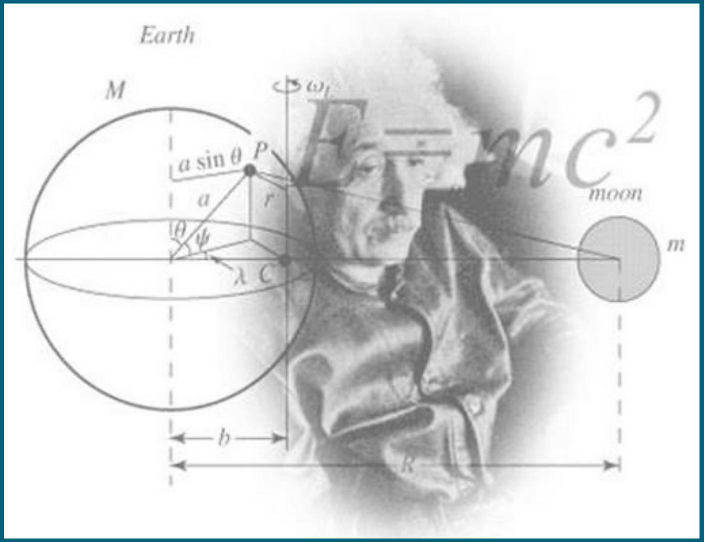
MOTI ROTAZIONALI E DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Fondamenti di Fisica
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2021/22

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO



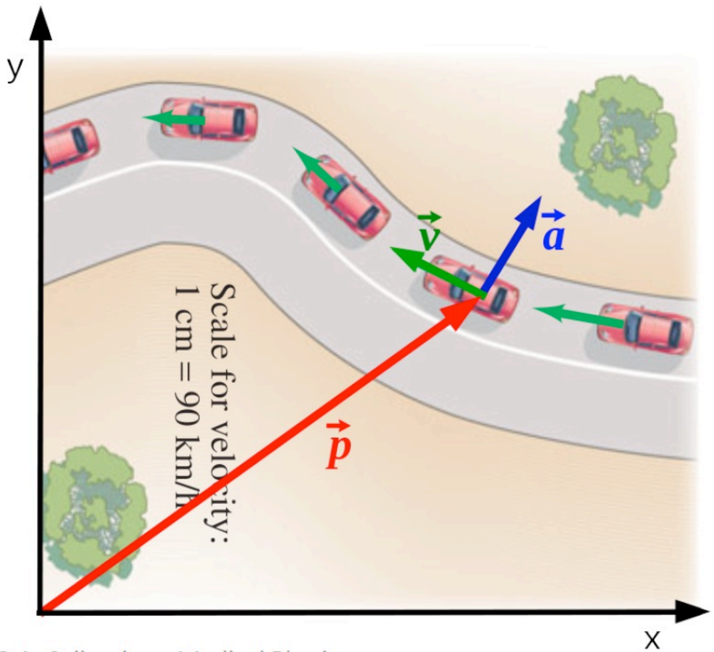
Dott. Francesco Scattarella
Università di Bari
Email: francesco.scattarella@uniba.it
Ufficio: Dipartimento IA di Fisica, 234- tel. 080 544 2369

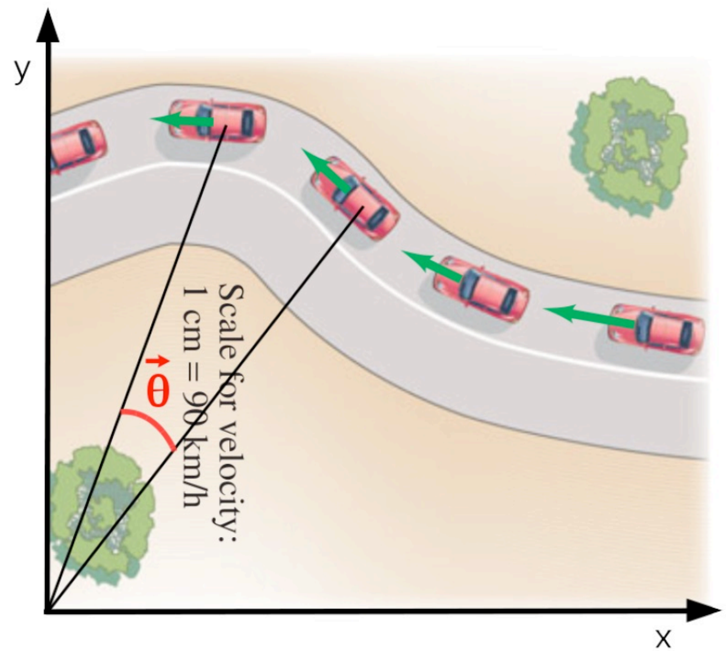
Cinematica lineare ed rotazionale

Posizione $\vec{p}$ → Angolo θ

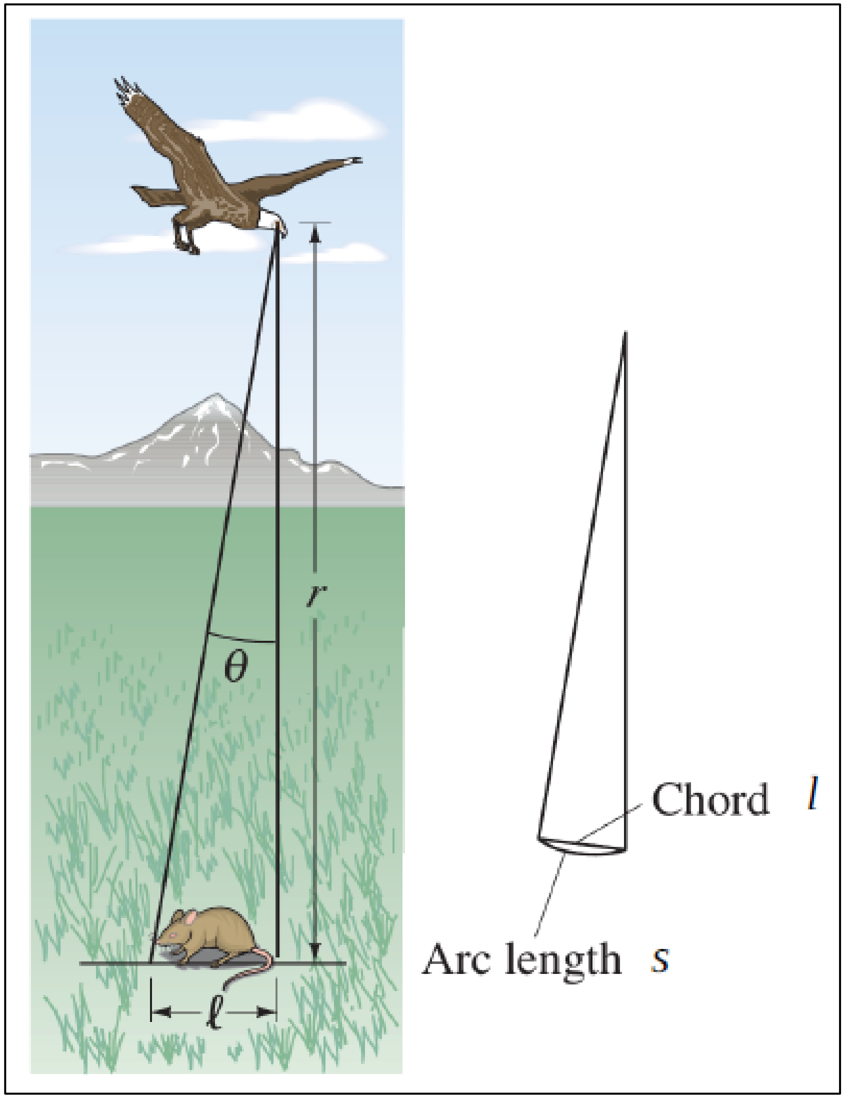
Velocità $\vec{v}$ → Velocita' angolare ω

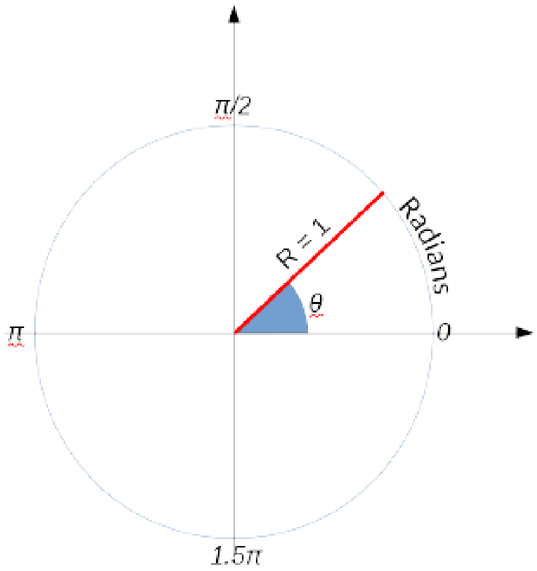
Accelerazione $\vec{a}$ → Accelerazione angolare α





