).

La nozione di convessità si applica anche alle funzioni  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $K$  è un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ .

**Definizione 4.12.2** Sia  $K$  un convesso di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ . Una funzione  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  si dice convessa se risulta

$$f((1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \leq (1-t)f(\mathbf{u}) + tf(\mathbf{v}) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K.$$

La funzione  $f$  si dice concava se  $-f$  è convessa; dunque  $f$  è concava in  $K$  se e solo se

$$f((1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \geq (1-t)f(\mathbf{u}) + tf(\mathbf{v}) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K.$$

L'interpretazione geometrica è la seguente: per ogni  $t \in [0, 1]$ , il punto  $(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{m+1}$  di coordinate  $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ ,  $y = (1-t)f(\mathbf{u}) + tf(\mathbf{v})$  appartiene al segmento di estremi  $(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ ,  $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$ ; la condizione di convessità dice che il valore  $f(\mathbf{x})$  non supera  $y$ . Quindi il grafico della restrizione di  $f$  al segmento di estremi  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sta al di sotto della retta che congiunge gli estremi  $(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$  e  $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$  del grafico.

**Osservazioni 4.12.3 (1)** Si vede facilmente che  $f$  è convessa se e solo se il suo *sopragrafico*

$$E = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in K, y \geq f(\mathbf{x})\}$$

è un insieme convesso. Infatti se  $f$  è convessa e  $(\mathbf{u}, \eta), (\mathbf{v}, \zeta) \in E$ , allora per ogni  $t \in [0, 1]$

$$f((1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \leq (1-t)f(\mathbf{u}) + tf(\mathbf{v}) \leq (1-t)\eta + t\zeta,$$

cioè il punto  $(1-t)(\mathbf{u}, \eta) + t(\mathbf{v}, \zeta)$  appartiene ad  $E$ ; dunque  $E$  è convesso. Viceversa, se  $E$  è convesso allora, scelti in particolare due punti del tipo  $(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$  e  $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$ , per ogni  $t \in [0, 1]$  il punto  $(1-t)(\mathbf{u}, f(\mathbf{u})) + t(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$  deve stare in  $E$ : quindi

$$(1-t)f(\mathbf{u}) + tf(\mathbf{v}) \geq f((1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}),$$

cioè  $f$  è convessa.

**(2)** Una funzione convessa su  $K$  è necessariamente continua nei punti interni a  $K$  (se esistono). Dimostriamo questo fatto per  $m = 1$ , rinviano all'esercizio 4.12.9 per il caso generale.

Sia dunque  $K = [a, b]$  e sia  $x_0 \in ]a, b[$ : se ad esempio  $x > x_0$ , esistono unici  $t, s \in ]0, 1[$  tali che

$$x = (1-t)x_0 + tb, \quad x_0 = (1-s)x + sa;$$

infatti risulta

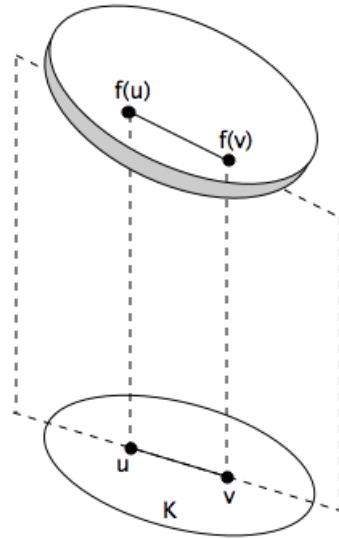
$$t = \frac{x - x_0}{b - x_0}, \quad s = \frac{x_0 - x}{a - x}.$$

Dalla definizione di convessità si ha

$$f(x) \leq (1-t)f(x_0) + tf(b), \quad f(x_0) \leq (1-s)f(x) + sf(a),$$

o, equivalentemente,

$$f(x) - f(x_0) \leq t(f(b) - f(x_0)), \quad f(x_0) - f(x) \leq \frac{s}{1-s}(f(a) - f(x_0)).$$



D'altronde, quando  $x \rightarrow x_0^+$  si ha anche  $t \rightarrow 0^+$  e  $s \rightarrow 0^+$ , e quindi  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ . Il discorso è del tutto analogo se  $x < x_0$ . Ciò prova la continuità di  $f$ .

Se la funzione  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ha un po' più di regolarità, si possono dare altre caratterizzazioni della convessità.

**Teorema 4.12.4** *Sia  $A$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^m$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Allora  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A.$$

In altre parole,  $f$  è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra tutti i suoi piani ( $m$ -dimensionali) tangenti.

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che valga la diseguaglianza sopra scritta. Siano  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  due punti distinti di  $A$  e sia  $\mathbf{x}_0 = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2$  con  $t \in [0, 1]$ . Posto  $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ , risulta

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{x}_0 - t\mathbf{x}_1}{1-t} = \mathbf{x}_0 - \frac{t}{1-t} \mathbf{h}.$$

Dalle relazioni, vere per ipotesi,

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m,$$

$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0) + \left\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \left( -\frac{t}{1-t} \mathbf{h} \right) \right\rangle_m,$$

segue, moltiplicando la prima per  $t$  e sommandola alla seconda moltiplicata per  $1-t$ :

$$tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0),$$

che è la definizione di convessità.

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $f$  convessa. Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A$ . Posto  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , per l'ipotesi di convessità si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) &= f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}) = \\ &= f(\mathbf{x}_0) + t(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)) \quad \forall t \in [0, 1], \end{aligned}$$

da cui, sempre per  $t \in [0, 1]$ ,

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - t \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m \leq t(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m).$$

Dividendo per  $t \in ]0, 1]$  segue

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - t \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m}{t} \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m,$$

e infine dalla differenziabilità, facendo tendere  $t$  a 0 si ricava

$$0 \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle_m,$$

che è la tesi.  $\square$

**Corollario 4.12.5** *Sia  $A$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Allora  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se il suo gradiente  $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è monotono, nel senso che*

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_m \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A.$$

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Sia  $f$  convessa in  $A$ : fissati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , per il teorema 4.12.4 si ha

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle_m, \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_m;$$

sommmando queste due diseguaglianze e semplificando si ottiene

$$0 \geq \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle_m + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_m,$$

da cui la monotonia di  $\nabla f$ .

( $\impliedby$ ) Viceversa, sia  $\nabla f$  monotono. Fissati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , poniamo

$$\phi(\lambda) = f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Chiaramente  $\phi$  è derivabile e

$$\phi'(\lambda) = \langle \nabla f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle_m \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Scriviamo per comodità

$$\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

ed osserviamo che  $\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda = (\mu - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ . Dalla monotonia di  $\nabla f$  segue allora che se  $\lambda < \mu$  si ha

$$\begin{aligned} \phi'(\mu) - \phi'(\lambda) &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_\mu) - \nabla f(\mathbf{x}_\lambda), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle_m = \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \langle \nabla f(\mathbf{x}_\mu) - \nabla f(\mathbf{x}_\lambda), \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda \rangle_m \geq 0. \end{aligned}$$

In altre parole,  $\phi' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è crescente: ne segue che  $\phi$  è convessa in  $[0, 1]$ . Pertanto

$$f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \phi(\lambda) \leq (1 - \lambda)\phi(0) + \lambda\phi(1) = (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}),$$

cioè  $f$  è convessa su  $A$ .  $\square$

**Osservazione 4.12.6** Quando  $m = 1$ , dal teorema precedente segue che se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione derivabile, allora  $f$  è convessa in  $[a, b]$  se e solo se  $f'$  è crescente in  $[a, b]$ .

**Teorema 4.12.7** *Sia  $A$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile 2 volte. Allora  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se, detta  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$  la matrice Hessiana di  $f$ , la forma quadratica associata  $\Phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_m$  è semidefinita positiva per ogni  $\mathbf{x} \in A$ .*

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $\Phi$  sia semidefinita positiva per ogni  $\mathbf{x} \in A$ . Poiché  $f$  è derivabile 2 volte, dal lemma 4.11.3 si ricava

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m,$$

ove  $\xi$  è un opportuno punto fra 0 e 1. Per ipotesi, il secondo membro è non negativo per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A$ , e dunque

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_m \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in K.$$

Dal teorema 4.12.4 segue che  $f$  è convessa.

( $\Rightarrow$ ) Viceversa, sia  $f$  convessa in  $A$ . Poiché in particolare  $f$  è differenziabile, dal corollario 4.12.5 segue che  $\nabla f$  è monotono, e dalla dimostrazione di tale corollario segue che, fissati  $\mathbf{x} \in A$  e  $\mathbf{v} \in B(\mathbf{x}, \delta)$ , con  $\delta > 0$  tale che  $\mathbf{x} + \mathbf{v} \in A$ , la funzione

$$\phi(\lambda) = f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{v})) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}), \quad \lambda \in [0, 1],$$

ha derivata prima crescente e pertanto è convessa. Poiché  $f$  è derivabile 2 volte, anche  $\phi$  ha la derivata seconda e dunque, essendo  $\phi'$  crescente, per la proposizione 4.9.1(i) deve essere  $\phi'' \geq 0$  in  $[0, 1]$ . Dato che

$$\phi'(\lambda) = \langle \nabla f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle_m = \sum_{i=1}^m D_i f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}) v^i,$$

si ottiene per ogni  $\lambda \in [0, 1]$

$$\phi''(\lambda) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m D_j D_i f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}) v^j v^i = \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \rangle_m, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Dunque, scelto  $\lambda = 0$ ,

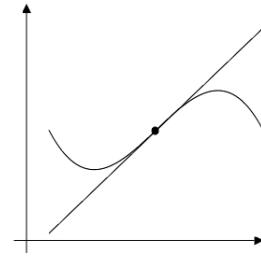
$$\langle \mathbf{H}_f(\mathbf{x})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \rangle_m = \phi''(0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in B(\mathbf{x}, \delta),$$

e per omogeneità si ricava

$$\langle \mathbf{H}_f(\mathbf{x})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \rangle_m = \phi''(0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m. \quad \square$$

Se  $m = 1$  e  $f$  è una funzione di classe  $C^2$ , definita su  $[a, b]$ , essa può cambiare la concavità (cioè passare da concava a convessa o viceversa) soltanto nei punti in cui  $f''$  è nulla. I punti in cui  $f$  cambia la concavità, nei quali quindi il grafico di  $f$  attraversa la retta tangente, si dicono *punti di flesso*.

Dunque, se  $f$  è di classe  $C^2$  e  $x_0$  è punto di flesso, allora  $f''(x_0) = 0$ . Si noti che il viceversa è falso: la funzione  $f(x) = x^4$  ha derivata seconda nulla nel punto 0, eppure  $f$  è convessa in  $\mathbb{R}$  e quindi 0 non è punto di flesso.



## Applicazione all'approssimazione degli zeri di una funzione

Se una funzione continua, definita in  $[a, b]$ , verifica  $f(a)f(b) < 0$ , per il teorema 3.4.3 esiste  $\xi \in ]a, b[$  tale che  $f(\xi) = 0$ . Se poi  $f$  è iniettiva, allora tale punto  $\xi$  è unico, ma non è affatto semplice, in generale, determinarlo. Se ne può ottenere però, sotto opportune ipotesi, un'eccellente approssimazione, anche senza l'uso dei computer, con metodi classici molto elementari che andiamo a descrivere.

**Proposizione 4.12.8 (Metodo delle tangenti)** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa di classe  $C^1$ , con  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$  e tale che  $f(a)f(b) < 0$ . Sia  $\xi$  l'unico punto di  $]a, b[$  tale che  $f(\xi) = 0$ . Definiamo*

$$\begin{cases} x_0 = \begin{cases} a & \text{se } f \text{ è decrescente} \\ b & \text{se } f \text{ è crescente} \end{cases} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Allora:

- (i) la successione  $\{x_n\}$  è monotona (crescente se  $x_0 = a$ , decrescente se  $x_0 = b$ ) e converge a  $\xi$ ;
- (ii) se inoltre  $f$  è di classe  $C^2$ , posto

$$M = \max_{[a,b]} f'', \quad m = \min_{[a,b]} |f'|$$

e fissato  $\delta \in ]0, \frac{2m}{M}]$ , si ha

$$|x_n - \xi| \leq \min \left\{ \delta, \frac{2m}{M} \left[ \frac{M}{2m} |x_0 - \xi| \right]^{2^n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dimostrazione** (i) Sia per esempio  $f$  crescente (se  $f$  è decrescente la dimostrazione è del tutto simile). Proviamo anzitutto che  $x_n \geq \xi$ : se  $n = 0$ , allora  $x_0 = b > \xi$ ; se poi  $x_n \geq \xi$ , allora per convessità (teorema 4.12.4) e per definizione di  $x_{n+1}$  si ha

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n) - f(x_n) = 0,$$

e dunque  $x_{n+1} \geq \xi$ .

Proviamo adesso che  $x_{n+1} \leq x_n$ : essendo  $f'(x_n) > 0$  e, come abbiamo visto,  $f(x_n) \geq 0$ , otteniamo per definizione  $x_{n+1} \leq x_n$ .

Essendo monotona e limitata, la successione  $\{x_n\}$  converge a un punto  $\bar{x} \geq \xi$ . Ma poiché  $f$  e  $f'$  sono continue,

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right] = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})},$$

ne segue  $f(\bar{x}) = 0$  e pertanto  $\bar{x} = \xi$ .

(ii) Dal “teorema di Lagrange di grado 2” (osservazione 4.8.3 (3)) segue

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &= \left| x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = \frac{|f'(x_n)(x_n - \xi) - f(x_n) + f(\xi)|}{|f'(x_n)|} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{f''(\eta_n)}{|f'(x_n)|} |x_n - \xi|^2 \leq \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^2, \end{aligned}$$

ove  $\eta_n \in ]\xi, x_n[$ . Se ne deduce, se  $|x_n - \xi| < \delta \leq \frac{2m}{M}$ ,

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^2 \leq \frac{M}{2m} \delta^2 \leq \frac{M}{2m} \delta \frac{2m}{M} = \delta,$$

e quindi, per induzione,

$$|x_n - \xi| \leq \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, supposto che

$$|x_n - \xi| \leq \frac{2m}{M} \left[ \frac{M}{2m} |x_0 - \xi| \right]^{2^n},$$

si ha

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^2 \leq \frac{M}{2m} \left[ \frac{M}{2m} |x_0 - \xi|^{2^n} \right]^2 = \frac{2m}{M} \left[ \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^{2^{n+1}} \right],$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

**Proposizione 4.12.9 (Metodo delle secanti)** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa e continua, strettamente monotona e tale che  $f(a)f(b) < 0$ . Sia  $\xi$  l’unico punto di  $]a, b[$  tale che  $f(\xi) = 0$ . Definiamo*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Allora:

- (i) la successione  $\{x_n\}$  è monotona (crescente se  $x_0 = a$ , decrescente se  $x_0 = b$ ) e converge a  $\xi$ ;
- (ii) se inoltre  $f$  è derivabile con  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , posto

$$\gamma = \begin{cases} 1 - \frac{f'(a)}{f'(b)} & \text{se } f \text{ è crescente} \\ 1 - \frac{f'(b)}{f'(a)} & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

si ha  $\gamma \in ]0, 1[$  e

$$|x_n - \xi| \leq \gamma^n |x_0 - \xi| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dimostrazione (i)** Supponiamo per esempio che  $f$  sia crescente (l'altro caso è analogo). Proviamo che  $x_n \leq \xi$ . Se  $n = 0$  ciò è evidente. Se la tesi vale per  $n$  allora, essendo  $f(x_n) < 0$  e  $\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n} > 0$ , si ricava

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \geq x_n;$$

quindi, scrivendo

$$x_{n+1} = \frac{f(b)}{f(b) - f(x_n)} x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} b = \frac{f(b)}{f(b) + |f(x_n)|} x_n + \frac{|f(x_n)|}{f(b) + |f(x_n)|} b$$

si ottiene per definizione di convessità

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq \frac{f(b)}{f(b) + |f(x_n)|} f(x_n) + \frac{|f(x_n)|}{f(b) + |f(x_n)|} f(b) = \\ &= \frac{f(b)}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} f(b) = 0, \end{aligned}$$

e quindi  $x_{n+1} \leq \xi$ .

(ii) Sappiamo già che  $x_{n+1} \geq x_n$ . Quindi

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \leq \xi.$$

D'altronde, essendo  $f$  continua,

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x_n - f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \right] = \bar{x} - f(\bar{x}) \frac{b - \bar{x}}{f(b) - f(\bar{x})},$$

il che implica  $f(\bar{x}) = 0$ , ossia  $\bar{x} = \xi$ .

Infine, supponendo  $f$  derivabile con  $f' \neq 0$ , per convessità (teorema 4.12.4) si ha  $0 = f(\xi) \geq f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n)$ , da cui

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi - x_{n+1} \leq \xi - x_n + f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \leq \\ &\leq (\xi - x_n) \left[ 1 - f'(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \right], \end{aligned}$$

e per la crescenza di  $f'$  (osservazione 4.12.6) e dei rapporti incrementali (esercizio 4.12.2)

$$0 \leq \xi - x_{n+1} \leq (\xi - x_n) \left[ 1 - \frac{f'(a)}{f'(b)} \right] = \gamma(\xi - x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui la tesi.  $\square$

## Esercizi 4.12

1. Si provi che esistono funzioni convesse in  $[a, b]$  discontinue nei punti estremi.

2. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si provi che:

(i)  $f$  è convessa se e solo se per ogni  $u, v, w \in [a, b]$  con  $u < v < w$  risulta

$$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-u}{w-u} f(w);$$

(ii)  $f$  è convessa se e solo se per ogni  $u, v, w \in [a, b]$  con  $u < v < w$  risulta

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v};$$

(iii)  $f$  è convessa se e solo se per ogni  $x \in [a, b]$  il rapporto incrementale

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \in [a-x, 0[ \cup ]0, b-x],$$

è una funzione crescente.

3. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa, si provi che per ogni  $x \in ]a, b[$  esistono la *derivata destra* e la *derivata sinistra*

$$D^-f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D^+f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

si verifichi che  $D^-f(x) \leq D^+f(x)$  e si mostri con un esempio che tali numeri possono essere diversi fra loro.

4. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si provi che  $f$  è convessa se e solo se

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) \quad \forall u, v \in [a, b];$$

si mostri poi che l'enunciato diventa falso senza l'ipotesi di continuità.

**Traccia:** per provare il primo enunciato (una parte del quale è ovvia) si deduca che vale la definizione di convessità per ogni  $t$  della forma  $k \cdot 2^{-h}$  con  $h \in \mathbb{N}$  e  $k = 0, 1, \dots, 2^h$ ; si passi al caso generale  $t \in [0, 1]$  usando la continuità. Per il secondo enunciato si consideri la funzione  $f(x)$  che vale 0 se  $x = k \cdot 2^{-h}$  e vale 1 negli altri punti di  $\mathbb{R}$ .]

5. Siano  $p, q > 1$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si provi che

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q} \quad \forall x, y \geq 0.$$

**Traccia:** per  $x, y > 0$  si scriva  $xy = e^{\log xy}$  e si sfrutti la convessità della funzione esponenziale.]

6. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convessa e derivabile. Se  $\xi \in ]a, b[$  è un punto tale che  $f'(\xi) = 0$ , si provi che  $\xi$  è un punto di minimo assoluto per  $f$  in  $[a, b]$ . Il punto  $\xi$  è necessariamente unico?
7. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convessa e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Si provi che  $f$  ha minimo su  $\mathbb{R}$ . Il punto di minimo è necessariamente unico? Che succede se  $f$  è continua ma non convessa?

8. Sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  convessa, ove  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  è un insieme convesso. Provare che per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'insieme di sottolivello  $K_c = \{\mathbf{x} \in K : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ , se non vuoto, è convesso.
9. Sia  $f$  una funzione convessa, definita su un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  convesso.
- (i) Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno a  $K$  e sia  $C$  un cubo  $m$ -dimensionale di centro  $\mathbf{x}_0$  e lato  $2\delta$  contenuto in  $K$ ; sia poi  $V$  l'insieme dei  $2^m$  vertici di  $C$ . Posto  $M = \max_{\mathbf{v} \in V} f(\mathbf{v})$ , si provi che  $f(\mathbf{x}) \leq M$  per ogni  $\mathbf{x} \in C$ .
  - (ii) Se  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ , siano  $\mathbf{x}_0 \pm \mathbf{u}$  i punti a distanza  $\delta$  da  $\mathbf{x}_0$  sulla retta per  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ : si provi che, posto  $t = \delta^{-1}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m$ , risulta

$$f(\mathbf{x}) \leq tM + (1-t)f(\mathbf{x}_0), \quad f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{1+t} (f(\mathbf{x}) + tM).$$

(iii) Se ne deduca che  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .

10. Sia  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa di classe  $C^1$ , con  $f'(0) > 0$ . Si provi che  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , e che esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}.$$

11. (*Disuguaglianza di Jensen*) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Si provi che per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  e per ogni  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  risulta

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

**Traccia:** si provi dapprima la disuguaglianza per  $n = 2^k$ ; nel caso generale si ponga  $m = 2^k - n$ : per quanto già dimostrato si ha

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + m\bar{x}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + mf(\bar{x})}{2^k}$$

per ogni  $x_1, \dots, x_n, \bar{x} \in \mathbb{R}$ . Si scelga  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .]

12. Sia  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, strettamente positiva e decrescente. Si provi che esiste una funzione  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  convessa e decrescente, tale che  $0 < g(x) < f(x)$  per ogni  $x > 0$ .

**Traccia:** Detto  $G$  il sopragrafico di  $f$ , si consideri l'*inviluppo convesso*  $\text{co}(G)$  di  $G$ , ossia l'intersezione di tutti gli insiemi convessi  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  contenenti  $G$ , si definisca  $g(x) = \inf\{y > 0 : (x, y) \in \text{co}(G)\}$  e si provi che  $g$  ha le proprietà richieste.]

13. Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni, considerando l'insieme di definizione  $A$ , i limiti alla frontiera di  $A$ , la crescenza, la convessità, i punti di massimo e di minimo relativo, i punti di flesso, gli asintoti, il valore di  $f'$  nei punti limite e nei punti di flesso:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} |x^3| - 1, & \text{(ii)} \frac{|x+3|^3}{x^2}, & \text{(iii)} \frac{2|x|-x^2+x}{x+1}, \\
 \text{(iv)} e^{-x}\sqrt{x-1}, & \text{(v)} \sqrt{x^2-\frac{8}{x}}, & \text{(vi)} \left(5+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3}, \\
 \text{(vii)} \sqrt{|x^2-10x|}, & \text{(viii)} \frac{\ln x}{1+\ln x}, & \text{(ix)} x^{2/3}(x-1)^{1/3}, \\
 \\ 
 \text{(x)} \ln \frac{x^2}{|x^2+2|}, & \text{(xi)} x e^{\frac{1}{\ln x}}, & \text{(xii)} \ln x - \ln^2 x, \\
 \text{(xiii)} e^{-x(\ln|x|-1)}, & \text{(xiv)} e^{\frac{x}{x-1}}, & \text{(xv)} \max\{x^2, 5x-4\}, \\
 \text{(xvi)} \arccos \frac{1}{1-x}, & \text{(xvii)} x^{\frac{1}{x}-1}, & \text{(xviii)} x + 4 \arctan \sqrt{|x-1|}, \\
 \text{(xix)} \frac{\sqrt{|x|}-1}{x^2}, & \text{(xx)} \sin \frac{\pi}{x^2+1}, & \text{(xxi)} \ln(x+\sin x), \\
 \text{(xxii)} \frac{|1-\ln x|}{x}, & \text{(xxiii)} e^{-1/x}, & \text{(xxiv)} x + \arcsin \frac{2x}{x^2+1}.
 \end{array}$$

14. Posto  $f(x) = e^x - x$ , si approssimi lo zero di  $f$  con un errore di  $10^{-3}$  utilizzando in un opportuno intervallo  $[a, b]$  il metodo delle tangenti o quello delle secanti.

# Capitolo 5

## Calcolo integrale

### 5.1 L'integrale

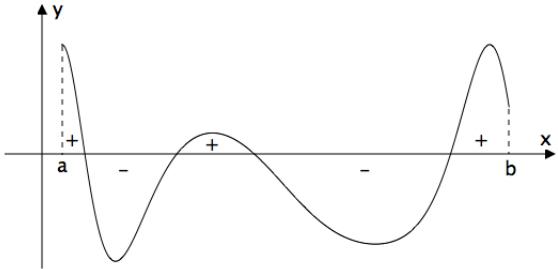
Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Vogliamo determinare l'*area* “con segno” della regione del piano  $xy$  delimitata dal grafico di  $f$  e dall’asse  $x$ , considerando cioè positiva l’area della parte sopra l’asse  $x$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \geq 0, y \in [0, f(x)]\},$$

e negativa l’area della parte sotto l’asse  $x$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] : f(x) \leq 0, y \in [f(x), 0]\}.$$

Anzitutto, però, occorrerà dare un senso a ciò che si vuole calcolare: riusciremo a *definire* l’area delle regioni sopra descritte per mezzo di un procedimento di approssimazione della regione che ci interessa mediante unioni finite di rettangoli adiacenti (per i quali l’area è quella elementarmente definita: base per altezza).



Il primo passo da compiere a questo scopo è quello di introdurre la nozione di ”suddivisione” dell’intervallo  $[a, b]$ .

**Definizione 5.1.1** Una suddivisione, o partizione, dell’intervallo  $[a, b]$  è un insieme finito di punti  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  tale che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

I punti  $x_i \in \sigma$  si dicono nodi della suddivisione  $\sigma$ .

Gli intervalli  $[x_{i-1}, x_i]$ , delimitati da due nodi consecutivi di una fissata suddivisione di  $[a, b]$ , saranno le basi dei rettangoli che useremo per le nostre approssimazioni.

Date due suddivisioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  di  $[a, b]$ , diciamo che  $\sigma''$  è più fine di  $\sigma'$  se si ha  $\sigma' \subset \sigma''$ ,

cioè se  $\sigma''$  si ottiene da  $\sigma'$  aggiungendo altri nodi. Naturalmente, in generale, data una coppia di suddivisioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$ , nessuna delle due sarà più fine dell'altra: pensiamo per esempio a  $\sigma' = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$  e  $\sigma'' = \{a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b\}$ . Però, fissate  $\sigma'$  e  $\sigma''$ , è sempre possibile trovare una terza suddivisione  $\sigma$  che è più fine di entrambe: basta prendere  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ .

**Esempio 5.1.2** Le più semplici suddivisioni di  $[a, b]$  sono quelle equispaziate: per  $N \in \mathbb{N}^+$  fissato, si ha

$$\sigma_N = \{x_i, 0 \leq i \leq N\}, \quad \text{ove } x_i = a + \frac{i}{N}(b - a);$$

in particolare, se  $N = 1$  si ha la suddivisione banale  $\sigma_1 = \{a, b\}$ .

Introduciamo adesso le nostre “aree approssimate” per eccesso e per difetto.

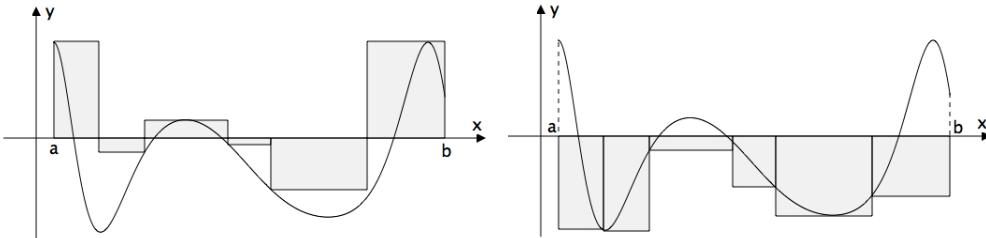
**Definizione 5.1.3** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. La somma superiore di  $f$  relativa alla suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  è il numero

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^N M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \text{ove } M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

La somma inferiore di  $f$  relativa alla suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  è il numero

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^N m_i(x_i - x_{i-1}), \quad \text{ove } m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Osserviamo che  $S(f, \sigma)$  e  $s(f, \sigma)$  sono numeri reali ben definiti grazie al fatto che stiamo supponendo  $f$  limitata: altrimenti qualcuno fra i numeri  $M_i$  o  $m_i$  potrebbe essere infinito.



Ci aspettiamo che, infatti sempre di più i nodi, le somme superiori ed inferiori forniscano una approssimazione sempre più accurata dell’area della regione che ci interessa. E in effetti si ha:

**Proposizione 5.1.4** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $\sigma'$  e  $\sigma''$  sono suddivisioni di  $[a, b]$ , e  $\sigma$  è una terza suddivisione più fine di entrambe, allora

$$s(f, \sigma') \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma'').$$

**Dimostrazione** La diseguaglianza centrale è evidente, per definizione di somma superiore e inferiore. Proviamo la prima (la terza è analoga). Il passaggio da  $\sigma'$  a  $\sigma$  consiste nell'aggiungere un numero finito di nuovi nodi, il che si può vedere come una sequenza finita di aggiunte di un singolo nodo. Dunque basterà provare che se  $\sigma$  si ottiene da  $\sigma' = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  aggiungendo il nodo  $\bar{x} \in ]x_{k-1}, x_k[$ , allora  $s(f, \sigma') \leq s(f, \sigma)$ . La quantità a secondo membro si ottiene da quella al primo membro rimpiazzandone il  $k$ -simo addendo  $m_k(x_k - x_{k-1})$ , ove  $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$ , con i due addendi

$$\inf_{[x_{k-1}, \bar{x}]} f \cdot (\bar{x} - x_{k-1}) + \inf_{[\bar{x}, x_k]} f \cdot (x_k - \bar{x});$$

d'altra parte, per definizione di  $m_k$  si ha

$$m_k \leq \inf_{[x_{k-1}, \bar{x}]} f, \quad m_k \leq \inf_{[\bar{x}, x_k]} f,$$

e quindi

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - \bar{x} + \bar{x} - x_{k-1}) \leq \inf_{[x_{k-1}, \bar{x}]} f \cdot (\bar{x} - x_{k-1}) + \inf_{[\bar{x}, x_k]} f \cdot (x_k - \bar{x}),$$

da cui  $s(f, \sigma') \leq s(f, \sigma)$ .  $\square$

Il fatto che le approssimazioni migliorino sempre quando si infittiscono i nodi ci porta a definire le “approssimazioni ottimali” per eccesso e per difetto dell’area che ci interessa.

**Definizione 5.1.5** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. L’integrale superiore di  $f$  su  $[a, b]$  è il numero

$$I^+(f) = \inf_{\sigma} S(f, \sigma).$$

L’integrale inferiore di  $f$  su  $[a, b]$  è il numero

$$I^-(f) = \sup_{\sigma} s(f, \sigma).$$

**Osservazione 5.1.6** Gli integrali superiore ed inferiore di  $f$  sono numeri reali ben definiti, e si ha

$$\inf_{[a, b]} f \cdot (b - a) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \sup_{[a, b]} f \cdot (b - a).$$

Infatti, indicata con  $\sigma_1$  la suddivisione banale  $\{a, b\}$ , per la proposizione precedente si ha, per qualunque coppia di suddivisioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$ ,

$$\inf_{[a, b]} f \cdot (b - a) = s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma'') \leq S(f, \sigma_1) = \sup_{[a, b]} f \cdot (b - a),$$

da cui la tesi passando all’estremo superiore rispetto a  $\sigma'$  e all’estremo inferiore rispetto a  $\sigma''$ .

Arrivati a questo punto, sarebbe bello che le “approssimazioni ottimali” per eccesso e per difetto coincidessero: questo ci permetterebbe di definire in modo non ambiguo l’area (con segno) della regione

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \geq 0, y \in [0, f(x)]\} \cup \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \leq 0, y \in [f(x), 0]\}. \end{aligned}$$

Sfortunatamente, mentre in generale si ha  $I^-(f) \leq I^+(f)$ , può succedere che sia  $I^-(f) < I^+(f)$ , come mostra il seguente

**Esempio 5.1.7** Fissato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , si consideri la *funzione di Dirichlet*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Questa funzione, il cui grafico non è disegnabile, è limitata in  $[a, b]$  e per ogni suddivisione  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$  si ha, in virtù della densità in  $\mathbb{R}$  di  $\mathbb{Q}$  e di  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} \varphi = 0, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} \varphi = 1, \quad k = 1, \dots, N;$$

quindi per ogni suddivisione  $\sigma$  si ha  $s(\varphi, \sigma) = 0$ ,  $S(\varphi, \sigma) = b - a$  e pertanto

$$I^-(\varphi) = 0, \quad I^+(\varphi) = b - a.$$

La nostra procedura di approssimazione non è quindi applicabile a tutte le funzioni limitate, ma soltanto a quelle che verificano la proprietà descritta nella seguente fondamentale definizione.

**Definizione 5.1.8** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Diciamo che  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ , e scrivereemo  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , se risulta*

$$I^-(f) = I^+(f).$$

In tal caso, l’integrale di  $f$  su  $[a, b]$  è il numero reale  $I^-(f) = I^+(f)$ , che si indicherà con il simbolo  $\int_a^b f(x) dx$ :

$$\int_a^b f(x) dx = I^-(f) = I^+(f).$$

Il senso di questo simbolo è quello di ricordarci che si fa il limite di somme finite (da cui il segno “∫”, che è una “S” stilizzata) di aree di rettangolini, la cui base è un intervallo dell’asse  $x$  centrato nel punto  $x$  di ampiezza “piccolissima” pari a  $dx$ , e la cui altezza è un intervallo dell’asse  $y$  di lunghezza pari a  $|f(x)|$ , presa col segno di  $f(x)$ .

Come si è visto, esistono funzioni limitate non integrabili: sorge quindi l’esigenza di determinare esempi, e possibilmente intere classi, di funzioni integrabili; analizzeremo questo problema nel paragrafo 5.3.

Prima di tutto conviene fornire un criterio di integrabilità di grande utilità, che segue direttamente dalla definizione.

**Proposizione 5.1.9** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. La  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  tale che*

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$$

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$ , per definizione di estremo superiore ed estremo inferiore esistono due suddivisioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  di  $[a, b]$  tali che

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \sigma') \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma'') < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2};$$

scelta allora una suddivisione  $\sigma$  più fine di  $\sigma'$  e  $\sigma''$ , si ha per la proposizione 5.1.4

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \sigma) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

e ciò implica  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$ .

( $\impliedby$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$  e scelta una suddivisione  $\sigma$  come nell'ipotesi, si ha

$$0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon,$$

da cui  $I^+(f) = I^-(f)$  per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .  $\square$

Si noti che il criterio precedente permette di stabilire se una funzione è integrabile, ma non dà informazioni su quanto valga il suo integrale: il problema del *calcolo esplicito* degli integrali verrà affrontato più avanti (paragrafo 5.5).

Dimostriamo adesso due importanti caratterizzazioni dell'integrabilità che hanno interesse sia teorico che pratico. Premettiamo due definizioni:

**Definizione 5.1.10** *Data una suddivisione  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$ , l'ampiezza di  $\sigma$  è il numero*

$$|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1}).$$

È chiaro che se  $\sigma'$  è una suddivisione più fine di  $\sigma$ , allora risulta  $|\sigma'| \leq |\sigma|$ ; il viceversa naturalmente non è vero (se  $\sigma_3$  e  $\sigma_4$  sono suddivisioni equispaziate con 3 e 4 nodi rispettivamente, allora  $|\sigma_4| < |\sigma_3|$  ma nessuna delle due è più fine dell'altra).

**Definizione 5.1.11** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e sia  $\sigma$  una suddivisione di  $[a, b]$  con nodi  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ . Fissato a piacere un punto  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , la quantità*

$$\sum_{i=1}^N f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

è detta somma di Riemann di  $f$ , relativa alla suddivisione  $\sigma$ .

