Linguaggi di Programmazione
Docente: Giovanni Semeraro

Esercitazione 1 – Grammatiche e Linguaggi

Si ringraziano il Prof. Cataldo Musto, il Prof. Marco de Gemmis e il Prof. Pasquale Lops per la concessione del materiale didattico di base

Recap

Quali grammatiche conosciamo finora?

$$L = \{a^n b^n | n > 0\}$$

- Definizione per induzione (sulla lunghezza di $w \in L$)
  - Passo base: $ab \in L$
  - Passo induttivo: se $w \in L$ allora $awb \in L$

Possiamo tradurre la definizione in regole di produzione:

- Passo base: $S \to ab$
- Passo induttivo: $S \to aSb$

Dunque le regole di produzione con una **ricorsione centrale** permettono di mantenere **i vincoli di bilanciamento sulle parole**

Esercizio 1 (Esercizio 2.3 a pag.48)

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 1 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole che costituiscono L
  - $L = \{ab^2, a^2b^4, a^3b^6 \dots\}$
- Cosa notiamo?

Esercizio 1 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole che costituiscono L
  - $L = \{a^1b^2, a^2b^4, a^3b^6 \dots\}$

- Cosa notiamo?
  - Le lunghezze dellle parole crescono in **modo costante**
  - **La parola «successiva» aggiunge 1 ‘*a*’ e 2 ‘*b*’**
  - **Ricorda il linguaggio** $a^n b^n$
    - **una grammatica generativa corretta presenterà delle analogie**

Esercizio 1 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2n} | n > 0\}$

$L = \{a^1 b^2, a^2 b^4, a^3 b^6 \ldots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

Esercizio 1 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2n} | n > 0\}$
$L = \{a^1 b^2, a^2 b^4, a^3 b^6 \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

- Definizione per induzione (sulla lunghezza di $w \in L$)
  - Passo base: $abb \in L$
  - Passo induttivo: se $w \in L$ allora $awbb \in L$

$$P = \{S \to abb \qquad\qquad \}$$

Come regola generale, bisogna determinare sempre una regola di produzione per il 'caso base' (la parola più semplice del linguaggio).

Esercizio 1 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2n} | n > 0\}$
$L = \{a^1 b^2, a^2 b^4, a^3 b^6 \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to abb \qquad \}$$

Suggerimento: quando le parole crescono in modo 'costante' bisogna aggiungere anche una **regola ricorsiva**

Esercizio 1 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2n} | n > 0\}$
$L = \{a^1 b^2, a^2 b^4, a^3 b^6 \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

- Definizione per induzione (sulla lunghezza di $w \in L$)
  - Passo base: $abb \in L$
  - Passo induttivo: se $w \in L$ allora $awbb \in L$

$$P = \{S \to abb, \qquad S \to aSbb\}$$

Per esercizio, selezionate parole appartenenti (e non appartenenti) al linguaggio e provate a derivarle.

Esercizio 1 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $aaabbbbbb \in L$
    - $S \underset{2}{\Rightarrow} aSbb \underset{2}{\Rightarrow} aaSbbbb \underset{1}{\Rightarrow} aaabbbbbb$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbbbbb \in L(G)$

$P = \{S \rightarrow abb, \qquad S \rightarrow aSbb\}$

Esercizio 2

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 2 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole che costituiscono L

$$L = \{a^n b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$$

  - $L = \{b, a^1b^3, a^2b^5, a^3b^7, a^4b^9, a^5b^{11}, \dots a^n bb^{2n}, \dots\}$

Anche se il linguaggio sembra apparentemente un po' diverso dal precedente, ci sono sempre delle regolarità. Ad ogni passo si devono aggiungere una '*a*' e due '*b*'. La circostanza che *n* possa essere uguale a 0 cambia però il 'caso base'

Esercizio 2 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$$

$$L = \{b, a^1 b^3, a^2 b^5, a^3 b^7, \dots \boldsymbol{a^n b b^{2n}}, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

  - **Suggerimento per la grammatica:** determiniamo sempre una grammatica che genera $a^n b^{2n}$, poi troviamo il modo di aggiungere una '*b*' in più – oppure – all'opposto, definiamo delle regole per generare subito una '*b*' e poi aggiungiamo produzioni per generare $a^n b^{2n}$

Esercizio 2 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$

$L = \{b, a^1b^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots \boldsymbol{a^n b b^{2n}}, \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad S$$

