Analisi-Definizioni

Insieme ben definito: Un insieme è ben definito quando esiste un criterio per stabilire se un dato elemento appartiene o no all'insieme.
Relazioni tra gli insiemi: Dati 2 insiemi A e B diremo che A è uguale a B se hanno gli stessi elementi.
AcB: Dati due insiemi a e B diremo che AcB se tutti gli elementi di A appartengono a B.
AuB: Dati due insiemi A e B si definisce AuB l'inisme che ha gli elementi di A o gli elementi di B (tutti gli el).
AnB: Dati due insiemi A e B si definisce AnB l'insieme degli elementi che appartengono si ad A e B (in comune).

Relazione d'ordine su insieme: Dato X un insieme, Si dice che x è totalmente ordinato se è definita una relazione, che indicheremo con "<=" e verifica le seguenti proprietà:

- Riflessiva: ∀ a € X ; <= 0
- Antisimmetrica: ∀ a,b € X se a <= b e b<a a allora a = b.
- Transitiva: ∀ a,b,c € X se a<=b e b<=c allora a <=c

Definizione Maggiorante: Sia x un insieme totalmente ordinato, sia E la relazione d'ordine totale su X, t.c. E c X.
Si dice che **M€X** è un maggiorante per l'insieme E se M è più grande di tutti gli elementi di E cioè se ∀ x € E : x <= M, M = Maggiorante dell'insieme
-**Limitato superiormente:** Si dice che E è limitato superiormente se ∃ M € X t.c. M è un maggiorante per E.

Definizione Minorante: Si dice che m € X è un minorante per l'insieme E se m è più piccolo o uguale di tutti gli el. di E, cioè se: ∀ x € E: m<=x.
-**Limitato inferiormente**: Si dice che E è limitato inferiormente se ∃ m € X t.c. m è un minorante per E.

Estremo superiore e estremo inferiore: Sia X un campo totalmente ordinato, sia <= la relazione d'ordine totale, con EcX
-Estremo superiore: Se E è limitato inferiormente si definisce estremo inferiore di E il

più grande dei suoi minoranti. denotato con: infE.
-Estremo inferiore: Se E è limitato superiormente si definisce estremo superiore di E il più piccolo dei suioi maggioranti. denotato con : supE
Limitato inf: se l'insieme dei minoranti non è vuoto.
Limitato sup: se l'insieme dei maggioranti non è vuoto.

-**Successioni di numeri Reali:** Una successione di numeri reali è una funzione avente dominio N e Codominio R, si denota con $\{an\}_{n\in N}$.

-**Succ limtato sup e limitato inf**: Sia {an} n€N una succesione di numeri reali:

- Si dice che$\{an\}_{n\in N}$ è **limitata superiormente** se $\exists$ **M€R** t.c. ∀ n€N : an ≤ M
- Si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è **limitata inferiormente** se $\exists$ **m€R** t.c. ∀ n€N : m ≤ an

-**Estremo sup**: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una successione di num. reali limitata sup. si definisce estremo superiore di $\{an\}_{n\in N}$ il più piccolo dei suoi maggioranti e si denota con sup an n€N
-**Estremo inf**: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una successione di num. reali limitata inf. si definisce estremo inf. di $\{an\}_{n\in N}$ il più grande dei suoi minoranti e si denota con inf an n€N.

-**Successione convergente:** Sia $\{an\}_{n\in N}$ una succ. di num. reali, si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è **convergente** se $\exists$ ℓ€R che soddisfa la seguente proprietà:
$\forall\epsilon > 0$ $\exists$ N€N t.c. $|an - \ell| < \epsilon$ ∀n ≥ N.
(I limite della succesione e si denota con $\lim_{n\to\infty} an = \ell$).

