Esercizi svolti di Fisica II per Chimica Industriale

Docente: Lorenzo Rovigatti

Nota Bene: questi esercizi sono stati tutti svolti in aula durante l'A.A. 2018/2019. Non sono tutti farina del mio sacco: alcuni sono presi da libri, altri adattati da compiti/problemi/esercizi trovati online (sia in italiano che in inglese). La maggior parte non contiene disegni né schemi.

Esercizio 1

Dall'esempio 1.1 del MNV

Testo

Un corpo di massa m avente carica q è sospeso ad una distanza h dal suolo, dove è presente un'altra carica dello stesso valore (q). Entrambe le cariche possono essere considerate puntiformi.

1. Scrivere la relazione tra m e q per la quale il corpo rimane sospeso ad altezza h.
2. Data la relazione trovata al punto precedente, se $h = 1$ m e $m = 70$ Kg, quanto vale q?
3. Di quante cariche elementari "spaiate" abbiamo bisogno per generare la carica di cui al punto precedente?

Soluzione

1. Il corpo risente della forza peso e di quella di Coulomb. Se orientiamo l'asse y perpendicolare al suolo, la forza peso è diretta verso y negative, mentre quella di Coulomb è diretta verso y positive. Se si vuole che la distanza dal suolo non cambi si deve imporre che la forza totale agente sul corpo sia 0, cioè
$$F_y = -mg + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{h^2}$$
L'equazione precedente fissa il valore del rapporto tra il quadrato delle cariche e quello della massa:
$$\frac{q^2}{m} = 4\pi\epsilon_0 h^2 g$$
Nota Bene: la carica compare al quadrato: non importa che q sia positiva o negativa, perché due cariche dello stesso tipo si respingono *sempre*.
2. Dal punto precedente si ha che, sostituendo i valori numerici, $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 h^2 mg} = 2.76 \times 10^{-4} C$.
3. Per trovare la soluzione dividiamo la carica totale per il valore (in modulo), trovando
$$N_c = \frac{2.76 \times 10^{-4}}{1.6 \times 10^{-19}} \approx 1.73 \times 10^{15}$$

Esercizio 2

Dall'esempio 1.3 del MNV

Testo

Un oggetto (puntiforme) di massa m e carica q_0 è sospeso ad un filo. Una carica q viene posta a distanza x_0 da q_0 (in maniera tale che, all'equilibrio, entrambe si trovino alla stessa distanza dal suolo). Per effetto della forza elettrica, il filo formerà un angolo θ rispetto alla verticale.

1. Scrivere l'espressione di θ in funzione di x_0.
2. Approssimare l'espressione per piccoli valori di θ.
3. Calcolare θ per $m = 2 \times 10^{-3}$ Kg, $q_0 = 2 \times 10^{-9}$ C, $q = 5 \times 10^{-7}$ C, e $x = 5$ cm con e senza l'approssimazione del punto precedente.

Soluzione

1. Consideriamo un sistema di riferimento nel quale la forza peso $\vec{F}_g$ è diretta lungo $-\hat{y}$, mentre quella elettrica $\vec{F}_e$ è lungo $\hat{x}$. Le forze in gioco sono 3: la forza peso, quella elettrica e la tensione del filo. All'equilibrio, la risultante di queste forze deve essere nulla, e quindi $\vec{T} + \vec{F}_e + \vec{F}_g = 0$. Se disegniamo questi vettori troviamo immediatamente il legame tra la forza peso, quella elettrica e l'angolo θ:
$$\tan(\theta) = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 m g x_0^2}$$
2. Se θ è piccolo, $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 0$ e $\tan(\theta) \approx \theta$, quindi si trova che θ è proporzionale sia a q che a q_0.
3. Sostituiamo i valori numerico nelle relazioni precedenti. Nel caso "esatto" troviamo $\tan(\theta) = 0.1833$, e quindi $\theta = 0.1813 = 10.4°$, mentre nel caso approssimato troviamo $\theta = 0.1833 = 10.5°$.

Esercizio 3

Testo

Consideriamo due cariche q disposte parallele all'asse y e distanti $2L$. Calcolare il campo elettrostatico in un punto generico x_0 equidistante dalle due cariche.

Soluzione

Utilizziamo il sistema di riferimento nel quale le due cariche hanno coordinate $\vec{r}_1 = (0, L)$ e $\vec{r}_2 = (0, -L)$ e il punto che ci interessa ha coordinate $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$. Studiamo il campo generato dalla prima carica, rispetto alla quale $\vec{r}_{01} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = (x_0, -L)$, $r_{01} = \sqrt{x_0^2 + L^2}$ e quindi $\hat{r}_{01} = \frac{1}{r_{01}}(x_0, -L)$:

$$E_x^{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{01}^2} \frac{x_0}{r_{01}}$$

$$E_y^{01} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{01}^2} \frac{L}{r_{01}}$$

D'altra parte, rispetto alla seconda carica abbiamo $\vec{r}_{02} = \vec{r}_0 - \vec{r}_2 = (x_0, L)$, $r_{02} = \sqrt{x_0^2 + L^2} = r_{01}$, $\hat{r}_{02} = \frac{1}{r_{02}}(x_0, L)$ e quindi

$$E_x^{02} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{01}^2}\frac{x_0}{r_{01}}$$

$$E_y^{02} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{01}^2}\frac{L}{r_{01}}$$

Il campo totale è la sovrapposizione (cioè, la somma) dei due, e quindi si ha $E_x = 2E_x^{01}$ e $E_y = 0$.

Possiamo ritrovare lo stesso risultato considerando che, in generale, se definiamo θ come l'angolo compreso tra il campo e l'asse x, $E_x^{01} = |\vec{E}_{01}|\cos\theta$ e $E_y^{01} = |\vec{E}_{01}|\sin\theta$. Nel caso specifico dell'esercizio vale l'uguaglianza trigonometrica $\cos\theta = \frac{x_0}{r_{01}}$, mentre il modulo di $\vec{E}$ si ricava dalla legge di Coulomb, $|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{01}^2}$. Vale quindi:

$$E_x^{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx_0}{r_{01}^3}$$

in accordo col risultato precedente.

Esercizio 4

Dall'esempio 1.6 del MNV

Testo

Una carica q è distribuita uniformemente su un *sottile* anello di raggio R.

1. Senza calcolarlo, discutere qualitativamente il comportamento del campo elettrostatico lungo l'asse dell'anello (che prendiamo coincidente con l'asse x) al variare di x.
2. Calcolare il campo elettrico in $\vec{r} = (x, 0, 0)$ al variare di x.
3. Scrivere l'espressione approssimata del campo quando $x \gg R$.

Soluzione

1. Lungo l'asse dell'anello il problema ha simmetria cilindrica: lì il campo (se diverso da 0) non può che essere parallelo ad $\hat{x}$. Inoltre, si deve annullare per $x = 0$ (cioè al centro dell'anello), ancora una volta per simmetria.

2. Prendiamo un elementino di carica dq. Questo genererà un campo infinitesimo in x di intensità:

$$d|\vec{E}| = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

   dove $r = \sqrt{R^2 + x^2}$. Sappiamo però che, lungo l'asse dell'anello, la componente y del campo (totale) si deve annullare. Dobbiamo quindi utilizzare la relazione precedente per trovare l'unica componente diversa da zero, E_x. Per fare ciò proiettiamo il campo lungo x utilizzando la relazione $E_x = |\vec{E}|\cos(\theta)$, con $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ (disegnare per credere). Si ottiene quindi

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

La somma di tutti i contributi è banale, perché tutti gli elementini dq generano lo stesso campo in x e quindi si ottiene

$$\vec{E} = E_x \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

3. $x \gg R$ implica $\frac{R}{x} \ll 1$. Riscriviamo l'espressione ottenuta al punto precedente in modo da far comparire quest'ultima frazione:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^3 \left(\frac{R^2}{x^2} + 1\right)^{3/2}} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Se ci si allontano molto dall'anello, il dettaglio della distribuzione di carica non si distingue più ed il campo tende ad essere quello generato da una carica puntiforme posizionata nel centro dell'anello!

Esercizio 5

Ispirato dall'esempio 1.5 del MNV

Testo

Tre cariche q_1, q_2 e q_3 sono poste sui vertici di un triangolo equilatero di lato $2L$. Poniamo $q_2 = q_3 = q$.

1. Calcolare l'espressione del campo elettrostatico $\vec{E} = (E_x, E_y)$ nel centro $\vec{O}$ del triangolo.
2. Possiamo muovere la carica q_1 lungo l'asse che la congiunge al centro. Se $q_1 = 2q$, dove dobbiamo posizionare q_1 per far sì che il campo si annulli nel punto $\vec{O}$?

Soluzione

1. Orientiamo il sistema di riferimento in modo da avere l'asse x parallelo al segmento che congiunge q_2 e q_3. Se usiamo i risultati ottenuti nell'Esercizio 3, vediamo subito che $E_x = 0$. Come fatto precedentemente possiamo usare la trigonometria per scrivere E_y in funzione dell'angolo θ tra l'asse y e la direzione del campo generato da ognuna delle due cariche (per esempio da q_2):

$$E_y^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta$$

dove r è la distanza tra $\vec{O}$ e la carica q_2. Dobbiamo ora calcolare r e θ. Se disegniamo un triangolo equilatero e utilizziamo la trigonometria troviamo che:

$$r = \frac{L}{\cos(\pi/6)}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Se notiamo che $\cos\theta = \cos(\pi/3) = 0.5$, possiamo scrivere il campo totale dovuto a q_2 e q_3 (pari a due volte quello dovuto a q_2, *cfr.* Esercizio 3):

$$E_y^{(2)+(3)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

D'altro canto, con questo sistema di riferimento il campo dovuto a q_1 è semplice da scrivere, perché il vettore distanza (e quindi il campo elettrostatico generato) tra q_1 e $\vec{O}$ ha la sola componente y non nulla, che quindi vale:

$$E_y^{(1)} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Fate il disegno e scrivete le componenti dei vettori distanza per capire da dove viene il segno meno! Il campo totale (che è diretto tutto lungo y) vale quindi:

$$E_y = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

2. Se spostiamo q_1, la sua distanza da $\vec{O}$ non sarà più r ma un valore incognito y_0. Possiamo quindi riscrivere la componente y del campo (che è ancora l'unica diversa da 0) come:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y_0^2}$$

Se imponiamo $E_y = 0$ troviamo:

$$y_0 = \sqrt{2}r$$

Esercizio 6

Ispirato all'esercizio 1.13 del MNV

Testo

Su di una semicirconferenza è di raggio R è distribuita uniformemente una carica q.

1. Calcolare il campo elettrico nel centro.
2. Partiamo dalla semicirconferenza intera e rimuoviamo in maniera simmetrica parte del materiale carico a partire dal centro. In tutto rimuoviamo un angolo 2ϕ (se $\phi = \pi/2$ la semicirconferenza verrebbe completamente rimossa). Calcolare il campo elettrico nel centro.

Soluzione

1. Utilizziamo un sistema di riferimento avente l'asse x come asse di simmetria del sistema. Per simmetria è chiaro che le componenti del campo lungo y e z sono nulle. Per trovare E_x dobbiamo sommare su tutte le cariche infinitesime dq, in maniera formalmente analoga a quanto fatto nell'esercizio precedente. Prima di tutto definiamo la densità di carica lineare $\lambda = \frac{q}{\pi R}$ (tale che $dq = \lambda dl$). Abbiamo visto negli esercizi precedenti (in particolare nell'esercizio 3), che ogni elementino di carica genera nel centro della semisfera un campo lungo x pari a:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra il campo generato da dq e l'asse x. Se disegniamo il sistema possiamo notare come θ sia diverso per ogni elementino dq (e viceversa): dq infatti è proporzionale a dl che, nel caso di una (porzione di) circonferenza è proporzionale a $d\theta$. In particolare, si ha che $dl = Rd\theta$ (provate a calcolare il perimetro di una circonferenza tramite un integrale per convincervene!). Utilizziamo questo risultato per riscrivere il differenziale della componente x del campo:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R}\cos\theta$$

Possiamo ora calcolare l'integrale (prestando attenzione agli estremi di integrazione):

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin(\theta)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

2. La simmetria rimane invariata, quindi $E_y = 0$ come al punto precedente. Per quanto riguarda la componente x, l'integrale precedente si riscrive come somma di due integrali, uno per ognuna dei due archi di circonferenza che sono rimasti. Poiché il sistema è simmetrico, il contributo dei due integrali è lo stesso, quindi ne calcoliamo uno e moltiplichiamo il risultato per due:

$$E_x = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin(\theta)|_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(1-\sin(\phi))$$

Esercizio 7

Testo

Calcolare la carica totale q presente su di un quadrato di lato L carico con densità superficiale data da

1. σ uniforme.
2. $\sigma(x, y) = Bx$, con $-L/2 \leq x \leq L/2$.
3. $\sigma(x, y) = Bx$, con $0 \leq x \leq L$.
4. $\sigma(x, y) = C(xy + D\cos(kx))$, con $0 \leq x \leq L$ e con $0 \leq y \leq L$.

Soluzione

1. Se la densità è uniforme, sappiamo che $q = \sigma S$, con S area della superficie. Nel caso di un quadrato, $S = L^2$ e quindi $q = \sigma L^2$.
2. Se la densità non è uniforme dobbiamo espressamente integrarla sulla superficie. In questo caso si ha:
$$q = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Bxdx = BL\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xdx = \frac{BL}{2}\,x^2\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = 0$$
3. Impostiamo l'integrale come prima, con l'accorgimento di cambiare gli estremi di integrazione:
$$q = \int_0^L dy \int_0^L Bxdx = BL\int_0^L xdx = \frac{BL}{2}\,x^2\Big|_0^L = \frac{BL^3}{2}$$
4. Di nuovo la stessa impostazione:
$$q = \int_0^L dy \int_0^L C(xy + D\cos(kx))dx$$
Prima integriamo su x:
$$q = C\int_0^L dy \left(\frac{1}{2}yx^2 + \frac{D}{k}\sin(kx)\right)\Bigg|_0^L = C\int_0^L dy \left(\frac{1}{2}yL^2 + \frac{D}{k}\sin(kL)\right)$$

e poi su y:

$$q = C\left(\frac{1}{4}L^2y^2 + \frac{D}{k}L\sin(kL)\right)\Bigg|_0^L = C\left(\frac{1}{4}L^4 + \frac{D}{k}L\sin(kL)\right)$$

Esercizio 8

Dagli esempi 1.7 e 1.8 del MNV

Testo

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile disco di raggio R. Consideriamo un sistema di riferimento tale che l'origine è nel centro del disco e $\hat{x}$ è orientato in maniera concorde all'asse del disco.

1. Calcolare il modulo del campo elettrico in $\vec{r} = (x, 0, 0)$ al variare di x.
2. Cosa succede quando $R \to \infty$?
3. Discutere il verso del campo lungo l'asse x.
4. Utilizzare i risultati precedenti per scrivere il campo elettrostatico generato da due piani indefiniti paralleli e uniformemente carichi con densità superficiale di carica $|\sigma|$. Discutere il risultato al variare dei segni relativi delle due densità superficiali.

Soluzione

1. Il disco può essere considerato come un oggetto "bidimensionale" avente una densità di carica $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$. Poiché il problema ha simmetria cilindrica, l'elemento di superficie vale $d\Sigma = 2\pi r dr$. Il disco può quindi essere considerato come un insieme di anelli di spessore dr, aventi ognuno una carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$. Il contributo alla componente x del campo (l'unica diversa da zero) del generico anello infinitesimo di raggio r è (vedi Esercizio 5):

$$dE_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{xrdr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

L'espressione per il campo totale si ottiene integrando da 0 ad R l'equazione precedente:

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

2. Nel limite per $R \to \infty$ (tenendo x costante) la radice al denominatore tende all'infinito e quindi la frazione tende a 0. Il risultato è

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

In questo limite (in cui il disco carico diventa effettivamente un piano indefinito uniformemente carico) il campo è *uniforme*, cioè prende lo stesso valore in tutti i punti dello spazio. La stessa espressione è valida nel caso in cui ci avviciniamo molto ad una superficie carica (cioè nel limite in cui la superficie è così vicino da *sembrarci* un piano infinito).

