

# Onde elettromagnetiche

Le onde sono fenomeni fisici comuni che appaiono in molti contesti ogniqualvolta una o più quantità fisiche si propagano nel tempo e nello spazio. In generale, sono onde quelle perturbazioni, non necessariamente periodiche, che si propagano con una velocità ben definita. Nonostante la fenomenologia diversa, tutti i tipi di onde posseggono caratteristiche generali che ne permettono una descrizione matematica unificata.

Le onde con cui abbiamo più familiarità sono quelle *meccaniche*, che richiedono un mezzo materiale per propagarsi. Esempi noti sono le onde sonore, le onde sulla superficie di un liquido oppure le onde che si ottengono facendo oscillare una corda tesa. **Nota Bene:** in tutti questi casi il trasporto non è di materia ma di energia e quantità di moto (anche se in alcuni casi, come per le onde del mare, potrebbe sembrare il contrario). [Qui](#) e [qui](#) alcuni video di esempio, mentre a [questo](#) link si trova una pagina per simulare onde su di una corda.

## Soluzione delle equazioni di Maxwell

MNV: paragrafo 10.3

Nel caso del campo elettromagnetico, abbiamo visto come le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti di campo (cariche e correnti) diventano estremamente simmetriche nei campi,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Queste equazioni ammettono due classi di soluzioni:

- $\vec{E} = 0$  e  $\vec{B} = 0$ ;
- i due campi sono diversi da zero e variabili sia nel tempo che nello spazio.

Quest'ultima classe di soluzioni descrive le *onde elettromagnetiche*. Deriviamo una soluzione delle equazioni di Maxwell nell'ipotesi in cui i campi siano costanti (spazialmente) su di un piano ortogonale alla direzione lungo cui l'onda si propaga. Orientiamo il nostro sistema di riferimento in modo tale da avere  $\hat{x}$  come direzione di propagazione, chiaramente ortogonale al piano  $(y, z)$ . Poiché assumiamo che i campi siano costanti lungo  $y$  e  $z$ , le loro derivate parziali lungo queste direzioni saranno anch'esse nulle, cioè

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} = 0,$$

dove  $\alpha$  è una qualsiasi delle tre direzioni  $x, y$  e  $z$ . In particolare si trova  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$  (e lo stesso per il campo magnetico). Poiché entrambi i campi hanno divergenza nulla (cfr. le equazioni di Maxwell), si deve anche avere

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0.$$

Possiamo ora utilizzare le altre due equazioni di Maxwell (in cui figurano i rotori dei campi). Ricordando che le derivate di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  rispetto a  $y$  e  $z$  sono nulle si trova

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial B_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ 0 &= \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial B_y}{\partial x} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Poiché le componenti lungo  $x$  dei campi hanno derivate nulle sia rispetto al tempo che rispetto allo spazio, si trova che  $E_x$  e  $B_x$  devono essere *costanti*. In generale esistono situazioni in cui è presente nello spazio un campo costante e diverso da zero, per esempio il campo elettrico generato da un piano indefinito o il campo magnetico presente all'interno di un solenoide. Questi, però, sono tutti casi in cui sono presenti delle sorgenti di campo. Qui consideriamo il caso in cui le sorgenti di campo sono assenti. Ne discende che  $E_x$  e  $B_x$  devono essere non solo costanti ma proprio nulli.

Per risolvere questo set di equazioni consideriamo le relazioni che legano  $E_y$  e  $B_z$ . Derivandone una rispetto al tempo e l'altra rispetto a  $x$  si trova

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

e quindi le derivate secondo rispetto ad  $x$  e a  $t$  sono proporzionali tra di loro, cioè:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Applicando lo stesso procedimento troviamo relazioni identiche per  $E_z$ ,  $B_y$  e  $B_z$ . Questa equazione differenziale è nota come *equazione di d'Alembert*, spesso scritta nella forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

dove  $v$  è detta velocità di propagazione dell'onda. Nel caso specifico delle onde elettromagnetiche,  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ , che abbiamo visto essere uguale alla velocità della luce,  $c = 2.99792 \times 10^8$  m/s.

## Onde piane

MNV: paragrafi 10.1, 10.2

L'equazione di d'Alembert è anche detta *equazione delle onde piane* proprio perché ammette come soluzioni delle funzioni che assumono valore costante sul piano ortogonale alla direzione di propagazione, qui presa come  $\hat{x}$ . Si può dimostrare infatti come l'equazione di d'Alembert sia soddisfatta solamente da funzioni del tipo

$$f(x, t) = f(x \pm vt).$$

Funzioni di questo tipo rappresentano fenomeni di *propagazione* lungo  $x$  che avvengono a velocità  $v$  (o  $-v$ ). Consideriamo una soluzione del tipo  $f(x - vt)$ . Dati due valori  $x_0$  e  $t_0$ , il valore  $f(x_0, t_0)$  si ritrova per ogni coppia  $t$  e  $v$  per cui vale

$$x - vt = x_0 - vt_0,$$

relazione che può essere riscritta come

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

che esprime un moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ . In una dimensione, questa fenomenologia si può visualizzare graficando la funzione ad un tempo  $t = t_0$  fissato. Al variare del tempo, il grafico mostra una *traslazione rigida* della funzione, che non cambia forma ma si muove uniformemente con velocità  $v$ .

## Onde armoniche

Casi particolari (ma fondamentali) di funzioni che soddisfano l'equazione di d'Alembert sono

$$f(x, t) = f_0 \sin(k(x - vt)) \quad \text{oppure} \quad f(x, t) = f_0 \cos(k(x - vt))$$

dove  $f_0$  è detta *ampiezza dell'onda* e  $k$  è una costante che assicura che gli argomenti delle funzioni trigonometriche abbiano la giusta dimensione (e cioè radianti).  $k$  è quindi espressa in radianti per metri ed è detta *vettore d'onda* (o numero d'onda). Definendo  $\omega \equiv kv$  (detta *pulsazione*), la soluzione precedente diventa

$$f(x, t) = f_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{oppure} \quad f(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t).$$

Queste funzioni sono casi particolari dell'onda piana dette *onde armoniche*. Data la loro forma è chiaro come, fissando una delle due variabili, la funzione sia periodica nell'altra. A  $t$  fissato la funzione si ripete identica ogniqualvolta ci si sposta di una distanza  $\Delta x$  tale per cui  $k\Delta x$  è un multiplo di  $2\pi$ . La funzione ha quindi periodicità spaziale data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

detta *lunghezza d'onda*.

Con lo stesso ragionamento troviamo che la periodicità temporale dell'onda è data da

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

detta *periodo* dell'onda.

È chiaro quindi che la velocità di propagazione, e le periodicità spaziale e temporale non sono indipendenti ma legate da relazioni precise. Ad esempio si ha anche che  $\lambda = vT = v/\nu$ , dove  $\nu$  è la *frequenza* dell'onda.

Da un punto di vista fisico si trova che  $T$  (e quindi le quantità associate  $\omega$  e  $\nu$ ) dipende unicamente dalle sorgenti del campo, mentre  $\lambda$  (e quindi  $k$ ) dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga.

Diamo ora altre definizioni utili:

- è definita *fase* dell'onda l'argomento della funzione,  $\phi \equiv kx - \omega t$ .
- Tutti i punti dello spazio aventi, in un certo istante, la stessa fase sono detti *fronte d'onda*. Nel caso di un'onda piana il fronte d'onda è, per l'appunto, un piano. La funzione che rappresenta l'onda prende lo stesso valore su tutto il fronte d'onda. Poiché la funzione è periodica, la stessa situazione si ripete a distanze multiple di  $\lambda$ : il fronte d'onda, come del resto l'onda in generale, si muove lungo la direzione di propagazione con velocità  $v$ .

Questi concetti si generalizzano anche in presenza di onde non piane. In particolare, il fronte d'onda è sempre definito come il luogo dei punti per i quali, in un certo istante, la fase dell'onda è costante.

## Onde elettromagnetiche piane

Abbiamo visto come, per le onde elettromagnetiche, le equazioni alla base del fenomeno sono del tipo

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Abbiamo quattro di queste equazioni, due per il campo elettrico e due per il campo magnetico (lungo  $y$  e lungo  $z$ ). Ipotizzando di avere a che fare con onde armoniche, i risultati ottenuti nel paragrafo precedente si possono generalizzare al caso multidimensionale, e le soluzioni diventano:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_y \hat{y} + E_z \hat{z} = E_{y,0} \cos(kx - \omega t) \hat{y} + E_{z,0} \cos(kx - \omega t) \hat{z} \\ \vec{B} &= B_y \hat{y} + B_z \hat{z} = B_{y,0} \cos(kx - \omega t) \hat{y} + B_{z,0} \cos(kx - \omega t) \hat{z}.\end{aligned}$$

Ricordiamo però che le due soluzioni sono connesse dalle equazioni di Maxwell, e quindi le ampiezze non possono essere tutte indipendenti. Ad esempio utilizzando la relazione  $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$  si trova

$$-k E_{z,0} \sin(kx - \omega t) = \omega B_{y,0} \sin(kx - \omega t)$$

e quindi

$$B_{y,0} = -\frac{E_{z,0}}{c}.$$

Alla stessa maniera si ottiene

$$B_{z,0} = \frac{E_{y,0}}{c}.$$

È chiaro quindi che i due campi sono indissolubilmente legati l'un l'altro. Proprio in virtù di questo legame possiamo esprimere le quantità di interesse in funzione del campo elettrico. Ad esempio,

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{E_y^2}{c^2} + \frac{E_z^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2}$$

e quindi

$$B = \frac{E}{c},$$

ed inoltre

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = -\frac{E_y E_z}{c} + \frac{E_z E_y}{c} = 0.$$

Quest'ultima relazione ci dice che i due campi sono sempre *ortogonali* fra di loro. In ultimo,

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c} (E_y^2 + E_z^2) \hat{x} = \frac{E^2}{c} \hat{x} = c B^2 \hat{x} = E B \hat{x}.$$

Il prodotto vettoriale tra i due campi dà quindi la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica.

Tutte queste proprietà delle onde (dalla relazione tra le componenti alla direzione di propagazione) sono valide anche quando le onde non sono armoniche. [Qui](#) un video di esempio che mostra un'animazione.