Successioni divergenti: $\lim_{x\to\infty} an = +\infty$
+**Positivamente**: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una succ. di num. reali, si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è divergente positivamente se vale la seguente proprietà:
∀ M > 0 $\exists$ N€N t.c. an > M ∀n >= N e in tal caso si denota con $\lim_{x\to\infty} an = +\infty$
+**Negativamente**: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una succ. di num. reali, si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è divergente negativamente se vale la seguente proprietà:
∀ m>0 $\exists$ N€N t.c. an<m ∀ n≥ m e in tal caso si denota con$\lim_{x\to\infty} an = -\infty$

Successioni irregolari: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una succ. di num. reali, è irregolare se non è convergente e non è divergente e si denota: $\nexists \lim_{n\to\infty} an$

Successione infinitesima: una successione convergente con ℓ a 0 è chiamata infinitesima, mentre quelle divergenti sono dette infinite.

Insiemi non limitati: Sia EcR

- Se E **non è limitato superiormente** si denota supE: $+\infty$.
- Se E **non è limitato inferiormente** si denota infE: $-\infty$.

Successioni non limitati: Si $\{an\}_{n\in N}$ una succ. di num. reali:

- Se $\{an\}_{n\in N}$ **non è limitato superiormente** si denota supan n€N = $+\infty$
- Se $\{an\}_{n\in N}$ **non è limitato inferiormente** si denota infan n€N = $-\infty$

Successioni monotone: Sia $\{an\}_{n\in N}$ una successione di num. reali:

- **Monotona crescente**: Si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è monotona crescente se ∀ n€N an +1 ≥ an.
- **Monotona decrescente:** Si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è monotona decrescente se ∀ n€N an + 1 ≤ an.
- **Strettamente crescente:** Si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è strettamente crescente se ∀ n€N: an + 1 > an.
- **Strettamente decrescente:** Si dice che $\{an\}_{n\in N}$ è strettamente decrescente se : ∀n€N: an + 1 < an.

Successione che verifica una certa proprietà definitivamente: Si dice che una successione $\{an\}_{n\in N}$ di num. reali, verifica una proprietà P definitivamente, se la verifica a partire da un certo indice in poi, ossia se ∃ N€N t.c.: an soddisfa p ∀ n€N.

Tende ad l per eccesso/difetto: Dato $\{an\}_{n\in N}$ successione e ℓ €R Diremo che $\{an\}_{n\in N}$ tende ad ℓ per eccesso/difetto(dall'alto/dal basso) se e solo se:

- $\lim_{n\to+\infty} an = \ell$
- ∃ n*€N, ∀ n€N, n≥n*: an≥ℓ // an≤ℓ
  Si indica con $\lim_{n\to+\infty} an = \ell^+$ // ℓ^-

Funzioni: Siano A,B due insiemi qualsiasi A≠ 0, una funzione f avente dominio A e codominio B è una qualunque legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B e si denota con f: A→ B.

Grado di una funzione: Data f : AcR → R una funzione reale di variabile reale, si definisce grafico di f il seguente insieme G(f) = {(x,f(x) | x€A} c R.

Maggiorante/minorante di una funzione: Sia f: AcR → R.

- **Maggiorante :** Si dice **M€R è un maggiorante per f** se ∀ x€A f(x) ≤ M.

- **Minorante:** Si dice **m€R è un minorante per f** se Per $\forall$x€A m≤ f(x)
- **Lim.Sup:** Si dice che **f è lim. sup. se** $\exists$ **M€R** maggiorante di f.
- **Lim.inf:** Si dice che f è **lim.inf. se** $\exists$ **m€R** minorante di f.
- **Estremo sup:** Se f è lim. sup. si definisce estremo sup. il più piccolo dei suoi maggioranti e si denota con sup(fx) x€A
- **Estremo inf:** Se f è lim. inf. si definisce estremo inf. il più grande dei suoi minoranti e si denota con inf(fx) x€A
- **Illimitato:** Se f è sia lim.sup e inf. è illimitato

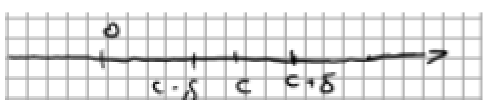
Massimo di f: AcR , f:A→R, M€R
M massimo di f <=> $\exists x_M$ € A:

- $\forall$ x€A f(x) ≤ M
- f(x_M) = M (x_M non è unico)
  x_M punto massimo di f, M = Max x€A

Minimo di f: AcR , f:A→R, m€R
m minimo di f <=> $\exists x_m$ € A:

- $\forall$ x€A f(x)≥m
- f(x_m) = M
  x_m punto punto minimo di f, m= min x€A

Intorno di c€R: c€R, δ > 0
]c-δ, c+δ[Intorno sferico di centro c di raggio/ampiezza δ.



