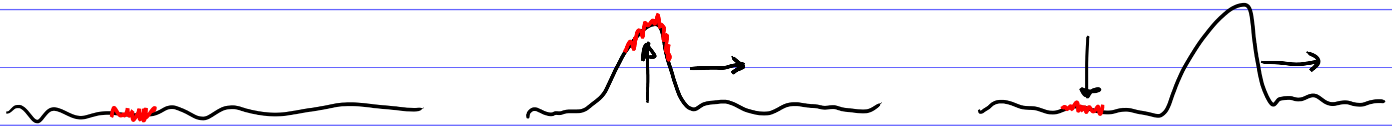
ONDE ELETTROMAGNETICHE

ONDA: fenomeno fisico in cui quantità fisiche si propagano nel tempo e nello spazio

ONDE MECCANICHE: onde del mare, il suono, le onde di una corda tesa oscillante



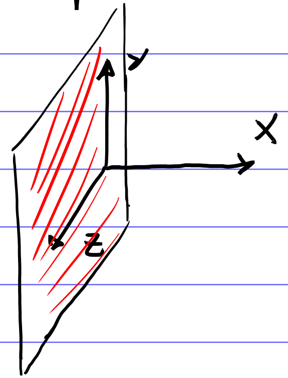
Le onde non trasportano massa, ma energia e quantità di moto

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

due classi di soluzioni:

① $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$

② i campi variano sia nello spazio che nel tempo



IPOTESI: $\begin{cases} \dfrac{\partial E_\alpha}{\partial y} = \dfrac{\partial E_\alpha}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial B_\alpha}{\partial y} = \dfrac{\partial B_\alpha}{\partial z} = 0 \end{cases}$ con $\alpha = x, y, z$

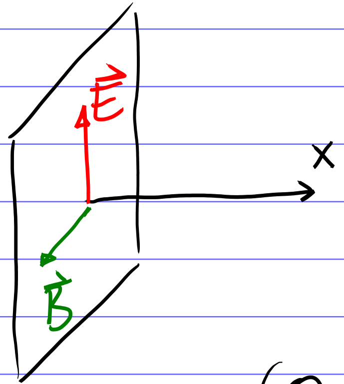
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

usiamo le altre due equazioni di Maxwell

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}\,, \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}\times\vec{E})_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_x \text{ è costante} \\ (\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_x \text{ è costante} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} B_x = 0 \\ E_x = 0 \end{matrix}$$



6 incognite

$$B_x,\ B_y,\ B_z \xrightarrow{\text{I PASSO}} 0,\ B_y,\ B_z$$

$$E_x,\ E_y,\ E_z \qquad 0,\ E_y,\ E_z$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial \boxed{E_z}}{\partial \boxed{x}} = \dfrac{\partial \boxed{B_y}}{\partial \boxed{t}} & ② \ \dfrac{\partial \boxed{E_y}}{\partial \boxed{x}} = -\dfrac{\partial \boxed{B_z}}{\partial \boxed{t}} \\[2ex] ③ \ \dfrac{\partial \boxed{B_z}}{\partial \boxed{x}} = -\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \boxed{E_y}}{\partial \boxed{t}} & ④ \ \dfrac{\partial \boxed{B_y}}{\partial \boxed{x}} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \boxed{E_z}}{\partial \boxed{t}} \end{cases}$$

deriviamo ③ rispetto al tempo

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

deriviamo ② rispetto ad x

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$ equazione delle onde elettromagnetiche

FORMA GENERALE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{\frac{1}{v^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$ equazione delle onde o di d'Alembert

↳ velocità dell'onda

$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow$ le equazioni di Maxwell hanno come soluzione un'onda che si propaga con velocità c

$$c = 2{,}99792 \cdot 10^8 \, m/s = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

questa eq. si applica a E_y, E_z, B_y, B_z (per es. $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad , \quad \boxed{f(x,t) = f(x \pm vt)}$$ funzioni così sono soluzioni

$\phi \equiv x - vt \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial \phi}$

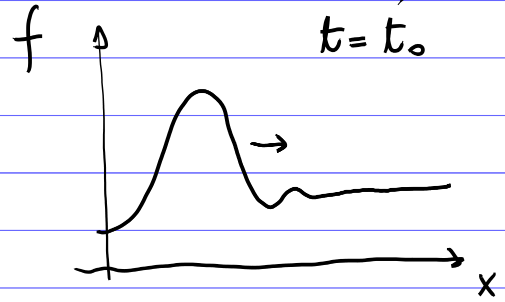
queste funzioni rappresentano fenomeni di propagazione lungo x

