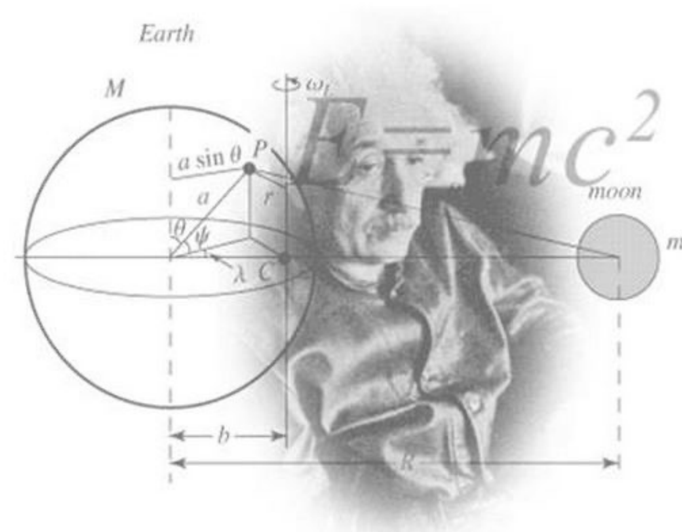
ELETTROMAGNETISMO

Fondamenti di Fisica
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2022/23



- ***Dott. Francesco Scattarella***
- ***Università di Bari***
- ***Email: francesco.scattarella@uniba.it***
- ***Ufficio: Dipartimento IA di Fisica, 234- tel. 080 544 2369***

Argomenti

- ELETTROSTATICA
- CORRENTE ELETTRICA
- MAGNETISMO

ELETTROSTATICA

Carica elettrica

- I primi studi di cui si ha notizia sui fenomeni di natura elettrica risalgono agli antichi greci
  - Una bacchetta di ambra (ambra = electron) strofinata con un panno di lana ha la proprietà di attirare piccole pagliuzze
- Molti fenomeni elettrici sono facilmente osservabili in natura e nella vita di tutti i giorni
  - I fulmini sono scariche elettriche tra le nubi ed il suolo
  - Quando si scende da un'automobile, spesso capita di sentire una "scossa"
- La carica elettrica è una caratteristica intrinseca delle particelle fondamentali che costituiscono la materia
- In natura esistono due tipi di cariche elettriche: cariche positive e cariche negative
- La materia, normalmente, si presenta in uno stato elettricamente neutro: le cariche positive sono bilanciate da quelle negative
- I corpi carichi esercitano delle forze tra di loro

https://www.youtube.com/watch?v=EHAa3MWnkC8

Conduttori e isolanti

- **Conduttori** = corpi in cui sono presenti cariche che possono muoversi liberamente nel materiale
  - Nei **metalli** le cariche libere sono gli elettroni di conduzione
  - Nelle **soluzioni elettrolitiche** le cariche libere sono gli ioni positivi e negativi

- **Isolanti** = corpi in cui le cariche elettriche non possono muoversi liberamente, ma sono vincolate dal legame chimico
  - Esempi di isolanti sono il vetro, la plastica, la gomma, etc.

- La Terra può essere immaginata come un enorme conduttore
  - Se un corpo carico è collegato a terra mediante un conduttore, le cariche in eccesso tendono a neutralizzarsi ed il corpo si scarica (la cosiddetta *messa a terra*)

Legge di Coulomb

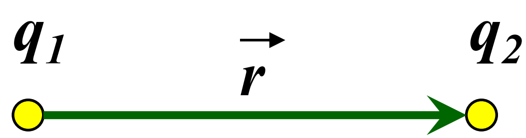
La forza di interazione tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 è:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

(legge di Coulomb)

dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge le due cariche puntiformi e $k=9\times10^9 N\cdot m^2/C^2$ è una costante

Se si vuole calcolare la forza che q_1 esercita su q_2, il vettore $\vec{r}$ va preso da q_1 a q_2; se invece si vuole calcolare la forza che q_2 esercita su q_1, $\vec{r}$ va preso da q_2 a q_1: le due forze sono, per la terza legge di Newton, uguali in modulo e direzione, ma hanno versi opposti



- Se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno, $\vec{F}$ è diretta come $\vec{r}$ (repulsiva)
- Se q_1 e q_2 sono di segno opposto, $\vec{F}$ è diretta come $-\vec{r}$ (attrattiva)

Unità di misura

- L'unità di misura della carica elettrica nel SI è il Coulomb (C)
  - La costante k vale $9 \times 10^9\ Nm^2/C^2$
- Per semplificare molte formule è conveniente esprimere la costante k come $k=1/4\pi\varepsilon_0$ dove $\varepsilon_0=8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$ detta costante dielettrica nel vuoto
- La legge di Coulomb risulta così espressa nella forma:

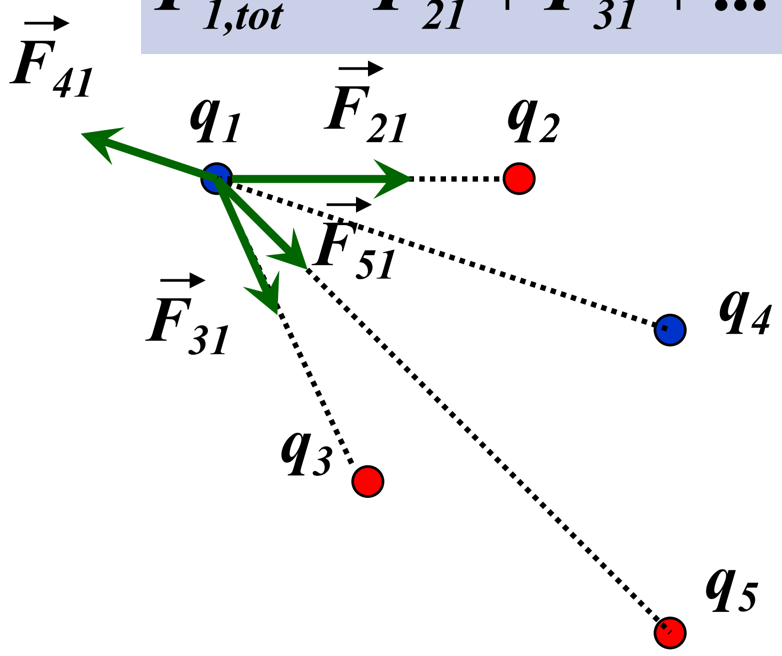
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

Principio di sovrapposizione

Consideriamo un sistema di cariche elettriche q_1 , q_2 , ... , q_N. Qual è la forza totale elettrica agente su q_1 ?

Principio di sovrapposizione: la forza totale agente su una carica è data dalla somma vettoriale di tutte le forze esercitate su di essa dalle varie cariche del sistema

$$\vec{F}_{1,tot} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \ldots + \vec{F}_{N1}$$



Quantizzazione della carica elettrica

- L'esperimento di Millikan dimostrò che la carica elettrica è quantizzata, cioè può assumere soltanto dei valori che siano multipli interi dell'unità di carica elementare $e=1{,}602 \times 10^{-19}$C (e=carica dell'elettrone):

$$q = ne \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

- La quantizzazione della carica non è osservabile nei fenomeni su grande scala
  - Esempio: una carica di 1pC corrisponde a $6{,}2 \times 10^{6}$ cariche elettroniche
- Il protone e l'elettrone hanno carica in modulo pari ad e
- Esistono particelle subnucleari (i quark) che hanno cariche di $\pm e/3$ e $\pm 2e/3$, per cui il quanto di carica è in effetti pari a $e/3$
- La carica elettrica è una quantità che si conserva sempre nei processi naturali (e.g.: decadimenti radioattivi)

Esempio

Due goccioline d'acqua, aventi un'identica carica di $-1{,}00 \times 10^{-16}$ C hanno i loro centri distanti 1,00cm. Calcolare l'intensità della forza elettrostatica presente tra di loro. A quanti elettroni corrisponde la carica in eccesso posseduta da ciascuna goccia?

Modulo della forza elettrostatica:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = 9{,}00 \times 10^{-19}\ N$$

Numero di elettroni:

$$n_e = \frac{|q_1|}{e} = \frac{1{,}00 \times 10^{-16}\ C}{1{,}60 \times 10^{-19}\ C} = 625\ elettroni$$

Campo Elettrico

Azione a distanza e campo elettrico

- Consideriamo una carica di prova q_0 in una regione di spazio in cui è presente un'altra carica Q
- Su q_0 agisce una forza data dalla legge di Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Teoria dell'azione a distanza: la carica q_0 risente istantaneamente di eventuali variazioni della carica Q

Teoria di campo: la carica Q genera un campo elettrico in tutti i punti dello spazio, e la forza agente sulla carica q_0 è dovuta al campo elettrico generato da Q, che esiste a prescindere da q_0 . Poichè il campo si propaga con velocità finita (pari alla velocità della luce), la carica q_0 non si accorge istantaneamente di una eventuale variazione di Q, ma dopo il tempo necessario per la propagazione del campo

Campo elettrico

- Consideriamo un sistema di cariche, che genera un campo elettrico in tutti i punti dello spazio
- Per valutare il campo elettrico in un punto P si introduce in P una carica di prova (o esploratrice) q_0
- La carica di prova deve essere sufficientemente piccola in modo da non perturbare il campo generato dalle cariche di partenza
- Si definisce il campo elettrico nel punto P come rapporto tra la forza agente sulla carica di prova e la stessa carica di prova:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

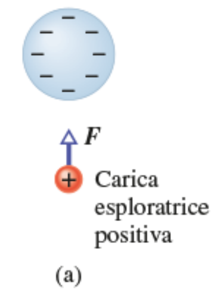
- Il vettore campo elettrico non dipende dal segno della carica di prova

Campo di una carica puntiforme

Calcoliamo il campo elettrico generato da una carica puntiforme q in tutti i punti dello spazio

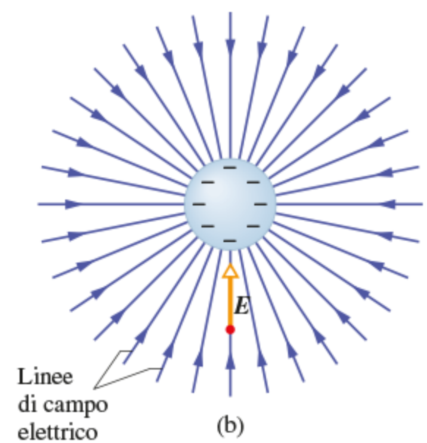
La forza agente su una carica di prova q_0 è data da:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$