Ovviamente, per ogni  $f$  limitata, per ogni suddivisione  $\sigma$  e per ogni somma di Riemann si ha

$$s(f, \sigma) \leq \sum_{i=1}^N f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, \sigma).$$

**Teorema 5.1.12** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si ha  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se esiste un numero reale  $A$  dotato della proprietà seguente: per ogni  $\varepsilon > 0$  si può trovare un  $\delta > 0$  tale che

$$|\sigma| < \delta \implies |S(f, \sigma) - A| < \varepsilon, \quad |s(f, \sigma) - A| < \varepsilon.$$

In tal caso, si ha  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$ , dall'ipotesi segue, per ogni suddivisione  $\sigma$  con  $|\sigma| < \delta$ ,

$$0 \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq |S(f, \sigma) - A| + |A - s(f, \sigma)| < 2\varepsilon,$$

e quindi  $f$  è integrabile in virtù della proposizione 5.1.9; inoltre, scelta una suddivisione  $\sigma$  con  $|\sigma| < \delta$ , avremo

$$\left| \int_a^b f(x) dx - A \right| = |I^+(f) - A| \leq |I^+(f) - S(f, \sigma)| + |S(f, \sigma) - A| < 2\varepsilon,$$

da cui  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

( $\Rightarrow$ ) Poiché  $f$  è integrabile, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \sigma_0) \leq S(f, \sigma_0) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo  $A = \int_a^b f(x) dx$ , sia  $K = \sup_{[a, b]} |f|$  e fissiamo  $\delta = \frac{\varepsilon}{4NK}$ . Consideriamo una qualunque suddivisione  $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  di  $[a, b]$  tale che  $|\sigma| < \delta$ . Supponiamo (per semplicità) che nessun nodo  $x_j$  di  $\sigma_0$  coincida con qualcuno dei nodi  $t_i$  di  $\sigma$ . Consideriamo gli insiemi

$$E = \{i \in \{1, \dots, m\} : ]t_{i-1}, t_i[ \text{ non contiene alcun nodo } x_j\},$$

$$F = \{i \in \{1, \dots, m\} : ]t_{i-1}, t_i[ \text{ contiene almeno un nodo } x_j\},$$

e osserviamo che  $F$  ha al più  $N$  elementi. Consideriamo poi la suddivisione  $\sigma' = \sigma \cup \sigma_0$ , i cui nodi sono i  $t_i$  e gli  $x_j$ : tali nodi delimitano intervalli del tipo  $[t_{i-1}, t_i]$  (quando l'indice  $i$  appartiene ad  $E$ ), oppure dei tipi  $[t_{i-1}, x_j]$ ,  $[x_j, t_i]$  ed eventualmente  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ , eccetera (quando l'indice  $i$  appartiene a  $F$ ). Denotiamo con  $I_{ij}$  gli intervalli corrispondenti ad indici  $i \in F$ , indicando con  $\Delta_{ij}$  la loro ampiezza (per ogni  $i \in F$  ce ne sarà un certo numero finito  $k_i$ ); poniamo inoltre

$$M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f, \quad M_{ij} = \sup_{I_{ij}} f.$$

Si ha allora

$$S(f, \sigma') = \sum_{i \in E} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in F} \sum_{j=1}^{k_i} M_{ij} \Delta_{ij}.$$

D'altra parte, gli intervalli  $I_{ij}$  con  $i \in F$  fissato e  $j = 1, \dots, k_i$  ricoprono  $[t_{i-1}, t_i]$ : quindi

$$\left| \sum_{i \in F} \sum_{j=1}^{k_i} M_{ij} \Delta_{ij} \right| \leq \sum_{i \in F} K(t_i - t_{i-1}) \leq K \sum_{i \in F} \delta \leq KN\delta = \frac{\varepsilon}{4},$$

da cui

$$\sum_{i \in E} M_i(t_i - t_{i-1}) = S(f, \sigma') - \sum_{i \in F} \sum_{j=1}^{k_i} M_{ij} \Delta_{ij} \leq S(f, \sigma') + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) &= \sum_{i \in E} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in F} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \\ &\leq S(f, \sigma') + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i \in F} K(t_i - t_{i-1}) \leq S(f, \sigma') + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq S(f, \sigma_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che

$$s(f, \sigma) \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon,$$

e quindi il numero  $A = \int_a^b f(x) dx$  verifica la condizione richiesta.  $\square$

**Corollario 5.1.13** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si ha  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}^+$  tale che*

$$S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N) < \varepsilon \quad \forall N \geq \nu,$$

ove  $\sigma_N$  è la suddivisione equispaziata con nodi  $x_k = a + \frac{k}{N}(b-a)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) La tesi segue dal teorema 5.1.12 quando  $|\sigma_N| = \frac{b-a}{N} < \delta$ .

( $\impliedby$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$ , dall'ipotesi si deduce, scelto  $N \geq \nu$ ,

$$I^+(f) - I^-(f) \leq S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N) < \varepsilon,$$

e dunque  $I^+(f) = I^-(f)$ .  $\square$

Dal corollario precedente segue che in effetti per caratterizzare l'integrale di Riemann sono sufficienti le suddivisioni equispaziate, e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \sigma_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} s(f, \sigma_N) \quad \forall f \in \mathcal{R}(a, b).$$

**Teorema 5.1.14** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si ha  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se vi è un numero  $A \in \mathbb{R}$  con questa proprietà: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni suddivisione  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$  con  $|\sigma| < \delta$  e per ogni  $t_1, \dots, t_N$  con  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  risulta

$$\left| \sum_{i=1}^N f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon;$$

in tal caso si ha

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , per il teorema 5.1.12 esiste  $\delta > 0$  per cui risulta

$$|\sigma| < \delta \implies S(f, \sigma) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon, \quad s(f, \sigma) - \int_a^b f(x) dx > -\varepsilon.$$

Dunque, per ogni somma di Riemann si ha

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < s(f, \sigma) \leq \sum_{i=1}^N f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, \sigma) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon,$$

da cui la tesi con  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $A$  verifichi la condizione dell'enunciato. Sia  $\varepsilon > 0$  e scegliamo  $\delta > 0$  tale che per ogni suddivisione  $\sigma$  con  $|\sigma| < \delta$  si abbia

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^N f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < A + \varepsilon$$

per ogni somma di Riemann di  $f$  relativa a  $\sigma$ . Per  $i = 1, \dots, N$  siano  $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tali che

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{2N}, \quad \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f > f(\eta_i) - \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Allora le due quantità

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^N f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

sono somme di Riemann di  $f$  relative a  $\sigma$ , e dunque

$$\begin{aligned} A - 2\varepsilon &< \sum_{i=1}^N f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon < s(f, \sigma) \leq \\ &\leq S(f, \sigma) < \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon < A + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $\int_a^b f(x) dx = A$ .  $\square$

Su questo teorema si basano le più semplici *formule di quadratura* per il calcolo approssimato degli integrali.

## Esercizi 5.1

1. Si provi che

$$\int_a^b \lambda x \, dx = \frac{\lambda}{2}(b^2 - a^2), \quad \int_a^b \lambda x^2 \, dx = \frac{\lambda}{3}(b^3 - a^3).$$

2. (*Teorema della media*) Si provi che se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , allora

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq \sup_{[a,b]} f,$$

e che se  $f$  è anche continua in  $[a, b]$  allora esiste  $\xi \in [a, b]$  tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

3. (*Secondo teorema della media*) Siano  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $g \in C[a, b]$  con  $f \geq 0$ . Si provi che esiste  $\xi \in ]a, b[$  tale che

$$g(\xi) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x)f(x) \, dx.$$

**[Traccia:** Siano  $g(x_1) = \max_{[a,b]} g$  e  $g(x_2) = \min_{[a,b]} g$ ; se, ad esempio,  $x_1 < x_2$  sia  $h(t) = g(t) \int_a^b f(x) \, dx$ ,  $t \in [x_1, x_2]$ ; risulta allora  $h(x_1) \leq \int_a^b g(x)f(x) \, dx \leq h(x_2)$  e la tesi segue dal teorema dei valori intermedi (corollario 3.4.5).]

4. Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e sia  $x_0 \in [a, b[$ . Si provi che se  $f$  è continua in  $x_0$ , allora

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \, dx = f(x_0),$$

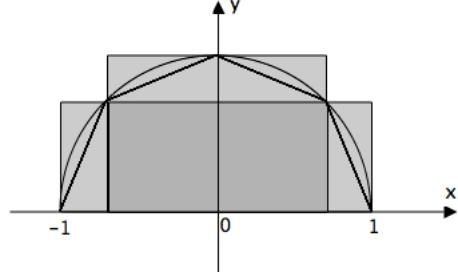
ma che il viceversa è falso: esistono funzioni integrabili, che non hanno limite in un punto  $x_0$ , tali che il limite sopra scritto esiste finito.

**[Traccia:** si mostri che per la funzione  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , prolungata in un modo qualunque per  $x = 0$ , il limite sopra scritto esiste per  $x_0 = 0$  ed è nullo.]

5. Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e sia  $g$  una funzione che differisce da  $f$  soltanto in un numero finito di punti di  $[a, b]$ . Si provi che  $g \in \mathcal{R}(a, b)$  e che gli integrali di  $f$  e di  $g$  in  $[a, b]$  coincidono. Che succede se  $f$  e  $g$  differiscono su un insieme numerabile  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ ?
6. Utilizzando solo la definizione di  $\pi$  (definizione 1.12.6), dedurre che

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

[Traccia: si verifichi che la metà dell'area del poligono regolare di  $2n$  lati inscritto nel cerchio di raggio 1 è compresa fra  $s(\sqrt{1-x^2}, \sigma_n)$  e  $S(\sqrt{1-x^2}, \sigma_n)$ , ove  $\sigma_n$  è la suddivisione di  $[-1, 1]$  i cui nodi sono le proiezioni sull'asse  $x$  dei vertici del poligono.]



7. Sia  $f$  una funzione limitata in  $[a, b]$ , tale che  $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ ; è vero che  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ ?
8. Dimostrare che ogni funzione limitata in  $[a, b]$ , e continua salvo che in un numero finito di punti, è integrabile in  $[a, b]$ .

## 5.2 Proprietà dell'integrale

L'integrabilità è una proprietà stabile rispetto alle operazioni algebriche fra funzioni. Per provare questo fatto, è utile introdurre la nozione di “oscillazione” di una funzione in un intervallo.

**Definizione 5.2.1** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $I$  è un intervallo contenuto in  $[a, b]$ , l'oscillazione di  $f$  in  $I$  è il numero reale

$$\text{osc}(f, I) = \sup_I f - \inf_I f.$$

**Osservazioni 5.2.2** (1) Il criterio di integrabilità espresso nella proposizione 5.1.9 si può riformulare nel modo seguente:  $f$  è integrabile in  $[a, b]$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$  tale che

$$\sum_{i=1}^N \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

(2) Anche la definizione di continuità di una funzione (definizione 3.2.4) può essere espressa tramite l'oscillazione. Si ha in effetti che  $f$  è continua in un punto  $x_0 \in [a, b]$  se e solo se, posto  $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ , risulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{osc}(f, I_\delta) = 0.$$

(3) Si verifica facilmente che se  $f, g$  sono funzioni limitate in  $[a, b]$  e  $\lambda$  è un numero reale, allora per ogni intervallo  $I \subseteq [a, b]$  si ha, come conseguenza dell'esercizio 3.2.11,

$$\text{osc}(f + g, I) \leq \text{osc}(f, I) + \text{osc}(g, I), \quad \text{osc}(\lambda f, I) = |\lambda| \text{osc}(f, I).$$

Dall'ultima delle osservazioni precedenti si deduce la *linearità* dell'integrale:

**Proposizione 5.2.3** Siano  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$  e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora  $f + g, \lambda f \in \mathcal{R}(a, b)$  e

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

**Dimostrazione** Poiché  $f$  e  $g$  sono integrabili, fissato  $\varepsilon > 0$  esistono due suddivisioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  di  $[a, b]$  tali che

$$S(f, \sigma') - s(f, \sigma') < \varepsilon, \quad S(g, \sigma'') - s(g, \sigma'') < \varepsilon.$$

Scelta un'altra suddivisione  $\sigma$  più fine di entrambe, si ha a maggior ragione (proposizione 5.1.4)

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon, \quad S(g, \sigma) - s(g, \sigma) < \varepsilon,$$

da cui, per l'osservazione 5.2.2 (3),

$$\begin{aligned} S(f + g, \sigma) - s(f + g, \sigma) &= \sum_{i=1}^N \text{osc}(f + g, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^N \text{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= S(f, \sigma) - s(f, \sigma) + S(g, \sigma) - s(g, \sigma) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

mentre

$$S(\lambda f, \sigma) - s(\lambda f, \sigma) = |\lambda| [S(f, \sigma) - s(f, \sigma)] < |\lambda| \varepsilon.$$

Ne segue che  $f + g$  e  $\lambda f$  sono integrabili. Adesso notiamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &\leq \\ &\leq S(f + g, \sigma) - s(f, \sigma) - s(g, \sigma) \leq S(f, \sigma) + S(g, \sigma) - s(f, \sigma) - s(g, \sigma) < 2\varepsilon, \\ \int_a^b (f + g)(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &\geq \\ &\geq s(f + g, \sigma) - S(f, \sigma) - S(g, \sigma) \geq s(f, \sigma) + s(g, \sigma) - S(f, \sigma) - S(g, \sigma) > -2\varepsilon, \end{aligned}$$

il che ci fornisce la maggiorazione

$$\left| \int_a^b (f + g)(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ossia

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Similmente, osservando che

$$S(\lambda f, \sigma) = \begin{cases} \lambda S(f, \sigma) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda s(f, \sigma) & \text{se } \lambda \leq 0, \end{cases} \quad s(\lambda f, \sigma) = \begin{cases} \lambda s(f, \sigma) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda S(f, \sigma) & \text{se } \lambda \leq 0, \end{cases}$$

è immediato dedurre che, qualunque sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \int_a^b (\lambda f)(x) dx - \lambda \int_a^b f(x) dx \right| < |\lambda| \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

e che quindi

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Utilizzando le proprietà dell'oscillazione, si ottiene anche la seguente

**Proposizione 5.2.4** *Siano  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ . Si ha:*

- (i)  $f \cdot g \in \mathcal{R}(a, b)$ ;
- (ii) se  $\inf_{[a,b]} |g| > 0$ , allora  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(a, b)$ ;
- (iii)  $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{R}(a, b)$ , ove

$$f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

**Dimostrazione** Si rimanda agli esercizi 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3.  $\square$

Un'altra importante proprietà dell'integrale è la sua *monotonia*:

**Proposizione 5.2.5** *Siano  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ . Se si ha  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Dimostrazione** Basta notare che, per ipotesi, per ogni suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  si ha

$$s(f, \sigma) \leq s(g, \sigma),$$

e poi passare all'estremo superiore rispetto a  $\sigma$ .  $\square$

**Corollario 5.2.6** *Se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , allora  $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$  e*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Dimostrazione** Si verifica facilmente che  $|f(x)| = f(x) \vee 0 - f(x) \wedge 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; quindi  $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$  per la proposizione 5.2.4. Essendo poi  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , per monotonia (proposizione 5.2.5) si ottiene

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

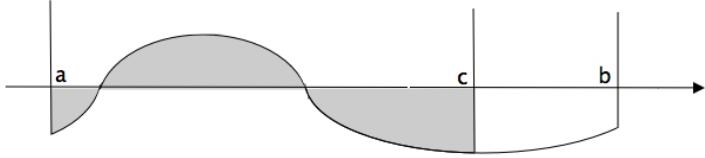
da cui la tesi.  $\square$

Proviamo infine l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione:

**Proposizione 5.2.7** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e sia  $c \in ]a, b[$  un punto fissato. Allora si ha  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se  $f \in \mathcal{R}(a, c) \cap \mathcal{R}(c, b)$ , e in tal caso*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Dimostrazione** La dimostrazione è ovvia, se si pensa al significato geometrico dell'integrale come area con segno. Per una dimostrazione formale si rimanda all'esercizio 5.2.5.  $\square$



Per i discorsi che seguiranno, è utile dare senso all'integrale  $\int_a^b f(x) dx$  anche nel caso in cui  $a \geq b$ .

**Definizione 5.2.8** Sia  $f$  una funzione reale definita in un intervallo  $[c, d]$ .

(i) Se  $a \in [c, d]$ , poniamo

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

(ii) Se  $a, b \in [c, d]$  con  $a > b$ , poniamo (notando che  $f \in \mathcal{R}(b, a)$  grazie alla proposizione precedente)

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

L'utilità di questa convenzione sta nel seguente risultato di additività:

**Proposizione 5.2.9** Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ . Allora

$$\int_u^v f(x) dx = \int_u^w f(x) dx + \int_w^v f(x) dx \quad \forall u, v, w \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Si tratta di una noiosa ma facile verifica che fa uso della proposizione precedente e consiste nell'analizzare tutti i possibili casi:  $u < v < w$ ,  $v < w < u$ ,  $w < u < v$ ,  $u < w < v$ ,  $v < u < w$ ,  $w < v < u$ ,  $u = v$ ,  $v = w$ ,  $u = w$ .  $\square$

Anche il risultato di monotonia espresso dal corollario 5.2.6 può essere precisato alla luce della convenzione sopra descritta:

**Corollario 5.2.10** Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ . Allora

$$\left| \int_u^v f(x) dx \right| \leq \left| \int_u^v |f(x)| dx \right| \quad \forall u, v \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Se  $u < v$ , il secondo membro è  $\int_u^v |f(x)| dx$  e la tesi segue dal corollario 5.2.6. Se  $u = v$  la diseguaglianza si riduce a  $0 \leq 0$ , quindi è vera. Se  $u > v$ , il primo membro coincide con  $|\int_v^u f(x) dx|$  mentre il secondo diventa  $\int_v^u |f(x)| dx$ , e quindi ci si riduce al primo caso già provato.  $\square$

**Osservazione 5.2.11** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . La funzione

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

si chiama *funzione caratteristica*, o *indicatrice*, di  $A$ . Se  $A$  è limitato, e se  $[a, b]$  è un qualunque intervallo contenente  $A$ , la funzione  $I_A$  può essere integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  oppure no, come mostra l'esempio 5.1.7. Se  $A$  è un intervallo  $[c, d]$ , è immediato verificare che  $I_A \in \mathcal{R}(a, b)$  e che  $\int_a^b I_A dx = d - c$ . Dunque se  $A = [c, d]$ , l'integrale di  $I_A$  su  $[a, b]$  è uguale alla lunghezza di  $A$ . Questo suggerisce un modo per attribuire una “misura” a una vasta classe di sottoinsiemi limitati di  $\mathbb{R}$ : quelli la cui corrispondente funzione indicatrice è integrabile, e che potremo chiamare insiemi *misurabili*. In altre parole, se  $A$  è limitato, se  $[a, b] \supseteq A$  e se  $I_A \in \mathcal{R}(a, b)$ , definiamo la misura di  $A$  come segue:

$$m(A) = \int_a^b I_A dx.$$

Dato che  $I_A$  è nulla fuori di  $A$ , è chiaro che questa definizione non dipende dalla scelta dell'intervallo  $[a, b]$ . Dalle proprietà dell'integrale segue immediatamente che  $m(\emptyset) = 0$ , che  $m$  attribuisce agli intervalli la loro lunghezza, che  $m$  è additiva sugli insiemi misurabili disgiunti (ossia  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ ), e che in particolare  $m$  è monotona (cioè  $m(A) \leq m(B)$  se  $A \subseteq B$ ).

## Esercizi 5.2

- Si provi che se  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$  allora  $fg \in \mathcal{R}(a, b)$ .

**Traccia:** si verifichi che

$$\text{osc}(fg, I) \leq \text{osc}(f, I) \cdot \sup_I |g| + \text{osc}(g, I) \cdot \sup_I |f|.$$

- Si provi che se  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $\inf_{[a, b]} |g| = m > 0$ , allora  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(a, b)$ .

**Traccia:** grazie all'esercizio precedente, basta provare la tesi quando  $f \equiv 1$ ; si provi che  $\text{osc}(1/g, I) \leq \frac{1}{m^2} \text{osc}(g, I)$ .

- Si verifichi che per ogni  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si ha

$$f \vee g = g + (f - g) \vee 0, \quad f \wedge g = f + g - f \vee g;$$

dedurne che se  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$  allora  $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{R}(a, b)$ .

**Traccia:** si osservi che basta verificare che  $f \vee 0 \in \mathcal{R}(a, b)$ , e si provi che risulta  $\text{osc}(f \vee 0, I) \leq \text{osc}(f, I)$ .

- Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ , una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *lipschitziana* (dal nome del matematico tedesco Lipschitz) se esiste  $L > 0$  tale che

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_m \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$$

(il più piccolo numero  $L$  che soddisfa la definizione si chiama *costante di Lipschitz* di  $f$ ). Si provi che se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione lipschitziana, allora  $\Phi \circ f \in \mathcal{R}(a, b)$ .

**Traccia:** si provi che  $\text{osc}(\Phi \circ f, I) \leq L \cdot \text{osc}(f, I)$ .

5. Dimostrare la proposizione 5.2.7.
6. Si calcoli, se esiste, la misura dell'insieme

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2^{-2n-1}, 2^{-2n}[.$$

7. Dimostrare che l'insieme ternario di Cantor (esercizio 3.1.22) è misurabile, e calcolarne la misura.

### 5.3 Alcune classi di funzioni integrabili

Utilizzando il criterio fornito dalla proposizione 5.1.9 si determina facilmente una prima importante classe di funzioni integrabili: quella delle funzioni monotone.

**Teorema 5.3.1** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona. Allora  $f$  è integrabile su  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione** Osserviamo anzitutto che  $f$  è limitata, in quanto dalla monotonia segue

$$f(x) \in [f(a), f(b)] \text{ se } f \text{ è crescente, } \quad f(x) \in [f(b), f(a)] \text{ se } f \text{ è decrescente.}$$

Consideriamo le suddivisioni equispaziate  $\sigma_N$ , con nodi  $x_i = a + \frac{i}{N}(b - a)$  (esempio 5.1.2). Supponendo ad esempio  $f$  crescente, si ha

$$S(f, \sigma_N) = \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \quad s(f, \sigma_N) = \sum_{i=1}^N f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

cosicché

$$\begin{aligned} S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N) &= \sum_{i=1}^N [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^N [f(x_i) - f(x_{i-1})] \frac{b-a}{N} = [f(b) - f(a)] \frac{b-a}{N}. \end{aligned}$$

Quindi, fissato  $\varepsilon > 0$ , il criterio di integrabilità (proposizione 5.1.9) è soddisfatto se si sceglie  $N$  abbastanza grande.  $\square$

### Uniforme continuità

Il nostro prossimo obiettivo è quello di dimostrare l'integrabilità delle funzioni continue su un intervallo compatto. A questo scopo conviene introdurre la nozione di uniforme continuità, la quale, come suggerisce il nome, è una proprietà più restrittiva della continuità.

Ricordiamo che se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  (oppure di  $\mathbb{C}^m$ ) e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione, dire che  $f$  è continua in  $A$  significa che

$$\forall \mathbf{x}_0 \in A, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in A \text{ con } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta.$$

**Definizione 5.3.2** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  (o di  $\mathbb{C}^m$ ) e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Diciamo che  $f$  è uniformemente continua in  $A$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{x}_0 \in A \text{ con } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta.$$

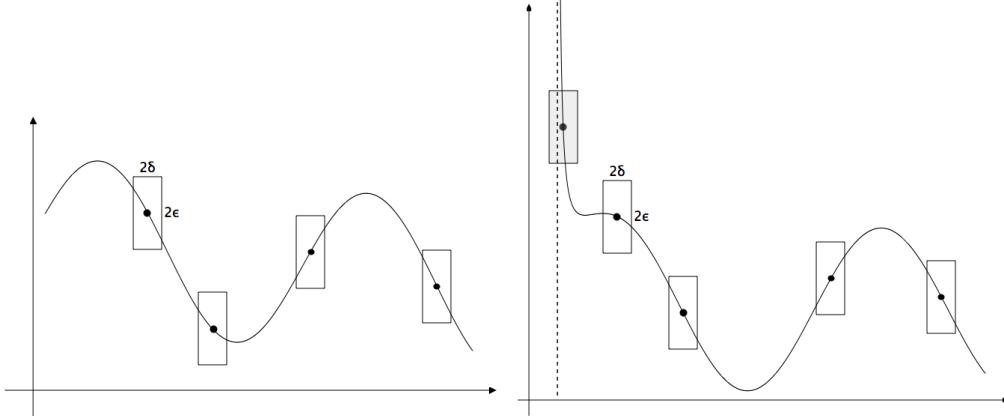
Come si vede, nella definizione di uniforme continuità si è spostata la stringa “ $\forall \mathbf{x}_0 \in A$ ” dall’inizio alla fine della frase. Questo fa sì che il numero  $\delta$  di cui si prescrive l’esistenza sia sottoposto ad una richiesta più forte: esso deve garantire che sia  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$  non solo per ogni  $\mathbf{x}$  vicino ad un fissato punto  $\mathbf{x}_0$ , ma per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$  fra loro vicini, in qualunque parte di  $A$  essi si trovino. In definitiva: il numero  $\delta$  deve dipendere da  $\varepsilon$ , ma non da  $\mathbf{x}_0$ .

La definizione di uniforme continuità si esprime bene facendo intervenire l’oscillazione di  $f$  (definizione 5.2.1):  $f$  è uniformemente continua in  $A$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che risulti

$$\text{osc}(f, B) = \sup_B f - \inf_B f \leq \varepsilon$$

per ogni palla  $B \subseteq A$  che abbia raggio non superiore a  $\delta/2$ , ovunque si trovi il suo centro.

L’uniforme continuità di una funzione  $f$  si può interpretare geometricamente nel modo seguente: si consideri un rettangolo  $R$ , di base  $2\delta$  ed altezza  $2\varepsilon$ , centrato in un punto del grafico di  $f$ ; si ha continuità uniforme se per qualunque  $\varepsilon > 0$  vi è una base  $\delta > 0$  tale che, facendo scorrere il centro del rettangolo  $R$  lungo il grafico di  $f$ , il grafico non intersechi mai i due lati orizzontali del rettangolo.



**Esempi 5.3.3 (1)** Siano  $A = [0, \infty[$  e  $f(x) = x^2$ . Per ogni intervallo  $I_a = [a, a + \delta]$  si ha

$$\text{osc}(f, I_a) = (a + \delta)^2 - a^2 = 2a\delta + \delta^2;$$

dunque  $f$ , pur essendo continua in  $[0, \infty[$ , non è uniformemente continua in tale semiretta in quanto, fissato  $\varepsilon > 0$  e comunque preso  $\delta > 0$ , risulta, per valori di  $a$  sufficientemente grandi,  $\text{osc}(f, I_a) = 2a\delta + \delta^2 \geq \varepsilon$ .

**(2)** Ogni funzione lipschitziana in un insieme  $A$  è uniformemente continua in  $A$ : dato  $\varepsilon > 0$ , basta scegliere  $\delta = \varepsilon/L$ , ove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $f$ . In particolare, le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili con derivata limitata sono uniformemente continue, in quanto per il teorema di Lagrange esse risultano lipschitziane con costante  $L \leq \sup_{\mathbb{R}} |f'|$ . Si noti che in generale le funzioni appartenenti a  $C^1(\mathbb{R})$  non sono né lipschitziane né uniformemente continue, come mostra l'esempio della funzione  $f(x) = x^2$ .

Come abbiamo visto, non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue; tuttavia vale il seguente importante risultato:

**Teorema 5.3.4 (di Heine-Cantor)** *Sia  $f$  una funzione reale, definita su un sottoinsieme compatto  $A$  di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ . Se  $f$  è continua in  $A$ , allora  $f$  è uniformemente continua in  $A$ .*

**Dimostrazione** Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia uniformemente continua in  $A$ : allora, negando la definizione 5.3.2, troviamo che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, qualunque sia  $\delta > 0$ , possiamo determinare due punti  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A$  che verificano  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_m < \delta$ , ma  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|_m \geq \varepsilon$ . Scegliendo allora  $\delta = 1/k$ , con  $k \in \mathbb{N}^+$ , per ogni  $k$  troveremo  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_k \in A$  tali che

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k|_m < \frac{1}{k}, \quad |f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}'_k)| \geq \varepsilon.$$

Le due successioni  $\{\mathbf{x}_k\}$  e  $\{\mathbf{x}'_k\}$  così costruite sono costituite da punti del compatto  $A$ . Per definizione di insieme compatto (osservazione 3.1.20), esiste una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{k_n}\} \subseteq \{\mathbf{x}_k\}$  che converge ad un punto  $\mathbf{x} \in A$ ; la corrispondente sottosuccessione  $\{\mathbf{x}'_{k_n}\} \subseteq \{\mathbf{x}'_k\}$  converge anch'essa a  $\mathbf{x}$ , dato che  $|\mathbf{x}_{k_n} - \mathbf{x}'_{k_n}|_m < 1/k_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ma allora, essendo  $f$  continua nel punto  $\mathbf{x}$ , si deve avere  $f(\mathbf{x}_{k_n}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  e  $f(\mathbf{x}'_{k_n}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  per  $n \rightarrow \infty$ , il che è assurdo perché  $|f(\mathbf{x}_{k_n}) - f(\mathbf{x}'_{k_n})| \geq \varepsilon$  per ogni  $n$ .  $\square$

**Osservazione 5.3.5** Il teorema di Heine-Cantor vale se  $A$  è compatto, ossia limitato e chiuso (teorema 3.1.19 e osservazione 3.1.20): il risultato è falso se  $A$  non è limitato, come mostra l'esempio 5.3.3 (1), ed anche se  $A$  non è chiuso, come mostra l'esempio della funzione  $f(x) = 1/x$ ,  $x \in ]0, 1]$  (si veda l'esercizio 5.3.7).

**Osservazione 5.3.6** Non è difficile verificare, applicando la definizione, che per una funzione uniformemente continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  vale la seguente proprietà: se due successioni  $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq A$  verificano  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , allora per le trasformate  $\{f(x_n)\}, \{f(y_n)\}$  si ha  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ . Ciò si traduce in un utile criterio di *non* uniforme continuità: se, data una funzione continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , esistono due successioni  $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq A$  tali che  $x_n - y_n$  tende a 0, ma  $f(x_n) - f(y_n)$  non tende a 0, allora  $f$  non può essere uniformemente continua. Ad esempio, la funzione  $f(x) = x \sin x$  non è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ , poiché scegliendo  $x_n = 2\pi n + \frac{1}{n}$ ,  $y_n = 2\pi n$ , si ha  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , ma

$$f(x_n) - f(y_n) = \left(2\pi n + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n} = 2\pi \left(n \sin \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \rightarrow 2\pi.$$

## Integrabilità delle funzioni continue

Proviamo ora l'integrabilità delle funzioni continue su un intervallo  $[a, b]$ . Notiamo che ogni funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è necessariamente limitata (per il teorema di Weierstrass) e uniformemente continua (per il teorema di Heine-Cantor).

**Teorema 5.3.7** *Ogni funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione** Sia  $\varepsilon > 0$ . Poiché  $f$  è uniformemente continua, esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x, x' \in [a, b], \quad |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Prendiamo, per ogni  $N \in \mathbb{N}^+$ , le suddivisioni equispaziate  $\sigma_N$  i cui nodi sono  $x_i = a + \frac{i}{N}(b-a)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Se scegliamo  $N > \frac{b-a}{\delta}$ , avremo

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N} < \delta, \quad i = 1, \dots, N.$$

Valutiamo la quantità  $S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N)$ : si ha

$$\begin{aligned} S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N) &= \sum_{i=1}^N \left( \max_{[x_{i-1}, x_i]} f - \min_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^N [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \cdot \frac{b-a}{N}, \end{aligned}$$

ove  $\xi_i$  e  $\eta_i$  sono rispettivamente punti di massimo e di minimo per  $f$  nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Poiché, ovviamente,  $|\xi_i - \eta_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ , avremo  $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , e dunque

$$S(f, \sigma_N) - s(f, \sigma_N) < \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{N} = \varepsilon \quad \forall N > \frac{b-a}{\delta}.$$

Per la proposizione 5.1.9 si conclude che  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ .  $\square$

**Osservazione 5.3.8** Più in generale, risultano integrabili in  $[a, b]$  le funzioni che sono limitate in  $[a, b]$  e continue salvo che in un numero finito di punti  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset [a, b]$ . La dimostrazione di questo fatto, benché formalmente un po' pesante, non è affatto difficile, e per essa si rimanda all'esercizio 5.3.8.

La classe  $\mathcal{R}(a, b)$  è considerevolmente ampliata dal seguente risultato:

**Teorema 5.3.9** *Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e poniamo  $M = \sup_{[a,b]} f$ ,  $m = \inf_{[a,b]} f$ . Se  $\Phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora  $\Phi \circ f \in \mathcal{R}(a, b)$ .*

Si noti che  $\Phi \circ f$  non è necessariamente una funzione continua.

**Dimostrazione** Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta \in ]0, \varepsilon[$  tale che

$$t, s \in [m, M], \quad |t - s| < \delta \implies |\Phi(t) - \Phi(s)| < \varepsilon;$$

tale  $\delta$  esiste poiché  $\Phi$  è uniformemente continua in  $[m, M]$  in virtù del teorema di Heine-Cantor.

Poiché  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , esiste una suddivisione  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  di  $[a, b]$  tale che

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \delta^2.$$

Posto  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ , consideriamo gli insiemi

$$A = \{i \in \{1, \dots, N\} : \text{osc}(f, I_i) < \delta\}, \quad B = \{i \in \{1, \dots, N\} : \text{osc}(f, I_i) \geq \delta\}.$$

Si ha allora, posto  $K = \sup_{[m, M]} |\Phi|$ ,

$$\text{osc}(\Phi \circ f, I_i) < \varepsilon \quad \forall i \in A, \quad \text{osc}(\Phi \circ f, I_i) \leq 2K \quad \forall i \in B,$$

Quindi

$$\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} \text{osc}(f, I_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \delta^2$$

ovvero

$$\sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} S(\Phi \circ f, \sigma) - s(\Phi \circ f, \sigma) &= \\ &= \sum_{i \in A} \text{osc}(\Phi \circ f, I_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} \text{osc}(\Phi \circ f, I_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \varepsilon(b-a) + 2K\delta < \varepsilon(b-a+2K), \end{aligned}$$

cioè la tesi.  $\square$

### Esercizi 5.3

1. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione uniformemente continua. Si provi che esiste un unico prolungamento  $\bar{f} : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$  di  $f$ , che sia uniformemente continuo.
2. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione uniformemente continua in due intervalli chiusi  $I$  e  $J$ . Si provi che  $f$  è uniformemente continua in  $I \cup J$ .
3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e supponiamo che  $f$  abbia asintoti obliqui per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Provare che  $f$  è uniformemente continua in  $\mathbb{R}$ .
4. Esibire una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e di classe  $C^\infty$ , ma non uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .
5. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua. Si provi che esistono  $A, B > 0$  tali che

$$|f(x)| \leq A + B|x| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e che il viceversa, anche ammettendo  $f$  continua, è falso.

6. Si provi che  $|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$  per ogni  $x, y \geq 0$  e per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ ; se ne deduca che se  $\alpha \in [0, 1[$  la funzione  $f(x) = x^\alpha$  è uniformemente continua in  $[0, \infty[$ , ma non è lipschitziana in tale semiretta.
7. Si provi che per ogni  $\alpha > 0$  la funzione  $f(x) = x^{-\alpha}$  non è uniformemente continua in  $]0, 1[$ .
8. Si provi che se una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua, allora essa trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy, e che il viceversa è vero se e solo se  $A$  è limitato.
9. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che (a)  $f(0) = 0$ , (b)  $f$  è continua in 0, (c)  $f(x + x') \leq f(x) + f(x')$  per ogni  $x, x' \in \mathbb{R}$ . Si provi che  $f$  è uniformemente continua.
10. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Provare che

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

## 5.4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Se  $f$  è una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo  $[a, b]$ , sappiamo dalla proposizione 5.2.7 che si ha anche  $f \in \mathcal{R}(a, x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Quindi possiamo definire la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

che si chiama *funzione integrale* della  $f$ . Si noti, di passaggio, che non è lecito scrivere  $\int_a^x f(x) dx$ : la variabile di integrazione non va confusa con gli estremi dell'intervallo di integrazione, esattamente come nelle sommatorie si scrive  $\sum_{k=0}^n a_k$  e non  $\sum_{n=0}^n a_n$ . Analizziamo le proprietà della funzione integrale  $F$ .

