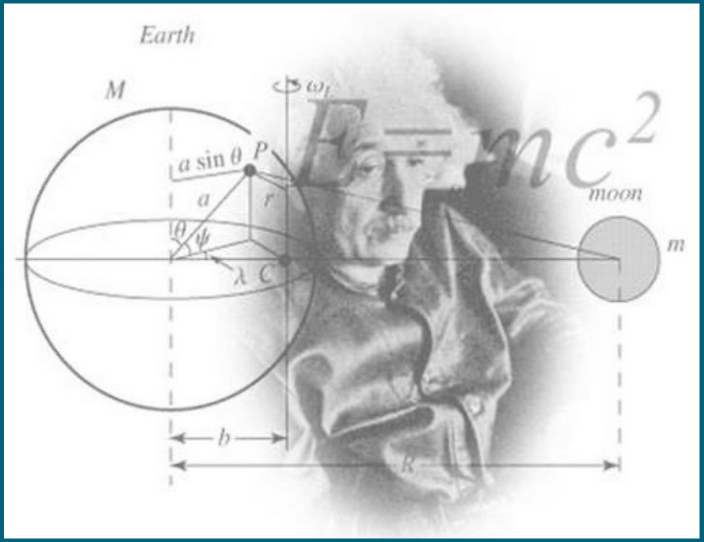
VETTORI

Fondamenti di Fisica
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2021/22



Dott. Francesco Scattarella
Università di Bari
Email: francesco.scattarella@uniba.it
Ufficio: Dipartimento IA di Fisica, 234- tel. 080 544 2369

Grandezze scalari e vettoriali

Tra le grandezze misurabili alcune sono completamente definite da un numero e da un'unità di misura, altre invece sono completamente definite solo quando, oltre ad un numero e alla corrispondente unità di misura, vengono fissati anche **direzione e verso**

Grandezze Fisiche

Scalari : definite da numero e unità di misura

Vettoriali : definite da

- **Modulo (valore numerico e unità di misura)**
- **direzione**
- **verso**

I VETTORI

Un vettore viene indicato con la notazione:

- **v** (lettera che individua la grandezza vettoriale in grassetto)

oppure

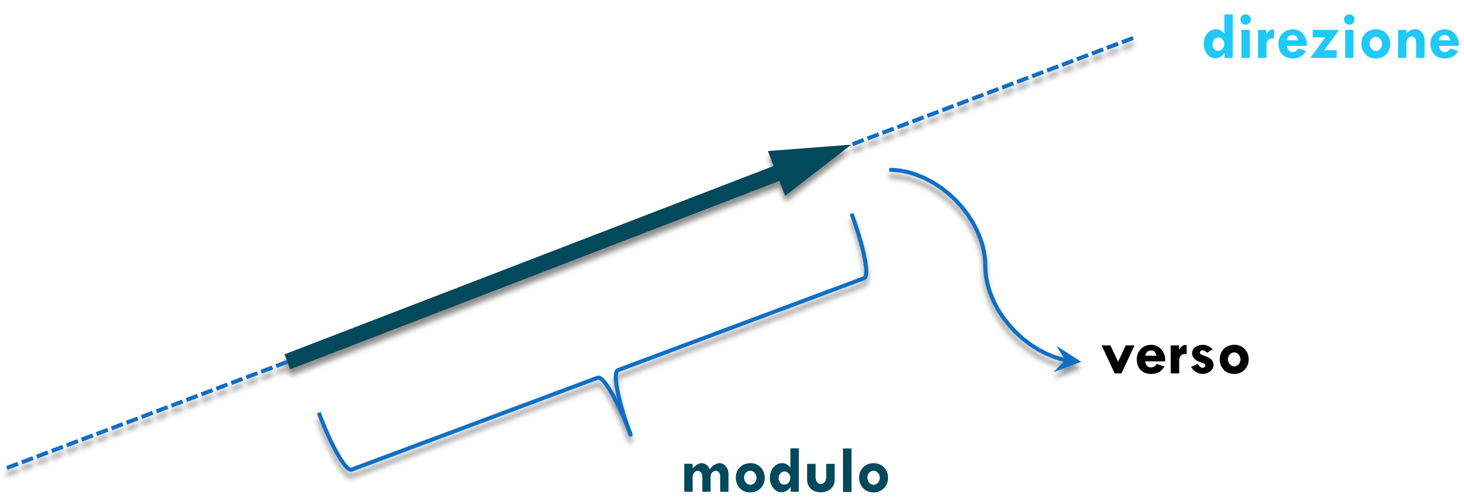
- $\vec{v}$ (lettera che individua la grandezza vettoriale con una freccia sopra)

