ESERCIZI SU GRAMMATICHE LIBERE E DIPENDENTI DA CONTESTO E PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI LIBERI DA CONTESTO

Esercizi #2 - #3 - #4 - #9 Pumping Lemma per linguaggi context-free

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Dipartimento di Informatica
CdS Informatica

Esercizi

- Esercizi sui seguenti argomenti
  - Pumping lemma per i linguaggi liberi da contesto
    - *Esercizio #2*
    - *Esercizio #3*
    - *Esercizio #4*
    - *Esercizio #9*

Esercizio #2

Stabilire se il seguente linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid j = \min\{i, k\}, i > 0, k > 0\}$$

è libero da contesto

Giustificare formalmente la risposta

Esercizio #2 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - abc
  - abc^2
  - ...
  - a^2bc
  - a^3bc
  - ...
  - $a^2b^2c^2$
  - $a^2b^2c^3$
  - ...

Esercizio #2 - Soluzione

- Supponiamo, per assurdo, che L sia libero da contesto
- Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi da contesto esiste una costante p tale che
$$\forall z, z \in L, |z| > p \implies z = uvwxy$$
ed inoltre valgono le seguenti proprietà
  - $|vwx| \leq p$
  - $vx \neq \lambda$
  - $\forall i \geq 0: uv^i wx^i y \in L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L
$$z = a^p b^p c^p$$
- Avremo che $z \in L$ e
$$|z| = p + p + p = 3p > p$$
- Per z vale quindi il Pumping Lemma e può essere scritta nella forma
$$z = uvwxy$$

Esercizio #2 - Soluzione

- Consideriamo le diverse possibilità per vwx ricordando che $|vwx| \leq p$
  - $vwx = a^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = b^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = c^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = a^t b^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - $vwx = b^t c^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
- Osservazione
  - vwx non può essere formata da a, b e c

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 1
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^{p-k'}b^pc^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $p - p \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1 \Longrightarrow 0 \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una a, al più p a
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $\#_c\left(uv^0wx^0y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) > \#_a\left(uv^0wx^0y\right)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 2
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+k'} c^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più p b
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_a\left(uv^2wx^2y\right)$, $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 3
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^p b^p c^{p-k'}$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $p - p \leq \#_c\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1 \Longrightarrow 0 \leq \#_c\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una c, al più p c
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) > \#_c\left(uv^0wx^0y\right)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 4: $vwx = a^t b^s$, $1 \le t + s \le p$, $1 \le t \le p$, $1 \le s \le p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 4.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 4.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 4.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = a^{t'}$ (v è composta da sole a) con $1 \le t' \le t$; infatti, se $v = a^t b^{s'}$, $1 \le s' \le s$, ne conseguirebbe che $v^2 = a^t b^{s'} a^t b^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = b^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \le s' \le s$; infatti, se $x = a^{t'} b^s$, $1 \le t' \le t$, ne conseguirebbe che $x^2 = a^{t'} b^s a^{t'} b^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 4.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^{p-t'}b^pc^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $p - (p-1) \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1 \Longrightarrow 1 \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $\#_c\left(uv^0wx^0y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) > \#_a\left(uv^0wx^0y\right)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 4.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+s'} c^p$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)\ b$
    - $\#_c(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_a(uv^2wx^2y)$,
    $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 4.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+t'}b^{p+s'}c^p$, $1 \leq t' \leq t$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 5
  - $vwx = b^t c^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 5.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 5.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 5.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = b^{t'}$ (v è composta da sole b) con $1 \leq t' \leq t$; infatti, se $v = b^t c^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = b^t c^{s'} b^t c^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = c^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \leq s' \leq s$; infatti, se $x = b^{t'} c^s$, $1 \leq t' \leq t$, ne conseguirebbe che $x^2 = b^{t'} c^s b^{t'} c^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 5.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t'} c^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_a\left(uv^2wx^2y\right)$,
    $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 5.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^p b^p c^{p-s'}$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $p-(p-1) \leq \#_c\left(uv^0wx^0y\right) \leq p-1 \Longrightarrow 1 \leq \#_c\left(uv^0wx^0y\right) \leq p-1$
      - Togliamo almeno una c, al più $(p-1)$ c
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) > \#_c\left(uv^0wx^0y\right)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Caso 5.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t'} c^{p+s'}$, $1 \leq t' \leq t, 1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ b
    - $p + 1 \leq \#_c\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_c\,(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ c
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_b(z) = \min\{\#_a(z), \#_c(z)\}, z \in L$
  - Si osserva che $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_a(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #2 - Soluzione