**Proposizione 5.4.1** *Se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ , allora la sua funzione integrale  $F$  è continua, anzi lipschitziana, in  $[a, b]$ , e risulta  $F(a) = 0$ .*

**Dimostrazione** Ovviamente  $F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$ . Proviamo che  $F$  è lipschitziana (esempio 5.3.3 (2)). Siano  $x, x' \in [a, b]$  con, ad esempio,  $x < x'$ : per la proposizione 5.2.9 ed il corollario 5.2.10 si ha

$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x'} f(t) dt \right| = \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right|;$$

scelta la suddivisione banale  $\sigma_1 = \{x, x'\}$  dell'intervallo  $I = [x, x']$ , si ottiene, per definizione di integrale,

$$|F(x) - F(x')| \leq \left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right| \leq S(|f|, \sigma_1) = \sup_I |f| \cdot |x - x'|.$$

Ne segue la tesi.  $\square$

**Teorema 5.4.2 (teorema fondamentale del calcolo integrale)** *Sia  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$ . Allora la sua funzione integrale  $F$  è derivabile in  $[a, b]$  e si ha*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $x_0 \in [a, b]$ . Per ogni  $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$  consideriamo il rapporto incrementale di  $F$  in  $x_0$ :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Poiché  $f$  è continua in  $x_0$ , fissato  $\varepsilon > 0$  esisterà  $\delta > 0$  tale che

$$|t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo scrivere (essendo  $\int_{x_0}^x c dt = c(x - x_0)$  per ogni costante  $c$ )

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0) + f(x_0)] dt = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt + f(x_0). \end{aligned}$$

Se ora  $x \rightarrow x_0$ , il primo termine all'ultimo membro è infinitesimo: infatti non appena  $|x - x_0| < \delta$  avremo, per la monotonia dell'integrale,

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a, b],$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

**Osservazioni 5.4.3 (1)** La continuità di  $f$  è essenziale nel teorema precedente: vedere l'esercizio 5.4.1.

**(2)** Nella dimostrazione precedente in effetti si è provato un risultato più preciso: se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $f$  è continua in un punto  $x_0$ , allora  $F$  è derivabile in quel punto, con  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Perché il teorema fondamentale del calcolo integrale ha questo nome? Perché, come presto scopriremo, per mezzo di esso è possibile calcolare una gran quantità di integrali: già questo lo rende un teorema basilare. Ma la sua importanza è ancora maggiore per il fatto che esso mette in relazione fra loro l'integrale e la derivata, cioè due operazioni i cui significati geometrici sembrano avere ben poca relazione fra di loro: il calcolo di un'area delimitata da un grafico e la nozione di retta tangente a tale grafico. In realtà, in un certo senso, l'integrazione e la derivazione sono due operazioni “l'una inversa dell'altra”.

Per capire meglio come stanno le cose, è necessario introdurre la nozione di “primitiva” di una data funzione.

**Definizione 5.4.4** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione qualunque. Diciamo che una funzione  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $f$  se  $G$  è derivabile in  $[a, b]$  e se risulta  $G'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . L'insieme delle primitive di una funzione  $f$  si chiama integrale indefinito di  $f$  e si indica talvolta con l'ambiguo simbolo  $\int f(x) dx$  (il quale quindi rappresenta un insieme di funzioni e non una singola funzione).

Non tutte le funzioni sono dotate di primitive (esercizio 5.4.1); però, se ne esiste una allora ne esistono infinite: infatti se  $G$  è una primitiva di  $f$ , allora  $G + c$  è ancora una primitiva di  $f$  per ogni costante  $c \in \mathbb{R}$ . D'altra parte, sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo integrale che ogni funzione  $f$  continua su  $[a, b]$  ha una primitiva: la sua funzione integrale  $F$ . Più in generale si ha:

**Proposizione 5.4.5** Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e supponiamo che  $f$  possieda una primitiva  $G$ . Allora:

(i) si ha

$$\int_y^x f(t) dt = G(x) - G(y) \quad \forall y, x \in [a, b];$$

(ii) la funzione integrale  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  è anch'essa una primitiva di  $f$ ;

(iii) ogni primitiva  $H$  di  $f$  è della forma  $H(x) = G(x) + c$  con  $c$  costante reale;

(iv) per ogni primitiva  $H$  di  $f$  si ha

$$\int_y^x f(t) dt = H(x) - H(y) \quad \forall y, x \in [a, b].$$

Osserviamo esplicitamente che dalla tesi del teorema *non segue* che  $f$  è continua in  $[a, b]$ : si veda l'esercizio 5.4.2.

**Dimostrazione** (i) Fissiamo  $y, x \in [a, b]$  con, ad esempio,  $y < x$ , sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  una partizione di  $[y, x]$  tale che  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$ . Allora possiamo scrivere, utilizzando il teorema di Lagrange,

$$G(x) - G(y) = \sum_{k=0}^{N-1} [G(x_{k+1}) - G(x_k)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

ove  $\xi_k$  è un opportuno punto in  $]x_k, x_{k+1}[$ . Dato che, ovviamente,

$$s(f, \sigma) \leq \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq S(f, \sigma),$$

otteniamo subito

$$\left| \int_y^x f(t) dt - G(x) + G(y) \right| \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon,$$

e l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  implica

$$\int_y^x f(t) dt = G(x) - G(y).$$

(ii) Scelto  $y = a$ , si ottiene in particolare

$$\exists \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} [G(x) - G(a)] = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

(iii) Se  $H$  è una primitiva di  $f$ , allora  $H - G$  è una funzione derivabile in  $[a, b]$  con  $(H - G)' = f - f = 0$  in  $[a, b]$ . Ne segue (proposizione 4.3.4) che esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $H(x) - G(x) = c$ .

(iv) Segue banalmente da (i) e (iii).  $\square$

**Osservazioni 5.4.6** (1) Si suole scrivere  $[G(t)]_y^x$  in luogo di  $G(x) - G(y)$ .

(2) La proposizione precedente afferma che se  $f$  ha una primitiva  $G$ , allora *ogni* altra primitiva  $H$  di  $f$  è della forma  $H(x) = G(x) + c$ , e tra queste vi è anche la funzione integrale  $\int_a^x f(t) dt$ ; in particolare, se  $G$  è una assegnata primitiva di  $f$  si ha

$$\int f(x) dx = \{G + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

La proposizione 5.4.5(i) ha un facile corollario, il quale però è di grande importanza:

**Corollario 5.4.7** *Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile, tale che  $g' \in \mathcal{R}(a, b)$ . Allora*

$$\int_a^x g'(t) dt = g(x) - g(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Basta porre  $f = g'$  nella proposizione 5.4.5(i).  $\square$

In definitiva, per calcolare l'integrale  $\int_a^b f(t) dt$  basta determinare una primitiva  $G$  di  $f$ , se esiste (e  $G$  esiste certamente, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, quando  $f$  è continua), per poi calcolarla negli estremi dell'intervallo; ciò corrisponde essenzialmente a fare l'operazione inversa della derivazione. Per questa operazione non ci sono purtroppo ricette prestabilite, come invece accade per il calcolo delle derivate: vi sono funzioni continue molto semplici, quali ad esempio  $e^{-x^2}$  oppure  $\frac{\sin x}{x}$ , le cui primitive (che *esistono*) non sono esprimibili in termini di funzioni elementari; il che, peraltro, non impedisce di calcolarne gli integrali con qualunque precisione prestabilita, utilizzando "formule di quadratura" oppure scrivendo le primitive come somme di opportune serie di potenze.

È utile a questo punto riportare la seguente tabella di primitive note:

integrando	primitiva	integrando	primitiva
$x^p$ ( $p \neq -1$ )	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$
$x^{-1}$	$\ln x $	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$e^{\lambda x}$ ( $\lambda \neq 0$ )	$\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\sinh x$	$\cosh x$		
$ x $	$\frac{x x }{2}$		$-\frac{1}{\tan x}$

## Esercizi 5.4

1. Si consideri la funzione “segno di  $x$ ”, definita da

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

- (i) Si calcoli  $\int_0^x f(t) dt$  per ogni  $x \in [-1, 1]$ .  
(ii) Si provi che  $f$  non ha primitive in  $[-1, 1]$ .

2. Provare che esistono funzioni  $f$  discontinue in  $\mathbb{R}$ , ma dotate di primitive.

[Traccia: posto  $F(x) = x^2 \sin(1/x)$  per  $x \neq 0$  e  $F(0) = 0$ , si verifichi che  $F$  è derivabile e si prenda  $f = F'$ .]

3. Si dica quali ipotesi assicurano i fatti seguenti:

$$(i) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad (ii) \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

4. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che  $f$  è integrabile ma non continua in  $[-1, 1]$ , che  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  è derivabile in  $[-1, 1]$  e che risulta

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

5. Sia  $f$  una funzione continua in  $\mathbb{R}$ . Calcolare

$$\frac{d}{dx} \int_x^{2x} f(t) dt, \quad \frac{d}{dx} \int_{-x}^{-x^2} f(t) dt, \quad \frac{d}{dx} \sin \left( \int_{2x}^{3x} f(t) dt \right).$$

[Traccia: si tratta di derivare opportune funzioni composte.]

6. Sia  $f$  una funzione continua e non negativa in  $[a, b]$ . Si provi che se  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , allora  $f \equiv 0$  in  $[a, b]$ , e che la conclusione è falsa se si toglie una qualunque delle ipotesi.
7. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che  $f(x) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow \infty$ . Si provi che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lambda.$$

8. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $T > 0$ , cioè tale che  $f(x + T) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Provare che se  $f \in \mathcal{R}(0, T)$  allora  $f \in \mathcal{R}(a, a + T)$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$  e

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

## 5.5 Metodi di integrazione

Non esiste una procedura standard per il calcolo delle primitive e quindi degli integrali. I metodi che esporremo adesso servono a trasformare gli integrali (e non a calcolarli), naturalmente con la speranza che dopo la trasformazione l'integrale risulti semplificato e calcolabile.

### Integrazione per parti

Il metodo di integrazione per parti nasce come conseguenza della formula per la derivata di un prodotto: poiché

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

avremo

$$f'(x)g(x) = D(f(x)g(x)) - f(x)g'(x),$$

cosicché, integrando i due membri su  $[a, b]$ , si ottiene per ogni coppia di funzioni  $f, g \in C^1[a, b]$  la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Con questa formula, l'integrale  $\int_a^b f'(x)g(x) dx$  si trasforma in  $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ : se sappiamo calcolare quest'ultimo, sapremo calcolare anche l'altro.

**Esempi 5.5.1** (1) Consideriamo l'integrale  $\int_a^b x \sin x dx$ . Si ha, con  $f'(x) = \sin x$  e  $g(x) = x$ ,

$$\int_a^b x \sin x dx = [x(-\cos x)]_a^b - \int_a^b 1 \cdot (-\cos x) dx = [-x \cos x + \sin x]_a^b,$$

e in particolare una primitiva di  $x \sin x$  è  $-x \cos x + \sin x$ . In modo analogo si calcola l'integrale  $\int_a^b x \cos x dx$ .

(2) Per il calcolo di  $\int_a^b x^2 e^x dx$  si ha, con  $f'(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 e^x dx &= [x^2 e^x]_a^b - \int_a^b 2x e^x dx = \\ &\quad (\text{con un'altra integrazione per parti}) \\ &= [x^2 e^x - 2x e^x]_a^b + 2 \int_a^b e^x dx = [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_a^b, \end{aligned}$$

e in particolare una primitiva di  $x^2 e^x$  è  $(x^2 - 2x + 2)e^x$ .

(3) Calcoliamo  $\int_a^b e^x \cos x dx$ . Si ha, con  $f'(x) = e^x$  e  $g(x) = \cos x$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x \cos x dx &= [e^x \cos x]_a^b + \int_a^b e^x \sin x dx = \\ &\quad (\text{integrando nuovamente per parti}) \\ &= [e^x \cos x + e^x \sin x]_a^b - \int_a^b e^x \cos x dx; \end{aligned}$$

quindi

$$2 \int_a^b e^x \cos x dx = [e^x \cos x + e^x \sin x]_a^b,$$

e infine

$$\int_a^b e^x \cos x dx = \frac{1}{2} [e^x \cos x + e^x \sin x]_a^b.$$

In particolare, una primitiva di  $e^x \cos x$  è  $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$ . Si noti che strada facendo abbiamo indirettamente calcolato anche

$$\int_a^b e^x \sin x dx = \frac{1}{2} [-e^x \cos x + e^x \sin x]_a^b.$$

Osserviamo inoltre che avremmo potuto anche integrare per parti prendendo  $g(x) = e^x$  e  $f'(x) = \cos x$ .

(4) Per l'integrale  $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$  notiamo prima di tutto che deve essere  $[a, b] \subseteq [-1, 1]$  affinché l'integrando sia ben definito. Si ha, con  $f'(x) = 1$  e  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx &= \left[ x\sqrt{1-x^2} \right]_a^b + \int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \left[ x\sqrt{1-x^2} \right]_a^b + \int_a^b \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \left[ x\sqrt{1-x^2} \right]_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;\end{aligned}$$

quindi

$$2 \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \left[ x\sqrt{1-x^2} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_a^b$$

e infine

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_a^b.$$

In particolare, una primitiva di  $\sqrt{1-x^2}$  è  $\frac{1}{2} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x]$ .

In modo analogo si può calcolare l'integrale  $\int_a^b \sqrt{1+x^2} dx$ .

**Osservazione 5.5.2** Se  $[a, b] = [-1, 1]$ , dall'ultimo degli esempi precedenti segue

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \frac{\pi}{2};$$

questa è l'area del semicerchio ed è in accordo con la definizione del numero  $\pi$  (definizione 1.12.6); si osservi che abbiamo ritrovato il risultato dell'esercizio 5.1.6.

## Integrazione per sostituzione

Il metodo di integrazione per sostituzione è figlio della formula che fornisce la derivata delle funzioni composte: poiché

$$D(g \circ \varphi(x)) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

scegliendo  $g(y) = \int_a^y f(t) dt$  (con  $f$  funzione continua in  $[a, b]$ ) si ha, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$D \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

e quindi

$$\int_u^v f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]_u^v = \int_a^{\varphi(v)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(u)} f(t) dt.$$

Pertanto si ottiene per ogni coppia di funzioni  $f \in C[a, b]$ ,  $\varphi \in C^1[c, d]$ , con  $\varphi$  a valori in  $[a, b]$ , la seguente formula di integrazione per sostituzione:

$$\int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(t) dt \quad \forall u, v \in [c, d].$$

Il significato è il seguente: la variabile  $x \in [c, d]$  dell'integrale di sinistra viene sostituita dalla variabile  $t \in [a, b]$  nell'integrale di destra, mediante il cambiamento di variabile  $t = \varphi(x)$ ; le “lunghezze infinitesime”  $dx$  e  $dt$  sono legate dalla relazione  $dt = \varphi'(x)dx$ , la quale è coerente col fatto che da  $t = \varphi(x)$  segue  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ .

La formula di integrazione per sostituzione si può “leggere al contrario”: se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è invertibile, si ha

$$\int_{\varphi^{-1}(p)}^{\varphi^{-1}(q)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_p^q f(t) dt \quad \forall p, q \in [a, b].$$

Si noti che, in realtà, affinché sia valida questa formula *non è affatto necessario* che  $\varphi$  sia invertibile: se  $u, v, w, z$  sono punti di  $[c, d]$  tali che  $\varphi(u) = \varphi(w) = p$ ,  $\varphi(v) = \varphi(z) = q$  (dunque  $\varphi$  non è iniettiva), si ha

$$\begin{aligned} \int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]_u^v = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(t) dt = \int_p^q f(t) dt = \\ &= \int_{\varphi(w)}^{\varphi(z)} f(t) dt = \left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]_w^z = \int_w^z f(\varphi(x))\varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

**Esempi 5.5.3** (1) Nell'integrale  $\int_a^b x^3 \sqrt{1+x^2} dx$  poniamo  $x^2 = t$ , da cui  $dt = 2x dx$ : si ha allora

$$\begin{aligned} \int_a^b x^3 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2} t \sqrt{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} (t+1-1)\sqrt{1+t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} ((1+t)^{3/2} - (1+t)^{1/2}) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{5}(1+t)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} \right]_{a^2}^{b^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \right]_a^b. \end{aligned}$$

(2) Nell'integrale  $\int_a^b \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  bisogna supporre  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ , in modo che l'integrando sia ben definito e limitato. Posto  $\sqrt{x} = t$ , da cui  $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ , si ha

$$\int_a^b \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2e^t dt = [2e^t]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = [2e^{\sqrt{x}}]_a^b.$$

(3) Sappiamo già calcolare l'integrale  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (esempio 5.5.1 (4)), ma ora useremo un altro metodo. Qui leggiamo la formula di integrazione per sostituzione al contrario:

poniamo  $x = \sin t$ , da cui  $dx = \cos t dt$ ; quando  $x$  descrive  $[0, 1]$ , si ha  $t \in [0, \pi/2]$ , oppure  $t \in [\pi/2, \pi]$ , o anche  $t \in [\pi, 5\pi/2]$  (e infinite altre scelte sono possibili): se si è scelto per la variabile  $t$  l'intervallo  $[0, \pi/2]$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &\quad (\text{essendo } \cos t > 0 \text{ in } [0, \pi/2]) \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \text{ (integrando per parti)} \\ &= \frac{1}{2} [t + \sin t \cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Se invece scegliamo per la  $t$  l'intervallo  $[\pi/2, \pi]$ , otteniamo la stessa cosa:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &\quad (\text{essendo } \cos t < 0 \text{ in } [\pi/2, \pi]) \\ &= \int_{\pi}^{\pi/2} (-\cos^2 t) dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il lettore può verificare per suo conto, prestando attenzione al segno di  $\cos t$ , che anche scegliendo per la  $t$  l'intervallo  $[\pi, 5\pi/2]$  il risultato dell'integrazione è lo stesso.

(4) Nell'integrale  $\int_a^b \sqrt{1+x^2} dx$  poniamo  $x = \sinh t$ , da cui  $dx = \cosh t dt$ , e ricordiamo che la funzione inversa del seno iperbolico è  $\text{settsinh } x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Si ha allora

$$\int_a^b \sqrt{1+x^2} dx = \int_{\text{settsinh } a}^{\text{settsinh } b} \cosh^2 t dt;$$

con due integrazioni per parti si ottiene

$$\int_a^b \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [t + \sinh t \cosh t]_{\text{settsinh } a}^{\text{settsinh } b} = \frac{1}{2} \left[ \text{settsinh } x + x \sqrt{1+x^2} \right]_a^b.$$

In modo analogo si calcola l'integrale  $\int_a^b \sqrt{x^2 - 1} dx$ , sempre che sia  $[a, b] \cap [-1, 1] = \emptyset$ . Nell'esercizio 5.5.8 si fornisce una giustificazione dei nomi “seno iperbolico”, “coseno iperbolico” e “settore seno iperbolico”.

## Integrali vettoriali

È utile parlare brevemente anche di *integrali vettoriali*, ossia dell'integrale di funzioni di una variabile a valori in  $\mathbb{R}^m$  (e in particolare nel caso  $m = 2$  rientra anche il caso di funzioni complesse). Esso si definisce come segue:

**Definizione 5.5.4** Sia  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione. Supponiamo che le sue componenti  $g^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  siano integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ . Allora l'integrale di  $\mathbf{g}$

su  $[a, b]$  è il vettore

$$\int_a^b \mathbf{g}(t) dt = \left( \int_a^b g^1(t) dt, \dots, \int_a^b g^m(t) dt \right) \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, se  $g = \alpha + i\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , l'integrale di  $g$  su  $[a, b]$  è il numero complesso

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt.$$

L'integrale vettoriale è lineare e verifica ancora la proprietà di additività

$$\int_u^v \mathbf{g}(t) dt = \int_u^w \mathbf{g}(t) dt + \int_w^v \mathbf{g}(t) dt \quad \forall u, v, w \in [a, b].$$

Inoltre, in luogo della monotonia, che perde di significato, vale la seguente fondamentale disuguaglianza:

**Proposizione 5.5.5** *Sia  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $g^i \in \mathcal{R}(a, b)$  per  $i = 1, \dots, m$ . Allora*

$$\left| \int_a^b \mathbf{g}(t) dt \right|_m \leq \int_a^b |\mathbf{g}(t)|_m dt.$$

**Dimostrazione** per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  si ha, per definizione di prodotto scalare (paragrafo 3.1):

$$\left\langle \int_a^b \mathbf{g}(t) dt, \mathbf{y} \right\rangle_m = \sum_{i=1}^m \int_a^b g^i(t) dt \cdot y^i = \int_a^b \sum_{i=1}^m g^i(t) y^i dt = \int_a^b \langle \mathbf{g}(t), \mathbf{y} \rangle_m dt;$$

quindi per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 3.1.1)

$$\left| \left\langle \int_a^b \mathbf{g}(t) dt, \mathbf{y} \right\rangle_m \right| \leq \int_a^b |\mathbf{g}(t)|_m \cdot |\mathbf{y}|_m dt \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Scegliendo  $\mathbf{y} = \int_a^b \mathbf{g}(t) dt$ , si conclude che

$$\left| \int_a^b \mathbf{g}(t) dt \right|_m^2 \leq \int_a^b |\mathbf{g}(t)|_m dt \cdot \left| \int_a^b \mathbf{g}(t) dt \right|_m,$$

e quindi si ottiene la disuguaglianza cercata.  $\square$

## Esercizi 5.5

- Calcolare i seguenti integrali ( $[x]$  denota la parte intera di  $x$ ):

$$\begin{aligned} & \int_{-4}^{11} [x] dx, \quad \int_{-1}^1 \max \left\{ -x, \left| x - \frac{1}{2} \right| \right\} dx, \quad \int_{-10}^5 x|x| dx, \\ & \int_{-5}^8 |[x] + x| dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \min \{ \sin x, \cos x \} dx, \quad \int_0^6 (x^2 - [x^2]) dx. \end{aligned}$$

2. Calcolare  $\int_{-10}^{10} f(x) dx$ , ove

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [-10, -7] \\ -1 & \text{se } x \in ]-7, 1] \\ -10 & \text{se } x \in ]1, 5[ \\ 1000 & \text{se } x = 5 \\ 8 & \text{se } x \in ]5, 10]. \end{cases}$$

3. Determinare l'area della regione piana delimitata da:

- (i) la retta  $y = x$  e la parabola  $y = x^2$ ;
- (ii) le parabole  $y^2 = 9x$  e  $x^2 = 9y$ ;
- (iii) l'ellisse  $\frac{x^2}{9} + 4y^2 = 1$ ;
- (iv) le rette  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y = 2x - 5$ .

4. Calcolare le primitive di  $x^n e^{-x}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Calcolare i seguenti integrali

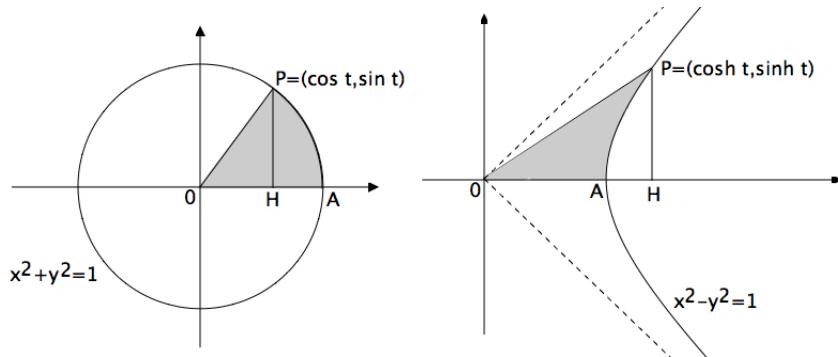
$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 9x dx, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 10x dx, \quad \int_0^{\pi/4} \tan x dx, \quad \int_{-3}^0 2^{-x} dx, \\ & \int_1^{100} \frac{\ln x}{x} dx, \quad \int_0^\pi \sin x \cos x dx, \quad \int_0^{10} \frac{x+2}{1+x^2} dx, \quad \int_0^2 8^{-x/3} dx. \end{aligned}$$

6. Si provi che se  $m, n \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

7. Per  $n \in \mathbb{N}^+$  verificare le seguenti formule:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = - \left[ \frac{\cos^n x \cos nx}{n} \right]_a^b, \\ & \int_a^b \cos^{n-1} x \cos(n+1)x dx = \left[ \frac{\cos^n x \sin nx}{n} \right]_a^b, \\ & \int_a^b \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx = \left[ \frac{\sin^n x \sin nx}{n} \right]_a^b, \\ & \int_a^b \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx = \left[ \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \right]_a^b. \end{aligned}$$



8. (i) Siano  $\mathbf{O} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{A} = (1, 0)$  e  $\mathbf{P} = (\cos t, \sin t)$ . Si provi, calcolando un opportuno integrale, che l'area del settore circolare  $\mathbf{OAP}$  della figura a sinistra è uguale a  $t/2$ .
- (ii) Sia inoltre  $\mathbf{Q} = (\cosh t, \sinh t)$ . Si provi, analogamente, che l'area del settore iperbolico  $\mathbf{OAQ}$  della figura a destra è pari a  $t/2$ .
9. Provare che se  $f$  è una funzione continua in  $[a, b]$  si ha

$$\int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt = \int_a^x (x-s) f(s) ds.$$

10. Provare che se  $f \in \mathcal{R}(0, a)$  si ha

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(a-t) dt,$$

e utilizzando questo risultato si calcoli l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

11. Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ . Provare che la serie è integrabile termine a termine in ogni intervallo  $[a, b]$  contenuto in  $] -R, R [$ , cioè che risulta

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \right]_a^b.$$

12. Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{lll}
\int_2^3 \frac{2x+1}{3x-1} dx, & \int_1^2 (x-1) e^{-x} \ln x dx, & \int_0^1 \sinh^2 x dx, \\
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}, & \int_0^1 \sqrt{e^x - 1} dx, & \int_{1/2}^1 x \ln^2 x dx, \\
\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx, & \int_{-1}^1 e^{e^x+x} dx, & \int_0^1 x \arctan x^2 dx, \\
\int_0^1 x \arctan^2 x dx, & \int_0^{10} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx, & \int_3^4 \sin \ln x dx, \\
\int_0^1 \frac{e^x - 2}{e^x + 1} dx, & \int_{-2}^2 x^7 \cosh^3 x^4 dx, & \int_e^{2e} \frac{\ln \ln x}{x} dx.
\end{array}$$

13. Dimostrare che se  $f$  è una funzione continua e non negativa in  $[a, b]$ , allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b f(x)^n dx \right]^{1/n} = \max_{[a,b]} f.$$

14. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^{m+1}$ . Si esprima il resto di Taylor in forma integrale, ossia si dimostri che per ogni  $x, x_0 \in [a, b]$  si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt.$$

**[Traccia:** per  $x \in [a, b]$  fissato si consideri la funzione

$$g(t) = f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n, \quad t \in [a, b],$$

e si applichi la formula  $g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(t) dt.$ ]

15. Posto  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ , si provi che

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \forall n \geq 2;$$

se ne deduca che

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ove  $k!!$  denota il prodotto di tutti i numeri naturali non superiori a  $k$  aventi la stessa parità di  $k$ .

16. (i) Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ . Provare che se esiste una funzione integrabile  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

- (ii) Si verifichi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n dx.$$

Come mai?

17. (*Irrazionalità di  $\pi$* ) Si consideri l'integrale

$$I_n = \frac{2}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Si verifichi che  $I_n > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Si provi per induzione che  $I_{n+1} = (4n+2)I_n - \pi^2 I_{n-1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .
- (iii) Se ne deduca che  $I_n = P_n(\pi^2)$ , ove  $P_n$  è un opportuno polinomio, di grado al più  $n$ , a coefficienti interi.
- (iv) Supposto per assurdo che  $\pi^2$  sia un razionale della forma  $p/q$ , si provi che  $q^n P_n(\pi^2) \in \mathbb{N}^+$  e che, d'altra parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n I_n = 0$ .
- (v) Si concluda che  $\pi$  è irrazionale.

18. Sia  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione di classe  $C^1$ . Si verifichi che

$$\int_a^x \mathbf{g}'(t) dt = \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

## 5.6 Integrazione delle funzioni razionali

Una *funzione razionale* della variabile complessa  $z$  è il rapporto fra due polinomi  $P(z)$  e  $Q(z)$ : quindi è una funzione continua in  $\mathbb{C} \setminus A$ , ove  $A$  è l'insieme (finito) delle radici del denominatore. A noi interesseranno funzioni razionali reali, in cui quindi la variabile è  $x \in \mathbb{R}$  e i polinomi sono a coefficienti reali; tali funzioni saranno continue, e dunque integrabili, in ogni intervallo chiuso e limitato  $I \subset \mathbb{R}$  privo di radici del denominatore.

### Decomposizione delle funzioni razionali

Come vedremo, è sempre possibile scrivere esplicitamente le primitive di una funzione razionale reale; per arrivare a questo risultato, però, occorrono alcuni preliminari relativi

alla decomposizione di tali funzioni in campo complesso.

Per fissare le idee, sia

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Se  $P(z)$  è divisibile per  $Q(z)$ , la funzione razionale si riduce a un polinomio e il calcolo delle sue primitive non presenta difficoltà. Escluderemo dunque questo caso; in particolare supporremo che  $P(z)$  non sia identicamente nullo e che  $Q(z)$  non abbia grado 0. Inoltre si può sempre supporre che i polinomi  $P$  e  $Q$  siano primi fra loro, ossia che non abbiano zeri comuni. Siano allora  $m \geq 0$  il grado del numeratore  $P$  e  $n > 0$  il grado del denominatore  $Q$ .

Una funzione razionale  $R$  si dice *propria* se risulta  $m < n$ . Se  $R$  non è propria, ossia vale  $m \geq n$ , è necessario preliminarmente fare la divisione euclidea di  $P$  per  $Q$ , ottenendo

$$P(z) = q(z)Q(z) + r(z),$$

ove  $q$  ha grado  $m - n \geq 0$  e il grado di  $r$  è minore di  $n$ ; quindi sarà

$$R(z) = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)},$$

e l'integrazione esplicita di  $R$  si riduce a quella della nuova funzione razionale  $\tilde{R} = \frac{r}{Q}$ , che è propria. Supporremo dunque, d'ora in avanti, che la funzione razionale  $R$  sia propria.

**Proposizione 5.6.1** *Sia  $P$  un polinomio di grado  $m$  e sia  $Q$  un polinomio di grado  $n$ , con  $m < n$ . La funzione razionale  $R = \frac{P}{Q}$  si può univocamente decomporre nella somma*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,k}}{(z - \alpha_i)^k},$$

ove  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sono le radici di  $Q$ ,  $\nu_1, \dots, \nu_r$  sono le rispettive molteplicità (con  $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$ ) e le  $A_{i,k}$  sono costanti complesse.

**Dimostrazione** La formula che dobbiamo dimostrare è vera, per certi coefficienti  $A_{i,k} \in \mathbb{C}$ , se e solo se, moltiplicando per  $Q(z)$  e ponendo  $Q_{ik}(z) = \frac{Q(z)}{(z - \alpha_i)^k}$ , tali  $A_{i,k}$  risolvono

$$P(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\nu_i} A_{i,k} Q_{ik}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

si noti che ciascun  $Q_{ik}$  è un polinomio (di grado  $n - k$ ). Questa identità fra polinomi è vera se e solo se i rispettivi coefficienti sono ordinatamente uguali: dunque essa vale se e solo se gli  $n$  numeri  $A_{i,k}$  verificano un opportuno sistema algebrico di  $n$  equazioni lineari non omogenee. Tale sistema è risolubile univocamente se e solo se il determinante dei suoi coefficienti è non nullo; e ciò accade se e solo se il corrispondente sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione nulla. Sia dunque  $\{A_{i,k}^* : 1 \leq i \leq r; 1 \leq k \leq \nu_i\}$  una

$n$ -pla di numeri che risolve tale sistema lineare omogeneo: se proveremo che gli  $A_{i,k}^*$  sono tutti nulli avremo provato la tesi. Vale dunque

$$0 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\nu_i} A_{i,k}^* Q_{ik}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Moltiplichiamo tale relazione per  $(z - \alpha_1)^{\nu_1}$  e calcoliamo per  $z = \alpha_1$ : si ottiene  $A_{1,\nu_1}^* = 0$  e nella somma precedente si può rimuovere l'addendo  $A_{1,\nu_1}^* Q_{1\nu_1}(z)$ . Moltiplicandola ora per  $(z - \alpha_1)^{\nu_1-1}$  e calcolando per  $z = \alpha_1$  si ricava  $A_{1,\nu_1-1}^* = 0$ , e procedendo in questo modo si arriva a dire che  $A_{1,k}^* = 0$  per  $k = 1, \dots, \nu_1$ . La relazione precedente diventa così

$$0 = \sum_{i=2}^r \sum_{k=1}^{\nu_i} A_{i,k}^* Q_{ik}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Moltiplicando per  $(z - \alpha_2)^{\nu_2}$ , poi per  $(z - \alpha_2)^{\nu_2-1}$ , e così via, si ottiene analogamente  $A_{2,k}^* = 0$  per  $k = 1, \dots, \nu_2$ . In modo analogo si trova alla fine  $A_{i,k}^* = 0$  per  $k = 1, \dots, \nu_r$  e  $i = 1, \dots, r$ . Dunque gli  $A_{i,k}^*$  sono tutti nulli e la formula è dimostrata.  $\square$

**Esempio 5.6.2** Sia data la funzione razionale

$$\frac{z^4 - 3z^2 + 7z - 8}{(z-1)^2(z+2)};$$

poiché essa non è propria, effettuando la divisione euclidea abbiamo, con facile verifica,

$$\frac{z^4 - 3z^2 + 7z - 8}{(z-1)^2(z+2)} = z - 3 + \frac{3z^2 - 4z - 2}{(z-1)^2(z+2)}.$$

La proposizione precedente ci dice che

$$\frac{3z^2 - 4z - 2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+2}.$$

Per calcolare i valori delle tre costanti si moltiplica per  $(z-1)^2(z+2)$ , ottenendo

$$3z^2 - 4z - 2 = A(z-1)(z+2) + B(z+2) + C(z-1)^2,$$

ossia

$$3z^2 - 4z - 2 = (A+C)z^2 + (A+B-2C)z + (-2A+2B+C).$$

Dunque deve avversi

$$A + C = 2, \quad A + B - 2C = -4, \quad -2A + 2B + C = -2.$$

Ne segue  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$ , e in conclusione

$$\frac{3z^2 - 4z - 2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z+2}.$$

Una variante della decomposizione precedente è data dalla seguente

**Proposizione 5.6.3 (formula di Hermite)** *Sia  $P$  un polinomio di grado  $m$  e sia  $Q$  un polinomio di grado  $n$ , con  $m < n$ . La funzione razionale  $R = \frac{P}{Q}$  si può univocamente decomporre nella somma*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{(z - \alpha_i)} + \frac{d}{dz} \frac{H(z)}{\prod_{i=1}^r (z - \alpha_i)^{\nu_i-1}},$$

ove  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sono le radici di  $Q$ ,  $\nu_1, \dots, \nu_r$  sono le rispettive molteplicità (con  $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$ ), le  $A_i$  sono costanti complesse e  $H(z)$  è un polinomio; quest'ultimo ha grado minore di  $n - r$  ed è nullo se  $Q$  ha tutte radici semplici.