3. Sia che R sia finito sia che tenda all'infinito, il limite di $\vec{E}$ per $x \to 0$ è diverso venendo da sinistra o da destra: il modulo resta lo stesso, mentre il verso è opposto. Il campo ha quindi una *discontinuità* in $x = 0$: il campo ha un salto di valore pari a $\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Vettorialmente si può scrivere che, ad esempio nel limite $R \to \infty$,

$$\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{x}$$

4. Nel caso $\sigma_1 = \sigma_2$ il campo tra i piani si annulla, mentre quello esterno raddoppia di intensità, $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Nel caso $\sigma_1 = -\sigma_2$, invece, avviene il contrario: il campo si annulla all'esterno e raddoppia di intensità tra i due piani.

Esercizio 9

Testo

Due piani indefiniti paralleli caricati con densità superficiale σ_1 e σ_2 sono posti in $x_1 = 0$ e $x_2 = d$.

1. Calcolare il lavoro che occorre compiere per spostare una carica q_0 tra i punti $(\delta, 0, 0)$ e $(5\delta, 0, 0)$, con $\delta > 0$, e tale che $5\delta < d$.
2. Poniamo $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$. Al tempo $t = 0$ una carica $q_0 > 0$ si trova in $\vec{r} = (\delta, 0, 0)$ con velocità iniziale $\vec{v} = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$. Calcolare il tempo t^* dopo il quale la carica tocca il secondo piano.

Soluzione

1. Il campo generato da un piano indefinito (e quindi anche da più piani indefiniti) è uniforme e diretto (in questo caso) lungo $\hat{x}$, quindi il lavoro si può scrivere semplicemente come $W = F\Delta x = q_0 E \Delta_x$. Lo spostamente è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale, quindi:

$$\Delta x = d + 5\delta - (d + \delta) = 4\delta$$

Il campo totale che agisce per $0 < x < d$ è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{x}.$$

Il lavoro fatto è quindi:

$$W = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\epsilon_0} 4\delta = \frac{2\delta q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\epsilon_0}$$

2. Il campo è uniforme e, tra i due piani, vale $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$. L'accelerazione quindi è costante lungo $\hat{x}$ e vale

$$a_x = \frac{q_0}{m} E = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2m\epsilon_0}$$

La posizione in funzione del tempo è:

$$x(t) = \delta + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Ponendo questa ultima quantità uguale alla posizione del secondo piano, cioè $x(t) = d$, otteniamo un'equazione di secondo grado:

$$(\delta - d) + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 0.$$

Risolviamo per t per trovare il risultato:

$$t^* = \frac{-v_{0,x} \pm \sqrt{v_{0,x}^2 - 2a(\delta - d)}}{a_x}$$

Esercizio 10

Testo

Tre cariche q sono poste su tre vertici di un quadrato di lato L.

1. Qual è l'energia elettrostatica del sistema?
2. Calcolare l'espressione del lavoro W necessario per portare una carica q_0 sul quarto vertice del quadrato. Discuterne il segno.
3. Calcolare W per $q = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $q_0 = -10^{-8}$ C e $L = 5$ cm.

Soluzione

1. L'energia totale ha tre contributi, $U_e = U_e^{1,2} + U_e^{1,3} + U_e^{2,3}$. Ognuno di questi tre contributi ha la forma:
$$U_e^{i,j} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_{ij}}$$
Delle tre distanze tra le cariche, due valgono L e una vale $\sqrt{2}L$, quindi si ha:
$$U_e = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}$$
2. Per calcolare il lavoro usiamo $W = -\Delta U_e = -q_0 \Delta V$. L'energia iniziale è $U_e^i = 0$, perché la carica q_0 è inizialmente "all'infinito". L'energia finale invece vale:
$$U_e^f = \frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}$$
E quindi il lavoro vale:
$$W = -\left(\frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}\right)$$
Notiamo che W è negativo se q e q_0 hanno lo stesso segno e positivo altrimenti: se le cariche hanno lo stesso segno l'energia potenziale del sistema *aumenta* e quindi dobbiamo fare lavoro *contro* la forza elettrostatica (e viceversa).
3. Sostituiamo i numeri nell'equazione precedente e troviamo
$$W = 9.732 \times 10^{-4} \text{ J}$$
Nota Bene: il lavoro ha le stesse unità di misura dell'energia (perché?) e quindi si misura in Joule (J).

Esercizio 11

Testo

Calcolare l'espressione del campo elettrostatico date le seguenti espressioni del potenziale:

1. $V(x, y, z) = A(xz - 2z^2)$
2. $V(x, y, z) = A(\cos(kx) + z - \log(y))$

Soluzione

1. Deriviamo il potenziale:

$$E_x = -Az \tag{1}$$
$$E_y = 0 \tag{2}$$
$$E_z = A(4z - x) \tag{3}$$

2. Deriviamo il potenziale:

$$E_x = -Ak\sin(kx) \tag{4}$$
$$E_y = \frac{A}{y} \tag{5}$$
$$E_z = -A \tag{6}$$

Esercizio 12

Esempio 2.8 del MNV

Testo

Calcolare e disegnare il potenziale e il modulo del campo elettrostatico generati in tutto lo spazio da due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale σ_1 e σ_2 e posti a $x_1 = 0$ e $x_2 = d$ lungo l'asse x,

1. Nel caso in cui $\sigma_1 = -\sigma_2$.
2. Nel caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2$.

Soluzione

Il modulo del campo generato da un singolo piano è $E = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0}$. 1. Se i piani hanno densità di carica opposta, il campo sarà diverso da 0 solamente nel mezzo, dove vale $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Utilizziamo la definizione di potenziale per calcolare $\Delta V = V_2 - V_1$ tra i due piani:

$$\Delta V = -\int_0^d E dx = -Ed = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Lì dove il campo è zero (cioè a sinistra e a destra dei due piani), il potenziale deve essere costante. Poiché la funzione potenziale deve essere sempre continua (perché?), troviamo $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ per $x > d$. 2. Se i piani hanno la stessa densità di carica, il campo sarà diverso da 0 solamente a sinistra e a destra dei due piani, dove vale $\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{x}$ (vale il segno $+$ a destra dei piani, cioè per $x > d$, e il segno $-$ a sinistra dei piani, cioè per $x < 0$). Dove il campo vale 0 (cioè tra i due piani) il potenziale è costante. Lo poniamo a 0 (ma potremmo porlo uguale a qualsiasi altro valore, perché?). A sinistra dei piani (cioè per $x < 0$) si ha

$$V(x) = -\int_0^x \vec{E} d\vec{s} = \int_0^x E dx' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x$$

perché il campo è diretto verso le x negative. A destra dei piani ($x > d$) si ha invece:

$$V(x) = -\int_d^x \vec{E} d\vec{s} = -\int_d^x E dx' = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(x - d)$$

Esercizio 13

Esempio 2.6 del MNV

Testo

1. Calcolare il potenziale elettrostatico generato da una carica q uniformemente distribuita su di un anello sottile di raggio R in un generico punto $\vec{P} = (x_0, 0, 0)$ del suo asse.
2. Verificare che l'espressione di E_x calcolata a partire dal potenziale coincide con quella calcolata esplicitamente.

Soluzione

1. La densità di carica lineare vale $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ e si ha $dq = \lambda dl$. Ogni elementino di carica genera un potenziale in $\vec{P}$ pari a
$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}$$
Per ottenere il potenziale totale integriamo su tutto l'anello:
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}$$
Nota Bene: questa espressione è valida *unicamente* sull'asse dell'anello (perché?)
2. Possiamo scrivere E_x come derivata del potenziale elettrostatico:
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{(R^2 + x_0^2)^{3/2}}$$
Questa espressione coincide con quella calcolata esplicitamente.

Esercizio 14

Esempio 2.4 del MNV

Testo

Una particella di carica q_0 viene posta in una regione di spazio in cui agisce un campo elettrostatico uniforme di modulo E diretto lungo $\hat{y}$. La velocità iniziale della particella è ortogonale al campo e ha modulo v e direzione $\hat{x}$.

1. Qual è l'angolo θ formato dalla velocità $\vec{v}(t)$ rispetto alla traiettoria iniziale dopo che la particella si è mossa lungo $\hat{x}$ per una lunghezza l. Discutere il segno di θ.

2. Calcolare l'angolo per $q_0/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/Kg, $l = 10$ cm, $v = 3 \times 10^7$ m/s ed $E = 10^4$ V/m.
3. Calcolare di quanto la particella del punto precedente si è spostata lungo l'asse $\hat{y}$.
4. Dimostrare che la differenza di energia cinetica tra lo stato iniziale e quello finale è pari alla differenza di energia potenziale cambiata di segno.

Soluzione

1. Per trovare l'angolo troviamo prima di tutto la traiettoria. Poiché il campo è uniforme e agisce lungo $\hat{y}$, il moto sarà uniforme lungo $\hat{x}$ e uniformemente accelerato lungo $\hat{y}$. Avremo quindi:

$$v_x(t) = v \tag{7}$$

$$v_y(t) = at = \frac{q_0 E}{m} t \tag{8}$$

$$x(t) = vt \tag{9}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0 E}{m} t^2 \tag{10}$$

Invertendo la prima di queste relazioni si trova $t = x/v$, e quindi $y(x) = \frac{1}{2} \frac{q_0 E}{m} \frac{x^2}{v^2}$. La tangente dell'angolo θ di questa traiettoria è, per definizione, la sua derivata $\frac{dy}{dx}$. Calcolata per $x = l$ si ottiene:

$$\tan(\theta) = \frac{q_0 E}{m} \frac{l}{v^2}$$

Se E è diretto lungo $\hat{y}$, θ ha lo stesso segno di q_0 (e viceversa).

2. Sostituendo i valori si ottiene $\tan(\theta) = 0.195$ e quindi $\theta = 0.193$ radianti $(11°)$
3. Dobbiamo trovare quanto vale lo spostamento lungo $\hat{y}$ quando $x = l$, cioè calcolare $y(l) = h = 0.0098$ m, cioè $h = 0.98$ cm.
4. Se poniamo a zero il potenziale in $y(0) = 0$, l'energia totale iniziale è semplicemente $U_e^{(i)} = \frac{1}{2} m v^2$. L'energia finale, invece, vale:

$$U_e^{(f)} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 - q_0 E h$$

dove l'ultimo contributo è semplicemente la differenza di potenziale tra $y = 0$ e $y = h$, cioè $\Delta V = -\int_0^h E dy$. Se risolviamo per v_y e sostituiamo l'espressione per h calcolata al punto precedente, troviamo

$$v_y = \frac{q_0 E}{m} \frac{L}{v}$$

cioè lo stesso valore che si trova utilizzando la relazione $v_y(t) = at$ che abbiamo trovato in precedenza. Si trova quindi che $\Delta U_k = q_0 E h$, cioè $\Delta U_k = -\Delta U_e$.

Esercizio 15

Testo

Un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p}$ e momento di inerzia I è immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$. Il dipolo è inizialmente fermo in una posizione in cui $\vec{p}$ forma un angolo θ con $\vec{E}$. Al tempo $t = 0$ il dipolo viene lasciato libero di ruotare.

1. Calcolare la velocità angolare ω del dipolo quando l'angolo formato col campo vale 0.
2. Il dipolo viene bloccato nell'istante in cui è allineato col campo ($\theta = 0$). Qual è la sua energia elettrostatica se si pone un altro dipolo di momento $\vec{p}$ (avente cioè la stessa orientazione e lo stesso valore del momento di dipolo) ad una distanza x lungo la direzione data dai momenti di dipolo.
3. Di quanto cambierebbe l'energia potenziale del punto precedente se il secondo dipolo venisse ruotato di $\pi/2$ (cioè di 180°?)

Soluzione

1. L'energia potenziale di un dipolo in un campo vale $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, mentre l'energia cinetica di un corpo che ruota è data $U_k = \frac{1}{2} I\omega^2$. Scriviamo l'espressione dell'energia totale iniziale e finale ed imponiamo che il suo valore si conservi:

   $$-pE\cos(\theta) = -pE + \frac{1}{2} I\omega^2$$

   da cui si ottiene:

   $$\omega = \sqrt{\frac{2pE(1-\cos(\theta))}{I}}$$

2. L'energia elettrostatica del dipolo è $U_e = -\vec{p} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_d)$, dove $\vec{E}$ è il campo uniforme e $\vec{E}_d$ è il campo generato dal secondo dipolo. Poiché i due dipoli sono paralleli e disposti uno dietro l'altro, il campo generato dal secondo dipolo nel punto in cui si trova il primo vale:

   $$\vec{E}_d = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

   E quindi l'energia potenziale totale è data da

   $$U_e = -Ep - \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

3. In questo caso il campo generato dal secondo dipolo nel punto in cui si trova il primo avrebbe lo stesso modulo ma verso opposto, cioè:

   $$\vec{E}_d = -\frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

   E quindi l'energia varrebbe:

   $$U_e = -Ep + \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

   Poiché il secondo contributo è positivo (perché?), l'energia potenziale è più alta!

Esercizio 16

Esempio 3.4 del MNV

Testo

Utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrostatico generato da un piano indefinito caricato uniformemente con densità superficiale di carica σ.

Soluzione

La superficie che scegliamo è un cilindro di raggio R e lunghezza $2x$ centrato sul piano e avente l'asse di simmetria ortogonale al piano. Per simmetria il campo deve essere diretto lungo l'asse del cilindro, e quindi il flusso attraverso i bordi del cilindro è nullo ($\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$). Resta da calcolare il flusso lungo le due basi. Poiché i due contributi devono essere uguali per simmetria (provate a ruotare tutto il sistema di 180°, cosa cambia?), possiamo direttamente scrivere:

$$2\pi R^2 E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(r)} dq$$

Poiché abbiamo a che fare con una densità superficiale costante, la carica totale non è altro che la densità per la superficie, e quindi $2\pi R^2 E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi R^2$. Risolvendo per il campo (e notando che questo non dipende da x), si trova

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Esercizio 17

Esempi 3.1 e 3.2 del MNV

Testo

Calcolare (e disegnare) il campo elettrostatico generato in *tutto* lo spazio da una sfera di raggio R caricata con carica q distribuita

1. con densità superficiale di carica σ;
2. uniformemente con densità di carica ρ;
3. con densità di carica $\rho(r) = Ar^2$.
4. Quanto vale la costante A definita al punto precedente?

Soluzione

L'esercizio si risolve utilizzando il teorema di Gauss. Poiché in tutte e tre i casi abbiamo a che fare con distribuzioni di simmetria sferica, applichiamo il teorema su superfici sferiche di raggio r e concentriche alla sfera carica. Poiché la simmetria è radiale, il campo calcolato è sempre parallelo alla normale delle superfici ed ha sempre lo stesso modulo su ogni punto. Possiamo quindi riscrivere l'integrale del flusso come:

$$\oint_{\Sigma(r)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Sigma(r)} E(r) dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Applichiamo il teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(r)} dq$$

Dove $\tau(r)$ indica il volume racchiuso dalla superficie sferica (e cioè una sfera di raggio r). Per risolvere l'esercizio dobbiamo calcolare l'integrale a destra per le diverse distribuzioni e per tutte le distanze

1. Nel caso di densità superficiale, abbiamo

$$4\pi r^2 E(r) = 0 \qquad \text{per} \quad r < R \tag{11}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{per} \quad r \geq R \tag{12}$$

Perché se $r < R$ le superfici sferiche non contengono alcuna carica, mentre per $r \geq R$ le superfici sferiche contengono *tutta* la carica q. Invertendo le relazioni appena scritte si trova

$$E(r) = 0 \qquad \text{per} \quad r < R \tag{13}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{per} \quad r \geq R \tag{14}$$

Nota Bene: La seconda relazione (cioè l'espressione del campo per $r \geq R$), è valida qualunque sia la distribuzione di carica, purché abbia simmetria sferica.