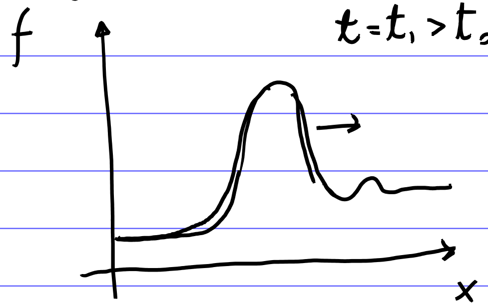
(x_0, t_0), $(x, t) \Rightarrow$

$x_0 - vt_0 = x - vt \Rightarrow f(x_0 - v_0 t) = f(x - vt)$

$\downarrow$

$x = x_0 + v(t - t_0)$ cioè l'onda si muove di moto rettilineo uniforme!





traslazione rigida con velocità v

ONDE PIANE

ONDE ARMONICHE

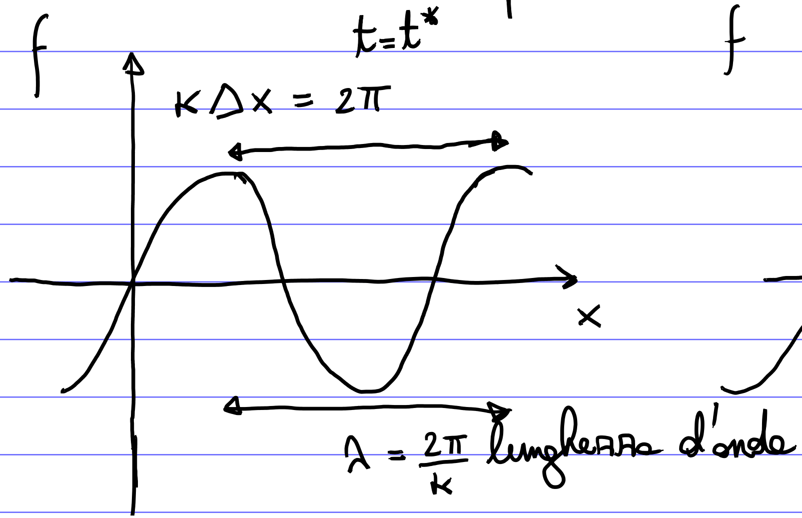
$$f(x,t) = f(x-vt) = f_0 \sin[k(x-vt)] \quad \text{oppure} \quad f(x,t) = f_0 \cos[k(x-vt)]$$

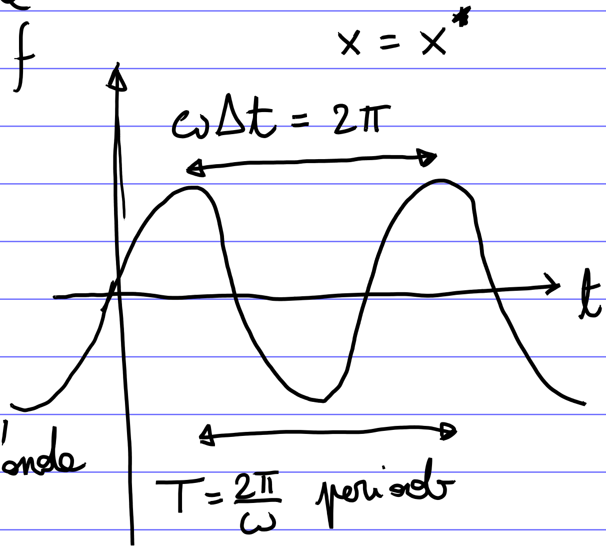
$[kx] = \text{rad}$, $[kvt] = \text{rad}$

$\begin{cases} k \text{ è detto vettore d'onda} \\ kv \equiv \omega \text{ è detta pulsazione} \end{cases} \rightarrow f(x,t) = f_0 \sin(kx - \omega t)$

se $\Delta x = \frac{2\pi}{k}$ la funzione si ripete

se $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ "





$\lambda = vT = v/\nu \quad , \quad \nu = \frac{1}{T}$ frequenza

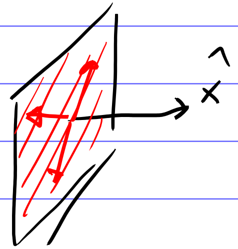
dal punto di vista fisico → $\omega\ (\nu, T)$ dipende dalla sorgente dell'onda
→ $\lambda\ (k)$ dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga

DEFINIZIONI

① $\phi \equiv x - vt$ fase dell'onda

② tutti i punti dello spazio che hanno la stessa fase costituiscono il fronte d'onda

