Una construcción geométrica basada en triángulos

Aidan Lorenzo

April 2024

1 Introduction

Abstract: En este paper se explica paso a paso la derivación de la secuencia que será estudiada. Además, con el lenguaje de programación JavaScript podremos hacer un programa que nos haga de manera inmediata la representación gráfica de la misma.

1. Se comienza con un segmento horizontal $\overline{AO}$, donde $|\overline{AO}| = 1$.
2. Se traza otro segmento $\overline{AB}$, donde $|\overline{AB}| = 1$ y $\widehat{A} = x$, un parámetro variable que determinaremos nosotros como argumento. $x \in \mathbb{R}$
3. Unimos los puntos B y O para formar el segmento $\overline{BO}$, cuya longitud ahora desconocemos.
4. Repetimos: ahora consideramos el segmento $\overline{BO}$, y trazamos otro segmento de valor unidad desde B, donde $\widehat{B} = x$ nuevamente.

Repetimos esta secuencia un cierto número k de veces. Esto es, k triángulos.

2 Los dos tramos clave

Al estudiar qué sucede con diferentes valores de x, se llega a la siguiente conclusión: que x en los intervalos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ hace que la construcción tenga una naturaleza algo distinta. Por ello aquí explicaré por separado lo que sucede en ambos casos.

2.1 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

La construcción que se forma cuando x toma valores en el intervalo $[90°, 180°)$ es una espiral. La longitud del segmento $\overline{BO}$ crece hasta el infinito, y ahora explicaré cómo se deriva esto matemáticamente.

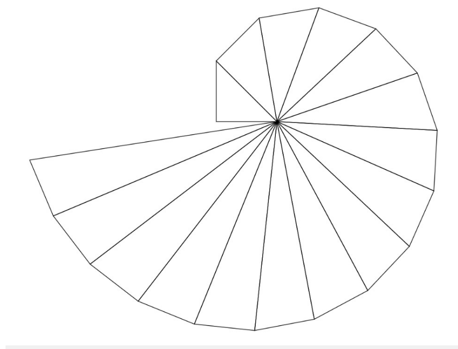

Figure 1: $x = 90°$

Una función $f(x, y)$ cuyo argumento x es un ángulo en radianes ($x \in \mathbb{R}$); el ángulo de generación

El segundo argumento y es el ángulo total, también en radianes ($y \in \mathbb{R}$); el ángulo de compleción

La imagen k, que $k \in \mathbb{R}$, es el número de triángulos (o, más específicamente, de ángulos internos α_i), para alcanzar y.

$$f(x, y) \to k$$

Entonces, la relación entre las variables sería:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) = y$$

Donde $\alpha_i(x)$ es otra función que determina cada ángulo i-ésimo dado un ángulo de generación x.

$$\alpha_i(x) = \cos^{-1} \frac{[c_i(x)]^2 + [c_{i-1}(x)]^2 - 1}{2 \times c_i(x) \times c_{i-1}(x)}$$

Donde $c_i(x)$ es todavía otra función que determina la magnitud del lado c del triángulo i-ésimo, y es una función definida de manera recursiva y derivada del teorema del Coseno.

$i \in \mathbb{N}$, va variando

$x \in (0, \pi)$, es constante

$$c_i(x) = \begin{cases} c_0(x) = 1 \\ \\ c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}(x)^2 - 2 \cdot c_{i-1}(x) \cdot \cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

3 Naturaleza de k

k no es necesariamente un número natural. De hecho, $k \in \mathbb{N}$ es una excepción, y hallar los valores de x que definan una k natural concreta requiere de un algoritmo de búsqueda.

Hay que dejar clara cuál es la interpretación de una $k \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, pues se trata del número de triángulos que se forman hasta cerrar en el ángulo de compleción.

k estará definida como la suma de dos elementos:

$$k = n + r$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $r \in [0, 1)$.

n es la parte natural de k.

El valor de r es la parte del ángulo α_{n+1} que hace falta para completar la suma.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + r \cdot \alpha_{n+1}(x) = y \implies r = \frac{y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)}{\alpha_{n+1}(x)}$$

Definiendo a n

Esto significa que n es ese número para el cual, cuando $r \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) < y \ \ \& \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) > y$$

Obviamente:

$$r = 0 \implies k = n \implies \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) = y$$

Resumen:

Si $r = 0$, $k | \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) = y$

Si $r \neq 0$, $k = n + r$ donde $n | \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) < y \ \ \& \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) > y$
y $r = \frac{y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)}{\alpha_{n+1}(x)}$

PROBLEMA

Qué valores de x cumplirán que no sólo será k_1 natural para completar cierto ángulo y, mas también con un número $k_2 \in \mathbb{N}$ sucederá que cerrará el ángulo $y + \pi$

$$\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i(x) = y \;\;\&\;\; \sum_{i=1}^{k_2} \alpha_i(x) = y + \pi$$

$$\lim_{i\to\infty} c_i(72^\circ) = \varphi$$
$$\lim_{i\to\infty} c_i(36^\circ) = \varphi - 1$$
$$\lim_{i\to\infty} c_i(54^\circ) = \varphi \lim_{i\to\infty} c_i(18^\circ)$$
$$\cos(36^\circ) = \frac{1}{2}\varphi$$
$$\cos(72^\circ) = 2 \cdot \cos^2(36^\circ) - 1$$
$$\cos(72^\circ) = \frac{1}{2}\varphi^2 - 1 = (\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + 1)(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} - 1)$$

La figura que se forma cuando $x = 72^\circ$ es un decágono. Esto es, de un múltiplo del pentágono. Y la construcción a la que se llega con $x = 36^\circ$ es una estrella de 10 puntas con un decágono interno. Esto es relevante porque se relaciona directamente la geometría del pentágono con la razón áurea y con la construcción de figuras a través de la yuxtaposición de triángulos según el método que aquí expongo.

Los límites que aparecen arriba son efectivamente los radios de las construcciones a las que se llegan. La estrella de 10 puntas está inscrita en una circunferencia de radio $\varphi - 1$

Cuando $x = 36^\circ$, se llega rápidamente a que todos los triángulos que se forman son exactamente el mismo. Un triángulo que tiene un ángulo de 36° entre dos segmentos de valor 1 y $\varphi - 1$.

Esto implica que el tercer lado se puede conocer aplicando otra vez el Teorema del Coseno.

$$x^2 = 1^2 + (\varphi - 1)^2 - 2(\varphi - 1) \cdot \frac{1}{2}\varphi$$
$$x^2 = 1 + \varphi^2 - 2\varphi + 1 - (\varphi^2 - \varphi)$$
$$x^2 = 2 - \varphi \implies x = \sqrt{2 - \varphi}$$

Y resulta que:

$$\sqrt{2 - \varphi} = \varphi - 1$$
$$2 - \varphi = \varphi^2 - 2\varphi + 1$$
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ergo estamos construyendo un triángulo isósceles. Y como el ángulo de 36° está entre el segmento desigual y uno de los iguales, se deduce que en el triángulo hay otro ángulo de 36°. En consecuencia, el terecer ángulo es igual a la solución de

$$\alpha + 2 \cdot 36^\circ = 180^\circ$$

que es $a = 108^\circ$.

Si consideramos un pentágono regular donde el vértice A es la punta y $\overline{CD}$ su base, se observa que este triángulo que acabamos de describir es congruente con el triángulo $\triangle ABE$ que se forma en la cúspide del polígono. Esto es un gnomon áureo.

$\lim_{i\to\infty} c_i(x) = r_0$, donde $r_0 \in \mathbb{R}^+$ la construcción converge.