- Conclusioni
  - In tutti i casi abbiamo ottenuto che:
    - $uv^0wx^0y \notin L$
    - $uv^2wx^2y \notin L$
  - Violazione del punto (3) del Pumping Lemma per i linguaggi liberi da contesto
  - L non è un linguaggio libero da contesto, poiché per il linguaggio non vale il Pumping Lemma

Esercizio #3

Stabilire se il seguente linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$$

è libero da contesto

Giustificare formalmente la risposta

Esercizio #3 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - λ
  - c
  - $bc \quad cc$
  - $ccc\ bcc\ abc$
  - $cccc\ bccc\ bbcc\ abc^2$
  - $ab^2c^2 \ldots$
  - $a^2b^3c^3 \ldots$
  - $a^2b^3c^4 \ldots$
  - $\ldots$

Esercizio #3 - Soluzione

- Supponiamo, per assurdo, che L sia libero da contesto
- Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi da contesto esiste una costante p tale che
$$\forall z, z \in L, |z| > p \implies z = uvwxy$$
ed inoltre valgono le seguenti proprietà
  - $|vwx| \leq p$
  - $vx \neq \lambda$
  - $\forall i \geq 0 \colon uv^i wx^i y \in L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L

$$z = a^p b^p c^p$$

- Avremo che $z \in L$ e

$$|z| = p + p + p = 3p > p$$

- Per z vale quindi il Pumping Lemma e può essere scritta nella forma

$$z = uvwxy$$

Esercizio #3- Soluzione

- Consideriamo le diverse possibilità per vwx ricordando che $|vwx| \leq p$
  - $vwx = a^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = b^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = c^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = a^t b^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - $vwx = b^t c^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
- Osservazione
  - vwx non può essere formata da a, b e c

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 1: $vwx = a^k$, $1 \leq k \leq p$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+k'}b^pc^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più p a
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
    - $\#_c\left(uv^0wx^0y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) > \#_b\left(uv^2wx^2y\right)$ e $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 2: $vwx = b^k$, $1 \leq k \leq p$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+k'} c^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più p b
    - $\#_c(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 3: $vwx = c^k$, $1 \leq k \leq p$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^p b^p c^{p-k'}$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^0wx^0y) = p$
    - $\#_b(uv^0wx^0y) = p$
    - $p - p \leq \#_c\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1 \Longrightarrow 0 \leq \#_c(uv^0wx^0y) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una c, al più p c
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_c(uv^0wx^0y) < \#_b(uv^0wx^0y)$ e $\#_c(uv^0wx^0y) < \#_a(uv^0wx^0y)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 4: $vwx = a^t b^s$, $1 \le t + s \le p$, $1 \le t \le p$, $1 \le s \le p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 4.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 4.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 4.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = a^{t'}$ (v è composta da sole a) con $1 \le t' \le t$; infatti, se $v = a^t b^{s'}$, $1 \le s' \le s$, ne conseguirebbe che $v^2 = a^t b^{s'} a^t b^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = b^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \le s' \le s$; infatti, se $x = a^{t'} b^s$, $1 \le t' \le t$, ne conseguirebbe che $x^2 = a^{t'} b^s a^{t'} b^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 4.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+t'}b^pc^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) = p$
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - $\text{Vincolo: } 0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) > \#_b\left(uv^2wx^2y\right)$ e $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 4.2: : $v = \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+s'} c^p$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Rightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_c(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$
  - Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 4.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+t'}b^{p+s'}c^p$, $1 \leq t' \leq t$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) < \#_b\left(uv^2wx^2y\right)$ e $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) < \#_a\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 5: $vwx = b^t c^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 5.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 5.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 5.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = b^{t'}$ (v è composta da sole b) con $1 \leq t' \leq t$; infatti, se $v = b^t c^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = b^t c^{s'} b^t c^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = c^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \leq s' \leq s$; infatti, se $v = b^t c^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = b^t c^{s'} b^t c^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 5.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t'} c^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p - 1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p - 1)$ b
    - $\#_c\left(uv^2wx^2y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) > \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 5.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^p b^p c^{p-s'}$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^0wx^0y) = p$
    - $\#_b(uv^0wx^0y) = p$
    - $p - (p-1) \leq \#_c\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1 \Longrightarrow 1 \leq \#_c\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una c, al più $(p-1)$ c
- Osservazioni
  - Vincolo: $0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_c(uv^0wx^0y) < \#_b(uv^0wx^0y)$ e $\#_c(uv^0wx^0y) < \#_a(uv^0wx^0y)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Caso 5.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^p b^{p-t'} c^{p-s'}$, $1 \leq t' \leq t$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^0wx^0y) = p$
    - $p - (p-1) \leq \#_b\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1 \Rightarrow 1 \leq \#_b\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una c, al più $(p-1)\ c$
    - $p - (p-1) \leq \#_c\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1 \Rightarrow 1 \leq \#_c\,(uv^0wx^0y) \leq p - 1$
      - Togliamo almeno una c, al più $(p-1)\ c$
- Osservazioni
  - $\text{Vincolo: } 0 \leq \#_a(z) \leq \#_b(z) \leq \#_c(z)$
  - $\#_c(uv^0wx^0y) < \#_a(uv^0wx^0y)$ e $\#_b(uv^0wx^0y) < \#_a(uv^0wx^0y)$
- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #3 - Soluzione