- Definizione per induzione (sulla lunghezza di $w \in L$)
  - Passo base: $b \in L$
  - Passo induttivo: se $w \in L$ allora $awbb \in L$

$$P = \{S \to b \mid aSbb\}$$

Esercizio 2 – Soluzione alternativa

$$L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$$

$$L = \{b, a^1 b^3, a^2 b^5, a^3 b^7, \ldots \boldsymbol{a^n b^{2n} b}, \ldots\}$$

- Determinare un'altra grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to b \,|Ab\}$$

Questa regola comincia la derivazione generando subito 1 '$\boldsymbol{b}$', **oppure** possiamo introdurre un nuovo nonterminale (meno efficienza in spazio) per generare $\boldsymbol{a^n b^{2n}}$

Esercizio 2 – Soluzione alternativa

$L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$

$L = \{b, a^1 b^3, a^2 b^5, a^3 b^7, \dots \boldsymbol{a^n b^{2n} b}, \dots\}$

- Determinare un'altra grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to b \mid Ab, \qquad A \to aAbb \mid abb\}$$

grammatica corretta per $\{a^n b^{2n} | n > 0\}$, con A come scopo

Esercizio 2 – Ulteriore Soluzione

$$L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$$
$$L = \{b, a^1b^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots \boldsymbol{a^n b^{2n} b}, \dots\}$$

- Determinare un'ulteriore grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to Ab, \qquad A \to aAbb \mid \lambda\}$$

grammatica corretta per $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$, con A come scopo

ulteriore grammatica corretta per *L*

Esercizio 2 – Ulteriore Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $b \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} Ab \underset{3}{\Rightarrow} b$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} b, \quad b \in L(G)$
  - $aaabbbbbbb \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} Ab \underset{2}{\Rightarrow} aAbbb \underset{2}{\Rightarrow} aaAbbbbb \underset{2}{\Rightarrow} aaaAbbbbbbb \underset{3}{\Rightarrow} aaabbbbbbb$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbbbbbb, \quad aaabbbbbbb \in L(G)$

$$\boldsymbol{P = \{S \rightarrow Ab, \qquad A \rightarrow aAbb \mid \lambda\}}$$

Esercizio 2 – Ulteriore Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $aabbbb \notin L$

$$\boldsymbol{P = \{S \to Ab \qquad A \to aAbb \mid \lambda\}}$$

    - $S \underset{1}{\Rightarrow} Ab \underset{2}{\Rightarrow} aAbbb \underset{2}{\Rightarrow} aaAbbbbb$
      - $aabbbb \notin L(G)$

Esercizio 3

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m \mid n > 0, m > 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 3 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole di L
  - $L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots ab^3c^2, a^2b^4c^2, a^3b^5c^2 \dots,$

    $\dots, ab^4c^3, a^2b^5c^3, a^3b^6c^3, \dots\}$

Cosa notiamo?

Esercizio 3 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole di L
  - $L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots ab^3c^2, a^2b^4c^2, a^3b^5c^2 \dots,$
    $\dots, ab^4c^3, a^2b^5c^3, a^3b^6c^3, \dots\}$

Ogni parola ha un numero di ***b*** pari alla somma delle ***a*** e delle ***c***.
Bisogna dunque immaginare una grammatica che implementi questi vincoli.

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

Ogni parola ha un numero di ***b*** pari alla somma delle ***a*** e delle ***c***.
Bisogna dunque immaginare una grammatica che implementi questi vincoli.

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

Suggerimento: provate a ricondurre una grammatica corretta per L a una grammatica tra quelle 'note' (es. $a^n b^n$)

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

Suggerimento: provate a ricondurre la grammatica a una di quelle 'note' (es. $a^n b^n$)

Suggerimento 2: immaginate la grammatica come concatenazione di due grammatiche note

$$\boldsymbol{a^n b^{n+m} c^m = a^n b^n\ b^m c^m}$$

Esercizio 3 - Soluzione

$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$

$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \rightarrow AB, \qquad A \rightarrow aAb|ab, \qquad B \rightarrow bBc|bc\}$$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \qquad A \to aAb|ab, \qquad B \to bBc|bc\}$$

Questa regola serve a impostare la derivazione come concatenazione di 2 «sotto-linguaggi»

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \qquad A \to aAb|ab, \qquad B \to bBc|bc\}$$

Questi 2 gruppi di regole servono
a derivare i 2 «sotto-linguaggi»:

- da *A* sarà derivato $\boldsymbol{a^n b^n}$
- da *B* sarà derivato $\boldsymbol{b^m c^m}$

Esercizio 3 - Soluzione

$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$

$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \quad A \to aAb|ab, \quad B \to bBc|bc\}$$

I 2 sotto-linguaggi sono caratterizzati dalle classiche regole che generano i linguaggi costituiti da parole le cui lunghezze crescono in maniera costante, come $a^n b^n$.

