ESERCIZI SU OPERAZIONI SUI LINGUAGGI, LINGUAGGI REGOLARI, AUTOMI A STATI FINITI E PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI REGOLARI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Dipartimento di Informatica
CdS Informatica

Esercizi

- Esercizi sui seguenti argomenti
  - Operazioni sui linguaggi
  - Linguaggi regolari
  - Automi a stati finiti
  - Pumping Lemma per i linguaggi regolari
    - *Esercizio #1*
    - *Esercizio #2*
    - *Esercizio #3*
    - *Esercizio #4*
    - *Esercizio #5*

Esercizio #1

Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b^k c \mid n \geq k \geq 0\}$$

non è lineare destro.

Esercizio #1 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - c
  - ac
  - a^2c
  - a^3c
  - …
  - abc
  - a^2bc
  - a^3bc
  - …

Esercizio #1 - Soluzione

- Supponiamo, <u>per assurdo</u>, che L sia lineare destro
- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
  - Quindi, se L è lineare è anche regolare ed anche a stati finiti
- Quindi: $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)\ FSA$ su $X = \{\mathrm{a, b, c}\}$ tale che

$$L = T(M)$$

- Sia $p = |Q|$, ossia p è il numero di stati di M
- Per il Pumping lemma sui linguaggi regolari abbiamo che $\forall z \in L$, $|z| \geq p$:
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq p$
  - $v \neq \lambda$
  - $\forall k \geq 0: uv^k w \in T(M)$

Esercizio #1 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L:

$$z = a^p b^p c$$

$$|z| = 2p + 1 > p$$

  - z deve essere accettata da M

Esercizio #1 - Soluzione

- L'automa M parte dallo stato q_0 e legge una a per volta
- Dopo aver letto la prima a si porta in q_1, dopo la seconda a in $q_2, \ldots,$ dopo la n-sima a si porta in q_p