- Conclusioni
  - In tutti i casi abbiamo ottenuto che:
    - $uv^0wx^0y \notin L$
    - $uv^2wx^2y \notin L$
  - Violazione del punto (3) del Pumping Lemma per i linguaggi liberi da contesto
  - L non è un linguaggio libero da contesto, poiché per il linguaggio non vale il Pumping Lemma

Esercizio #4

Stabilire se il seguente linguaggio

$$L = \{a^r b^k \mid r > k^3, r > 0, k > 0\}$$

è libero da contesto

Giustificare formalmente la risposta

Esercizio #4 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - (1) $a^2b \quad a^3b \quad a^4b \quad a^5b \ldots$
  - (2) $a^9b^2\ a^{10}b^2\ a^{11}b^2\ \ldots$
  - (3) $a^{28}b^3\ a^{29}b^3\ \ a^{30}b^3\ \ldots$
  - $\ldots$
  - (p) $z = a^{p^3+1}b^p$
  - (p+1) $a^{(p+1)^3+1}b^{p+1}$
  - $\ldots$
  - (p+s') $a^{(p+s')^3+1}b^{p+s'}$
  - $\ldots$

In generale, $a^{n^3+1}b^n$

Esercizio #4 - Soluzione

- Supponiamo, per assurdo, che L sia libero da contesto
- Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi da contesto esiste una costante p tale che
$$\forall z, z \in L, |z| > p \implies z = uvwxy$$
ed inoltre valgono le seguenti proprietà
  - $|vwx| \leq p$
  - $vx \neq \lambda$
  - $\forall i \geq 0: uv^i wx^i y \in L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L
$$z = a^{p^3+1} b^p$$
- Avremo che $z \in L$ e
$$|z| = p^3 + 1 + p = p^3 + p + 1 > p$$
- Per z vale quindi il Pumping Lemma e può essere scritta nella forma
$$z = uvwxy$$

Esercizio #4- Soluzione

- Consideriamo le diverse possibilità per vwx ricordando che $|vwx| \leq p$
  - $vwx = a^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = b^k$, $1 \leq k \leq p$
  - $vwx = a^t b^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 1: $vwx = a^k$, $1 \le k \le p$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^{p^3+1-k'}b^p$, $1 \le k' \le k$
  - È evidente che:
    - $p^3 + 1 - p \le \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \le p^3 + 1 - 1 \Longrightarrow p^3 - p + 1 \le \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \le p^3$
      - Togliamo almeno una a, al più p a
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) > \left(\#_b(z)\right)^3$
  - Nella migliore delle ipotesi $\#_a\left(uv^0wx^0y\right) = p^3$ e quindi

$$\#_a\left(uv^0wx^0y\right) \le \left(\#_b\left(uv^0wx^0y\right)\right)^3$$

- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 2: $vwx = b^k$, $1 \leq k \leq p$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p^3+1}b^{p+k'}$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) = p^3 + 1$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più p a
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) > \left(\#_b(z)\right)^3$
  - Nella migliore delle ipotesi $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) = 2p$ e quindi

$$\#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq \left(\#_b\left(uv^2wx^2y\right)\right)^3$$

- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 3: $vwx = a^t b^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 3.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 3.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 3.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = a^{t'}$ (v è composta da sole a) con $1 \leq t' \leq t$; infatti, se $v = a^t b^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = a^t b^{s'} a^t b^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = b^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \leq s' \leq s$; infatti, se $x = a^{t'} b^s$, $1 \leq t' \leq t$, ne conseguirebbe che $x^2 = a^{t'} b^s a^{t'} b^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 3.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
  - Consideriamo la stringa depompata uv^0wx^0y
  - Segue che $uv^0wx^0y = a^{p^3+1-t'}b^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $p^3 + 1 - (p-1) \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p^3 + 1 - 1 \Longrightarrow$ $p^3 - p + 2 \leq \#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq p^3$
      - Togliamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $\#_b\left(uv^0wx^0y\right) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) > \left(\#_b(z)\right)^3$
  - Nella migliore delle ipotesi $\#_a\left(uv^0wx^0y\right) = p^3$ e quindi