2. Dobbiamo calcolare come varia il campo all'interno della sfera (perché all'esterno l'espressione è la stessa di quella di un campo generato da una carica puntiforme). L'espressione per l'integrale del flusso attraverso una superficie sferica di raggio r non cambia. Cambia invece il membro di destra, per il quale si ha (per $r < R$)

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau(r)} dq = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Sostituendo il membro di sinistra calcolato prima si trova (per $r < R$)

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

3. Ripetiamo la stessa procedura, con la differenza che ora ρ non è costante ma dipende da r e quindi non si può tirare fuori dall'integrale:

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau(r)} dq = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^r A r'^2 r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4}{5}\pi r^5 A$$

e quindi

$$E(r) = \frac{A r^3}{5\epsilon_0}$$

4. Poiché il problema ci dice che la carica totale della sfera è q, la costante A deve essere fissato. Data una densità di carica qualunque, sappiamo che la carica totale è data dall'integrale di questa densità su tutto il corpo carico. In questo caso:

$$q = 4\pi \int_0^R A r^2 r^2 dr = 4\pi \int_0^R A r^4 dr = \frac{4}{5}\pi A R^5$$

e quindi

$$A = \frac{5q}{4\pi R^5}$$

Esercizio 18

Esempio 3.3 del MNV

Testo

Utilizzare il teorema di Gauss per calcolare

1. il campo elettrostatico generato da un cilindro indefinito di raggio R caricato uniformemente con densità di carica ρ in ogni punto dello spazio.
2. La differenza di potenziale tra due punti distanti dal centro del cilindro, rispettivamente, $r_1 > R$ e $r_2 > R$.

Soluzione

1. Il campo ha sicuramente direzione radiale, cioè $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$. Per calcolare il modulo $E(r)$ applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio r ed altezza h coassiale al cilindro carico. Poiché il campo è radiale, il suo flusso attraverso le basi del cilindro è nullo. Calcoliamo il flusso attraverso la superficie laterale:

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = E(r) \oint_\Sigma d\Sigma = E(r) 2\pi r h$$

   La carica totale contenuta all'interno della superficie è data da:

$$\int_\tau \rho d\tau = \rho \pi R^2 h$$

   Applicando il teorema di Gauss si trova:

$$E(r) = \frac{\rho \pi R^2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

   avendo definito la densità di carica *lineare* $\lambda = \rho\pi R^2$. Questa espressione è valida anche per fili *sottili* caricati con la stessa densità di carica λ.

2. La differenza di potenziale si calcola utilizzando la definizione di potenziale:

$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Richiami di matematica: coordinate sferiche e polari

Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche (r, θ, ϕ) sono legate a quelle cartesiane, (x, y, z), tramite le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

Il seguente diagramma aiuta a visualizzare queste relazioni:

In generale, nei sistemi di riferimento che ci interessano i versori che indicano le direzioni delle coordinate sono sempre ortogonali tra loro, punto per punto. Nel caso delle coordinate cartesiane questi vettori sono sempre uguali e puntano sempre nella stessa direzione. Nel caso delle coordinate sferiche questo non è vero: mentre, punto per punto, i tre versori sono ortogonali, le loro direzioni dipendono dal punto in cui vogliamo calcolarli. Per trovarli bisogna disegnare il punto in cui siamo su di un diagramma simile a quello riprodotto sopra e chiedersi quali sono le direzioni verso le quali le tre coordinate aumentano. Nel caso del punto in figura (indicato con $\times$):

- $\hat{r}$ ha direzione parallela a quella della linea tratteggiata che connette $\times$ all'origine e verso che allontana dall'origine
- $\hat{\theta}$ ha la direzione che lascia inalterati r e ϕ e verso che fa crescere θ.
- $\hat{\phi}$ fa ruotare in senso antiorario il punto attorno all'asse z.

Troviamo ora le relazioni che legano l'incremento della coordinata i-esima allo spostamento ds_i che ne risulta. Per le coordinate cartesiane questo è semplicemente dato da $ds_x = dx$, $ds_y = dy$ e $ds_z = dz$. Per le coordinate sferiche, invece:

- Se ci si muove lungo $\hat{r}$, r aumenta e $\times$ si sposta di una quantità pari all'incremento. Si ha quindi uno spostamento pari a $ds_r = dr$.
- Se ci si muove lungo $\hat{\theta}$ di un angolo $d\theta$, lo spostamento sarà pari a $ds_\theta = 2r\sin(d\theta/2) \approx rd\theta$, dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sin(\alpha) \approx \alpha$ per piccoli valori di α.
- Se ci si muove lungo $\hat{\phi}$, per visualizzare lo spostamento prima proiettiamo il punto sul piano $x-y$ (contribuendo con un fattore $\sin(\theta)$) e poi effettuiamo la stessa operazione del punto precedente, ma stavolta utilizzando $d\phi$. Il risultato finale è quindi $ds_\phi = r\sin(\theta)d\phi$.

Possiamo usare queste relazioni per ottenere l'espressione di un volumetto infinitesimo $d\tau = ds_1 ds_2 ds_3$:

- In coordinate cartesiane $d\tau = dxdydz$.
- In coordinate sferiche $d\tau = ds_r ds_\theta ds_\phi = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi$.

L'espressione si semplifica in casi specifici:

- se l'integrando non dipende da θ, $d\tau = 2r^2 drd\phi$;
- se l'integrando non dipende da ϕ, $d\tau = 2\pi r^2\sin(\theta)drd\theta$;
- se l'integrando non dipende né da θ né da ϕ, $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

Coordinate polari

Il discorso si semplica in 2D, dove si hanno solamente r e θ:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Per gli spostamenti infinitesimi:

- Se ci si muove lungo $\hat{r}$, r aumenta e $\times$ si sposta di una quantità pari all'incremento. Si ha quindi uno spostamento pari a $ds_r = dr$.
- Se ci si muove lungo $\hat{\theta}$ di un angolo $d\theta$, lo spostamento sarà pari a $ds_\theta = 2r\sin(d\theta/2) \approx rd\theta$, dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sin(\alpha) \approx \alpha$ per piccoli valori di α.

L'espressione di una porzione infinitesimo della superficie è quindi $d\Sigma = dxdy = rdrd\theta$. Se l'integrando non dipende da θ si ha $d\Sigma = 2\pi rdr$.

Esercizio 19

Testo

Una sfera di raggio R_s interseca un disco di raggio $R_d > R_s$ carico con densità di carica σ a distanza $d < R_s$. Calcolare il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie sferica per

1. σ uniforme;
2. $\sigma = \frac{A}{r}$.

Soluzione

Utilizzando il teorema di Gauss sappiamo che $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Il problema si riduce quindi a calcolare Q. L'intersezione tra una sfera ed un disco è una circonferenza il cui raggio R_c è determinato da d: disegnando il sistema si vede che $R_c^2 = R_s^2 - d^2$. La quantità di carica racchiusa dalla superficie sferica è l'integrale di σ su questa circonferenza:

$$Q = \int_c \rho(x, y) dx dy = \int_c \rho(r, \theta) r dr d\theta$$

1. Se la densità di carica è uniforme, la carica totale si ottiene moltiplicando σ per la superficie della circonferenza:
$$Q = \sigma \pi R_c^2 = \sigma \pi (R_s^2 - d^2)$$
2. Se la densità di carica non è uniforme si deve integrare esplicitamente sulla superficie:
$$Q = \int_c \rho(r, \theta) r dr d\theta = A \int_c \frac{1}{r} r dr d\theta = 2\pi A \int_0^{R_c} dr = 2\pi A R_c$$

Esercizio 20

Testo

Una lastra non conduttrice di spessore h e superficie molto grande è posta parallela al piano $y - z$ e caricata con densità di carica ρ e ha, al suo interno, una cavità sferica di raggio $R < h/2$ il cui centro coincide con il centro della lastra. Calcolare il campo generato in un punto (x, y, z) qualsiasi esterno alla lastra.

Soluzione

Una lastra piena con densità di carica ρ e spessore h genera un campo uniforme

$$\vec{E} = \frac{\rho h}{\epsilon_0} \hat{x}$$

In generale, una cavità vuota in una qualsiasi distribuzione di carica $\rho(x, y, z)$ si può sempre considerare, grazie al principio di sovrapposizione, una regione di spazio caricata con distribuzioni di carica $\rho(x, y, z)$ e $-\rho(x, y, z)$. Una regione senza carica, infatti, si può pensare come una regione in cui sono presenti cariche positive e negative sovrapposte, poiché il campo totale è dato dalla somma dei campi dovuti alle due distribuzioni opposte. In questo caso specifico, il campo dovuto alla distribuzione di carica fittizia è quello generato da una sfera:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

dove $q = -\rho\frac{4}{3}\pi R^3$. Il campo totale sarà quindi

$$\vec{E}(x,y,z) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} + \frac{\rho h}{\epsilon_0}\hat{x}$$

Esercizio 21

Testo

Due sfere conduttrici di raggio R_1 ed R_2 sono disposte ad una distanza d molto maggiore dei loro raggi. Depositiamo una carica Q su R_1.

1. Se collegassimo le due sfere con un sottile filo conduttore quanta carica si depositerebbe sulle due sfere?
2. Colleghiamo R_2 a terra. Quanto vale la carica indotta su R_2?
3. Scolleghiamo R_2 e colleghiamo R_1 a terra. Qaunto vale la carica indotta su R_1?

Nota Bene: Il fatto che $d \gg R_1$ e $d \gg R_2$ significa che le distribuzioni di carica (non indotte) delle sfere conduttrici possono essere considerate uniformi, e che $d - R_1 \simeq d$ e $d - R_2 \simeq d$.

Soluzione

1. Il potenziale di due conduttori connessi deve essere lo stesso. Se lo calcoliamo sulla superficie questo vale:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \tag{15}$$
$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{16}$$

   D'altro canto, per la conservazione della carica $Q = q_1 + q_2$, e quindi

$$q_1 = Q\frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{17}$$
$$q_2 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{18}$$

2. In generale, collegare a terra significa porre il potenziale di quel conduttore a 0. Il potenziale totale sarà però dato da due contributi, uno dovuto alla sfera R_1 (distante d) ed uno dovuto alla carica indotta:

$$V_1(d) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} \tag{19}$$
$$V_2(R_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{20}$$

Il fatto che la seconda sfera sia collegata a terra significa che il potenziale totale deve essere zero, da cui si ha che

$$q_2 = -\frac{QR_2}{d}$$

3. Se scolleghiamo R_2, la carica q_2 che inizialmente era indotta diventa fissa e, nell'ipotesi in cui d è molto più grande delle dimensioni dei conduttori, si distribuisce in maniera uniforme sulla sfera. D'altro canto, collegando a terra R_1 questa si scarica e il suo potenziale vale $V = 0$. Siamo nelle stesse condizioni di prima, ma stavolta a parti invertite. Con lo stesso procedimento troviamo che:

$$V_2(d) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \tag{21}$$

$$V_1(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \tag{22}$$

Da cui si ricava

$$q_1 = -\frac{q_2 R_1}{d} = \frac{QR_1R_2}{d^2}$$

Esercizio 22

Testo

Un conduttore sferico di raggio R contiene due cavità sferiche, rispettivamente di raggio r_a e r_b. Al centro delle cavità sono poste due cariche q_a e q_b. Calcolare:

1. le densità superficiali delle tre sfere;
2. il campo elettrico all'esterno del conduttore;
3. i campi elettrici all'interno delle due cavità;
4. le forze percepite dalle due cariche; c'è interazione tra le cariche?
5. Come cambierebbe la situazione se q_a e q_b fossero poste inizialmente non esattamente nel centro e fossero libere di muoversi?
6. Ritorniamo al caso delle cariche poste nel centro delle cavità. Come cambia *qualitativamente* la situazione se una carica q_c viene posta nelle vicinanze della sfera conduttrice?

Soluzione

1. In ognuna delle due cavità si ha induzione totale, e quindi $\sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi r_a^2}$, $\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi r_b^2}$. D'altro canto, la sfera conduttrice non ha altre cariche, e quindi (applicando il teorema di Gauss) sulla superficie esterna deve essere depositata una carica $q_a + q_b$, quindi $\sigma_R = \frac{q_a+q_b}{4\pi R^2}$.
2. Poiché le cariche interne sono schermate, il campo all'esterno è dato unicamente dalla carica distribuita sulla superficie. Dal teorema di Gauss troviamo:

$$\vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

3. Entrambe la cavità sono schermate, dall'esterno tanto quanto l'una dall'altra. In ogni cavità, quindi, il campo sarà quello generato dalla carica al suo interno e varrà $\vec{E}_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$ e $\vec{E}_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$, con r distanza dal centro della cavità.
4. Le cariche sono al centro delle rispettive cavità, che sono schermate elettrostaticamente dall'esterno: non sentono alcuna forza.

5. Se le cariche non fossero centrate verrebbero attirate dalla densità di carica indotta sulle superfici interne. Dopo un certo tempo, entrambe le cariche toccherebbero le superfici del conduttore, caricandolo. Si otterrebbe quindi $\sigma_a = \sigma_b = 0$, e quindi i campi all'interno delle cavità si annullerebbero. Date le note proprietà dei conduttori, il campo esterno rimarrebbe invariato (così come σ_R).
6. Se avviciniamo una carica q_c, il suo effetto sarà quello di indurre spostamenti di carica su R affinché il campo si annulli al suo interno. La carica totale sulla superficie di R non cambierebbe ($q_R = q_a + q_b$), ma la sua distribuzione sì. All'interno invece la presenza di q_c non è avvertita in forza dello schermo elettrostatico.

Esercizio 23

Esercizio II.6 del Mencuccini-SilvestrinI

Testo

Due sfere conduttrici di raggio R vengono caricate con la stessa carica q. La distanza d tra le due sfere è molto maggiore di R, essendo $d = 50R$. In queste condizioni, la forza che si esercita tra le due sfere vale $F_i = 10^{-5}N$. Calcolare la forza F_f tra le due sfere dopo che una delle due è stata collegata a terra.

Soluzione

L'espressione per la forza tra due sfere cariche è:

$$F_i = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}$$

Questa espressione non può essere utilizzata per calcolare le quantità che il problema non ci fornisce, perché contiene due incognite, q e d (o R, le due quantità sono legate).

Se una delle due sfere viene messa a terra, l'altra acquisisce una carica q_f che si può calcolare mettendo a 0 il suo potenziale totale:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d} + \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = 0$$

Da cui si ricava

$$q_f = -\frac{qR}{d} = -\frac{q}{50}$$

Applichiamo la legge di Coulomb per calcolare F_f, e notiamo che possiamo riscrivere l'espressione in funzione di F_i:

$$F_f = \frac{qq_f}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{50d^2} = -\frac{F_i}{50} = -2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Esercizio 24

Testo

Una sfera di raggio R_1 è posta al centro di una sfera cava di raggio interno R_2 ed esterno R_3. I due conduttori sono mantenuti da un generatore a valori del potenziale V_1 e V_2 rispetto al potenziale all'infinito (che poniamo a 0 per comodità).

1. Calcolare le cariche q_1, q_2 e q_3 depositate sulle tre superfici conduttive.
2. Calcolare numericamente le cariche se $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20cm$, $R_3 = 25cm$, $V_1 = -1000$ V, $V_2 = 200$ V.