Si indica anche: Ic,δ=]c-δ,c+δ[

Intorno destro di c : [c, c+δ[
Intorno sinistro di c:]c-δ, c]
Intorno sinistro di $+\infty$: I$+\infty$,a =]a,$+\infty$[
Intorno destro di $-\infty$: I$-\infty$,b =]$-\infty$,b[

Limite: IcR, I intervallo, c€I, f: I -{c} → R, l€R .
$\lim_{x \to c}(x)$ = l <=> $\forall$ ϵ >0 $\exists$ δ>0 $\forall$ x € I-{c}
|x-c| < δ: |f(x) -l| < ϵ.

Def generale di limite: c€R*, l € R*, f: I-{c} → R
$\lim_{x \to c}(x)$ l <=> $\forall$ U intorno di l $\exists$ V intorno di c:
$\forall$ x,v ≠ c , f(x) € U |x-c|< δ | f(x) -l | <ϵ

Def limite con successione: I intervallo, c€R f: I-{c} → R, ℓcR*
$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$ <=> $\forall \{xn\}_{n \in N}$, xn € I -{c},
$lim_{n \to \infty} xn = c^+$, $lim_{n \to +\infty} f(xn) = \ell$
(lo stesso per il - con c da sinistra di f(x)).

Funzione continua in c: f: I→R, c€I.
f continua in c <=>$lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
ovvero:
$\forall \{xn\}_{n \in N}$, xn€I-{c} , $\lim_{n \to \infty} xn = c$
$lim_{x \to \infty} f(xn) = f(c)$

Funzione continua in I: I intervallo, f : I→R
f continua in I <=> $\forall$ c € I: f continua in c

Funzione continua: Sia f: (a,b) → R sia x0 € (a,b) f è continua in x0 se
$\lim_{x \to x0} f(x) = f(x0)$ f è continua in (a,b) se f è continua in tutti i punti di (a,b)

Zero di una funzione: Sia f: AcR→R, sia x0€A si dice che x0 è uno zero di f se f(x)= 0.
es: f(x) = x-1 x0=1 è uno zero di f.

Funzione derivabile in un punto: Sia f:(a,b) → R , sia x0€(a,b)
- Si dice che f è derivabile in x0 se $\exists \lim_{x \to x0}$ $\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}$ € R E si denota con f'(x0), $\frac{df}{dx}(x0)$, Df(x0) e prende il nome di derivata di f in x0.
- f si dice derivabile in (a,b) se f è derivabile in tutti i punti x€(a,b), resta definita la funzione
f'=(a,b)→R t.c. $\forall \tilde{x}$ €(a,b) f'($\tilde{x}$) = $\lim_{x \to \tilde{x}}$ f(x) -f(xond) / x -x(ond) $\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{x-\tilde{x}}$

f' derivata prima di f

Def: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$

f: derivabile in $]a,b[$

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in]a,b[$: f è derivabile in x_0

In tal caso ad ogni $x \in]a,b[$ posso associare un solo numero $f'(x) \in \mathbb{R}$

Quindi esiste la funzione

$f' :]a,b[\to \mathbb{R}$

$\forall x \in]a,b[: (f')(x) = f'(x)$

chiamata "derivata (prima) di f"

$f(x) = c, \forall x \in]a,b[$ sia $x_0 \in]a,b[$, sia $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$ quindi $f(x) = c$ è derivabile in x_0

e la deriv. prima vale 0

$\forall x_0 \in]a,b[: f'(x_0) = 0$, per cui

$Dc = 0 \to$ derivata di una f costante $= 0$

Forma di prostaferesi: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Funzione derivabile 2 volte / derivata seconda: f:[a,b]→R ,

- f derivabile in [a,b] sia x0 €[a,b], f è derivabile due volte in x0 <=> f’ è derivabile in x0, cioè
$\exists \lim_{x \to x0} \frac{f'(x)-f'(x0)}{x-x0}$ €R.
- Si dice che f è derivabile due volte in (a,b) se f è derivabile in (a,b).