# Energia e quantità di moto di un'onda

MNV: paragrafo 10.4, 10.5

Abbiamo visto come sia possibile associare un'energia alla presenza di campi, sia magnetici che elettrici, in una regione di spazio. Considerando la relazione che lega i moduli dei campi, in questo caso la densità di energia vale

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \epsilon_0 E^2$$

Consideriamo ora una superficie  $\Sigma$  perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, data da  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Nel tempo  $dt$  il *flusso di energia* attraverso  $\Sigma$  è dato dalla densità di energia per il volume del solido avente base  $\Sigma$  e altezza  $c dt$ , cioè:

$$dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 \Sigma c dt.$$

La potenza che attraversa la superficie è quindi

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 \Sigma c.$$

Possiamo quindi definire un vettore il cui flusso attraverso  $\Sigma$  lungo la direzione di propagazione sia proprio  $\mathcal{P}$ . Questo vettore è detto *vettore di Poynting*:

$$\vec{S} = \epsilon_0 E^2 c \hat{x} = \epsilon_0 c^2 E B \hat{x} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Direzione e verso di  $\vec{S}$  indicano direzione e verso della propagazione dell'onda, mentre il suo modulo è l'energia elettromagnetica per unità di tempo per unità di superficie. Questo modulo, per un'onda armonica, vale

$$S = \epsilon_0 c E^2 = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Come i campi stessi, anche questa quantità è variabile (e periodica) nel tempo. Si definisce *intensità dell'onda* la media di  $S$  lungo un periodo:

$$I \equiv \epsilon_0 c E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2.$$

Un'onda non possiede solo un'energia intrinseca, ma anche una quantità di moto. Questo fa sì che, come per i corpi dotati di massa che collidono, le onde che urtano degli ostacoli trasferiscano (parzialmente o totalmente) questa quantità di moto ad altri corpi. Questo scambio di quantità di moto è detto *pressione di radiazione*:

- nel caso di assorbimento completo *tutta* la quantità di moto viene ceduta all'oggetto colpito. In questo caso si ha  $p_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ .
- Se l'oggetto colpito ha la proprietà di riflettere completamente l'onda, questa dopo l'urto si propagerà in direzione  $-\hat{x}$ , e quindi l'impulso trasferito al corpo sarà doppio rispetto a prima. In questo caso la pressione di radiazione varrà quindi  $p_{\text{rad}} = \epsilon_0 E_0^2$ .

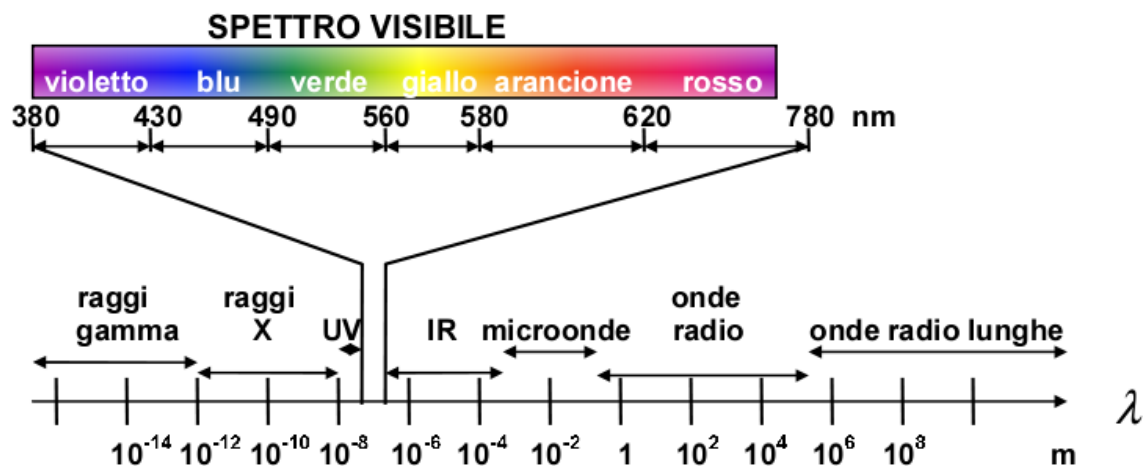
Un'interessante applicazione di questa proprietà delle onde elettromagnetiche sono le cosiddette *pinzette ottiche* (*optical tweezers* in inglese), il cui sviluppo da parte di Arthur Ashkin è stato premiato nel 2018 con il Nobel per la fisica. Questa tecnologia utilizza fasci laser per intrappolare ed eventualmente spostare a piacere piccoli oggetti microscopici quali particelle colloidali, batteri e cellule. Se siete curiosi seguite i link per vedere come [piccole sfere micrometriche](#) o [globuli rossi](#) possono essere manipolati e spostati a piacere.

A [questa](#) è anche possibile simulare un esperimento eseguito con pinzette ottiche. Attenzione, le opzioni sono tante!

## Spettro delle onde elettromagnetiche

MNV: paragrafo 10.8

Le onde elettromagnetiche possono avere frequenze in intervallo di valori molto ampio, che va da  $10^2$  Hz fino a  $10^{18}$  Hz. Questo *spettro* di frequenze è stato storicamente suddiviso in *bande*, mostrate in figura:



**Onde hertziane o radio,** ( $10^2 \leq \nu \leq 10^9$ ) Hz, ( $3 \times 10^6 \geq \lambda \geq 0.3$ ) m

Queste onde sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive

**Microonde,** ( $10^9 \leq \nu \leq 10^{11}$ ) Hz, ( $3 \times 0.3 \geq \lambda \geq 3 \times 10^{-3}$ ) m

Queste onde sono utilizzate per telecomunicazioni (ad esempio i telefoni cellulari), per le connessioni WiFi, per i sistemi radar. Nei forni a microonde viene utilizzato il fatto che molte molecole (come l'acqua) possono essere eccitate vibrazionalmente a queste frequenze.

**Infrarosso,** ( $3 \times 10^{11} \leq \nu \leq 3.8 \times 10^{14}$ ) Hz, ( $10^{-3} \geq \lambda \geq 0.78 \times 10^{-6}$ ) m

Gli infrarossi vengono prodotti da corpi caldi. Similmente, le onde infrarosse possono essere utilizzate per scaldare. Sono anche utilizzate per fare spettroscopia.

**Visibile,** ( $3.8 \times 10^{14} \leq \nu \leq 7.9 \times 10^{14}$ ) Hz, ( $0.78 \times 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \times 10^{-6}$ ) m

È detta luce visibile quell'insieme di onde a cui l'occhio umano è sensibile. L'intervallo di frequenze del visibile coincide approssimativamente con la parte dello spettro della radiazione solare più intensa.

**Ultravioletto,** ( $7.9 \times 10^{14} \leq \nu \leq 5 \times 10^{17}$ ) Hz, ( $0.38 \times 10^{-6} \geq \lambda \geq 6 \times 10^{-10}$ ) m

Lo spettro solare contiene anche molte frequenze ultraviolette. Sulla terra, una gran parte dell'intensità di queste onde viene assorbita dall'atmosfera nel processo che porta alla formazione dell'ozono.

**Raggi X**, ( $5 \times 10^{17} \leq \nu \leq 5 \times 10^{19}$ ) Hz, ( $6 \times 10^{-10} \geq \lambda \geq 6 \times 10^{-12}$ ) m

Queste onde, molto energetiche, sono legate alla decelerazioni di elettroni di alta energia. Sono utilizzati, ad esempio, per indagini radiografiche, poiché diversi tessuti assorbono i raggi X in maniera differente.

**Raggi  $\gamma$** , ( $\nu \geq 3 \times 10^{18}$ ) Hz, ( $\lambda \leq 10^{-10}$ ) m

I raggi  $\gamma$  sono legati a processi nucleari (decadimenti radioattivi o reazioni tra i nuclei) e possono danneggiare rapidamente gli organismi viventi. Se utilizzati in maniera controllata trovano applicazioni in terapie antitumorali.

Come si vede, la suddivisione non è ben definita e ci sono alcune sovrapposizioni tra l'una e l'altra banda.

## La luce e l'indice di rifrazione

---

MNV: paragrafo 11.1

Quando un'onda passa da un mezzo all'altro si osservano, in generale, due fenomeni:

- parte dell'onda viene *riflessa*: si propaga all'indietro all'interno del primo mezzo;
- parte dell'onda viene *rifratta*: si propaga nel secondo mezzo con una direzione diversa da quella incidente.

Sebbene questi fenomeni avvengano per qualunque tipo di onda elettromagnetica, ci occuperemo in particolare della luce, cioè di quelle onde che hanno frequenze nello spettro del visibile ( $(3.8 \times 10^{14} \leq \nu \leq 7.9 \times 10^{14})$  Hz, ( $0.78 \times 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \times 10^{-6}$ ) m).

La luce si propaga con velocità  $c$  nel vuoto e con velocità  $v < c$  in un mezzo. In generale,  $v$  dipende dalla proprietà fisiche del mezzo. Si definisce *indice di rifrazione* del mezzo la quantità

$$n = \frac{c}{v}.$$

Data la definizione è chiaro che  $n \geq 1$ , dove l'uguaglianza vale solamente nel vuoto. Il motivo fisico per cui  $v < c$  in un mezzo è che gli elettroni del materiale di cui è composto risentono del campo elettrico dell'onda e cominciano ad oscillare con pulsazione  $\omega$ . Questo moto elettronico genera un altro campo elettrico che si somma a quello dell'onda. Ne risulta un campo totale che si propaga con velocità  $v < c$ .

Valori comuni dell'indice di rifrazione sono  $\approx 1$  per molti gas, 1.33 per l'acqua, tra 1.5 e 2 per il vetro.

## Riflessione e rifrazione

---

MNV: paragrafo 11.3

Consideriamo un'onda armonica caratterizzata da una frequenza  $\nu$ , da una pulsazione  $\omega$ , da una lunghezza d'onda  $\lambda$  e da un vettore d'onda  $k$ . Nell'attraversare una superficie che separa il vuoto da un mezzo abbiamo visto che la velocità di propagazione varia, in questo caso da  $c$  a  $v$ . Studiando i meccanismi microscopici si vede che  $\nu$  e  $\omega$  restano costanti, mentre  $\lambda$  (e quindi  $k$ ) variano. Si ha infatti

$$\lambda_0 \nu = c, \quad \lambda \nu = v$$

e quindi

$$\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c} = \frac{\lambda_0}{n}$$

o, equivalentemente,

$$k = nk_0,$$

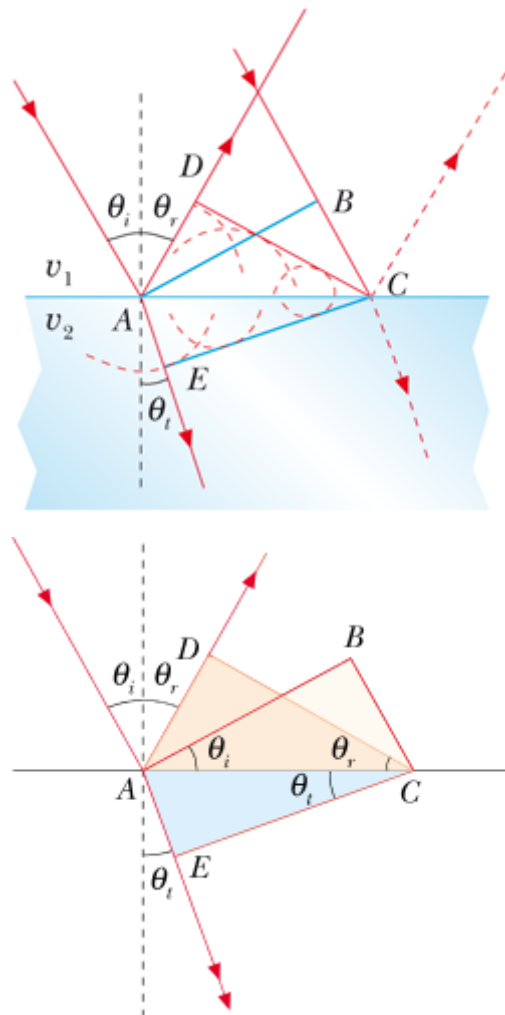
dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo. Poiché  $n > 1$ ,  $\lambda < \lambda_0$ .