Soluzione

1. La differenza di potenziale tra R_1 ed R_2 si trova integrando il campo all'interno della cavità:

$$\Delta V_{1,2} = V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

   Da cui si ricava la carica della sfera interna:

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 \Delta V \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\right) = \Delta V C$$

   Dove l'ultima relazione mostra come il sistema possa essere considerato un condensatore sferico di capacità $C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\right)$. Per il teorema di Gauss, la carica sulla superficie interna della sfera cava non può essere altro che $q_2 = -q_1$. La carica sulla superficie esterna, invece, si trova integrando direttamente il campo per trovare la differenza di potenziale tra la sfera cava e l'infinito (dove $V = 0$):

$$V_2 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_3}$$

   Da cui si trova che:

$$q_3 = 4\pi\epsilon_0 R_3 V_2$$

2. Sostituiamo i valori nelle relazioni trovate precedentemente:

$$q_1 = -2.67 \times 10^{-8} \tag{23}$$
$$q_2 = 2.67 \times 10^{-8} \tag{24}$$
$$q_3 = 5.6 \times 10^{-9} \tag{25}$$

Esercizio 25

Testo

Sono noti la differenza di potenziale ΔV_{ab} e le capacità di ciascun condensatore del circuito in figura:

1. Determinare la capacità equivalente del circuito.
2. Calcolare la carica e la d.d.p. di ciascun condensatore.

Soluzione

1. La capacità equivalente totale si ottiene in tre passi:
    1. C_1, C_2 e C_3 sono in parallelo. La loro capacità equivalente è quindi $C_{\text{eq}}^{(1)} = C_1 + C_2 + C_3$.
    2. Disegniamo il circuito equivalente: $C_{\text{eq}}^{(1)}$ e C_4 sono in serie, e quindi la loro capacità equivalente vale $C_{\text{eq}}^{(2)} = \frac{C_4 C_{\text{eq}}^{(1)}}{C_4 + C_{\text{eq}}^{(1)}}$.
    3. $C_{\text{eq}}^{(2)}$ e C_5 sono ora chiaramente in parallelo, e quindi $C_{\text{eq}} = C_{\text{eq}}^{(2)} + C_5$.
2. Anche qui il procedimento si semplifica se consideriamo una parte del circuito alla volta:
    - C_5 è posto ad una d.d.p. nota perché $\Delta V_5 = \Delta V$, quindi $q_5 = C_5 \Delta V$.
    - Il condensatore equivalente $C_{eq}^{(2)}$ si trova anch'esso a $\Delta V^{(2)} = \Delta V$, e quindi la carica su di esso depositata è $q_{\text{eq}}^{(2)} = C_{eq}^{(2)} \Delta V$. Poiché $C_{eq}^{(1)}$ e C_4 sono in serie, essi contengono la stessa quantità di carica, quindi $q_4 = q_{\text{eq}}^{(2)}$, per cui $\Delta V_4 = q_4 / C_4$.
    - La d.d.p. ai capi dei tre condensatori in parallelo è (per definizione) la stessa, $\Delta V_{\text{eq}}^{(1)}$. Possiamo calcolarla notando che $\Delta V_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta V_4 = \Delta V$ e quindi $\Delta V_{\text{eq}}^{(1)} = \Delta V - \Delta V_4$. Poiché conosciamo sia la d.d.p che le capacità dei diversi condensatori, le quantità di carica si possono calcolare immediatamente: $q_1 = C_1 \Delta V_{\text{eq}}^{(1)}$, $q_2 = C_2 \Delta V_{\text{eq}}^{(1)}$ e $q_3 = C_3 \Delta V_{\text{eq}}^{(1)}$.

Esercizio 26

Testo

Una nuvola temporalesca ha una forma approssimativamente rettangolare, con lati $a = 2.0$ km e $b = 3.0$ km, e fluttua ad un'altezza $h = 500$ m al di sopra di una zona pianeggiante. La nuvola contiene una carica $q = 80$ C.

1. Sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è circa 3.0×10^6 V/m, le condizioni descritte sopra sono sufficienti per generare fulmini?
2. Qual è l'energia elettrostatica del sistema nuvola + terreno?

Soluzione

Il sistema può essere visto come un condensatore piano di capacità:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon_0 ab}{h} = 10.6 \times 10^{-8}\,\text{F}$$

Nota Bene: la costante dielettrica relativa dell'aria è praticamente uno, quindi possiamo utilizzare le espressioni valide nel vuoto.

Il potenziale vale:

$$\Delta V = \frac{q}{C} = 7.5 \times 10^8\,\text{V}$$

1. La rigidità dielettrica è il massimo valore del campo elettrostatico che può essere applicato senza causare scariche (fulmini!). Calcoliamo il campo all'interno del "condensatore", utilizzando la solita espressione per i condensatori piani (molto approssimata in questo caso, perché?):

$$E \simeq \Delta V/h = 1.5 \times 10^6\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

che è più bassa della rigidità dielettrica: niente fulmini (in questa approssimazione)! 2. L'espressione dell'energia di un qualunque condensatore è $U_e = \frac{1}{2}q\Delta V$, quindi si ha:

$$U_e = \frac{1}{2}q\Delta V = 3 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Esercizio 27

Esercizio II.11 del Mencuccini-Silvestrini

Testo

Tre condensatori, di capacità $C_A = C$, $C_B = 2C$, $C_C = 3C$, sono disposti come in figura:

Gli elettrodi di C_A e C_B sono tenuti a differenze di potenziale $V_A = 10$ V e $V_B = 40$ V, mentre un elettrodo di C_C è collegato a terra. Qual è la differenza di potenziale ai capi di C_C?

Soluzione

Le differenze di potenziale ai capi dei tre condensatori valgono:

$$V_A - V_C = \frac{q_A}{C} \tag{26}$$
$$V_B - V_C = \frac{q_B}{2C} \tag{27}$$
$$V_C = \frac{q_C}{3C} = \frac{q_A + q_B}{3C} = \frac{cV_A - CV_C + 2CV_B - 2CV_C}{3C} \tag{28}$$

Da cui si ricava che

$$V_C = \frac{V_A + 2V_B}{6} = 15\,\mathrm{V}$$

Esercizio 28

Esempio 4.13 del MNV

Testo

Un condensatore piano (di dimensioni $\Sigma = l^2$ e h), è inizialmente vuoto. Una lastra di dielettrico di costante dielettrica κ viene inserita parzialmente nel condensatore. La differenza di potenziale ΔV è mantenuta costante da un generatore. Calcolare la forza con cui la lastra viene risucchiata all'interno del condensatore.

Soluzione

Non possiamo utilizzare un'espressione simile a quella usata per calcolare la forza agente tra due armature di un condensatore, perché nel sistema condensatore + lastra, infatti, l'energia non è conservata! Poiché la d.d.p. è mantenuta costante dal generatore, la variazione dell'energia potenziale del condensatore non è legata direttamente al lavoro della forza.

Cominciamo con il calcolare la capacità equivalente del condensatore. Quando la lastra è penetrata di x, il sistema può essere visto come due condensatori in parallelo, uno vuoto (di lunghezza $l - x$) e uno pieno (di lunghezza x). La capacità equivalente vale quindi:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 l(l-x)}{h} + \frac{\epsilon_0 l x}{h}$$

Se la lastra si muove di dx, la capacità varia di:

$$dC = \frac{dC}{dx} dx = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l}{h} dx$$

Per mantenere la d.d.p. ΔV, il generatore dovrà spostare una quantità di carica $dq = \Delta V dC$, spendendo una quantità di lavoro

$$dW_{\text{gen}} = \Delta V dq = V^2 dC$$

D'altro canto, parte di questo lavoro va ad aumentare l'energia elettrostatica del sistema, che varia di

$$dU_e = \frac{1}{2} V^2 dC$$

La differenza tra il lavoro compiuto dal generatore e l'energia immagazzinata dal condensatore è proprio il lavoro della *forza di risucchio*, che quindi vale:

$$dW = dW_{\text{gen}} - dU_e = \frac{1}{2} V^2 dC = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l \Delta V^2}{2h} dx = F dx$$

La forza vale quindi:

$$F = \left(\frac{dW}{dx} \right)_{V = \text{cost}} = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l \Delta V^2}{2h}$$

Esercizio 29

Testo

Un piano conduttore indefinito è carico con densità superficiale di carica σ. Su una delle due superfici viene appoggiata una lastra di materiale dielettrico omogeneo e lineare di spessore h e costante dielettrica κ.

1. Calcolare le densità di carica di polarizzazione presenti sulle superfici del dielettrico.
2. Scrivere l'espressione della d.d.p. tra un punto all'interno del conduttore e uno all'esterno (dal lato del dielettrico).

Soluzione

1. Il campo generato da una piano conduttore carico nel vuoto è
$$\vec{E}_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$
dove $\hat{n}$ è la normale al piano. All'interno di un dielettrico $\epsilon_0 \to \epsilon = \kappa\epsilon_0$, quindi
$$\vec{E}_d = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}\hat{n}$$
cioè l'intensità del campo diminuisce di un fattore κ. Sulle superfici del dielettrico appariranno delle densità di carica σ_p in forza del fenomeno della polarizzazione. Queste densità di carica sono legate alla polarizzazione tramite la relazione $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, dove $\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$ è il vettore polarizzazione (diverso da zero solo all'interno del dielettrico), che in questo caso vale quindi:
$$\vec{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma\hat{n}.$$
Il dielettrico che stiamo considerando ha due superfici, una con normale diretta *verso* il conduttore, l'altra in verso opposto. Avremo quindi due densità di polarizzazione date da:
$$\sigma_p = \pm\vec{P} \cdot \hat{n} = \pm\frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma$$

2. Abbiamo visto come il campo elettrico assuma valori diversi all'interno e all'esterno del dielettrico. La d.d.p. tra la superficie del conduttore (su cui consideriamo $V(0) = 0$) ed un punto all'interno del dielettrico vale:
$$\Delta V(x < h) = \int_0^x \frac{\sigma}{\epsilon}dx' = \frac{\sigma}{\epsilon}x$$
Sulla seconda superficie del dielettrico si avrà quindi
$$\Delta V(h) = \frac{\sigma}{\epsilon}h$$
Per distanze maggiori, il campo da integrare è quello nel vuoto, quindi:
$$\Delta V(x > h) = \int_0^h \frac{\sigma}{\epsilon}dx' + \int_h^x \frac{\sigma}{\epsilon_0}dx' = \frac{\sigma}{\epsilon}h + \frac{\sigma}{\epsilon_0}(x - h)$$
Per validare il risultato basta vedere cosa succede se $\kappa = 1\ldots$

Esercizio 30

Testo

Un cilindro conduttore di raggio R_1 caricato con densità di carica superficiale σ, è posto al centro di un cilindro cavo, anch'esso conduttore, di raggio interno R_3 ed esterno R_4. Lo spazio interno tra le superfici è riempito con due dielettrici, anch'essi a forma di cilindro cavo. Il primo, di costante dielettrica κ_1, ha raggi R_1 ed R_2, il secondo R_2 ed R_3.

1. Calcolare $\vec{E}$, $\vec{D}$ e $\vec{P}$.
2. Calcolare le densità di polarizzazione sulle superfici dei dielettrici.
3. Calcolare la d.d.p. tra il cilindro interno ed un punto qualsiasi all'esterno del guscio cilindrico nei casi in cui quest'ultimo sia messo a terra oppure no.

Soluzione

1. All'interno dei conduttori $\vec{E}$, e quindi anche $\vec{D}$ e $\vec{P}$, che sono proporzionali ad $\vec{E}$, sono nulli. All'esterno del cilindro cavo si ha, per il teorema di Gauss,

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R_4}{\epsilon_0 r}\hat{r}.$$

essendoci il vuoto, $\vec{P} = 0$ e quindi $\vec{D}(r) = \epsilon_0 \vec{E}(r) = \frac{\sigma R}{r}\hat{r}$. All'interno dei dielettrici, se utilizziamo il teorema di Gauss per $\vec{D}$ troviamo che vale sempre (indipendentemente dal fatto che ci troviamo in un dielettrico o nell'altro)

$$\vec{D}(r) = \frac{\sigma R_1}{r}\hat{r}$$

questo perché le uniche cariche libere (cioè non dovute alla polarizzazione) sono quelle che si trovano sulla superficie del cilindro interno. Poiché $\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ e quindi $\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$, si ha

$$\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\kappa_i \epsilon_0 r}\hat{r} \tag{29}$$

$$\vec{P} = \frac{\kappa_i - 1}{\kappa_i}\frac{\sigma R_1}{r}\hat{r} \tag{30}$$

dove $i = 1, 2$ a seconda del dielettrico considerato.

2. La densità di polarizzazione vale sempre $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Sulla superficie interna:

$$\sigma_p^{(1)}(R_1) = -\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\sigma$$

Sulla superficie esterna del primo dielettrico:

$$\sigma_p^{(1)}(R_2) = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\frac{\sigma R_1}{R_2} = -\sigma_p^{(1)}(R_2)\frac{R_1}{R_2}$$

Sulla superficie interna del secondo dielettrico:

$$\sigma_p^{(2)}(R_2) = -\frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2}\frac{\sigma R_1}{R_2}$$

Mentre sulla superficie esterna del secondo dielettrico:

$$\sigma_p^{(2)}(R_2) = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2}\frac{\sigma R_1}{R_3} = -\sigma_p^{(1)}(R_2)\frac{R_2}{R_3}$$

Questi valori si possono validare a due a due considerando che la quantità di carica di polarizzazione in un dielettrico (comprese le sue superfici) deve essere zero!

3. Per il principio della gabbia di Faraday, il fatto che il conduttore più esterno sia messo o meno a terra non cambia la d.d.p. tra i due conduttori, che vale sempre:

$$\Delta V_{1,3} = V(R_1) - V(R_3) = \int_{R_1}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\kappa_1 \epsilon_0 r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\sigma R_1}{\kappa_2 \epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\kappa_1}\log\left(\frac{R2}{R1}\right) + \frac{1}{\kappa_2}\log\left(\frac{R3}{R2}\right)\right)$$

D'altro canto, la d.d.p. tra il guscio esterno ed un punto qualsiasi al suo esterno vale 0 nel caso sia messo a terra (applicate il teorema di Gauss per dimostrarlo!), oppure

$$\Delta V_4(r) = \int_{R_4}^{r} \frac{\sigma R_4}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_4}{\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{R_4}\right)$$

nel caso in cui non lo sia (vedi sopra per l'espressione del campo). La differenza di potenziale totale è quindi diversa nei due casi e vale:

$$\Delta V(r) = \Delta V_{1,3} + \Delta V_4(r) \tag{31}$$

$$\Delta V(r) = \Delta V_{1,3} \tag{32}$$

Esercizio 31

Un conduttore cilindro cavo di lunghezza h ha raggio interno R_1 ed esterno R_2 ed è costituito da un materiale di resistività ρ.

1. Calcolare la resistenza R che oppone ad una corrente che scorre in direzione parallela al cilindro.
2. Dati $R_1 = 1$ mm, $R_2 = 1.5$ mm, $h = 1$ m e se nel conduttore scorre una corrente $i = 500$ mA e il campo all'interno del conduttore ha intensità $E = 10$ V/m, quanto vale la resistività ρ?

Testo

1. Applichiamo la definizione di resistenza:

$$R = \rho \int_0^h \frac{dh}{\Sigma(h)} = \rho \int_0^h \frac{dh}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\rho h}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

2. Dobbiamo prima applicare la legge di Ohm per trovare la resistenza. Per farlo, però, dobbiamo prima calcolare la d.d.p. ai capi del conduttore:

$$\Delta V = Eh = 10\,\mathrm{V}$$

Quindi:

$$R = \frac{\Delta V}{i} = 20\,\Omega = \rho \frac{h}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

e quindi la resistività vale:

$$\rho = \frac{R\pi(R_2^2 - R_1^2)}{h} = 7.85 \times 10^{-5}\,\Omega\mathrm{m}$$

Soluzione

Esercizio 32

Testo

Dato il circuito in figura e i valori $R_1 = 1.0\,\Omega$, $R_2 = 3.0\,\Omega$, $R_3 = 2.0\,\Omega$ and $R_4 = 2.0\,\Omega$,

1. Calcolare la resistenza equivalente.
2. Calcolare la potenza dissipata da ognuno dei quattro resistori se $V_0 = 6$ V.