- Il modulo del campo decresce col quadrato della distanza r dalla carica q ed è costante su tutti i punti di una superficie sferica di raggio r centrata sulla carica q

- Il campo ha direzione radiale, uscente se $q>0$, entrante se $q<0$



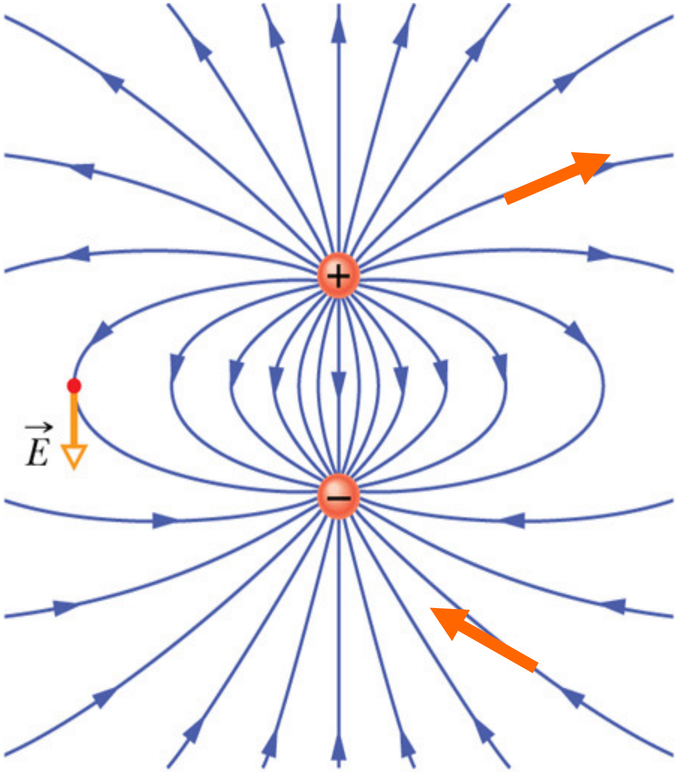
Linee del campo elettrico

Faraday introdusse la rappresentazione grafica del campo elettrico mediante le **linee di campo** (o **linee di forza**)

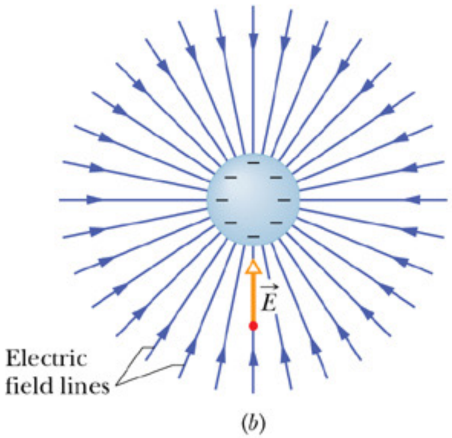
- **Linea di campo**: è una linea costruita in maniera da essere in ogni suo punto tangente al vettore campo elettrico

- Le linee del campo elettrico escono dalle cariche positive (sorgenti) ed entrano nelle cariche negative (pozzi)

- **Convenzione di Faraday**: il numero di linee di campo che attraversano una superficie di area unitaria ad esse perpendicolare è proporzionale all'intensità del campo

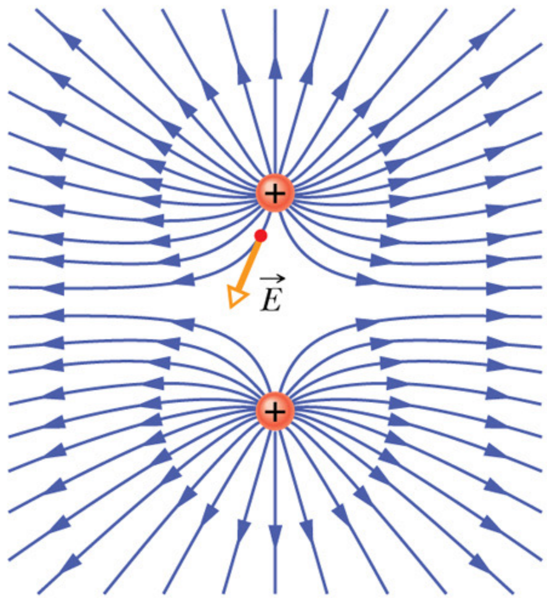


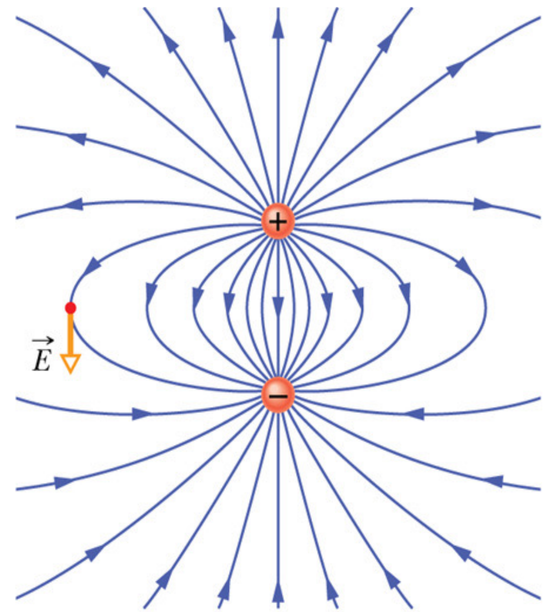
Esempi di rappresentazioni con le linee di campo



carica puntiforme negativa

due cariche puntiformi positive





due cariche puntiformi di segno opposto (dipolo elettrico)

Flusso

- Consideriamo un fluido che scorre in un tubo con velocità **v**
- Consideriamo inoltre una sezione A del tubo ortogonale a **v**

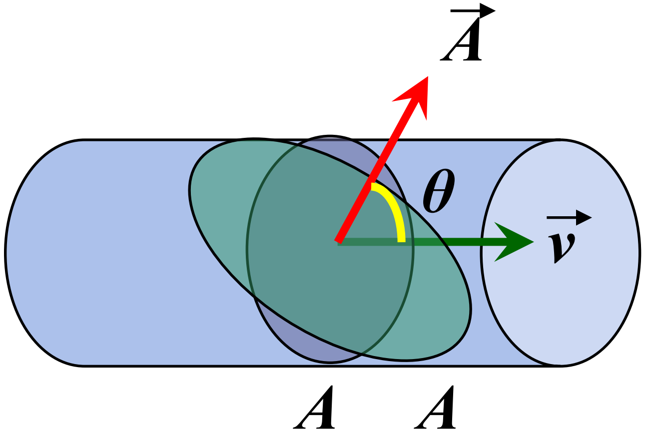
Flusso attraverso la superficie A: $\boxed{\Phi = Av}$

Come si definisce il flusso se A non è perpendicolare a **v** ?

1. **si introduce il vettore A, di modulo pari ad A, perpendicolare alla superficie**

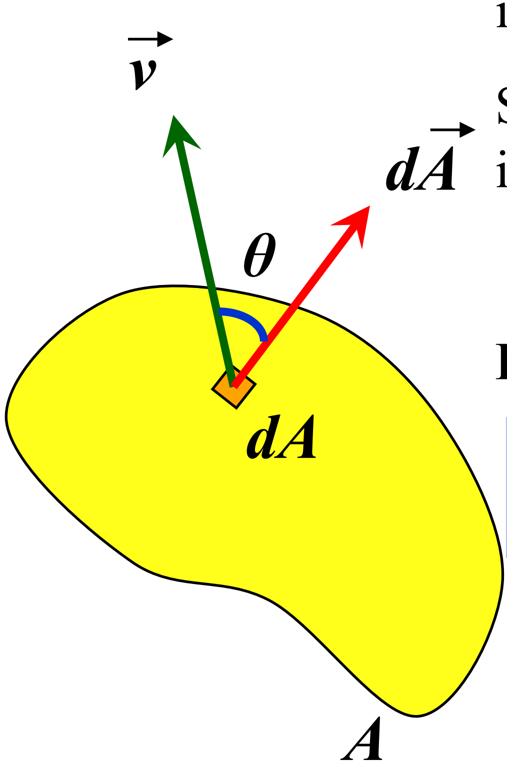
2. **il flusso è definito come prodotto scalare:**

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{v} = A\ v \cos\theta$$



Flusso di un campo vettoriale

- La definizione di flusso, data per il campo delle velocità di un fluido, può essere estesa a qualsiasi campo vettoriale **v**
- Come si definisce il flusso se la superficie **A** ha forma arbitraria ed il campo vettoriale varia da punto a punto?



Si scompone **A** in elementi di area infinitesima **dA** su cui **v** è costante

Si calcola per ciascun elemento infinitesimo il flusso elementare:

$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Il flusso totale è dato dall'integrale:

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int v\,dA\cos\theta$$

Flusso del campo elettrico

La definizione di flusso, valida per qualsiasi campo vettoriale, può essere data anche nel caso del **campo elettrico**:

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int EdA\cos\theta$$

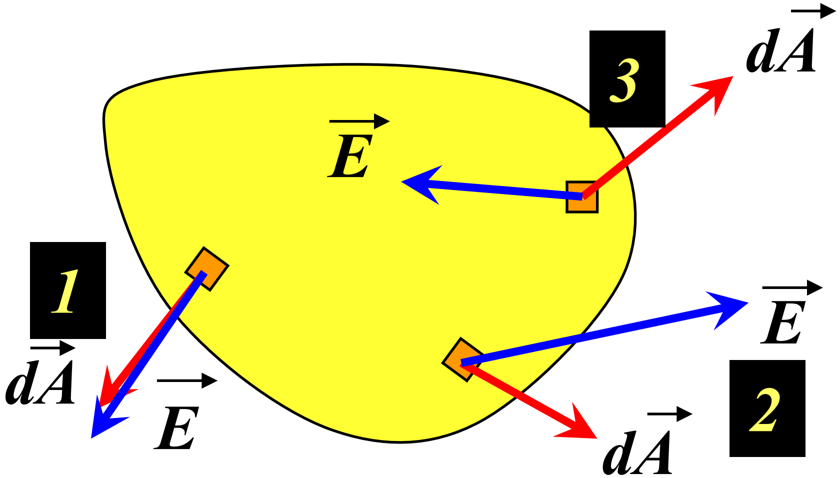
Se la superficie è **chiusa** (superficie gaussiana) il flusso si calcola come integrale chiuso:

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdA\cos\theta$$

Flusso del campo elettrico

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdAcos\theta$$

In questo caso il verso positivo della normale è sempre quello rivolto esternamente alla superficie (i vettori **dA** vanno orientati sempre verso l'esterno)



$$Caso\ 1 : E \bullet dA = EdA$$

$$Caso\ 2 : E \bullet dA = EdA\ cos\theta\ > 0$$

$$Caso\ 3 : E \bullet dA = EdA\ cos\theta\ < 0$$

Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è espresso dalla relazione:

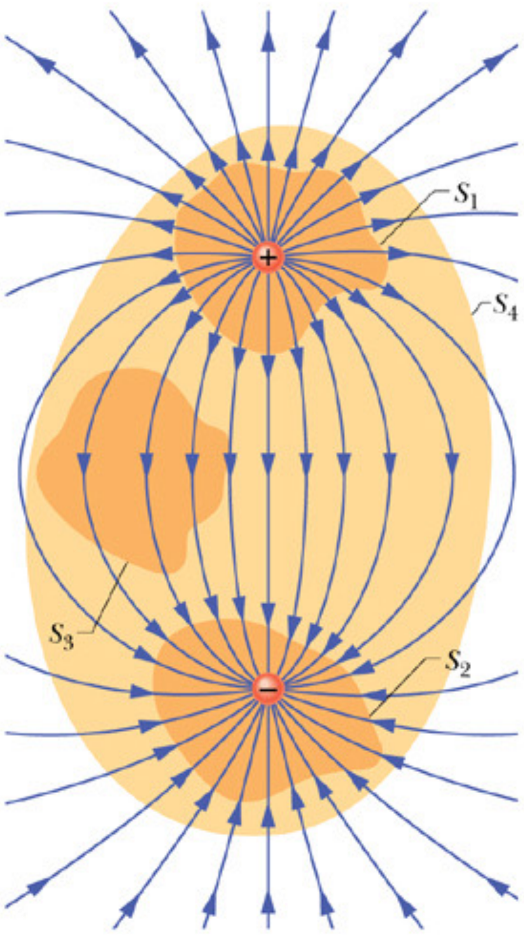
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove q_{int} è la somma algebrica delle cariche interne alla superficie

- ***La superficie chiusa attraverso cui si calcola il flusso è una superficie geometrica, che non necessariamente coincide con una superficie fisica***
- ***Il flusso del campo elettrico non dipende dalle posizioni delle cariche all'interno della superficie, ma solo dalla loro somma algebrica***
- ***Il teorema di Gauss permette di calcolare il campo elettrico generato da distribuzioni di cariche che presentano particolari simmetrie***

Linee di campo e flusso

Consideriamo il campo elettrico generato da un dipolo (cariche puntiformi $+q$ e $-q$), rappresentato tramite le linee di campo



Con la rappresentazione di Faraday, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie è proporzionale al numero di linee di campo che la attraversano (vengono contate come positive le linee uscenti, negative quelle entranti)

S_1: $q_{int}>0$, $\Phi_E>0$: le linee di forza sono tutte uscenti dalla superficie

S_2: $q_{int}<0$, $\Phi_E<0$: le linee di forza sono tutte entranti nella superficie

S_3,S_4: $q_{int}=0$, $\Phi_E=0$: per ogni linea di forza entrante nella superficie ce n’è una uscente

Unità di misura per campo elettrico e flusso

- Il campo elettrico è una grandezza derivata
- L'equazione dimensionale del campo elettrico è $[E]=[MLT^{-3}I^{-1}]$
- L'unità di misura del campo elettrico nel SI è il Newton/Coulomb (N/C)
  - Spesso, invece che in N/C, nel SI il campo elettrico è espresso in V/m (Volt/metro) sfruttando l'unità di misura del potenziale elettrico
  - Le due unità di misura sono fra loro equivalenti:
    - 1 N/C = 1 V/m
- Il flusso del campo elettrico ha equazione dimensionale $[\Phi]=[ML^{3}T^{-3}I^{-1}]$
- L'unità di misura del flusso nel SI è il $(N/C) \times m^2$

Conduttore carico isolato

- Il teorema di Gauss permette di dimostrare che:

  Una carica fornita ad un conduttore isolato, all'equilibrio elettrostatico, si dispone totalmente sulla superficie esterna del conduttore. Nessuna carica può trovarsi all'interno del conduttore

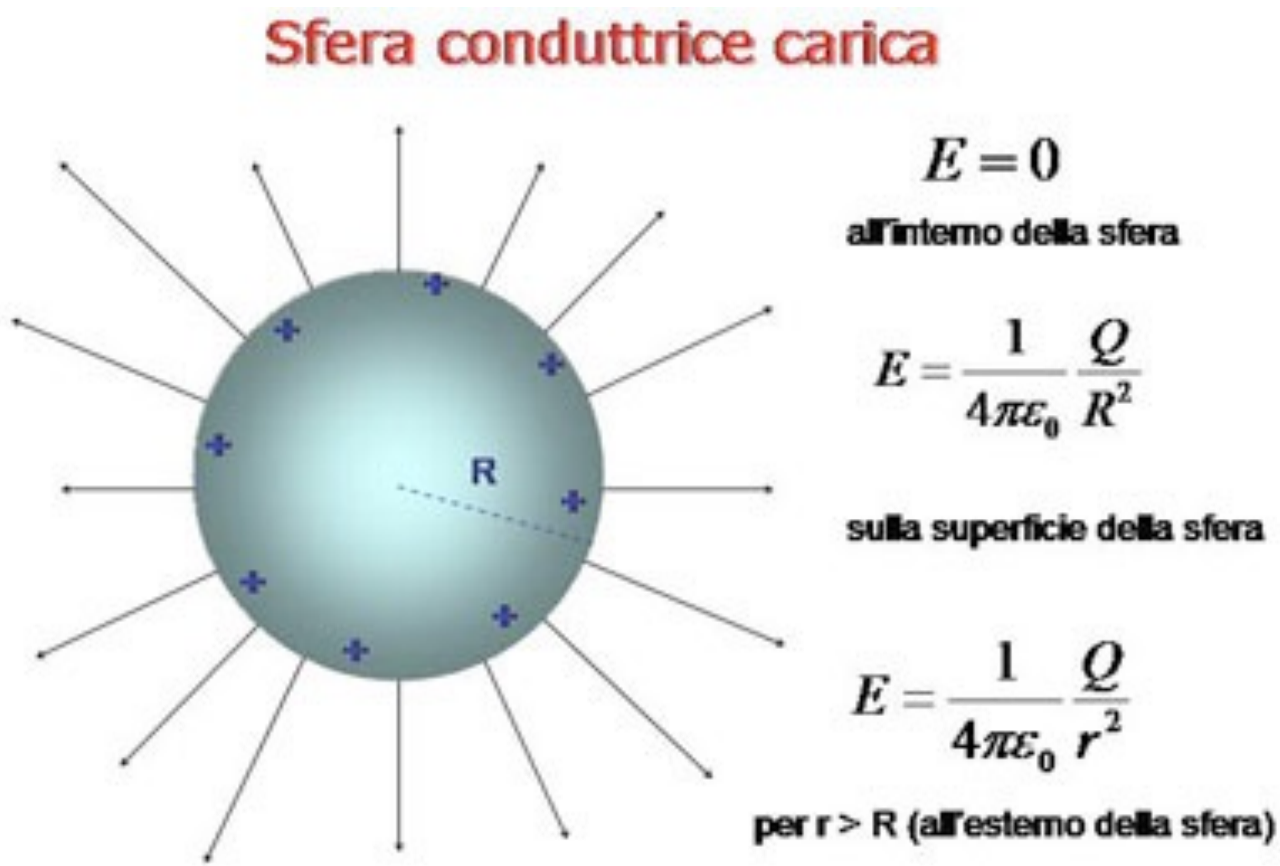
- All'interno del conduttore il campo elettrico deve essere nullo

- Si può dimostrare che il campo è perpendicolare alla superficie ed è pari a

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

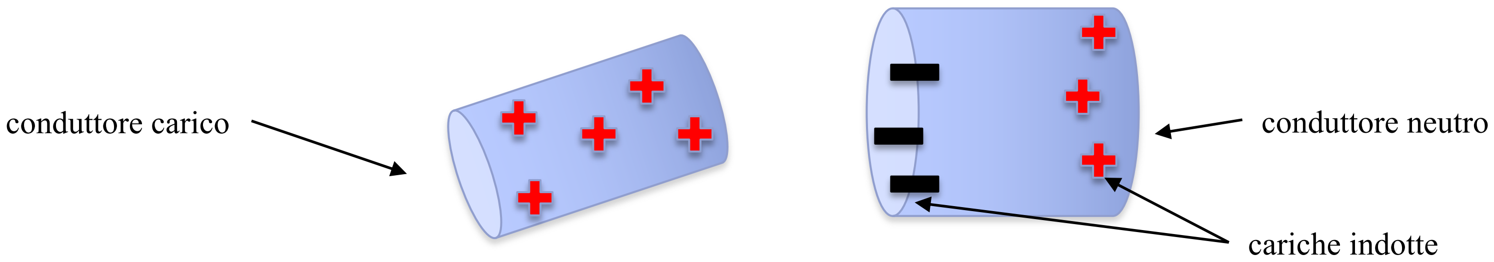
dove σ è la densità di carica superficiale (dimostrazione più avanti)

Conduttore carico isolato: esempio



Induzione elettrostatica

Supponiamo di avere un conduttore neutro e di avvicinare ad esso, molto lentamente, un conduttore carico positivamente.



Se si riallontana il corpo carico, la distribuzione di carica del corpo neutro, ritorna ad essere quella iniziale.

Un conduttore carico induce su di un conduttore neutro la comparsa di cariche, distribuite spazialmente in maniera differente, ma sempre tali che la loro somma algebrica rimanga nulla su tutto lo spazio occupato dal conduttore e sulla sola superficie del conduttore. Il fenomeno si chiama induzione elettrostatica e la carica che compare sul conduttore neutro si chiama carica indotta.