**Dimostrazione** Basta isolare nella decomposizione della proposizione 5.6.1 gli addendi con  $k = 1$ , e riscrivere i rimanenti, se ve ne sono, nella forma

$$\frac{A_{i,k}}{(z - \alpha_i)^k} = -\frac{d}{dz} \frac{A_{i,k}}{(k-1)(z - \alpha_i)^{k-1}}.$$

Si ottiene allora

$$R(z) = \sum_{i=1}^r \frac{A_{i,1}}{(z - \alpha_i)} - \frac{d}{dz} \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{\nu_i} \frac{A_{i,k}}{(k-1)(z - \alpha_i)^{k-1}};$$

ma l'ultima somma si può raccogliere in una funzione razionale che ha per denominatore il prodotto  $\prod_{i=1}^r (z - \alpha_i)^{\nu_i-1}$  (di grado  $n - r$ ) e per numeratore un certo polinomio  $H(z)$  di grado minore di  $n - r$ . L'unicità della decomposizione segue dall'unicità garantita dalla proposizione 5.6.1.  $\square$

**Esempi 5.6.4 (1)** Consideriamo la funzione razionale

$$R(z) = \frac{z}{z^2 + 4},$$

il cui denominatore ha radici  $\pm 2i$ . La formula di Hermite ci dice che

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{A}{z + 2i} + \frac{B}{z - 2i};$$

moltiplicando per  $z - 2i$  e calcolando in  $z = 2i$ , e poi moltiplicando per  $z + 2i$  e calcolando in  $z = -2i$ , troviamo immediatamente  $B = \frac{1}{2}$  e  $A = \frac{1}{2}$ : pertanto

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{1}{2(z + 2i)} + \frac{1}{2(z - 2i)}.$$

**(2)** Per la funzione razionale

$$\frac{3z^3 + z^2 - 5z - 1}{(z - 1)^2(z + 1)^2}$$

la proposizione 5.6.3 fornisce (essendo  $n = 4$  e  $r = 2$ )

$$\frac{z^4 + 3z^3 - z^2 - 5z}{(z - 1)^2(z + 1)^2} = 1 + \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} + \frac{d}{dz} \frac{Cz + D}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Conviene eseguire la derivata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \frac{Cz+D}{(z-1)(z+1)} &= \frac{d}{dz} (Cz+D)(z-1)^{-1}(z+1)^{-1} = \\ &= \frac{C}{(z-1)(z+1)} - \frac{Cz+D}{(z-1)^2(z+1)} - \frac{Cz+D}{(z-1)(z+1)^2}.\end{aligned}$$

A questo punto, possiamo moltiplicare per  $(z-1)^2(z+1)^2$  l'equazione

$$\begin{aligned}\frac{z^4 + 3z^3 - z^2 - 5z}{(z-1)^2(z+1)^2} - 1 &= \frac{3z^3 + z^2 - 5z - 1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \\ &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z-1)(z+1)} - \frac{Cz+D}{(z-1)^2(z+1)} - \frac{Cz+D}{(z-1)(z+1)^2}\end{aligned}$$

e uguagliare i coefficienti dei polinomi che si ottengono a primo e secondo membro: questo determina i valori di  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , ma i calcoli sono noiosi. Procediamo invece in questo modo: moltiplicando l'equazione per  $(z-1)^2$  e calcolando in  $z = 1$ , troviamo

$$-\frac{1}{2} = -\frac{C+D}{2},$$

mentre moltiplicando per  $(z+1)^2$  e calcolando in  $z = -1$  si ha

$$\frac{1}{2} = \frac{-C+D}{2},$$

da cui  $D = 1$  e  $C = 0$ . Risulta allora

$$\frac{3z^3 + z^2 - 5z - 1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} - \frac{1}{(z-1)(z+1)^2},$$

da cui, moltiplicando per  $z$  e mandando  $|z|$  all'infinito,  $3 = A+B$ ; infine, calcolando in  $z = 0$ , abbiamo  $-1 = -A+B$ . Dunque  $B = 1$  e  $A = 2$ . In definitiva

$$\frac{3z^3 + z^2 - 5z - 1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-1)(z+1)}.$$

Decomponendo le funzioni razionali in campo complesso, si ottengono in generale coefficienti complessi. Se la funzione razionale in esame è di variabile reale  $x$  ed a valori reali, naturalmente la formula di Hermite vale ancora, ma poiché le radici  $\alpha_i$  dell'equazione  $Q(x) = 0$  possono essere complesse, anche i coefficienti che si trovano nella decomposizione resteranno in generale complessi. Nel caso di funzioni razionali reali vi è però un'altra formula di decomposizione, lievemente più complicata, ma a coefficienti reali.

**Proposizione 5.6.5** *Sia  $P$  un polinomio a coefficienti reali di grado  $m$  e sia  $Q$  un polinomio a coefficienti reali di grado  $n$ , con  $m < n$ . La funzione razionale reale  $R = \frac{P}{Q}$  si può univocamente decomporre nella somma*

$$\begin{aligned}R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{h=1}^p \frac{A_h}{(x - \alpha_h)} + \sum_{j=1}^q \frac{B'_j x + C'_j}{(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2} + \\ &+ \frac{d}{dx} \frac{H(x)}{\prod_{h=1}^p (x - \alpha_h)^{\nu_h-1} \prod_{j=1}^q [(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2]^{\mu_j-1}},\end{aligned}$$

ove le  $A_h$ ,  $B'_j$  e  $C'_j$  sono costanti reali,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sono le radici reali di  $Q$  con rispettive molteplicità  $\nu_1, \dots, \nu_p$ ,  $\beta_1 \pm i\gamma_1, \dots, \beta_q \pm i\gamma_q$  sono le radici complesse di  $Q$ , a due a due coniugate, con rispettive molteplicità  $\mu_1, \dots, \mu_q$  (con  $\nu_1 + \dots + \nu_p + 2\mu_1 + \dots + 2\mu_q = n$ ), e  $H(x)$  è un polinomio a coefficienti reali; quest'ultimo ha grado minore di  $n - p - 2q$  ed è nullo se  $Q$  ha tutte radici semplici.

**Dimostrazione** Applicando la formula di Hermite con variabile complessa  $z$ , si può scrivere

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{h=1}^p \frac{A_h}{(z - \alpha_h)} + \sum_{j=1}^q \left[ \frac{B_j}{z - \beta_j - i\alpha_j} + \frac{C_j}{z - \beta_j + i\alpha_j} \right] + \frac{d}{dz} \frac{H(z)}{K(z)},$$

ove

$$K(z) = \prod_{h=1}^p (z - \alpha_h)^{\nu_h-1} \prod_{j=1}^q [(z - \beta_j)^2 + \gamma_j^2]^{\mu_j-1}$$

e  $H(z)$  è un polinomio con grado minore di  $n - r = n - p - 2q$ .

Osserviamo che il polinomio  $q(z)$  ha coefficienti reali, perché è il quoziente di due polinomi a coefficienti reali. Vogliamo mostrare che i coefficienti  $A_h$  sono reali, il polinomio  $H$  è a coefficienti reali, e i  $B_j$  e i  $C_j$  sono fra loro coniugati. A questo scopo, calcoliamo il coniugato della funzione razionale  $R(z)$ : dato che  $P, Q, q, K$  hanno coefficienti reali, ed osservato che per ogni polinomio  $g(z)$  risulta

$$\overline{\frac{d}{dz} g(z)} = \overline{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(z+t) - g(z)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{g}(\bar{z} + \bar{t}) - \bar{g}(\bar{z})}{\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{g}(\bar{z}),$$

si trova

$$\begin{aligned} \overline{R(z)} &= \overline{\frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})}} = \\ &= \sum_{h=1}^p \frac{\overline{A_h}}{(\bar{z} - \alpha_h)} + \sum_{j=1}^q \left[ \frac{\overline{B_j}}{\bar{z} - \beta_j + i\alpha_j} + \frac{\overline{C_j}}{\bar{z} - \beta_j - i\alpha_j} \right] + \frac{d}{d\bar{z}} \overline{\frac{H(\bar{z})}{K(\bar{z})}}, \end{aligned}$$

ma in questa identità rispetto a  $\bar{z}$ , valida in un dominio del piano complesso che è simmetrico rispetto all'asse reale, possiamo scrivere  $z$  in luogo di  $\bar{z}$ , ottenendo

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{h=1}^p \frac{\overline{A_h}}{(z - \alpha_h)} + \sum_{j=1}^q \left[ \frac{\overline{C_j}}{z - \beta_j - i\alpha_j} + \frac{\overline{B_j}}{z - \beta_j + i\alpha_j} \right] + \frac{d}{dz} \overline{\frac{H(z)}{K(z)}}.$$

Confrontando questa decomposizione con quella iniziale, per unicità ricaviamo

$$\overline{A_h} = A_h, \quad \overline{C_j} = B_j, \quad \overline{B_j} = C_j, \quad \overline{H}(z) \equiv H(z),$$

ossia  $A_h \in \mathbb{R}$ ,  $C_j$  e  $B_j$  sono fra loro coniugati e  $H$  ha coefficienti reali, come richiesto. Allora, raccogliendo gli addendi contenenti  $B_j$  e  $C_j$  abbiamo

$$\frac{B_j}{z - \beta_j - i\alpha_j} + \frac{C_j}{z - \beta_j + i\alpha_j} = \frac{2\operatorname{Re}[B_j(z - \alpha_j + i\beta_j)]}{(z - \alpha_j)^2 + \beta_j^2}.$$

Dunque, scrivendo la decomposizione iniziale per la variabile reale  $x$ , otteniamo finalmente, con  $B'_j = 2\operatorname{Re} B_j$  e  $C'_j = -2\alpha_j \operatorname{Re} B_j$ ,

$$R(x) = \sum_{h=1}^p \frac{A_h}{(x - \alpha_h)} + \sum_{j=1}^q \frac{B'_j x + C'_j}{(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2} + \frac{d}{dx} \frac{H(x)}{K(x)},$$

che è la tesi.  $\square$

**Esempio 5.6.6** Consideriamo la funzione razionale

$$\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+1)^2}.$$

Il denominatore ha grado  $n = 6$  e radici  $0, 1$  (semplici) e  $i, -i$  (doppie): dunque  $n - r = 2$ . La proposizione 5.6.5 ci dice che

$$\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Poiché

$$\frac{d}{dx} \frac{Ex+F}{x^2+1} = \frac{d}{dx} (Ex+F)(x^2+1)^{-1} = \frac{E}{x^2+1} - \frac{2Ex^2+2Fx}{(x^2+1)^2},$$

si ha

$$\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x^2+1} - \frac{2Ex^2+2Fx}{(x^2+1)^2},$$

da cui, moltiplicando per  $x$  e calcolando in  $x = 0$  ricaviamo subito  $A = -3$ . Analogamente, moltiplicando per  $x-1$  e calcolando in  $x = 1$ , abbiamo  $B = 1$ . Per trovare  $C, D, E, F$  si può calcolare l'equazione in quattro punti diversi da  $0$  e  $1$ , uno dei quali può essere (dopo aver moltiplicato per  $x$ )  $x = \infty$ . Per esempio, scegliendo quest'ultima opzione troviamo  $0 = -3 + 1 + C$ , ossia  $C = 2$ , e si ha dunque

$$\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+1)^2} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+D}{x^2+1} + \frac{E}{x^2+1} - \frac{2Ex^2+2Fx}{(x^2+1)^2}.$$

Con  $x = -1, x = 2, x = -2$  si ricava

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} + \frac{D-2}{2} + \frac{E}{2} - \frac{E-F}{2}, \\ \frac{7}{50} = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{4+D}{5} + \frac{E}{5} - \frac{8E+4F}{25}, \\ \frac{7}{150} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{D-4}{5} + \frac{E}{5} - \frac{8E-4F}{25}. \end{cases}$$

Con facili semplificazioni, questo sistema diventa

$$\begin{cases} D+F = -2 \\ 10D-6E-8F = 22 \\ 30D-18E+24F = -48, \end{cases}$$

e le sue soluzioni sono  $D = -\frac{1}{16}$ ,  $E = \frac{1}{48}$ ,  $F = -\frac{49}{16}$ . Quindi si conclude che

$$\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+1)^2} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{32x+1}{16(x^2+1)} - \frac{d}{dx} \frac{x-147}{48(x^2+1)}.$$

La formula di decomposizione fornita dalla proposizione 5.6.5 è fondamentale per scrivere esplicitamente le primitive di una funzione razionale reale. Naturalmente, per utilizzarla occorre essere in grado di risolvere preliminarmente l'equazione algebrica  $Q(x) = 0$ : questa è la vera difficoltà nell'uso di tale formula.

**Corollario 5.6.7** *Sia  $P$  un polinomio a coefficienti reali di grado  $m$  e sia  $Q$  un polinomio a coefficienti reali di grado  $n$ , con  $m < n$ . La funzione razionale reale  $R = \frac{P}{Q}$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso  $I$  che non contenga radici di  $Q$ , e una primitiva  $F$  di  $R$  in  $I$  è*

$$F(x) = \sum_{h=1}^p A_h \ln|x - \alpha_h| + \sum_{j=1}^q \left[ \frac{B'_j}{2} \ln[(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2] + \frac{B'_j \beta_j - C'_j}{\gamma_j} \arctan \frac{x - \beta_j}{\gamma_j} \right].$$

## Integrali riducibili ad integrali di funzioni razionali

Svariati tipi di integrali possono ricondursi, con opportune sostituzioni, ad integrali di funzioni razionali del tipo già visto.

(A) Consideriamo un integrale della forma

$$\mathcal{I} = \int_I R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_m} \right) dx,$$

ove  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $R$  è una funzione razionale di  $m+1$  variabili,  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Q}$ ,  $a, b, c, d$  sono numeri reali tali che l'integrando abbia senso e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrando. Detto  $k$  il minimo comune multiplo dei denominatori di  $r_1, \dots, r_m$ , con la sostituzione

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

l'integrale si trasforma nell'integrale di una funzione razionale su un opportuno intervallo  $J$ . Infatti si ha, posto  $I = [p, q]$ ,

$$\mathcal{I} = k(ad-bc) \int_J R \left( \left( \frac{dt^k - b}{a - ct^k} \right), t^{kr_1}, \dots, t^{kr_m} \right) \frac{t^{k-1}}{(a - ct^k)^2} dt,$$

ove  $J$  è l'intervallo di estremi  $\sqrt[k]{\frac{ap+b}{cp+d}}$  e  $\sqrt[k]{\frac{aq+b}{cq+d}}$ .

**Esempio 5.6.8** Sia

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \frac{1 + \sqrt{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

In questo caso  $I = [1, 2]$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,  $m = 2$  e  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}$ . Si ha allora  $k = 6$ , e ponendo  $x = t^6$  si ha  $J = [1, \sqrt[6]{2}]$  e

$$\mathcal{I} = 6 \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1+t^3}{t^6(1+t^2)} t^5 dt;$$

con divisione euclidea e decomposizione di Hermite ricaviamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 6 \int_1^{\sqrt[6]{2}} \left( 1 + \frac{1}{t} - \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= 6 \left[ t + \ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - \arctan t \right]_1^{\sqrt[6]{2}} = \\ &= 6\sqrt[6]{2} + 4 \ln 2 - 3 \ln(\sqrt[3]{2}+1) - 6 \arctan \sqrt[6]{2} - 6 + \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

**(B)** Consideriamo l'integrale seguente, detto *integrale binomio*:

$$\mathcal{I} = \int_I x^r (a + bx^s)^\sigma dx,$$

ove  $r, s, \sigma \in \mathbb{Q}$ ,  $a, b$  sono numeri reali tali che l'integrando abbia senso e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrando. Questo integrale si riduce all'integrale di una funzione razionale nei casi seguenti:

$$(i) \sigma \in \mathbb{Z}; \quad (ii) \frac{r+1}{s} \in \mathbb{Z}; \quad (iii) \frac{r+1}{s} + \sigma \in \mathbb{Z}.$$

Infatti, nel caso (i) basta eseguire la sostituzione  $x = t^k$ , ove  $k$  è il minimo comune multiplo dei denominatori di  $r$  e  $s$ , per ottenere, posto  $I = [p, q]$ ,

$$\mathcal{I} = k \int_J t^{kr} (a + bt^{ks})^\sigma t^{k-1} dt,$$

ove  $J$  è l'intervallo di estremi  $p^{1/k}, q^{1/k}$ . Si noti che in questo integrale tutti gli esponenti sono interi, e che comunque questo è un caso particolare di integrale del tipo (1) precedente.

Nel caso (ii), con la sostituzione  $a + bx^s = t^h$ , ove  $h$  è il denominatore di  $\sigma$ , si ha  $x = b^{-1/s}(t^h - a)^{1/s}$  e dunque

$$\mathcal{I} = \frac{h}{s} b^{-1/s} \int_J (t^h - a)^{\frac{r+1}{s}-1} t^{h\sigma+h-1} dt,$$

ove tutti gli esponenti sotto integrale sono interi e  $J$  è l'intervallo di estremi  $(a + bp^s)^{1/h}$  e  $(a + bq^s)^{1/h}$ .

Infine nel caso (iii) si deve porre

$$\frac{a + bx^s}{x^s} = t^h$$

ove  $h$  è di nuovo il denominatore di  $\sigma$ : allora  $x = a^{1/s}(t^h - b)^{-1/s}$ , da cui

$$\mathcal{I} = -\frac{h}{s} a^{\frac{r+1}{s} + \sigma} \int_J (t^h - b)^{-\frac{r+1}{s} - \sigma - 1} t^{\sigma h + h - 1} dt,$$

ove gli esponenti sono tutti interi e  $J$  è l'intervallo di estremi  $\frac{a+bp^s}{p^s}$  e  $\frac{a+bq^s}{q^s}$ .

**Esempi 5.6.9 (1)** Consideriamo l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_8^{27} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

Dato che  $r = -\frac{1}{2}$ ,  $s = \frac{1}{3}$  e  $\sigma = -2$ , esso è di tipo (i): quindi, essendo  $k = 6$ , poniamo  $x = t^6$  e l'integrale diventa

$$\mathcal{I} = 6 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Utilizzando la proposizione 5.6.5, si ottiene la decomposizione

$$\mathcal{I} = 6 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2(1 + t^2)} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{t}{1 + t^2} \right] dt,$$

da cui

$$\mathcal{I} = \left[ 3 \arctan t - \frac{3t}{1 + t^2} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 3 \arctan \sqrt{3} - 3 \arctan \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}.$$

**(2)** L'integrale

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^3 + 1}}$$

è di tipo (ii), poiché  $r = -4$ ,  $s = 3$ ,  $\sigma = -\frac{1}{2}$  e dunque  $\frac{r+1}{s} = -1$ . Posto  $1 + x^3 = t^2$ , l'integrale diventa

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}.$$

Con i metodi di decomposizione già visti, si ottiene a questo punto

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \left[ -\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{d}{dt} \frac{t}{t^2-1} \right] dt = \\ &= \frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{4} \ln(t-1) + \frac{1}{4} \ln(t+1) - \frac{t}{t^2+1} \right]_{\sqrt{2}}^3 = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**(3)** Per l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx$$

si ha  $r = -3$ ,  $s = 4$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$  e dunque, essendo  $\frac{r+1}{s} + \sigma = 0$ , esso è di tipo (iii). Poniamo dunque  $\frac{1+x^4}{x^4} = t^2$ , e si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= -\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left[ 1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right] dt = \\ &= \left[ -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} \right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} = -\frac{\sqrt{17}}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4} - \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

(C) Consideriamo adesso un integrale del tipo

$$\mathcal{I} = \int_I R(\cos x, \sin x) dx,$$

ove  $R$  è una funzione razionale di due variabili e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrando. Questo integrale si razionalizza con la sostituzione standard  $\tan \frac{x}{2} = t$ . Infatti, ricordando le formule (esercizio 1.12.11)

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

e tenendo conto che  $x = 2 \arctan t$ , si ha

$$\mathcal{I} = 2 \int_J R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

**Esempio 5.6.10** Si consideri l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dx}{3 - 3 \sin x + \cos x}.$$

Con la sostituzione sopra indicata si trova facilmente

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_{-1}^0 \frac{dt}{(t-2)(t-1)},$$

e con i metodi di decomposizione ormai consueti si ottiene

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right] dt = \left[ \ln \frac{t-2}{t-1} \right]_{-1}^0 = \ln \frac{4}{3}.$$

Sono integrali del tipo precedente anche i seguenti:

- (i)  $\int_I R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx$ ,      (ii)  $\int_I R(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx$ ,
- (iii)  $\int_I R(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x) dx$ ,    (iv)  $\int_I R(\tan x) dx$ ;

per essi tuttavia si possono usare sostituzioni più semplici. Nel caso (i) si pone  $\sin x = t$ , mentre nel caso (ii) si usa  $\cos x = t$  e si ottiene rispettivamente

$$\int_J R(t, 1 - t^2) dt, \quad - \int_J R(1 - t^2, t) dt$$

ove  $J$  è l'intervallo corrispondente ad  $I$  nella variabile  $t$ . Nel caso (iii) e nel caso (iv) (che è un caso particolare di (iii)) la sostituzione da usare è  $\tan x = t$ , e si trova

$$\int_J R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

**Esempi 5.6.11 (1)** L'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^3 x} \sin x dx$$

diventa, posto  $\cos x = t$ ,

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right] dt = \frac{15}{8} - 2 \ln 2.$$

**(2)** L'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{4 - 3 \cos^2 x} dx$$

è del tipo (iii) e dunque, posto  $\tan x = t$ , si trasforma come segue:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{4 - 3 \frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)(1+4t^2)} dt.$$

Dunque

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+4t^2} \right] dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} \arctan 4.$$

**(D)** Gli integrali della forma

$$\mathcal{I} = \int_I R(e^{\alpha x}) dx,$$

ove  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $R$  è una funzione razionale e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrandino, si razionalizzano con la sostituzione  $e^{\alpha x} = t$ , che li trasformano in

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\alpha} \int_J R(t) \frac{1}{t} dt,$$

ove  $J$  è l'intervallo della variabile  $t$  corrispondente ad  $I$ .

**Esempio 5.6.12** Si ha

$$\int_1^3 \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx = \int_e^{e^3} \frac{t^2 + t}{t(t-1)} dt = \int_e^{e^3} \left[ 1 + \frac{2}{t-1} \right] dt = e^3 - e + 2 \ln \frac{e^3 - 1}{e - 1}.$$

(E) Consideriamo infine un integrale di una delle due forme

$$(i) \mathcal{I}' = \int_I R(x, \sqrt{x^2 + ax + b}) dx, \quad (ii) \mathcal{I}'' = \int_I R(x, \sqrt{-x^2 + ax + b}) dx,$$

ove  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $R$  è una funzione razionale e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrando. Nel caso (i), si fa la sostituzione  $\sqrt{x^2 + ax + b} - x = t$ ; allora

$$x = \frac{t^2 - b}{a + 2t}, \quad dx = 2 \frac{t^2 + at + b}{(a + 2t)^2} dt,$$

e quindi l'integrale diventa

$$\mathcal{I}' = 2 \int_J R\left(\frac{t^2 - b}{a + 2t}, \frac{t^2 - b}{a + 2t} + t\right) \frac{t^2 + at + b}{(a + 2t)^2} dt,$$

ove  $J$  è l'intervallo della variabile  $t$  corrispondente ad  $I$ . Nel caso (ii), osservato che il polinomio sotto radice deve essere positivo in  $I$ , si deduce che esso ha discriminante positivo e quindi possiede due radici reali  $\alpha$  e  $\beta$  con  $\alpha < \beta$ . Occorre allora fattorizzare il radicando nella forma  $-x^2 + ax + b = (x - \alpha)(\beta - x)$  e porre

$$\sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}} = t.$$

Si ha allora

$$x = \frac{\beta t^2 + \alpha}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2(\beta - \alpha)t}{1 + t^2} dt,$$

e quindi, essendo  $\sqrt{-x^2 + ax + b} = t(\beta - x)$ , l'integrale diventa

$$\mathcal{I}'' = 2 \int_J R\left(\frac{\beta t^2 + \alpha}{1 + t^2}, t\left(\beta - \frac{\beta t^2 + \alpha}{1 + t^2}\right)\right) \frac{(\beta - \alpha)t}{1 + t^2} dt.$$

**Esempi 5.6.13 (1)** Consideriamo l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Siamo nel caso (i): posto  $\sqrt{x^2 - 2x} - x = t$  si ha facilmente, fatte le dovute semplificazioni,

$$\mathcal{I} = -2 \int_{2(1+\sqrt{2})}^{1+\sqrt{3}} \frac{dt}{2t + 1} = \ln \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

**(2)** Consideriamo l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Si ha  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 2$ , e con la sostituzione  $\sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = t$  si trova facilmente, attraverso il metodo di decomposizione di Hermite,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{3t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{1+t^2} - 2 \frac{d}{dt} \frac{t}{1+t^2} \right] dt = \\ &= \left[ \arctan t - \frac{2t}{1+t^2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

## Esercizi 5.6

1. Sia  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  una funzione razionale. Se  $\alpha$  è una radice reale semplice di  $Q$ , si verifichi che nella decomposizione di Hermite di  $R$  compare l'addendo

$$\frac{A}{x - \alpha}, \quad \text{con} \quad A = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

2. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$\begin{array}{lll} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}, & \int_5^7 \frac{dx}{3x^2 - 9}, & \int_2^3 \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}, \\ \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx, & \int_{-1}^1 \frac{|x| + 1}{x^2 + 5x + 6} dx, & \int_2^3 \frac{2x^2 - 3}{x^4 - x^3} dx, \\ \int_0^2 \frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx, & \int_0^1 \frac{x^5 - 9x}{x^4 - 4x^2 - 1} dx, & \int_{-1}^1 \frac{x^3 - 2}{x^4 + 1} dx, \\ \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx, & \int_0^1 \frac{dx}{(x^4 + x^2 + 1)^2}, & \int_0^1 \frac{x^8}{(x^3 + 1)^3} dx, \\ \int_0^1 \frac{x - 1}{4x^3 - x} dx, & \int_1^2 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 2)^2} & \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx. \end{array}$$

3. Calcolare i seguenti integrali di tipo (A):

$$\begin{array}{lll} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x - \sqrt{x}}, & \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, & \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x \sqrt[3]{1-x}}, \\ \int_1^4 \frac{\sqrt{1+x}}{x^2} dx, & \int_2^3 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} dx, & \int_1^2 \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} dx, \\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} dx, & \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}, & \int_0^1 \frac{2 + \sqrt[3]{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} dx. \end{array}$$

4. Calcolare i seguenti integrali binomi:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})^2} dx, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4 \sqrt{1-x^3}}, \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^5} dx, \\ & \int_0^1 \sqrt{(1 - \sqrt[3]{x^2})^3} dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^3+1}} dx, \\ & \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx, \quad \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}} dx, \quad \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx. \end{aligned}$$

5. Calcolare i seguenti integrali di tipo (C):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{dx}{1 - 3 \sin x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx, \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 + \cos x}{(5 + 3 \cos x) \cos x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{1 + \sin^2 x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx. \end{aligned}$$

6. Verificare che un integrale del tipo

$$\int_I \cos^r x \sin^s x dx,$$

ove  $r, s \in \mathbb{Q}$ , è calcolabile con la sostituzione  $\sin x = \sqrt{t}$  nei casi seguenti:

(i)  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r$  dispari, (ii)  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s$  dispari, (iii)  $r+s \in \mathbb{N}$ ,  $r+s$  pari;  
se ne deduca che quando  $r, s \in \mathbb{Z}$  tale integrale è sempre calcolabile.

7. Calcolare i seguenti integrali utilizzando l'esercizio precedente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^3 x} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \sqrt{\cos^3 x}}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^5 x}{\sin x}} dx.$$

8. Calcolare i seguenti integrali di tipo (D):

$$\int_0^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x + 1} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^{5x} - 5} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}}}{e^x + 1} dx.$$

9. Calcolare i seguenti integrali di tipo (E):

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx, \\ & \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \sqrt{4x - 3x^2}}{(1-x)^2} dx, \\ & \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}, \quad \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{4}} \frac{x^3 + x}{\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2}} dx, \\ & \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1} dx, \quad \int_0^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{25+16x^2} dx. \end{aligned}$$

10. Si provi che un integrale della forma

$$\int_I R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx,$$

ove  $R$  è una funzione razionale di tre variabili,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0, c \neq 0$  e  $ad - bc \neq 0$ , e  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrandi, è riducibile ad un integrale di tipo (E) con la sostituzione  $ax+b = t^2$ ; si calcoli con questo metodo l'integrale

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4x+2} - 2x}{2x - \sqrt{4x-1}} dx.$$

11. Si provi che gli integrali della forma

$$\begin{aligned} \text{(i)} & \int_I R\left(x, \left(\frac{ae^x + b}{ce^x + d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ae^x + b}{ce^x + d}\right)^{r_m}\right) dx, \\ \text{(ii)} & \int_I R\left(e^x, \sqrt{ae^{2x} + be^x + c}\right) dx, \\ \text{(ii)} & \int_I R\left(e^x, \sqrt{ae^x + b}, \sqrt{ce^x + d}\right) dx \end{aligned}$$

ove  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $R$  è una funzione razionale,  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Q}$ ,  $a, b, c, d$  sono numeri reali tali che gli integrandi abbiano senso e per ciascun integrale  $I$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  contenuto nell'insieme di definizione dell'integrandi, sono riducibili, con opportune sostituzioni, ad integrali dei tipi (A), (B).

## 5.7 Formula di Stirling

La formula di Stirling è una stima che descrive in modo molto preciso il comportamento asintotico della successione  $\{n!\}_{n \in \mathbb{N}}$ , e che è di grande importanza sia teorica che applicativa. La sua dimostrazione, non banale ma nemmeno troppo difficile, richiede l'uso di molti degli strumenti del calcolo che abbiamo fin qui analizzato. Naturalmente, il risultato espresso dalla formula di Stirling implica quello dell'esempio 2.7.10 (3) e, a maggior ragione, quello degli esercizi 1.6.18 e 4.3.15.

**Teorema 5.7.1 (formula di Stirling)** *Risulta*

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12(n+1)}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

**Dimostrazione** Dividiamo l'argomentazione in quattro passi.

**1º passo** Proviamo che esiste  $A > 0$  tale che

$$A\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12(n+1)}} < n! < A\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cosicché, in particolare

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = A.$$

Consideriamo a questo scopo la successione

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

e osserviamo anzitutto che, come è immediato verificare,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

D'altra parte, ricordando l'esercizio 4.3.9, si ha

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2n+1}{2} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Ne segue (esempio 2.2.6 (1))

$$1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}},$$

e dunque

$$e^{1+\frac{1}{3} \frac{1}{4n^2+4n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{3} \frac{1}{4n^2+4n}};$$

in particolare, essendo  $4(n+1)(n+2) > 4n^2 + 4n + 1$ , otteniamo

$$e^{1+\frac{1}{12(n+1)(n+2)}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Questa doppia diseguaglianza può essere riscritta nella forma

$$\frac{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12(n+2)}}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Ciò mostra che la successione  $\{a_n e^{-\frac{1}{12(n+1)}}\}$  è strettamente decrescente (oltre che limitata, essendo positiva) e quindi ha limite  $A \geq 0$ , mentre la successione  $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$  è strettamente crescente e converge necessariamente allo stesso limite  $A$ , visto che  $e^{\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$ : in particolare risulta  $A > 0$  e si ha, come si voleva,

$$Ae^{\frac{1}{12(n+1)}} < a_n < Ae^{\frac{1}{12n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Per definizione di  $a_n$ , ciò prova il 1º passo.

**2º passo** Proviamo la relazione

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}.$$

Consideriamo la successione  $\left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ : si verifica agevolmente (esercizio 5.5.15) che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x dx \quad \forall m \geq 2,$$

e da questa uguaglianza segue induttivamente, sempre per l'esercizio 5.5.15,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Quindi, dividendo la prima equazione per la seconda e rimaneggiando i termini, si ottiene

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

D'altra parte risulta per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$

$$1 < \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx} = \frac{2n+1}{2n} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx} \leq \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n},$$

il che implica

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}.$$

Ciò prova il 2º passo.

**3º passo** Dimostriamo che

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

Dal 2º passo deduciamo

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot 2n}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2},$$

e dunque

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot \sqrt{2n}}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 (2n)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Il 3<sup>o</sup> passo è provato.

**4<sup>o</sup> passo** Concludiamo la dimostrazione: Dal 1<sup>o</sup> passo abbiamo

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \left( \frac{e}{n} \right)^n;$$

d'altronde risulta, come è facile verificare,

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}},$$

e pertanto dai passi 3 e 1 segue

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}},$$

ovvero  $A = \sqrt{2\pi}$ .

Il 1<sup>o</sup> passo implica allora la validità della formula di Stirling.  $\square$

## Esercizi 5.7

- Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^{n+\frac{1}{12n}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

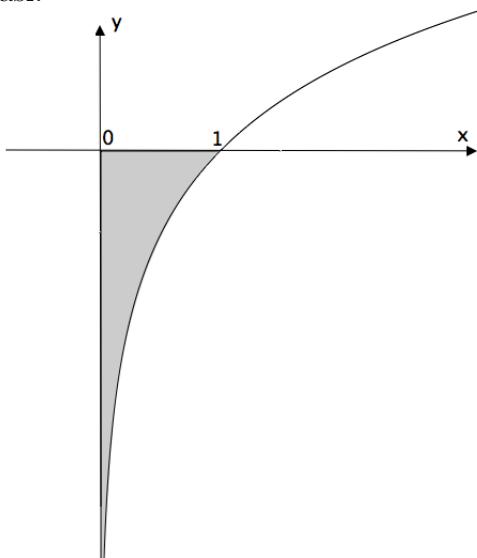
- Si dia una stima del numero di cifre che formano (in base 10) il numero  $1000!$ .

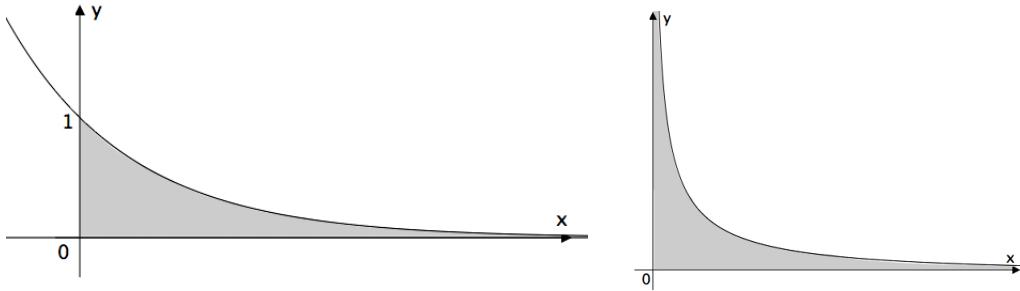
[Traccia: detto  $N$  il numero di cifre cercato, si osservi che deve essere  $10^{N-1} \leq 1000! < 10^N$  e si faccia uso della formula di Stirling nonché di una buona calcolatrice...]

## 5.8 Integrali impropri

La teoria dell'integrazione secondo Riemann si riferisce a funzioni limitate su intervalli limitati di  $\mathbb{R}$ . Se manca una di queste condizioni, si deve passare ai cosiddetti “integrali impropri”. Ci limiteremo a considerare tre casi:

- (i) l'integrale su un intervallo limitato di funzioni non limitate (ad esempio:  $\int_0^1 \ln x dx$ );
- (ii) l'integrale su intervalli non limitati di funzioni limitate (ad esempio:  $\int_0^\infty e^{-x} dx$ );
- (iii) le due cose insieme, ossia l'integrale su intervalli non limitati di funzioni non limitate (ad esempio:  $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ).





**Definizione 5.8.1 (i)** Sia  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f \in \mathcal{R}(c, b)$  per ogni  $c \in ]a, b[$ . Se esiste il limite (finito o infinito)

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

esso è detto integrale improprio di  $f$  su  $[a, b]$ , ed indicato col simbolo  $\int_a^b f(x) dx$ ; in tal caso la funzione  $f$  viene detta integrabile in senso improprio su  $[a, b]$ . Se l'integrale improprio di  $f$  è finito, la funzione  $f$  si dice sommabile in  $[a, b]$ .

(ii) Sia  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f \in \mathcal{R}(a, c)$  per ogni  $c > a$ . Se esiste il limite (finito o infinito)

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx,$$

esso è detto integrale improprio di  $f$  su  $[a, \infty[$  ed indicato col simbolo  $\int_a^\infty f(x) dx$ ; in tal caso la funzione  $f$  viene detta integrabile in senso improprio su  $[a, \infty[$ . Se l'integrale improprio di  $f$  è finito, la funzione  $f$  si dice sommabile su  $[a, \infty[$ .

In entrambi i casi (i) e (ii), l'integrale improprio di  $f$ , se esiste, si dice convergente o divergente a seconda che sia finito o infinito.

Modifiche opportune di questa definizione permettono di trattare i casi in cui  $f$  ha una singolarità nel punto  $b$ , anziché in  $a$ , oppure è definita su  $] -\infty, a]$ , anziché su  $[a, \infty[$ . Tutto questo riguarda i casi (i) e (ii). Per il caso (iii), ci limitiamo a dire che l'integrale andrà spezzato in due integrali di tipo (i) e (ii), e che esso avrà senso se e solo se: (a) hanno senso entrambi i due pezzi, e (b) ha senso farne la somma. Ad esempio, l'integrale  $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  va inteso come  $\int_0^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_b^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ , ove  $b$  è un arbitrario numero positivo; naturalmente il valore dell'integrale non dipenderà dal modo in cui è stato spezzato, cioè non dipenderà dal punto  $b$ .