Esercizio 3 - Soluzione

$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$

$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ mediante l'uso delle regole di produzione P in G
  - $aaabbbbbcc \in L$
  - $abbbcc \in L$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $aaabbbbbcc \in L$
  - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{2}{\Rightarrow} aAbB \underset{2}{\Rightarrow} aaAbbB \underset{3}{\Rightarrow} aaabbbB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbbbBc \underset{5}{\Rightarrow} aaabbbbbcc$

    $S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbbbbcc, \qquad aaabbbbbcc \in L(G)$
  - $abbbcc \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{3}{\Rightarrow} abB \underset{4}{\Rightarrow} abbBc \underset{5}{\Rightarrow} abbbcc$

      $S \overset{*}{\Rightarrow} abbbcc, \qquad abbbcc \in L(G)$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m | n > 0, m > 0\}$$

$$L = \{ab^2c,\ a^2b^3c, a^3b^4c, \dots, a^2b^4c^2, \dots\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $abbbc \notin L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{3}{\Rightarrow} abB \underset{5}{\Rightarrow} abbc$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{3}{\Rightarrow} abB \underset{4}{\Rightarrow} abbBc \underset{5}{\Rightarrow} \dots$
      - $abbbc \notin L(G)$

Esercizio 4

Sia dato il linguaggio $L = \left\{a^n b^{2k+1} \,\middle|\, n \geq 0, k \geq 0\right\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 4 - Soluzione

Sia dato il linguaggio $L = \left\{ a^n b^{2k+1} \middle| \, n \geq 0, k \geq 0 \right\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Apparentemente, questo linguaggio sembra simile a $a^n b^{2n+1}$ ma in realtà la grammatica è differente perché le ***a*** e le ***b*** si sviluppano in modo indipendente.
<u>Notiamo anche che sia *n* sia *k* possono essere uguali a 0.</u>

Esercizio 4 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole che costituiscono L

$$L = \{b, b^3, b^5, \dots, ab, ab^3, ab^5, \dots, a^2b, a^2b^3, a^2b^5, \dots, a^3b, a^3b^3, a^3b^5, \dots\}$$

$$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$$

I vincoli su ***n*** e ***k*** implicano che
possano esistere parole prive di ***a***,
ma non parole prive di ***b***
(perché ***b*** è necessariamente un suffisso)

Esercizio 4 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

Suggerimento

poiché le *a* e le *b* si sviluppano in modo indipendente, possiamo riguardare il linguaggio **come concatenazione di 2 linguaggi più semplici.**

Quali?

Esercizio 4 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \qquad A \to aA | \lambda, \qquad B \to bbB | b\}$$

Esercizio 4 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, V = \{S, A, B\}, S$$

$$P = \{S \to AB, \quad A \to aA | \lambda, \quad B \to bbB | b\}$$

Iniziamo la derivazione 'innescando' i 2 sotto-linguaggi

Esercizio 4 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \qquad A \to aA | \lambda, \qquad B \to bbB | b\}$$

Derivazione delle '*a*'
Ad ogni passo aggiunge 1 ***a*** ed eventualmente continua ricorsivamente (oppure termina la derivazione con ***λ***)

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^n b^{2k+1} \mid n \geq 0, k \geq 0\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to AB, \qquad A \to aA|\lambda, \qquad B \to bbB|b\}$$

Derivazione delle '*b*'
Ad ogni passo aggiunge 2 ***b*** ed eventualmente continua ricorsivamente (oppure termina la derivazione aggiungendo il suffisso ***b***)

Esercizio 4 - Soluzione

$L = \{a^n b^{2k+1} | n \geq 0, k \geq 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to aS | B, \qquad B \to b \mid bbB\}$$

Grammatica alternativa. Il simbolo iniziale produce tutte le ***a*** (ricorsivamente), oppure, se non ci sono, passa direttamente alle ***b***, che sono necessariamente dispari.