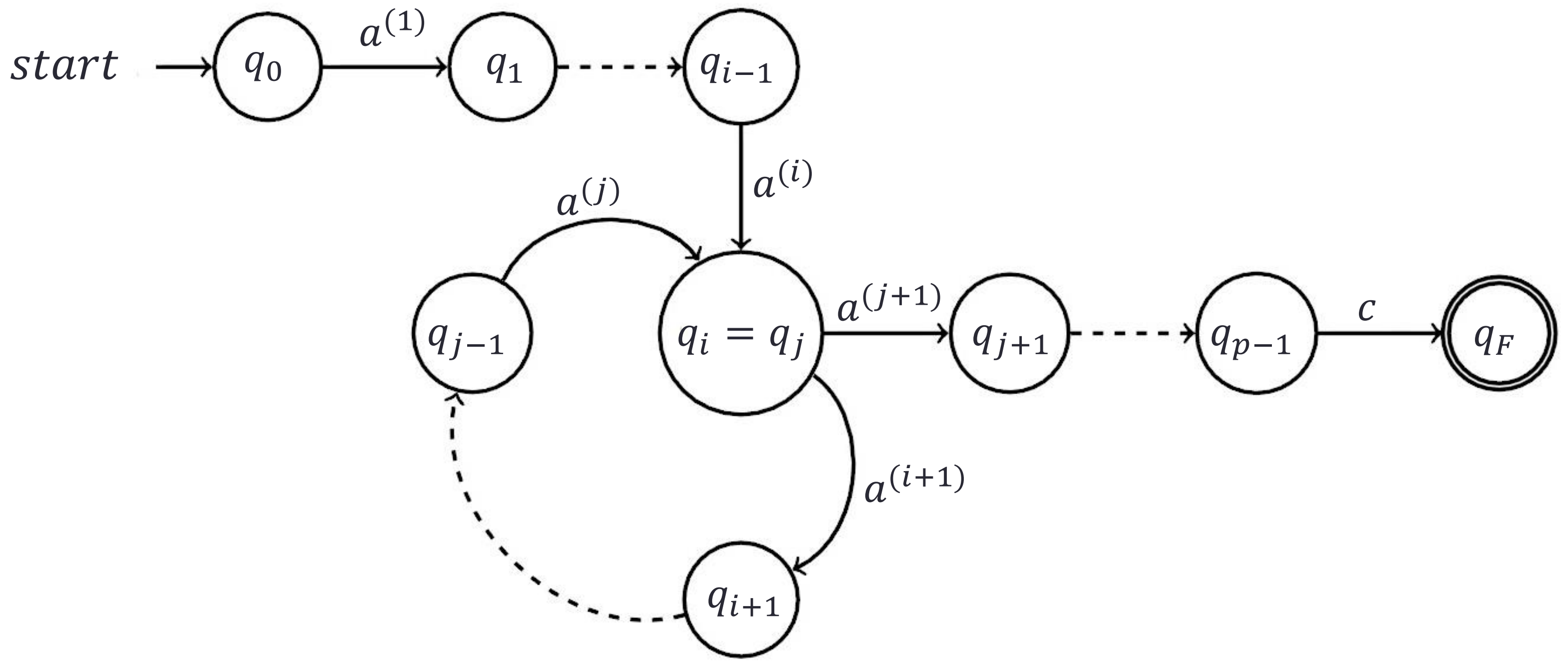
Esercizio #1 - Soluzione

- Per riconoscere le prime p a, l'automa M ha bisogno di transitare in $p+1$ stati

$$p\ a \begin{cases} q_0 \overset{a}{\rightarrow} q_1 \\ q_1 \overset{a}{\rightarrow} q_2 \\ \quad \dots \\ q_{n-1} \overset{a}{\rightarrow} q_p \end{cases}$$

- Poiché M ha solo p stati deve esistere un ciclo

Esercizio #1 - Soluzione



Trace di M

Esercizio #1 - Soluzione

- Avremo che:
  - z si può scrivere come
    $$z = uvw = \underbrace{a^i}_{u}\,\underbrace{a^{j-i}}_{v}\,\underbrace{a^{p-j}b^p c}_{w}$$
  - $|uv| = |a^i a^{j-i}| \leq p$
  - $a^{j-i} \neq \lambda, \qquad 0 < j - i \leq p$
- Consideriamo la parola *depompata*
  $$uv^0w$$
- $uv^0w = a^{p-(j-i)}b^p c \in T(M)$ per il pumping lemma sui linguaggi regolari
- $uv^0w \notin L$ dato che $\#\big(a, uv^0w\big) = p - (j - i) < \#\big(b, uv^0w\big)$=p
- Assurdo.

Esercizio #1 - Soluzione

- Abbiamo raggiunto una **contraddizione**
- L'assurdo deriva dall'aver ipotizzato che L sia un linguaggio lineare destro

Esercizio #2

Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b c^{3n} \mid n > 0\}$$

non è lineare destro.

Esercizio #2 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - a^1bc^3
  - a^2bc^6
  - a^3bc^9
  - a^4bc^{12}
  - ...

Esercizio #2 - Soluzione

- Supponiamo, per assurdo, che L sia lineare destro.
- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
  - Quindi, se L è lineare è anche regolare ed anche a stati finiti.
- Quindi: $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)\ FSA$ su $X = (a, b, c)$ tale che
$$L = T(M)$$
- Sia $p = |Q|$, ossia p è il numero di stati di M
- Per il Pumping lemma sui linguaggi regolari abbiamo che $\forall z \in L$, $|z| > p$:
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq p$
  - $v \neq \lambda$
  - $\forall k \geq 0: uv^k w \in T(M)$

Esercizio #2 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L

$$z = a^p b c^{3p}$$

$$|z| = p + 3p + 1 > p$$

  - z deve essere accettata da M

Esercizio #2 - Soluzione

- L'automa M parte dallo stato q_0 e legge una a per volta
- Dopo aver letto la prima a si porta in q_1, dopo la seconda a in $q_2, \ldots,$ dopo la n-sima a si porta in q_p