Punto a tangente: Sia f: [a,b]→R x0€[a,b], x0 punto a tangente verticale <=>
$\exists \lim_{x \to x0} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = e$ (+∞ o - ∞)

Punto di cuspide: Sia f: [a,b]→R, sia x0€[a,b], x0 è un punto di cuspide se e solo se:

- lim x→x0+ f(x)-f(x0) /x-x0 = +inf (-inf) $\lim_{x \to x0^+} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = +\infty$ (-∞)
- $\exists \lim_{x \to x0^-} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = -\infty$ (+∞) i limiti devono essere discordi.

Derivata della funzione inversa: sia f: (a,b)→R funzione derivabile su (a,b) è invertibile, sia x0 € (a,b) t.c. f’(x0) ≠ 0 allora f^{-1} p derivabile in y0 = f(x0) e si ha che (

f^{-1})(y0) = $\frac{1}{f'(x0)}$

Massimo e minimo relativo(locale) per una funzione: Sia f:(a,b)→R, x0€(a,b).

- Si dice che x0 è un punto di minimo relativo (locale) per f se ∃ δ >0 t.c. f(x) ≥ f(x0) ∀i x€(x0-δ,x0+δ)
- Si dice che x0 è punto di massimo relativo (locale) per f se ∃ δ> 0 t.c. ∀x €(x0-δ ,x0+δ)
  f(x)≤f(x0).

Punto di max/min relativo: Sia f:(a,b)→R , x0€(a,b).

- **Max rel.:** Se f'(x)≥0 per x<x0 (cioè se prima di x0 la funzione di f è crescente) e f'(x0) ≤ 0 per x>x0 (cioè dopo x0 f è decrescente) allora x0 è punto di max relativo.
- **Min rel.:** Se f'(x)≥0 per x<x0 (decrescente prima di x0) e f'(x) ≥ 0 per x>x0 (crescente dopo x0) allora x0 è punto di minimo relativo.

Punto di max/min assoluto:

- **Max ass:** Si dice che M è massimo di f in [a,b] e x0 ∈ [a,b] è punto di massimo se : f(x0) = M ≥ f(x) ∀ ∈ [a,b]
- **Min ass:** Si dice che m è minimo di f in [a,b] e x0 ∈ [a,b] è punto di minimo se : f(x0) = m ≤ f(x) ∀ ∈ [a,b]

Funzioni crescenti e decresenti: Sia f:(a,b)→R

- **f è crescente** se ∀ x1,x2 € (a,b) , x1<x2 e si ha che f(x) ≥ f(x2)
- **f è strettamente crescente** se ∀ x1,x2 €(a,b), x1<x2 si ha che f(x1)>f(x2)
- **f è decrescente** se ∀ x1,x2 € (a,b) , x1>x2 e si ha che f(x) ≤ f(x2)
- **f è strettamente decrescente** se ∀ x1,x2 €(a,b), x1>x2 si ha che f(x1)<f(x2)

Funzione convessa: Sia f:(a,b)→R si dice convessa se ∀ x1,x2 € [a,b], ∀ t €[0,1]:
f((1 -t)x1 + tx2) ≤ (1-t) f(x1) + tf(x2)
(Il segmento che congiunge (x1,f(x1) e (x2,f(x2)) si trova sopra il grafico di f in[x1,x2])

Strettamente convessa: Sia f:(a,b)→R si dice strettamente convessa <=> ∀ x1,x2 € [a,b], ∀ t € [0,1] : f ((1-t) x1 + t x2) < (1-t) f(x1) + t f(x2)

Funzione concava: Sia f: [a,b]→R, si dice concava se ∀ x1,x2 €[a,b] x1<x2 ∀ t€[0,1]: f((1-t)x1+ t x2) ≥ (1-t) f(x1) + t(x2)

(Il segmento che congiunge (x1,f(x1) e (x2,f(x2)) si trova sotto il grafico di f in[x1,x2])