Esercizio 4 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $b \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{3}{\Rightarrow} B \underset{5}{\Rightarrow} b$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} b, \qquad b \in L(G)$
  - $aaabbbbb \in L$

Esercizio 4 - Soluzione

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $b \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{3}{\Rightarrow} B \underset{5}{\Rightarrow} b$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} b, \qquad b \in L(G)$
  - $aaabbbbb \in L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{2}{\Rightarrow} aAB \underset{2}{\Rightarrow} aaAB \underset{2}{\Rightarrow} aaaAB \underset{3}{\Rightarrow} aaaB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbbbB \underset{5}{\Rightarrow} aaabbbbb$
      - $S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbbbb, \qquad aaabbbbb \in L(G)$

Esercizio 4 - Soluzione

- Determinare una grammatica grammatica corretta per L
  - Generazione di stringhe $w \in L$ attraverso l'applicazione delle regole di produzione P in G
  - $aaabbbbbbbb \notin L$
    - $S \underset{1}{\Rightarrow} AB \underset{2}{\Rightarrow} aAB \underset{2}{\Rightarrow} aaAB \underset{2}{\Rightarrow} aaaAB \underset{3}{\Rightarrow} aaaB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbbbB \underset{4}{\Rightarrow} aaabbbbbbB$
      $\underset{4}{\Rightarrow} aaabbbbbbbbB \underset{5}{\Rightarrow} aaabbbbbbbb$
      - $aaabbbbbbbb \notin L(G)$

Esercizio 5

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0,\ k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 5

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0,\ k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

In questo caso, oltre al vincolo posizionale, un ulteriore «vincolo» risiede nel fatto che le ***b*** devono essere maggiori della somma delle ***a*** e delle ***c*** **(che a loro volta sono maggiori di 0)**

Esercizio 5

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0,\ k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

In questo caso, oltre al vincolo posizionale, un ulteriore «vincolo» risiede nel fatto che le ***b*** devono essere maggiori della somma delle ***a*** e delle ***c*** **(che a loro volta sono maggiori di 0)**

Fate sempre attenzione ai vincoli sui linguaggi!

Esercizio 5 - Soluzione

$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
- Alcune parole che costituiscono L
  - $L = \{ab^3c, ab^4c, ab^5c, \dots, a^1b^4c^2, a^1b^5c^2, \dots, a^1b^5c^3, \dots, a^2b^4c^1, \dots\}$

$$a^2b^4c = a^1b^1\ b^2\ b^1c^1$$

Esercizio 5 - Soluzione

$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B, C\}, \qquad S$$

Suggerimento: dobbiamo cercare di riportare il linguaggio ad altri linguaggi che già conosciamo.

Quale linguaggio vi ricorda? Quali vincoli introduce?

Esercizio 5 - Soluzione

Quale linguaggio vi ricorda? Quali vincoli introduce?

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

È 'simile', **ma non uguale**, a

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k = i + j\}$$

di cui conosciamo la grammatica.
L'unica differenza risiede nel fatto che ci deve essere **almeno 1 *b* in più.**

Esercizio 5 - Soluzione

Possiamo dunque riscrivere il linguaggio

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

in una forma più simile a quelle che conosciamo

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \mathbf{z > 0} \quad k = i + j + \mathbf{z}\}$$

Esercizio 5 - Soluzione

Possiamo dunque riscrivere il linguaggio

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

n una forma più simile a quelle che conosciamo

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \mathbf{z > 0} \quad k = i + j + \mathbf{z}\}$$

Dire che $k = i + j + z$ è **<u>equivalente</u>** a dire che k è uguale alla somma di $i + j$ più una quantità z.

Esercizio 5 - Soluzione

Possiamo dunque riscrivere il linguaggio

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \boldsymbol{z > 0} \quad k = i + j + \boldsymbol{z}\}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \{a^i b^i b^z b^j c^j \mid i > 0, j > 0, \boldsymbol{z > 0} \quad k = i + j + \boldsymbol{z}\}$$

Esercizio 5 - Soluzione

Possiamo dunque riscrivere il linguaggio

$$L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

$$L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0, \mathbf{z} > \mathbf{0} \quad k = i + j + \mathbf{z}\}$$

$$L = \{a^i b^i b^z b^j c^j | i > 0, j > 0, \mathbf{z} > \mathbf{0} \quad k = i + j + \mathbf{z}\}$$

Le 3 descrizioni sono equivalenti,
ma l'ultimo linguaggio è molto simile a quelli che abbiamo già risolto.