RICHIAMO

- ***Forza Coulomb*** $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

- ***Campo elettrico :*** $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$
  - ***Linee di campo***

- ***Teorema di Gauss :*** $\Phi_E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

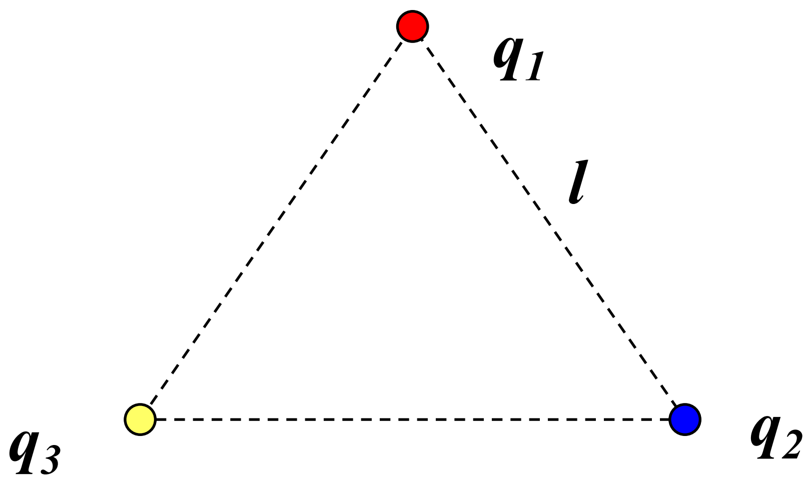
- ***Conduttori :***
  - ***Carica solo esterna***
  - ***E interno è nullo***
  - ***Sulla superficie è*** $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

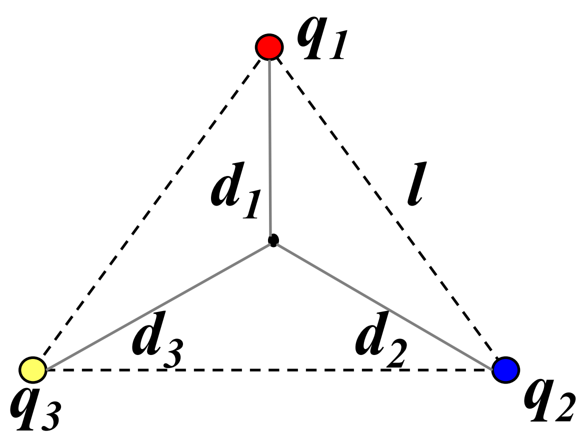
Calcolo di campi elettrici

- ***Per il calcolo dei campo elettrici (finora) :***
  - ***Principio di sovrapposizione***
  - ***Teorema di Gauss***

Calcolo di campi elettrici : distribuzione discreta

Tre cariche positive uguali $q_1=q_2=q_3=q$ sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato l. Calcolare il campo elettrico nel centro del triangolo e al centro della base



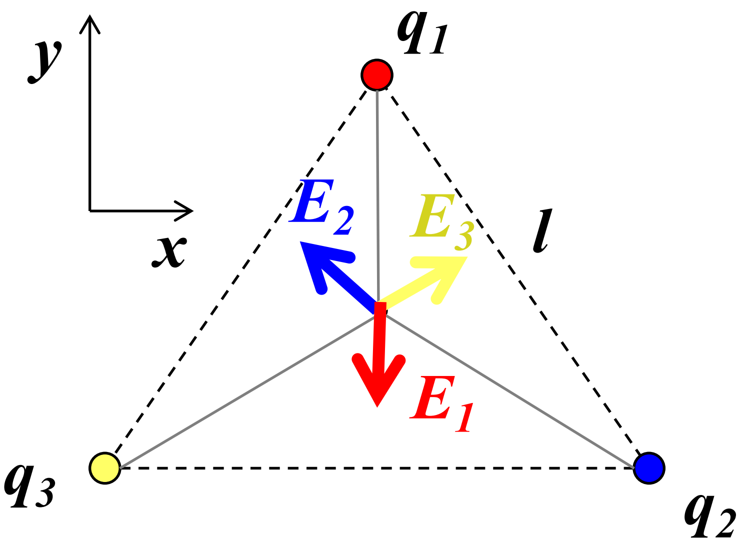


Il centro è equidistante dai vertici, ovvero $d_1=d_2=d_3$

E generato da una singola q a distanza r

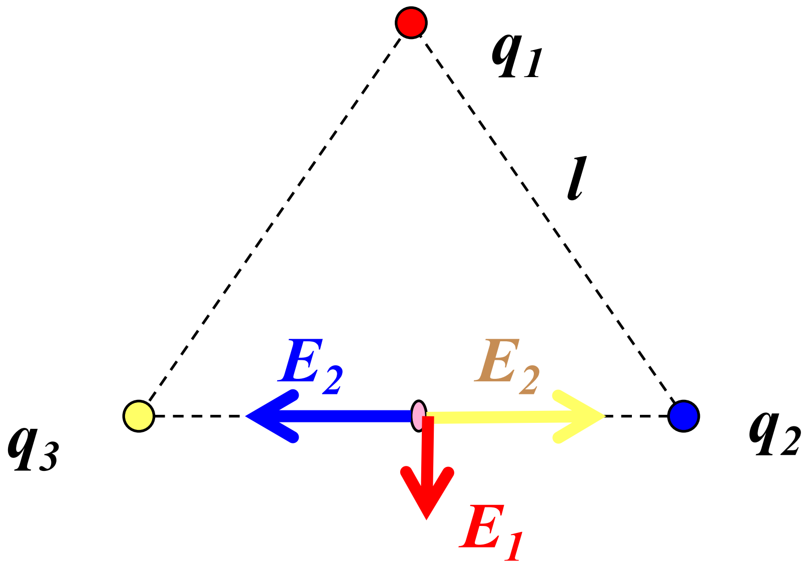
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Per cui in modulo $E_1=E_2=E_3$



$$\begin{cases} E_y = E_2\cos 60° + E_3\cos 60° - E_1 \\ E_x = E_3\sin 60° - E_2\sin 60° \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_y = E\,\frac{1}{2} + E\,\frac{1}{2} - E = 0 \\ E_x = E\sin 60° - E\sin 60° = 0 \end{cases}$$

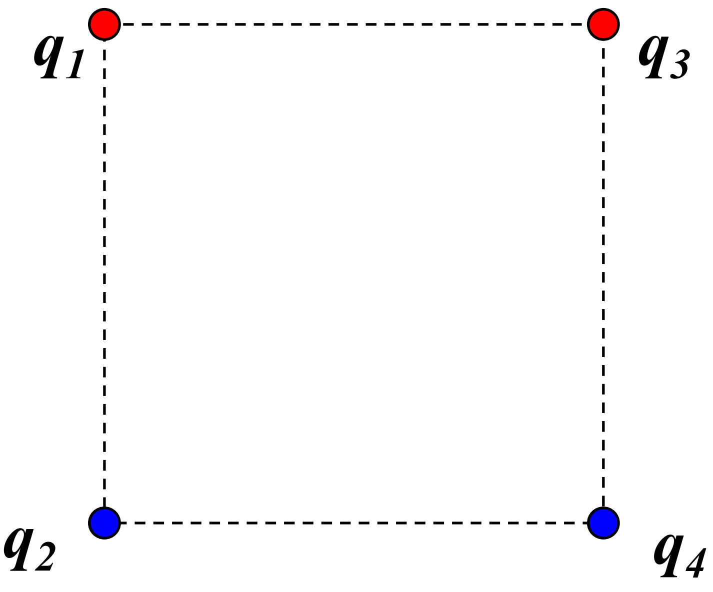


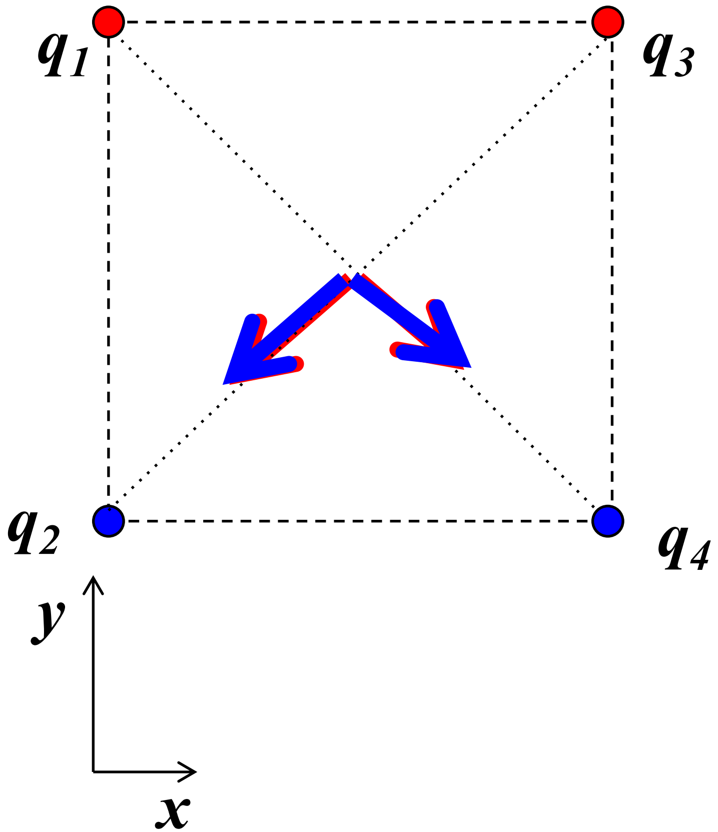
quindi

$E=E_1$

Calcolo di campi elettrici : distribuzione discreta

Due cariche positive uguali q_1=q_3=q= 1*e* e due cariche negative uguali q_2=q_4= -q = -1*e* e sono fisse nei vertici di un quadrato di lato l=0.1mm. Calcolare il campo elettrico nel centro del quadrato





Anche in questo caso in modulo $E_1=E_2=E_3=E_4=E$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= 9\cdot 10^9\frac{2e}{10^{-8}} =$$

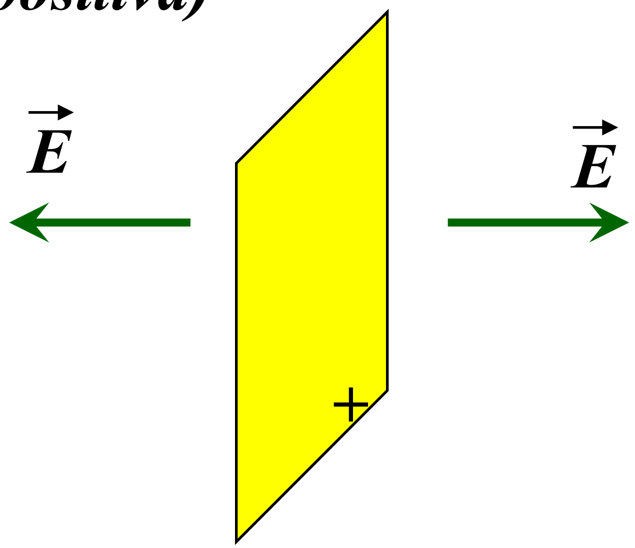
$$=18\cdot 10^{17}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}=$$

$$=28.8\cdot 10^{-2}\ \text{N/C}$$

$$\begin{cases} E_y = -2E\sin 45° - 2E\sin 45° = -4E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ E_x = 2E\cos 45° - 2E\cos 45° = 0 \end{cases}$$

Campo elettrico di una lamina carica

Consideriamo una lamina piana indefinita, carica con una densità di carica superficiale uniforme $\sigma = Q_{tot}/S$ (per esempio positiva)

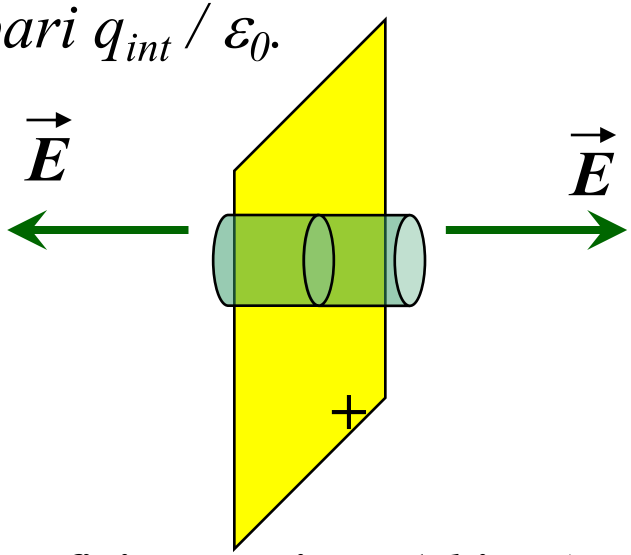


Per simmetria, il campo elettrico è ortogonale alla lamina ed il suo valore non dipende dalla posizione.