Strettamente concava: Sia f:(a,b)→R si dice strettamente concava <=> ∀ x1,x2 € [a,b], ∀ t € [0,1] :
f ((1-t) x1 + t x2) > (1-t) f(x1) + t f(x2)

Successioni di Riemann: Sia f: [a,b] → limitata n€N ,n ≥2, suddivido [a,b] in n parti.
x0 = a
Xj = a + j $\frac{(b-a)}{n}$ ove j=1…n
In un generico intervallo [xj-1,xj] (con 1 ≤j≤n) prendo un elemento arbitrario ij € [xj-1,tj] (con1≤ j ≤ n).
Considero f(tj) e la quantità f(tj) (xj-xj-1)
Sia Sn = Sommatoria j-1 fino n f(tj) (xj-xj-1) Somma n-essima di cauchy riemann di f.
Se prendo tutte le Sn ∀ n€N ho una successione $\{Sn\}_{n \in N}$ detta succ. di cauchy riemann.

Funzione integrabile secondo riemann: f:[a,b]→ R limitata, f si dice integrabile in [a,b] <=> ∀ {Sn}, {S'n} successioni di cauchy-riemann di f, lim n→inf Sn = lim n→inf S'n.
E in tal caso: $\lim_{n \to inf} Sn = \lim_{n \to inf} S'n$
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to inf} Sn$

Monotonia dell'integrale: dati f,g: [a,b]→R integrabili in [a,b] ∀ x€[a,b]:f(x)≤g(x) ⇒
$\int_a^b f(x)dx <= \int_a^b g(x)dx$
∀x€[a,b]:f(x)≥0 → $\int_a^b f(x)dx$ ≥ 0

Primitiva di una funzione: f:[a,b]→R, G: [a,b]→R.
G è detto primitiva di f se e solo se:

- G è derivabile in [a,b]
- ∀x € [a,b] : G(x) = f(x)

Integrale indefinito di f: f:[a,b]→R, sia G primitva di f, posso considerare l'insieme di tutte le primitive di f:
$\int_a^b f(x)dx =$ {G': G' primitiva di f} = {G + c, c€R}

Serie numeriche: Vogliamo dare un senso dove possibile, alla somma di infiniti addendi, consideriamo una successione {an}n€N di numeri reali, vogliamo dare senso a: a0+a1+an+…

Serie: Sia {an}n€N una succ. di numeri reali, si defenisce serie di termine generale {an}n€N la somma di tutti i termini della successione {an}n€N e si denota: $\sum_{n=0}^{+\infty} an$

- **Serie convergente:** Si dice che la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è convergente se la successione delle somme parziali $\{Sk\}_{k\in N}$, S0 = a0, (Sk=Sk+1+ak $\forall$ k ≥ 1) è converg.
  In tal caso $S = \lim_{k\to+\infty} Sk$ è detta somma della serie e si denota $\sum_{n=0}^{+\infty} an = S$.

- **Serie divergente:** Si dice che la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è divergente positivamente/ negativamente se lim k→ +inf Sk = +inf /-inf $\lim_{k\to+\infty} Sk = +\infty$ / $-\infty$

- **Serie irregolare:** Si dice che la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è irregolare se $\{Sk\}_{k\in N}$ è irregolare

Serie geometrica: Sia q € R, es q= $\frac{1}{2}$, vogliamo studiare la $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ (si chiama serie geometrica di ragione q)

Serie armonica: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ $an = \frac{1}{2}$ $\forall$ n≥1 diverge positivamente $\lim_{k\to+\infty} Sk = +\infty$

-**generalizzata:** Sia α€R $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

- α > 1 converge
- α ≤ 1 div. positivamente

Serie a termini positivi: Una $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ si dice a termini positivi se an>0 $\forall$ n€N

Serie a termini non negativi: Una $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ si dice a termini positivi se an ≥ 0 $\forall$ n€N.

Serie a termini di segno variabile: Si dice che la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è a termini di segno variabile se
$\sum_{n=0}^{+\infty} an$ non è a termini non negativi e nemmeno $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è a termini non negativi.

Serie assolutamente convergente: Data la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ a termini di segno variabile diciamo che è assolutamente convergente se la $\sum_{n=0}^{+\infty} an$ è convergente.