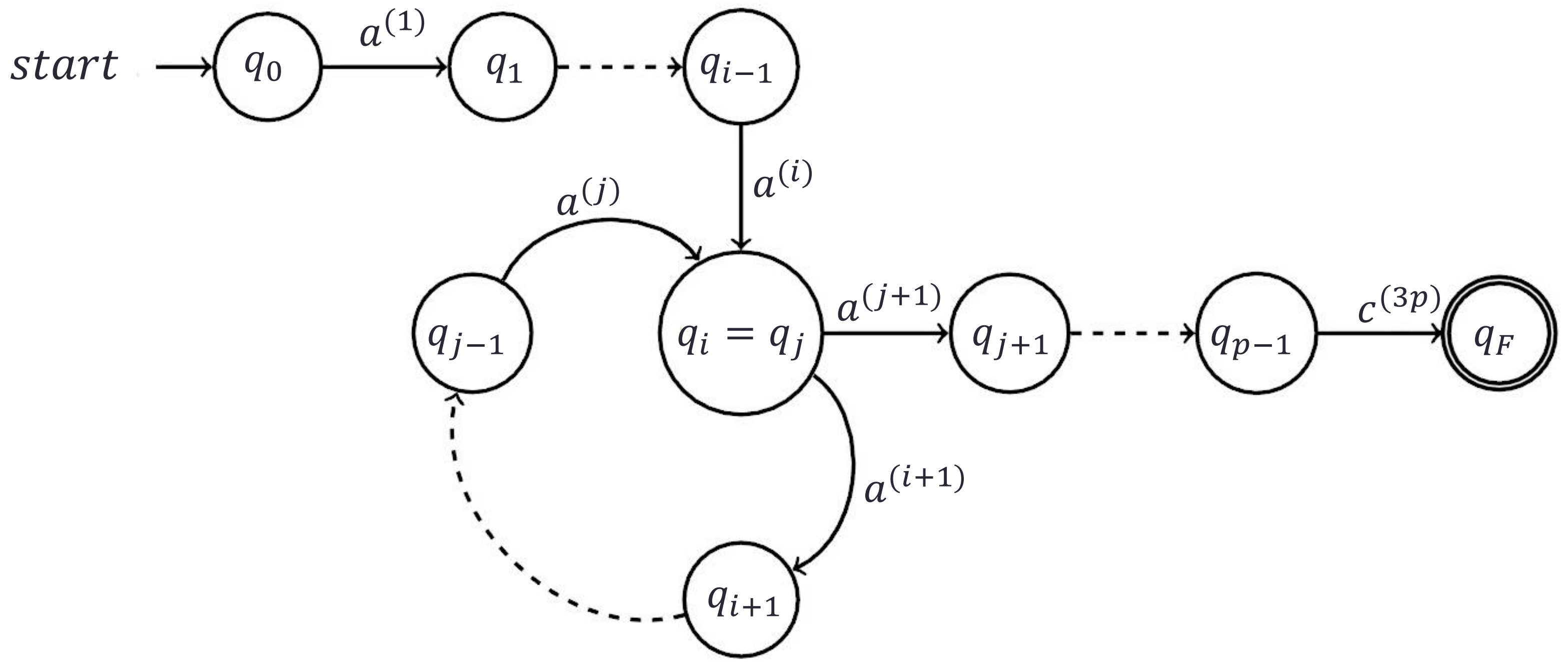
Esercizio #2 - Soluzione

- Per riconoscere le prime $p\ a$, l'automa M ha bisogno di transitare in $p+1$ stati

$$p\ a \begin{cases} q_0 \overset{a}{\rightarrow} q_1 \\ q_1 \overset{a}{\rightarrow} q_2 \\ \dots \\ q_{n-1} \overset{a}{\rightarrow} q_p \end{cases}$$

- Poiché M ha solo p stati deve esistere un ciclo

Esercizio #2 - Soluzione



Trace di M

Esercizio #2 - Soluzione

- Avremo che:
  - z si può scrivere come
$$z = uvw = \underbrace{a^i}_{u}\underbrace{a^{j-i}}_{v}\underbrace{a^{p-j}bc^{3p}}_{w}$$
  - $|uv| = |a^i a^{j-i}| \leq p$
  - $v \neq \lambda$, infatti $a^{j-i} \neq \lambda, 0 < j - i \leq p$
- Per il pumping lemma per i linguaggi regolari abbiamo che la parola *pompata* $uv^2w \in T(M)$

$$uv^2w = a^{p+j-i}bc^{3p} \in T(M)$$

Ma $uv^2w \notin L$ dato che $\#(c, uv^2w) \neq 3\#(a, uv^2w)$

Esercizio #2 - Soluzione

- Abbiamo raggiunto una **contraddizione**
- L'assurdo deriva dall'aver ipotizzato che L sia un linguaggio lineare destro