$$\#_a\left(uv^0wx^0y\right) \leq \left(\#_b\left(uv^0wx^0y\right)\right)^3$$

- Si conclude che $uv^0wx^0y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 3.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p^3+1}b^{p+s'}$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a\left(uv^2wx^2y\right) = p^3 + 1$
    - $p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\left(uv^2wx^2y\right) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) > \left(\#_b(z)\right)^3$
  - Nella migliore delle ipotesi $\#_b\left(uv^2wx^2y\right) = 2p - 1$ e quindi

$$\#_a\left(uv^2wx^2y\right) \leq \left(\#_b\left(uv^2wx^2y\right)\right)^3$$

- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 3.3
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p^3+1+t'}b^{p+s'}$, $1 \leq t' \leq t$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $p^3 + 1 + 1 \leq \#_a(uv^2wx^2y) \leq p^3 + 1 + (p-1) \Rightarrow$
      $$p^3 + 2 \leq \#_a(uv^2wx^2y) \leq p^3 + p$$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $p + 1 \leq \#_b\ (uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b al più $(p-1)$ b

Esercizio #4 - Soluzione

- Caso 3.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$ - Osservazioni
  - Dobbiamo operare sulla lunghezza della stringa uv^2wx^2y
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx|$
  - Dato che $vx \neq \lambda$ e $|vwx| \leq p$, allora avremo che
    $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq$
    $\leq |uvwxy| + |vwx| = p^3 + 1 + p + |vwx| \leq \ p^3 + 1 + p + p$
    $= p^3 + 2p + 1$
  - Ma $p^3 + 2p + 1 < (p+1)^3 + 1 + \ (p+1) = |\ a^{(p+1)^3+1} b^{p+1}\ |$
    - $(p+1)^3 + 1 + (p+1)$ è la lunghezza della successiva stringa valida a $uvwxy$ con una b in più, cioè $a^{(p+1)^3+1} b^{p+1}$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #4 - Soluzione

- Conclusioni
  - In tutti i casi abbiamo ottenuto che:
    - $uv^0wx^0y \notin L$
    - $uv^2wx^2y \notin L$
  - Violazione del punto (3) del Pumping Lemma per i linguaggi liberi da contesto
  - L non è un linguaggio libero da contesto, poiché per il linguaggio non vale il Pumping Lemma

Esercizio #9

Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b^n a^n \mid n > 0\}$$

non è libero da contesto

Esercizio #9 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - aba
  - $aabbaa$
  - $aaabbbaaa$
  - $a^4b^4a^4$
  - $a^5b^5a^5$
  - $\dots$

Esercizio #9 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
  - Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione

Esercizio #9 - Soluzione

- Considieriamo una parola in L

$$z = a^p b^p a^p$$

- Avremo che $z \in L$ e

$$|z| = p + p + p = 3p > p$$

- Per z vale quindi il Pumping Lemma e può essere scritta nella forma

$$z = uvwxy$$

Esercizio #9 - Soluzione

- Consideriamo le diverse possibilità per vwx ricordando che $|vwx| \leq p$
  - $vwx = a^k, 1 \leq k \leq p$
  - $vwx = b^k, 1 \leq k \leq p$
  - $vwx = a^k, 1 \leq k \leq p$
  - $vwx = a^t b^s, 1 \leq t + s \leq p, 1 \leq t \leq p, 1 \leq s \leq p$
  - $vwx = b^t a^s, 1 \leq t + s \leq p, 1 \leq t \leq p, 1 \leq s \leq p$
- Osservazione
  - vwx non può essere formata da a (iniziali), b e a (finali), così come non può essere a cavallo tra a (iniziali) e b e tra b e a (finali)
  - Non è sufficientemente lunga