Il modulo di un vettore, cioè il suo valore numerico (o intensità) viene invece indicato con |**v**| oppure $|\vec{v}|$ oppure semplicemente v

I VETTORI

Rappresentazione grafica di una grandezza vettoriale:

Freccia la cui lunghezza indica l'**intensità** o modulo e la cui **direzione** e **verso** (individuato dalla punta della freccia) coincidano con quelli della grandezza vettoriale che rappresenta



Esempi di scalari e vettori

TEMPERATURA

ENERGIA

VELOCITA'

CARICA ELETTRICA

MASSA

FORZA

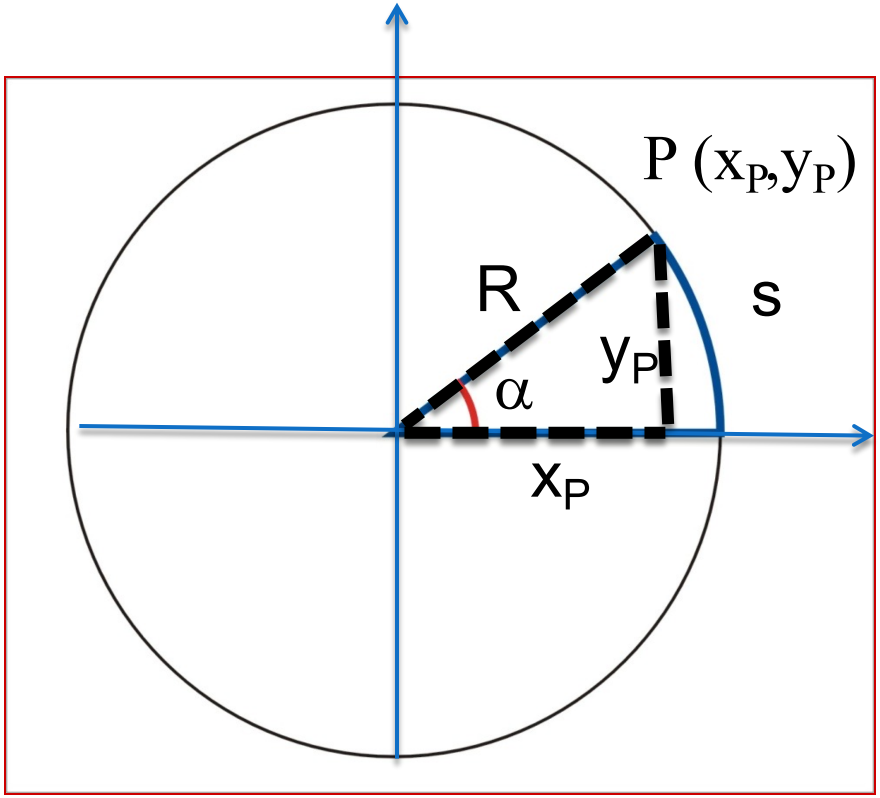
ACCELERAZIONE

RICHIAMO

Sin, Cos, Tan

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{R}$$

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

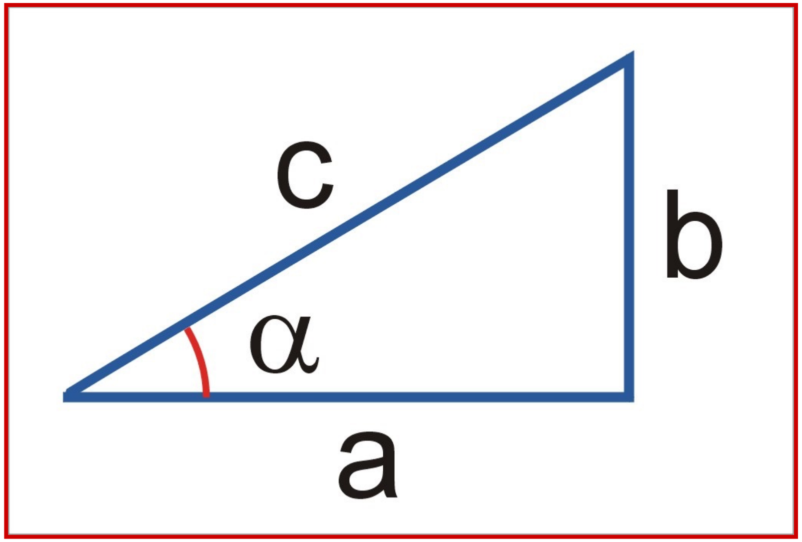


$$\cos\alpha = \frac{x_P}{R}$$