Soluzione

1. R_2 ed R_3 sono in parallelo, e quindi si ha

   $$R_{\mathrm{eq}}^{(1)} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1.2\,\Omega$$

   R_1 e $R_{\mathrm{eq}}^{(1)}$ sono in serie, quindi

   $$R_{\mathrm{eq}}^{(2)} = R_1 + R_{\mathrm{eq}}^{(1)} = 2.2\Omega$$

   Restano solamente due resistori (R_4 e $R_{\mathrm{eq}}^{(2)}$), che sono collegati in parallelo:

   $$R_{\mathrm{eq}} = \frac{R_4 R_{\mathrm{eq}}^{(2)}}{R_4 + R_{\mathrm{eq}}^{(2)}} = 1.05\,\Omega$$

2. Sappiamo che $\mathcal{P} = \Delta V i = R i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$. Per poter applicare queste relazioni dobbiamo prima trovare o le d.d.p. ai capi dei resistori, o le correnti che passano al loro interno o entrambi. Sappiamo che la corrente totale è data da:

   $$i = \frac{V_0}{R_{\mathrm{eq}}} = 5.73\,\mathrm{A}$$

   Quella passante per R_4 vale

   $$i_4 = \frac{V_0}{R_4} = 3\,\mathrm{A}$$

   e quindi, per la condizione di stazionarietà, quella che passa nel ramo superiore (che, sempre per lo stesso principio, passa anche per R_1) vale

   $$i_1 = i - i_4 = 2.72\,\mathrm{A}$$

   Quindi la d.d.p. ai capi di R_1 è:

   $$\Delta V_1 = R_1 i_1 = 2.71\,\mathrm{V}$$

   Quindi la d.d.p. ai capi di R_2 ed R_3 vale:

   $$\Delta V_{\mathrm{eq}}^{(1)} = V_0 - \Delta V_1 = 3.27\,\mathrm{V}$$

   per cui le correnti negli ultimi due resistori valgono:

   $$i_2 = \frac{\Delta V_{\mathrm{eq}}^{(1)}}{R_2} = 1.09\,\mathrm{A} \tag{33}$$

   $$i_3 = \frac{\Delta V_{\mathrm{eq}}^{(1)}}{R_3} = 1.63\,\mathrm{A} \tag{34}$$

Nota Bene: perché $i_2+i_3 \neq i_1$? Perché tagliando i decimali finali stiamo sempre approssimando i valori numerici... Se calcolassimo tutte le quantità senza approssimare ad ogni passaggio e stampassimo *tutte* le cifre decimali vedremmo che le correnti verrebbero identiche. Dai valori delle correnti otteniamo la potenza:

$$\mathcal{P}_1 = R_1 i_1^2 = 7.4\,\mathrm{W} \tag{35}$$

$$\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2 = 3.6\,\mathrm{W} \tag{36}$$

$$\mathcal{P}_3 = R_3 i_3^2 = 8.7\,\mathrm{W} \tag{37}$$

$$\mathcal{P}_4 = R_4 i_4^2 = 18\,\mathrm{W} \tag{38}$$

Esercizio 33

Ispirato dall'esercizio III.13 del Mencuccini-Silvestrini

Testo

Un condensatore piano di dimensioni $a \times b \times h$ è parzialmente riempito (per un tratto $x = a/3$) di una lastra di dielettrico omogeneo e isotropo con $\kappa = 4$ e mantenuto ad una d.d.p. ΔV.

1. Quanto vale la carica q_d che si dispone sulla parte di armatura superiore che si affaccia sul dielettrico?
2. Calcolare q_d se $\Delta V = 113$ V, $a = b = 10$ cm e $h = 2$ mm.

Soluzione

1. Il condensatore può essere visto come due condensatori in parallelo di capacità $C_d = \epsilon_0 \kappa ab/3h$ e $C_v = 2\epsilon_0 ab/3h$. La capacità totale è quindi:
$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{\epsilon_0 ab}{h}\left(\frac{\kappa}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2\epsilon_0 ab}{h}$$
La carica totale sulle armature è data da:
$$q = q_d + q_i = \Delta V C_{\mathrm{eq}} = \Delta V \frac{2\epsilon_0 ab}{h}$$
Poiché la d.d.p. tra i due "condensatori" deve essere la stessa, si deve avere
$$\frac{q_d}{C_d} = \frac{q_v}{C_v}$$
e quindi
$$\frac{q_d}{2} = q_i = q - q_d$$
da cui si ricava
$$q_d = \frac{2}{3} q = \Delta V \frac{4\epsilon_0 ab}{3h}$$
2. Sostituiamo i valori dati nelle relazione trovata al punto precedente:
$$q_d = \frac{4}{3} 113 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.002}\,\mathrm{C} = 0.667 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

Esercizio 34

MVN: esercizio 4.10

Testo

Cinque fogli metallici sferici e concentrici (di spessore trascurabile) sono inizialmente scarichi. Il secondo e il terzo e il quarto e il quinto sono collegati da fili conduttori. Una carica q è depositata sulla superficie più interna. Calcolare

1. le cariche presenti sulle superfici;
2. il campo $E(r)$;
3. l'energia elettrostatica del sistema;

Calcolare le stesse quantità se

4. i conduttori 1 e 2 vengono collegati;
5. i conduttori 3 e 4 vengono collegati;
6. il conduttore 5 viene collegato a terra;

Soluzione

I conduttori collegati possono essere visti come un unico conduttore, quindi il sistema può essere visto come una sfera conduttrice carica al centro di due sfere conduttrici concentriche.

1. La sfera centrale ha carica q. La superficie 2 si carica con $-q$ per induzione completa. Per conservazione della carica la superficie 3 acquista quindi una carica q. Per i conduttori 4 e 5 vale lo stesso discorso, e quindi si caricano rispettivamente con carica $-q$ e q.

2. Il campo è nullo all'interno dei conduttori e nelle zone comprese tra i conduttori collegati (quindi 2-3 e 4-5). Negli altri punti possiamo utilizzare il teorema di Gauss per trovare il campo, che vale sempre
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3. Il sistema può essere visto come composto da due condensatori sferici e da una superficie sferica cava. L'energia di un condensatore è semplicemente $U_e = \frac{q^2}{2C}$, dove la capacità di un condensatore sferico di raggi $R_a > R_b$ è
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_b}{R_a - R_b}$$
L'energia elettrostatica di una sfera conduttrice carica può essere calcolata in due modi equivalenti:
    1. considerandola come un'armatura di un condensatore piano avente l'altra armatura all'infinito. In questo caso possiamo associarle una capacità $C_\infty = 4\pi\epsilon_0 R_b$ che può essere utilizzata per calcolarne l'energia elettrostatica;
    2. utilizzando la relazione che lega il campo all'energia, $U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V E^2 d\tau$ In entrambi i casi otteniamo $U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_5}$, e l'energia totale vale quindi
$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)$$

4. Collegare i due conduttori azzera la loro carica e quindi annulla il campo nell'intercapedine (e quindi l'energia elettrostatica associata al condensatore).

5. Come sopra.
6. Collegare a terra il conduttore più esterno lo fa scaricare, e quindi carica, campo ed energia si annullano.

Esercizio 35

Testo

Una sfera di raggio di raggio $2R$ è carica uniformemente con densità di carica ρ dal centro fino ad R e con densità di carica $-\rho$ da R a $2R$.

1. Calcolare il campo elettrico per $r < R$, $R < r < 2R$ ed $r > 2R$.
2. La d.d.p. tra il centro e la superficie esterna ($r = 2R$).
3. Se l'origine del sistema di riferimento coincide con il centro della sfera, una porzione sferica di raggio $R/2$ posta nel punto $(\frac{3}{2}R, 0, 0)$ viene rimossa dal sistema. Scrivere l'espressione del campo per un generico punto $(x, 0, 0)$, con $x > 2R$.

Soluzione

1. Applichiamo il teorema di Gauss nelle tre regioni indicate nel testo.
   - Per $r < R$, il campo è quello che si trova all'interno di una sfera carica uniformemente, quindi
   $$E^{(1)}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$
   - Per $R < r < 2R$, la quantità di carica contenuta in una sfera di raggio r vale
   $$Q(r) = \frac{4}{3}\pi R^3\rho - 4\pi\rho\int_R^r r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi R^3\rho - \frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - R^3\right) = \frac{8}{3}\pi R^3\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi\rho\left(2R^3 - r^3\right)$$
   e quindi il campo vale:
   $$E^{(2)}(r) = \frac{\rho\left(2R^3 - r^3\right)}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{2R^3}{r^2} - r\right)$$
   - Per $r > 2R$ il campo è quello generato da una carica puntiforme avente carica
   $$q = Q(2R) = \frac{4}{3}\pi\rho\left(2R^3 - (2R)^3\right) = -8\pi\rho R^3$$
   e quindi vale:
   $$E^{(3)} = -\frac{2\rho R^3}{\epsilon_0 r^2}$$
2. Uitlizziamo la definizione di d.d.p.:
$$\Delta V = \int_0^{3/2R} E(r)dr = \int_0^R E^{(1)}(r)dr + \int_R^{3/2R} E^{(2)}(r)dr = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\int_R^{2R}\frac{2R^3}{r^2}dr - \int_R^{2R} r dr\right) = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = 0$$

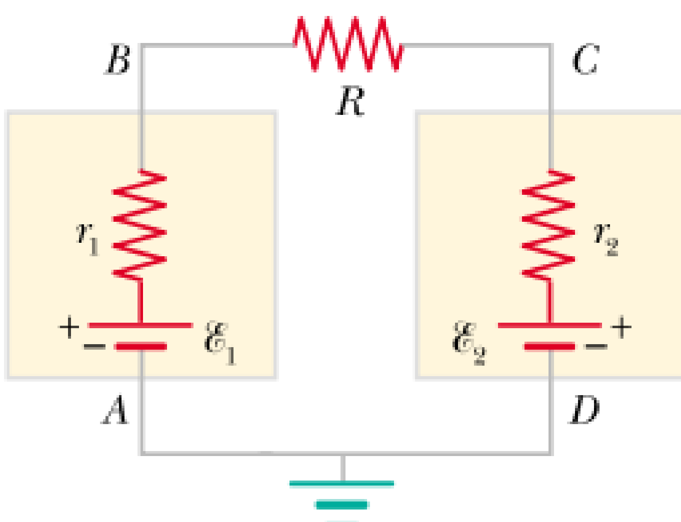
3. Con il sistema di coordinate scelto, prima di rimuovere la porzione di sfera, per $x > 2R$ il campo vale (vedi punti precedenti)
$$E^{(3)}(r) = -\frac{2\rho R^3}{\epsilon_0 r^2}$$
Dopo che la sfera viene rimossa, il campo totale si può vedere come una sovrapposizione tra il campo iniziale e quello generato da una sfera caricata con densità opposta a quella rimossa (e avente stessa posizione e dimensioni). In questo caso la quantità di carica (cambiata di segno) contenuta nella sfera fittizia è
$$q_f = \frac{\pi R^3 \rho}{6}$$
e il campo che genera al suo esterno vale
$$\vec{E}_f(r_f) = \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 r_f^2}\hat{r}_f$$
dove $\vec{r}_f$ indica la distanza tra il centro della sfera ed un generico punto nello spazio. Se consideriamo solo l'asse x, $r_f = x_f = x - \frac{3}{2}R$. Sommando i due contributi troviamo che il campo lungo l'asse x è parallelo ad $\hat{x}$ e (per $x > 2R$) vale
$$E(x,0,0) = -\frac{2\rho R^3}{\epsilon_0 x^2} + \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 x_f^2} = -\frac{2\rho R^3}{\epsilon_0 x^2} + \frac{\rho R^3}{24\epsilon_0 (x-1.5R)^2}$$

Esercizio 36

MNV: esempio 5.9

Testo

Calcolare la corrente che scorre nel seguente circuito, composto da un'unica maglia ($\mathcal{E}_1 = 50$ V, $\mathcal{E}_2 = 100$ V, $R = 50\,\Omega$, $r_1 = 20\,\Omega$, $r_2 = 30\,\Omega$):



Soluzione

Scegliamo (arbitrariamente) il verso orario. La seconda legge di Kirchhoff diventa:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (r_1 + r_2 + R)i$$

e quindi la corrente vale:

$$i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = -0.5\,\mathrm{A}.$$

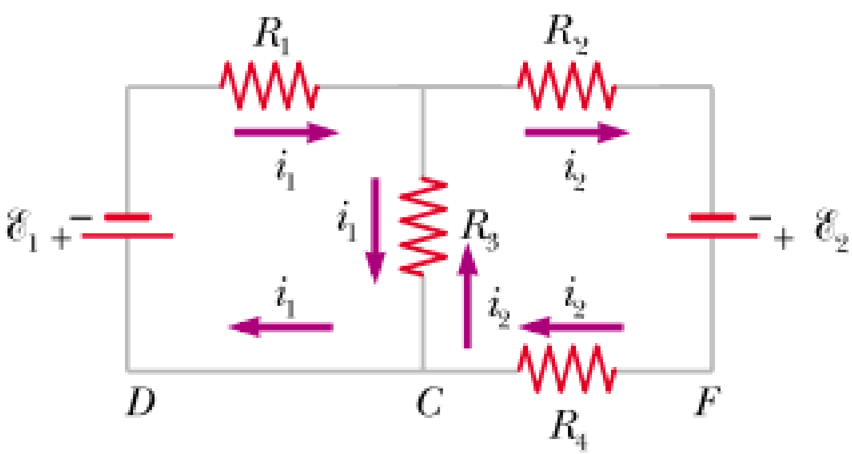
Il segno negativo della corrente implica che il verso in cui scorre è opposto a quello che abbiamo scelto (quindi antiorario).

Esercizio 37

MNV: esempio 5.10

Testo

Calcolare le correnti che scorrono nel seguente circuito, composto da due maglie($\mathcal{E}_1 = 18$ V, $\mathcal{E}_2 = 12$ V, $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$):



Soluzione

Scegliamo anche in questo caso il verso orario (per entrambe le maglie). Otteniamo le seguenti equazioni:

$$-\mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) \tag{39}$$
$$\mathcal{E}_2 = (R_2 + R_4)i_2 + R_3 i_3 = (R_2 + R_4)i_2 + R_3(i_2 - i_1) \tag{40}$$

Se sostituiamo i valori numerici troviamo:

$$-18 = 12i_1 + 6(i_1 - i_2) = 18i_1 - 6i_2 \tag{41}$$
$$12 = 6i_2 + 6(i_2 - i_1) = -6i_1 + 12i_2 \tag{42}$$

da cui ricaviamo:

$$i_1 = -0.8\,\mathrm{A} \tag{43}$$
$$i_2 = 0.6\,\mathrm{A} \tag{44}$$

per cui i_1 scorre in senso antiorario. In R_3 scorre la corrente $i_3 = i_1 - i_2 = -1.4$ A se consideriamo il verso della prima maglia, mentre vale $i_3 = i_2 - i_1 = 1.4$ A se consideriamo quello della seconda. In entrambi i casi otteniamo una corrente che scorre dal basso verso l'alto.