Distanze ed angoli





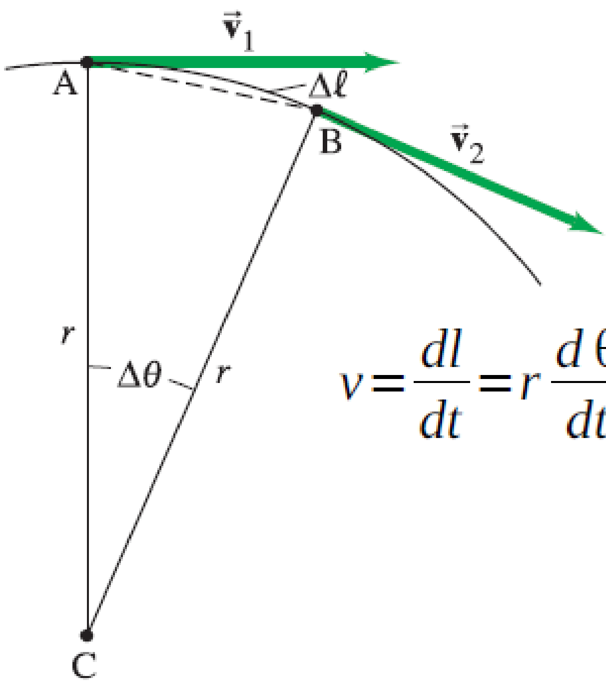
$$s = r\theta$$

$$s \approx l$$

(per piccoli angoli)

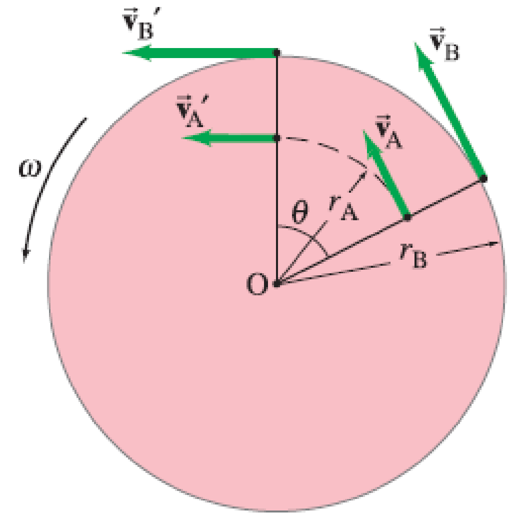
Velocità lineare ed angolare

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$$



$$v = \frac{dl}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r$$

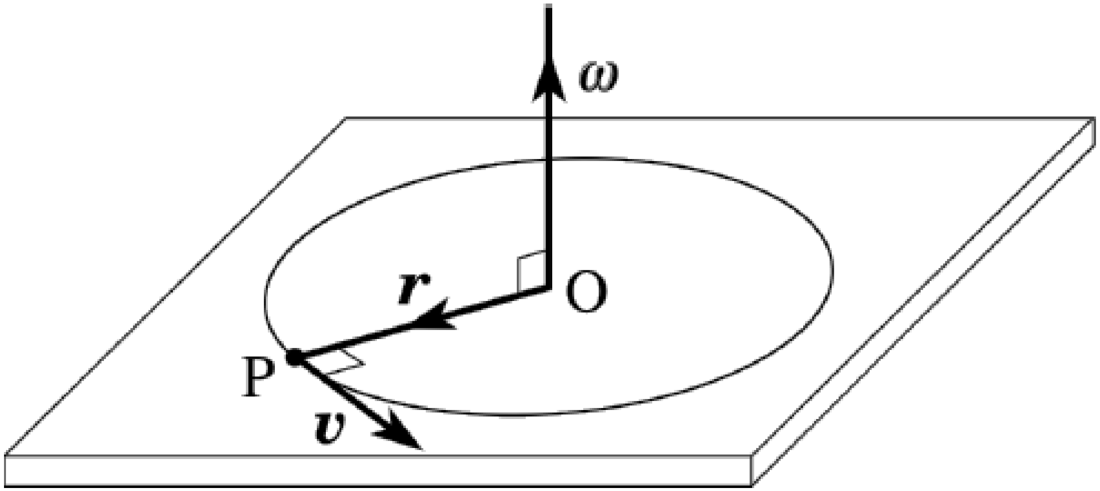
$$\boxed{v = \omega r}$$

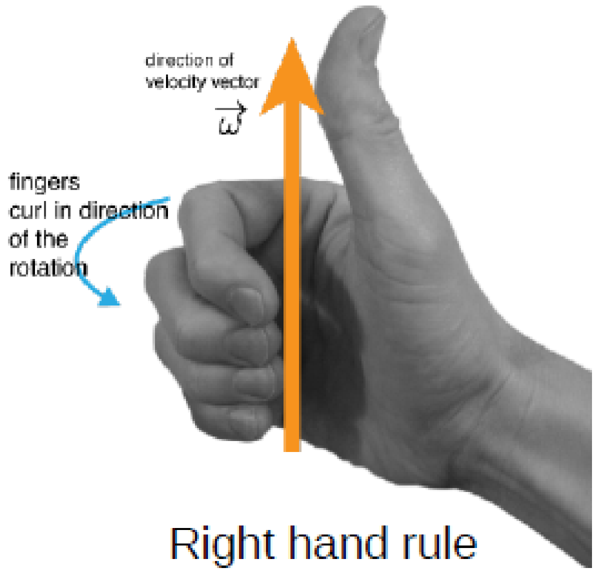


In un oggetto che ruota, ω è la stessa per ogni punto in ogni istante; mentre la velocità lineare v è maggiore per punti lontano dall'asse.

Natura vettoriale della velocità angolare

La velocità angolare è un vettore diretto lungo l'asse di rotazione, con modulo pari a ω. La rotazione avviene in senso orario guardando nella direzione del vettore velocità angolare.





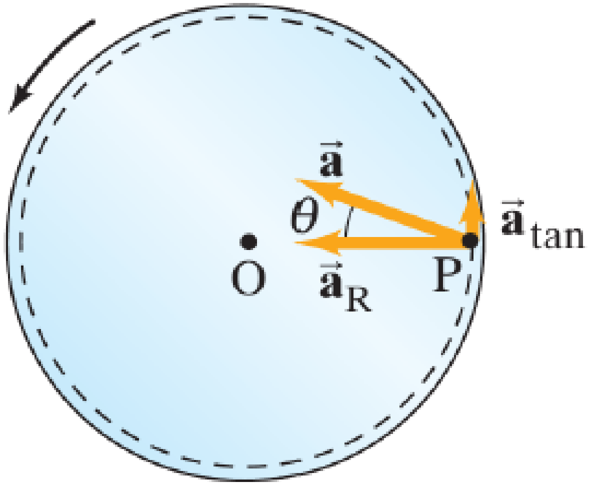
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Accelerazione lineare ed angolare

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

In un moto circolare, l'accelerazione angolare α è correlata solo all'accelerazione lineare tangenziale $\mathbf{a}_{tan}$:

$$a_{\tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



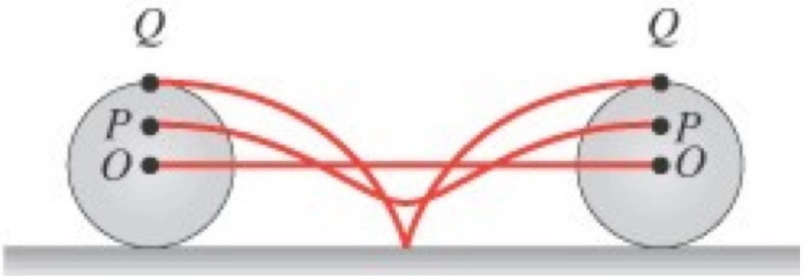
L'accelerazione totale è data da:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tan} + \vec{a}_r$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Moto di un corpo rigido

Per studiare il moto di un corpo rigido è possibile concentrarsi sullo spostamento globale, naturalmente riconducibile al moto del centro di massa. Tuttavia i vari punti del corpo rigido possono descrivere traiettorie diverse tra loro e da quella del centro di massa.