Inoltre, poichè la lamina è carica positivamente, il campo è diretto in verso uscente

Campo elettrico di una lamina carica

*Determiniamo il campo elettrico **E** tramite teorema di Gauss: flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari q_{int} / ε_0.*



Consideriamo come superficie gaussiana un cilindro che attraversa la lamina

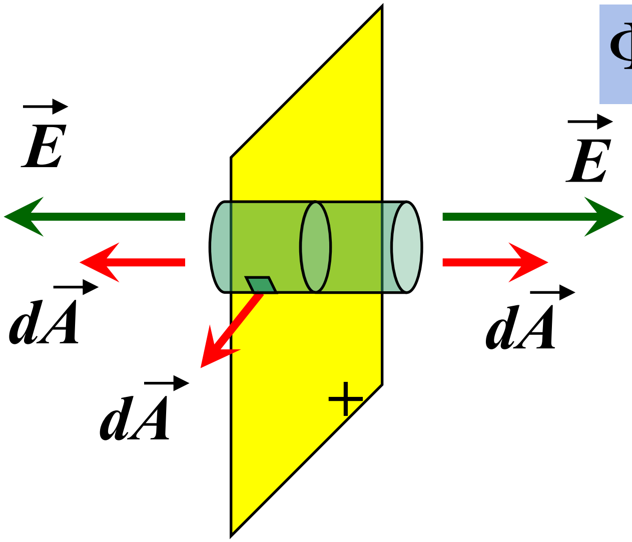
$$\Phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Superficie gaussiana (chiusa) = base cilindro B1 + base del cilindro B2 + superficie laterale

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \Phi_{\mathrm{E,B1}} + \Phi_{\mathrm{E,B2}} + \Phi_{\mathrm{E,LAT}}$$

Campo elettrico di una lamina carica

*Determiniamo il **E** tramite teorema di Gauss : flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari q_{int} / ε_0.*



$$\Phi_E = \Phi_{E,B1} + \Phi_{E,B2} + \Phi_{E,LAT}$$

$$\Phi_{E,B1} = E \cdot B1$$

$$\Phi_{E,B2} = E \cdot B2$$

$$\Phi_{E,LAT} = 0$$

ma B1=B2=A

$$\Rightarrow \Phi_E = 2E \cdot A$$

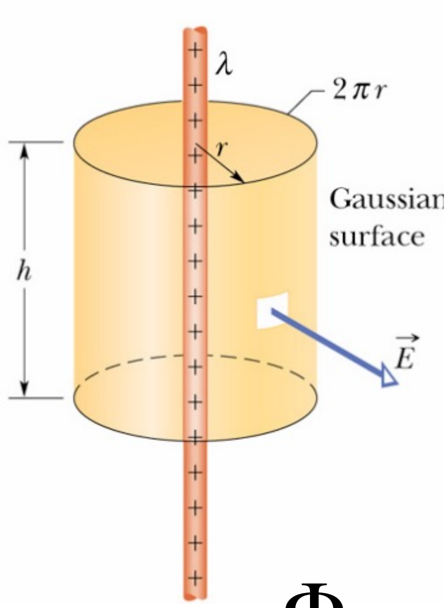
q_{int} al cilindro: $q_{int} = \sigma A$

Dal teorema di Gauss:

$$2E \cdot A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Campo di un cilindro carico

*Una distribuzione continua e uniforme di carica σ è presente su un conduttore cilindrico di raggio R. Calcolare **E** prodotto.*



Calcolo E con il teorema di Gauss.

Per la simmetria cilindrica il campo elettrico sarà perpendicolare all'asse del cilindro.

Consideriamo una superficie cilindrica di raggio r e di altezza h come superficie gaussiana

$$\Phi_E = 2\Phi_{Base} + \Phi_{Sup,laterale} =$$

$$= 2\pi r h E = q_{\text{int}} / \varepsilon_0$$

Campo di un cilindro carico

Definiamo λ la densità di carica lineare , ovvero la carica presente per unità di lunghezza

$$\lambda = \sigma\, 2\pi R$$

$$2\pi r h E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_{\text{int}}}{h}$$

$$q_{\text{int}} = \sigma 2\pi R h => \frac{q_{\text{int}}}{h} = \sigma 2\pi R = \lambda$$

Campo elettrico di una distribuzione superficiale di carica a forma cilindrica

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

osservazione

Quanto vale E sulla superficie?

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

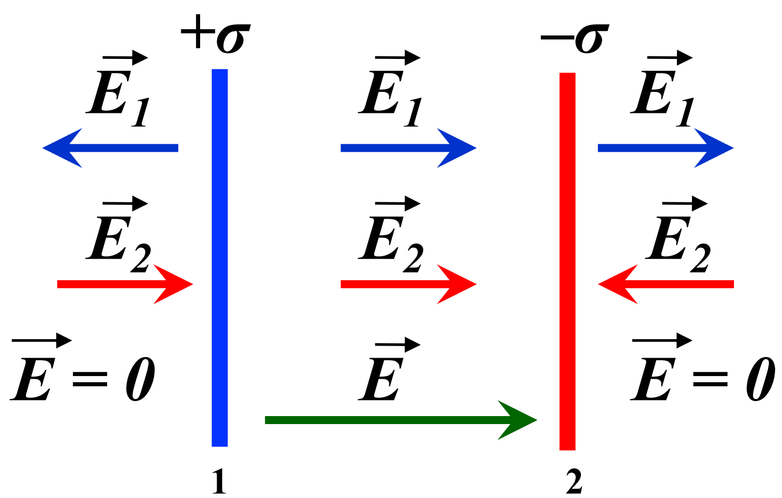
$$\frac{\lambda}{2\pi R} = \sigma \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Campo di un condensatore piano

Un condensatore piano ideale è formato da due lastre piane (dette armature) parallele indefinite cariche con densità di carica opposte +σ e –σ

$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\left|\vec{E}_2\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Il campo elettrico si calcola con il **principio di sovrapposizione**:

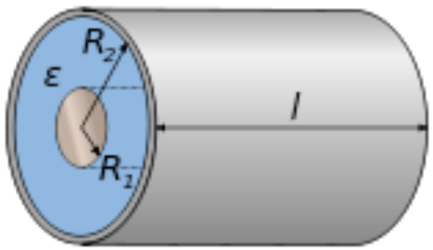
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

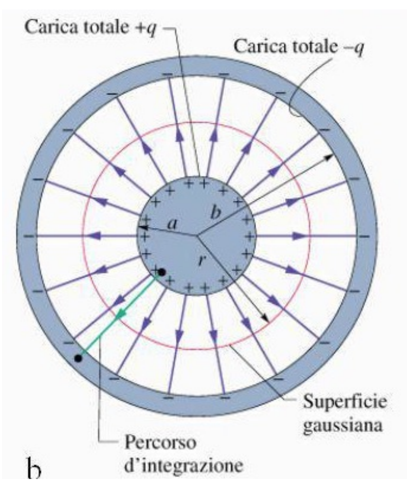
Nelle regioni esterne il campo elettrico è nullo, mentre in quella interna esso è diretto dalla lastra positiva a quella negativa e vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Condensatore cilindrico

Un condensatore cilindrico ideale è formato da due cilindri conduttori coassiali carichi con cariche opposte +q per il cilindro interno e –q per quello esterno





E è radiale (da R_1 ad R_2), calcolo il modulo di E tramite il teorema di Gauss applicato alla superficie chiusa cilindrica coassiale e avente raggio r : $R_1 < r < R_2$

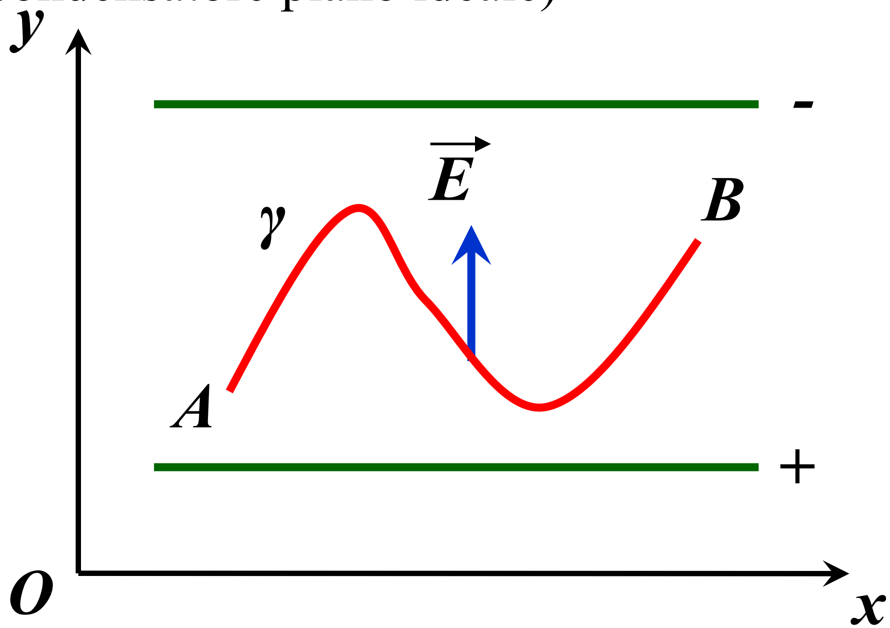
$$\Phi_E = E2\pi rl = q_{\text{int}} / \varepsilon_0$$

$$\frac{q_{\text{int}}}{l} = \frac{+q}{l} = \lambda$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Lavoro di un campo elettrico uniforme