Esercizio 38

Testo

Un condensatore piano di dimensioni $a \times b \times h_i$ è riempito completamente con un liquido incomprimibile dielettrico di costante relativa κ e mantenuto da un generatore ad una d.d.p. ΔV costante. Se la distanza tra le due armature diventa $1.5h_i$,

1. come varia la capacità del condensatore?
2. se prima di fare questa operazione di allontanamento il generatore venisse spento, cosa succederebbe?
3. se l'operazione precedente venisse ripetuta per un dielettrico solido, quale sarebbe l'espressione della d.d.p.?

Soluzione

1. La capacità iniziale del condensatore è:

$$C_i = \frac{\epsilon_0 ab\kappa}{h_i}$$

Poiché il liquido è incomprimibile, il volume che occupa rimane costante. Il volume iniziale è $V_i = abh_i$, mentre quello finale vale $V_f = 1.5axh_i$, dove x è l'altezza che raggiunge dopo la variazione di distanza. Ponendo $V_i = V_f$ si ottiene $x = \frac{2}{3}b$. La capacità finale sarà quindi:

$$C_f = \frac{4}{9}\epsilon_0 ab\kappa + \frac{2}{9}\epsilon_0 ab = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{4}{9}\kappa + \frac{2}{9}\right)$$

La differenza di capacità vale quindi:

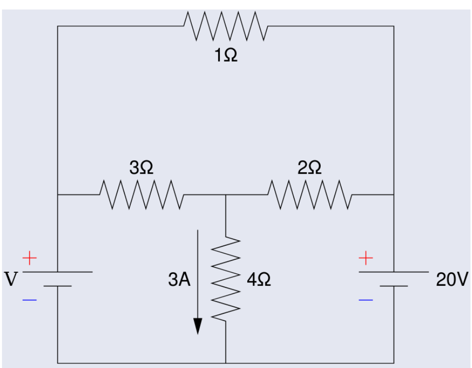
$$\Delta C = C_f - C_i = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{4}{9}\kappa + \frac{2}{9} - \kappa\right) = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{2}{9} - \frac{5}{9}\kappa\right)$$

2. Se il generatore venisse spento *prima* di allontanare le armature, la carica sulle armature resterebbe la stessa. Inizialmente abbiamo
$$q_i = \Delta V C_i$$
D'altro canto alla fine avremmo
$$q_f = \Delta V_f C_f = q_i = \Delta V C_i$$
e quindi la nuova d.d.p. tra le armature sarebbe:
$$\Delta V_f = \Delta V \frac{C_i}{C_f} = \Delta V \frac{9\kappa}{4\kappa + 2}$$
3. Definito $\sigma = q_i/ab$, il campo nel vuoto è $E = \sigma/\epsilon_0$, mentre nel dielettrico è $E = \sigma/\kappa\epsilon_0$. Il potenziale tra le armature vale quindi:
$$\Delta V = \frac{\sigma\left(\frac{3}{2}h_i - h_i\right)}{\epsilon_0} + \frac{\sigma h_i}{\kappa\epsilon_0} = \frac{q_i}{ab\epsilon_0}\left(\frac{h_i}{2} + \frac{h_i}{\kappa}\right)$$

Esercizio 40

Testo

Dato il circuito in figura ($R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $i_4 = 3$ A, $\mathcal{E}_2 = 20$ V)



1. Calcolare la corrente che scorre nei resistori
2. Calcolare la forza elettromotrice $\mathcal{E}_1$ del generatore di sinistra
3. Cosa cambierebbe se al posto di R_1 ci fosse un condensatore di capacità C?

Soluzione

1. Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia in basso a destra, scegliendo un verso antiorario:
$$\mathcal{E}_1 = R_2 i_2 + R_4 i_4$$
da cui possiamo ricavarci la corrente che passa attraverso R_2:
$$i_2 = \frac{R_4 i_4 - \mathcal{E}_1}{R_2} = 4\,\text{A}.$$

Applichiamo la prima legge di Kirchhoff per trovare la corrente che scorre attraverso R_3, cioè imponiamo $ i_4 - i_2 + i_3 = 0$, dove i_2 ha il segno meno perché *entra* nel nodo, mentre i_4 ha il segno + perché ne esce. Risolvendo per i_3:

$$i_3 = i_2 - i_4 = 1\,\mathrm{A}.$$

Il fatto che i_3 sia positiva ci dice che è uscente. Per trovare la corrente che scorre nella maglia in alto applichiamo la legge di Kirchhoff in senso orario:

$$0 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3$$

da cui si trova

$$i_1 = -\frac{i_2 R_2 + i_3 R_3}{R_1} = -11\,\mathrm{A}$$

e quindi scorre in senso antiorario.

2. Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia in basso a sinistra (in senso orario):

$$\mathcal{E}_1 = -R_3 i_3 + R_4 i_4 = 9\,\mathrm{V}$$

3. In un circuito in corrente continua un condensatore, una volta carico, si comporta come un interruttore aperto. Usando la seconda legge di Kirchhoff applicata a quella maglia possiamo trovare qual è la d.d.p. ai suoi capi:

$$0 = R_2 i_2 + R_3 i_3 + \Delta V_C$$

e quindi

$$\Delta V_C = -(R_2 i_2 + R_3 i_3) = -11\,\mathrm{V}.$$

Esercizio 41

Testo

Un cilindro conduttore di raggio R_1 è circondato da un guscio cilindrico conduttore di raggi R_2 ed R_3. Sui due conduttori vengono depositate le cariche q_1 e q_2. L'altezza h dei cilindri è tale per cui nel sistema si ha, con buona approssimazione, induzione completa.

1. Calcolare le quantità di carica che si trovano sulle tre superfici conduttive.
2. Una sfera conduttrice di raggio R_s posta a grande distanza viene collegata al sistema. Calcolare le nuove distribuzioni di carica.
3. Calcolare la d.d.p. rispetto all'infinito ($V = 0$) del sistema di conduttori se invece di cilindro e guscio cilindrico si fosse trattato di sfera e guscio sferico.

Soluzione

1. Il cilindro interno ha carica q_1, che induce una carica $-q_1$ sulla faccia interna del guscio. Per conservazione della carica, la superficie più esterna del guscio sarà quindi caricata con $q_i = q_1 + q_2$.

2. Quando colleghiamo due conduttori, le cariche libere che eventualmente si trovano sulle loro superfici si spostano dall'uno all'altro in modo tale da eguagliare il loro potenziale. In questo caso troviamo:
$$\frac{q_f}{2\pi\epsilon_0 h}\log(R_3) = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0 R_s}$$
dove q_f e q_s sono le cariche finali del guscio e della sfera. Dalla relazione precedente si trova che
$$\frac{q_f}{q_s} = \frac{h}{2R_s\log(R_3)}.$$
D'altronde, per la conservazione della carica si deve avere $q_f + q_s = q_i$, e quindi
$$\frac{q - q_s}{q_s} = \frac{h}{2R_s\log(R_3)}.$$
da cui si trova
$$q_s = \frac{q}{1 + \frac{h}{2R_s\log(R_3)}}$$
e da cui si può ricavare la carica sulla superficie esterna del guscio, $q_f = q - q_s$. All'interno del guscio, ovviamente, nulla varia in forza del fenomeno di schermo elettrostatico.

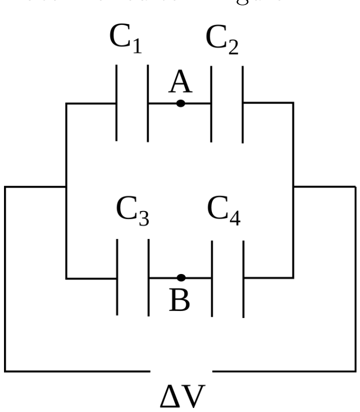
3. Nel caso di due sfere, la carica è proporzionale ai raggi, quindi:
$$\frac{R_3}{R_s} = \frac{q_f}{q_s} = \frac{q_i - q_s}{q_s}$$
dove abbiamo di nuovo consideriamo la conservazione della carica. La carica sulla sfera vale quindi
$$q_s = \frac{q_i R_s}{R_s + R_3}$$
e quindi il potenziale vale
$$V(R_s) - V(\infty) = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0 R_s} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_s + R_3}$$

Esercizio 42

Esercizio II.6 del Mencuccini-Silvestrini

Testo

Dato il circuito in figura



calcolare quale relazione debba sussistere tra le quattro capacità per far sì che si annulli la differenza di potenziale $\Delta V_{AB} = V_A - V_B$.

Soluzione

La differenza di potenziale ai capi dei due è la stessa, sono cioè collegati in parallelo. Le capacità equivalenti dei due rami valgono:

$$C_u = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{45}$$

$$C_d = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \tag{46}$$

e quindi le cariche sui rami valgono:

$$q_u = \Delta V \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{47}$$

$$q_d = \Delta V \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \tag{48}$$

Per il ramo superiore vale $\Delta V = \frac{q_u}{C_u} = \frac{q_u}{C_1} + \frac{q_u}{C_2}$. I due termini indicano la differenza di potenziale tra uno dei due poli ed il punto mediano A, e tra questo e il secondo polo. La d.d.p. tra il primo polo e D vale quindi

$$\Delta V_A = \Delta V - \frac{q_u}{C_2}$$

Una relazione simile si può scrivere per il ramo inferiore

$$\Delta V_B = \Delta V - \frac{q_d}{C_4}$$

Uguagliando queste due quantità troviamo

$$\frac{q_u}{C_2} = \frac{q_d}{C_4}$$

da cui si ricava

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_3}{C_3 + C_4}$$

e quindi

$$C_1 C_4 = C_2 C_3$$

Esercizio 43

Esercizio II.18 del Mencuccini-Silvestrini

Testo

Su una sfera conduttrice di raggio a è posta una carica q. Concentrico a questa sfera si trova un guscio sferico di raggio medio b. Calcolare la carica q_g che bisogna fornire al guscio per far sì che la sfera interna abbia d.d.p. rispetto all'infinito $\Delta V = 0$.

Soluzione

La d.d.p. tra la sfera interna e l'infinito si scrive come somma di due contributi, uno dovuto alla sua carica, uno dovuto alla carica del guscio:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q_g + q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b}$$

che imponiamo a zero, ottenendo

$$\frac{q}{a} + \frac{q_g}{b} = 0$$

e quindi

$$q_s = -\frac{qb}{a}$$

Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ gode delle seguenti proprietà:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin(\theta)$, dove θ è l'angolo tra i due vettori;
  - $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli, cioè se vale $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
  - Il modulo del prodotto vettoriale è massimo quando $\theta = \pi/2$, cioè quando i vettori sono ortogonali;
- Se $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, allora $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, cioè il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore che è ortogonale ad entrambi

Un sistema di riferimento cartesiano può essere

- *destrogiro*, per il quale vale $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$;
- *levogiro*, per il quale vale $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$;

Noi avremo sempre a che fare con sistemi di riferimento destrogiri. In questo caso valgono le seguenti relazioni

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \tag{49}$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \tag{50}$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \tag{51}$$

da cui è possibile ricavare le altre utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale. Un'utile regola mnemonica per ricordare il segno dei risultati del prodotto vettoriale di questi versori è la seguente:

Leggendo da sinistra verso destra (e guardando il primo versore se $\hat{x}$ è l'ultimo versore scritto), se il versore che segue $\hat{x}$ è $\hat{y}$, allora il versore a destra dell'uguale ha il segno $+$, altrimenti il segno $-$.

Esercizio 44

Testo

In una regione di spazio è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ G. Data una particella di carica q e velocità generica $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$,

1. Calcolare per quali condizioni la forza dovuta al campo magnetico è diretta lungo $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

Poniamo $\vec{B} = (3, 15, -1)$ G.

2. Applicare le relazioni trovate precedentemente. Se possibile, fare un esempio di valori di v_x, v_y e v_z per cui almeno una di queste relazioni si verifica.
3. Calcolare per quali condizioni la traiettoria della particella carica è limitata ad un piano;

Soluzione

1. La forza che agisce sulla carica è quella di Lorentz, quindi

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_x\hat{z}) \tag{52}$$
$$= q\left[(v_yB_z - v_zB_y)\hat{x} + (v_zB_x - v_xB_z)\hat{y} + (v_xB_y - v_yB_x)\hat{z}\right] \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

Dire che la forza è diretta lungo una certa direzione significa imporre che la sua componente lungo quella direzione sia l'unica diversa da 0. Imporre queste condizioni significa risolvere un sistema composto da tre equazioni (di cui una è una diseguaglianza). Nel caso di $\hat{x}$, ad esempio, si ha

$$q(v_yB_z - v_zB_y) > 0 \tag{55}$$
$$v_zB_x - v_xB_z) = 0 \tag{56}$$
$$v_xB_y - v_yB_x = 0 \tag{57}$$

Nota Bene: nelle due uguaglianze q si può semplificare (perché sempre diversa da 0), mentre nella diseguaglianza dobbiamo tenerla dato che, in principio, può essere sia positiva che negativa.

2. Il campo magnetico si può riscrivere come $\vec{B} = 3\hat{x} + 15\hat{y} - \hat{z}$. La forza che agisce sulla carica diventa quindi

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(15v_x\hat{z} + v_x\hat{y} - 3v_y\hat{z} - v_y\hat{x} + 3v_z\hat{y} - 15v_z\hat{x}) && (58) \\ &= q(-v_y - 15v_z, v_x + 3v_z, 15v_x - 3v_y)) && (59) \end{aligned}$$

Le relazioni scritte sopra per il caso generico sono ora più specifiche e si possono utilizzare per trovare i valori delle componenti della velocità. Nel caso di $\hat{x}$, ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} -q(v_y + 15v_z) &> 0 && (60) \\ v_x + 3v_z &= 0 && (61) \\ 15v_x - 3v_y &= 0 && (62) \end{aligned}$$

Provando a risolvere questo o uno degli altri sistemi, si vede che non hanno soluzione (o meglio, hanno come unica soluzione il vettore $\vec{v} = (0, 0, 0)$). Questo perché il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore ortogonale ad *ambo gli operandi*. Poiché $\vec{B}$ non è ortogonale a nessuno dei tre assi, questi non possono essere il risultato di un'operazione di prodotto vettoriale in cui sia coinvolto un campo con queste componenti.

3. La condizione si verifica se la velocità iniziale è ortogonale al campo. Infatti, la forza di Lorentz è sempre perpendicolare al campo magnetico, e quindi non potrà mai far deviare nella direzione del campo una traiettoria generata da una velocità che non ha componenti in quella direzione. Per trovare la relazione richiesta dal problema dobbiamo quindi imporre $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$, cioè:

$$3v_x + 15v_y - v_z = 0.$$

Questa equazione ha tre incognite, e quindi chiaramente infinite soluzioni, perché infiniti sono i piani ortogonali ad un vettore.

Esercizio 45

Testo

In una spira rettangolare di massa $m = 4 \times 10^{-2}$ g e lati $a = 3$ cm e $b = 2$ cm scorre una corrente $|i| = 1$ A. La parte inferiore della spira è immersa in un campo magnetico diretto lungo $\hat{z}$ che fa sì che la spira resti sospesa in aria con i lati più corti paralleli al terreno. Calcolare

1. il verso della corrente;
2. il modulo di $\vec{B}$.

Soluzione

1. Sulla spira sicuramente agisce la forza di gravità, $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$. Poiché solo la parte inferiore della spira è immersa in un campo magnetico, vi sarà anche una forza magnetica dovuta al fatto che

solo uno dei due lati paralleli al terreno avverte il campo. Se ipotizziamo che, in questo lato, la corrente scorra lungo $\hat{x}$, la forza varrà:

$$\vec{F} = i\vec{b} \times \vec{B} = ibB\hat{x} \times \hat{z} = -ibB\hat{y}.$$

Se la forza fosse effettivamente diretta lungo $-\hat{y}$, sarebbe concorde a quella di gravità e quindi la spira non potrebbe rimanere in equilibrio. È chiaro quindi che la corrente deve scorrere nella direzione contraria (cioè in senso orario se disegnamo la spira in modo che l'angolo in basso a sinistra sia il punto più vicino all'origine degli assi).