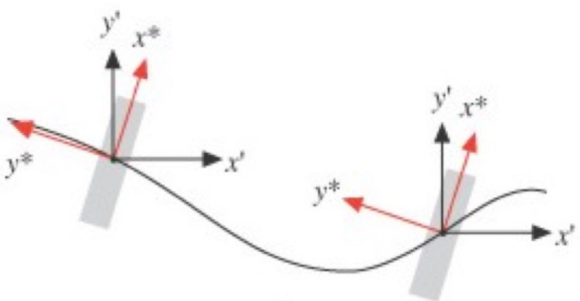
Prima di arrivare a considerare il moto più generale di un corpo rigido, iniziamo ad analizzare due tipi di moto:

- Moto di traslazione del corpo rigido
- Moto di rotazione del corpo rigido

Moto di traslazione e il moto di rotazione sono gli unici tipi di moto da studiare perché si dimostra che il moto più generale di un corpo rigido è un moto di rototraslazione.

Moto di un corpo rigido. Traslazione

Quando il corpo rigido compie un moto di sola traslazione tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità **v**, che coincide con $\mathbf{v}_{CM}$.



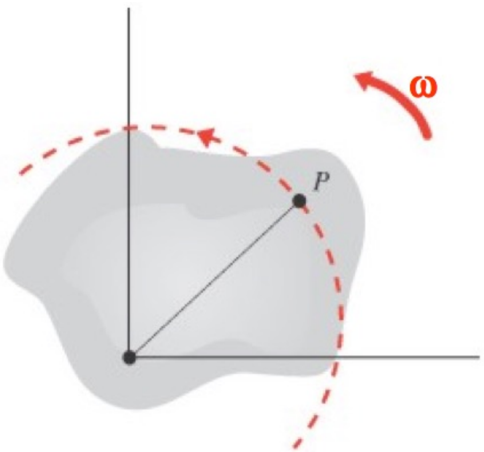
Le grandezze significative in una traslazione sono:

Quantità di moto: $\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$

Energia cinetica: $E_K = E_{K,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

L'equazione dinamica alla base del moto di traslazione è: $\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}_{CM}$, con ***R*** risultante delle forze esterne

Moto di un corpo rigido. Rotazione



Quando il corpo rigido compie un moto di rotazione tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione

Tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare ω.
Le velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei singoli punti sono diverse a seconda della distanza $\boldsymbol{R}_i$ dall'asse di rotazione $v_i = \omega R_i$

Energia cinetica rotazionale

L'energia cinetica del corpo rigido in un moto di rotazione è data da:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2 \ldots = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

ma v=ωR quindi

$$\boxed{E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_iR_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\ \omega^2}$$

$$I = \sum m_iR_i^2$$

MOMENTO DI INERZIA DI UN CORPO RIGIDO

L'energia cinetica dipende dal momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione

Dinamica del corpo rigido

Come è fatto un corpo rigido?

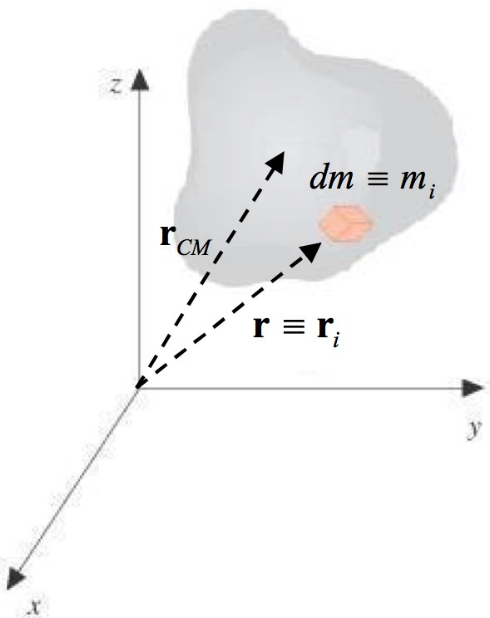
Esso è formato da un insieme continuo di punti materiali.

Estendendo quindi ciò che si è visto per un insieme discreto di punti materiali le singole masse saranno infinitesime, ossia

$$m_i \longrightarrow dm_i$$

Quindi tutte le somme diventano degli integrali!

Centro di massa del corpo rigido



Definiamo il centro di massa di un sistema di punti materiali la seguente grandezza:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

Se definiamo la densità come: $dm = \rho dV$, con dV elemento di volume occupato da dm

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \xrightarrow{\text{Se } \rho \text{ è costante}} \vec{r}_{CM} = \rho\frac{\int \vec{r}\, dV}{m} = \frac{\int \vec{r}\, dV}{V}$$

Posizione del centro di massa

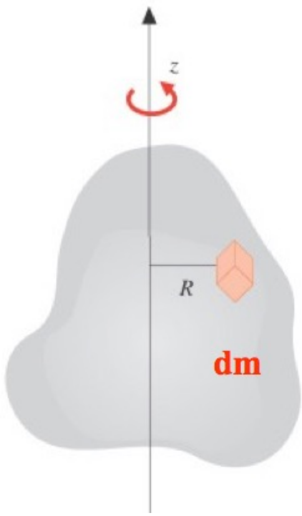
Se ρ è costante: $$\vec{r}_{CM} = \rho \frac{\int \vec{r}\, dV}{m} = \frac{\int \vec{r}\, dV}{V}$$

Se la densità è costante, la posizione del centro di massa, data da $\boldsymbol{r}_{CM}$, è la media della funzione vettoriale $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ nel volume V. Non dipende dalla massa ma solo dalla sua forma.

Se un corpo è simmetrico rispetto ad un punto, un asse o un piano, il centro di massa coincide con il centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria.

Se esistono più assi e piani di simmetria, il centro di massa è posizionato sulla loro intersezione.

Momento d'inerzia: dal discreto al continuo



Il momento di inerzia per un corpo continuo è dato da:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Nelle rotazioni rigide il momento di inerzia ha un ruolo fondamentale, analogo a quello della massa nella legge di Newton (vedi formula energia cinetica rotazionale)

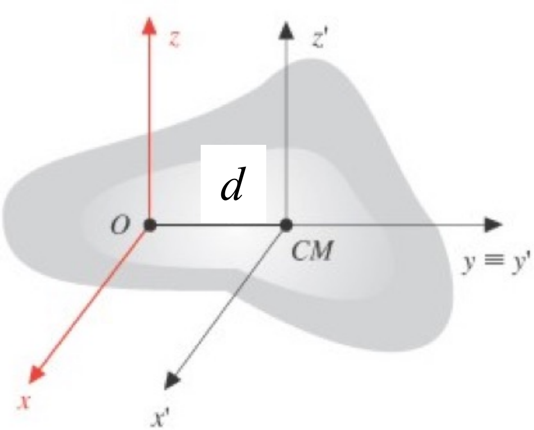
NOTA: Differenza fondamentale tra massa e momento di inerzia:

- m: caratteristica che può essere associata ad ogni corpo
- I: dipende da come è distribuita la massa attorno all'asse di rotazione

Teorema di Huyghens-Steiner (o degli assi paralleli)

Nei calcoli del momento di inerzia risulta chiaro come essi siano molto semplici se si scelgono come assi di rotazione assi particolari cioè assi di simmetria passanti per il centro di massa. Se si scelgono altri assi e le condizioni di simmetria non vengono soddisfatte, il calcolo degli integrali può divenire complicato