Vediamo ora cosa succede nel caso generale in cui un'onda attraversi la superficie che separa due mezzi trasparenti. In questo caso i due mezzi hanno indici di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$  e le velocità al loro interno valgono  $v_1 = c/n_1$  e  $v_2 = c/n_2$ .

Alcune definizioni:

- i vettori  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  e  $\vec{k}_t$  indicano la direzione e il verso delle onde incidente, riflessa e rifratta (o trasmessa). Il loro modulo è il vettore d'onda specificato sopra.
- $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$  sono gli angoli che  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  e  $\vec{k}_t$  formano con la normale alla superficie.
- Il *piano di incidenza* è il piano formato da  $\vec{k}_i$  e dalla normale alla superficie.
- Consideriamo superfici *speculari*, cioè tali per cui raggi che erano paralleli prima della riflessione lo sono anche dopo. Superfici *scabre* danno invece luogo ad onde riflesse non parallele: la luce riflessa è, in questo caso, *diffusa*.

Disegniamo ora cosa succede al fronte di un'onda che colpisca la superficie:



La prima figura ci permette di disegnare la seconda. Ricordiamo che il fronte d'onda si muove con la stessa velocità dell'onda, che vale  $v_1$  in alto e  $v_2$  in basso. Prima di tutto, si osserva sperimentalmente che i vettori  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  e  $\vec{k}_t$  giacciono tutti sul piano di incidenza.



Quando il raggio di sinistra colpisce la superficie, quello di destra si trova in B, quindi quando il raggio di destra colpisce la superficie in C, il raggio riflesso da sinistra deve aver percorso una distanza AD pari a BC, perché i due raggi hanno la stessa velocità  $v_1$ . Quindi si può notare subito come i triangoli ACD e ACB siano uguali perché hanno uguali due lati (condividono il lato AC e i lati AD e CB sono uguali) ed un angolo (poiché sono triangoli retti). Ne deriva che anche gli altri due angoli sono uguali. Poiché i due angoli più acuti dei triangoli sono quelli di incidenza e di riflessione, si trova  $\theta_i = \theta_r$ .

Consideriamo ora i triangoli ACB e ACE. Prima di tutto, sono entrambi triangoli retti. Inoltre, hanno in comune il cateto AC. Infine, la distanza AE è quella percorsa dal raggio trasmesso nel tempo  $\Delta t$  in cui i raggi nel primo mezzo hanno percorso AD e BC. Vale quindi

$$BC = AC \sin \theta_i = v_1 \Delta t = \frac{c \Delta t}{n_1}$$

e

$$AE = AC \sin \theta_t = v_2 \Delta t = \frac{c \Delta t}{n_2}.$$

Da queste relazioni si ricava

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1},$$

cioè

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t.$$

Questa equazione è nota come *legge di Snell*. Alcune implicazioni di questa legge:

- Se l'onda incide perpendicolarmente ( $\theta_i = 0$ ), non vi è alcuna rifrazione ( $\sin \theta_t = n_1/n_2 \sin \theta_i = 0$ ).
- Se  $n_2 > n_1$  allora  $\theta_t < \theta_i$ .
- Se  $n_1 > n_2$  allora  $\theta_t > \theta_i$ .

Quest'ultima situazione presenta un caso limite: poiché  $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$ , esiste un angolo  $\theta_i = \theta_0 < \pi/2$  per cui  $\theta_t = \pi/2$ . Per valori  $\theta_i > \theta_0$ , l'applicazione della legge di Snell porta all'equazione

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1,$$

che non ha soluzioni reali! Fisicamente questo significa che non c'è più un'onda rifratta: l'onda incidente viene riflessa completamente all'interno del primo mezzo. Questo fenomeno è detto *riflessione totale* ed avviene quando l'angolo di incidenza è maggiore dell'*angolo limite*  $\theta_0$ , il cui valore è determinato solamente dal rapporto tra gli indici di rifrazione:

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Si può fare facilmente esperienza di questo fenomeno immergendosi nell'acqua ( $n \approx 1.33$ ) e restando ad una distanza piccola dalla superficie con l'aria ( $n \approx 1$ ): oltre una certa distanza l'acqua sembra riflettere come uno specchio!

Dal punto di vista applicativo, questo fenomeno è molto utilizzato, ad esempio nelle fibre ottiche: un raggio di luce che penetra con un angolo maggiore di quello limite rispetto alle superfici laterali attraverso la base di un lungo e sottile cilindro di vetro (o altro materiale trasparente). Il raggio viene continuamente (e totalmente) riflesso dalle superfici laterali e rimane quindi

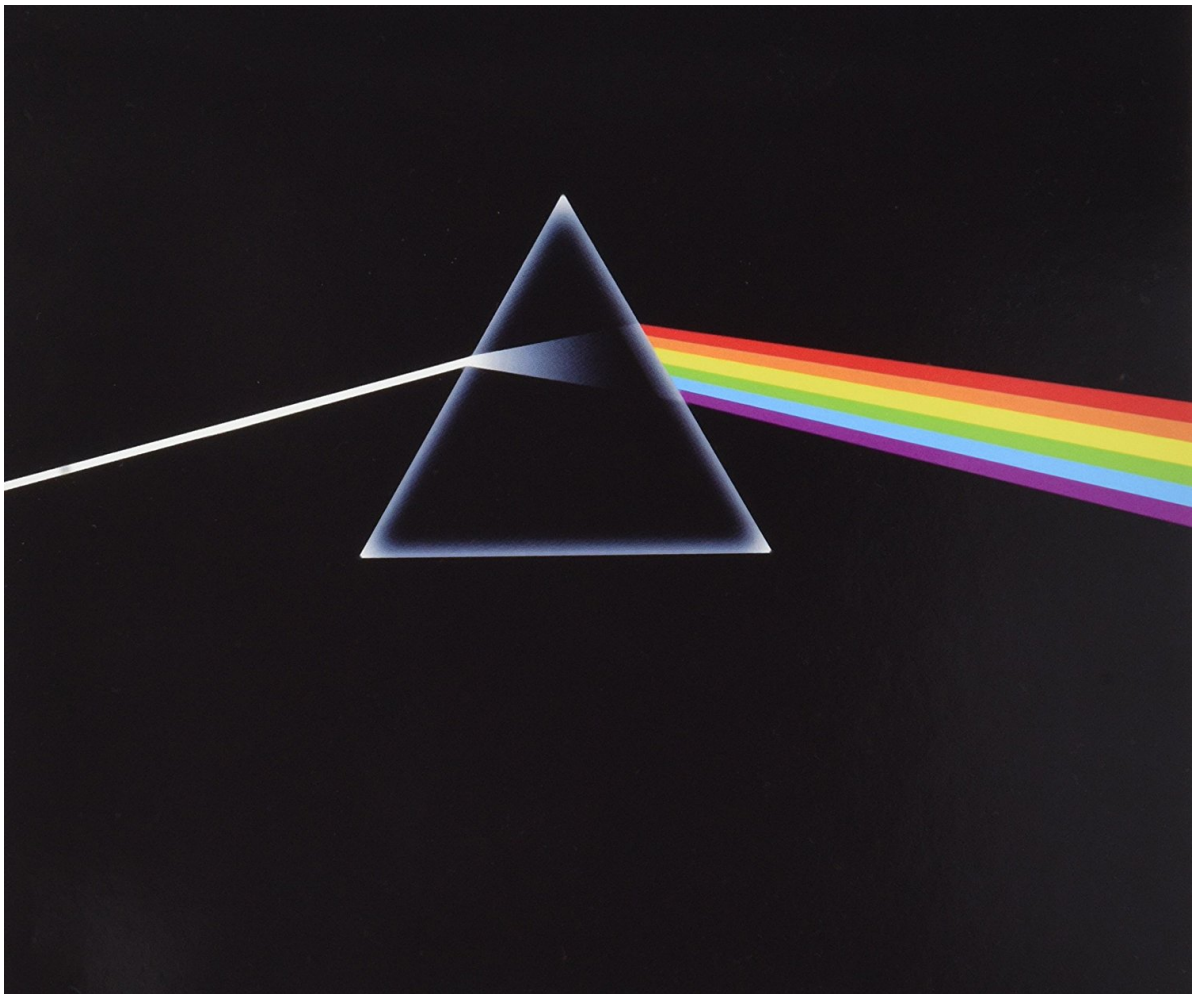
all'interno di questa *guida di luce*. L'effetto è presente anche se le guide non sono rettilinee (purché l'angolo formato non faccia sì che il fascio di luce incontri la superficie con un angolo minore di  $\theta_0$ ). Le fibre ottiche trovano applicazioni in tanti campi, dalla medicina (*endoscopie*) alle telecomunicazioni.

Un interessante esempio di effetto dovuto alla rifrazione è quello che si vede in [questo video](#), che si può riprodurre facilmente anche a casa.

## Dispersione della luce

Il discorso sulla riflessione e rifrazione di un raggio di luce appena fatto vale strettamente solo nel caso di raggi *monocromatici*, cioè composti da onde aventi tutte la stessa lunghezza d'onda. D'altro canto, se la luce incidente è composta da uno *spettro* di onde, si osserva come l'angolo  $\theta_t$  sia diverso per ogni componente del raggio. Sperimentalmente si trova infatti che l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente. Si trova cioè che  $n = n(\lambda)$ . Nello spettro visibile questa dipendenza è, in generale, non fortissima ma facilmente osservabile dal punto di vista sperimentale e monotona:  $n$  diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda. L'effetto principale di questa dipendenza è che le componenti nel violetto vengono deviate maggiormente rispetto a quelle nel rosso.

