ESERCIZI PAGINA 75

ESERCIZIO 1

Sia dato il linguaggio:

$$L = \{ a^m b^{3m} c^{2n} : m,n > 0 \}$$

determinare una grammatica libera da contesto G che genera L.

Elenchiamo alcune parole di L:

L = { abbbcc, abbbcccc, abbbcccccc,…

aabbbbbbcc, aabbbbbbcccc, aabbbbbbcccccc,… }

Osserviamo che una parola w in L si può riguardare come la concatenzione di 2 parole w' e w'':

$$w = a^m b^{3m} c^{2n} = w' w''$$

con $w' = a^m b^{3m}$ e $w'' = c^{2n}$.

Dunque, per generare w avremo bisogno di una grammatica G in cui ci sia una produzione S->S1 S2 con S1 variabile a cui delegheremo la generazione di w' e S2 variabile cui delegheremo la generazione di w''.

Il linguaggio delle parole di tipo w' può essere definito agevolmente per induzione come segue:

Passo base: abbb€L Passo induttivo: se z€L allora azbbb€L

cui corrispondono le produzioni:

S1->abbb S1-> aS1bbb

Anche il linguaggio delle parole di tipo w'' può essere definito agevolmente per induzione come segue:

Passo base: cc€L Passo induttivo: se z€L allora ccz€L

cui corrispondono le produzioni:

S2->cc S2->ccS2

Dunque, possiamo ipotizzare che una grammatica a forma di frase corretta per L sia la seguente:

G = (X, V, S, P)

ove

X = { a, b, c }, V = { S, S1, S2 } e P = { S->S1 S2, S1->abbb|aS1bbb, S2->cc|ccS2 }

Osservazione:

le produzioni S2->cc|ccS2 possono essere sostituite dalle produzioni (equivalenti) S2->cC, C->c|cS2 ottenendo una grammatica equivalente (ossia tale che L(G)=L(G'))

G' = (X, V, S, P')

ove

X = { a, b, c }, V = { S, S1, S2 } e P' = { S->S1 S2, S1->abbb|aS1bbb, S2->cC, C->c|cS2 }

Differenze tra G e G':

1) Complessità in tempo (velocità di calcolo computata in numero di passi di derivazione)

G è 'più veloce' perché se consideriamo ad esempio la parola w= $abbbc^{1816}$ avremo la seguente derivazione:

$$S \Rightarrow S1S2 \Rightarrow abbbS2 \Rightarrow abbbccS2 \Rightarrow abbbc^4S2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow abbbc^{1816}$$

di lunghezza pari a 908+2 passi,

mentre G' è 'più lenta' in quanto può derivare la stessa parola w= $a\ b^3\ c^{1816}$ con la seguente derivazione:

$$S \Rightarrow S1S2 \Rightarrow abbbS2 \Rightarrow abbbcC \Rightarrow abbbc^2S2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow abbbc^{1816}$$

di lunghezza pari a 1816+2 passi.

ESERCIZIO 2

Stabilire se il seguente linguaggio è libero da contesto

L = { w'€{a,b,c}* | w'=a^n w, w€{b,c}*, |w|=n, n>0 }

Il linguaggio ha cardinalità infinita numerabile. Analizziamo alcune parole di L, elencandole in ordine crescente di lunghezza:

L = {ab, ac, aabb, aabc, aacb, aacc,...}

Il linguaggio è libero da contesto, infatti può essere definito induttivamente come segue:

Passo base: ab€L, ac€L   Passo induttivo: se w€L allora awb€L, awc€L

cui corrispondono le produzioni:

S -> ab | ac   S -> aSb | aSc

Alla luce della definizione induttiva appena fornita, possiamo ipotizzare una grammatica G = (X, V, S, P) corretta per L (ossia, tale che L(G)=L):

X = { a, b, c }, V = { S } e P = { S -> ab | ac | aSb | aSc }