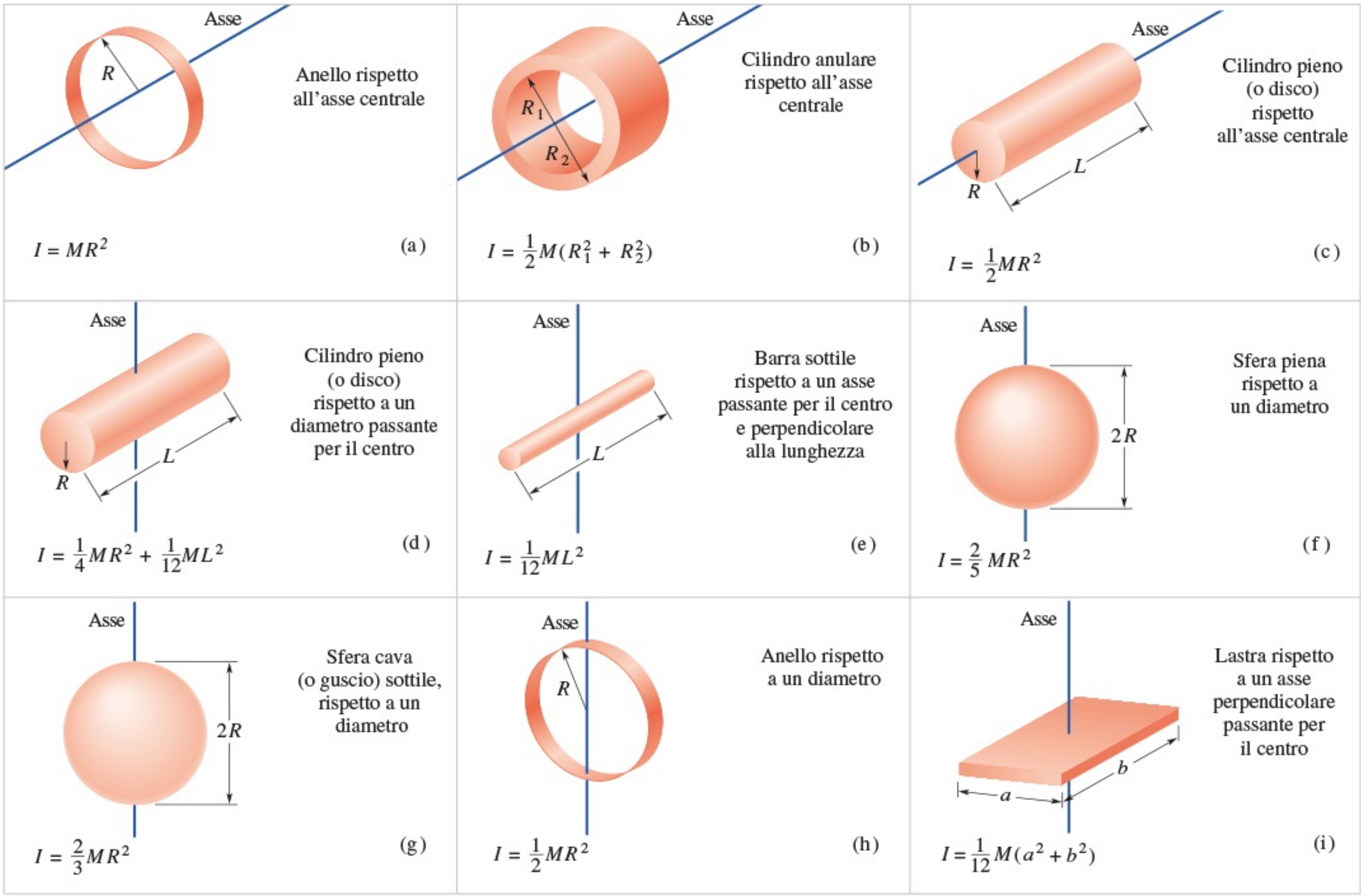
Il teorema di Huyghens-Steiner permette di semplificare il problema affermando che:
***Il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza "d" dal centro di massa del corpo è dato da*:**



$$I = I_{CM} + md^2$$

Momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse passante per il centro di massa

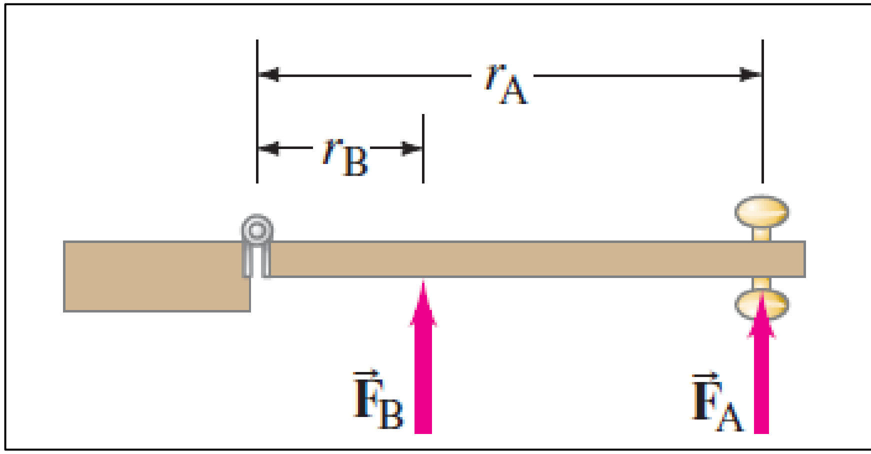
Alcuni momenti d'inerzia



Momento della forza (o momento torcente)

Per far ruotare un oggetto intorno ad un asse serve una forza, ma sono importanti direzione e punto di applicazione.

L'accelerazione angolare della porta è proporzionale all'intensità della forza, ma anche alla distanza del punto di applicazione della forza dall'asse di rotazione. Tale distanza è detta braccio della forza. (Ex. Porte con maniglione…)



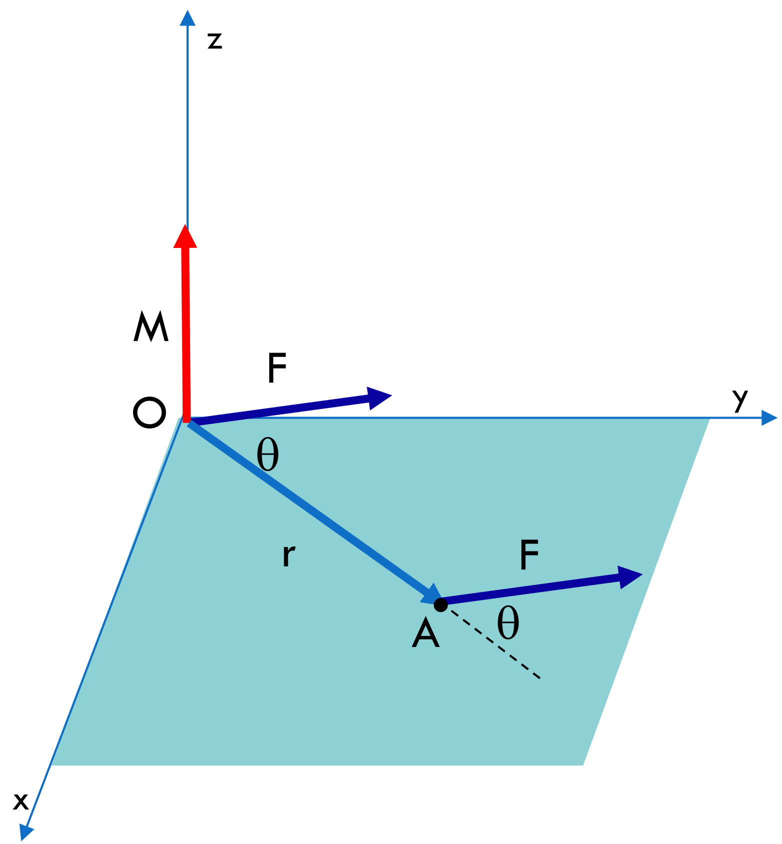
*Il momento di una forza (**M**) descrive quanto velocemente ed in che direzione avviene la rotazione:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vettore momento della forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

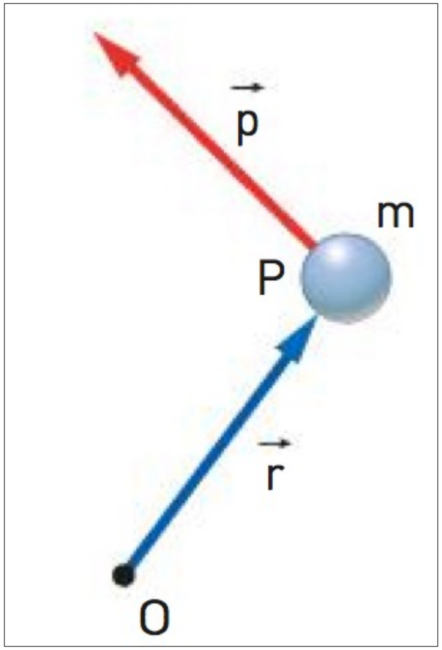
$$|M| = rF\sin\theta$$



http://ngsir.netfirms.com/j/Eng/momentBalance/momentBalance_js.html

Momento angolare di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale di massa *m* che si muove con velocità ***v*** e che, ad un certo istante, si trova in un punto P; indichiamo con ***p*** la quantità di moto del punto materiale ($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$) e con ***r*** il vettore che congiunge O con *P*, cioe il vettore posizione di *P* rispetto al punto O. Vale la seguente definizione:



Il momento angolare di un punto materiale è uguale al prodotto vettoriale tra il suo vettore posizione ***r*** e la sua quantità di moto ***p***:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angolare (kg · m²/s)