Questo effetto può essere utilizzato per calcolare la dipendenza dalla lunghezza d'onda dell'indice di rifrazione. Storicamente, questo è stato fatto con un dispositivo detto *prisma*. Il prisma è una lastra di materiale trasparente a facce piane non parallele, disposte in maniera da formare un angolo  $\alpha$  detto angolo di apertura. L'effetto che si ottiene quando il prisma viene attraversato da raggio di luce bianca (cioè contenente tutte le lunghezze d'onda visibili) è simile a quello di questa celebre figura:



La dispersione che si osserva, come detto, è dovuta al fatto che  $n$  dipende dalla lunghezza d'onda incidente. Misurando con precisione gli angoli e applicando la legge di Snell è possibile ottenere la funzione  $n(\lambda)$  per il materiale di cui è composto il prisma.

## Onde elettromagnetiche sferiche

MNV: parte finale del paragrafo 10.4

Consideriamo una sorgente puntiforme (cioè di dimensioni molto piccole) che emetta onde elettromagnetiche armoniche in tutte le direzioni. Per simmetria il campo a distanza  $r$  deve avere espressione

$$E(r, t) = E_0(r) \cos(kr - \omega t).$$

Si parla in questo caso di onda *sferica*, perché per  $t$  costante i fronti d'onda, cioè il luogo dei punti in cui la fase è costante, sono sfere. A [questa](#) pagina si può simulare una sorgente di onde sferiche, elettromagnetiche e non.

La potenza media che attraversa una superficie sferica di raggio  $r$  sarà data dall'intensità dell'onda  $I(r)$  per la superficie della sfera,  $4\pi r^2$ , e quindi

$$\mathcal{P}_m(r) = I(r)4\pi r^2 = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2(r)4\pi r^2.$$

D'altronde, questa quantità deve essere costante indipendentemente da  $r$ , poiché corrisponde alla potenza media emessa dalla sorgente. Ne deriva quindi che  $E_0(r)^2 r^2$  deve essere costante, e cioè che

$$E_0(r) = \frac{E_0}{r}.$$

Per le onde elettromagnetiche sferiche si ha quindi

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t) \\ B(r, t) &= \frac{E_0}{cr} \cos(kr - \omega t) \end{aligned}$$

## Interferenza

MNV: paragrafo 13.1

I fenomeni di interferenza avvengono quando due onde (di qualsiasi natura, non solo elettromagnetica) si sovrappongono nello spazio. A [questo](#) link si può eseguire una simulazione di interferenza tra onde meccaniche. Un esempio reale di tale interferenza è mostrato in [questo filmato](#).

Definiamo prima di tutto le condizioni per le quali l'interferenza può avvenire. Consideriamo due onde armoniche sferiche aventi stessa frequenza (e quindi stessa lunghezza d'onda). Queste sono generate da due sorgenti distinte  $S_1$  ed  $S_2$ . Consideriamo ora il campo elettrico nel punto  $P$  distante  $r_1$  da  $S_1$  ed  $r_2$  da  $S_2$ :

$$E_1 = \frac{E_0}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1), \quad E_2 = \frac{E_0}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2),$$

dove  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono caratteristiche delle sorgenti. La differenza tra gli argomenti dei coseni è chiamata *differenza di fase* in  $P$  e vale

$$\delta = (kr_2 - \omega t + \phi_2) - (kr_1 - \omega t + \phi_1) = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1).$$

La differenza di fase così espressa consta di due termini:

- una *differenza di fase intrinseca*  $\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1$
- una differenza di fase dovuta alla distanza di P dalle due sorgenti,  $k(r_2 - r_1)$

Se  $\delta$  è costante nel tempo, le sorgenti di luce sono dette *coerenti*. È evidente dalla relazione precedente che, fissato P, due sorgenti sono coerenti se e solo se  $\Delta\phi$  è costante nel tempo (almeno per il tempo necessario per osservare i fenomeni di interesse). Le due sorgenti sono dette *sincrone* se  $\Delta\phi = 0$ .

L'interferenza propriamente detta si può osservare solamente quando le onde che si sovrappongono vengono emesse da sorgenti di luce coerenti.

## L'esperimento di Young

MNV: parte del paragrafo 13.2

Young è stato il primo a produrre l'interferenza di due onde luminose, nel 1801. L'apparato con cui ha effettuato l'esperimento è formato da una sorgente di luce monocromatica posta ad una grande distanza da una parete opaca contenente una fessura molto stretta,  $S_0$ . Quando la luce colpisce la parete, la grande distanza dalla sorgente fa sì che l'onda possa essere considerata piana. Per effetto della diffrazione (che vedremo dopo), l'onda si propaga in tutte le direzioni prima di colpire una seconda parete su cui sono poste due ulteriori fessure molto sottili,  $S_1$  ed  $S_2$ , poste a distanza  $d$  l'una dall'altra. Qui la luce ancora una volta viene diffratta, ma stavolta da due fenditure, che si comportano come sorgenti sincrone (e quindi coerenti). Infine, a grande distanza (grande rispetto a  $d$ ) viene posto uno schermo su cui appare un *pattern di interferenza* (o *figura di interferenza*) che consiste in una serie di strisce chiare e scure dette *frange di interferenza*. Le frange chiare corrispondono a massimi dell'intensità dell'onda (e quindi del campo), mentre quelle scure corrispondono a dei minimi.

Il fenomeno si può formalizzare calcolando come varia l'intensità del campo sullo schermo al variare della differenza di distanza percorsa dalle due onde per raggiungere un punto  $P$  dello schermo,  $r_2 - r_1$ . Come abbiamo visto prima, questa è legata alla differenza di fase tra le due onde, definita come  $\delta = k(r_2 - r_1)$ , che può essere riscritta in funzione di un angolo  $\theta$  come

$$\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

dove abbiamo utilizzato il rapporto che lega il vettore d'onda alla lunghezza d'onda. Si trova come l'intensità del campo sullo schermo ha andamento

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right),$$

dove  $I_0$  è l'intensità che si produrrebbe se ci fosse un'unica sorgente. È chiaro che questa funzione è massima quando

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = m\pi,$$

cioè

$$d \sin \theta = m\lambda$$

dove  $m$  è un qualunque intero. Quindi se la differenza di percorso tra le due onde è un *multiplo* della lunghezza d'onda, i campi elettrici sullo schermo hanno la stessa fase e quindi si sommano, dando luogo ad un'interferenza detta *costruttiva*. D'altronde, se si ha

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

i campi hanno fase *opposta* e quindi danno luogo ad un'interferenza distruttiva: l'intensità si annulla completamente. Per valori intermedi l'intensità varia come il coseno al quadrato, prendendo valori intermedi tra 0 e  $4I_0$ .

Se  $L$  è la distanza tra le fenditure e lo schermo e definiamo  $x$  come la distanza del punto  $P$  dal centro dello schermo, se consideriamo solo valori di  $\theta$  piccoli e siamo nella condizione  $L \gg d$ , si può scrivere  $\sin \theta \approx \tan \theta$  e quindi

$$\sin \theta \approx \frac{x}{L}$$

per cui l'intensità in funzione della distanza dal centro dello schermo (che è la quantità che si misura negli esperimenti) è data da

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \frac{x}{L} \right).$$

Sulla periodicità di questa funzione si possono fare le stesse considerazioni fatte prima (l'intensità è massima quando  $x = m\lambda L/d$  e minima quando  $x = (2m + 1)\lambda L/2d$ ).

Questo fenomeno è comune a tutti i tipi di onda, ed è forse capitato ad alcuni di osservare fenomeni di interferenza con le onde superficiali di un lago o del mare.

## Interferenza da lamine sottili

MNV: parte del paragrafo 13.3

Uno dei fenomeni di interferenza più facili da osservare è la cosiddetta *interferenza da lamine sottili* (*thin-film interference* in inglese), che si verifica quando la luce (di solito solare) si riflette sulle due superfici di sottili strati di materiale trasparente come olio, sapone o acqua. L'effetto iridescente che si può osservare è dovuto ad un fenomeno di interferenza analogo a quello dell'esperimento di Young.

Semplifichiamo il fenomeno considerando una lamina sottile (di spessore  $d$ ) di un materiale con indice di rifrazione  $n$  immersa in aria ( $n_{\text{aria}} \approx 1$ ). Consideriamo un raggio di luce incidente con angolo  $\theta_i$ . Parte dell'intensità verrà riflessa dal primo strato. Parte dell'onda che viene trasmessa verrà rifratta e poi riflessa dalla seconda superficie. Una volta raggiunta la prima superficie, parte di quest'onda verrà nuovamente rifratta e rientrerà nel primo mezzo (aria) parallelamente all'onda riflessa inizialmente. Queste due onde riflesse contengono la maggior parte dell'intensità dell'onda iniziale, e quindi possiamo ignorare i contributi dati dai raggi generati da riflessioni e rifrazioni ulteriori.

In queste condizioni i due punti da cui hanno origine le due onde riflesse possono essere considerate sorgenti coerenti, in quanto prodotte dalla stessa sorgente (il raggio di luce incidente). Calcoliamo ora la differenza di fase  $\delta$  tra le due onde, che può essere vista come la somma di due contributi: uno dovuto alla differenza di cammino delle due onde, che calcoleremo, e l'altro dovuto al fatto che la prima onda riflessa viene sfasata di  $\pi$ . Infatti, un risultato noto (che non dimostreremo) che si trova a partire dalle equazioni di Maxwell afferma come un'onda che viene riflessa da una superficie appartenente ad un mezzo avente indice di rifrazione maggiore di quello in cui l'onda si propaga riceve uno sfasamento di  $\pi$ . In altre parole, il verso del campo elettrico dopo la riflessione si inverte. Nel caso opposto, quando cioè un'onda viene riflessa da una superficie appartenente ad un mezzo avente indice di rifrazione minore, non si osserva alcuno sfasamento.

Utilizzando la nomenclatura introdotta per l'esperimento di Young, troviamo come lo spazio percorso dall'onda rifratta all'interno della lamina sia

$$r_2 = \frac{2d}{\cos \theta_t}$$

e quindi la differenza di fase dovuta alla percorrenza di questa distanza è

$$\delta_2 = k_t r_2 = \frac{2knd}{\cos \theta_t}.$$

D'altro canto, l'onda riflessa inizialmente compie un percorso

$$r_1 = h \sin \theta_i,$$

dove  $h$  è la distanza tra i punti dove i due raggi toccano la superficie superiore e può essere scritta in funzione di  $\theta_t$  come

$$h = r_2 \sin \theta_t$$

e quindi si trova

$$r_1 = \frac{2d \sin \theta_t}{\cos \theta_t} \sin \theta_i.$$

Utilizzando la legge di Snell, per cui  $\sin \theta_i = n \sin \theta_t$ , si trova

$$r_1 = \frac{2dn}{\cos \theta_t} \sin^2 \theta_t.$$

e quindi la differenza di fase dovuta a questo percorso è

$$\delta_1 = k r_1 = \frac{2knd}{\cos \theta_t} \sin^2 \theta_t.$$

La differenza di fase totale è quindi

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 - \pi = 2knd \cos \theta_t - \pi$$

che, nel caso in cui  $\theta_i$ , sia molto piccolo, diventa

$$\delta = 2knd - \pi = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi.$$

Similmente al caso di Young, si ottiene il massimo di intensità quando, se  $m$  è un qualsiasi numero intero,  $\delta = 2m\pi$  (cioè  $d = \frac{\lambda(2m+1)}{4n}$ ), mentre la condizione  $\delta = (2m+1)\pi$  (cioè  $d = \frac{\lambda m}{2n}$ ) è legata ai minimi di intensità. Questo significa che, a parità di  $d$ , alcune lunghezze d'onda saranno più visibili di altre. Questo fa sì che sulla superficie si generi un effetto iridescente, come quello che si osserva, ad esempio, sulle bolle di sapone:



In [questo video](#) potete vedere diversi esempi.