2. Il modulo del campo si trova eguagliando le due forze,

$$mg = ibB,$$

e quindi

$$B = \frac{mg}{ib} = 0.0196\,\mathrm{T} = 196\,\mathrm{G}$$

Esercizio 46

Testo

In una spira circolare di raggio R scorre una corrente i. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{x}$ e le condizioni del sistema sono tali per cui si trova ad oscillare attorno ad $\hat{y}$. Il momento di inerzia lungo quest'asse vale I.

1. Tenendo presente che la velocità angolare massima raggiunta è ω_0, calcolare l'angolo tra la normale della spira e il campo magnetico quando $\omega = \omega_0/3$.
2. Una molla angolare di costante k viene collegata alla spira in maniera tale da contrapporsi al momento magnetico mentre questa è nel punto per cui vale $\omega = 0$. Calcolare il valore che k deve avere per far sì che la spira resti ferma per angoli generici e nell'approssimazione di piccoli angoli.

Soluzione

1. L'energia totale (che è conservata) ha due contributi: l'energia cinetica rotazionale e quella magnetica potenziale. La prima vale

$$U_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

mentre la seconda vale

$$U_e = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos(\theta)$$

dove $\vec{m} = i\Sigma\hat{n}$ è il momento di dipolo magnetico della spira. In questo caso $\Sigma = \pi R^2$, quindi l'energia totale vale

$$U = \frac{1}{2}I\omega^2 - i\Sigma B\cos(\theta).$$

Quando $\theta = 0$ l'energia potenziale è minima e quindi quella cinetica è massima. In questo caso l'energia totale vale

$$U_0 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - i\Sigma B$$

e il suo valore può essere calcolato dai dati del problema. Quando $\omega = \omega_0/3$, si ha:

$$U_0 = \frac{1}{18}I\omega_0^2 - i\Sigma B\cos(\theta)$$

da cui si può ricavare il valore di $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{i\Sigma B}\left(\frac{1}{18}I\omega_0^2 - U_0\right).$$

2. L'angolo per cui $\omega = 0$ si trova imponendo

$$U_0 = -i\Sigma B\cos(\theta_{\text{max}})$$

da cui si ottiene

$$\theta_{\text{max}} = \arccos\left(-\frac{U_0}{i\Sigma B}\right)$$

Il momento meccanico di una molla angolare vale, in generale $M = k\theta$. La condizione di equilibrio si impone eguagliando i due momenti meccanici,

$$k\theta_{\text{max}} = i\Sigma B\sin(\theta_{\text{max}}),$$

per cui il valore della costante elastica che assicura che la spira resti ferma è

$$k = \frac{i\Sigma B\sin(\theta_{\text{max}})}{\theta_{\text{max}}}$$

che, nel limite di piccoli angoli (per cui $\sin(\theta) \to \theta$), vale

$$k = i\Sigma B$$

Esercizio 47

Testo

Un piccolo fascio di ioni di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e velocità iniziale nulla viene accelerato da una d.d.p. $\Delta V = 23$ V e penetra ortogonalmente in una camera a vuoto di uno spettrometro di massa. All'interno vi è un campo magnetico uniforme. Si nota che nello spettrometro il fascio si divide in due componenti: una colpisce la parete da cui sono entrati gli ioni ad una distanza $d_1 = 280$ mm, l'altra ad una distanza $d_2 = 392$ mm. Il primo fascio è composto da ioni sodio aventi $m = 3.8 \times 10^{-26}$ Kg. Calcolare la massa e la velocità del secondo tipo di ioni.

Soluzione

La velocità degli ioni sodio si calcola dall'energia cinetica, che vale

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = q\Delta V$$

da cui si ottiene

$$v_i = \frac{2q\Delta V}{m} = 1.4 \times 10^4\,\text{m/s}$$

I raggi di curvatura delle due traiettorie sono

$$R_1 = \frac{1}{2} d_1 = 140\,\mathrm{mm} \tag{63}$$
$$R_2 = \frac{1}{2} d_2 = 196\,\mathrm{mm} \tag{64}$$

e, per la legge del moto uniformemente accelerato, vale

$$qB = \frac{m_1 v_1}{R_1} = \frac{m_1 v_2}{R_2}$$

d'altro canto, l'energia cinetica iniziale è la stessa per entrambi i fasci, e quindi

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} = m_2 v_2^2.$$

Abbiamo due equazioni in due incognite. Risolvendo il sistema otteniamo

$$m_2 = m_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = 7.44 \times 10^{-26} \tag{65}$$
$$v_2 = v_1 \frac{R_1}{R_2} = 10^4\,\mathrm{m/s} \tag{66}$$

Esercizio 48

Testo

Un sistema è formato da due conduttori sferici concentrici. Il conduttore interno è pieno e ha raggio $a = 20$ cm, quello esterno è cavo e ha raggio interno $b = 30$ cm ed esterno $c = 35$ cm. Lo spazio compreso tra i due conduttori è riempito da un dielettrico la cui costante dipende dalla distanza r dal centro secondo la relazione $\kappa(r) = r/a$. Il conduttore interno ha carica $q = 10$ nC, mentre quello esterno è mantenuto ad una d.d.p. $\Delta V = 500$ V rispetto all'infinito . Determinare:

1. il valore della carica sulle tre superfici conduttrici;
2. le cariche superficiali di polarizzazione presenti sulle superfici del dielettrico;
3. Il conduttore interno viene ora collegato con quello esterno, mantenendo inalterate le altre condizioni. Determinare i nuovi valori delle cariche sulle tre superfici conduttrici.

Soluzione

1. La carica sulla superficie più interna è $q_a = q$, e quindi $q_b = -q$ per induzione completa. La superficie più esterna ha una carica determinata dalla differenza di potenziale a cui è posta:

   $$\Delta V = \frac{q_c}{4\pi\epsilon_0 c}$$

   quindi

   $$q_c = 4\pi\epsilon_0 c \Delta V = 19.5\,\mathrm{nC}.$$

   Il fatto che il conduttore sia mantenuto ad una certa d.d.p., quindi, fa sì che una quantità di carica $q_c - q = 9.5$ nC si trasferisca sulla sua superficie più esterna.

2. All'interno della cavità il campo vale

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\kappa(r)r^2}$$

e quindi il vettore polarizzazione ha modulo

$$P(r) = \epsilon_0(\kappa(r) - 1)E(r) = \frac{q(r-a)}{4\pi r^3}.$$

Possiamo ora calcolare le densità di carica di polarizzazione usando la relazione $\sigma_p = \vec{P}(r) \cdot \hat{n}$:

$$\sigma_p(a) = 0 \tag{67}$$

$$\sigma_p(b) = P(b) = 2.95\,\mathrm{nC/m^2} \tag{68}$$

3. Se i due conduttori vengono collegati, le cariche sulle due superfici interne si cancellano e quindi si avrà $q(a) = q(b) = 0$. D'altro canto, il conduttore più esterno è ancora posto ad una d.d.p. rispetto all'infinito, e quindi la sua carica non varia, risultando ancora $q_c = 19.5$ nC.

Esercizio 50

Testo

Una particella di carica q entra dal lato delle x negative e con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ nel centro di una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$. La regione si estende indefinitamente lungo $\hat{z}$ mentre ha dimensioni a sia lungo $\hat{x}$ che lungo $\hat{y}$.

1. Calcolare qual è l'angolo θ rispetto all'asse x con cui la particella esce dalla regione col campo se $B = \frac{mv}{10qa}$.
2. Calcolare per quali valori di B la particella esce dal lato da cui è entrata,
3. dal lato alla sua sinistra,
4. dal lato opposto a quello da cui è entrata.
5. Discutere cosa cambierebbe se la particella avesse una velocità iniziale $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$

Soluzione

1. Per quel valore di B il raggio della traiettoria è

$$r = \frac{mv}{qB} = 10a.$$

Notiamo che la domanda è equivalente a chiedersi qual è l'angolo θ sotteso dall'arco di circonferenza compiuto dalla particella quando questa si è mossa di una distanza a lungo $\hat{x}$. Questo vuol dire che si ha

$$a = r\sin(\theta)$$

e quindi

$$\sin(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{1}{10}$$

e quindi

$$\theta = \arcsin(0.1) \approx 0.1$$

2. Per avere la condizione richiesta si deve avere $2r = 2\frac{mv}{qB} < a/2$, quindi
$$B > \frac{4mv}{qa}.$$
3. Perché esca dal lato a sinistra, il campo deve essere chiaramente più debole di quello che la farebbe uscire dal lato da cui entrata. D'altro canto, deve essere più forte di quello che la farebbe uscire dal lato opposto. Si ha quindi
$$B_o < B < \frac{2mv}{qa}$$
B_o si trova calcolando il caso limite; quello, cioè, per cui la particella uscirebbe dallo spigolo del quadrato. Questo si trova imponendo che il punto di entrata e lo spigolo si trovino alla stessa distanza dal centro della circonferenza che identifica la traiettoria. Consideriamo il punto di entrata come l'origine degli assi. È chiaro quindi che, in questo sistema di riferimento, il centro della circonferenza deve avere $x_c = 0$. Vale quindi $r = y_c$. D'altro canto, per lo spigolo vale
$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} - y_c\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + y_c^2 - ay_c}.$$
Elevando entrambi i membri al quadrato e sostituendo $r = y_c$ si trova
$$b^2 + \frac{a^2}{4} - ay_c = 0$$
da cui si ricava
$$y_c = \frac{5}{4}a = r = \frac{mv}{qB_0}$$
e quindi la condizione richiesta diventa
$$\frac{4}{5}\frac{mv}{qa} < B < \frac{2mv}{qa}$$
4. Poiché per $B = 0$ il moto risulta inalterato, la condizione richiesta è
$$0 < B < \frac{4}{5}\frac{mv}{qa}$$
5. Non cambia nulla, perché avere una velocità con componente lungo il campo dà luogo ad un moto uniforme elicoidale che non modifica affatto il moto lungo il piano xy.

Esercizio 50

Testo

Una particella di carica q entra dal lato delle x negative e con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ nel centro di una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$. La regione si estende indefinitamente lungo $\hat{z}$ mentre ha dimensioni a sia lungo $\hat{x}$ che lungo $\hat{y}$.

1. Calcolare qual è l'angolo θ rispetto all'asse x con cui la particella esce dalla regione col campo se $B = \frac{mv}{10qa}$.
2. Calcolare per quali valori di B la particella esce dal lato da cui è entrata,
3. dal lato alla sua sinistra,
4. dal lato opposto a quello da cui è entrata.
5. Discutere cosa cambierebbe se la particella avesse una velocità iniziale $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$

Soluzione

1. Per quel valore di B il raggio della traiettoria è
$$r = \frac{mv}{qB} = 10a.$$
Notiamo che la domanda è equivalente a chiedersi qual è l'angolo θ sotteso dall'arco di circonferenza compiuto dalla particella quando questa si è mossa di una distanza a lungo $\hat{x}$. Questo vuol dire che si ha
$$a = r\sin(\theta)$$
e quindi
$$\sin(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{1}{10}$$
e quindi
$$\theta = \arcsin(0.1) \approx 0.1$$
2. Per avere la condizione richiesta si deve avere $2r = 2\frac{mv}{qB} < a/2$, quindi
$$B > \frac{4mv}{qa}.$$
3. Perché esca dal lato a sinistra, il campo deve essere chiaramente più debole di quello che la farebbe uscire dal lato da cui entrata. D'altro canto, deve essere più forte di quello che la farebbe uscire dal lato opposto. Si ha quindi
$$B_o < B < \frac{2mv}{qa}$$
B_o si trova calcolando il caso limite; quello, cioè, per cui la particella uscirebbe dallo spigolo del quadrato. Questo si trova imponendo che il punto di entrata e lo spigolo si trovino alla stessa distanza dal centro della circonferenza che identifica la traiettoria. Consideriamo il punto di entrata come l'origine degli assi. È chiaro quindi che, in questo sistema di riferimento, il centro della circonferenza deve avere $x_c = 0$. Vale quindi $r = y_c$. D'altro canto, per lo spigolo vale
$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} - y_c\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + y_c^2 - ay_c}.$$
Elevando entrambi i membri al quadrato e sostituendo $r = y_c$ si trova
$$b^2 + \frac{a^2}{4} - ay_c = 0$$
da cui si ricava
$$y_c = \frac{5}{4}a = r = \frac{mv}{qB_0}$$
e quindi la condizione richiesta diventa
$$\frac{4}{5}\frac{mv}{qa} < B < \frac{4mv}{qa}$$
4. Poiché per $B = 0$ il moto risulta inalterato, la condizione richiesta è
$$0 < B < \frac{4}{5}\frac{mv}{qa}$$
5. Non cambia nulla, perché avere una velocità con componente lungo il campo dà luogo ad un moto uniforme elicoidale che non modifica affatto il moto lungo il piano xy.

Esercizio 51

Ispirato all'esercizio 7.1 del MNV

Testo

Due fili conduttori molto lunghi orientati lungo l'asse z sono posti a distanza $2a = 4$ cm lungo x. Nei fili scorre la stessa corrente $i = 50$ A ma in verso opposto. Prendendo come origine degli assi il punto equidistante tra i due fili,

1. Calcolare il campo magnetico lungo $\hat{x}$
2. Calcolare il campo magnetico lungo $\hat{y}$
3. Calcolare il valore per $y = a$.
4. Determinare come cambierebbero queste risposte se le due correnti scorressero nello stesso verso.

Soluzione

1. Consideriamo la corrente che scorre nel filo alla sinistra dell'origine uscente e l'altra entrante. I due fili genereranno, quindi, i seguenti campi magnetici lungo l'asse x:

$$\vec{B}_s(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{y}}{x + a} \tag{69}$$

$$\vec{B}_d(x, 0, 0) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{y}}{x - a} \tag{70}$$

   Nota Bene: fate molta attenzione al segno del campo! Questo cambia a seconda che ci si trovi alla sinistra o alla destra del filo. Per il principio di sovrapposizione, il campo totale è semplicemente la somma dei due, quindi:

$$\vec{B}(x, 0, , 0) = \frac{\mu_0 i \hat{y}}{2\pi} \left(\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x - a} \right)$$

2. Poiché i campi hanno verso opposto, lungo l'asse y le componenti x sono uguali e contrarie e quindi si cancellano. Il campo sarà quindi dato da $\vec{B} = 2B_y\hat{y}$. Per trovare il valore di B_y disegniamo $\vec{B}$ e vediamo che $B_y = B\sin(\theta)$, dove

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

   e quindi il campo vale

$$\vec{B}(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2} \hat{y}$$

3. Sostituendo i valori noti nella relazione appena calcolata si trova

$$B(0, a, 0) = 5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} = 5\,\mathrm{G}$$

4. Nel caso in cui le correnti avessero lo stesso verso, anche i due campi sarebbero orientati nella stessa maniera. Prendiamo entrambe le correnti uscenti. Lungo l'asse x si avrebbe quindi

$$\vec{B}(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i \hat{y}}{2\pi} \left(\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x - a} \right),$$

mentre lungo l'asse y la componente B_y avrebbe due contributi uguali e contrari, per cui si avrebbe

$$B_y(0, y, 0) = 0.$$

D'altro canto, le componenti x dei due campi in questo caso si sommerebbero, per cui si avrebbe $\vec{B} = 2B_x\hat{x}$. Le componenti x si trovano con una costruzione analoga a quella fatta prima, per cui varrebbe $B_x = B\cos(\theta)$, dove

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

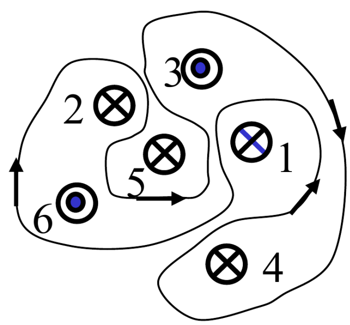
e quindi

$$\vec{B}(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2}\hat{x}$$

Esercizio 52

Testo

Sei fili conduttori sono tutti perpendicolari allo stesso piano e attraversati da correnti i uguali in modulo ma diverse in verso, come indicato in figura.