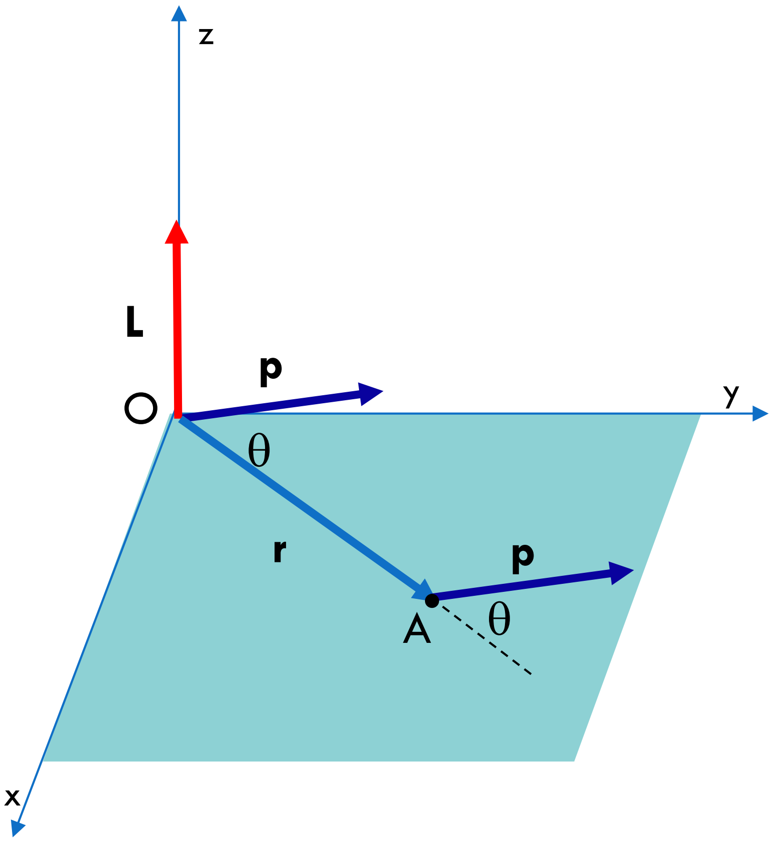
quantità di moto (kg · m/s)

vettore posizione (m)

Vettore momento angolare

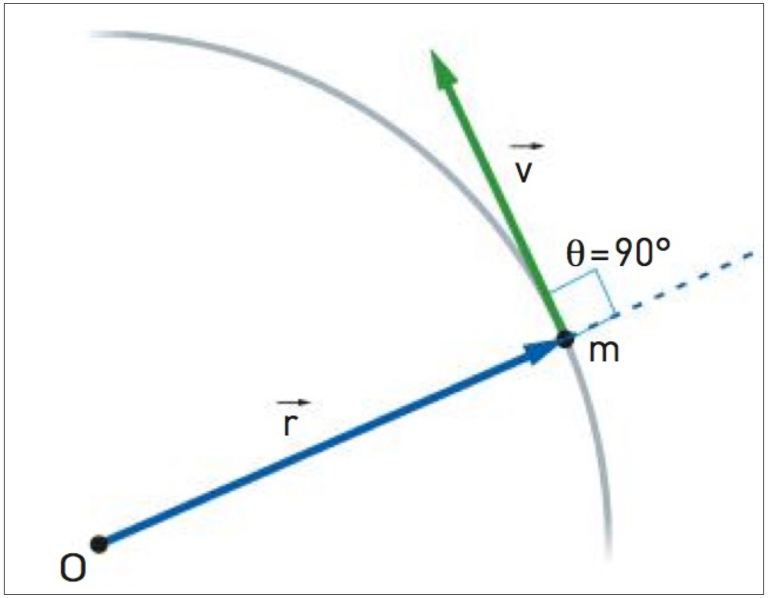
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$|L| = rp\sin\theta = rmv\sin\theta$$



Il momento angolare nel moto circolare

Consideriamo un punto materiale in moto circolare e determiniamo il suo momento angolare scegliendo come punto O il centro della traiettoria circolare.



In questo caso il calcolo del modulo *L* del momento angolare è particolarmente semplice, poiché l'angolo θ è retto. Si ha, infatti, sen 90° = 1, per cui

$$L = r\,p\,\mathrm{sen}\,\theta = r\,p = r\,m\,v$$

Legge di conservazione del momento angolare

Se partiamo dalla seconda legge di Newton scritta nella forma

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

si può dimostrare che:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

La risultante dei momenti delle forze cha agiscono su un punto materiale è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare del punto materiale.

Momento angolare di un sistema di punti materiali

Il momento angolare **L** di un sistema composto da n punti materiali è dato dalla somma vettoriale dei singoli momenti angolari $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$,...$\mathbf{L}_n$, tutti calcolati rispetto allo stesso punto O:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n.$$

Quindi:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}_{tot}$$

Conservazione del momento angolare

Per i moti circolari e rotatori, il momento angolare **L** rappresenta l'analogo di ciò che la quantità di moto **p** rappresenta per i moti rettilinei. In un moto rettilineo, **p** si conserva se la forza risultante è nulla; in un moto circolare o rotatorio, per **L** vale una legge di conservazione simile:

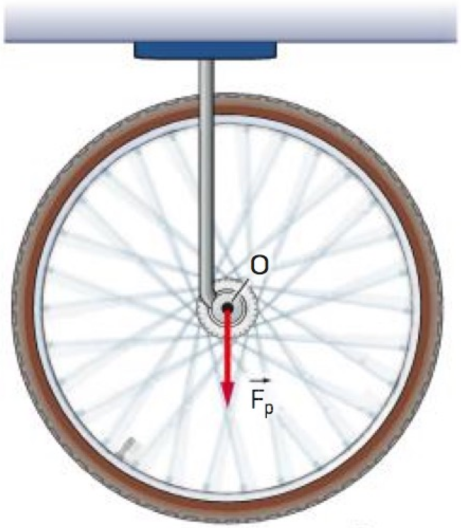
il momento angolare di un sistema di punti materiali si conserva nel tempo se il momento totale delle forze esterne che agiscono su di esso è nullo.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Oss: per il terzo principio della dinamica, **le forze interne** a un sistema sono, a due a due, uguali e opposte. I loro effetti, pertanto, si annullano ed esse non hanno alcuna influenza sul momento angolare totale: *solamente il momento totale delle forze esterne può modificare il momento angolare.*

Conservazione del momento angolare

Se gli attriti sono trascurabili, una ruota di bicicletta messa in rotazione continua a girare attorno al proprio asse. Sulla ruota agisce la forza-peso $\mathbf{F}_p$, applicata al baricentro, che coincide con il centro di rotazione O; il momento **M** della forza $\mathbf{F}_p$ rispetto a O è nullo, poiché il braccio di tale forza è nullo.



distanza nulla tra O e $\vec{F}_p$

Variazione del momento angolare

Se, per un intervallo di tempo Δt, su un sistema agiscono forze che hanno un momento totale costante **M** rispetto a un punto O (detto polo), la variazione del momento angolare del sistema è data dall'equazione:

variazione del momento angolare (kg · m²/s)

intervallo di tempo (s)

$$\Delta \vec{L} = \vec{M}\,\Delta t.$$

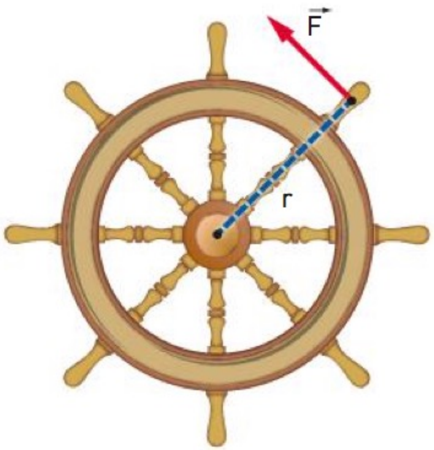
momento della forza (N · m)

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Variazione del momento angolare

$$|M| = r\,F$$



Nel caso in cui il timone sia inizialmente fermo, dopo un tempo Δt il momento angolare da esso acquistato ha modulo

$$|L| = M\,\Delta t = r\,F\,\Delta t$$

La legge espressa dalla precedente è l'analogo, per le rotazioni, del teorema dell'impulso che vale per i moti di traslazione. Essa stabilisce che il momento angolare **L** di un sistema si conserva (cioè si ha $\Delta\mathbf{L} = 0$) quando il momento delle forze esterne applicate al sistema è nullo; altrimenti, la variazione **L** sarà

$$\Delta\,\mathbf{L} = \mathbf{M}\,\Delta t$$

Impulso angolare

Abbiamo già visto il Teorema dell'impulso: l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale è uguale alla variazione della sua quantità di moto

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

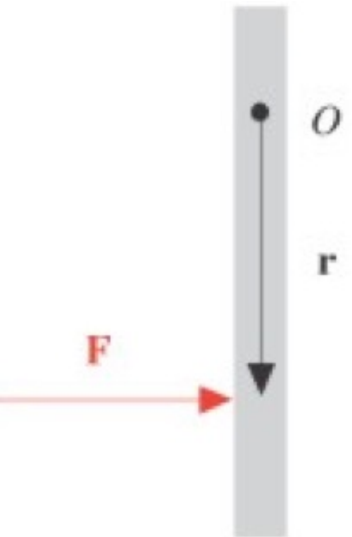
Una deduzione analoga si può fare a partire dalla relazione: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \Delta\vec{L}$$

Impulso angolare

L'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare.