## Diffrazione

MNV: paragrafo 14.1

La diffrazione è un caso particolare di interferenza per cui un'onda interferisce con se stessa dopo essere passata per strette fenditure oppure aver incontrato ostacoli di dimensioni comparabili con la sua lunghezza d'onda. Consideriamo un'onda che incontri un ostacolo opaco avente un bordo netto. Uno schermo posto oltre l'ostacolo mostrerà una *figura di diffrazione* formata da frange chiare e scure che si fanno via via più strette. È interessante notare che l'intensità luminosa che appare sulla parte di schermo posta dietro all'ostacolo non è nulla come avverrebbe se le onde si propagassero esclusivamente in linea retta. La diffrazione infatti, come l'interferenza, è un fenomeno legato alla natura *ondulatoria* della luce.

[Qui un filmato](#) che mostra alcuni esempi di diffrazione.

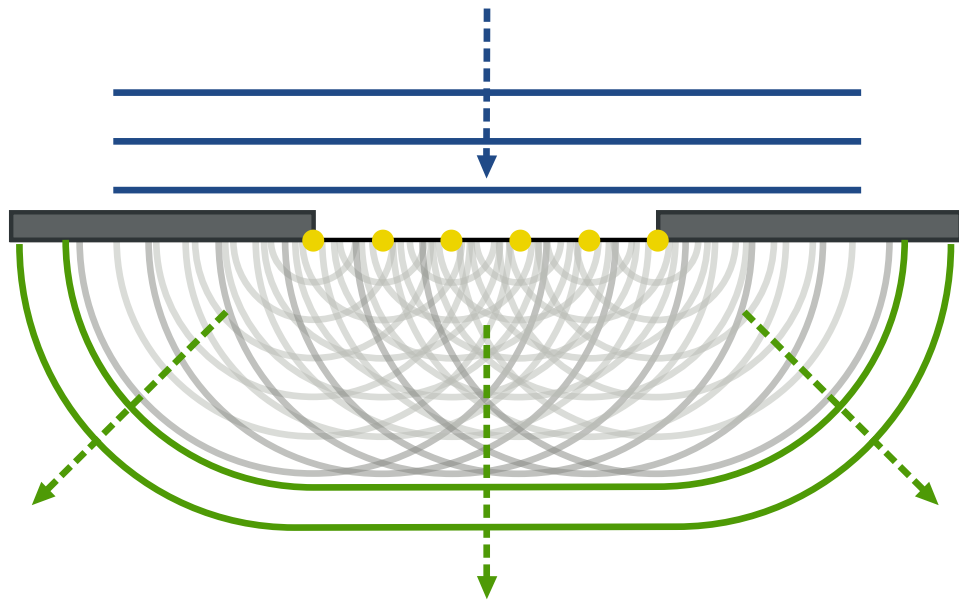
Il comportamento dell'onda, e la figura di diffrazione che ne risulta, possono essere analizzati utilizzando il principio di Huygens-Fresnel.

## Principio di Huygens-Fresnel (cenni)

MNV: paragrafo 11.2

Il principio di Huygens-Fresnel afferma che tutti i punti che compongono un dato fronte d'onda possono essere considerati sorgenti puntiformi di onde sferiche secondarie aventi frequenza, lunghezza d'onda e velocità di propagazione uguali a quelle dell'onda primaria. La posizione del fronte d'onda dopo un tempo  $\Delta t$  è data dalla superficie tangente a queste onde secondarie.

Questo principio serve a prevedere la posizione del fronte d'onda nel caso in cui siano presenti ostacoli o fenditure lungo la direzione di propagazione. Ecco un esempio grafico:



## Diffrazione di Fraunhofer

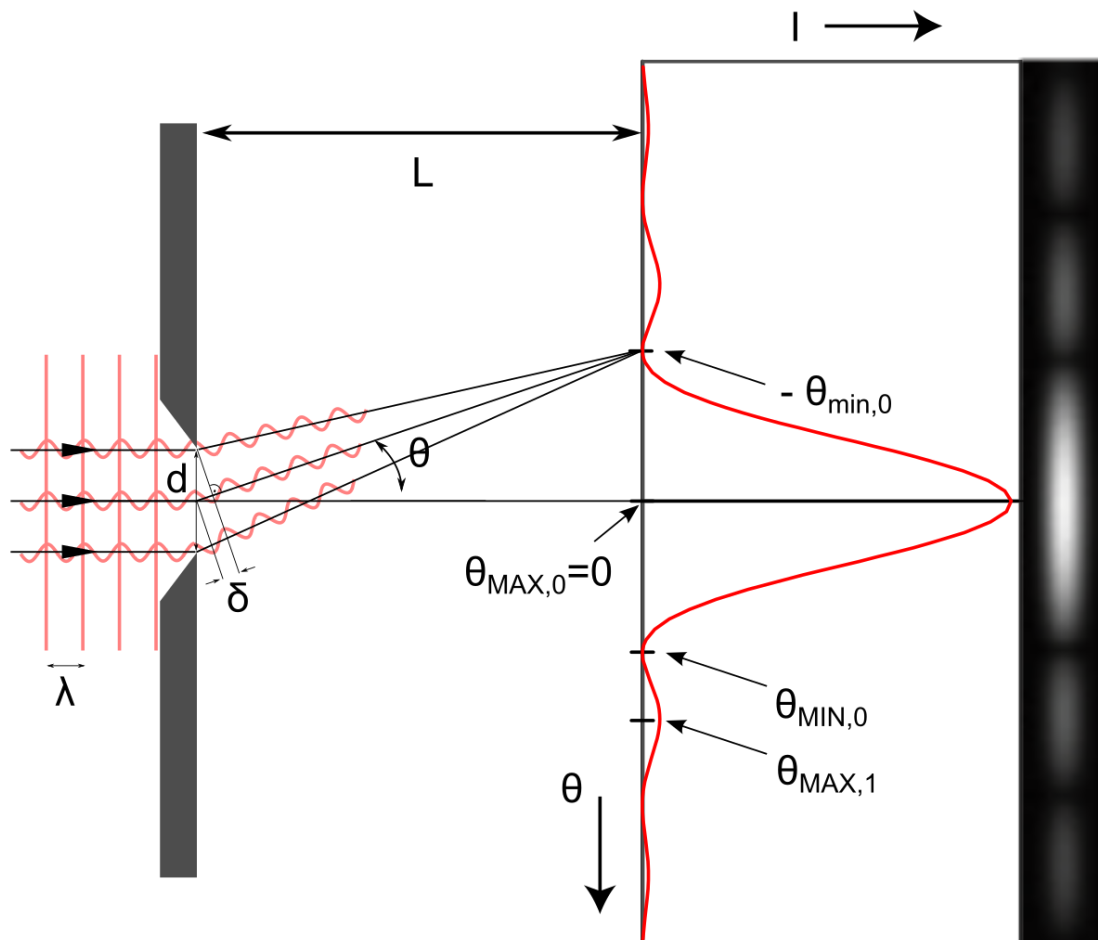
---

MNV: paragrafo 14.2

Esistono diversi modi con cui i fenomeni di diffrazione possono essere prodotti. Qui ci concentreremo sulla *diffrazione di Fraunhofer*, in cui sia la sorgente dell'onda che lo schermo su cui si forma la figura di diffrazione sono posti a grande distanza dalle fenditure o dagli ostacoli che generano la diffrazione stessa.

Ecco una figura che mostra schematicamente il comportamento del sistema che andiamo a studiare:





Consideriamo una parete con un'unica fenditura di larghezza  $a$ . Dividiamo (arbitrariamente) la fenditura in  $2m$  parti (con  $m \geq 1$ ). Secondo il principio di Huygens-Fresnel, ogni parte si comporterà come una sorgente di luce. Ragionando in questa maniera, la figura di diffrazione non è altro che una figura di interferenza dovuta alle diverse parti della fenditura. Consideriamo tutti i raggi (secondari) che escono dalla fenditura con un angolo  $\theta$ . Consideriamo le onde generate da sorgenti vicine, poste quindi a distanza  $a/2m$ : la differenza tra i loro percorsi è

$$\Delta r = \frac{a}{2m} \sin \theta.$$

Si ha una interferenza *distruttiva* quando questa quantità è uguale alla metà della lunghezza d'onda,  $\Delta r = \lambda/2$ , perché in questo caso le due onde arrivano nello stesso punto sfasate di  $\pi$ . Si trova quindi la condizione

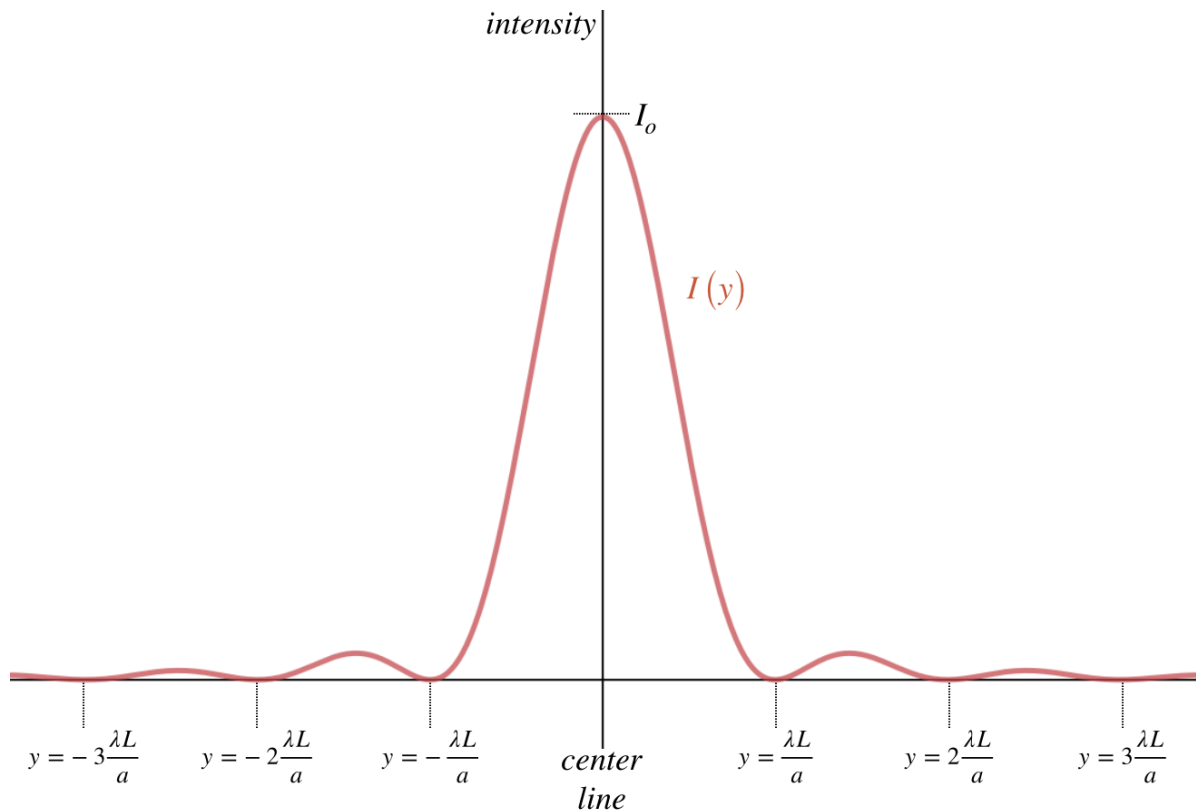
$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}.$$