Consideriamo una carica q che si sposta da una posizione iniziale A ad una posizione finale B in una regione in cui è presente un campo elettrico uniforme (es. tra le armature di un condensatore piano ideale)



Nel riferimento scelto:

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\hat{j}$$

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$L_{AB} =_{(\gamma)} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =_{(\gamma)} \int_A^B qE\,dy = qE\left(y_B - y_A\right)$$

Energia potenziale elettrica: caso del campo uniforme

- Il lavoro compiuto dal campo elettrico uniforme **non dipende dalla traiettoria** compiuta dalla particella carica, ma solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale
- Il campo elettrico uniforme è dunque **conservativo**

- Si può quindi introdurre una funzione **energia potenziale elettrica** tale che

$$L_{AB} = -qEy_A + qEy_B = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Energia potenziale elettrica: caso del campo uniforme

$$L_{AB} = -qEy_A + qEy_B = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

- L'energia potenziale elettrica, nel caso del campo uniforme, nel sistema di riferimento scelto, è data dalla funzione:

$$U(y) = -qEy + c$$

- La funzione $U(y)$ è definita a meno di una costante, che viene fissata assegnando il valore $U(y_0)=U_0$ dell'energia potenziale in un punto arbitrario di ordinata y_0

Energia potenziale elettrica

- Si può dimostrare che tutti i campi elettrostatici (non solo quelli uniformi) sono conservativi

- E' quindi sempre possibile definire una funzione di stato energia potenziale elettrica tale che:

$$L_{AB} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

- La forma della funzione U(x,y,z) dipende dal tipo di campo elettrico in esame

Energia potenziale elettrica

$$L_{AB} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

- La funzione energia potenziale elettrica U(x,y,z) è definita a meno di una costante additiva
  - La costante si fissa ponendo $U(x_0, y_0, z_0) = U_0$ in un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0)
  - Ove possibile, si fissa la costante ponendo $U(\infty)=0$, cioè assegnando energia potenziale nulla alla configurazione in cui le cariche sono a distanza infinita

Potenziale elettrico

- Si definisce il potenziale elettrico **come energia potenziale della carica unitaria:**

$$V = \frac{U}{q}$$

  - Nell'esempio del campo elettrico uniforme il potenziale è:

$$V = \frac{U}{q} = -Ey + cost$$

- Il lavoro svolto dal campo elettrico su una carica q che si sposta da A a B risulta espresso da:

$$L_{AB} = -\Delta U = -q\Delta V$$

Unità di misura del potenziale

- **Il potenziale è una grandezza derivata**

- **Nel SI il potenziale si misura in Volt (V)**

Tra due punti A e B, appartenenti ad uno spazio sede di un campo elettrico, c'è una differenza di potenziale $V_B - V_A$ pari ad un Volt, se per portare una carica positiva di 1 C dal punto A al punto B è necessario compiere un lavoro positivo pari ad 1J, o se equivalentemente, nello spostamento da A a B della carica il campo compie su di essa un lavoro di -1J.

Superfici equipotenziali

- **Superficie equipotenziale** = luogo geometrico dei punti dello spazio al medesimo potenziale
  - Equazione delle superfici equipotenziali: $V(x,y,z)=\text{costante}$

- Se una carica si muove su una superficie equipotenziale il campo elettrico non compie lavoro: $L=-q\Delta V=0$

- **Le linee del campo elettrico sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali**

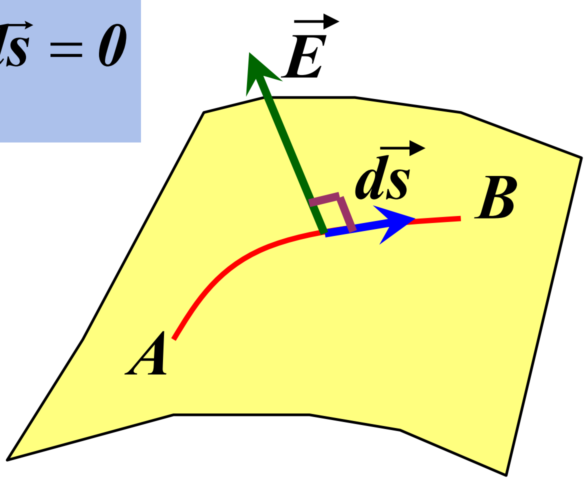
Superfici equipotenziali

- Le linee del campo elettrico sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali
  - Per una particella che si muove da A a B su una superficie equipotenziale il lavoro del campo elettrico è dato da:

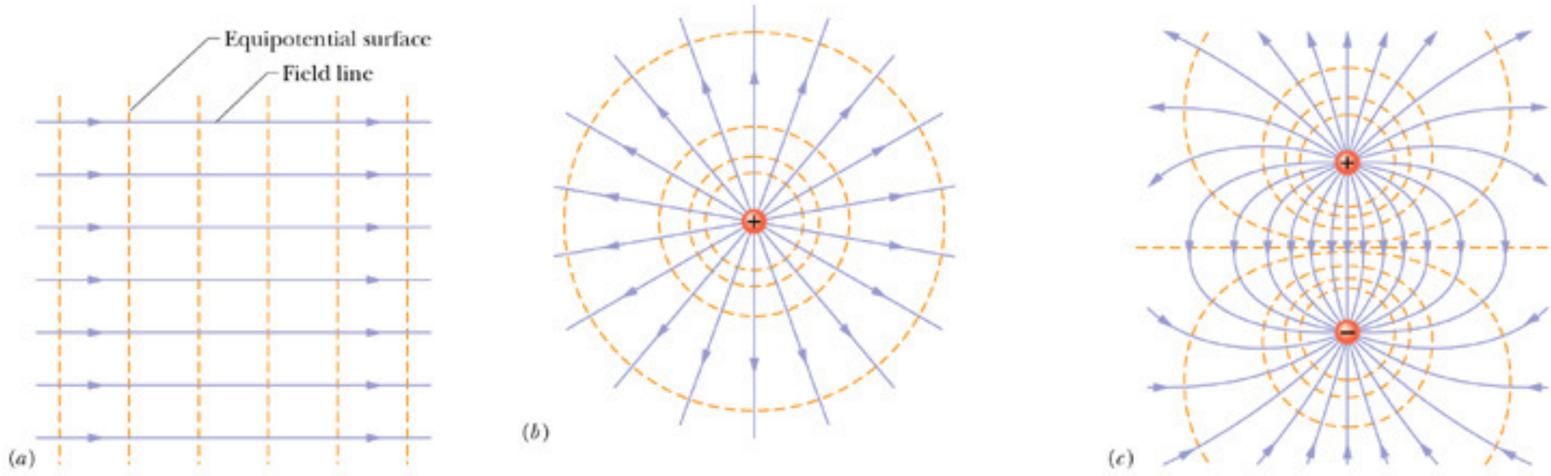
$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} \perp d\vec{s}$$



Linee di forza e superfici equipotenziali



- Campo elettrico uniforme: le superfici equipotenziali sono dei piani perpendicolari alle linee del campo
- Campo di una carica puntiforme: le superfici equipotenziali sono delle sfere concentriche con la carica che genera il campo
- Campo di un dipolo: le superfici equipotenziali hanno forma variabile

Dal campo elettrico al potenziale

Supponiamo che sia nota l'espressione del campo elettrico in tutti i punti dello spazio e calcoliamo il lavoro compiuto dal campo su una carica q che si sposta da A a B:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{AB} = -q\Delta V = -q\left(V_B - V_A\right)$$

$$\Rightarrow \quad -q(V_B - V_A) = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Dal campo elettrico al potenziale

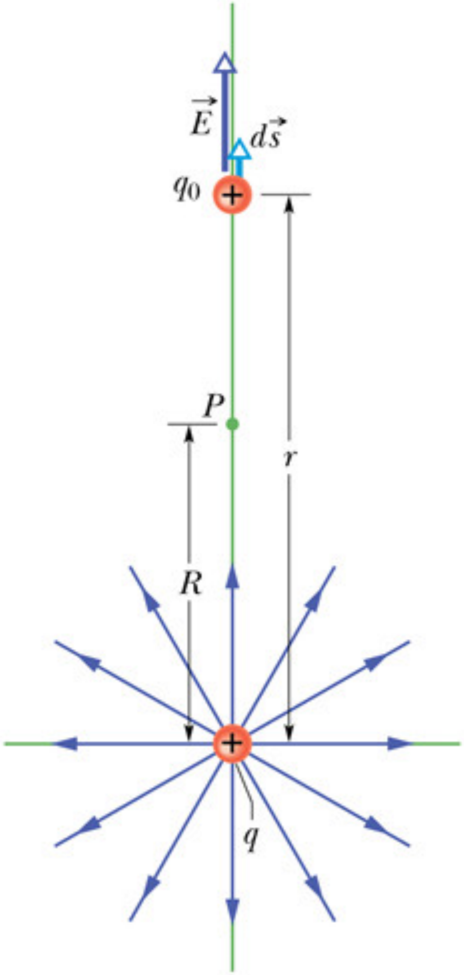
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Assegnando al potenziale il valore V_0 in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ si possono calcolare i valori del potenziale V in tutti i punti $P(x,y,z)$ dello spazio:

$$V(x, y, z) = V_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il valore dell'integrale non dipende dal percorso di integrazione!