Impulso angolare

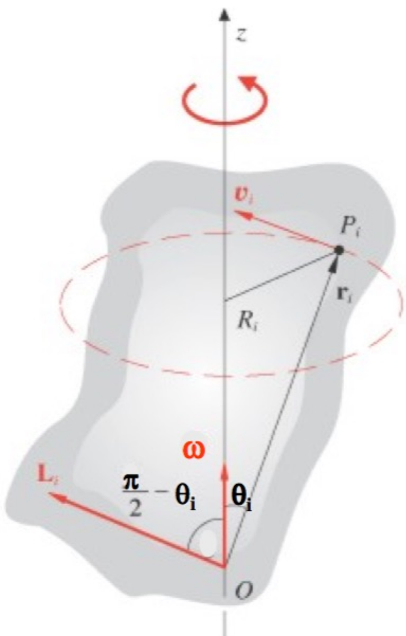


Un modo per metter in rotazione un corpo rigido rispetto ad un asse fisso consiste nell'applicazione, in un punto determinato del corpo, di una forza intensa per un tempo breve, ovvero nell'applicazione di un impulso

$$\int \vec{M}\,dt = \int (\vec{r} \times \vec{F})dt = \vec{r} \times \int \vec{F}\,dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

La grandezza **rxJ** si chiama ***momento dell'impulso***

Rotazione intorno ad un asse fisso



I punti dell'asse attorno cui avviene la rotazione sono fissi e dunque possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti.

Caratteristiche del vettore velocità angolare ω:

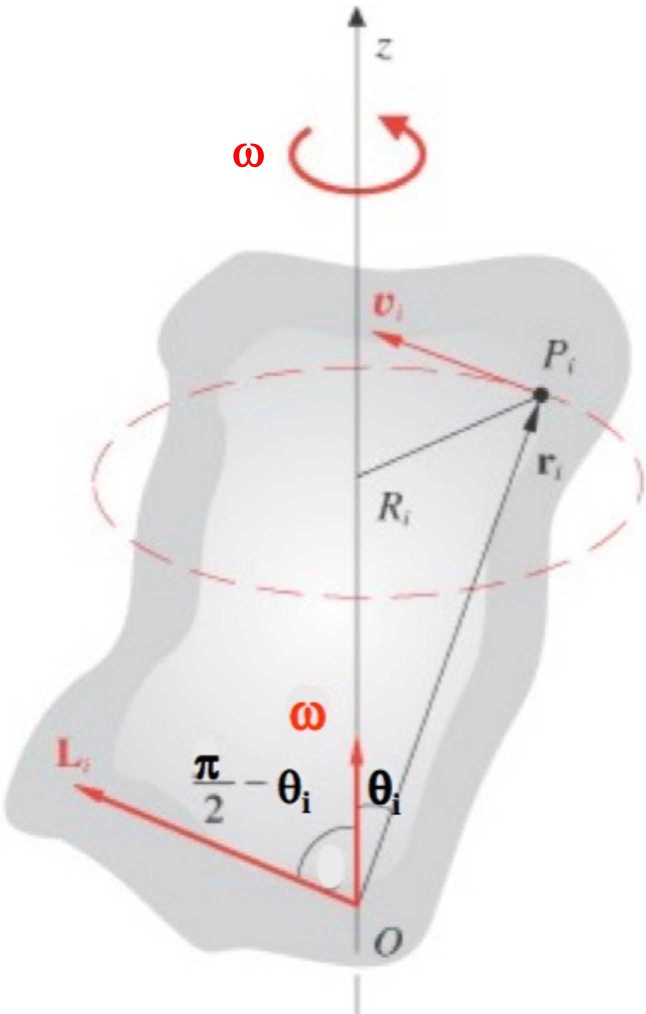
- **direzione** è quella dell'asse di rotazione ed è fissa
- **verso** indica il verso della rotazione
- **modulo** in genere variabile

Se ω varia allora il vettore accelerazione angolare $\alpha \neq 0$

α è anch'esso parallelo all'asse di rotazione

Assumiamo, come in figura:
- l'asse z come asse di rotazione
- il punto O, qualsiasi punto sull'asse z, come polo per il calcolo dei momenti

Rotazione intorno ad un asse fisso



Distanza di P_i dall'asse: $R_i = r_i \operatorname{sen}\theta_i$

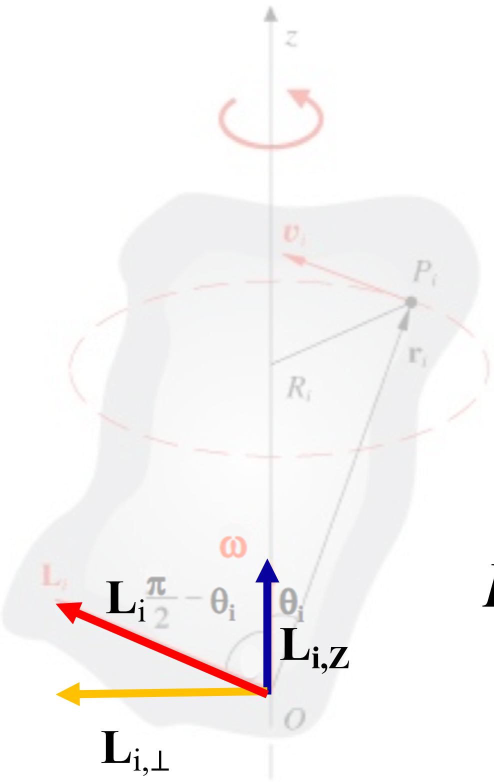
Momento angolare del punto P rispetto ad O:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

- Ortogonale al piano individuato dai vettore $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$
- Forma un angolo pari a $\pi/2-\theta_i$ con l'asse z
- Ha modulo pari a:

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$$

Rotazione intorno ad un asse fisso

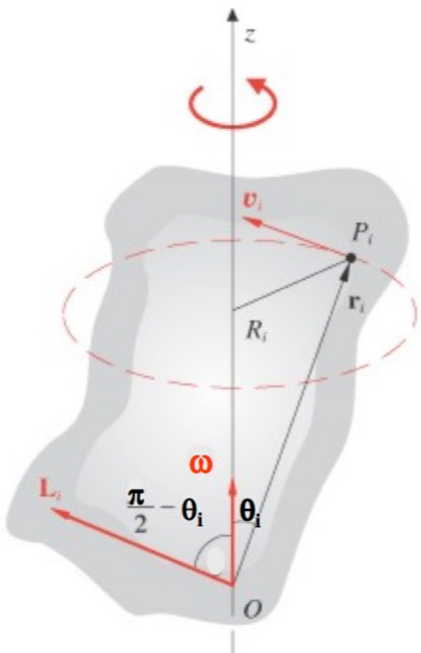


Proiezione del momento angolare $\mathbf{L}_i$ sull'asse di rotazione:

Momento angolare assiale $L_{i,z}$:

$$L_{i,Z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i sen\theta_i = m_i R_i \omega r_i sen\theta_i = m_i R_i^2 \omega$$

Momento angolare e momento di inerzia



Momento angolare totale del corpo: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$

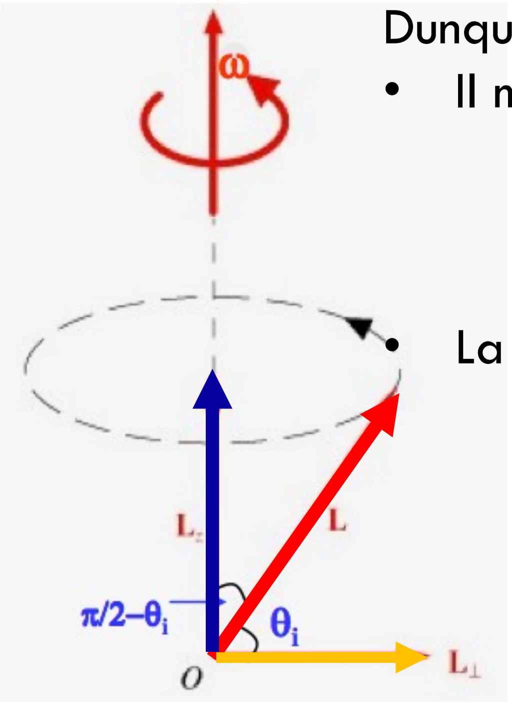
Proiezione sull'asse Z: $L_Z = \sum L_{i,Z} = \sum \left(m_i R_i^2 \right) \omega$

ma ricordiamo la definizione di Momento di Inerzia $I = \sum \left(m_i R_i^2 \right)$

$$L_Z = \sum \left(m_i R_i^2 \right) \omega \Rightarrow L_Z = I \ \omega$$

Il momento angolare assiale dipende dal momento di inerzia del corpo.