Dove  $m$  è un qualsiasi intero *diverso da zero* (ricordiamo che  $2m$  è il numero di parti in cui abbiamo diviso virtualmente la fenditura, che quindi non può essere zero). Poiché  $m \neq 0$ , si ha che per  $\theta = 0$  non abbiamo un minimo di intensità. In particolare, si può calcolare direttamente l'intensità in funzione di  $\theta$ , che risulta essere

$$I(\theta) = I_{\max} \left[ \frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2.$$

Questa espressione mostra come l'intensità sia una funzione sì oscillante, ma il cui modulo decresce all'aumentare di  $\theta$ . Inoltre,  $I(\theta)$  ha un massimo per  $\theta = 0$ , mentre i minimi sono dati dall'espressione trovata precedentemente. Gli altri massimi di questa funzione sono dati dalla condizione  $\tan \alpha = \alpha$ , non risolvibile analiticamente ma solo numericamente. Ecco un grafico

della funzione:

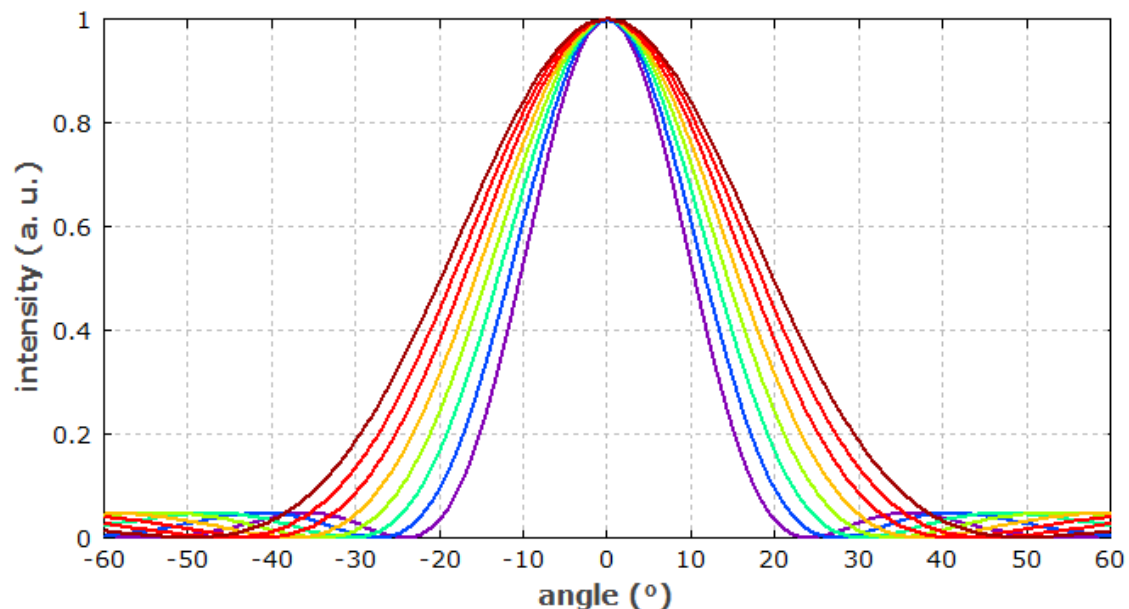


Si può dimostrare come la maggior parte della potenza sia concentrata nella fascia centrale, che viene anche detta *immagine della fenditura*.

## Effetti cromatici

MNV: esempio 14.2

È chiaro dalle relazioni ricavate precedentemente che le figure di diffrazione dipendono, a parità di apparato sperimentale utilizzato, dalla lunghezza d'onda della luce incidente. Poiché la maggior parte dell'intensità è sempre concentrata nella frangia centrale, indipendentemente da  $\lambda$ , il pattern di diffrazione sarà bianco nel centro. D'altro canto, al variare di  $\theta$  le posizioni dei minimi di intensità dipenderanno da  $\lambda$ , e quindi spostandosi dal punto bianco centrale si osserveranno frange colorate. Poiché la distanza del minimo dal centro aumenta con la lunghezza d'onda, la prima frangia colorata diventerà sempre più rossa all'aumentare di  $\theta$ .



# Diffrazione prodotta da un'apertura circolare

MNV: paragrafo 14.3

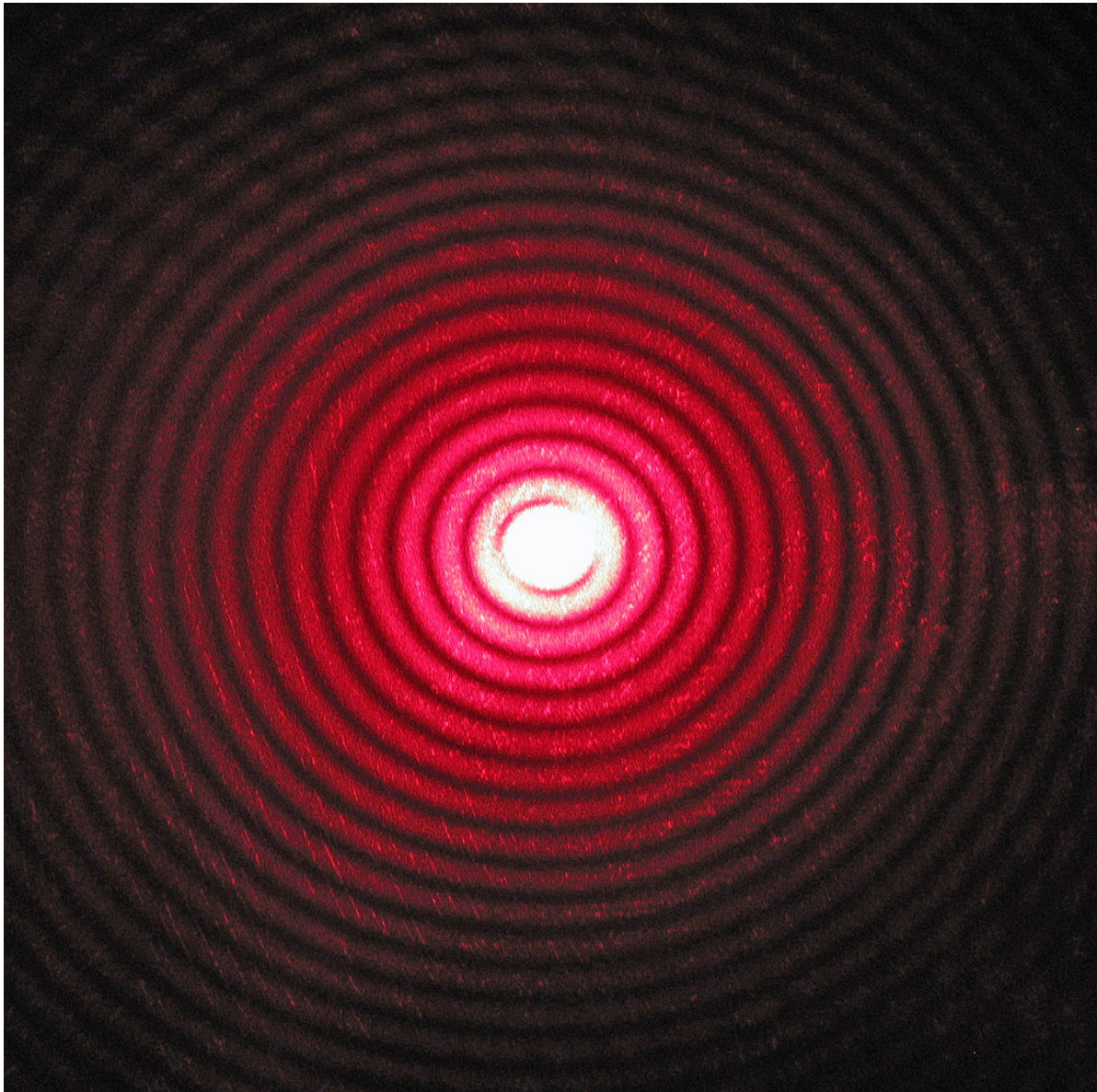
Quando la fenditura attraversata dalla luce è di forma circolare, la figura di diffrazione acquista una simmetria radiale. Dal punto di vista qualitativo le frange che si osservano sono molto simili a quelle del caso rettilineo, anche se la dimostrazione analitica è più complicata. Un risultato importante è che l'angolo  $\theta$  per il quale si osserva il primo minimo dell'intensità è dato dalla relazione

$$\sin \theta_m = 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

dove  $R$  è il raggio dell'apertura. Se, come spesso accade,  $\lambda \ll R$ , la relazione precedente si può approssimare:

$$\theta_m \approx 0.61 \frac{\lambda}{R}.$$

Si definisce in questo caso  $2\theta_m$  come la larghezza angolare del massimo centrale. Anche in questo caso la maggior parte dell'intensità dell'onda è concentrata nella "frangia" (cioè cerchio) centrale, che viene detto *immagine* dell'apertura circolare. Ecco un esempio:



Questi risultati si applicano anche al caso in cui la fenditura venga sostituita da una lente di raggio  $R$ . L'immagine di una sorgente puntiforme molto lontana sarà quindi data non da un punto, ma da un disco di dimensioni finite: la dimensione angolare è chiaramente la quantità  $2\theta_m$  calcolata precedentemente, che equivale ad una dimensione lineare  $d = 2\theta_m L$ , dove  $L$  è la distanza della lente dallo schermo.