Potenziale di una carica puntiforme



Consideriamo una carica puntiforme q

Campo elettrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Imponiamo che sia $V(\infty)=0$

Il potenziale in un punto P a distanza R dalla carica q si calcola partendo dalla definizione, assumendo di prendere una carica q_0 a distanza R e facendola andare all'infinito sotto l'azione del campo elettrico $\vec{E}$:

$$V_{fin} - V_{in} = -\int_R^{\infty} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} \Longrightarrow V(\infty) - V(R) = -\int_R^{\infty} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$0 - V(R) = -\int_R^{\infty} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = -\int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\overrightarrow{ds} =$$

$$= -\int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = 0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

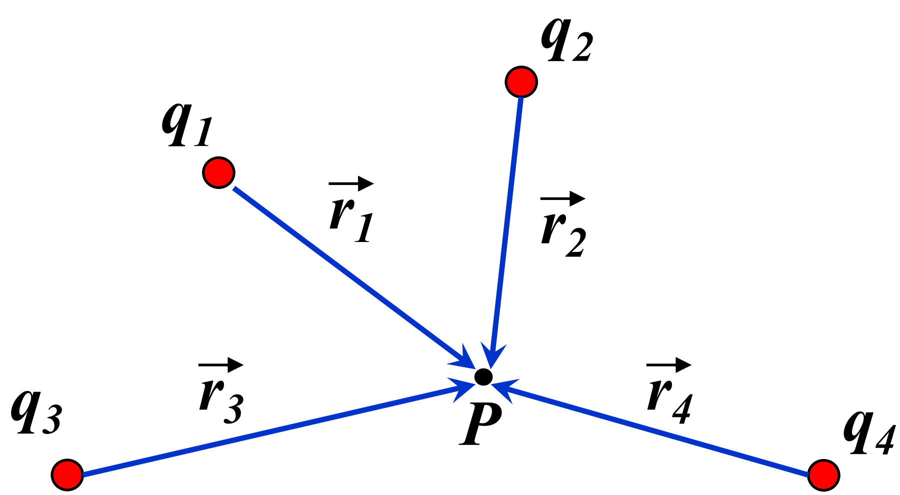
Potenziale di un insieme di cariche

- Dunque per una carica puntiforme si è ottenuto che il potenziale a distanza R dalla carica q è:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

- Consideriamo ora un insieme di cariche puntiformi q_1, q_2, ..., q_N
- Per il principio di sovrapposizione, il potenziale in un punto P dello spazio si può calcolare sommando i potenziali delle singole cariche:

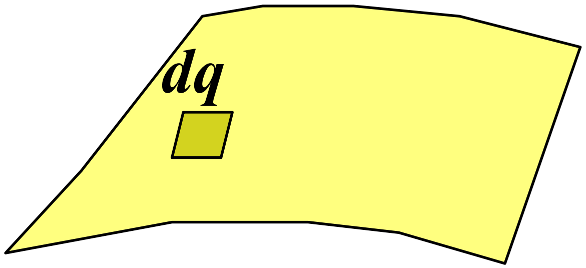
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N}{r_N} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$



Potenziale di una distribuzione continua

In presenza di una distribuzione di carica continua, il potenziale V in un punto dello spazio si calcola partendo da un elemento infinitesimo di carica a cui corrisponde un un potenziale dV e poi si integra su tutta la distribuzione di carica.

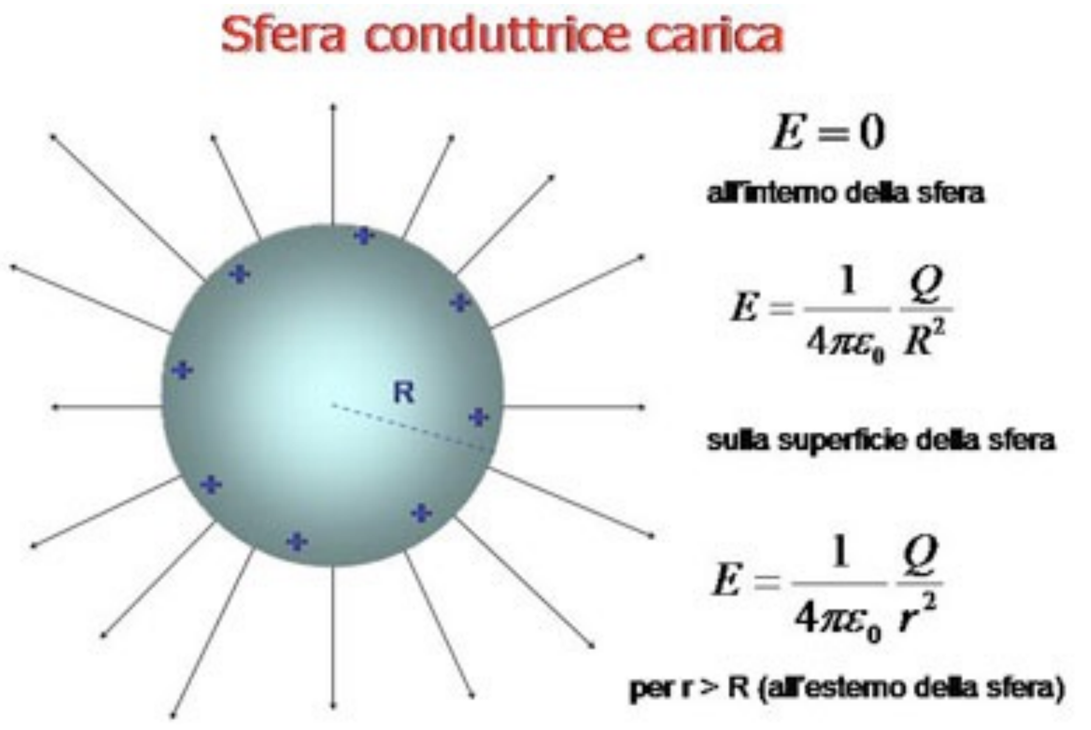
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \longrightarrow V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$



Osservazione: rimane valida la

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Potenziale sfera carica



$$V_r - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Richiamo

- ***I campi elettrici :***
  - ***una lamina***
  - ***un filo***
  - ***un condensatore piano***
  - ***condensatore cilindrico***

- ***Campo elettrostatico è conservativo -> Energia potenziale elettrostatica:*** In presenza di un sistema di cariche puntiformi fisse, l'energia potenziale elettrica U è uguale al lavoro svolto da un agente esterno per portare il sistema nella configurazione indicata, spostando ciascuna carica dall'infinito alla propria posizione

- ***Potenziale elettrico : Energia potenziale per unità di carica***

LEGAME TRA QUANTITA' ELETTRICHE

VETTORI

Forza elettrica
F

DIVISIONE PER q →

Campo Elettrico
E

↓ **EFFETTO LUNGO UNO SPOSTAMENTO**

↓ **EFFETTO LUNGO UNO SPOSTAMENTO**

SCALARI

Energia Elettrica
U

DIVISIONE PER q →

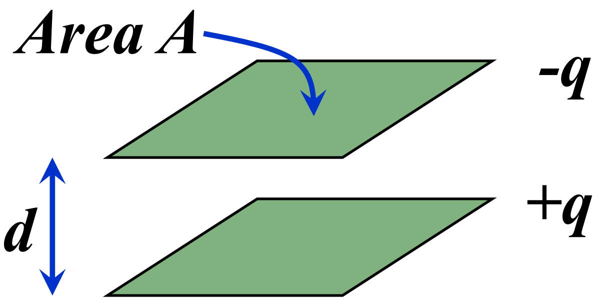
Potenziale Elettrico
V

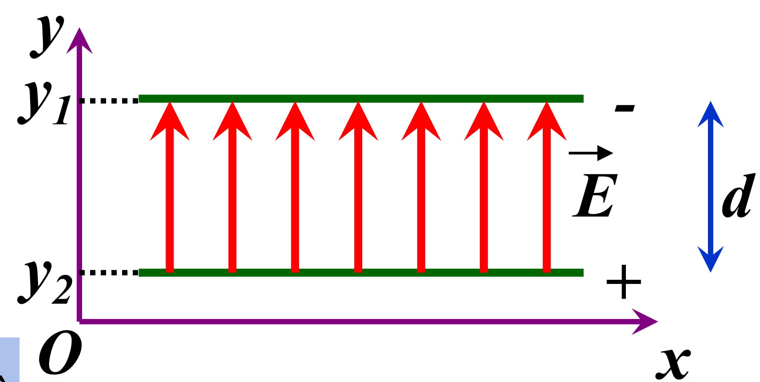
DA PIÙ CARICHE INTERAGENTI

DALLA SOLA CARICA SORGENTE

Condensatore piano

Un condensatore piano è formato da due piatti piani e paralleli, detti armature, di area A posti a distanza d su cui sono presenti cariche opposte +q e -q





Campo elettrico: $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$

Differenza di potenziale tra le armature:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_1^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}\cdot d\vec{s} = -\int_1^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dy = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(y_2 - y_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Condensatore piano

Carica presente sulle armature: $\boldsymbol{q = \sigma A}$

Differenza di potenziale tra le armature: $\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

Densità superficiale : $\sigma = \frac{q}{A}$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{A} \frac{1}{\varepsilon_0} d = \frac{d}{A\varepsilon_0} q$$

$$q = \frac{A\varepsilon_0}{d} \Delta V$$

In ogni condensatore la carica immagazzinata sulle armature è proporzionale alla differenza di potenziale applicata tra di esse

Capacità del condensatore piano

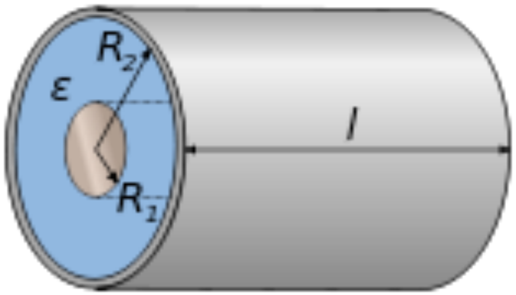
- In ogni condensatore la carica immagazzinata sulle armature è proporzionale alla differenza di potenziale applicata tra di esse:

$$q = C\Delta V$$

- La capacità elettrostatica rappresenta la capacità del condensatore di immagazzinare carica sulle sue armature: quanto maggiore è C tanto più grande è la carica che può essere immagazzinata a parità di d.d.p. applicata.