Moto di precessione



Dunque abbiamo ricavato che:

- Il momento angolare del corpo che ruota intorno ad un asse è:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

- La componente del momento angolare parallelo a z è: $L_Z = I\ \omega$

In generale la componente ortogonale all'asse z (asse di rotazione) del momento angolare non è nulla ma è data dalla somma dei termini:

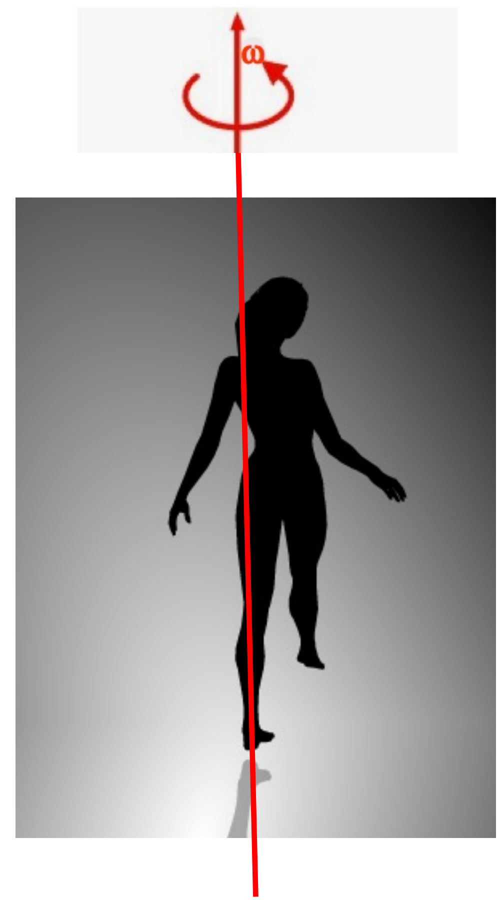
$$L_{i\ \perp} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i$$

Ma se l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria del corpo $L_\perp$ è nullo, poiché per ogni $\mathbf{L}_i$ esiste un $\mathbf{L}_j$ simmetrico rispetto all'asse e la loro somma vettoriale sarà 0.

Nel caso generale in cui $L_\perp \neq 0$, si ha un moto intorno all'asse di rotazione detto Moto di precessione (trottola)

Equazioni del moto del corpo rigido

Caso 1: L è parallelo a ω (esempio ballerina)



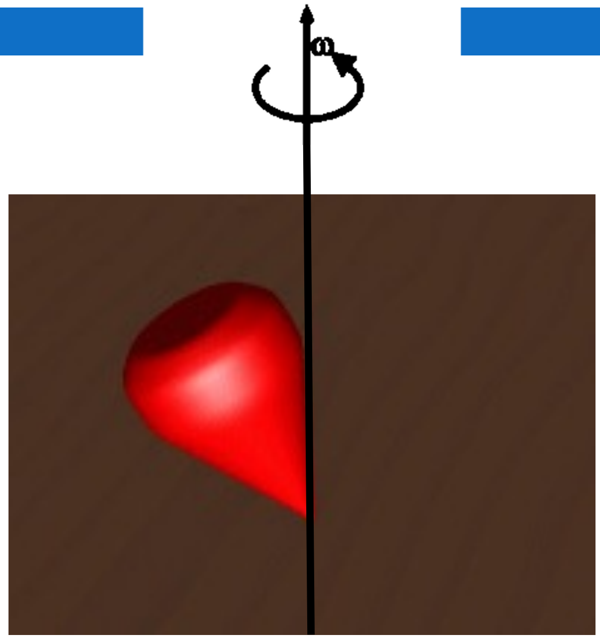
$$\vec{L} = I\ \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = I\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\ \vec{\alpha}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{M} = I\ \vec{\alpha}$$

Seconda legge di Newton per le rotazioni

α e **M** sono paralleli all'asse di rotazione cioè a ω. La conoscenza delle forze esterne e del loro punto di applicazione permette di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia.

Equazioni del moto del corpo rigido



Caso 2: L non è parallelo a ω (esempio trottola)

$$L_Z = I_Z \omega$$

$$M_Z = \frac{dL_Z}{dt} \Rightarrow M_Z = I_Z \alpha$$

α dipende solo da L_Z cioè dalla proiezione sull'asse di rotazione. Dalla componente perpendicolare si ricavano informazioni sul moto di precessione che non influisce sull'andamento di α.

Calcolo dell'energia cinetica

L'energia cinetica del corpo rigido in un moto di rotazione è data da:

$$\boxed{E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \ \omega^2}$$

L'energia cinetica dipende dal momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione

Possiamo scrivere l'energia cinetica in funzione del momento angolare nei due casi

Nel caso in cui L è parallelo a ω: $\vec{L} = I \ \vec{\omega} \Rightarrow E_{cin} = \dfrac{L^2}{2I}$

Nel caso in cui L non è parallelo a ω: $L_Z = I \ \omega \Rightarrow E_{cin} = \dfrac{L_Z^2}{2I}$

Calcolo del lavoro

Quando un corpo con velocità angolare iniziale ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin}, in seguito all'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione ed è dunque stato compiuto un lavoro:

$$W = \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} I \ \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I \ \omega_{in}^2$$

Ricapitolazione: equazioni cardinali della dinamica

Le forze che agiscono su un corpo rigido sono la risultante e il momento risultante delle forze esterne; quest'ultimo è somma dei momenti delle singole forze, rispetto ad un polo opportunamente scelto, che può coincidere col centro di massa.

Le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi si scrivono:

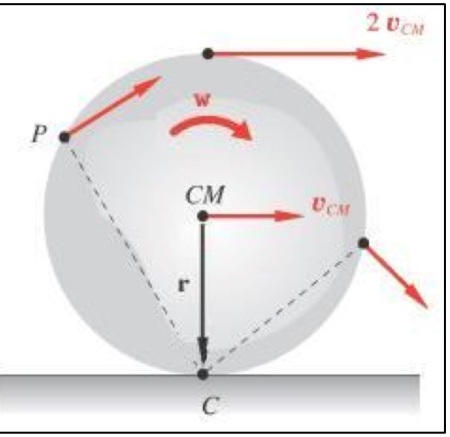
Moto di traslazione: $$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Moto di rotazione: $$\vec{M} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Corrispondenza formale tra il moto rettilineo e quello circolare

Moto rettilineo			Moto circolare		
1.	Spostamento	$\vec{r}$	1.	Spostamento	ϑ
2.	Velocità	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	2.	Velocità	$\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{k}$
3.	Accel.	$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	3.	Accel.	$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{k}$
4.	Massa	m	4.	Mom Inerzia	I
5.	Forza	$\vec{F} = m\vec{a}$	5.	Mom.Forza	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
6.	Lavoro	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$	6.	Lavoro	$W = \int M_z \cdot d\vartheta$
7.	En. Cin.	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	7.	En. Cin.	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
8.	Potenza	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	8.	Potenza	$P = M_z \cdot \omega$
9.	Q. di moto	$Q = m\vec{v}$	9.	Mom.Angolare	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Moto di puro rotolamento



Un corpo di forma cilindrica o sferica si muove sopra un piano.
Se il corpo rotola sul piano, le velocità dei punti del corpo non sono tutte uguali. Se il punto di contatto ha velocità nulla rispetto al piano si ha un moto di puro rotolamento.