**Esempio 5.8.2** Calcoliamo i tre integrali citati all'inizio: si ha per ogni  $c > 0$ , integrando per parti,

$$\int_c^1 \ln x dx = [x \ln x]_c^1 - \int_c^1 1 dx = [x \ln x - x]_c^1 = -1 - c \ln c + c,$$

da cui

$$\exists \int_0^1 \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-1 - c \ln c + c) = -1.$$

Analogamente, per ogni  $c > 0$  si ha

$$\int_0^c e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^c = -e^{-c} + 1,$$

cosicché

$$\exists \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} (-e^{-c} + 1) = 1.$$

Infine, scelto  $b = 1$  risulta per ogni  $c \in ]0, 1[$  e per ogni  $d > 1$ :

$$\begin{aligned} \int_c^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_c^1 = -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{c}}, \\ \int_1^d \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_1^d = -2e^{-\sqrt{d}} + 2e^{-1}; \end{aligned}$$

dunque

$$\exists \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-1} + 2, \quad \exists \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{-1},$$

da cui

$$\exists \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Si noti che se nel calcolo del terzo integrale avessimo scelto  $b = 37$ , avremmo ottenuto ugualmente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{37} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{37}^d \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_c^{37} + \lim_{d \rightarrow +\infty} \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_{37}^d = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-2e^{-\sqrt{37}} + 2e^{-\sqrt{c}}) + \lim_{d \rightarrow +\infty} (-2e^{-\sqrt{d}} + 2e^{-\sqrt{37}}) = 2. \end{aligned}$$

**Osservazioni 5.8.3 (1)** Consideriamo un integrando  $f$ , definito in  $]a, b]$  oppure in  $[a, \infty[$ , e supponiamo che  $f$  sia integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo di definizione. Supponiamo inoltre che  $f$  abbia una primitiva  $F$ , anch'essa definita in  $]a, b]$  oppure in  $[a, \infty[$ . Allora l'esistenza dell'integrale improprio di  $f$  in  $[a, b]$ , o in  $[a, \infty[$ , equivale all'esistenza del limite di  $F(c)$  per  $c \rightarrow a^+$  o per  $c \rightarrow \infty$ . Infatti, ad esempio,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} [F(x)]_c^b = F(b) - \lim_{c \rightarrow a^+} F(c),$$

e l'altro caso è analogo. Nell'esempio 5.8.2 quindi si poteva più rapidamente scrivere, sottintendendo la notazione  $[G(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b} G(x) - \lim_{x \rightarrow a} G(x)$ ,

$$\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_0^\infty = 2.$$

**(2)** Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni sommabili in un intervallo limitato  $]a, b]$  (oppure in una semiretta), allora anche  $f + g$  e  $\lambda f$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sono sommabili e per i relativi integrali impropri vale la relazione

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

La verifica è immediata sulla base della definizione.

Non sempre gli integrali impropri sono calcolabili esplicitamente: è dunque importante stabilire criteri sufficienti a garantire l'integrabilità di una funzione. Si noti l'analogia con ciò che succede con le serie, di cui è interessante conoscere la convergenza anche quando non se ne sa calcolare la somma.

Anzitutto, se  $f$  ha segno costante, il suo integrale improprio ha sempre senso:

**Proposizione 5.8.4** *Sia  $f : [a, \infty[$  una funzione di segno costante. Se  $f \in \mathcal{R}(a, c)$  per ogni  $c > a$ , allora  $f$  è integrabile in senso improprio su  $[a, \infty[$  (con integrale convergente o divergente).*

**Dimostrazione** Per ipotesi, la funzione integrale  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  è definita per ogni  $x > a$ . Tale funzione è monotona, in quanto se  $x < y$  si ha

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } f \geq 0 \text{ in } [a, \infty[ \\ \leq 0 & \text{se } f \leq 0 \text{ in } [a, \infty[. \end{cases}$$

Dunque esiste il limite

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(t) dt,$$

cioè  $f$  ha integrale improprio su  $[a, \infty[$ .  $\square$

**Osservazione 5.8.5** Analogamente, una funzione  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , di segno costante, tale che  $f \in \mathcal{R}(c, b)$  per ogni  $c \in ]a, b[$ , è integrabile in senso improprio su  $[a, b]$  (con integrale convergente o divergente). La dimostrazione è esattamente la stessa.

L'esempio che segue è fondamentale per il successivo teorema di confronto.

**Esempio 5.8.6** La funzione  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^{-\alpha}$ , ove  $\alpha$  è un fissato numero positivo, è certamente dotata di integrale improprio in  $]0, \infty[$ , essendo sempre positiva. Verifichiamo che tale integrale è divergente, decomponendolo in  $\int_0^1 x^{-\alpha} dx + \int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ . Si ha

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Sommendo i due addendi, l'integrale  $\int_0^\infty x^{-\alpha} dx$  diverge in tutti i casi. Si noti tuttavia che

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx < \infty \iff \alpha < 1, \quad \int_1^\infty x^{-\alpha} dx < \infty \iff \alpha > 1.$$

Le funzioni  $x^{-\alpha}$  (e le loro analoghe  $(x-a)^{-\alpha}$ ) si prestano assai bene come termini di confronto per stabilire l'integrabilità o la non integrabilità di funzioni più complicate. Tale possibilità è garantita dal seguente

**Teorema 5.8.7 (di confronto)** *Siano  $f, g : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni integrabili in ogni intervallo  $[a, c] \subset [a, \infty[$ , e supponiamo che  $g$  sia non negativa e sommabile su  $[a, \infty[$ . Se risulta  $|f(x)| \leq g(x)$  per ogni  $x \geq a$ , allora anche  $f$  è sommabile su  $[a, \infty[$  e si ha*

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx.$$

**Dimostrazione** Anzitutto, per ogni  $c > a$ , grazie alla monotonia dell'integrale, si ha

$$0 \leq \int_a^c |f(x)| dx \leq \int_a^c g(x) dx.$$

Supponiamo dapprima  $f \geq 0$ . Allora  $f$  ha certamente integrale improprio al pari di  $g$ , e dunque al limite per  $c \rightarrow \infty$  troviamo

$$0 \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx;$$

perciò, dato che  $g$  è sommabile, tale risulta anche  $f$ .

Supponiamo ora  $f$  di segno variabile. Applicando a  $|f|$  il ragionamento fatto sopra, si ottiene che  $|f|$  è sommabile in  $[a, \infty[$ . Adesso notiamo che

$$f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x)),$$

ed inoltre  $|f| - f$  è sommabile, essendo  $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$ ; dunque anche  $f$  è sommabile in virtù dell'osservazione 5.8.3 (2). Infine, per ogni  $c > a$  possiamo scrivere

$$\left| \int_a^c f(x) dx \right| \leq \int_a^c |f(x)| dx \leq \int_a^c g(x) dx,$$

e passando al limite per  $c \rightarrow \infty$

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx < \infty. \quad \square$$

**Osservazioni 5.8.8** (1) Un risultato analogo vale ovviamente nel caso di funzioni definite su  $]a, b]$  e integrabili in ogni  $[c, b] \subset ]a, b]$ .

(2) Se  $|f|$  è integrabile in senso improprio (su  $[a, \infty[$  o su  $[a, b]$ ), ed è ivi sommabile, allora anche  $f$  lo è: basta applicare il teorema precedente scegliendo  $g = |f|$ . Se invece  $|f|$  è soltanto integrabile in senso improprio, senza essere sommabile, allora non è nemmeno detto che  $f$  sia a sua volta integrabile in senso improprio, come mostra l'esempio di  $f(x) = \sin x$  su  $[0, \infty[$ .

Viceversa, se  $f$  è integrabile in senso improprio, allora  $f$ , e quindi  $|f|$ , è integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato; dunque  $|f|$ , avendo segno costante, è integrabile in senso improprio. Tuttavia, se  $f$  è sommabile non è detto che anche  $|f|$  lo sia: vedremo fra poco un controesempio.

**Esempi 5.8.9** (1) L'integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ , che esiste certamente, per la parità dell'integrando è uguale a  $2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  (esercizio 5.8.1). Inoltre

$$e^{-x^2} \leq \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

cosicché l'integrale proposto è convergente:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^{\infty} e^{-x} dx = 1 + e^{-1}.$$

(2) Nell'integrale  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin \sqrt{x} dx$  la funzione integranda non ha segno costante, però si ha

$$|e^{-x} \sin \sqrt{x}| \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 0,$$

e la funzione  $e^{-x}$  è sommabile in  $[0, \infty[$ . Ne segue che l'integrale proposto esiste finito.

(3) Proviamo che la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  è sommabile su  $[0, \infty[$ , mentre l'integrale improprio di  $|f|$  in  $[0, \infty[$  è divergente. Si noti che in questo caso il teorema di confronto non è applicabile, e la sommabilità di  $f$  va dimostrata in maniera diretta.

Anzitutto, come sappiamo (esempio 3.3.5 (1)), la funzione  $f$  è prolungabile con continuità in 0, col valore 1. Si ha, scegliendo  $1 - \cos x$  come primitiva di  $\sin x$ , e integrando per parti:

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \left[ \frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^c + \int_0^c \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos c}{c} + \int_0^c \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

ove si è usato il fatto che anche  $\frac{1 - \cos x}{x}$  è prolungabile con continuità in 0, col valore 0 (esempio 3.3.5 (2)). Dunque per  $c \rightarrow \infty$  si ha, essendo non negativo l'integrando all'ultimo membro:

$$\exists \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Questo limite è finito per il teorema di confronto, dato che

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \text{ (per il criterio di Leibniz)} \\ 2/x^2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

D'altra parte per l'integrale improprio di  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ , che esiste certamente, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^k \int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \\ &= \sum_{h=0}^\infty \int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{h=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + h\pi} dt \geq \\ &\geq \sum_{h=0}^\infty \frac{1}{(h+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^\infty \frac{1}{h+1} = +\infty.\end{aligned}$$

## Esercizi 5.8

1. Sia  $f$  integrabile secondo Riemann oppure sommabile su  $[-a, a]$ . Provare che se  $f$  è una funzione *pari*, ossia  $f(x) = f(-x)$ , allora  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ , mentre se  $f$  è una funzione *dispari*, ossia  $f(x) = -f(-x)$ , allora  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .
2. Discutere l'esistenza e la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\begin{array}{ll} \int_0^1 \frac{e^{\sin(1/x)}}{\sqrt{x}} dx, & \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{|1-x|}} dx, \\ \int_{-\infty}^\infty \left| e^x - e^{-x^2} \right| dx, & \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^4}}{x^2+x^4} dx, \\ \int_0^1 \frac{\sin 2\pi x}{x(x-1/2)(x-1)} dx, & \int_1^\infty \frac{\cos e^x + \sin x}{x\sqrt{x-1}} dx. \end{array}$$

3. Discutere l'esistenza ed eventualmente calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\begin{array}{lll} \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}, & \int_0^{3\pi/2} (\tan x)^{2/3} (\sin x)^{1/3} dx, & \int_1^\infty \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right] dx, \\ \int_0^{3\pi/2} \frac{(\tan x)^{4/3}}{(\sin x)^{1/3}} dx, & \int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}} dx, & \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{x^{3/2}} dx, \\ \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx, & \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3(3-x)}} , & \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} , \\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, & \int_{-1}^3 \frac{x}{x^3+1} dx, & \int_0^{10} \sqrt{1+\frac{1}{x}} dx, \\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}, & \int_1^\infty \frac{dx}{e^{2x}-e^x}, & \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \\ \int_{-\infty}^\infty |x|^5 e^{-x^2} dx, & \int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}}, & \int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx. \end{array}$$

4. (*Criterio integrale di convergenza per le serie*) Sia  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione non negativa e decrescente. Si provi che l'integrale improprio  $\int_1^\infty f(x) dx$  e la serie  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  sono entrambi convergenti o entrambi divergenti.

5. Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

6. Dimostrare che

$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

**[Traccia:** utilizzando lo sviluppo di Taylor di  $\ln(1-x)$ , si verifichi che per ogni  $\delta \in ]0, 1[$  si ha

$$\int_0^{1-\delta} \ln x \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(1-\delta)^{n+1}}{n(n+1)^2} - \frac{(1-\delta)^{n+1} \ln(1-\delta)}{n(n+1)} \right]$$

e poi si passi al limite per  $\delta \rightarrow 0.$ ]

7. Dimostrare che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}^+.$$

8. (*Integrali di Fresnel*) Provare che i due integrali

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$$

sono convergenti.

9. Provare che l'integrale

$$\int_0^{\infty} x \cos(x^4) dx$$

è convergente, benché l'integrando non sia nemmeno limitato in  $[0, \infty[.$

10. (*Integrale di Frullani*) Sia  $f$  una funzione continua in  $[0, \infty[,$  tale che l'integrale improprio

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

sia convergente per ogni  $a > 0.$  Provare che se  $\alpha, \beta$  sono numeri positivi si ha

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha};$$

dedurne che

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

11. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx.$$

[**Traccia:** utilizzare le formule di duplicazione.]

12. (*Funzione Γ di Eulero*) Si consideri la funzione  $\Gamma : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

(i) Verificare che  $\Gamma(p)$  ha senso e che  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  per ogni  $p > 0$ .

(ii) Provare che  $\Gamma$  è derivabile in  $]0, \infty[$ , con

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \ln x e^{-x} dx.$$

(iii) Provare che  $\Gamma$  è una funzione convessa di classe  $C^\infty$ .

[**Traccia:** per (ii), si stimi la differenza

$$\frac{\Gamma(p+h) - \Gamma(p)}{h} - \int_0^\infty x^{p-1} \ln x e^{-x} dx$$

utilizzando il teorema di Lagrange; per (iii), si verifichi che  $\Gamma''(p) > 0$ .]

# Capitolo 6

## Equazioni differenziali

### 6.1 Generalità

Una *equazione differenziale* è un'identità che lega fra di loro, per ogni valore della variabile  $x$  in un dato insieme, i valori della funzione incognita  $y(x)$  e quelli delle sue derivate  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , eccetera. Un'equazione differenziale è detta *ordinaria* quando la variabile  $x$  appartiene a un intervallo di  $\mathbb{R}$ , mentre è detta *alle derivate parziali* allorché la variabile  $x$  è un elemento di  $\mathbb{R}^m$ : in tal caso nell'equazione compariranno le derivate parziali  $D_i y$ ,  $D_i D_j y$ , eccetera; non ci addentreremo comunque in questo vastissimo campo.

Un'equazione differenziale ordinaria è dunque un'equazione funzionale del tipo

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \quad x \in I,$$

ove  $f$  è una funzione continua nei suoi  $m+2$  argomenti,  $I$  è un intervallo (eventualmente illimitato) di  $\mathbb{R}$  e  $y$  è la funzione incognita. L'*ordine* dell'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che vi compare: nell'esempio sopra scritto l'ordine è  $m$ . Un'equazione differenziale è detta *in forma normale* se si presenta nella forma

$$y^{(m)}(x) - g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)) = 0, \quad x \in I,$$

cioè se è “risolta” rispetto alla derivata di grado massimo dell'incognita  $y$ . In particolare, un'equazione del primo ordine in forma normale è del tipo

$$y'(x) = g(x, y(x)), \quad x \in I.$$

Perché si va ad esplorare l'enorme universo delle equazioni differenziali? Perché esse saltano fuori in modo naturale non appena si formula un qualunque tipo, anche molto semplice, di modello matematico per descrivere fenomeni fisici, chimici, biologici, economici, eccetera.

Accanto alle equazioni è utile considerare anche *sistemi differenziali*

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)) = \mathbf{0}, \quad x \in I,$$

eventualmente in forma normale

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)), \quad x \in I,$$

ove stavolta l'incognita è una funzione  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Il motivo di questo allargamento del tiro è il fatto che ogni equazione differenziale di ordine  $m$  può essere trasformata, in modo equivalente, in un *sistema* di  $m$  equazioni differenziali del primo ordine, il quale è, in linea generale, più semplice da trattare. Infatti, se  $y \in C^m(I)$  risolve l'equazione

$$f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0, \quad x \in I$$

(è consuetudine omettere dall'incognita  $y(x)$  la variabile indipendente  $x$ ), introducendo le  $m$  funzioni

$$u^0(x) = y(x), \quad u^1(x) = y'(x), \quad \dots, \quad u^{m-1}(x) = y^{(m-1)}(x),$$

si ottiene una funzione  $\mathbf{u} = (u^0, u^1, \dots, u^{m-1}) \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$  che risolve il sistema differenziale

$$\begin{cases} (u^0)' = u^1 \\ (u^1)' = u^2 \\ \dots \\ (u^{m-2})' = u^{m-1} \\ f(x, u^0, u^1, \dots, u^{m-1}, (u^{m-1})') = 0. \end{cases}$$

Viceversa, se  $\mathbf{u} = (u^0, u^1, \dots, u^{m-1}) \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$  è soluzione di questo sistema, è facile verificare che, posto  $y = u^0$ , si ha  $y \in C^m(I)$  e tale funzione risolve l'equazione differenziale originaria.

Si noti che se l'equazione differenziale era in forma normale,

$$y^{(m)} = g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}),$$

allora l'ultima equazione del sistema diventa

$$(u^{m-1})' = g(x, u^0, u^1, \dots, u^{m-1}),$$

e quindi anche il sistema è in forma normale.

Tutte le equazioni differenziali sono risolubili? Naturalmente no! Un esempio banale è il seguente:

$$1 + y^2 + (y')^2 = 0.$$

L'importanza delle equazioni in forma normale sta nel fatto che, al contrario, esse sono sempre risolubili ed anzi hanno un'infinità di soluzioni: questo si vede già esaminando la più semplice, cioè

$$y' = f(x), \quad x \in [a, b],$$

le cui soluzioni sono

$$y(x) = \int_a^x f(t) dt + c, \quad x \in [a, b],$$

ove  $c$  è una costante arbitraria.

Nel seguito, considereremo solamente equazioni e sistemi in forma normale.

## Problema di Cauchy

Un modo per selezionare una delle infinite soluzioni di una equazione differenziale in forma normale del primo ordine è quello di prescrivere alla soluzione di assumere, in un determinato punto  $x_0 \in I$ , un prefissato valore  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Si formula così il *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = g(x, y), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Poiché assegnare  $g(x, y(x))$  significa prescrivere il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della soluzione  $y(x)$  nel suo punto  $(x, y(x))$ , risolvere il problema di Cauchy significa determinare una funzione il cui grafico passi per un fissato punto  $(x_0, y_0)$  e del quale sia prescritta punto per punto la pendenza.

Per i sistemi del primo ordine in forma normale il problema di Cauchy ha la forma seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{y}), & x \in I, \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

Per un'equazione differenziale di ordine  $m$ , l'insieme delle soluzioni dipenderà in generale da  $m$  costanti arbitrarie: il problema di Cauchy è in tal caso

$$\begin{cases} y^{(m)} = g(x, y, \dots, y^{(m-1)}), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}, \end{cases}$$

ove  $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$  sono  $m$  numeri assegnati.

## Il teorema di esistenza e unicità

Per equazioni e sistemi del primo ordine in forma normale vi è un fondamentale risultato che garantisce, perlomeno *localmente*, la risolubilità del problema di Cauchy: in altre parole, si dimostra che vi è un'unica *soluzione locale*, ovvero che la soluzione del problema è definita almeno in un intorno del punto iniziale  $x_0$ .

Per formulare questo enunciato occorrono alcune premesse. Consideriamo il sistema

$$\mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}),$$

sotto le seguenti ipotesi:

- (i)  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una assegnata funzione continua, definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ;
- (ii) la funzione  $\mathbf{g}$  è *localmente lipschitziana* in  $A$  rispetto alla variabile vettoriale  $\mathbf{u}$ , uniformemente rispetto a  $x$ , vale a dire che per ogni compatto  $K \subset A$  esiste una costante  $H_K \geq 0$  per cui risulta

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H_K |\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in K.$$

Fissiamo un punto  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in A$  e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Dato che  $A$  è aperto, esisterà un cilindro  $(m+1)$ -dimensionale compatto  $R$ , di centro  $(x_0, \mathbf{u}_0)$ , tutto contenuto in  $A$ . Esso sarà della forma

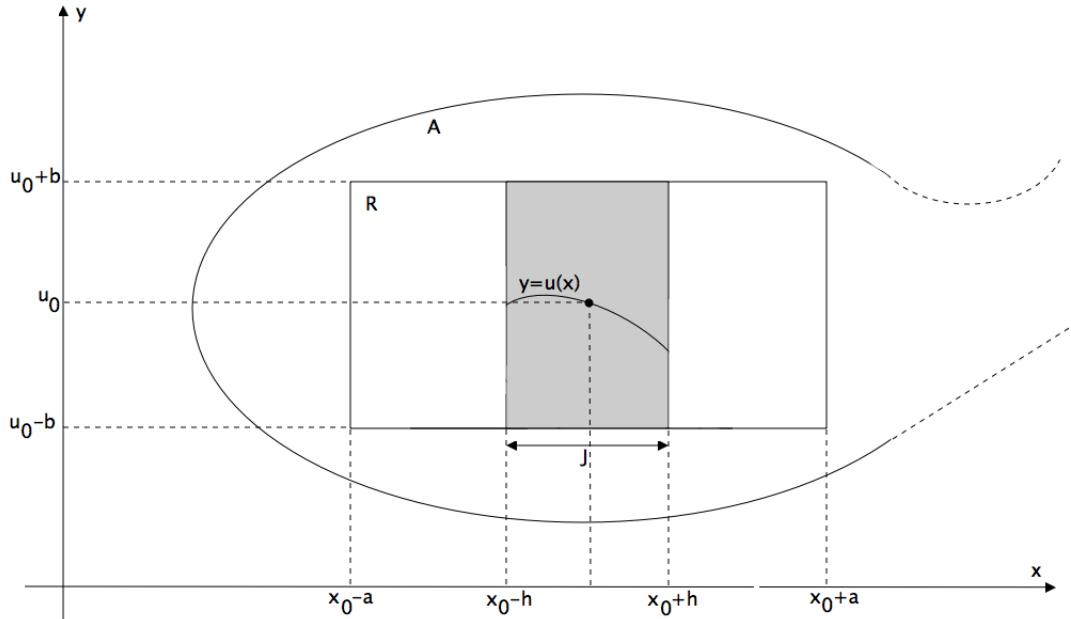
$$R = \{(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x - x_0| \leq a, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m \leq b\}.$$

Poiché  $\mathbf{g}$  è continua nel compatto  $R$ , in virtù del teorema di Weierstrass (teorema 3.4.1) esisterà  $M \geq 0$  tale che

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq M \quad \forall (x, \mathbf{u}) \in R;$$

inoltre, per (ii), esiste  $H \geq 0$  tale che

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in R.$$



Si ha allora il seguente teorema di esistenza e unicità locale:

**Teorema 6.1.1** *Sotto le ipotesi (i) e (ii) sopra enunciate, sia  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in A$ , e siano  $R$  il cilindro e  $M, H$  le costanti sopra definite. Allora esistono un intervallo  $J = [x_0 - h, x_0 + h]$ , con  $0 < h \leq a$ , e un'unica funzione  $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^1$ , tali che*

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in J, \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0;$$

inoltre il grafico di  $\mathbf{u}$  è tutto contenuto in  $R$ , cioè si ha

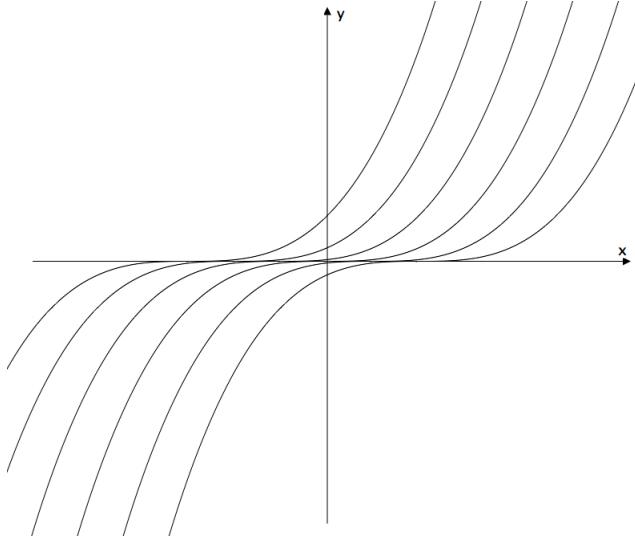
$$|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_0|_m \leq b \quad \forall x \in J.$$

Prima di dimostrare il teorema facciamo qualche considerazione. Anzitutto, le ipotesi di regolarità formulate sulla funzione  $\mathbf{g}$  sono ottimali: infatti, benché sia possibile provare l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy supponendo solamente  $\mathbf{g}$  continua in  $A$ , è facile vedere con esempi che in mancanza dell'ipotesi di locale lipschitzianità viene a cadere l'unicità della soluzione.

**Esempio 6.1.2** Sia  $m = 1$ . Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^{2/3} \\ u(\lambda) = 0 \end{cases}$$

ha le due soluzioni  $u(x) \equiv 0$  e  $u_\lambda(x) = \frac{(x-\lambda)^3}{27}$ ; infinite altre, come è facile verificare, che sono nulle in  $] -\infty, \mu]$  e valgono  $\frac{(x-\mu)^3}{27}$  in  $[\mu, \infty[$ , ove  $\mu > \lambda$ ; ed altre ancora. Il secondo membro  $g(x, u) = u^{2/3}$ , che è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$ , è ovviamente continuo ma non verifica la proprietà di locale lipschitzianità. Sia infatti  $K$  un intorno di  $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ : se esistesse  $H \geq 0$  tale che



$$|y^{2/3} - u^{2/3}| \leq H|y - u| \quad \forall (x, y), (x, u) \in K,$$

scelti  $(x, u) = (x_0, 0)$  e  $(x, y) = (x_0, \frac{1}{n})$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$ , avremmo  $(x_0, \frac{1}{n}) \in K$  definitivamente, da cui

$$\frac{1}{n^{2/3}} \leq \frac{H}{n} \quad \text{definitivamente,}$$

cioè  $n \leq H^3$  definitivamente, il che è assurdo.

**Dimostrazione del teorema 6.1.1 - 1º passo:** trasformiamo il problema di Cauchy in un sistema di *equazioni integrali* ad esso equivalente.

Se  $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione di classe  $C^1$  che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}), & x \in J, \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

allora fissato  $x \in J$  possiamo integrare i due membri fra  $x_0$  e  $x$  (si veda la definizione 5.5.4), ottenendo il sistema di equazioni integrali

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) dt, \quad x \in J.$$

Viceversa se  $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione continua che risolve questo sistema, allora anzitutto  $\mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0$ ; inoltre, essendo l'integrando una funzione continua, il secondo

membro è di classe  $C^1$  e quindi  $\mathbf{u}$  è di classe  $C^1$ . Possiamo allora derivare entrambi i membri del sistema integrale, ottenendo

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in J.$$

Quindi  $\mathbf{u}$  risolve il problema di Cauchy. Ciò prova l'equivalenza richiesta.

**2º passo:** risolviamo il sistema integrale con il *metodo delle approssimazioni successive*.

Sia  $h = \min\{a, b/M, 1/H\}$ . Definiamo la seguente successione di funzioni vettoriali  $\{\mathbf{u}_n\}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(x) \equiv \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{u}_{n+1}(x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t)) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad x \in J.$$

Si verificano per induzione i seguenti fatti:

$$\sup_{x \in J} |\mathbf{u}_n(x) - \mathbf{u}_0|_m \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|\mathbf{u}_{n+1}(x) - \mathbf{u}_n(x)|_m \leq M \frac{H^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad \forall x \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La prima relazione è ovvia per  $n = 0$ ; supponiamo che essa valga per un certo  $n$ : in virtù della proposizione 5.5.5 si ha, essendo  $(t, \mathbf{u}_n(t)) \in R$  per ogni  $t \in J$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in J} |\mathbf{u}_{n+1}(x) - \mathbf{u}_0|_m &= \sup_{x \in J} \left| \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t)) dt \right|_m \leq \\ &\leq \sup_{x \in J} \left| \int_{x_0}^x |\mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t))|_m dt \right| \leq \sup_{x \in J} M|x - x_0| = Mh \leq b. \end{aligned}$$

Dunque la relazione vale per  $n + 1$  e pertanto, per induzione, è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . La seconda diseguaglianza vale per  $n = 0$ , dato che

$$|\mathbf{u}_1(x) - \mathbf{u}_0|_m = \left| \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_0) dt \right|_m \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in J;$$

se poi essa vale per un certo  $n$ , allora risulta (essendo  $(t, \mathbf{u}_{n+1}(t)), (t, \mathbf{u}_n(t)) \in R$  per ogni  $t \in J$ )

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{n+2}(x) - \mathbf{u}_{n+1}(x)|_m &= \left| \int_{x_0}^x [\mathbf{g}(t, \mathbf{u}_{n+1}(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t))] dt \right|_m \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |\mathbf{g}(t, \mathbf{u}_{n+1}(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t))|_m dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x H|\mathbf{u}_{n+1}(t) - \mathbf{u}_n(t)|_m dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x M H^{n+1} \frac{|t - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} dt \right| = \\ &= M \frac{H^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2} \quad \forall x \in J. \end{aligned}$$

Dunque la disuguaglianza vale anche per  $n + 1$ , cosicché, per induzione, è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

In particolare, la relazione appena provata implica che

$$\sup_{x \in J} |\mathbf{u}_{n+1}(x) - \mathbf{u}_n(x)|_m \leq MH^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi, per ogni  $p > n$ ,

$$\sup_{x \in J} |\mathbf{u}_p(x) - \mathbf{u}_n(x)|_m \leq \sum_{k=n}^{p-1} \sup_{x \in J} |\mathbf{u}_{k+1}(x) - \mathbf{u}_k(x)|_m \leq M \sum_{k=n}^{p-1} H^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Dato che la serie  $M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k h^{k+1}}{(k+1)!}$  è convergente, la stima appena ottenuta mostra che per ogni  $x \in J$  la successione  $\{\mathbf{u}_n(x)\}$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}^m$  (definizione 2.6.1). Pertanto esiste

$$\mathbf{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n(x) \quad \forall x \in J,$$

e anzi la convergenza è *uniforme* in  $J$ , nel senso che (esercizio 6.1.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |\mathbf{u}_n(x) - \mathbf{u}(x)| = 0;$$

per di più, nell'esercizio 6.1.5 si dimostra che la funzione limite  $\mathbf{u}$  è continua in  $J$ .

Adesso vogliamo passare al limite per  $n \rightarrow \infty$  nella relazione che definisce la successione  $\{\mathbf{u}_n\}$ . Il primo membro tende ovviamente a  $\mathbf{u}(x)$ ; per il secondo membro si ha, in virtù delle ipotesi fatte su  $\mathbf{g}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t)) dt - \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) dt \right|_m &\leq \left| \int_{x_0}^x |\mathbf{g}(t, \mathbf{u}_n(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t))|_m dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x H |\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)|_m dt \right| \leq H h \sup_{t \in J} |\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)|_m, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro, come si è osservato, tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$ . In definitiva con il passaggio al limite per  $n \rightarrow \infty$  otteniamo che la funzione  $\mathbf{u}$  risolve il sistema integrale

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) dt, \quad x \in J.$$

Notiamo anche che dalla prima delle due disuguaglianze provate per induzione segue, al limite per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sup_{x \in J} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_0|_m \leq b.$$

ciò conclude la dimostrazione del 2º passo.

**3º passo:** proviamo infine l'unicità della soluzione.

Ricordiamo che  $h \leq 1/H$ : scegliamo allora  $k \in [0, h[$  e poniamo  $J' = [x_0 - k, x_0 + k]$ ; allora se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono due soluzioni distinte, entrambe continue in  $J$ , dell'equazione

integrale, possiamo scrivere per ogni  $x \in J'$ , con un calcolo analogo a quello fatto in precedenza,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{v}(x)|_m &= \left| \int_{x_0}^x [\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}(t))] dt \right|_m \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x H |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_m dt \right| \leq Hk \sup_{t \in J'} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_m, \end{aligned}$$

da cui, essendo  $Hk < Hh = 1$ ,

$$\sup_{x \in J'} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{v}(x)|_m < \sup_{t \in J'} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_m.$$

Ciò è assurdo, e dunque  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$  in  $J'$ . Per l'arbitrarietà di  $J' \subset J$ , si ottiene  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$  in  $J$ . Ciò conclude la dimostrazione del teorema 6.1.1.  $\square$

A complemento del teorema di esistenza e unicità conviene fare qualche ulteriore considerazione.

## Dipendenza continua dal dato iniziale

Nelle applicazioni e in particolare nell'approssimazione numerica delle soluzioni di equazioni e sistemi differenziali è di capitale importanza che a piccole variazioni del “dato iniziale”  $\mathbf{u}_0$  (ad esempio causate da errori di misura) corrispondano piccole variazioni della soluzione corrispondente, perché senza questa proprietà verrebbe a mancare il presupposto stesso del procedimento di approssimazione. Si vuole, in altre parole, che la soluzione del problema di Cauchy dipenda con continuità dal valore iniziale  $\mathbf{u}_0$ . In effetti, se  $(x_0, \mathbf{u}_0)$  e  $(x_0, \mathbf{y}_0)$  sono punti di  $A$  (di uguale ascissa) sufficientemente vicini, allora le soluzioni dei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}), & x \in J, \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{y}), & x \in J', \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

verificano la diseguaglianza

$$|\mathbf{u}(x) - \mathbf{y}(x)|_m \leq C |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m \quad \forall x \in J'',$$

ove  $J'' = J \cap J'$  e  $C$  è un'opportuna costante. Infatti, denotiamo con  $H$  e  $M$  le costanti delle ipotesi su  $\mathbf{g}$  relative ad un fissato rettangolo compatto  $R$  che contenga interamente i grafici di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ ; utilizzando i sistemi integrali equivalenti, posto  $J'' = [x_0 - h, x_0 + h]$  si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{y}(x)|_m &= \left| \mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x [\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))] dt \right|_m \leq \\ &\leq |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m + H \left| \int_{x_0}^x |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m dt \right| \leq \\ &\leq |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m + Hh \sup_{t \in J''} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m, \end{aligned}$$

da cui

$$(1 - hH) \sup_{t \in J''} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m$$

e quindi la tesi quando  $h$  è sufficientemente piccolo in modo che  $hH < 1$ .

Se invece  $hH \geq 1$ , scegliamo  $k \in ]0, 1/H[$  e ripetiamo il ragionamento precedente in  $J_1 = [x_0 - k, x_0 + k]$ : otteniamo

$$\sup_{t \in J_1} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq \frac{1}{1 - kH} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m.$$

Adesso scegliamo come nuovo intervallo l'intervallo  $J_2 = [x_0, x_0 + 2k]$ , che è centrato in  $x_0 + k$ , e come nuovo punto di partenza i punti  $(x_0 + k, \mathbf{u}(x_0 + k))$ ,  $(x_0 + k, \mathbf{y}(x_0 + k))$ . Lo stesso ragionamento di prima ci porta a concludere che

$$\sup_{t \in J_2} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq \frac{1}{1 - kH} |\mathbf{u}(x_0 + k) - \mathbf{y}(x_0 + k)|_m,$$

e utilizzando la stima precedente (il che è lecito poiché  $x_0 + k \in J_1$ ) si trova

$$\sup_{t \in J_1 \cup J_2} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq \frac{1}{(1 - kH)^2} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m.$$

Posto  $m = [\frac{h}{k}]$ , se ripetiamo ancora  $m + 1$  volte lo stesso argomento otteniamo la stima

$$\sup_{t \in [x_0 - k, x_0 + h]} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq \frac{1}{(1 - kH)^{m+1}} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m.$$

Infine si può iterare il procedimento anche all'indietro, e con altri  $m + 1$  passi si ricava

$$\sup_{t \in [x_0 - h, x_0 + h]} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)|_m \leq \frac{1}{(1 - kH)^{m+1}} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{y}_0|_m,$$

che è la tesi.