ONDE E.M. PIANE



$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\vec{E} = E_y\hat{y} + E_z\hat{z} = E_{y,0}\cos(kx-\omega t)\hat{y} + E_{z,0}\cos(kx-\omega t)\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y\hat{y} + B_z\hat{z} = B_{y,0}\cos(kx-\omega t)\hat{y} + B_{z,0}\cos(kx,\omega t)\hat{z}$$

queste soluzioni sono connesse tra di loro! $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$

se facciamo le derivate:

$$-kE_{z,0}\cancel{\sin(kx-\omega t)} = \omega B_{y,0}\cancel{\sin(kx-\omega t)} \Rightarrow$$

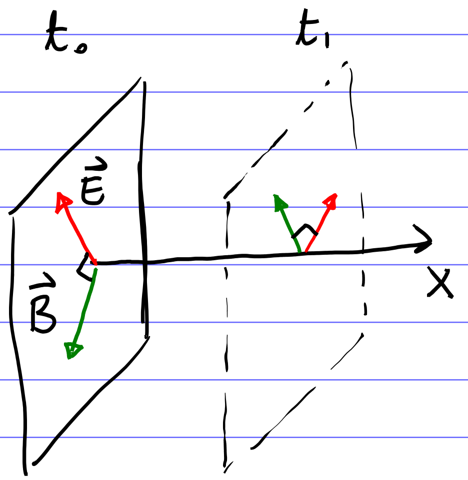
$\boxed{B_{y,0} = -\frac{k}{\omega}E_{z,0} = -\frac{E_{z,0}}{c}}$, con lo stesso procedimento troviamo $\boxed{B_{z,0} = \frac{E_{y,0}}{c}}$

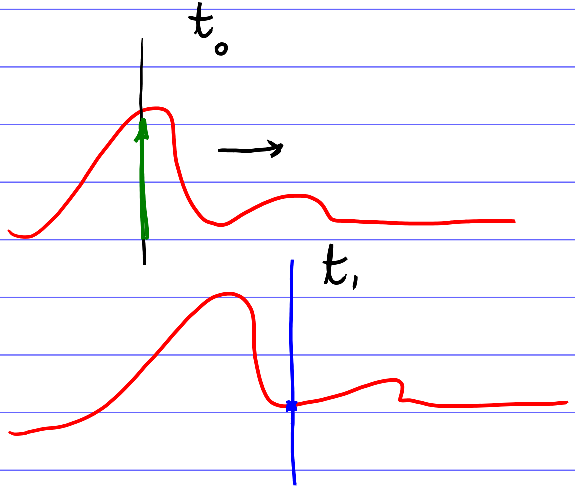
$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{E_z^2}{c^2} + \frac{E_y^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{E}{c}}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}(t) \cdot \vec{B}(t) = E_y B_y + E_z B_z = -\frac{E_y E_z}{c} + \frac{E_y E_z}{c} = 0$$

in un'onda elettromagnetica $\vec{E} \perp \vec{B}$

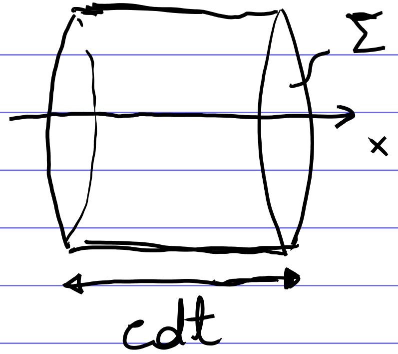
$$\vec{E} \times \vec{B} = (E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \times (B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = \frac{1}{c}(E_y^2 + E_z^2)\hat{x} = \frac{E^2}{c}\hat{x} = cB^2\hat{x} = EB\,\hat{x}$$





ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO

$$u = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{u_e} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}}_{u_m} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E^2$$ densità di energia dell'onda



$$dU = u\,d\tau = u\underbrace{\Sigma c\,dt}_{\text{volume del cilindro}} = \varepsilon_0 E^2 \Sigma c\,dt \Rightarrow$$

$$P_\Sigma = \frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 E^2 \Sigma c$$

possiamo definire un vettore il cui flusso attraverso Σ è proprio P_Σ

$$\vec{S} = \frac{P}{\Sigma}\hat{x} = \varepsilon_0 E^2 c\,\hat{x} = \varepsilon_0 c^2 EB\,\hat{x} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$ vettore di Poynting

$$|\vec{S}| = S = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

questa quantità ci permette di definire l'intensità di un'onda e.m.

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2}$$

intensità dell'onda

pressione di radiazione

- assorbimento completo : $p_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$
- riflessione : $p_{rad} = \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{2I}{c}$