Esercizio 7.3 (pagina 205), addendum

Data la seguente grammatica G di tipo 3
$G = (X, V, S, P)$ dove $X = \{a, b, c\}$, $V = \{S, A, B, C\}$, $P = \{ S \to aA|aB|\lambda,\ A \to aS|a,\ B \to aC,\ C \to aS|a \}$,
determinare un'espressione regolare R tale che S(R)=L(G).

Considero il seguente sistema di 4 equazioni (le produzioni di G) in 4 incognite (le variabili di G), derivante da G:

$$S = aA \cup aB \cup \lambda$$

$$A = aS \cup a$$

$$B = aC$$

$$C = aS \cup a$$

Sostituisco C in B:

$$B = a(aS \cup A) = aaS \cup aa$$

Sostituisco A e B in S:

$$S = a(aS \cup a) \cup a(aaS \cup aa) \cup \lambda$$

Applico la proprietà distributiva a sinistra della concatenazione rispetto all'unione:

$$S = aaS \cup aa \cup aaaS \cup aaa \cup \lambda$$

Interpreto S come espressione regolare ottenendo la seguente equivalenza tra espressioni regolari:

$$S = aaS + aa + aaS + aaa + \lambda$$

Applico la proprietà distributiva a destra della concatenazione rispetto all'unione:

$$S = (aa + aaa)S + aa + aaa + \lambda$$

Applico la proprietà 20) delle espressioni regolari (pag.187), ovvero:

$$R_1 = R_2\, R_1 + R_3 \qquad \text{se e solo se} \qquad R_1 = {R_2}^*\, R_3$$

ottengo:

$$S = (aa + aaa)^*(aa + aaa + \lambda)$$

Applico la proprietà distributiva a sinistra della concatenazione rispetto all'unione:

$$S = (aa + aaa)^*(aa + aaa) + (aa + aaa)^*\lambda$$

Applico la proprietà 7) delle espressioni regolari (pag.186), ovvero:

$$R_1\lambda = \lambda\, R_1 = R_1$$

ottengo:

$$S = (aa + aaa)^*(aa + aaa) + (aa + aaa)^*$$

Osservo infine che:

$$S\big((aa + aaa)^*(aa + aaa)\big) \subset S(\,(aa + aaa)^*)$$

Dunque un'espressione regolare R tale che S(R)=L(G) è la seguente:

$$R = (aa + aaa)^*$$