Esercizio 5 - Soluzione

Possiamo dunque riscrivere il linguaggio

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$$

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \boldsymbol{z > 0} \quad k = i + j + \boldsymbol{z}\}$$

$$L = \{a^i b^i b^z b^j c^j \mid i > 0, j > 0, \boldsymbol{z > 0} \quad k = i + j + \boldsymbol{z}\}$$

Le parole di ***L*** si ottengono concatenando parole di 3 linguaggi: $\boldsymbol{a^i b^i}$, $\boldsymbol{b^z}$, $\boldsymbol{b^j c^j}$

Esercizio 5 - Soluzione

$L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0, k > i + j\}$

- Determinare una grammatica correttaa per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B, C\}, \qquad S$$

$$P = \{S \rightarrow ABC,$$

$$\}$$

Esercizio 5 - Soluzione

$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B, C\}, \qquad S$$

$$P = \{S \rightarrow ABC,$$

$$\}$$

Ciascun simbolo nonterminale (anche detta variabile, elemento di V) fungerà da scopo per la generazione corretta dei 3 sotto-linguaggi concatenati

Esercizio 5 - Soluzione

$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, k > i + j\}$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B, C\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to ABC, \qquad A \to ab|aAb$$

$$\}$$

Produzioni per il sotto-linguaggio $\boldsymbol{a^i b^i}$

Esercizio 5 - Soluzione

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, 0 \leq k \leq i + j\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \rightarrow ABC, \qquad A \rightarrow ab|aAb, \qquad B \rightarrow b|bB$$

Produzioni per il sotto-linguaggio $\boldsymbol{b^j}$

Esercizio 5 - Soluzione

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, 0 \le k \le i + j\}$$

- Determinare una grammatica corretta per L
  - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S, A, B\}, \qquad S$$

$$P = \{S \to ABC, A \to ab|aAb, B \to b|bB, \qquad C \to bc|bCb\}$$

Produzioni per il sotto-linguaggio $\boldsymbol{b^k c^k}$

Esercizio 5 - Soluzione

- Importante: fare sempre attenzione ai vincoli del linguaggio. **Minime variazioni portano a grammatiche differenti**

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \quad k > i + j\}$$

$$P = \{S \to ABC, \quad A \to ab|aAb, \quad B \to b|bB, \quad C \to bc|bCb\}$$

$$L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, \quad k \geq i + j\}$$

$$P = \{S \to ABC, \quad A \to ab|aAb, \quad B \to \lambda|bB, \quad C \to bc|bCb\}$$

Esercizio 6 – Senza Soluzione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^2 b^n a^1 | n > 0\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 7 – Senza Soluzione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m \mid n, m > 0, n > m\}$

- Determinare una grammatica corretta per L

Esercizio 8 – Senza Soluzione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid n > 0, m > 0\}$

- Determinare una grammatica corretta G per L.

Esercizio 9 (Esercizio 2.2 a pag.38)

- Sia data la seguente grammatica:

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{0, 1\} \qquad V = \{S, A, B\}$$

$$P = \left\{ S \to \overset{(1)}{0B} \mid \overset{(2)}{1A},\ A \to \overset{(3)}{0} \mid \overset{(4)}{0S} \mid \overset{(5)}{1AA},\ B \to \overset{(6)}{1} \mid \overset{(7)}{1S} \mid \overset{(8)}{0BB} \right\}$$

- Determinare il linguaggio $L(G)$ generato da G.

$$L(G) = \{\, w \in X^* \mid \#(0, w) = \#(1, w) \,\}$$

ove $\#(x, w)$ è una funzione che ‘conta’ il numero di simboli x presenti nella parola w

$$\#: X \times X^* \to \mathbb{N}$$

Esercizio 9

- Sia data la seguente grammatica:

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{0, 1\} \qquad V = \{S, A, B\}$$

$$P = \left\{ S \to \overset{(1)}{0B} \,|\, \overset{(2)}{1A},\ A \to \overset{(3)}{0} \,|\, \overset{(4)}{0S} \,|\, \overset{(5)}{1AA},\ B \to \overset{(6)}{1} \,|\, \overset{(7)}{1S} \,|\, \overset{(8)}{0BB} \right\}$$