## Prolungamento delle soluzioni

Il teorema 6.1.1 ha carattere locale, e non dà informazioni su quanto grande sia l'insieme  $J$  di definizione della soluzione. D'altra parte, se il grafico della soluzione passa per un punto  $(x_1, \mathbf{u}_1) \in A$ , tale punto può essere preso come nuovo punto iniziale e ancora il teorema 6.1.1 garantisce che la soluzione può essere prolungata ulteriormente in un intorno di  $x_1$ . Si può così pensare di prolungare la soluzione procedendo per passi successivi. Si ha in effetti:

**Teorema 6.1.3** *Nelle ipotesi del teorema 6.1.1, sia  $Q$  un arbitrario rettangolo chiuso e limitato tale che  $Q \subset A$  e contenente  $(x_0, \mathbf{u}_0)$  come punto interno. Allora la soluzione locale  $\mathbf{u}$  del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

*può essere univocamente estesa a un intervallo chiuso  $[x_1, x_2]$ , con  $x_1 < x_0 < x_2$ , in modo che i punti  $(x_1, \mathbf{u}(x_1))$  e  $(x_2, \mathbf{u}(x_2))$  appartengano alla frontiera di  $Q$ .*

**Dimostrazione** Sia  $Q'$  un rettangolo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^{m+1}$  tale che  $Q \subset Q' \subset A$ , e siano  $M, H \geq 0$  tali che

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq M \quad \forall (x, \mathbf{u}) \in Q',$$

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in Q'.$$

Prendiamo poi  $a, b > 0$  sufficientemente piccoli in modo che

$$\{(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x - x_0| \leq a, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m \leq b\} \subseteq Q' \quad \forall (x_0, \mathbf{u}_0) \in Q,$$

e scegliamo infine

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{H} \right\}.$$

Allora si può ripetere la dimostrazione del teorema 6.1.1 ottenendo, per ogni punto iniziale  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in Q$  una soluzione locale definita almeno nell'intervallo  $[x_0 - h, x_0 + h]$ . Adesso osserviamo che il numero  $h$  *non dipende* dalla scelta del punto  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in Q$ : è chiaro allora che procedendo per passi successivi l'insieme di definizione della soluzione del problema di Cauchy si allunga, ad ogni passo, di  $h$  e che quindi dopo un numero finito di tappe intermedie il grafico della soluzione raggiungerà la frontiera di  $Q$ .

L'unicità del prolungamento è poi ovvia.  $\square$

Notiamo che nel teorema 6.1.3 è essenziale che  $Q$  sia un rettangolo chiuso e limitato e non, ad esempio, una striscia infinita o un semispazio. Per esempio, se  $m = 1$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + u^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

che ha secondo membro regolare in tutto  $\mathbb{R}^2$ , ha come unica soluzione la funzione  $u(x) = \tan x$ , la quale non è prolungabile al di fuori dell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Quindi non avremmo potuto, nel teorema 6.1.3, prendere come  $Q$  la striscia  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ .

Fino a che punto la soluzione locale del problema di Cauchy è prolungabile? In termini un po' grossolani si può dire che il prolungamento è possibile fino a che il grafico della soluzione giace nell'aperto  $A$  ove è definito il secondo membro  $\mathbf{g}$ . Per formalizzare questa idea, fissato  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in A$ , introduciamo la famiglia  $\mathcal{J}(x_0, \mathbf{u}_0)$  costituita da tutti gli intervalli  $J$  contenenti  $x_0$  come punto interno, tali che il problema di Cauchy di punto iniziale  $(x_0, \mathbf{u}_0)$  abbia soluzione  $\mathbf{u}_J(\cdot)$  definita su tutto  $J$ : il teorema 6.1.1 ci dice che questa famiglia non è vuota. Sia ora  $J_0$  l'intervallo unione di tutti gli intervalli  $J \in \mathcal{J}(x_0, \mathbf{u}_0)$ , e definiamo per  $x \in J_0$ :

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_J(x) \quad \text{se } x \in J \quad \text{e} \quad J \in \mathcal{J}(x_0, \mathbf{u}_0).$$

Questa definizione ha senso perché due soluzioni  $\mathbf{u}_J, \mathbf{u}_I$  coincidono su  $J \cap I$  per unicità. Resta così definita in tutto  $J_0$  un'unica soluzione del problema di Cauchy che, per costruzione, non è ulteriormente estendibile: essa viene chiamata *soluzione massimale*.

## Soluzione globale

Supponiamo che la funzione  $\mathbf{g}(x, \mathbf{u})$  sia definita su una striscia  $]c, d[ \times \mathbb{R}^m$ , sia ivi continua e lipschitziana nella variabile  $\mathbf{u}$  uniformemente rispetto a  $x$  in ogni “sottostriscia” chiusa  $[c', d'] \times \mathbb{R}^m$  con  $c < c' < d' < d$ , ossia risulti

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in [c', d'] \times \mathbb{R}^m.$$

Allora si ha:

**Teorema 6.1.4** *Nelle ipotesi sopra dette, per ogni  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in S$  la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

è globale, cioè è definita nell’intero intervallo  $]c, d[$ .

**Dimostrazione** Scegliamo  $b \geq 1$  e fissiamo  $[c', d'] \subset ]c, d[$ . Posto

$$M_0 = \max_{x \in [c', d']} |\mathbf{g}(x, \mathbf{u}_0)|_m, \quad R = [c', d'] \times \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m \leq b\},$$

per  $(x, \mathbf{u}_0) \in R$  si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m &\leq |\mathbf{g}(x, \mathbf{u}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u}_0)|_m + |\mathbf{g}(x, \mathbf{u}_0)|_m \leq \\ &\leq H|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m + M_0 \leq Hb + M_0. \end{aligned}$$

Quindi si può ripetere il ragionamento svolto nella dimostrazione del teorema 6.1.3 scegliendo  $h = \min\{d' - c', \frac{1}{H+M_0}\}$  (si noti che, essendo  $b \geq 1$ , questo numero è certamente minore di  $\min\{d' - c', \frac{b}{Hb+M_0}, \frac{1}{H}\}$ , che è la limitazione richiesta nelle ipotesi del teorema 6.1.1). Poiché  $h$  non dipende da  $b$ , dopo un numero finito di passi si ricopre tutto l’intervallo  $[c', d']$ . Dunque la soluzione è definita in ogni  $[c', d'] \subset ]c, d[$  e pertanto è definita in  $]c, d[$ .  $\square$

Questo risultato è importante perché contiene il caso dei *sistemi lineari*, in cui

$$\mathbf{g}(x, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(x)\mathbf{u} + \mathbf{f}(x),$$

con  $\mathbf{A}(x)$  matrice  $m \times m$  a coefficienti continui in  $]c, d[$  e  $\mathbf{f}$  funzione continua su  $]c, d[$ . Dunque le soluzioni di equazioni e sistemi differenziali lineari di qualsiasi ordine (a coefficienti continui) esistono in tutto l’intervallo su cui sono definiti i coefficienti.

## Esercizi 6.1

- Trasformare l’equazione differenziale

$$y''' + \sin x \cdot y'' - \cos x \cdot y' + y = x$$

in un sistema di tre equazioni del primo ordine.

2. Trasformare il sistema

$$\begin{cases} u' = 2u - v + x \\ v' = 3u + v - x \end{cases}$$

in una equazione differenziale del secondo ordine.

3. Determinare tutte le soluzioni (di classe  $C^1$  in qualche intervallo) dell'equazione differenziale  $(y')^2 = 1$ .
4. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni definite su un intervallo  $[a, b]$ . Supponiamo che

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sia convergente. Si provi che esiste una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$ , ossia tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

5. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue definite su un intervallo  $[a, b]$ . Supponiamo che esista una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$  (vedere l'esercizio precedente). Si provi che  $f$  è continua in  $[a, b]$ .

**Traccia:** fissati  $x_0 \in [a, b]$  ed  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $x \in [a, b]$  e per ogni  $n \geq \nu$ . Allora si verifichi che esiste  $\delta > 0$  tale che per  $x \in [a, b]$  e  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

## 6.2 Alcuni tipi di equazioni del primo ordine

Come risolvere le equazioni differenziali? Come scriverne esplicitamente le soluzioni? Una risposta esaustiva è impossibile, ma per certe classi di equazioni si può fornire qualche metodo pratico. Esamineremo in dettaglio due tipi di equazioni che sono i più importanti nella pratica, rimandando lo studio degli altri tipi agli esercizi 6.2.5, 6.2.6 e 6.2.7.

### Equazioni a variabili separabili

Le equazioni *a variabili separabili* sono equazioni (non lineari, in generale) della forma

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I,$$

dove  $f$  è una funzione continua sull'intervallo  $I$  e  $g$  è una funzione continua su un altro intervallo  $J$ . Necessariamente, una soluzione  $y$  di questa equazione dovrà essere definita in  $I$  (o in un sottointervallo di  $I$ ) a valori in  $J$ . La tecnica risolutiva è la seguente:

**1º passo:** si cercano gli eventuali punti  $y_0 \in J$  nei quali si ha  $g(y_0) = 0$ : per ciascuno di questi punti la funzione costante

$$y(x) = y_0, \quad x \in I,$$

è soluzione dell'equazione.

**2º passo:** si cercano le soluzioni non costanti  $y$ , definite in qualche sottointervallo  $I' \subseteq I$  e a valori in qualche sottointervallo  $J' \subseteq J$  nel quale si abbia  $g \neq 0$ . Se  $y(x)$  è una di queste soluzioni, sarà  $g(y(x)) \neq 0$  per ogni  $x \in I'$ ; quindi dividendo l'equazione per  $g(y(x))$  si ottiene

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x), \quad x \in I'.$$

**3º passo:** si calcolano le primitive dei due membri di tale identità: indicando con  $F$  una primitiva di  $f$  in  $I'$  e con  $\gamma$  una primitiva di  $\frac{1}{g}$  in  $J'$ , si ricava

$$\gamma(y(x)) = F(x) + c, \quad x \in I',$$

dove  $c$  è una costante arbitrariamente scelta.

**4º passo:** si osserva che  $\gamma' = \frac{1}{g} \neq 0$  in  $J'$  per ipotesi, per cui  $\gamma$  è strettamente monotona in  $J'$  (proposizione 4.9.1). Se ne deduce, per il teorema 3.4.6, che esiste la funzione inversa  $\gamma^{-1}$ , e la relazione precedente diventa

$$y(x) = \gamma^{-1}(F(x) + c), \quad x \in I'.$$

Si noti che  $y(x) \in J'$  per ogni  $x \in I'$ , come richiesto, e che  $y$  verifica effettivamente l'equazione differenziale perché per ogni  $x \in I'$  si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= [(\gamma^{-1})'(F(x) + c)]F'(x) = \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(F(x) + c))}f(x) = \\ &= g(\gamma^{-1}(F(x) + c))f(x) = g(y(x))f(x). \end{aligned}$$

Osserviamo che il 3º passo si può meglio memorizzare se si utilizza la notazione  $y' = \frac{dy}{dx}$  e si passa formalmente da  $\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$  a  $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ , per poi integrare i due membri il primo rispetto a  $y$  e il secondo rispetto a  $x$ .

Si badi bene che questo procedimento *non* esaurisce in generale l'insieme delle soluzioni: vi possono essere altri tipi di soluzioni, come illustra il secondo degli esempi che seguono.

**Esempi 6.2.1 (1)** Consideriamo l'equazione  $y' = x(1 + y^2)$ . Qui le funzioni  $f(x) = x$  e  $g(y) = 1 + y^2$  sono definite su tutto  $\mathbb{R}$  e la  $g$  non è mai nulla. Dividendo per  $1 + y^2$  si trova

$$\begin{aligned} \frac{y'}{1 + y^2} &= x, \\ \frac{dy}{1 + y^2} &= x \, dx, \end{aligned}$$

e integrando

$$\arctan y(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dunque

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che ciascuna soluzione è definita non su tutto  $\mathbb{R}$  ma solo nel sottoinsieme descritto dalla diseguaglianza  $|\frac{x^2}{2} + c| < \frac{\pi}{2}$ , perché solo per tali  $x$  la quantità  $\frac{x^2}{2} + c$  appartiene all'immagine della funzione arcotangente. Ad esempio, se  $c = 0$  si ha  $x \in ]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$ , mentre se  $c = -\pi$  si hanno i due intervalli  $] -\sqrt{3\pi}, -\sqrt{\pi}[$  e  $] \sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}[$  (si tratta dunque di due distinte soluzioni, definite su intervalli disgiunti).

**(2)** Nell'equazione  $y' = \sqrt{y}$  si ha  $f(x) \equiv 1$  in  $I = \mathbb{R}$  e  $g(y) = \sqrt{y}$  in  $J = [0, \infty[$ . L'unica soluzione costante è  $y(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; le soluzioni a valori in  $J' = ]0, \infty[$  si ottengono dividendo per  $\sqrt{y}$  con i passaggi che seguono:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{y}} &= 1, \\ \frac{dy}{\sqrt{y}} &= dx, \\ 2\sqrt{y(x)} &= x + c \end{aligned}$$

(il che implica  $x + c \geq 0$ ); si trova dunque

$$y(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \quad x \in [-c, +\infty[.$$

Ma l'equazione ha altre soluzioni: ad esempio, per ogni fissato  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$y_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\lambda \\ \left(\frac{x+\lambda}{2}\right)^2 & \text{se } x \geq -\lambda \end{cases}$$

è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  e verifica l'equazione differenziale su tutto  $\mathbb{R}$ . Essa non fa parte di quelle già trovate, perché non è identicamente nulla e non è a valori in  $]0, \infty[$ .

**(3)** Per l'equazione  $y' = -x/y$ , la funzione  $f(x) = x$  è definita su  $\mathbb{R}$  mentre la  $g(y) = 1/y$  è definita su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ : quindi cerchiamo soluzioni  $y(x) \neq 0$ . Col solito metodo si trova

$$\begin{aligned} yy' &= -x, \\ y dy &= -x dx, \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + c, \\ y(x)^2 &= -x^2 + 2c = -x^2 + c'; \end{aligned}$$

ciò implica  $c' = y^2 + x^2 > 0$ . In conclusione,

$$y(x) = \pm\sqrt{c' - x^2}, \quad x \in ]-\sqrt{c'}, \sqrt{c'}[.$$

Le soluzioni hanno per grafici delle semicirconferenze di raggi  $\sqrt{c'}$ , con  $c'$  arbitrario numero positivo. Si osservi che, dopo aver scritto l'equazione nella forma simmetrica  $y \, dy = -x \, dx$ , abbiamo ricavato  $x^2 + y^2 = c'$ , che è l'equazione dell'*intera* circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{c'}$ . In effetti l'equazione in forma simmetrica è risolta anche dalle funzioni  $x(y) = \pm\sqrt{c' - y^2}$ ,  $y \in ]-\sqrt{c'}, \sqrt{c'}[$ , ottenute esplicitando la variabile  $x$  in funzione della  $y$ . L'equazione  $x^2 + y^2 = c'$  (in termini generali, l'equazione  $\gamma(y) + F(x) = c$  ottenuta nel 3<sup>o</sup> passo) rappresenta una curva del piano la quale, “localmente”, ossia nell'intorno di ogni suo fissato punto, è grafico di una funzione  $y(x)$ , oppure  $x(y)$ , ciascuna delle quali è soluzione della forma simmetrica dell'equazione differenziale.

## Equazioni lineari del primo ordine

Le equazioni *lineari* del primo ordine, come sappiamo, hanno la forma seguente:

$$y' = a(x)y + b(x), \quad x \in I,$$

ove  $a$  e  $b$ , detti *coefficienti* dell'equazione, sono funzioni continue in  $I$ . Sia  $y$  una soluzione dell'equazione: se  $A$  è una primitiva della funzione  $a$  in  $I$ , moltiplicando i due membri dell'equazione per  $e^{-A(x)}$  si ottiene

$$e^{-A(x)}b(x) = e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = \frac{d}{dx}(e^{-A(x)}y(x)), \quad x \in I;$$

dunque  $e^{-A(x)}y(x)$  è una primitiva di  $e^{-A(x)}b(x)$  in  $I$ . Quindi, scelto arbitrariamente  $x_0 \in I$ , esisterà  $c \in \mathbb{R}$  per cui

$$e^{-A(x)}y(x) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt + c, \quad x \in I,$$

ossia la funzione  $y(x)$  è data da

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt + c \right), \quad x \in I.$$

Viceversa, se  $y$  è una funzione di questo tipo (con  $x_0 \in I$  e  $c \in \mathbb{R}$  fissati), allora per ogni  $x \in I$  si ha

$$y'(x) = a(x)e^{A(x)} \left( \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt + c \right) + e^{A(x)}(e^{-A(x)}b(x)) = a(x)y(x) + b(x),$$

cioè  $y$  risolve l'equazione differenziale.

Si noti che se  $b(x) \equiv 0$  (nel qual caso l'equazione si dice *omogenea*) l'insieme delle soluzioni è  $\{ce^{A(x)}, c \in \mathbb{R}\}$  ed è quindi uno spazio vettoriale  $V_0$  di dimensione 1, generato dall'elemento  $e^{A(x)}$ . Se  $b(x) \not\equiv 0$ , l'insieme delle soluzioni è uno *spazio affine*, cioè un traslato dello spazio  $V_0$ : la traslazione è ottenuta sommando a ciascun elemento di  $V_0$  la funzione  $e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt$ , che è essa stessa una soluzione dell'equazione non omogenea.

Si osservi anche che la scelta di una diversa primitiva,  $A(x) + \lambda$ , di  $a$ , non altera l'insieme delle soluzioni. Analogamente, la scelta di un diverso punto  $x_1 \in I$  come primo estremo nell'integrale ha l'effetto di modificare la costante  $c$ , che diventa  $c + \int_{x_0}^{x_1} e^{-A(t)}b(t) dt$ : ma dato che  $c$  varia in  $\mathbb{R}$ , nuovamente l'insieme delle soluzioni non cambia.

**Esempio 6.2.2** Consideriamo l'equazione  $y' = 2xy + x^3$ . Una primitiva della funzione  $2x$  è  $x^2$ . Moltiplichiamo l'equazione per  $e^{-x^2}$ : si ottiene

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} y(x) \right) = x^3 e^{-x^2}.$$

Calcoliamo una primitiva di  $x^3 e^{-x^2}$ : con facili calcoli

$$\int_0^x t^3 e^{-t^2} dt = -\frac{x^2 + 1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$e^{-x^2} y(x) = -\frac{x^2 + 1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{x^2 + 1}{2} e^{-x^2} + c',$$

e le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$y(x) = -\frac{x^2 + 1}{2} + ce^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se imponiamo ad esempio la condizione di Cauchy  $y(33) = -700$ , troviamo facilmente la corrispondente costante  $c$ :

$$c = -155 e^{-1089},$$

e dunque un'unica soluzione, in accordo con il teorema 6.1.1.

Si osservi che non sempre i calcoli per risolvere un'equazione differenziale possono essere esplicitamente svolti, perché talvolta le primitive non sono esprimibili in forma chiusa: ad esempio la semplicissima equazione  $y' = e^{-x^2}$  ha le soluzioni  $y(x) = c + \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

## Esercizi 6.2

1. Provare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni; disegnare il grafico di alcune di esse.

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$(i) \ y' = xy^2, \quad (ii) \ y' = y^{2/3}, \quad (iii) \ y' = \frac{x}{1 + \log y},$$

$$(iv) \ y' = \log x \sin y, \quad (v) \ y' = x \left( 1 + \frac{1}{y} \right), \quad (vi) \ xyy' = y - 1,$$

$$(vii) \ y' = \frac{\log x \cos y}{x \sin 2y}, \quad (viii) \ y' = \frac{x - xy^2}{y + x^2y}, \quad (ix) \ y' = e^{-y+ey}.$$

3. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y' = -\frac{y}{1+x^2} + x - 2, \quad \text{(ii)} \quad y' = -2xy + xe^{-x}, \\ \text{(iii)} & y' = -\tan x \cdot y + \sin x, \quad \text{(iv)} \quad y' = \frac{2}{x} \cdot y + x, \\ \text{(v)} & y' = \frac{y}{1-x^2} + 1 - x, \quad \text{(vi)} \quad y' = -\frac{y}{x} - \frac{e^{-x}}{x}. \end{array}$$

4. Sia  $y(x)$  una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = a(x)y + b(x), \quad x > 0,$$

e si supponga che sia  $a(x) \leq -c < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$ . Si dimostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

5. (*Equazioni di Bernoulli*) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha,$$

ove  $\alpha$  è un numero reale diverso da 0 e da 1. Mediante la sostituzione  $v(x) = y(x)^{1-\alpha}$ , si verifichi che l'equazione differenziale diventa lineare nell'incognita  $v(x)$ . Utilizzando questo metodo si risolvano le equazioni

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & y' = 2y - 3y^2, & \text{(ii)} \quad y' = -2xy + x^3y^3, \quad \text{(iii)} \quad y' = \frac{xy^3 + x^2}{y^2}. \end{array}$$

6. (*Equazioni non lineari omogenee*) Utilizzando la sostituzione  $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ , si verifichi che un'equazione differenziale della forma  $y' = g(\frac{y}{x})$ , con  $g$  assegnata funzione continua, diventa a variabili separabili nell'incognita  $v(x)$ . Si utilizzi questo metodo per risolvere le equazioni

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & y' = 2 - \frac{x}{y}, & \text{(ii)} \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}, \quad \text{(iii)} \quad x^2y' = y^2 + xy + 4x^2. \end{array}$$

7. (*Equazioni di Riccati*) Data l'equazione differenziale

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad x \in I,$$

si supponga di conoscerne una soluzione  $\psi(x)$ . Si verifichi che con la sostituzione  $y(x) = \psi(x) + \frac{1}{v(x)}$ , l'equazione diventa lineare nell'incognita  $v(x)$ . Utilizzando questo metodo, si risolva l'equazione

$$y' = y^2 - xy + 1.$$

8. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$(i) \begin{cases} y' = -3x^2y^4 \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} 4x^{3/2}yy' = 1 - y^2 \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} y' = \frac{y^2 + 1}{x^2 + 1} \\ y(0) = \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} \sqrt{xy}' + \sqrt{y} \sin \sqrt{x} = 0 \\ y(\pi^2) = 9, \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} y' = x(y^3 - y) \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

$$(vii) \begin{cases} 2xyy' = y^2 - x^2 + 1 \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

$$(viii) \begin{cases} y' = \sqrt{(1+y)(1+x^2)} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

### 6.3 Analisi qualitativa

Non sempre è possibile scrivere esplicitamente le soluzioni di un'equazione differenziale non lineare, e del resto non sempre un'espressione esplicita aiuta a comprendere l'andamento qualitativo delle *curve integrali*, ossia dei grafici di tali soluzioni. In molti casi, uno studio diretto dell'equazione differenziale permette di studiare il comportamento delle curve integrali senza conoscerne l'espressione analitica.

**Esempio 6.3.1** Consideriamo l'equazione del primo ordine

$$y' = x \left[ 1 + \frac{1}{y} \right].$$

Il teorema di esistenza e unicità della soluzione è applicabile in tutti i punti  $(x, y)$  dei due semipiani  $y > 0$  e  $y < 0$ : quindi per ogni punto  $(x_0, y_0)$ , con  $y_0 \neq 0$ , passa una e una sola soluzione dell'equazione. Cominciamo col determinare le *curve isocline*, cioè le curve sulle quali la pendenza di tutte le curve integrali che le attraversano è la stessa. Nel nostro caso, le isocline sono le iperboli di equazione  $y = \frac{x}{c-x}$ : infatti una soluzione  $y(x)$ , che passi per un punto della forma  $(x_0, \frac{x_0}{c-x_0})$ , deve avere in tale punto pendenza pari a

$$y'(x_0) = x_0 \left( 1 + \frac{1}{y(x_0)} \right) = x_0 \left( 1 + \frac{1}{\frac{x_0}{c-x_0}} \right) = c,$$

dunque costante (al variare di tutte le soluzioni passanti per punti della curva). In particolare, sui punti dell'isocline  $y = -1$  le curve integrali hanno tangente orizzontale. Dall'equazione differenziale ricaviamo, derivando rispetto a  $x$ ,

$$y'' = 1 + \frac{1}{y} - x \frac{y'}{y^2} = \frac{(y+1)(y-x)(y+x)}{y^3},$$

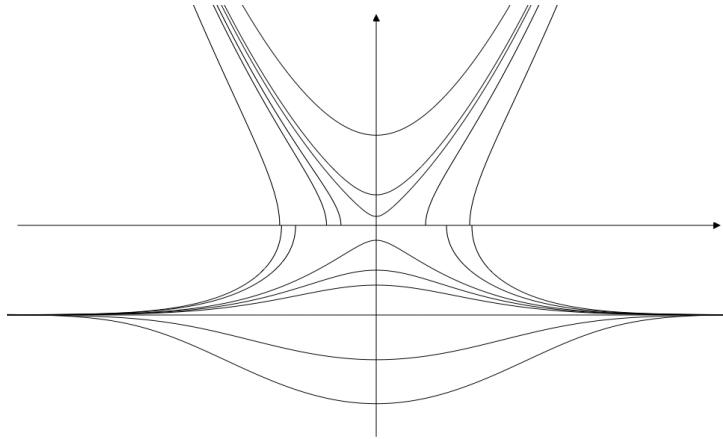
e quindi l'intero piano può essere suddiviso in regioni di concavità e di convessità sulla base del segno dei fattori che compongono  $y''$ . In particolare le rette  $y = \pm x$  sono

costituite da punti di flesso per le soluzioni. Si osservi che per  $x < 0$  e  $y \notin [-1, 0]$  le soluzioni sono decrescenti, mentre sono crescenti per  $y < 0$  e  $-1 < y < 0$ . Inoltre le soluzioni sono pari, ossia i grafici sono simmetrici rispetto alla retta verticale  $x = 0$ : infatti, dato che il secondo membro dell'equazione differenziale è una funzione dispari rispetto a  $x$ , se  $y(x)$  è soluzione, anche  $y(-x)$  lo è.

La retta  $y = -1$  è una curva integrale dell'equazione: quindi, per il teorema di unicità, essa non può essere attraversata da altre curve integrali. Infine osserviamo che per  $y > 0$  risulta  $|y'(x)| > |x|$ , e quindi  $|y'(x)| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ; pertanto nessuna curva integrale presenta asintoti obliqui.

Si noti che l'equazione differenziale, essendo a variabili separabili, si risolve, ma la soluzione è espressa in forma implicita:

$$y - \ln|1+y| = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$



**Esempio 6.3.2** Consideriamo l'equazione

$$y' = 4y(1-y).$$

In questo caso le curve isocline sono le rette  $y = c$ ; vi sono inoltre le soluzioni costanti  $y = 0$  e  $y = 1$ , che separano il piano in tre zone, in ciascuna delle quali  $y'$  ha segno costante. Si ha anche

$$y'' = 16y(1-y)(1-2y),$$

e quindi per  $y > 1$  e per  $0 < y < 1/2$  le soluzioni sono convesse.

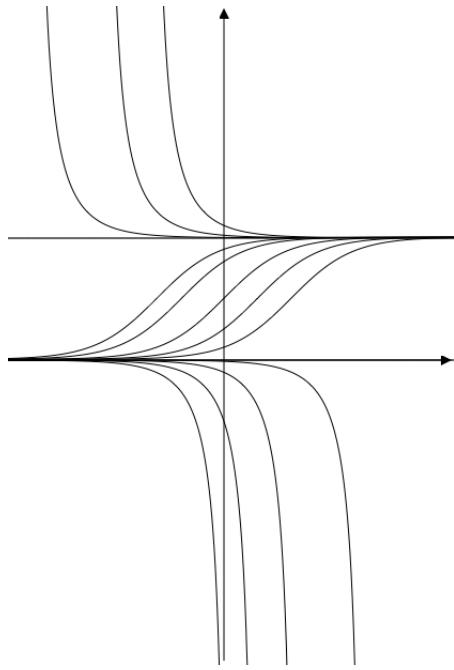
È facile analizzare il comportamento asintotico delle soluzioni. Consideriamo una curva integrale uscente da un punto di coordinate  $(0, a)$ : se  $a \in ]0, 1[$ ,  $y(x)$  è crescente ed è contenuta nella striscia  $0 < y < 1$  (poiché non può attraversare le due curve integrali  $y = 0$  e  $y = 1$ ); dal teorema di esistenza segue che  $y(x)$  esiste per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Inoltre, posto  $u_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  e  $v_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$  (i limiti esistono essendo  $y$  crescente), si deve avere  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y'(x) = 0$ , e dunque, passando al limite nell'equazione differenziale, si trova  $4u_0(1-u_0) = 0 = 4v_0(1-v_0)$ , da cui  $u_0 = 1$  e  $v_0 = 0$ . Dunque le curve integrali costanti  $y = 0$  e  $y = 1$  sono asintoti orizzontali per tali soluzioni.

Se invece  $a > 1$ ,  $y(x)$  è convessa e decrescente, quindi  $u_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  esiste finito e come sopra si ottiene  $u_0 = 1$ , mentre necessariamente la soluzione diverge per  $x \rightarrow -\infty$ , dato che  $|y'| \geq 4|y|(|y|-1) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow -\infty$ : dunque  $v_0 = -\infty$ .

Quando  $a < 0$ , simili considerazioni mostrano che  $v_0 = 0$  e  $u_0 = -\infty$ . Si noti il diverso comportamento delle curve integrali attorno alla soluzioni stazionarie: al crescere di  $x$ , la soluzione  $y = 1$  è un “attrattore” di soluzioni, mentre  $y = 0$  è un “repulsore” di soluzioni.

In questo caso le soluzioni si determinano esplicitamente:

$$y(x) = \frac{ce^{4x}}{1 + ce^{4x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



**Osservazione 6.3.3** L'esempio precedente rientra in una importante sottoclasse di equazioni del primo ordine: le *equazioni autonome*, ossia quelle della forma

$$y' = F(y),$$

ove  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$  è un'assegnata funzione continua definita su un intervallo  $J \subseteq \mathbb{R}$ . Dunque un'equazione differenziale è autonoma se il suo secondo membro non dipende esplicitamente dalla variabile  $x$ .

È facile verificare che se  $y(x)$  è una soluzione in  $]x_1, x_2[$  dell'equazione sopra scritta, allora, qualunque sia  $T \in \mathbb{R}$ , la funzione  $x \mapsto y(x+T)$  risolve l'equazione in  $]x_1 - T, x_2 - T[$ . Nel seguito supporremo per semplicità che  $F$  sia definita su tutto  $\mathbb{R}$ ; si noti che questo *non implica* che ciascuna soluzione sia definita su tutto  $\mathbb{R}$ . È vero però che per descrivere tutte le soluzioni sarà sufficiente, a meno di una traslazione temporale, considerare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di  $y_0$  in  $\mathbb{R}$ .

Analizziamo alcuni casi significativi. Se  $F(y_0) = 0$ , allora  $y(x) \equiv y_0$  è una *soluzione stazionaria*, ossia costante. Se  $F(y_0) < 0$  ed esiste  $\bar{y} < y_0$  tale che  $F(\bar{y}) = 0$ , allora si vede facilmente che la soluzione  $y(x)$  è definita per ogni  $x > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_1$ , ove  $y_1$  è il *massimo* fra gli zeri di  $F$  minori di  $y_0$ . Similmente, se  $F(y_0) > 0$  ed esiste  $\bar{y} > y_0$  tale che  $F(\bar{y}) = 0$ , allora la soluzione  $y(x)$  è definita per ogni  $x > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_2$ , ove  $y_2$  è il *minimo* fra gli zeri di  $F$  maggiori di  $y_0$ . Se ne deduce che se esiste un intorno  $U$  di  $y_0$  per cui

$$F(y) \begin{cases} > 0 & \text{per } y < y_0, y \in U \\ = 0 & \text{per } y = y_0 \\ < 0 & \text{per } y > y_0, y \in U, \end{cases}$$

allora la soluzione stazionaria  $y(x) = y_0$  è asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  di soluzioni  $y(x)$ , sia “dall’alto” che “dal basso”. Una condizione sufficiente affinché ciò accada è, ovviamente,

$$F \in C^1(\mathbb{R}), \quad F(y_0) = 0, \quad F'(y_0) < 0.$$

Si dice in tal caso che la soluzione stazionaria  $y = y_0$  è *asintoticamente stabile*. Se, invece, esiste un intorno  $U$  di  $y_0$  per cui

$$F(y) \begin{cases} < 0 & \text{per } y < y_0, \quad y \in U \\ = 0 & \text{per } y = y_0 \\ > 0 & \text{per } y > y_0, \quad y \in U, \end{cases}$$

allora le soluzioni  $y(x)$  “si allontanano” dalla soluzione stazionaria  $y = y_0$  per  $x \rightarrow +\infty$ ; ciò accade, ad esempio, quando  $F \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $F(y_0) = 0$  e  $F'(y_0) > 0$ . In tal caso la soluzione stazionaria  $y = y_0$  si dice *instabile*.

Nel confronto fra due soluzioni di una data equazione differenziale è di grande utilità il seguente lemma elementare ma assai importante.

**Lemma 6.3.4 (di Grönwall)** *Siano  $u, v$  funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$ . Supponiamo che si abbia  $u \geq 0$  in  $[a, b]$  e*

$$v(x) \leq c + \int_a^x v(t)u(t) dt \quad \forall x \in [a, b],$$

ove  $c$  è una costante reale; allora risulta

$$v(x) \leq c \exp\left(\int_a^x u(t) dt\right) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Dimostrazione** Definiamo

$$G(x) = c + \int_a^x v(t)u(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

La funzione  $G$  verifica  $G(x) \geq v(x)$  in  $[a, b]$  per ipotesi, ed inoltre  $G'(x) = v(x)u(x)$  in  $[a, b]$ ; ne segue  $G'(x) \leq u(x)G(x)$  in  $[a, b]$ . Moltiplicando la disequazione  $G'(x) - u(x)G(x) \leq 0$  per la funzione positiva  $\exp\left(-\int_a^x u(t) dt\right)$ , si ottiene

$$\frac{d}{dx} \left( \exp\left(-\int_a^x u(t) dt\right) G(x) \right) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui

$$\exp\left(-\int_a^x u(t) dt\right) G(x) \leq G(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

e finalmente, essendo  $G(a) = c$ ,

$$v(x) \leq G(x) \leq c \exp\left(\int_a^x u(t) dt\right) \quad \forall x \in [a, b]. \quad \square$$

**Osservazione 6.3.5** Il lemma di Grönwall vale anche quando le funzioni continue  $u$  e  $v$  verificano  $u \geq 0$  in  $[a, b]$  e

$$v(x) \leq c + \int_x^b v(t)u(t) dt \quad \forall x \in [a, b];$$

in tal caso la conclusione è

$$v(x) \leq c \exp\left(\int_x^b u(t) dt\right) \quad \forall x \in [a, b].$$

La dimostrazione si fa ripetendo l'argomentazione precedente, oppure usando il lemma 6.3.4 con le funzioni  $\bar{v}(x) = v(a+b-x)$  e  $\bar{u}(x) = u(a+b-x)$ .

Dal lemma di Grönwall seguono facilmente alcuni importanti criteri di confronto per soluzioni di equazioni differenziali: si vedano gli esercizi 6.3.5 e 6.3.6.

Discuteremo adesso alcuni esempi, che mettono in evidenza come l'analisi qualitativa delle equazioni differenziali, benché concettualmente non difficile, si riveli talvolta assai complicata.