Calcolare la circuitazione del campo $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ lungo la linea chiusa percorsa nella direzione indicata dalle frecce.

Soluzione

Applichiamo la legge di Ampère. Notiamo subito che i fili 1 e 5 non sono concatenati al percorso e quindi danno un contributo nullo all'integrale. Per valutare i restanti dobbiamo applicare la regola della mano destra (o della vite) ai versi delle correnti per vedere se i loro contributi sono positivi o negativi. In tutti i casi indicati in figura il verso della linea chiusa è orario, e quindi correnti entranti danno contributo positivo e correnti uscenti danno contributo negativo. Si ha quindi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(i_2 + i_4 - i_3 - i_6) = 0$$

Esercizio 53

Testo

Una particella di carica $q = 50$ mC e massa $m = 20$ g entra al tempo $t = 0$ in una regione molto grande dove è presente un campo magnetico di intensità $B = 0.25$ T ortogonale alla sua velocità iniziale, di modulo $v = 8$ m/s.

1. Calcolare la distanza a cui la particella riesce dalla regione col campo magnetico.
2. Calcolare il tempo che la particella trascorre nella regione col campo magnetico.
3. Calcolare l'intensità e la direzione del campo elettrico che bisogna applicare per far sì che che la traiettoria della particella rimanga perpendicolare al campo.
4. Calcolare a che tempo bisognerebbe spegnere il campo magnetico per ottenere un angolo di $\theta = 30°$ tra le velocità di entrata e di uscita.

Soluzione

1. Poiché la traiettoria presa dalla particella è una circonferenza di raggio $r = mv/qB$, la distanza è data dal suo diametro, cioè:
$$d = 2r = \frac{2mv}{qb} = 26\,\mathrm{m}$$
2. Il tempo trascorso nella regione col campo sarà metà del periodo del moto circolare uniforme, che vale $T = 2\pi m/qB$, cioè:
$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} = 5\,\mathrm{s}$$
3. La direzione del campo elettrostatico deve essere perpendicolare al campo magnetico, così da contrastare la forza di Lorentz. L'intensità si trova equagliando il modulo delle forze che ne risulterebbero, cioè:
$$qE = qvB$$
e quindi
$$E = vB = 2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$
4. In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante ed è uguale all'angolo percorso nell'unità di tempo. Nel caso specifico di campo magnetico uniforme la velocità angolare vale

$$\omega = qB/m$$

e quindi si ha che, in funzione del tempo t, l'angolo vale

$$\theta = \omega t$$

da cui si ottiene

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta m}{qB}$$

che, per $\theta = 30°$, dà $t = 0.84$ s.

Esercizio 54

Testo

Sei lunghi fili complanari percorsi da una corrente $i = 1$ A sono disposti in modo tale da delimitare una regione esagonale di lato $l = 10$ cm. Il verso delle correnti porta a percorrere l'esagono in senso orario. Determinare verso e intensità della componente di $\vec{B}$ perpendicolare al piano nel centro dell'esagono.

Soluzione

Usando la regola della mano destra (o della vite) si trova che i campi generati singolarmente dai fili nel centro dell'esagono sono sempre entranti nel piano. Per ragioni di simmetria le intensità dei campi nel centro saranno tutte uguali e, in particolare, saranno dati dalla legge di Biot-Savart, $B_s = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$, dove r è la distanza dal centro. Questa si può calcolare disegnando il sistema e notando che

$$r = \frac{l}{2}\frac{1}{\tan(\theta)}$$

dove $\theta = \pi/6$ è metà dell'angolo che sottende ogni lato e che, in un esagono, vale $60° = \pi/3$. Sostituendo nella relazione precedente si trova

$$B = 6B_s = 6\frac{\mu_0 i}{2\pi r} = 12\frac{\mu_0 i}{2\pi l}\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 13.86\,\mu\text{T}$$

Esercizio 55

Testo

Un filo rettilineo indefinito di raggio molto piccolo è disposto lungo l'asse di una guaina (cioè di un guscio cilindrico) di ferro, anch'essa indefinita, di raggio interno $R_1 = 1$ cm e raggio esterno $R_2 = 2$ cm. Il filo è percorso da una corrente $i = 10$ A e la permeabilità relativa del ferro vale $\kappa_m = 10^3$.

1. Discutere qualitativamente le funzioni $H(r)$, $B(r)$ ed $M(r)$, dove r è la distanza dal filo.
2. Determinare $H(r)$, $B(r)$ ed $M(r)$.

Soluzione

1. Poiché $\vec{H}$ è definito a partire dal campo magnetico calcolato nel vuoto, $\vec{B}_0$, non può avere discontinuità in presenza di diversi materiali. Il campo magnetico $\vec{B}$, d'altro canto, varrà $\vec{B}_0$ nel vuoto e $\kappa_m\vec{B}_0$ all'interno della guaina, e quindi subirà una discontinuità lungo le sue due superfici. $\vec{M}$, d'altro canto, può essere diverso da zero solo all'interno di un materiale che non sia il vuoto quindi, in questo caso, solo all'interno della guaina.

2. Data la simmetria cilindrica del problema, le linee di campo saranno sempre circonferenze centrate sul filo. Usando la legge di Ampère in un punto qualsiasi si trova

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = H 2\pi r = i$$

e quindi

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1.59}{r}\,\frac{A}{m}$$

In generale per il campo magnetico vale $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Fuori dalla guaina ($r < R_1$, $r > R_2$) si avrà

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{2\times 10^{-6}}{r}\,\mathrm{T},$$

mentre all'interno ($R_1 < r < R_2$) varrà

$$B = \kappa_m \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{2\times 10^{-3}}{r}\,\mathrm{T}.$$

La magnetizzazione è diversa da zero solo all'interno della guaina ($R_1 < r < R_2$) in cui vale

$$M = \chi_m H = (\kappa_m - 1)H = \frac{1.59\times 10^3}{r}\,\frac{A}{m}$$

Esercizio 57

Ispirato all'esempio 7.5 del MNV

Testo

Un solenoide toroidale composto da N spire in cui scorre una corrente i è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa κ_m.

1. Calcolare i campi $\vec{H}$, $\vec{B}$ ed $\vec{M}$ presenti nel suo interno.
2. Calcolare la corrente di magnetizzazione.

Soluzione

1. Usando la legge di Ampère abbiamo già visto che, nel vuoto, il campo magnetico generato da un solenoide toroidale è nullo all'esterno mentre all'interno ha modulo costante e direzione tangente alle circonferenze di raggio r. In particolare, il modulo vale

$$B_0 = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}.$$

Quando è pieno possiamo applicare la legge di Ampère per il vettore $\vec{H}$:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = 2\pi r H = Ni$$

da cui si ottiene

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}.$$

Il campo magnetico vale quindi

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{2\pi r}$$

Per quanto riguarda la magnetizzazione, si trova

$$M = \chi_m H = \frac{\chi_m N i}{2\pi r}$$

2. La corrente di magnetizzazione si può trovare in diversi modi. Ad esempio, si può considerare la circuitazione del vettore magnetizzazione:

$$i_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = M 2\pi r = \chi_m N i$$

oppure si può calcolare dalla relazione generale ottenuta dalle considerazioni microscopiche:

$$\vec{j}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

che, poiché $\vec{M}$ e $\hat{n}$ sono ortogonali, diventa

$$j_m = M.$$

Ricordando che j_m è una densità di corrente *lineare*, vale

$$i_m = 2\pi r j_m = 2\pi r M = \chi_m N i$$

Esercizio 58

Seconda parte dell'esercizio 51

Testo

Due fili conduttori molto lunghi orientati lungo l'asse z sono posti a distanza $2a = 4$ cm lungo x. Nei fili scorre la corrente $i = 50$ A in verso antiorario. Prendendo come origine degli assi il punto equidistante tra i due fili,

1. Calcolare il campo magnetico lungo $\hat{x}$
2. Calcolare il campo magnetico lungo $\hat{y}$

Soluzione

1. Applicando la legge di Biot-Savart i due fili generano i seguenti campi magnetici lungo l'asse x:

$$\vec{B}_s(x,0,0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{y}}{x+a} \tag{71}$$

$$\vec{B}_d(x,0,0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{y}}{x-a} \tag{72}$$

Nota Bene: fate molta attenzione al segno del campo! Questo cambia a seconda che ci si trovi alla sinistra o alla destra del filo. Per il principio di sovrapposizione, il campo totale è semplicemente la somma dei due, quindi:

$$\vec{B}(x,0,0) = \frac{\mu_0 i \hat{y}}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right)$$

2. Poiché i campi hanno lo stesso verso, lungo l'asse y le componenti y sono uguali e contrarie e quindi si cancellano. Il campo sarà quindi dato da $\vec{B} = 2B_x\hat{x}$. Per trovare il valore di B_x disegniamo $\vec{B}$ e vediamo che $B_x = B\cos(\theta)$, dove

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

e quindi il campo vale

$$\vec{B}(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2} \hat{x}$$

Esercizio 59

Esercizio V.17 del Mencuccini-Silvestrini

Testo

Un conduttore di forma cilindrica di raggio a e lunghezza indefinita è percorso da una corrente stazionaria i. All'interno del conduttore vi è una cavità di sezione circolare di raggio b che corre parallela all'asse del cilindro. La distanza tra i centri dei cilindri è h. Calcolare il campo magnetico $\vec{B}$ in un punto generico posto a distanza $r > a$ dal centro del cilindro conduttore lungo l'asse che congiunge i due centri.

Soluzione

Analogamente a quanto detto per il caso elettrostatico, questo sistema può essere considerato la sovrapposizione di due sistemi: un cilindro pieno di raggio a in cui scorre una corrente e un cilindro pieno di raggio b in cui scorre una corrente di verso opposto di stessa densità. In questo caso la densità di corrente vale

$$j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)}.$$

La corrente nel primo cilindro *pieno* varrà quindi

$$i_p = j\pi a^2 = \frac{ia^2}{a^2 - b^2}$$

mentre quella fittizia che "scorre" nel cilindro vuoto vale

$$i_v = -j\pi b^2 = -\frac{ib^2}{a^2 - b^2}.$$

Sommiamo ora i due contributi, ognuno dei quali è dato dalla legge di Biot-Savart:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_p}{r} + \frac{i_v}{r-h}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)}\left(\frac{a^2}{r} + \frac{b^2}{r-h}\right)$$

Esercizio 60

Testo

Un lungo filo rettilineo percorso da una corrente i è sospeso al soffitto tramite delle corde ad esso collegate ad invervalli regolari e forma un angolo $\theta = 30°$ con la verticale, definito come uno spostamento in direzione antioraria rispetto a quest'ultima. Il filo ha una densità lineare di massa $\lambda = 0.12$ kg/m e si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico diretto verso il basso di intensità $B = 0.36$ T. Determinare verso e intensità della corrente che scorre nel filo.

Soluzione

Sul filo agiscono due forze: quella peso e quella magnetica. Poiché la lunghezza del filo è indefinita, dobbiamo ragionare in termini di *forza per unità di lunghezza*. In questo caso è possibile farlo perché entrambe le forze sono proporzionali alla lunghezza del tratto considerato. L'intensità della forza peso vale infatti $\lambda l g$, mentre quella della forza magnetica è ilB. Per porre le condizioni di equilibrio, dobbiamo scomporre le forze per unità di lunghezza lungo le componenti tangenziali e normali alle corde che tengono sospeso il filo. Queste ultime vengono annullate dalla tensione delle corde, e quindi dobbiamo semplicemente porre uguali ed opposte le componenti tangenziali. Disegnando il sistema, vediamo come la componente tangenziale della forza peso tenderà a far diminuire θ, quindi la corrente deve essere tale per cui la componente tangenziale della forza magnetica deve andare nel verso opposto. Considerando che $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ e che $\vec{B} = -B\hat{y}$ si trova subito che la corrente deve avere verso uscente dal foglio. Per trovare l'intensità di corrente poniamo uguali le due componenti tangenziali:

$$\lambda g \sin(\theta) = iB \cos(\theta)$$

e quindi otteniamo

$$i = \frac{\lambda g}{B} \tan(\theta) = 1.89\,\mathrm{A}$$

Esercizio 61

Esercizio 6.11 del MNV

Testo

Due griglie metalliche G_1 e G_2 parallele molto estese distano $d = 4$ cm e separano due regioni di spazio in cui esiste un campo magnetico $B = 0.8$ T uniforme e uscente dal foglio. Tra le griglie è applicata un d.d.p. ΔV. Al tempo $t = 0$ un protone attraversa G_1 nel punto A_1 ed entra nella regione tra le griglie con velocità ortogonale a G_1. Dopo un tempo $t_{\text{tot}} = 1.22 \times 10^{-7}$ s il protone riattraversa nuovamente G_1 nello stesso verso ma in un punto A_2 distante $h = 5.2$ cm da A_1.

1. Calcolare ΔV.
2. Calcolare le velocità v_1 e v_2 del protone all'interno delle due regioni col campo magnetico.

Soluzione

1. Il tempo t_{tot} è la somma del tempo trascorso all'interno delle regioni e dello spazio tra le griglie, cioè:
$$t_{\text{tot}} = 2t_G + t_1 + t_2$$
perché t_G è lo stesso sia un verso che nell'altro, poiché la particella è sottoposta alla stessa forza e in un caso passa da v_1 a v_2 e nell'altro da v_2 a v_1. I tempi t_1 e t_2 sono metà dei periodi necessari per compiere una traiettoria circolare. Poiché ci ricordiamo che il periodo è indipendente dalla velocità, si trova immediatamente
$$t_1 = t_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$$
e quindi, sostituendo,
$$t_G = \frac{t_{\text{tot}} - T}{2} = 2 \times 10^{-8}\,\text{s}$$
Se disegniamo il sistema notiamo come h sia semplicemente la differenza tra i diametri delle semicirconferenze disegnate dalla traiettoria della particella all'interno delle due regioni col campo, cioè:
$$h = 2r_2 - 2r_1 = 2\frac{m}{qB}(v_2 - v_1)$$
da cui si ricava
$$v_2 - v_1 = \frac{hqB}{2m} = 2 \times 10^6\,\text{m/s}.$$
D'altronde, l'accelerazione tra le due griglie è costante e quindi possiamo scrivere
$$v_2 = v_1 + at_G = v_1 + \frac{q\Delta V}{md}t_G,$$
dove abbiamo scritto l'accelerazione come la forza dovuta al campo elettrico, che vale $E = \Delta V/d$, diviso per la massa della particella, $a = q\Delta V/dm$. Risolvendo per ΔV si trova
$$\Delta V = (v_2 - v_1)\frac{md}{qt_G} = 4.18 \times 10^4\,\text{V}$$

2. Ora conosciamo solo la differenza tra le due velocità. Possiamo trovarne il valore assoluto scrivendo l'equazione del moto iniziale per la particella, per cui si ha, considerando $x(0) = 0$,
$$x(t) = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 = v_1 + \frac{q\Delta V}{2md}t^2$$
che, per $t = t_G$, vale
$$d = v_1 t_G + \frac{q\Delta V}{2md}t_G^2 = v_1 t_G + \frac{1}{2}(v_1 - v_2)t_G$$
da cui possiamo ricavare v_1:
$$v_1 = \frac{d - \frac{1}{2}(v_2 - v_1)t_G}{t_G} = 10^6\,\text{m/s}$$
e quindi v_2 vale:
$$v_2 = (v_2 - v_1) + v_1 = 3 \times 10^6\,\text{m/s}$$