Esercizio #3

Sia L_1 il linguaggio formale su $X = \{a, b\}$ denotato dall'espressione regolare $(a + b)^*$.

Sia L_2 il linguaggio formale su $X = \{a, b\}$ denotato dall'espressione regolare ab.

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$

Esercizio #3 - Soluzione

- $R_1 = (a+b)^*$
  - Determiniamo $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1

$$S\big((a+b)^*\big) = \big(S(a+b)\big)^* = \big(S(a) \cup S(b)\big)^* =$$
$$= (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a,b\}^*$$

Esercizio #3 - Soluzione

- $R_2 = ab$
  - Determiniamo $S(R_2)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_2

$$S(ab) = \big(S(a) \cdot S(b)\big) = \{ab\}$$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
  - Sia G_1 grammatica generativa $G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$ t.c. $L_1 = L(G_1)$
    - $X_1 = \{a, b\}$
    - $V = \{S_1\}$
    - S_1 assioma
    - $P_1 = \{S_1 \rightarrow \lambda \,| aS_1 | bS_1\}$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
  - Sia G_2 grammatica generativa $G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$ t.c. $L_2 = L(G_2)$
    - $X_2 = \{a, b\}$
    - $V = \{S_2\}$
    - S_2 assioma
    - $P_2 = \{S_2 \rightarrow aA, A \rightarrow b\}$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
  - $P_1 = \{S_1 \to \lambda \,|aS_1|bS_1\}$
  - $P_2 = \{S_2 \to aA, A \to b\}$

$$G = (X, V - \{S\}, S_1, P)$$

$$P = \{A \to bB \mid A \to bB \in P_1\} \cup$$

$$\cup \{A \to bS_2 \mid A \to b \in P_1,\ b \neq \lambda\} \cup$$

$$\cup \{A \to bS_2 \mid A \to bB \in P_1,\ B \to \lambda \in P_1\} \cup$$

$$\cup \{S_1 \to w \mid S_2 \to w \in P_2,\ S_1 \to \lambda \in P_1\} \cup P_2$$

- $G = (X, V - \{S\}, S_1, P)$
  - $X = \{a, b\}$
  - $V = \{S_1, S_2, A\}$
  - S_1 assioma
  - $P = \{S_1 \to aS_1 |\ bS_1\}$ U $\varnothing$ U $\{S_1 \to aS_2|bS_2\}$ U $\{S_1 \to aA\}$ U $P_2 =$ $\{S_1 \to aS_1|bS_1|aS_2|bS_2|aA, S_2 \to aA, A \to b\}$

Esercizio #4

Progettare, commentando opportunamente, un automa a stati finiti riconoscitore per il linguaggio delle stringhe binarie contenenti almeno una volta la sottostringa 00

$$L = \{w \in X^* | w = \alpha\, 00\, \beta, \alpha \in X^*, \beta \in X^*\}$$

Esercizio #4 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)\ FSA$ t.c. $L = T(M)$
  - $X = \{0,1\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ alfabeto degli stati
  - $F = \{q_2\}$

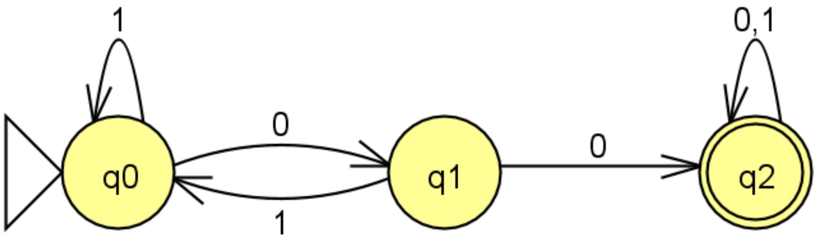
Esercizio #4 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)$ FSA t.c.