**Esempio 6.3.6** Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^2 - \arctan^2 x.$$

Osserviamo anzitutto che il secondo membro verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità su tutto  $\mathbb{R}^2$ : quindi per ogni punto del piano passa una ed una sola traiettoria. Dunque i grafici di due soluzioni distinte non possono intersecarsi. Inoltre, se  $y(x)$  è soluzione, allora anche  $v(x) = -y(-x)$  è soluzione: ciò significa che i grafici sono simmetrici rispetto all'origine e pertanto è sufficiente analizzarli nel semipiano  $x \geq 0$ . Le soluzioni sono crescenti nella regione  $|y| > |\arctan x|$  e decrescenti nella regione  $|y| < |\arctan x|$ ; dunque i grafici attraversano  $y = \pm \arctan x$  con tangente orizzontale. Le regioni di convessità sono di difficile individuazione, poiché

$$y'' = 2yy' - 2 \frac{\arctan x}{1+x^2} = 2y(y^2 - \arctan^2 x) - 2 \frac{\arctan x}{1+x^2},$$

e non è per niente agevole lo studio del segno di  $y''$ . Tuttavia possiamo notare che

$$y^2 - \frac{\pi^2}{4} < y' < y^2,$$

quindi, detta  $y_b$  la soluzione tale che  $y(0) = b$ , per confronto (esercizio 6.3.6) si ha  $z(x) < y_b(x) < w(x)$ , ove  $w$  e  $z$  sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w' = w^2 \\ w(0) = b, \end{cases} \quad \begin{cases} z' = z^2 - \frac{\pi^2}{4} \\ z(0) = b. \end{cases}$$

Con calcoli standard si trova dunque

$$z(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{b-\pi/2}{b+\pi/2} e^{\pi x}}{1 - \frac{b-\pi/2}{b+\pi/2} e^{\pi x}} < y_b(x) < \frac{b}{1 - xb} = w(x) \quad \forall x > 0.$$

È immediato constatare che

$$w(x) \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{b}, \quad z(x) \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{\pi} \ln \frac{b+\pi/2}{b-\pi/2},$$

e dunque anche  $y_b$  ha un asintoto verticale  $x = x_b$ , con

$$\frac{1}{b} < x_b < \frac{1}{\pi} \ln \frac{b+\pi/2}{b-\pi/2};$$

in particolare, se  $b \rightarrow \infty$  l'ascissa dell'asintoto di  $y_b$  tende a 0.

Più in generale, se  $b > 0$  ed esiste  $\xi > 0$  tale che  $y_b(\xi) = \pi/2$ , allora sarà  $z(x) < y_b(x) < w(x)$ , ove  $w$  e  $z$  sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w' = w^2 \\ w(\varepsilon + \xi) = y_b(\varepsilon + \xi), \end{cases} \quad \begin{cases} z' = z^2 - \frac{\pi^2}{4} \\ z(\varepsilon + \xi) = y_b(\varepsilon + \xi), \end{cases}$$

ove  $\varepsilon > 0$ , e si trova di conseguenza per  $x > \varepsilon + \xi$

$$z(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{y_b(\varepsilon + \xi) - \pi/2}{y_b(\varepsilon + \xi) + \pi/2} e^{\pi(x - \varepsilon - \xi)}}{1 - \frac{y_b(\varepsilon + \xi) - \pi/2}{y_b(\varepsilon + \xi) + \pi/2} e^{\pi(x - \varepsilon - \xi)}} < y_b(x) < \frac{y_b(\varepsilon + \xi)}{1 - (x - \varepsilon - \xi)y_b(\varepsilon + \xi)} = w(x).$$

Dunque, nuovamente, la  $y_b$  ha un asintoto verticale  $x = x_b$  con

$$\varepsilon + \xi + \frac{1}{y_b(\varepsilon + \xi)} < x_b < \varepsilon + \xi + \frac{1}{\pi} \ln \frac{y_b(\varepsilon + \xi) + \pi/2}{y_b(\varepsilon + \xi) - \pi/2}.$$

Se invece  $b > 0$  è sufficientemente piccolo, allora il grafico di  $y_b$  attraversa la curva  $y = \arctan x$ : infatti si ha  $y_b(x) < \frac{b}{1-xb}$  e il grafico di quest'ultima funzione sicuramente attraversa quello di  $\arctan x$  purché  $b$  sia piccolo (infatti per  $x = \pi/4$  si ha  $\frac{b}{1-\frac{\pi}{4}b} < \arctan \pi/4 = 1$  purché  $b < 4/(4+\pi)$ ).

Dunque esiste il numero positivo

$$\alpha = \inf \left\{ b > 0 : \exists \xi > 0 : y_b(\xi) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Se allora  $b > \alpha$ , la corrispondente soluzione cresce fino al suo asintoto verticale  $x = x_b$ ; se  $0 < b < \alpha$ , la soluzione cresce fino ad attraversare la curva  $y = \arctan x$ , dove ha un massimo assoluto, poi inizia a decrescere, come vedremo meglio fra poco.

Se  $b = \alpha$ , la soluzione  $y_\alpha$  separa le soluzioni con asintoto verticale da quelle definitivamente decrescenti: non è difficile rendersi conto che essa dovrà essere crescente (perché è un estremo inferiore di funzioni crescenti) ma restare sotto la quota  $y = \pi/2$  per definizione di  $\alpha$ . Dunque per questa soluzione si ha

$$\arctan x < y_\alpha(x) < \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0.$$

Osserviamo adesso che se una soluzione comincia ad essere decrescente, tale resterà per sempre: infatti per tornare a crescere dovrebbe attraversare con pendenza nulla, venendo

dall'alto, la curva  $y = -\arctan x$ , che ha pendenza negativa, e questo è impossibile. Pertanto queste soluzioni non possono che tendere all'asintoto orizzontale  $y = -\pi/2$ . Se  $b = 0$  la soluzione parte con pendenza nulla, cosicché viene immediatamente a trovarsi nella regione di decrescenza. Quindi anch'essa decresce fino all'asintoto orizzontale  $y = -\pi/2$ .

Infine, se  $b < 0$  la soluzione cresce, fino ad attraversare la curva  $y = \arctan x$ , dopodiché ancora una volta la soluzione decresce fino all'asintoto orizzontale  $y = -\pi/2$ . Si noti che per ogni  $b < 0$  la soluzione  $y_b(x) \equiv y(x)$  diventa prima o poi decrescente: infatti supponiamo per assurdo che  $y(x)$  resti crescente e dunque sempre minore di  $-\arctan x$ : possiamo confrontare  $y(x)$  con una soluzione  $u(x)$  di dato iniziale  $b' > 0$  piccolo, notando che la differenza  $y - u$  verifica

$$y' - u' = y^2 - u^2, \quad y(0) - u(0) = b - b' < 0.$$

Scegliamo un'ascissa  $x_0$  sufficientemente grande in modo che  $u(x_0) < 0$ ; dunque  $v = y - u$  verifica

$$\frac{v'}{v} = y + u < -\frac{\pi}{2} + \max u = -K < 0 \quad \forall x > x_0.$$

Ne segue facilmente

$$|v(x)| \leq |v(x_0)|e^{-K(x-x_0)}.$$

D'altra parte,

$$y(x) < -\frac{\pi}{2} < -\arctan x < u(x) \quad \forall x > 0,$$

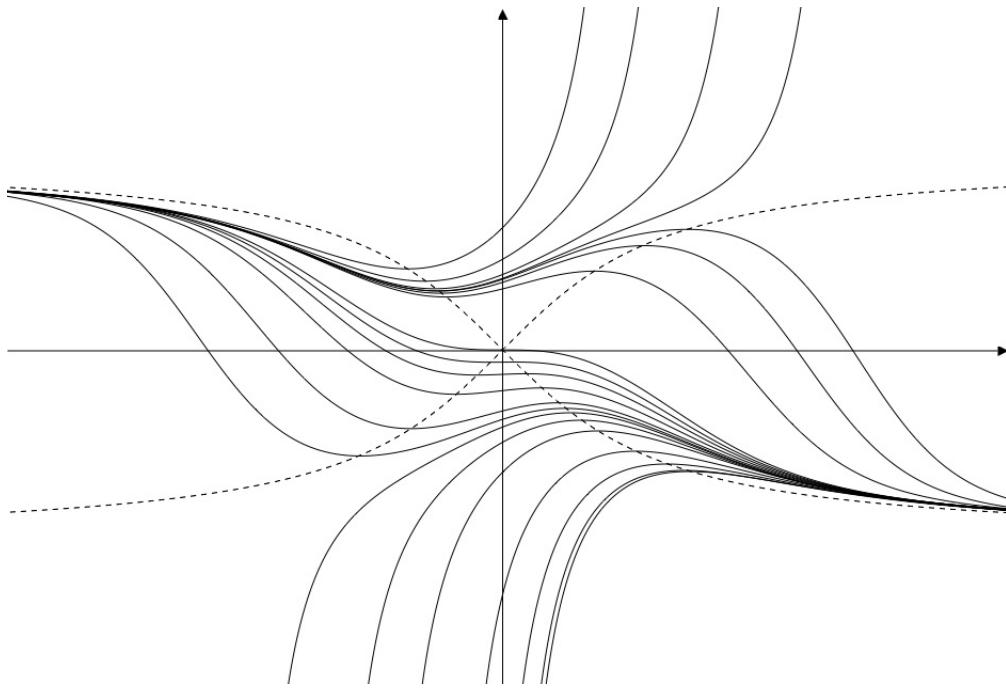
quindi otteniamo

$$|v(x_0)|e^{-K(x-x_0)} \geq |v(x)| = u(x) - y(x) > \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \forall x > x_0.$$

Ciò tuttavia è assurdo perché per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x}.$$

Possiamo ricapitolare tutto quanto detto con questo disegno approssimativo:



**Esempio 6.3.7** Consideriamo l’equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

Essa è definita per  $x, y \geq 0$  ma rispetta le ipotesi del teorema di esistenza e unicità solo quando  $x, y > 0$ . Nei punti di ordinata nulla, infatti, succede che la soluzione con dato iniziale  $y(x_0) = 0$  è definita al più “nel passato”, ossia per  $0 \leq x < x_0$ , ma non “nel futuro”, poiché si ha  $y'(x_0) = -\sqrt{x_0} < 0$  e quindi il grafico esce immediatamente dal dominio, facendo perdere significato all’equazione differenziale. Analizziamo dunque la situazione nel primo quadrante aperto. Le soluzioni sono sempre positive; la zona di crescenza è il settore  $y > x$ , mentre la retta  $y = x$  viene attraversata con pendenza nulla. Calcoliamo la regione di convessità: si ha, con qualche calcolo,

$$y'' = \frac{1}{2} \left( \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{y}-x}{2\sqrt{x}\sqrt{y}},$$

dunque se  $x \leq 1$  le soluzioni sono concave, mentre se  $x > 1$  le soluzioni sono convesse per  $y \geq \frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$  e concave per  $0 < y \leq \frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$ . La funzione  $g(x) = \frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$  tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow 1^+$ , mentre per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$g(x) - x = x \left( \frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2} - 1 \right) = \frac{x(2\sqrt{x}-1)}{x-2\sqrt{x}+1} \simeq 2\sqrt{x},$$

cosicché  $g(x) - x \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Ne segue che  $g$  ha un minimo assoluto per  $x = 4$ , con  $g(4) = 16$ , ed ha necessariamente un flesso fra 4 e  $+\infty$ .

Osserviamo adesso un fatto importante: se  $y(x_0) = g(x_0)$ , ossia una soluzione taglia il luogo dei flessi  $g$ , allora  $x_0 > 1$  e

$$y'(x_0) = \sqrt{y(x_0)} - \sqrt{x_0} = \sqrt{g(x_0)} - \sqrt{x_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}-1} - \sqrt{x_0} = \frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}-1},$$

ed è facile verificare che risulta  $y'(x_0) > g'(x_0)$ ; ciò significa che  $y(x)$  diventa convessa e non può più riattraversare la curva  $y = g(x)$  in un altro punto  $x'_0 > x_0$ , poiché altrimenti in tale punto dovrebbe avversi la diseguaglianza contraria  $y'(x'_0) \geq g'(x'_0)$ . Dunque tale soluzione tende a  $+\infty$  senza asintoto verticale. Nemmeno può esserci un asintoto obliquo  $y = ax + b$ , poiché in tal caso avremmo  $y'(x) \rightarrow a$  e  $\sqrt{y(x)} - \sqrt{ax + b} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ , mentre l'equazione differenziale fornirebbe invece

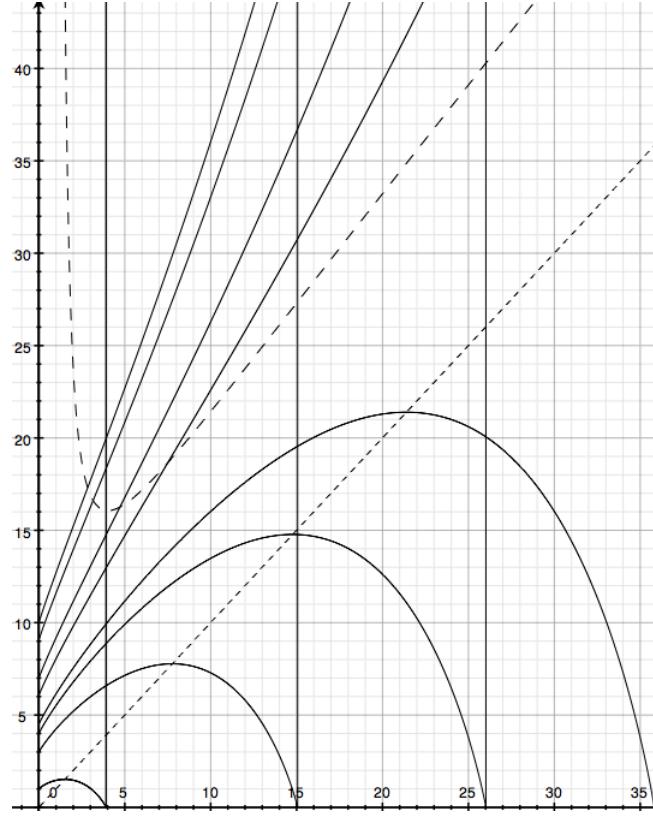
$$y'(x) = \sqrt{y(x)} - \sqrt{x} \simeq \frac{(a-1)x + b}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{x}} \simeq \begin{cases} +\infty & \text{se } a \neq 1 \\ 0 & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Se invece la soluzione non taglia il grafico di  $g$ , essa rimane concava e tende a 0 in tempo finito, ossia per  $x \rightarrow \bar{x}$  con  $\bar{x}$  opportuno. La soluzione taglia o no il grafico di  $g$  a seconda del suo valore iniziale  $b$ : se  $b$  è molto piccolo, la pendenza di  $y(x)$  è troppo piccola per attraversare il grafico di  $g$ .

La famiglia delle soluzioni definitivamente convesse è chiaramente separata da quella delle soluzioni che restano concave, per mezzo di una soluzione il cui dato iniziale  $\alpha$  è definito da

$$\alpha = \sup\{b > 0 : y_b < g\} :$$

tale soluzione  $y_\alpha(x)$  è l'unica concava e crescente nell'intera semiretta  $[0, \infty[$ : essa aderirà sempre più a  $g(x)$ , nel senso che  $y_\alpha(x) - g(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .



**Esempio 6.3.8** Analizziamo l'equazione

$$y' = xy e^{-y^2}.$$

Vi è la soluzione nulla  $y = 0$ ; inoltre se  $y(x)$  è soluzione anche  $y(-x)$  e  $-y(x)$  sono soluzioni: pertanto basta studiare cosa succede nel primo quadrante. In questa regione tutte le soluzioni (tranne ovviamente  $y = 0$ ) sono crescenti. Troviamo la curva dei flessi: dopo qualche calcolo si ottiene

$$y'' = e^{-y^2} [y + x(1 - 2y^2)y'] = y e^{-y^2} [1 + x^2 e^{-y^2} (1 - 2y^2)],$$

da cui  $y'' \geq 0$  se e solo se

$$0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{oppure} \quad y > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}.$$

La funzione

$$h(y) = \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}, \quad y > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tende a  $+\infty$  per  $y \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^+$  e per  $y \rightarrow \infty$ ; inoltre, si verifica facilmente che

$$h'(y) = \frac{y e^{y^2/2} (2y^2 - 3)}{(2y^2 - 1)^{3/2}},$$

e in particolare  $h$  ha l'unico punto di minimo relativo, dunque anche di minimo assoluto, per  $x = \frac{e^{3/4}}{\sqrt{2}}$ , dove vale  $\sqrt{3/2}$ .

Consideriamo una soluzione  $y$  con  $y(0) = b > 0$ : essa parte con tangente orizzontale ed è inizialmente convessa. Inoltre essa tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow \infty$ : infatti non può avere un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow \infty$ , perché dall'equazione differenziale seguirebbe che  $y'(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow \infty$  e ciò è assurdo. Se  $y$  rimanesse convessa per ogni  $x > 0$ , non appena  $y(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$  si avrebbe

$$y'(x) = xy e^{-y^2} \leq e^{-y^2/2} \frac{y}{\sqrt{2y^2 - 1}},$$

da cui  $y'(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ : ciò è impossibile, essendo  $y(x)$  convessa e crescente. Pertanto tutte le soluzioni con  $b > 0$  finiscono per diventare concave. Per giunta, esse non possono più tornare convesse: infatti in un ipotetico punto  $(x, y)$  in cui il grafico di  $y(x)$  tagliasse nuovamente la curva  $x = h(y)$  dovremmo avere

$$y > \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = h(y), \quad y'(x) \geq (h^{-1})'(x),$$

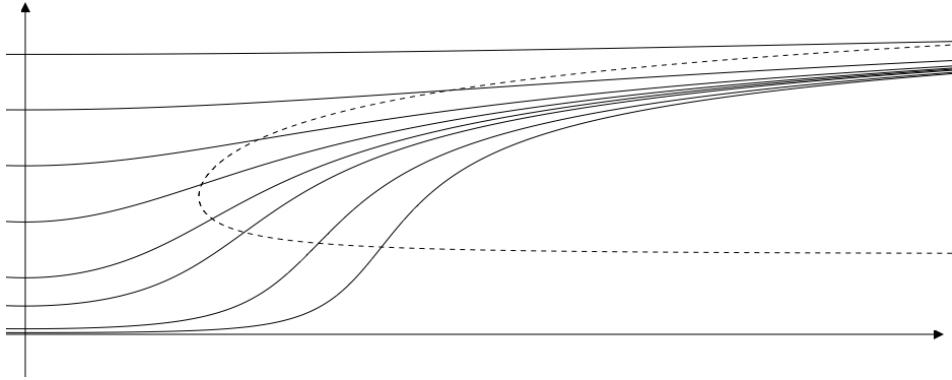
ossia

$$x = \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}, \quad xy e^{-y^2} = y'(x) \geq (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{(2y^2 - 1)^{3/2}}{y e^{y^2/2} (2y^2 - 3)};$$

ne seguirebbe via via, equivalentemente,

$$\begin{aligned} xy e^{-y^2} &\geq \frac{(2y^2 - 1)^{3/2}}{y e^{y^2/2} (2y^2 - 3)} = \frac{(2y^2 - 1)}{xy(2y^2 - 3)}, \\ x^2 y^2 e^{-y^2} &= \frac{y^2}{2y^2 - 1} \geq \frac{2y^2 - 1}{2y^2 - 3}, \\ (2y^2 - 3)y^2 &\geq 4y^4 - 4y^2 + 1, \\ 2y^4 - y^2 + 1 &\leq 0, \end{aligned}$$

e questo è impossibile perché la quantità a primo membro è un trinomio sempre positivo. Notiamo infine che  $y(x)$  tende a  $+\infty$  con  $y'(x) \rightarrow 0$ , quindi la crescenza è di tipo logaritmico (e in particolare senza asintoti obliqui).



**Esempio 6.3.9** Consideriamo infine l'equazione

$$y' = x^2 - y^2.$$

Il teorema di esistenza e unicità vale in tutto il piano. Non vi sono soluzioni costanti; inoltre se  $y(x)$  è soluzione, anche  $-y(-x)$  lo è: quindi è sufficiente analizzare cosa succede nel semipiano  $x \geq 0$ . La zona di crescenza delle soluzioni è  $-x \leq y \leq x$ , e ovviamente la zona di decrescenza è  $|y| > x$ . Si ha poi

$$y'' = 2x - 2yy' = -2yx^2 + 2x + 2y^3;$$

quindi le soluzioni sono convesse nella regione descritta dalla diseguaglianza  $yx^2 - x - y^3 \leq 0$ , e dunque, risolvendo la disequazione di secondo grado in  $x \geq 0$ , si ha

$$y'' \geq 0 \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{1+4y^4}+1}{2y} & \text{se } y > 0 \\ x \geq \frac{\sqrt{1+4y^4}-1}{2|y|} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Con calcoli un po' laboriosi si verifica che per la funzione  $g(y) = \frac{\sqrt{1+4y^4}+1}{2y}$ ,  $y > 0$ , si ha

$$g(y) \simeq \frac{1}{y} \text{ per } y \rightarrow 0^+, \quad \min g = g\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/4}}\right) = \frac{3^{3/4}}{2^{1/2}}, \quad g(y) \simeq y \text{ per } y \rightarrow \infty,$$

ed in particolare, poiché risulta  $g(y) > y$ , il grafico di  $g$  è interamente contenuto nella zona di crescenza; calcoli altrettanto laboriosi mostrano che invece la funzione  $h(y) = \frac{\sqrt{1+4y^4}-1}{2|y|}$ ,  $y < 0$ , soddisfa

$$h(y) \simeq -2y^3 \text{ per } y \rightarrow 0^-, \quad h(y) \simeq -y \text{ per } y \rightarrow -\infty,$$

ed in particolare, dato che  $h(y) < |y|$ , il grafico di  $h$  è interamente contenuto nella zona di decrescenza. Notiamo anche che

$$h'(y) = \frac{1 - 4y^2 - \sqrt{1+4y^4}}{2y^2\sqrt{1+4y^4}} < 0, \quad h'(y) \rightarrow -1 \text{ per } y \rightarrow -\infty.$$

Consideriamo una soluzione  $y(x)$  con  $y(0) = b$ . Se  $b > 0$ , la soluzione è inizialmente decrescente e convessa; dopo aver raggiunto e superato il suo minimo, entra necessariamente (in quanto la curva dei flessi ha per asintoto la retta  $y = x$ ) nella zona di concavità, e lì resta, tendendo all'infinito in modo concavo: non può infatti tornare convessa, perché in tal caso finirebbe per riattraversare la retta  $y = x$  e ciò è impossibile, non essendo nulla la sua derivata. Però la  $y(x)$  ha l'asintoto obliquo  $y = x$  per  $x \rightarrow \infty$ . Infatti, per concavità,  $x - y(x)$  è decrescente: quindi ha limite  $q$  per  $x \rightarrow +\infty$ ; ma allora  $y(x)$  ha l'asintoto  $y = x - q$  e dunque  $y'(x) \rightarrow 1$ , e dall'equazione differenziale segue allora subito  $q = 0$  (altrimenti  $y'(x)$  tenderebbe all'infinito).

Se  $y(0) = 0$ , la soluzione entra subito nella zona di crescenza, poi da convessa diventa concava ed evolve come le soluzioni uscenti da valori  $b > 0$ .

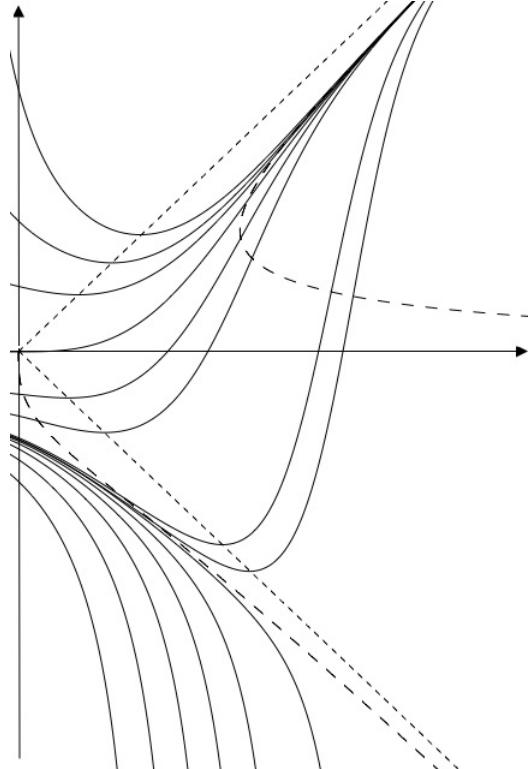
Se  $y(0) = b < 0$ , le cose cambiano. Se  $|b|$  è sufficientemente piccolo, la soluzione deve passare da decrescente a crescente e poi da convessa a concava, per poi evolvere come le soluzioni precedenti: infatti  $y'(x)$  è piccolo, mentre la pendenza della curva  $x = h(y)$ , cioè  $1/h'(y)$ , è negativa e grande in modulo, e quindi le due curve si intersecano.

Se invece  $|b|$  è sufficientemente grande,

la  $y(x)$  sta sotto la retta  $y = b + y'(0)x$ , ove  $|y'(0)| = b^2$ , mentre per  $x \geq a$  la curva  $x = h(y)$  sta sopra la retta  $y = h^{-1}(a) + (h^{-1})'(a)(x - a)$ , che ha pendenza vicina a  $-1$  e tocca l'asse  $y$  in  $h^{-1}(a) - (h^{-1})'(a)a > b$ . Quindi  $y(x)$  resta sempre concava e tende a  $-\infty$ ; poiché inoltre  $y' \leq -y^2$  si vede agevolmente che  $y(x) \leq \frac{b}{1+bx}$  e dunque  $y(x)$  ha un asintoto verticale di ascissa  $x_b < \frac{1}{|b|}$ .

Vi sarà dunque una soluzione “separatrice” tra le curve  $y_b(x)$  con dato iniziale  $b < 0$  che restano concave e le curve  $y_b(x)$  con  $b < 0$  che sono prima concave, poi convesse e infine nuovamente concave. Tale soluzione separatrice avrà dato iniziale

$$\alpha = \sup\{b < 0 : y_b'' < 0 \text{ in } [0, x_b[\},$$



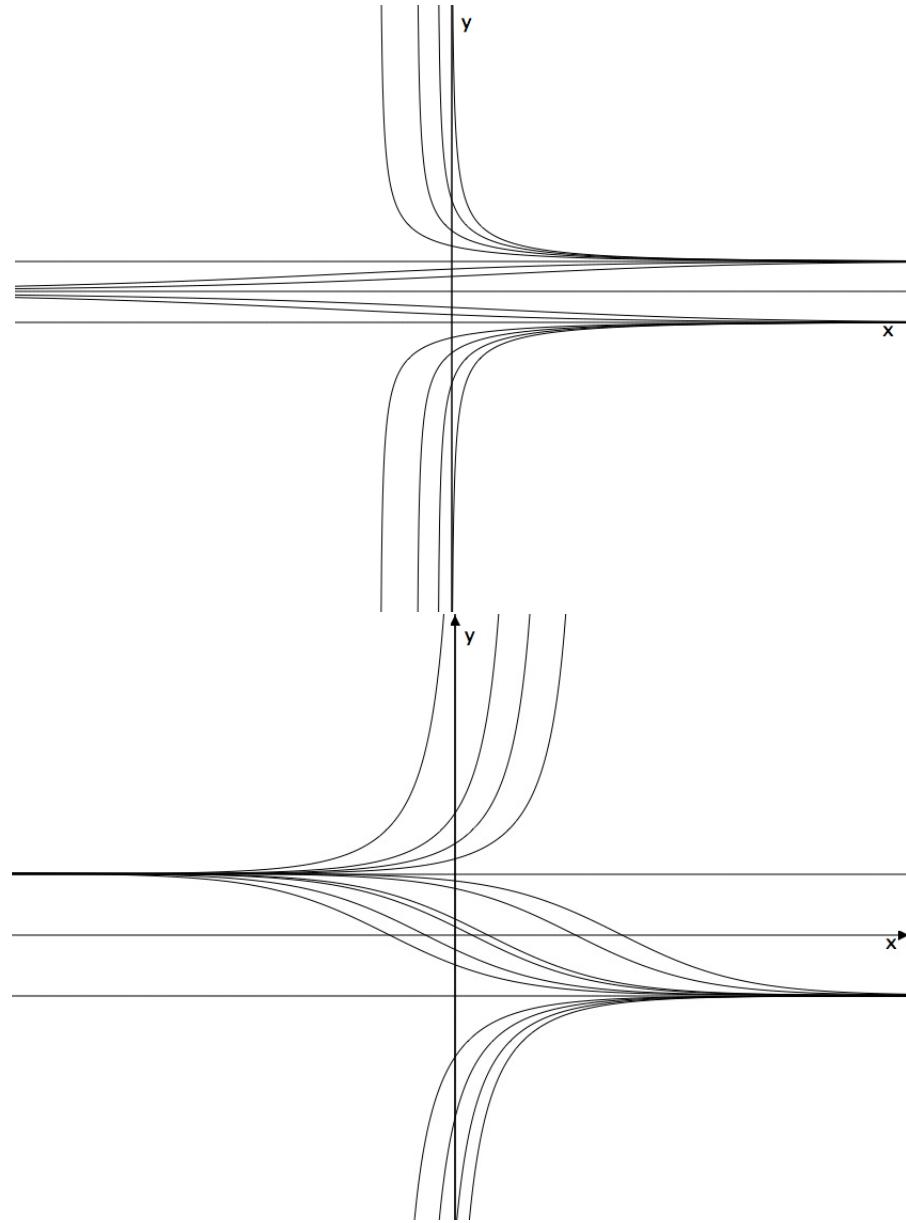
e sarà sempre concava, definita sull'intera semiretta  $[0, \infty[$ , e si avvicinerà indefinitamente alla curva dei flessi senza mai attraverarla, avendo dunque l'asintoto obliquo  $y = -x$ .

### Esercizi 6.3

1. Si verifichi che il comportamento qualitativo delle soluzioni delle equazioni

$$y' = y(1-y) \left( y - \frac{1}{2} \right), \quad y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

è quello descritto nelle figure sottostanti.



2. Determinare il comportamento qualitativo delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$(i) \quad y' = x^2 + y^2, \quad (ii) \quad y' = \frac{x^2 y^2}{1+y^2},$$

$$(iii) \quad y' = \frac{x^2 y^3}{1+y^2}, \quad (iv) \quad y' = |y|(1-y) \frac{x}{1+x^2},$$

$$(v) \quad y' = \frac{\sin^2 x}{1+x^2} e^{-y^2}, \quad (vi) \quad y' = x^3(e^{2-y^2} - 1).$$

3. Dimostrare il lemma di Grönwall nel caso di semirette  $[a, +\infty[$  oppure  $] -\infty, b]$ .
4. Sia  $u \in C^1[a, b]$  soluzione dell'equazione  $u'(x) = a(x)u(x)$  in  $[a, b]$ , ove  $a \in C[a, b]$  è una funzione fissata. Si provi che o la  $u$  è sempre diversa da 0 in  $[a, b]$ , oppure  $u \equiv 0$  in  $[a, b]$ .
5. (*Teorema di confronto, caso lineare*) Siano  $u, v$  due funzioni di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ . Supponiamo che risulti

$$u'(x) \leq p(x)u(x) + q(x), \quad v'(x) = p(x)v(x) + r(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

ove  $p, q, r$  sono fissate funzioni continue su  $[a, b]$ , con  $\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Si provi che:

- (i) supposto  $a \in \mathbb{R}$ , se  $u(a) \leq v(a)$  e se  $q \leq r$  in  $[a, b]$ , allora  $u \leq v$  in  $[a, b]$ ;
- (ii) supposto  $b \in \mathbb{R}$ , se  $u(b) \geq v(b)$  e se  $q \leq r$  in  $[a, b]$ , allora  $u \geq v$  in  $[a, b]$ .

**[Traccia:** si adatti la dimostrazione del lemma di Grönwall.]

6. Sia  $u$  la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = u_0,$$

ove  $f(x, y)$  è una funzione continua su  $I \times \mathbb{R}$ , ove  $I$  è un intervallo, e localmente lipschitziana rispetto alla variabile  $y$  uniformemente rispetto a  $x$ . Supponiamo che risulti, per ogni punto  $x$  dell'intervallo massimale di esistenza,

$$|f(x, u(x))| \leq K|u(x)|,$$

con  $K$  costante. Si provi che la soluzione  $u(x)$  è globale, ossia definita per ogni  $x \in I$ .

7. (*Teorema di confronto, caso quasi lineare*) Siano  $u, v$  due funzioni di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ , con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Supponiamo che risulti

$$u'(x) \leq f(x, u(x)), \quad v'(x) = f(x, v(x)) \quad \forall x \in [a, b],$$

ove  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  in un aperto contenente  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ . Si provi che:

- (i) supposto  $a \in \mathbb{R}$ , se  $u(a) \leq v(a)$  allora  $u \leq v$  in  $[a, b]$ ;
- (ii) supposto  $b \in \mathbb{R}$ , se  $u(b) \geq v(b)$  allora  $u \geq v$  in  $[a, b]$ .

**[Traccia:** Per (i) si consideri la funzione  $g(x) = \exp(-\int_a^x h(t) dt)$ , ove

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t, u(t)) - f(t, v(t))}{u(t) - v(t)} & \text{se } u(t) \neq v(t), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(t, u(t)) & \text{se } u(t) = v(t), \end{cases}$$

e si verifichi che

$$\frac{d}{dx}(g(x)[u(x) - v(x)]) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Integrando fra  $a$  e  $x$  si ricavi la tesi.]

8. Siano  $u, v$  funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$ , con  $u \geq 0$ . Si provino queste due varianti del lemma di Grönwall:

(i) se risulta

$$v(t)^2 \leq c + \int_a^t u(s)v(s) ds \quad \forall t \in [a, b]$$

con  $c \geq 0$ , allora

$$v(t) \leq \sqrt{c} + \frac{1}{2} \int_a^t u(s) ds \quad \forall t \in [a, b];$$

(ii) se risulta

$$v(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)^2 ds \quad \forall t \in [a, b],$$

con  $0 \leq c < \left[ \int_a^b u(s) ds \right]^{-1}$ , allora

$$v(t) \leq \frac{c}{1 - c \int_a^t u(s) ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

9. Per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  sia  $x_n(\cdot)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'_n(t) = -\ln \left( \frac{1}{n} + x_n(t)^2 \right) \\ x_n(0) = 1. \end{cases}$$

Si provi che la soluzione esiste ed è ben definita per ogni  $t \geq 0$ ; si mostri poi che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - x_n(t))$$

converge uniformemente in  $[0, \infty[$ .

[Traccia: per il secondo punto si utilizzi l'esercizio 6.3.7.]

## 6.4 Equazioni lineari del secondo ordine

Consideriamo un'equazione differenziale *lineare* del secondo ordine: essa ha la forma

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

dove  $a_0, a_1$  e  $f$  sono funzioni continue nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Accanto a questa equazione consideriamo anche l'equazione *omogenea*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I,$$

Come nel caso delle equazioni lineari del primo ordine, è immediato verificare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale  $V_0$ . Esso, come

vedremo, ha dimensione 2 (pari all'ordine dell'equazione). L'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea sarà ancora uno spazio affine, ottenibile dallo spazio vettoriale  $V_0$  per mezzo di una traslazione. In effetti, detto  $V_f$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione con secondo membro  $f$ , si ha, avendo fissato un elemento  $v \in V_f$ ,

$$V_f = \{u_0 + v : u_0 \in V_0\}.$$

Infatti, se  $u \in V_f$  allora  $u - v \in V_0$ , poiché

$$(u - v)'' + a_1(x)(u - v)' + a_0(x)(u - v) = f - f = 0, \quad x \in I;$$

dunque, posto  $u_0 = u - v$ , si ha  $u = u_0 + v$  con  $u_0 \in V_0$ . Viceversa, se  $u = u_0 + v$  con  $u_0 \in V_0$ , allora

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = (u_0 + v)'' + a_1(x)(u_0 + v)' + a_0(x)(u_0 + v) = 0 + f = f, \quad x \in I,$$

cioè  $u \in V_f$ .

Pertanto, per determinare completamente  $V_f$  basterà caratterizzare completamente  $V_0$  e trovare un singolo, arbitrario elemento di  $V_f$ .

**(a) Caratterizzazione di  $V_0$ .** Proviamo anzitutto che lo spazio vettoriale  $V_0$  ha dimensione 2. Fissato un punto  $x_0 \in I$ , consideriamo i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1. \end{cases}$$

Essi sono univocamente risolubili (per il teorema 6.1.1, dopo averli trasformati in problemi di Cauchy per sistemi lineari del primo ordine); inoltre le soluzioni sono definite su tutto l'intervallo  $I$  in virtù del teorema 6.1.4. Denotiamo tali soluzioni con  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ .

Dimostriamo che  $y_1$  e  $y_2$  sono *linearmente indipendenti*, ossia che se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono costanti tali che  $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \equiv 0$  in  $I$ , allora necessariamente  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . La funzione  $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$  è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = \lambda_1, \quad y'(x_0) = \lambda_2; \end{cases}$$

quindi se tale soluzione è identicamente nulla, deve essere  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 0$ .