Capacità del condensatore piano: $$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Capacità del condensatore cilindrico



Per il calcolo della capacità si ricorda che **Q=CΔV**, dunque si parte dal calcolo del ΔV:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \left[E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \text{radiale} \right]$$

$$= -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right) Q$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln R_2 / R_1}}$$

Dipende dalla geometria

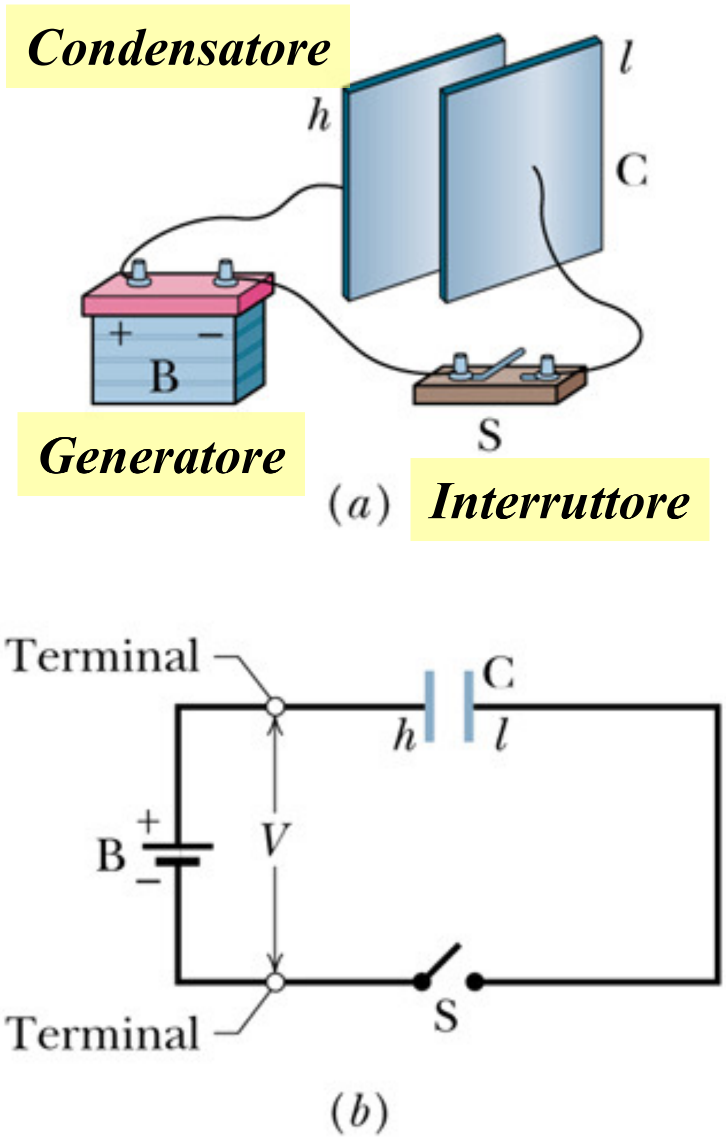
Unità di misura della capacità

- La capacità è una grandezza derivata: dipende solo da fattori geometrici, cioè l'area A e la distanza d delle armature.

- La capacità nel SI si misura in Farad (F)

Ricordando l'espressione della capacità del condensatore piano, $C=\varepsilon_0 A/d$ si ricava che $[\varepsilon_0]=[CL^{-1}]$ e dunque il suo valore è $\varepsilon_0=8{,}85 \times 10^{-12} F/m$

Carica di un condensatore



- Il generatore è un dispositivo che mantiene una d.d.p. costante tra i suoi poli
- Chiudendo l'interruttore si ha un flusso di elettroni (corrente) nel circuito, che porta ad un accumulo di carica sulle armature del condensatore
- Il flusso di elettroni si arresta quando le cariche presenti sulle armature instaurano una d.d.p. che è pari a quella tra i poli del generatore

Energia immagazzinata in un campo Elettrico

La carica di un condensatore avviene *sottraendo,* tramite un agente esterno (ad esempio una batteria), una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, di modo che alla fine una carica $+q$ è stata trasferita da un'armatura all'altra e tra le due armature si è stabilita una d.d.p. ΔV.

In una fase intermedia del processo di carica, tra le armature si ha una d.d.p. pari a $\Delta V'$, in quanto è stata già trasferita una quantità di carica $q'=C\Delta V'$. Allora il lavoro svolto dal generatore per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la d.d.p. $\Delta V'$ è

$$dL = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Per portare la carica totale ad un valore finale Q, il lavoro sarà dato da

$$L = \int dL = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Questo lavoro è immagazzinato come energia potenziale U.

L'energia potenziale di un condensatore carico può considerarsi come immagazzinata nel campo elettrico tra le sue armature

Energia immagazzinata in un campo Elettrico

Da

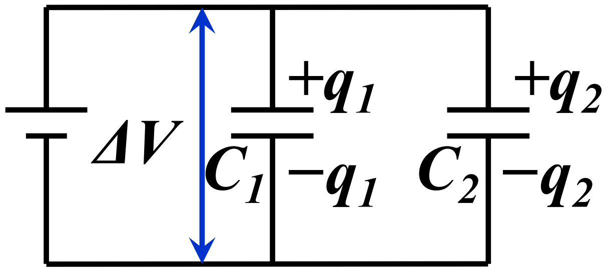
$$L = \int dL = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

possiamo chiamare U_e l'energia (potenziale) elettrostatica che viene immagazzinata nel condensatore. Assumendo che quando Q=0 l'energia sia nulla, possiamo scrivere che L= U_e cioè:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Condensatori in parallelo

Il collegamento in parallelo si realizza collegando tutti i condensatori alla stessa d.d.p.



Cariche dei condensatori: $q_1 = C_1 \Delta V$ $q_2 = C_2 \Delta V$

Carica totale: $q = q_1 + q_2 = \left(C_1 + C_2\right)\Delta V$

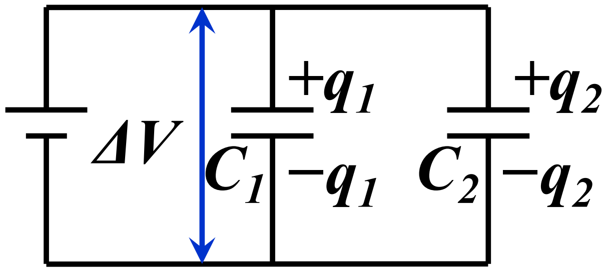
Capacità equivalente: $C_{eq} = \dfrac{q}{\Delta V} = C_1 + C_2$

Per un sistema di N condensatori in parallelo:

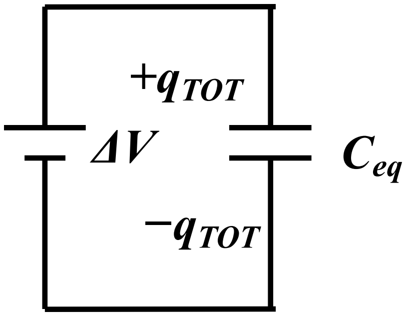
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

Condensatori in parallelo

Il collegamento in parallelo si realizza collegando tutti i condensatori alla stessa d.d.p.



Come se:

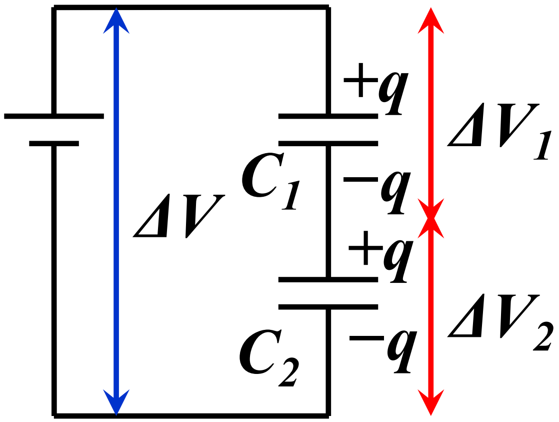


Per un sistema di N condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

Condensatori in serie

Il collegamento in serie si realizza concatenando le armature di tutti condensatori. In questo caso le cariche dei vari condensatori sono le stesse



Differenze di potenziale:

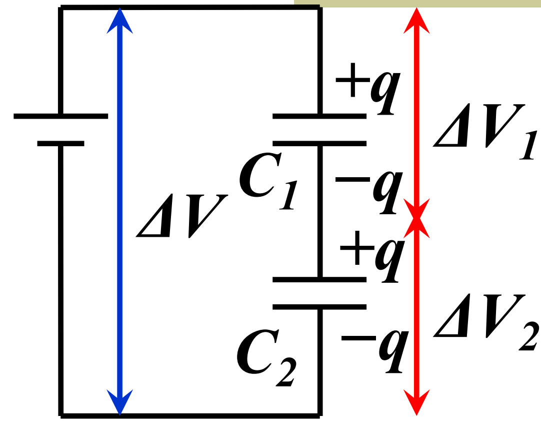
$$\Delta V_1 = q/C_1 \qquad \Delta V_2 = q/C_2$$

Differenza di potenziale totale:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = q\left(1/C_1 + 1/C_2\right)$$

Condensatori in serie

Differenza di potenziale totale:

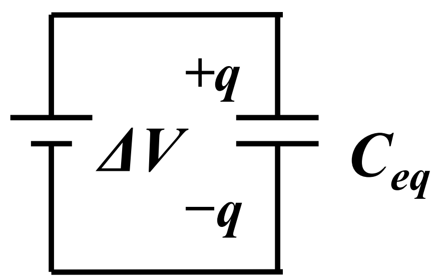


$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = q\left(1/C_1 + 1/C_2\right)$$

Capacità equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Come se:



Per una serie di N condensatori:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

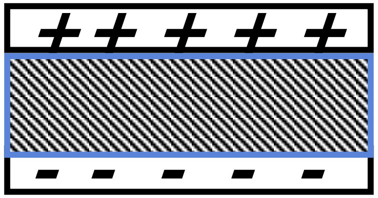
Dielettrici (cenni)

Dielettrico: materiale non conduttore (gomma, vetro, carta paraffinata)

Al contrario dei conduttori anche in presenza di un campo elettrico esterno in essi non si genera un movimento di cariche.

Sperimentalmente si osserva che introducendo tra le armature di un condensatore un dielettrico:

il ΔV (e quindi il campo) diminuisce



Se lo spazio è completamente riempito:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$\boldsymbol{\varepsilon_0}$ cost. dielettrica nel vuoto

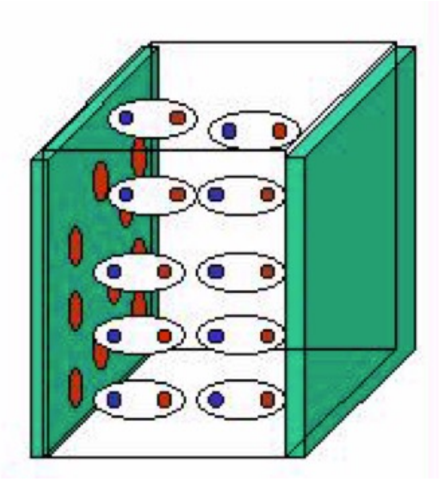
$\boldsymbol{\varepsilon_m}$ cost. dielettrica nel mezzo

$\boldsymbol{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_m} > 1}$ cost. dielettrica relativa

Dipende dal materiale e non dalla carica o dalle dimensioni e forma delle armature

Dielettrici (cenni)

Dielettrici polari : molecole che hanno un dipolo elettrico, dunque tendono ad allinearsi con il campo elettrico. L' allineamento genera un campo elettrico opposto



Dielettrici non polari : acquistano un momento di dipolo per induzione