- Determinare il linguaggio generato da *G*.
- ***L* = parole con stesso numero di 0 e di 1.**

Esercizio 9bis (variante Esercizio 2.2 a pag.38)

- Sia dato il seguente linguaggio :

$$L = \{ w \in X^* \mid \#(0, w) = \#(1, w) \}$$

ove $\#(x, w)$ è una funzione che 'conta' il numero di simboli x presenti nella parola w

$$\#: X \times X^* \to \mathbb{N}$$

- Determinare una grammatica G corretta per L.
  - Definizione per induzione (sulla lunghezza di $w \in L$)
  - Passo base: ???
  - Passo induttivo: ???

Esercizio 10 (Esercizio 2.1 a pag.34)

- Determinare una grammatica corretta che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

Esercizio 10

Il primo passo della risoluzione **è determinare una grammatica**

Esercizio 2.1

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

Esercizio 10

Il primo passo della risoluzione **è determinare una grammatica**

Esercizio 2.1

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

2) Che tipo di grammatica genera L ?

1)

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad P = \left\{ S \underset{(1)}{\rightarrow} aSb,\ S \underset{(2)}{\rightarrow} ab \right\}$$

Esercizio 10

A seguire, dimostriamo la prima inclusione *L*(*G*) incluso in *L*

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in X^*$$

Esercizio 10

Dobbiamo dimostrare che tutto ciò che deriva da *G* appartiene ad *L*

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w, \ w \in X^*$$

Esercizio 10

Dobbiamo dimostrare che tutto ciò che deriva da *G* appartiene ad *L*

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in X^*$$

A questo scopo, **applichiamo il principio di induzione.**
Procediamo **per induzione sulla lunghezza della derivazione.**

Passo base:
dimostro che tutto ciò che deriva da *G* in **1 passo** appartiene ad *L*

Passo induttivo:
assumendo che tutto ciò che deriva da *G* in ***n*-1 passi** appartiene ad *L (ipotesi di induzione)*,
dimostriamo che anche ciò che deriva in *n* **passi** appartiene ad *L*

Esercizio 10

Applichiamo il principio di induzione

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} S \stackrel{*}{\Rightarrow} w, \; w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S. Denoto con n la lunghezza della derivazione di w da S.

Esercizio 10

Passo base: **dimostro che** tutto ciò che deriva da *G* **in 1 passo** appartiene ad *L*

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S. Denoto con n la lunghezza della derivazione di w da S.

<u>Passo base</u>

$n = 1$

Esercizio 10

Passo base: dimostro che tutto ciò che deriva da G **in 1 passo** appartiene ad L

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S. Denoto con n la lunghezza della derivazione di w da S.

<u>Passo base</u>

$n = 1$

$S \underset{(2)}{\overset{n}{\Rightarrow}} ab$ è l'unica derivazione di lunghezza $n = 1$ che genera stringhe di soli terminali.

È immediato verificare che $ab \in L$.

Esercizio 10

Passo induttivo:
assumendo che tutto ciò che deriva da *G* in ***n*-1 passi** appartiene ad *L*,
dimostriamo che anche ciò che deriva in ***n* passi** appartiene ad *L*

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L(G),\ S \overset{n-1}{\Rightarrow} w' \ (w' \text{ è derivabile in } n-1 \text{ passi da } S)$$

$$\text{allora } w' \in L\text{”}$$

allora anche l'enunciato:

$$\text{“se } w \in L(G),\ S \overset{n}{\Rightarrow} w \text{ allora } w \in L\text{”}$$

risulta vero.

Esercizio 10

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L(G),\ S \overset{n-1}{\Rightarrow} w' \text{ (} w' \text{ è derivabile in } n{-}1 \text{ passi da } S\text{)}$$

$$\text{allora } w' \in L \text{”}$$

allora anche l'enunciato:

$$\text{“se } w \in L(G),\ S \overset{n}{\Rightarrow} w \text{ allora } w \in L \text{”}$$

risulta vero.

Consideriamo:

$$w \in L(G),\ \text{con } S \overset{n}{\Rightarrow} w\,.$$

Per definizione (di derivabilità in n passi), esiste una sequenza di forme di frase $w_1, w_2, \ldots, w_n$ con $w_n = w$, tale che w_1 deriva direttamente da S e, per ogni i ($i = 1, 2, \ldots, n{-}1$), w_{i+1} deriva direttamente da w_i.