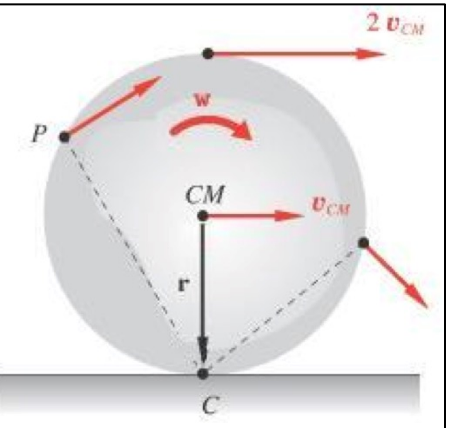
- In ogni intervallo di tempo d*t* è come se il corpo ruotasse intorno ad un asse fisso passante per il punto di contatto C, con velocità angolare ω.

- L'asse di rotazione non è un asse materiale, bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo.

In un intervallo di tempo d*t* successivo il contatto avviene in un C' infinitamente vicino a C e si ripete la rotazione intorno un nuovo asse.

Ma che forza agisce per mantenere fermo il punto C nell'intervallo dt?
Una forza di attrito statico esercitata tra il piano e il corpo.

Moto di puro rotolamento



Se il corpo ruota attorno ad un asse passante per il punto di contatto C, la velocità di ogni punto del corpo è ortogonale alla congiungente del punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C:

$$v = \omega |PC|$$

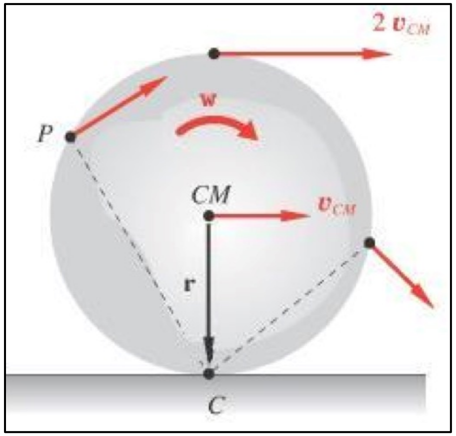
Si può dimostrare che la velocità di C distante r dal centro di massa può essere espressa come:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Velocità del centro di massa

Velocità di C rispetto al centro di massa

Moto di puro rotolamento

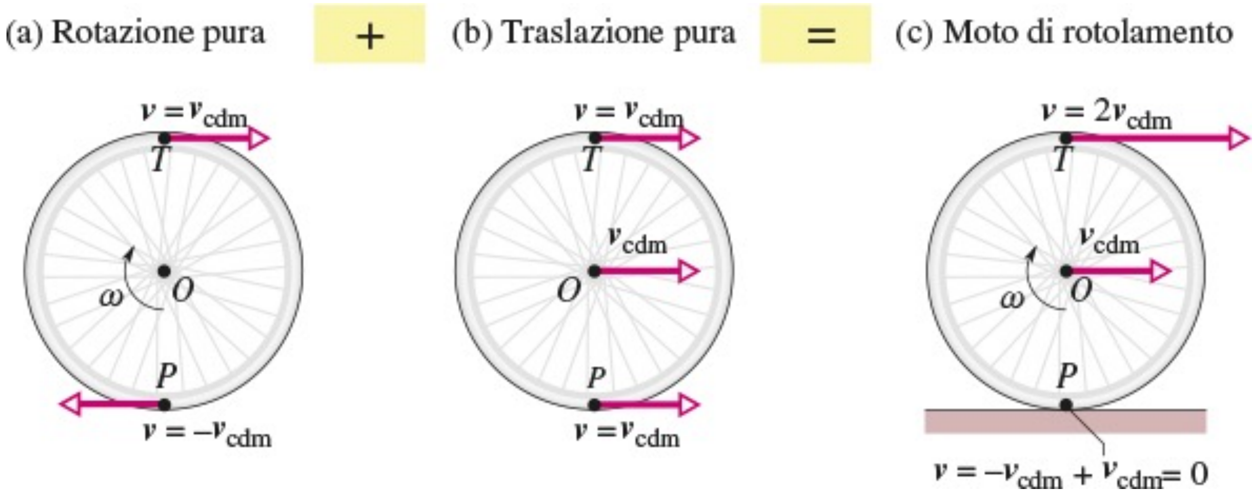


La condizione di puro rotolamento è:

$\mathbf{v}_c = 0$, $\mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

In modulo: $v_{CM} = \omega r$; $a_{CM} = \alpha r$

Moto di puro rotolamento



Nel complesso la successione di rotazioni infinitesime attorno ad un punto di contatto istantaneo equivale ad una roto-traslazione in cui il centro di massa avanza con velocità v_{CM} mentre il corpo ruota con velocità angolare ω rispetto al centro di massa.

Teorema di köning per l'energia cinetica (cenno)

Se gli N punti materiali sono in movimento rispetto al sistema di riferimento inerziale dato, l'energia cinetica del sistema è data da:

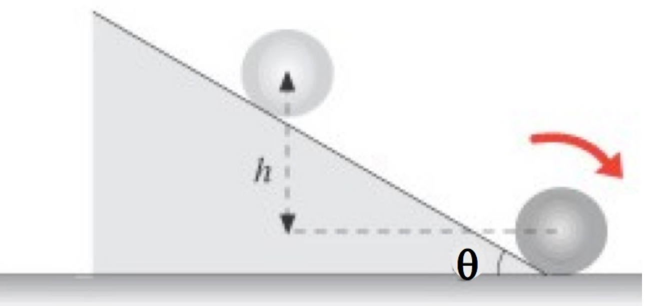
$$\boxed{E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{E_k = E_k^{'} + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2}$$

L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale dato, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

Moto di puro rotolamento



Determinare la velocità che raggiunge a fine percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato

Condizioni iniziali: per t=0, il corpo è in quiete all'altezza h

Conservazione dell'energia: $$mgh = E_{k,fin}$$

Si ricordi il teorema di Köning $$E_k = E_{CM} + E'_k$$

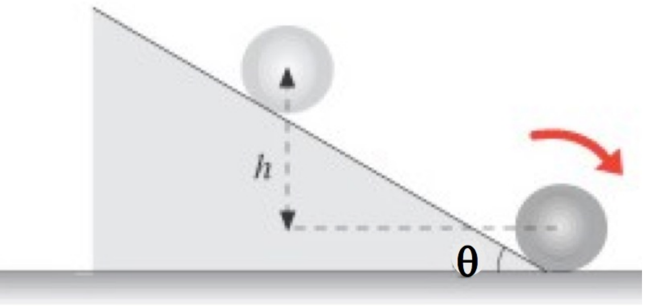
$$\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

$$\omega = \frac{v_{CM}}{r}$$

Ricaviamo v_{CM}

Moto di puro rotolamento



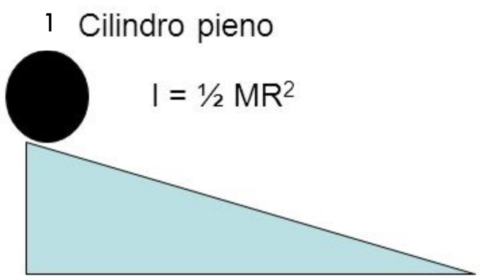
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}} < \sqrt{2gh}$$

NOTA

Se il corpo scivolasse senza attrito, arriverebbe in fondo con velocità maggiore: $v_{CM} = \sqrt{2gh}$. Invece se rotola, l'energia potenziale si trasforma sia in energia cinetica di traslazione sia in energia cinetica di rotazione nel moto rispetto al centro di massa. Per questa ragione la velocità finale nel rotolamento risulta inferiore a $\sqrt{2gh}$

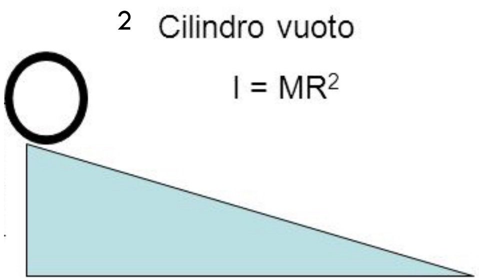
Moto di puro rotolamento

Esempio: gara tra cilindri



$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Non dipende né dal raggio né dalla massa del cilindro



$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}} = \sqrt{gh}$$

Come prima non dipende né dal raggio né dalla massa del cilindro, ma è più piccola della velocità del cilindro piena.

https://www.youtube.com/watch?v=wRcZHo7Naro
https://www.youtube.com/watch?v=CHQOctEvtTY