Proviamo ora che le funzioni  $y_1$  e  $y_2$  generano  $V_0$ , ossia che ogni elemento  $u \in V_0$  è combinazione lineare di  $y_1$  e  $y_2$ . Fissata una funzione  $u \in V_0$ , poniamo  $v(x) = u(x_0)y_1(x) + u'(x_0)y_2(x)$ : allora  $v$  è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = u(x_0), \quad y'(x_0) = u'(x_0), \end{cases}$$

problema che è risolto anche da  $u$ : per unicità, deve essere  $u \equiv v$ , e pertanto possiamo scrivere  $u \equiv \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  con  $\lambda_1 = u(x_0)$  e  $\lambda_2 = u'(x_0)$ , ossia  $u$  è combinazione lineare

di  $y_1$  e  $y_2$ . Le due funzioni  $y_1$  e  $y_2$  formano in definitiva una *base* dello spazio vettoriale  $V_0$ .

Abbiamo così individuato la struttura di  $V_0$ : osserviamo però che in generale non si riesce a determinare esplicitamente una base  $\{y_1, y_2\}$  di  $V_0$ .

Se però l'equazione differenziale lineare ha *coefficienti costanti*, ossia  $a_0(x) \equiv a_0$  e  $a_1(x) \equiv a_1$ , è invece possibile, e anzi facile, trovare esplicitamente le funzioni  $y_1$  e  $y_2$ , cercandole di forma esponenziale (perché le esponenziali  $x \mapsto e^{\lambda x}$  sono le uniche funzioni che hanno le proprie derivate multiple di loro stesse). Sia dunque  $y(x) = e^{\lambda x}$ , con  $\lambda$  numero da determinare: imponendo che  $y \in V_0$ , si ha

$$0 = y'' + a_1 y' + a_0 y = e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0),$$

e poiché  $e^{\lambda x} \neq 0$  si deduce che  $\lambda$  deve essere radice del *polinomio caratteristico*  $P(\xi) = \xi^2 + a_1 \xi + a_0$ , ossia deve essere  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ . Si hanno allora tre casi possibili:

**1º caso:** 2 radici reali distinte  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Vi sono dunque due soluzioni  $e^{\lambda_1 x}$  e  $e^{\lambda_2 x}$ . Esse sono linearmente indipendenti perché, supposto ad esempio  $\lambda_1 \neq 0$ , si ha

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} &\equiv 0 \implies e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}) \equiv 0 \implies \\ &\implies c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \equiv 0 \implies \text{(derivando)} \\ &\implies c_1 (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \equiv 0 \implies \text{(essendo } \lambda_2 \neq \lambda_1\text{)} \\ &\implies c_1 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$V_0 = \{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**2º caso:** una radice reale doppia  $\lambda$  (che è uguale a  $-a_1/2$ ).

Una soluzione è  $e^{\lambda x}$ ; un'altra soluzione è  $x e^{\lambda x}$ : infatti

$$D(x e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} (1 + \lambda x), \quad D^2(x e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} (\lambda^2 x + 2\lambda),$$

da cui

$$\begin{aligned} D^2(x e^{\lambda x}) + a_1 D(x e^{\lambda x}) + a_0 x e^{\lambda x} &= \\ &= e^{\lambda x} (\lambda^2 x + 2\lambda + a_1(1 + \lambda x) + a_0 x) = \\ &= e^{\lambda x} ((\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)x + (2\lambda + a_1)) = \\ &\quad \text{(essendo } 2\lambda + a_1 = 0\text{)} \\ &= e^{\lambda x} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Le due soluzioni sono linearmente indipendenti perché

$$c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} \equiv 0 \implies e^{\lambda x} (c_1 x + c_2) \equiv 0 \implies c_1 x + c_2 \equiv 0 \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Dunque

$$V_0 = \{c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**3º caso:** due radici complesse coniugate  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ .

Abbiamo due soluzioni  $e^{\lambda_1 x}$  e  $e^{\lambda_2 x}$ , che sono linearmente indipendenti (stesso calcolo fatto nel 1º caso) ma sono a valori complessi, mentre a noi interessano le soluzioni reali. Si osservi però che, essendo  $e^{(a\pm ib)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} &= e^{ax} (c_1(\cos bx + i \sin bx) + c_2(\cos bx - i \sin bx)) = \\ &= (c_1 + c_2)e^{ax} \cos bx + i(c_1 - c_2)e^{ax} \sin bx = \\ &= c'_1 e^{ax} \cos bx + c'_2 e^{ax} \sin bx, \end{aligned}$$

ove  $c'_1 = c_1 + c_2$  e  $c'_2 = i(c_1 - c_2)$ . Scegliendo le costanti  $c'_1$  e  $c'_2$  reali, si trovano tutte le soluzioni reali. In definitiva

$$V_0 = \{c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**(b) Determinazione di un elemento di  $V_f$ .** Sia  $\{y_1, y_2\}$  una base per  $V_0$  (comunque determinata). Cercheremo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma seguente:

$$v(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x),$$

con  $v_1$  e  $v_2$  funzioni da scegliere opportunamente. Questo metodo, non a caso, si chiama *metodo di variazione delle costanti arbitrarie*: se  $v_1$  e  $v_2$  sono costanti, allora  $v \in V_0$ ; se sono funzioni, ossia “costanti che variano”, si cerca di fare in modo che  $v \in V_f$ . Sostituendo  $v$ ,  $v'$  e  $v''$  nell'equazione differenziale, bisogna imporre che

$$\begin{aligned} v'' + a_1(x)v' + a_0(x)v &= (v''_1 y_1 + 2v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v''_2 y_2 + 2v'_2 y'_2 + v_2 y''_2) + \\ &\quad + a_1(x)(v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 y_2 + v_2 y'_2) + a_0(x)(v_1 y_1 + v_2 y_2) = f(x). \end{aligned}$$

Da qui, utilizzando il fatto che  $y_1, y_2 \in V_0$ , si deduce

$$(v''_1 y_1 + 2v'_1 y'_1 + v''_2 y_2 + 2v'_2 y'_2) + a_1(x)(v'_1 y_1 + v'_2 y_2) = f(x),$$

ossia

$$\left[ \frac{d}{dx}(v'_1 y_1 + v'_2 y_2) + (v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2) \right] + a_1(x)(v'_1 y_1 + v'_2 y_2) = f(x).$$

Questa equazione è certamente soddisfatta se si impongono le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 & \text{in } I, \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = f & \text{in } I. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema algebrico lineare nelle incognite  $v'_1$  e  $v'_2$ , con coefficienti  $y_1, y_2, y'_1, y'_2$ . Il determinante di questo sistema è

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = D(x).$$

Proviamo anzitutto che  $D(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$  se e solo se esiste  $x_0 \in I$  in cui  $D(x_0) \neq 0$ ; fatto ciò, proveremo che tale  $x_0$  esiste, e quindi che  $D(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Sia dunque  $D(x_0) = y_1(x_0)y'_2(x_0) - y'_1(x_0)y_2(x_0) = \alpha \neq 0$ : si ha

$$\begin{aligned} D'(x) &= y'_1y'_2 + y_1y''_2 - y''_1y_2 - y'_1y'_2 = y_1y''_2 - y''_1y_2 = \\ &= y_1(-a_1(x)y'_2 - a_0(x)y_2) - (-a_1(x)y'_1 - a_0(x)y_1)y_2 = \\ &= -a_1(x)(y_1y'_2 - y'_1y_2) = -a_1(x)D(x); \end{aligned}$$

quindi  $D(x)$  è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} D'(x) = -a_1(x)D(x), & x \in I, \\ D(x_0) = \alpha, \end{cases}$$

per cui  $D(x) = \alpha e^{\int_{x_0}^x a_1(t)dt}$ ; in particolare,  $D(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ .

Se il punto  $x_0$  non esistesse, avremmo  $D(x) \equiv 0$  in  $I$ : ma allora

$$0 \equiv D(x) = y_2(x)^2 \frac{d}{dx} \frac{y_1(x)}{y_2(x)}, \quad \text{quindi} \quad \frac{d}{dx} \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv 0,$$

da cui  $y_1(x) = cy_2(x)$  in  $I$ , il che contraddice la lineare indipendenza di  $y_1$  e  $y_2$ .

In definitiva, per ogni  $x \in I$  il sistema sopra scritto ha determinante dei coefficienti non nullo e pertanto è univocamente risolubile: ciò ci permette di determinare univocamente le funzioni  $v'_1$  e  $v'_2$ . Infine si scelgono due primitive arbitrarie  $v_1$  e  $v_2$ , e la funzione  $v$  corrispondente, per costruzione, apparterrà a  $V_f$ . In conclusione, otteniamo

$$V_f = \{v + v_0 : v_0 \in V_0\} = \{(c_1 + v_1)y_1 + (c_2 + v_2)y_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Da questa descrizione di  $V_f$  si vede anche che una diversa scelta delle primitive di  $v'_1$  e  $v'_2$  non modifica l'insieme  $V_f$ .

**Esempio 6.4.1** Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in ]0, \pi[.$$

Risolviamo dapprima l'equazione differenziale omogenea: il polinomio caratteristico è  $\lambda^2 + 1$ , e le sue radici sono  $\pm i$ . Quindi

$$V_0 = \{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea che abbia la forma

$$v(x) = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x$$

dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{cases} v'_1(x) \cos x + v'_2(x) \sin x = 0 \\ -v'_1(x) \sin x + v'_2(x) \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$v'_1(x) = -\cos x, \quad v'_2(x) = \frac{1}{\sin x} - \sin x.$$

Dunque, ad esempio,

$$v_1(x) = -\sin x, \quad v_2(x) = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \cos x$$

e infine

$$v(x) = -\sin x \cos x + \left[\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \cos x\right] \sin x = \sin x \log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

In definitiva, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono date da

$$V_f = \left\{ c_1 \cos x + \left[ c_2 + \log\left(\tan\frac{x}{2}\right) \right] \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in ]0, \pi[ \right\}.$$

**Osservazione 6.4.2** Il metodo di variazione della costanti arbitrarie è molto importante dal punto di vista della teoria, ma sul piano pratico comporta spesso calcoli lunghi e complessi. Un metodo più efficace, anche se meno generale, è il “metodo dei coefficienti indeterminati”, applicabile solo per equazioni a coefficienti costanti con secondi membri  $f$  di tipo speciale. Questo metodo è illustrato nell'esercizio 6.4.1.

## Esercizi 6.4

- (*Metodo dei coefficienti indeterminati*) Si consideri l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \equiv P(x)e^{\mu x},$$

ove  $P$  è un polinomio e  $\mu \in \mathbb{C}$ . Si cerchi un elemento  $v \in V_f$  della forma  $v(x) = x^m Q(x)e^{\mu x}$ , dove  $Q$  è un polinomio dello stesso grado di  $P$ , mentre  $m$  vale 0, o 1, o 2 a seconda che  $\mu$  non sia radice del polinomio caratteristico, oppure sia radice semplice, oppure sia radice doppia. Si osservi che il metodo copre anche i casi in cui  $f$  contiene le funzioni seno e coseno. Si applichi il metodo per determinare le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 2ky' + y = x^2 e^x,$$

con  $k$  fissato numero reale.

- (*Principio di sovrapposizione*) Si verifichi che se  $v \in V_f$  e  $w \in V_g$ , allora  $v + w \in V_{f+g}$ . Si utilizzi questo fatto per trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = \cos x + \sin \frac{x}{2}.$$

[**Traccia:** si utilizzino le identità  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ ,  $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$  e il metodo dei coefficienti indeterminati (esercizio 6.4.1); oppure, più semplicemente, si cerchi una soluzione particolare della forma  $A \cos x + B \sin x + C \cos \frac{x}{2} + D \sin \frac{x}{2}$ .]

3. Risolvere le equazioni differenziali seguenti:

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| (i) $y'' - 2y' + 2y = 0,$          | (ii) $y'' + 4y = \tan 2x,$            |
| (iii) $y'' - y = xe^x,$            | (iv) $y'' + 6y' + 9y = e^{-x}/x,$     |
| (v) $y'' + y = x \cos x,$          | (vi) $y'' + 4y' + 4y = e^x + e^{-x},$ |
| (vii) $y'' - 2y' + 2y = x \cos x,$ | (viii) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3,$       |
| (ix) $y'' + 4y' = x^2 + 1,$        | (x) $y'' + y' + y = e^x.$             |

4. (*Riduzione dell'ordine*) Si provi che se si conosce una soluzione (non nulla)  $y_1(x)$  dell'equazione differenziale  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ , allora se ne può trovare un'altra, linearmente indipendente dalla prima, della forma  $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ , riducendosi a una equazione lineare del primo ordine nell'incognita  $v'$ . Si applichi il metodo alla risoluzione dell'*equazione di Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

[**Traccia:** si osservi che  $y_1(x) = x$  è soluzione dell'equazione.]

5. (*Equazioni di Eulero*) Si provi che le equazioni della forma

$$x^2y'' + xa_1y' + a_0y = 0$$

hanno soluzioni del tipo  $y(x) = x^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Si risolva con questo metodo l'equazione  $x^2y'' + xy' - y = 3$ .

6. (*Risoluzione per serie*) Data l'equazione differenziale

$$y'' + 2xy' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

se ne cerchino due soluzioni linearmente indipendenti sotto forma di serie di potenze. Si verifichi che tali serie hanno raggio di convergenza infinito, e se ne determinino i coefficienti in funzione dei primi due,  $a_0$  e  $a_1$ , che fungono da costanti arbitrarie.

7. Risolvere per serie i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

8. Trovare una serie di potenze  $J_0(x)$  che risolva l'*equazione di Bessel di ordine 0*

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Se ne cerchi poi una seconda nella forma  $Y_0(x) = J_0(x) \ln x + g(x)$ , verificando che tale  $Y_0$  è soluzione se e solo se  $g$  risolve

$$x g''(x) + g'(x) + x g(x) = -2J'_0(x);$$

si risolva per serie questa equazione e si determini esplicitamente  $Y_0$ .

# Indice analitico

- O*-grande, 250
- $\exists$ , 3
- $\forall$ , 3
- o*-piccolo, 249, 252
- $o(1)$ , 250
- additività
  - dell'area, 83
  - dell'integrale, 312
- addizione, 8
- alfabeto greco, 1
- algoritmo della radice quadrata, 32
- angolo
  - acuto, 68
  - concavo, 63
  - convesso, 63, 170, 243
  - orientato, 81, 197, 243
  - ottuso, 68
- antiperiodo, 112
- aperto, 166
- applicazione
  - antilineare, 163
  - lineare, 163, 209
- arco
  - di circonferenza, 81
  - orientato, 81
- area
  - con segno, 301
  - del cerchio, 80
  - del semicerchio, 327
  - del triangolo, 77, 91
  - di un poligono regolare, 77, 310
  - di un settore
    - circolare, 332
    - iperbolico, 332
    - orientato, 81, 82, 196
- argomento, 85
  - principale, 85, 94
- ascissa, 42, 57
- asintoto
  - obliqua, 204, 319
  - orizzontale, 204
  - verticale, 204
- asse
  - delle ascisse, 57
  - delle ordinate, 57
  - di un segmento, 71
  - immaginario, 74
  - reale, 74
- assioma
  - di completezza, 12–14
  - di continuità, 12
- assiomi dei numeri reali, 8
- associatività
  - del prodotto, 8, 58
  - della somma, 8, 58
- assoluta convergenza, 127
- attrattore, 380
- autovalore, 282, 284
- autovettore, 282
- base
  - del logaritmo, 53
  - dell'esponenziale, 46
  - di uno spazio vettoriale, 394
- cerchio, 59
  - di convergenza, 139
- chiuso, 167, 168
- chiusura, 172
- cifre decimali, 23
- circonferenza, 59
- codominio, 53
  - di una funzione, 5
- coefficiente
  - angolare, 61, 208
  - binomiale, 27
  - generalizzato, 233
- coefficienti
  - di un'equazione differenziale, 371, 375

- di una serie di potenze, 137
- colatitudine, 243
- combinazione lineare, 69, 180, 393
- commutatività
  - del prodotto, 8, 58
  - della somma, 8, 58
- complementare, 2, 167
- componenti scalari, 181
- coniugato di un numero complesso, 75
- coniugio, 75
- cono, 239
- convergenza
  - assoluta, 127
  - uniforme, 367
- convoluzione di Vandermonde, 249
- coordinate, 57
  - cartesiane, 57
  - polari
    - in  $\mathbb{R}^2$ , 186, 242
    - in  $\mathbb{R}^3$ , 242
- coppia di numeri reali, 56, 73, 74
- corrispondenza biunivoca, 6, 149
- coseno, 85
  - in coordinate, 91
  - iperbolico, 147, 204, 218
- costante
  - di Eulero, 126
  - di Lipschitz, 314
- criterio
  - del confronto, 112, 120
  - del confronto asintotico, 123
  - del rapporto, 120, 127, 140
  - della radice, 122, 127, 140
  - di integrabilità, 305
  - di Leibniz, 128, 179, 232, 357
  - di Raabe, 125, 126
  - di Sylvester, 284
  - integrale, 358
- curva
  - di livello, 226
  - integrale, 378
  - isoclina, 378
- definitivamente, 103
- densità
  - dei numeri  $k\alpha + h$ , 22
  - dei razionali, 21, 48
- derivata, 207
- n*-sima, 244
- destra, 298
- direzionale, 223
- prima, 244
- seconda, 244
- sinistra, 298
- derivate
  - parziali, 220
    - k*-sime, 245
    - seconde, 244
- derivato, 173
- determinante, 91, 395
- diametro di un insieme, 172
- differenza, 8
  - fra insiemi, 2
- differenziale, 225
- direzione, 56
  - di massima pendenza, 227
  - unitaria, 224
- disco, 59
- discriminante, 42, 44, 66
- distanza, 165, 171
  - di un punto da una retta, 68
  - euclidea, 58, 165
    - in  $\mathbb{R}^2$ , 58
    - in  $\mathbb{R}^m$ , 165
    - in  $\mathbb{C}^m$ , 165
    - in  $\mathbb{R}$ , 43
- distributività, 8
  - di somma e prodotto, 8, 58
- disuguaglianza
  - delle medie, 39, 102
  - di Bernoulli, 30, 36, 53
  - di Cauchy-Schwarz, 44, 59, 164, 177, 284
  - di Jensen, 299
  - triangolare, 58, 165
- divisione, 9
- dominio di una funzione, 5
- elemento
  - di un insieme, 1
  - neutro, 8, 73
  - separatore, 12
- ellisse, 219
- equazione
  - algebrica, 72
  - di una retta, 61
  - differenziale, 361

- a coefficienti costanti, 394, 397
- a variabili separabili, 372
- alle derivate parziali, 361
- autonoma, 380
- di Bernoulli, 377
- di Bessel, 398
- di Eulero, 398
- di Legendre, 398
- di Riccati, 377
- in forma normale, 361
- lineare del 1<sup>o</sup> ordine, 375
- lineare del 2<sup>o</sup> ordine, 392
- lineare non omogenea, 375, 395
- lineare omogenea, 375, 392
- non lineare, 378
- non lineare omogenea, 377
- ordinaria, 361
- integrale, 365
- equazioni parametriche
  - di un segmento, 64
  - di una retta, 64
- errore quadratico, 289
- esponente, 46
- estensione di una funzione, 183
- estremo
  - inferiore, 12, 13
    - di una funzione, 174
  - superiore, 12
    - di una funzione, 174
- evento, 29
- fattoriale, 18, 26, 141, 237, 349
- forma
  - indeterminata, 107, 190, 249, 264
  - quadratica, 239, 281
    - definita negativa, 281, 284
    - definita positiva, 281, 284
    - indefinita, 282, 284
    - semidefinita negativa, 281
    - semidefinita positiva, 281, 284, 293
  - trigonometrica, 85, 91–93
- formula
  - del binomio, 28, 52, 92, 117, 214, 269
  - di de Moivre, 92, 142
  - di Eulero, 144
  - di Leibniz, 247, 271
  - di Stirling, 349
  - di Taylor, 257, 264, 266
- formule
  - di addizione, 87
  - di bisezione, 95
  - di de Morgan, 5
  - di duplicazione, 95
  - di prostaferesi, 95, 211
  - di quadratura, 308, 323
  - di Werner, 95
- frazione, 3
  - generatrice, 113
  - in base  $b$ , 25
- frontiera, 172
- funzione, 5, 174
  - $\Gamma$  di Eulero, 360
  - a valori vettoriali, 181, 240
  - affine, 177, 208
  - analitica, 259, 264
  - arcocoseno, 200
  - arcoseno, 200
  - arcotangente, 201
  - bigettiva, 6, 149
  - biunivoca, 6
  - caratteristica, 314
  - composta, 6, 7, 180
  - concava, 290
  - continua, 176, 181
    - in un punto, 176, 310
  - convessa, 290
  - coseno, 85
  - coseno iperbolico, 147
  - crescente, 193, 271
  - decrescente, 193, 271
  - derivabile, 207
    - in un punto, 207
  - derivata, 244
  - di classe  $C^k$ , 245
  - di classe  $C^\infty$ , 245
  - di Dirichlet, 304
  - differenziabile, 221
    - in un punto, 221
  - discontinua, 177
  - dispari, 175, 358
  - esponenziale, 46, 49, 159, 298
    - complessa, 144, 159, 164
  - identità, 6
  - indicatrice, 314
  - infinita, 251

infinitesima, 182, 249  
 iniettiva, 6, 53  
 integrabile  
     in senso improprio, 353  
     secondo Riemann, 304, 306  
 integrale, 320, 321  
 inversa, 6, 53, 198  
 invertibile, 6  
 limitata, 174, 301  
     inferiormente, 174  
     superiormente, 174  
 lipschitziana, 225, 314, 320  
 localmente lipschitziana, 363  
 logaritmo, 53  
 monotona, 193, 315  
 omogenea, 239, 281  
 pari, 174, 216, 358  
 parte intera, 175, 330  
 periodica, 86, 159, 325  
 primitiva, 322  
 radice  $(2n + 1)$ -sima, 201  
 razionale, 261, 334  
     propria, 335  
 segno, 324  
 seno, 85  
 seno iperbolico, 147  
 settore coseno iperbolico, 218  
 settore seno iperbolico, 218  
 sommabile, 353  
 strettamente  
     crescente, 53, 193, 271  
     decrescente, 53, 193, 271  
     monotona, 52, 193  
 surgettiva, 6  
 tangente, 88  
 uniformemente continua, 316, 319  
 vettoriale, 181  
 funzioni  
     iperboliche, 147, 332  
     trigonometriche, 85, 88  
 gradiente, 222  
 grafico  
     di una funzione, 174  
 grafico di una funzione, 6, 206  
 identità  
     di Abel, 119, 129  
         di Eulero, 239  
 immagine, 5  
     di una funzione, 5  
 incremento, 207, 221  
 infinitesimi  
     dello stesso ordine, 249  
     non confrontabili, 250  
 infinitesimo, 249  
     di ordine  
         inferiore, 249  
         superiore, 207, 249  
 infiniti dello stesso ordine, 252  
 infinito, 251  
     di ordine  
         inferiore, 252  
         superiore, 252  
 insieme, 1  
     aperto, 166  
     chiuso, 167, 168, 171  
     chiuso e limitato, 170  
     compatto, 170, 200, 282, 317  
     complementare, 2, 167  
     connesso, 196  
     convesso, 290  
     degli interi, 3, 20  
     dei complessi, 3, 73  
     dei naturali, 3, 17  
         non nulli, 3  
     dei razionali, 3, 20  
     dei reali, 3, 7  
     di Cantor, 173  
     di sottolivello, 299  
     finito, 1  
     immagine, 174  
     induttivo, 17  
     infinito, 2, 168  
     limitato, 10, 168  
         inferiormente, 10, 171  
         superiormente, 10, 171  
     misurabile, 314  
     ternario di Cantor, 173  
     universo, 1  
     vuoto, 2  
 insiemi  
     disgiunti, 3  
     separati, 11, 48  
 integrale, 304

binomio, 342  
 di Fresnel, 359  
 di Frullani, 359  
 di funzioni vettoriali, 329  
 improprio, 353
 

- convergente, 353
- divergente, 353

 indefinito, 322  
 inferiore, 303  
 superiore, 303  
 integrazione
 

- per parti, 325
- per sostituzione, 328

 intersezione, 2  
 intervallo, 9
 

- di convergenza, 139

 intorno, 165  
 invarianza per traslazioni, 59, 165  
 inviluppo convesso, 300  
 iperbole, 219  
 iperpiano, 171
 

- ortogonale, 171

 irrazionalità
 

- di  $\pi$ , 334
- di  $\sqrt{2}$ , 14
- di  $e$ , 118

 legge di annullamento del prodotto, 9, 73  
 lemma
 

- dell'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , 46, 51, 100, 105
- di Abel, 130
- di Grönwall, 381

 limite
 

- all'infinito, 183
- destro, 182, 193
- di una funzione, 182, 188
  - composta, 191
- di una successione, 100, 165
- sinistro, 182, 193

 linea spezzata, 82  
 lineare
 

- dipendenza
  - di vettori, 69
- indipendenza
  - di soluzioni, 393
  - di vettori, 69

 logaritmo, 53
 

- naturale, 118

 longitudine, 243  
 lunghezza
 

- di un arco orientato, 81, 82, 84, 196
- di un segmento, 59, 60, 70, 75, 77, 79, 84, 87

 maggiorante, 10  
 massimo
 

- di un insieme, 11, 171
- di una funzione, 174

 massimo limite
 

- di una funzione, 193
- di una successione, 136, 145

 matrice, 91, 239
 

- Hessiana, 245
- Jacobiana, 241
- trasposta, 281

 media
 

- aritmetica, 39, 237
- armonica, 42, 110, 237
- geometrica, 39, 42, 237

 metodo
 

- dei coefficienti indeterminati, 397
- delle approssimazioni successive, 366
- delle secanti, 296
- delle tangenti, 295
- di riduzione dell'ordine, 398
- di risoluzione per serie, 398
- di variazione delle costanti arbitrarie, 395

 metrica, 165  
 minimo
 

- di un insieme, 11, 169, 171
- di una funzione, 174

 minimo limite
 

- di una funzione, 193
- di una successione, 136

 minorante, 10  
 misura
 

- di un insieme, 314
- in radianti, 84, 197

 modulo
 

- di un numero complesso, 75
- di un numero reale, 42
- di un vettore, 59

 moltiplicazione, 8  
 monomio, 137  
 monotonia

del gradiente di una funzione convessa, 293  
 dell'integrale, 312  
 della misura, 314  
 multi-indice, 266  
 negazione, 4  
 nodi di una suddivisione, 301  
 norma, 171  
     di un vettore, 163  
     euclidea, 163  
 numero  
     0, 8  
     1, 8  
      $\pi$ , 80, 309, 327  
      $e$ , 118, 141  
      $i$ , 72  
     complesso, 3, 73  
     decimale, 21  
     di Fibonacci, 120, 146  
     di Nepero, 118, 141  
     dispari, 25  
     intero, 3, 20  
     irrazionale, 3, 22, 26  
     naturale, 3, 17  
     negativo, 9  
     pari, 25  
     positivo, 9  
     primo, 115  
     razionale, 3, 20  
     reale, 3, 8  
 omogeneità  
     della distanza euclidea, 165  
     della norma, 163  
 omotetia, 59  
 opposto, 8, 73  
 ordinamento, 74  
     dei reali, 9  
 ordinata, 57  
 ordine di un'equazione differenziale, 361  
 orientazione, 42, 56  
     negativa, 57, 72  
     positiva, 57, 72  
 origine, 42, 56  
 ortogonalità, 66  
 oscillazione, 310, 316  
 palla, 165, 171  
 chiusa, 171  
 parabola, 219  
 parte  
     immaginaria, 74  
     intera, 23, 96, 175  
     interna, 171  
     reale, 74  
 partizione, 301  
 pendenza, 61, 208  
 perimetro  
     della circonferenza, 80  
     di un poligono regolare, 77  
 periodo  
     di una funzione, 86, 159, 325  
     di uno sviluppo decimale, 112  
 piano, 56  
     cartesiano, 6, 74, 162  
     complesso, 74, 162  
     di Gauss, 74  
     tangente, 222, 227  
 poligono regolare, 77  
     circoscritto, 78  
     inscritto, 77  
 polinomio, 73, 137, 138, 209  
     caratteristico, 394  
     di Taylor, 257, 266  
 positività  
     della distanza, 165  
     della distanza euclidea, 58  
     della norma, 163  
 potenza di un numero reale, 19, 28  
 primitiva, 322  
 principio  
     dei cassetti, 23  
     di identità  
         dei polinomi, 246  
         delle serie di potenze, 246  
     di induzione, 17, 25  
     di sostituzione  
         degli infinitesimi, 250  
         degli infiniti, 252  
         di sovrapposizione, 397  
 probabilità, 29  
 problema di Cauchy, 363, 393  
 prodotto  
     cartesiano, 4, 6, 57, 162  
     di Cauchy, 156, 159

- di numeri complessi, 73
- di numeri reali, 8
- per scalari, 57, 162
- scalare, 67, 162, 330
- progressione geometrica, 19
- proiezione
  - di un insieme, 173
  - di un punto su una retta, 57
- prolungamento
  - di una funzione, 202
  - dispari, 217
  - pari, 217
- proprietà
  - algebriche dei reali, 8
  - associativa, 8
  - commutativa, 8
  - dei numeri reali, 7
  - dell'area, 77
  - della distanza, 165
  - della norma, 163
  - di Archimede, 21
  - di miglior approssimazione, 259
  - di ordinamento dei reali, 9
  - distributiva, 8
- punto
  - aderente, 172
  - d'accumulazione, 168, 176, 181, 188
  - di flesso, 294
  - di frontiera, 172
  - di massimo, 174, 272
    - relativo, 272, 286
  - di minimo, 174, 272
    - relativo, 272, 286
  - di sella, 288
  - fisso, 202
  - interno, 171
  - isolato, 172, 176
  - stazionario, 288
- quadrato di un numero reale, 9
- quantificatori esistenziali, 3
- quoziante, 9
- radiane, 84
- radice
  - $(2n + 1)$ -sima, 201
  - $n$ -sima, 37, 47
    - di un numero complesso, 93
- di un polinomio, 394
- quadrata, 14, 15
- raggio di convergenza, 139, 140, 145
- raggruppamento dei termini di una serie, 154, 158
- rapporto incrementale, 207, 298
- reciproco, 8, 74
- regola del parallelogrammo, 57, 69
- repulsore, 380
- resto
  - di Taylor, 258, 333
  - di una serie, 111, 144
- restrizione di una funzione, 186, 200, 201, 220
- retta, 42, 60
  - orientata, 43
  - per due punti, 61
  - tangente, 208, 230, 231
- rette
  - parallele, 64
  - perpendicolari, 65, 66
- riordinamento di una serie, 149
- rotazione, 59, 72
- salto di una funzione, 175
- segmenti
  - paralleli, 65
  - perpendicolari, 65, 66
- segmento, 62, 243
- semipiano, 62
  - aperto, 62
  - chiuso, 62
- semiretta, 61
  - aperta, 62
  - chiusa, 62
- seno, 85
  - in coordinate, 91
  - iperbolico, 147, 203, 218
- serie, 109
  - armonica, 110, 125
  - generalizzata, 114, 125
  - binomiale, 233
  - convergente, 109
    - assolutamente, 127
  - dei reciproci dei primi, 115
  - del settore seno iperbolico, 237
  - dell'arcoseno, 237
  - dell'arcotangente, 233
  - di potenze, 137

- divergente negativamente, 110
- divergente positivamente, 110
- esponenziale, 117, 122, 138, 141, 158
- geometrica, 110, 137, 158
- indeterminata, 110
- logaritmica, 232
- telescopica, 110
- settore
  - associato a una spezzata, 82
  - circolare, 81, 332
    - orientato, 81
    - iperbolico, 332
    - sferico, 243
  - sezione di  $\mathbb{R}$ , 15
- simbolo
  - $+\infty$ , 10, 14
  - $-\infty$ , 10, 14
  - di appartenenza, 2
  - di doppia implicazione, 4
  - di implicazione, 4
    - opposta, 4
  - di inclusione, 2
    - propria, 2
  - di non appartenenza, 2
  - di non uguaglianza, 2
  - di prodotto, 19
  - di somma, 18
  - di uguaglianza, 2
    - approssimata, 29
- simmetria, 6, 59, 72
  - dei coefficienti binomiali, 27
  - della distanza, 165
  - della distanza euclidea, 58
- sistema
  - di riferimento, 42, 56
  - differenziale, 361
    - del primo ordine, 362
    - in forma normale, 362
    - lineare, 371
    - lineare, 395
- soluzione
  - globale, 371, 391
  - locale, 363
  - massimale, 370, 391
  - stazionaria, 380
    - asintoticamente stabile, 381
    - instabile, 381
- somma
  - di funzioni trigonometriche, 131
  - di numeri complessi, 73
  - di numeri reali, 8
  - di Riemann, 305
  - di una serie, 109
    - di potenze, 177
  - di una serie di potenze, 214, 246, 323
  - di vettori, 57, 162
  - inferiore, 302
  - parziale, 109
    - di una serie di potenze, 260
  - superiore, 302
- sopragrafico, 291
- sottografico, 174
- sottoinsieme, 1
- sottosuccessione, 135, 158, 168, 169
- sottrazione
  - fra numeri reali, 8
  - fra vettori, 57
- spazio
  - $\mathbb{C}^m$ , 162
  - $\mathbb{R}^m$ , 162
  - affine, 375
  - metrico, 165
  - vettoriale, 58, 162
- spezzata, 82
  - circoscritta, 82
  - inscritta, 82
- subadditività
  - del modulo, 76
  - del valore assoluto, 43
  - della norma, 163
- successione, 99
  - convergente, 100, 165
  - crescente, 113
  - decrescente, 113
  - definita per ricorrenza, 100, 273
  - definitivamente monotona, 113
  - di Cauchy, 135, 367
  - di Fibonacci, 120, 146
  - divergente negativamente, 101
  - divergente positivamente, 100
  - infinitesima, 111
  - limitata, 103, 169
  - limitata inferiormente, 103
  - limitata superiore, 103

- monotona, 113, 168
- strettamente crescente, 113
- strettamente decrescente, 113
- strettamente monotona, 113
- suddivisione, 301
  - equispaziata, 302, 307, 315
  - più fine, 301
- superadditività della media geometrica, 42
- sviluppo
  - decimale, 23
  - periodico, 112
- tangente, 88
- teorema
  - dei carabinieri, 108, 142
  - dei seni, 97
  - dei valori intermedi, 196
  - del differenziale totale, 238
  - della media, 309
    - (secondo), 309
  - delle contrazioni, 274
  - di permanenza del segno, 106, 180, 191, 273
  - di Bolzano-Weierstrass, 168
  - di Borel, 262
  - di Carnot, 96
  - di Cauchy, 157, 230, 253, 259
  - di Cesàro, 108
  - di confronto
    - per equazioni differenziali, 391
    - per integrali, 356
    - per serie, 112, 114, 117
    - per successioni, 105
  - di Darboux, 235
  - di de l'Hôpital, 253, 256
  - di derivazione
    - delle funzioni composte, 211, 240
    - delle funzioni inverse, 212
    - delle serie di potenze, 214, 232, 234
  - di differenziabilità
    - delle funzioni composte, 241
  - di Dirichlet, 149, 158
  - di esistenza degli zeri, 195
  - di esistenza e unicità locale, 364
  - di Fermat, 272
  - di Heine-Cantor, 317
  - di Lagrange, 231, 238, 271
    - di grado  $k + 1$ , 259, 264, 271, 287, 296
  - di Pitagora, 164
  - di Riemann, 152
  - di Rolle, 230, 289
    - multidimensionale, 289
  - di Schwarz, 245, 247
  - di Weierstrass, 194, 230, 282
  - fondamentale del calcolo integrale, 321
  - ponte, 188, 191
  - termini
    - di una serie, 109
    - di una successione, 99
  - traslazione, 59, 375
  - triangolo di Tartaglia, 27
  - unicità del limite, 104, 191
  - unione, 2
  - unità
    - di misura, 42
    - immaginaria, 3, 73
  - valore assoluto, 42
  - vettore, 58, 74, 162
  - vettori
    - linearmente dipendenti, 69
    - linearmente indipendenti, 69
    - ortogonali, 66, 163