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n = w$$

Esercizio 10

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da S in n–1 passi è una parola di L. Dunque, da S è possibile derivare in n–1 passi una stringa del tipo: $w' = a^k b^k,\ k > 0$.

Più precisamente, $w' = a^{n-1} b^{n-1}$, poiché:

$$S \underset{(1)}{\overset{k}{\Rightarrow}} a^k S b^k,\ k > 0 .$$

Esercizio 10

Si ha, infatti:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \overset{n-1}{\Rightarrow} aw'b = a^n b^n = w$$

Risulta così dimostrato $L(G) \subset L$.

Esercizio 10

Infine, dimostriamo la seconda inclusione → *L* incluso in *L*(*G*)

ii) $L \subset L(G)$

Esercizio 10

Dobbiamo dimostrare che tutto ciò che è in *L* si può derivare da *G*

ii) $L \subset L(G)$

Come prima, **applichiamo il principio di induzione,**
ma questa volta **procediamo per induzione sulla lunghezza della parola.**

Passo base:
dimostro che tutte le parole di lunghezza minima (**2**) sono derivabili

Passo induttivo:
assumendo che tutte le parole di lunghezza **2*(*n*-1) siano derivabili** (***ipotesi di induzione***),
dimostriamo che le parole di lunghezza **2*n* siano derivabili**

Esercizio 10

Passo base: **dimostro che** tutte le parole di lunghezza minima (2) sono derivabili

ii) $L \subset L(G)$

Sia w una parola di L. Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa w*.

Passo base

Prendiamo in considerazione la parola di L di lunghezza minima.

$$n = 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \qquad w = ab$$

Dobbiamo dimostrare che: $S \overset{*}{\Rightarrow} ab$.

Esercizio 10

Passo base: dimostro che tutte le parole di lunghezza minima (2) sono derivabili

ii) $L \subset L(G)$

Sia w una parola di L. Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa* w.

<u>Passo base</u>

Prendiamo in considerazione la parola di L di lunghezza minima.

$$n = 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \qquad\qquad w = ab$$

Dobbiamo dimostrare che: $S \overset{*}{\Rightarrow} ab$.

Banale. Applichiamo la produzione (2) di G ed otteniamo che $w = ab$ è direttamente derivabile da S.

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} ab$$

Esercizio 10

Passo induttivo:
assumendo che tutte le parole di lunghezza **2(*n*-1) siano derivabili**, **dimostriamo che** le parole di lunghezza **2*n*** siano derivabili

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L,\ |w'| = 2(n-1) \text{ allora } S \overset{*}{\Rightarrow} w' \text{”}$$

allora anche il seguente enunciato:

$$\text{“se } w \in L,\ |w| = 2n \text{ allora } S \overset{*}{\Rightarrow} w \text{”}$$

risulta vero.

Esercizio 10

Sia w una parola su X tale che:

$$w \in L,\ |w| = 2n,\ n > 1\,.$$

Ovviamente, $w = a^n b^n$ (unica parola di L di lunghezza $2n$). Nella (ipotetica) derivazione di w da S, devo necessariamente applicare la produzione (1) di G, come 1° passo (altrimenti riotterrei la parola ab).

Dunque:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \qquad \text{(a)}$$

Esercizio 10

Sia w una parola su X tale che:

$$w \in L,\ |w| = 2n,\ n > 1\,.$$

Ovviamente, $w = a^n b^n$ (unica parola di L di lunghezza $2n$). Nella (ipotetica) derivazione di w da S, devo necessariamente applicare la produzione (1) di G, come 1° passo (altrimenti riotterrei la parola ab).

Dunque:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \qquad \text{(a)}$$

Per ipotesi di induzione, ogni parola di L di lunghezza $2(n-1)$ è derivabile da S (in G).

Dunque, anche $w' = a^{n-1}b^{n-1}$ è derivabile da S:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w' = a^{n-1}b^{n-1} \qquad \text{(b)}$$

Esercizio 10

Ne consegue che $w = a^n b^n$ è derivabile da S e la relativa derivazione è ottenuta applicando in successione (a) e (b).

$$\underbrace{S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb}_{(a)} \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} aw'b}_{(b)} = aa^{n-1}b^{n-1}b = w$$

Dunque, $L \subset L(G)$ e

$$L = L(G)$$