## Limite di risoluzione delle lenti

---

MNV: paragrafo 14.4

Quest'ultimo fenomeno fa sì che non sia possibile distinguere oggetti più vicini di una certa distanza. Questo limite *intrinseco* è dovuto alla natura ondulatoria della luce. Consideriamo due sorgenti di luce incoerenti poste a grande distanza da una singola fenditura. Prese individualmente, le immagini delle due sorgenti sono dei pattern di diffrazione aventi dei massimi centrali di una certa larghezza angolare. Quando sono presenti entrambe, a seconda della distanza reciproca, le immagini delle due sorgenti si possono sovrapporre in misura diversa. Secondo il criterio di Rayleigh, se la distanza è tale per cui il massimo di un'immagine si trova sul minimo dell'altra, le due immagini si dicono *appena risolte*. Se la distanza è minore i massimi si sovrappongono così tanto da rendere impossibile distinguere i due contributi: le immagini non sono risolte. Nell'approssimazione  $\sin \theta \approx \theta$ , l'angolo minimo che permette di risolvere le due immagini è

$$\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{a}$$

nel caso di una fenditura lineare e

$$\alpha_{\min} = 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

nel caso di una fenditura circolare. Nel caso in cui si abbia a che fare con delle lenti, si definisce *potere risolutivo* di una lente la quantità

$$\rho = \frac{1}{\alpha_{\min}}.$$

Questa limitazione pone seri limiti alle osservazioni che è possibile fare utilizzando microscopi, lenti fotografiche e telescopi. Questi limiti possono essere superati solo *indirettamente* utilizzando tecniche di [https://en.wikipedia.org/wiki/Super-resolution\\_microscopy](https://en.wikipedia.org/wiki/Super-resolution_microscopy), che sono valsi a Eric Betzig, W.E. Moerner e Stefan Hell il premio Nobel per la Chimica nel 2014.

## Ottica geometrica

---

La luce ha una doppia natura: ondulatoria e corpuscolare. Per quel che concerne questo corso, noi siamo interessati specificamente a descrivere la luce come un'onda. Abbiamo in effetti già visto che gli effetti più interessanti (come rifrazione, interferenza e diffrazione) si possono spiegare considerando la natura ondulatoria della luce, così come si ottiene risolvendo le equazioni di Maxwell. D'altro canto in alcuni contesti è sufficiente utilizzare i concetti di rifrazione e riflessione per comprendere il comportamento della luce. In questi casi si descrive la luce come un insieme di *raggi luminosi* che si possono considerare semirette che escono dalla sorgente ed interagiscono con degli strumenti ottici che incontrano sulla loro strada. In particolare, in questa lezione ci interessa capire come i raggi, che partono da sorgenti di luce, subiscano i fenomeni di rifrazione e di riflessione e formino *immagini*, ad esempio sul fondo del nostro occhio o sul sensore di uno strumento di laboratorio.

Riassumiamo quanto visto su riflessione e rifrazione. Consideriamo un raggio che colpisce una superficie che separa due mezzi di diverso indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ . Si chiama *piano di incidenza* il piano identificato dal raggio incidente su di una superficie e dalla normale alla superficie stessa. Nell'approssimazione di superficie liscia (che è quella che utilizzeremo) i raggi riflessi e rifratti si trovano tutti sul piano di incidenza. I raggi incidente, riflesso e rifratto (o trasmesso) formano con la normale i tre angoli  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$ . Abbiamo visto che sussistono le seguenti relazioni tra gli angoli:

$$\theta_r = \theta_i$$
$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

## Definizioni e convenzioni

MNV: paragrafo 12.2

Ecco alcune definizioni necessarie:

- L' *oggetto* è un corpo (puntiforme o meno) che emette (o diffonde) luce
- L'insieme (fascio) dei raggi emessi dall'oggetto interagiscono con l'apparato ottico, venendone deviati. Il fascio di raggi che ne deriva è chiamato *immagine* dell'oggetto.
  - L'immagine è *reale* se i raggi passano effettivamente per essa.
  - L'immagine è *virtuale* se i *prolungamenti* dei raggi passano per essa.
- Un apparato (strumento) ottico è detto *stigmatico* se i raggi che escono da uno stesso punto dell'oggetto si incontrano tutti, dopo aver interagito con lo strumento ottico, in un solo punto. I due punti (uno sull'oggetto, uno sull'immagine) sono detti *coniugati*. In generale la condizione di *stigmatismo* è difficile da ottenere, e di solito è legata a raggi emessi in una direzione (quasi) parallela all'asse dello strumento. Noi cominceremo col considerare solamente questo caso.
- Le superfici catrottiche o *specchi* sono superfici su cui avviene unicamente il fenomeno della riflessione. La legge che lega gli angoli di incidenza e riflessione non dipende dalle proprietà dei due mezzi, quindi raggi di diversa lunghezza d'onda hanno traiettorie identiche.
- Le superfici diottriche o *diottri* sono superfici su cui avviene unicamente il fenomeno della rifrazione. Poiché la legge di Snell dipende dagli indici di rifrazione dei mezzi e questi, a loro volta, dipendono dalla lunghezza d'onda della luce incidente, raggi aventi la stessa direzione ma lunghezza d'onda diversa percorreranno, in generale, traiettorie diverse. Il sistema ottico, in queste condizioni, è *astigmatico*. Uno stesso oggetto darà quindi immagini diverse, dando luogo ad un fenomeno noto come *cromatismo*, che si può risolvere utilizzando una successione di superfici diottriche, costruendo quindi uno strumento *acromatico*.

In quel che segue utilizzeremo la geometria per derivare le leggi che determinano le traiettorie di raggi di luce in presenza di superfici diottriche e catrottiche. Per semplificare la descrizione utilizziamo le seguenti definizioni e convenzioni (vedi box giallo alla fine del paragrafo 12.2 dell'MNV):

- la luce incidente proviene da sinistra.
- $V$  indica il punto in cui la superficie (diottrica o catrottica) interseca l'asse di simmetria del sistema.
- $P$  indica la posizione dell'oggetto,  $Q$  quella dell'immagine.
- $p$  indica la distanza dell'oggetto da  $V$ , che prendiamo positiva se  $P$  è a sinistra di  $V$ , negativa altrimenti.

- $q$  indica la distanza dell'immagine da  $V$ , che prendiamo negativa se  $Q$  è a sinistra di  $V$ , positiva altrimenti (convenzione contraria rispetto a  $p$ ).
- Se abbiamo a che fare con una superficie curva, definiamo  $R$  il suo raggio di curvatura.  $R$  è positivo se il centro di curvatura si trova a destra di  $V$  (superficie convessa), negativo altrimenti (superficie concava).
- Gli angoli che i raggi formano con l'asse di simmetria (asse *ottico*) sono positivi se considerati nel verso antiorario a partire dall'asse se ci troviamo a sinistra di  $V$ , positivi nel verso orario se ci troviamo a destra di  $V$ .
- Le distanze (che indicheremo con  $y$ ) dall'asse ottico sono
  - positive per punti al di sopra dell'asse e negative altrimenti se stiamo considerando l'oggetto
  - negative per punti al di sopra dell'asse e positive altrimenti se stiamo considerando l'immagine

## Specchi

MNV: paragrafo 12.3

### Specchio sferico concavo

Consideriamo uno specchio sferico concavo (cioè una superficie catottrica sferica concava) e un oggetto puntiforme  $P$  sull'asse. In queste condizioni  $R < 0$  e  $p > 0$ . Tracciamo un raggio che da  $P$  porta allo specchio nel punto  $H$  e che, venendo riflesso, colpisce l'asse ottico nel punto  $Q$ . L'angolo che il raggio forma con l'asse è  $\theta$ . Se definiamo  $O$  il centro di curvatura dello specchio, la normale alla superficie nel punto  $H$  è il segmento  $OH$ . Definiamo  $\theta_i$  l'angolo di incidenza (cioè l'angolo formato dai segmenti  $PH$  e  $OH$ ),  $\theta_r = \theta_i$  l'angolo di riflessione (cioè l'angolo formato dai segmenti  $OH$  e  $QH$ ),  $\alpha$  l'angolo formato da  $OH$  e dall'asse ottico,  $\theta'$  l'angolo formato da  $QH$  e dall'asse ottico. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo ( $\pi$ ) è uguale alla somma di un angolo interno più il suo angolo esterno associato si ricava la nota proprietà dei triangoli per cui l'angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti. Applicando questa relazione al triangolo  $PHO$  si ottiene

$$\alpha = \theta + \theta_i$$

mentre per il triangolo  $OHQ$  si trova

$$\theta' = \alpha + \theta_r = \alpha + \theta_i.$$

Risolvendo per  $\theta_i$  e sostituendo troviamo

$$\theta + \theta' = 2\alpha.$$

Questa relazione ha carattere generale. Da questa possiamo ottenere una semplice relazione che legghi  $p$ ,  $q$  ed  $R$  nell'approssimazione di angoli piccoli, quando cioè vale  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ,  $\sin \theta' \approx \tan \theta' \approx \theta'$  e  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ . Tracciamo il segmento  $h$  che unisce perpendicolarmente  $H$  all'asse ottico nel punto  $H'$ , generando così tre triangoli rettangoli aventi  $h$  in comune. Poiché gli angoli sono piccoli,  $H'$  e  $V$  sono molto vicini e quindi  $PH' \approx PV$ ,  $OH' \approx OV$  e  $QH' \approx QV$ , quindi

$$h \approx PV \tan \theta \approx PV \theta$$

$$h \approx QV \tan \theta' \approx QV \theta'$$

$$h \approx OV \tan \alpha \approx OV \alpha.$$



Ricordando le definizioni e convenzioni date prima si trova

$$PV = p, \quad QV = -q, \quad OV = -R$$

e quindi

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = -\frac{h}{q}, \quad \alpha = -\frac{h}{R}.$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione che lega gli angoli otteniamo

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

che è detta *equazione dello specchio sferico concavo* nell'approssimazione *parassiale*, cioè per angoli piccoli. Poiché in questa equazione non compaiono gli angoli, *tutti* i raggi uscenti da  $P$  si incontrano nello stesso punto  $Q$ , quindi questo tipo di strumento ottico, in questa approssimazione, è *stigmatico*.