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 1
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+k'}b^pa^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\,(uv^2wx^2y) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a(uv^2wx^2y) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più p a
    - $\#_b(uv^2wx^2y) = p$
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$ (Notazione: a' indica le a dopo le b)
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_b(uv^2wx^2y)$ e $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 2
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+k'} a^p$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\ (uv^2wx^2y) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\ (uv^2wx^2y) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più p b
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_a(uv^2wx^2y)$ e $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 3
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^p a^{p+k'}$, $1 \leq k' \leq k$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $\#_b(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_{a'}(uv^2wx^2y) \leq p + p \Longrightarrow p + 1 \leq \#_{a'}(uv^2wx^2y) \leq 2p$
      - Aggiungiamo almeno una a (finale), al più p a (finale)
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) \neq \#_a(uv^2wx^2y)$ e $\#_{a'}(uv^2wx^2y) \neq \#_b(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 4
  - $vwx = a^t b^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 4.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 4.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 4.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = a^{t'}$ (v è composta da sole a) con $1 \leq t' \leq t$; infatti, se $v = a^t b^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = a^t b^{s'} a^t b^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = b^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \leq s' \leq s$; infatti, se $x = a^{t'} b^s$, $1 \leq t' \leq t$, ne conseguirebbe che $x^2 = a^{t'} b^s a^{t'} b^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 4.1
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+t'}b^pa^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $p + 1 \leq \#_a\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_a(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $\#_b(uv^2wx^2y) = p$
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_b(uv^2wx^2y)$ e $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 4.2
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+s'} a^p$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_a(uv^2wx^2y)$ e $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
  - Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 4.3
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^{p+t'}b^{p+s'}a^p$, $1 \leq t' \leq t$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $p+1 \leq \#_a\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p+1 \leq \#_a(uv^2wx^2y) \leq 2p-1$
      - Aggiungiamo almeno una a, al più $(p-1)$ a
    - $p+1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p+1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq 2p-1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$ e $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 5
  - $vwx = b^t a^s$, $1 \leq t + s \leq p$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq s \leq p$
  - Analisi dei sotto-casi
    - Caso 5.1: $v \neq \lambda, x = \lambda$
    - Caso 5.2: $v = \lambda, x \neq \lambda$
    - Caso 5.3: $v \neq \lambda, x \neq \lambda$
  - Osservazioni
    - Se $v \neq \lambda$, allora $v = b^{t'}$ (v è composta da sole b) con $1 \leq t' \leq t$; infatti, se $v = b^t a^{s'}$, $1 \leq s' \leq s$, ne conseguirebbe che $v^2 = b^t a^{s'} b^t a^{s'}$ e $uv^2wx^2y \notin L$
    - Se $x \neq \lambda$, allora $x = a^{s'}$ (x è composta da sole b) con $1 \leq s' \leq s$; infatti, se $x = b^{t'} a^s$, $1 \leq t' \leq t$, ne conseguirebbe che $x^2 = b^{t'} a^s b^{t'} a^s$ e $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 5.1
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t'} a^p$, $1 \leq t' \leq t$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p-1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p-1)$ b
    - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) = p$
- Osservazioni
  - Vincolo: $\#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_a(uv^2wx^2y)$ e $\#_b(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 5.2
  - Consideriamo la stringa pompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^p a^{p+s'}$, $1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y) = p$
    - $\#_b(uv^2wx^2y) = p$
    - $p + 1 \leq \#_{a'}\,(uv^2wx^2y) \leq p + (p - 1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_{a'}\,(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a', al più $(p - 1)a'$
- Osservazioni
  - $\text{Vincolo: } \#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_{a'}(uv^2wx^2y) \neq \#_a(uv^2wx^2y)$ e $\#_{a'}(uv^2wx^2y) \neq \#_b(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Caso 5.3
  - Consideriamo la stringa depompata uv^2wx^2y
  - Segue che $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t'} a^{p+s'}$, $1 \leq t' \leq t, 1 \leq s' \leq s$
  - È evidente che:
    - $\#_a(uv^2wx^2y\ ) = p$
    - $p + 1 \leq \#_b\ (uv^2wx^2y) \leq p + (p - 1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_b(uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una b, al più $(p - 1)\ b$
    - $p + 1 \leq \#_{a'}\ (uv^2wx^2y) \leq p + (p - 1) \Longrightarrow p + 1 \leq \#_{a'}\ (uv^2wx^2y) \leq 2p - 1$
      - Aggiungiamo almeno una a', al più $(p - 1)a'$
- Osservazioni
  - $\text{Vincolo: } \#_a(z) = \#_b(z) = \#_{a'}(z), z \in L$
  - $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_{a'}(uv^2wx^2y)$ e $\#_a(uv^2wx^2y) \neq \#_b(uv^2wx^2y)$
- Si conclude che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio #9 - Soluzione

- Conclusioni
  - In tutti i casi abbiamo ottenuto che:
    - $uv^2wx^2y \notin L$
  - Violazione del punto (3) del Pumping Lemma per i linguaggi liberi da contesto
  - L non è un linguaggio libero da contesto, poiché per il linguaggio non vale il Pumping Lemma

Credits

- Si ringraziano il Prof. Marco de Gemmis ed il Tutor 2018-2019: *Francesco Paolo Caforio*