$$L = T(M)$$

  - $\delta : Q \times X \to Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2
0	q_1	q_1	q_2
1	q_0	q_0	q_2



Esercizio #5

Sia data la seguente grammatica lineare destra

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\},$$

$$P = \{S \to a|aA|aB, A \to aB|bA, B \to b|bB\}$$

- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti M che riconosce $L(G)$

Esercizio #5 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = \left(Q, \delta, q_0, F\right)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = V \cup \{q\} = \{S, A, B\} \cup \{q\}$, $q \notin V$ alfabeto degli stati
  - $q_0 = S$
  - $F = \{q\} \cup \{B | B \rightarrow \lambda \in P\} = \{q\}$

Esercizio #5 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = \left(Q, \delta, q_0, F\right)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:
  - $\delta: Q \times X \to 2^Q$ t.c.
    - $\forall A \to bC \in P$, allora $C \in \delta(A, b)$
    - $\forall A \to b \in P$, allora $q \in \delta(A, b)$

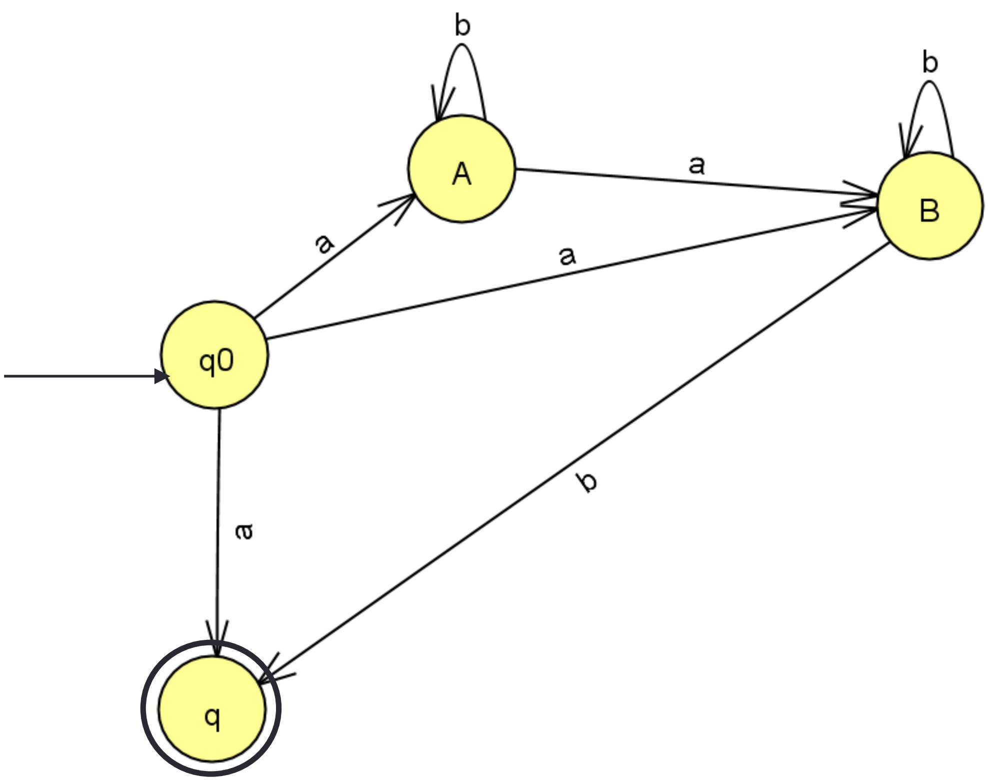
δ	S	A	B	q
a	$\{A, B, q\}$	$\{B\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
b	$\varnothing$	$\{A\}$	$\{B, q\}$	$\varnothing$

Esercizio #5 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = \left(Q, \delta, q_0, F\right)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:

  Diagramma degli stati

  - S = q0



Credits

- Si ringrazia il Tutor 2018-2019: *Francesco Paolo Caforio*