Applichiamo ora l'equazione dello specchio per trovare  $q$  (la distanza dell'immagine dallo specchio) al variare di  $p$  (la distanza dell'oggetto dallo specchio). Quando  $P$  è molto lontano  $p \rightarrow \infty$ , i raggi sono essenzialmente paralleli all'asse e si trova

$$q = R/2 \equiv f,$$

dove  $f$  è detta *distanza focale* dello specchio. I raggi si incontrano tutti in un unico punto  $F$  distante  $-f$  dal vertice detto *fuoco* dello specchio. Nel caso di uno specchio concavo  $R$  è negativo quindi  $f < 0$ . L'equazione dello specchio concavo si può riscrivere utilizzando  $f$ :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{f}.$$

Man mano che  $p$  diminuisce (e  $P$  si avvicina ad  $O$ ),  $q$  aumenta in modulo, diventando via via più negativo e quindi  $Q$  si allontana da  $V$ . Quando  $P$  ed  $O$  coincidono si ottiene l'equazione

$$-\frac{1}{q} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{2f} = -\frac{1}{2f} = -\frac{1}{R}$$

che dimostra come oggetto e immagine coincidano. Se l'oggetto si trova alla destra di  $O$ ,  $q$  diminuisce di valore (ma aumenta in modulo) finché non prende il valore  $-\infty$  quando  $P$  è nel fuoco: quando mettiamo l'oggetto nel fuoco di uno specchio sferico concavo, i raggi generati hanno traiettoria parallela all'asse.

Se  $P$  viene posto oltre al fuoco  $F$  i raggi riflessi divergono e l'immagine sembra provenire da un punto posto alla destra di  $V$  ed è cioè *virtuale*. Si trova infatti che se  $p$  è minore di  $-f$  il valore di  $q$  deve essere positivo (come da convenzione).

Quanto detto sopra vale strettamente solo per oggetti posti sull'asse ottico, ma è approssimativamente vero anche per punti vicini (ma non sovrapposti) all'asse. Utilizzando quindi la stessa legge dello specchio è possibile calcolare l'immagine  $QQ'$  di un oggetto *esteso*  $PP'$ . Per farlo è sufficiente tracciare due o più raggi che partono da  $P'$  e vedere dove si intersecano. Ad esempio si può tracciare un raggio parallelo all'asse (che si rifletterà sulla superficie e passerà per il fuoco) e un raggio che passi per il centro di curvatura (che verrà riflesso lungo la stessa traiettoria). Se l'immagine è reale  $QQ'$  risulta capovolta, se l'immagine è virtuale  $QQ'$  risulta dritta. Inoltre, in generale l'immagine avrà una dimensione diversa rispetto all'oggetto. Il rapporto tra le due altezze è detto *ingrandimento trasversale* ed è definito come

$$I = \frac{y'}{y}$$

dove  $y'$  e  $y$  sono, rispettivamente, l'altezza dell'immagine e dell'oggetto. Questo rapporto si può calcolare disegnando i raggi e notando che i triangoli  $PP'O$  e  $OQQ'$  sono simili e quindi, poiché hanno i lati proporzionali, si ottiene

$$I = \frac{q - R}{p + R} = -\frac{q}{p},$$

dove l'ultima relazione si ottiene applicando l'equazione dello specchio concavo. Lo specchio concavo restituisce immagini reali, capovolte e rimpicciolite se  $p > -f$  o virtuali, dritte e ingrandite se  $P$  è tra  $F$  e  $V$ .

## Specchio sferico convesso

La costruzione geometrica fatta prima può essere estesa al caso di superficie sferica convessa. Se disegniamo il sistema si vede subito come, indipendentemente da  $p$ , l'immagine che si forma non può essere che virtuale, quindi  $q > 0$ . In questo caso si trova

$$2\alpha = \theta' - \theta$$

e, nella stessa approssimazione precedente (ma ricordando che in questo caso  $R > 0$ ), si ottiene  $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{R}$  e quindi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

cioè, formalmente, la relazione ottenuta precedentemente. **Nota Bene:** le equazioni sono uguali ma in un caso (specchio concavo)  $R < 0$ , nell'altro (specchio convesso)  $R > 0$ .

Quando  $p = \infty$ , cioè quando i raggi sono paralleli all'asse, si trova che i prolungamenti dei raggi riflessi passano tutti per il punto  $F$  distante  $R/2$  dal vertice, anche in questo caso detto *fuoco* dello specchio. La distanza  $f = R/2$  è la distanza focale, come nel caso precedente, e ci permette di riscrivere l'equazione dello specchio:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{f}.$$

In questo caso  $f > 0$  e quindi si nota immediatamente come  $q$  sia sempre positiva perché data da una somma di numeri positivi:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f}.$$

In generale i risultati ottenuti per lo specchio concavo si estendono al caso convesso (oggetti non puntiformi, ingrandimento, ecc), con la differenza che  $f$  e  $q$  sono entrambi sempre positivi. In particolare, si trova che l'immagine è sempre virtuale, dritta e rimpicciolita.

Quando  $R \rightarrow \infty$  uno specchio (concavo o convesso che sia) diventa *piano*. In questo caso si trova  $p = q$ , l'immagine è quindi sempre virtuale (perché sia  $p$  che  $q$  sono maggiori di 0) e le dimensioni restano invariate ( $I = -1$ ).

## Diottri

MNV: paragrafo 12.4

Consideriamo ora una superficie diottrica sferica convessa che separi due mezzi con indice di rifrazione diverso (ad esempio aria e vetro). Poniamo che quello a sinistra abbiamo  $n_1$  e quello a destra  $n_2$ , con  $n_1 < n_2$ . Utilizzando le stesse definizioni e convenzioni di prima troviamo subito

$$\theta_i = \theta + \alpha, \quad \alpha = \theta' + \theta_t,$$



dove  $\theta_t$  è ora l'angolo tra la normale al punto di incidenza e il raggio rifratto. Applicando la legge di Snell in approssimazione parassiale troviamo

$$n_1\theta_i = n_2\theta_t.$$

Sostituendo nella relazione precedente si ottiene

$$(n_2 - n_1)\alpha = n_1\theta + n_2\theta'.$$

Nella stessa approssimazione di prima possiamo nuovamente scrivere una relazione tra gli angoli e le grandezze in gioco, e notando come  $R$ ,  $p$  e  $q$  siano tutti positivi si trova

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = \frac{h}{q}, \quad \alpha = \frac{h}{R}.$$

Sostituendo queste relazioni in quella che lega tra di loro gli angoli si trova

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

che è detta equazione del diottro sferico convesso. Nell'approssimazione parassiale, come per il caso degli specchi, vediamo come la relazione che lega  $p$ ,  $q$  ed  $R$  non dipende dagli angoli, e quindi il diottro sferico è anch'esso stigmatico.

Applicando la formula si vede come, se  $p = \infty$ , l'immagine si forma ad una distanza dal vertice  $V$  pari a

$$q_\infty = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \equiv f_2.$$

Il punto distante  $f_2$  da  $V$  è detto fuoco posteriore del diottro. D'altro canto, se l'immagine si trova all'infinito ( $q = \infty$ ) significa che l'oggetto si trova ad una distanza da  $V$  pari a

$$p_\infty = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \equiv f_1.$$

Il punto distante  $f_1$  da  $V$  è detto fuoco anteriore del diottro. Si trova, come per gli specchi, che i raggi passanti per il centro di curvatura non vengono deviati.

Se l'oggetto è posto in un punto intermedio tra  $f_1$  e  $V$  si trova che i raggi sono *divergenti* e  $q$  prende un valore negativo, cioè l'immagine risulta *virtuale*.

L'equazione trovata per il caso specifico di un diottro sferico convesso vale anche per un diottro sferico concavo, ed in entrambi i casi è valida sia che si passi da un mezzo con indice di rifrazione minore ad uno maggiore che viceversa.

Se l'oggetto non è puntiforme si può ancora una volta definire l'ingrandimento trasversale che, utilizzando la stessa costruzione vista per gli specchi, vale

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{f_1}{p - f_1} = \frac{q - f_2}{f_2}.$$

Se  $R \rightarrow \infty$ , il diottro diventa piano e si ha

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p,$$

cioè l'immagine è sempre virtuale e  $I = -1$ .

## Lenti sottili

MNV: paragrafo 12.5

Consideriamo due diottri che delimitano una regione di spazio. A sinistra e a destra dei diottri il mezzo ha indice di rifrazione  $n_1$ , mentre al centro c'è un blocco di materiale trasparente di spessore  $s$  avente indice di rifrazione  $n_2$ , con  $n_2 > n_1$ . Se i due diottri hanno indici di curvatura  $R_1$  ed  $R_2$  le equazioni che determinano il comportamento ottico del sistema sono

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

$$p_2 = s - q_1,$$

dove l'ultima equazione indica che l'immagine del primo diottero funge da oggetto per il secondo. Queste equazioni si semplificano nell'approssimazione di *lente sottile*, per cui vale  $s = 0$  e si considerano i vertici dei due diottri essenzialmente coincidenti. Utilizzando questa approssimazione  $p_2 = -q_1$  e quindi

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Nell'approssimazione utilizzata  $p_1$  e  $q_2$  sono le distanze di oggetto e immagine dalla lente e quindi li chiamiamo  $p$  e  $q$ . Se uno tra questi due valori è pari a  $\infty$  troviamo che l'altro prende il valore

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

che chiamiamo distanza focale (o semplicemente focale) della lente. Questa quantità indica la distanza dei due fuochi (uno a sinistra e uno a destra) dal vertice della lente. L'equazione della lente sottile si può quindi scrivere più semplicemente come

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

La quantità  $1/f$  si chiama *potere convergente* della lente e si misura in diottrie ( $\text{m}^{-1}$ ) e può essere sia positiva (lente convergente) che negativa (lente divergente). Si può ancora una volta definire l'ingrandimento trasversale, che vale

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p} = \frac{q - f}{f} = \frac{f}{p - f}.$$

## Aberrazioni (cenni)

MNV: parte del paragrafo 12.6

Le equazioni che abbiamo ricavato nei paragrafi precedenti valgono solo nell'approssimazione parassiale, cioè per raggi che formano piccoli angoli con l'asse ottico. Se questo non è il caso, oppure se la luce non è monocromatica, il sistema ottico dà luogo ad *aberrazioni*: si ottiene un'immagine che è diversa da quella che si vorrebbe ottenere. Elenchiamo brevemente alcuni tipi di aberrazione

- *Aberrazione cromatica*: poiché l'indice di rifrazione di un materiale dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente, la distanza focale di una lente è anch'essa funzione di  $\lambda$ . Ne consegue che un oggetto che emetta luce non monocromatica darà diverse immagini

colorate, ognuna delle quali avrà una distanza ed un ingrandimento differenti. Questo problema si può risolvere utilizzando un sistema composto da più lenti.

- *Aberrazione di sfericità*: gli specchi e le lenti sferiche sono stigmatici solo per raggi parassiali. Questo problema (che si presenta ad esempio in astronomia) si può risolvere utilizzando specchi a forma di paraboloidi di rotazione.
- *Distorsione*: in generale, l'ingrandimento trasversale  $I$  non è indipendente dalla distanza dall'asse (come invece si trova in approssimazione parassiale). Lenti che hanno questo problema danno immagini che non hanno le stesse proporzioni degli oggetti che le generano. Questo effetto è piuttosto frequente, ad esempio, in obiettivi fotografici grandangolari. A [questo](#) link si possono trovare alcuni esempi di distorsioni.