$$\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

RICHIAMO

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$a = c \cdot \cos\alpha$$

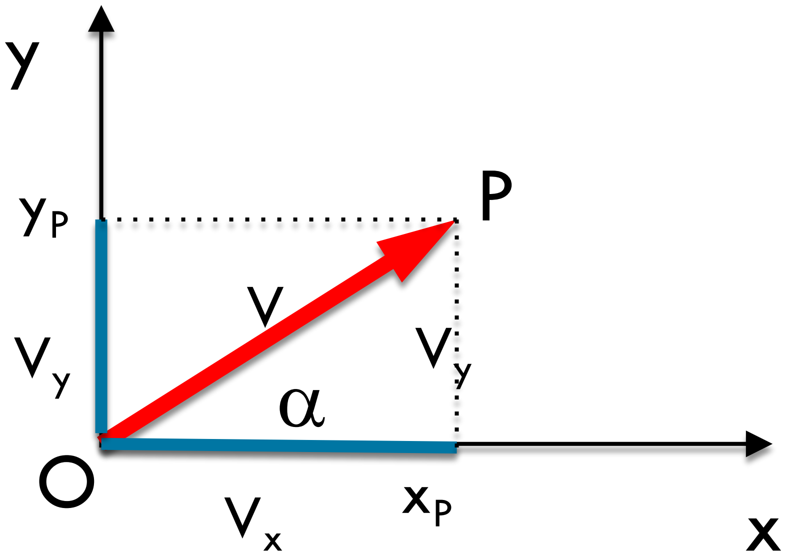
$$b = c \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$b = a \cdot \tan\alpha$$

$$\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$$

VETTORI NEL PIANO



Modulo di **V** =

|**V**|=lunghezza segmento OP

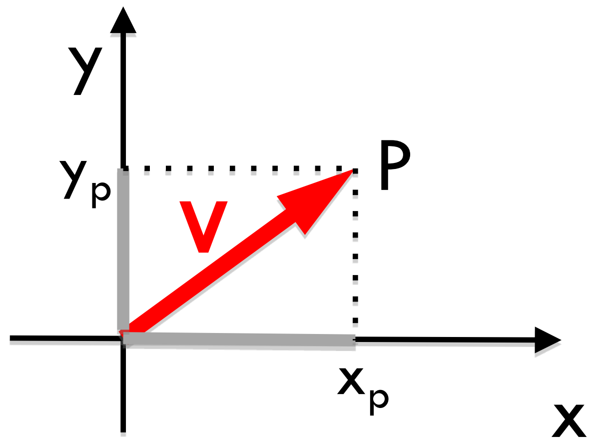
Direzione di **V** determinata dall'angolo α

Componenti di V = proiezioni di OP lungo gli assi cartesiani:

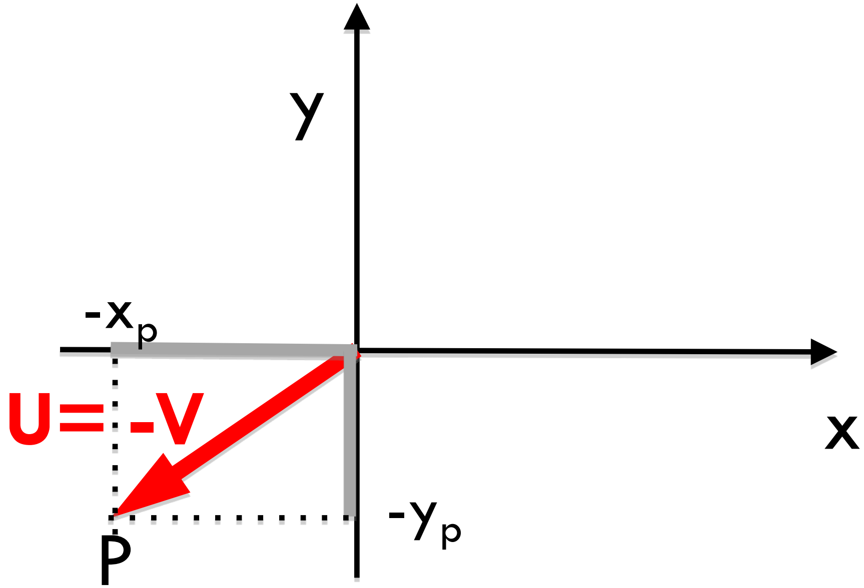
$V_x = V \cos\alpha$

$V_y = V \sin\alpha$

VETTORI NEL PIANO : -V



Il vettore **U=-V** ha stesso modulo di **V**, stessa direzione, ma verso opposto.

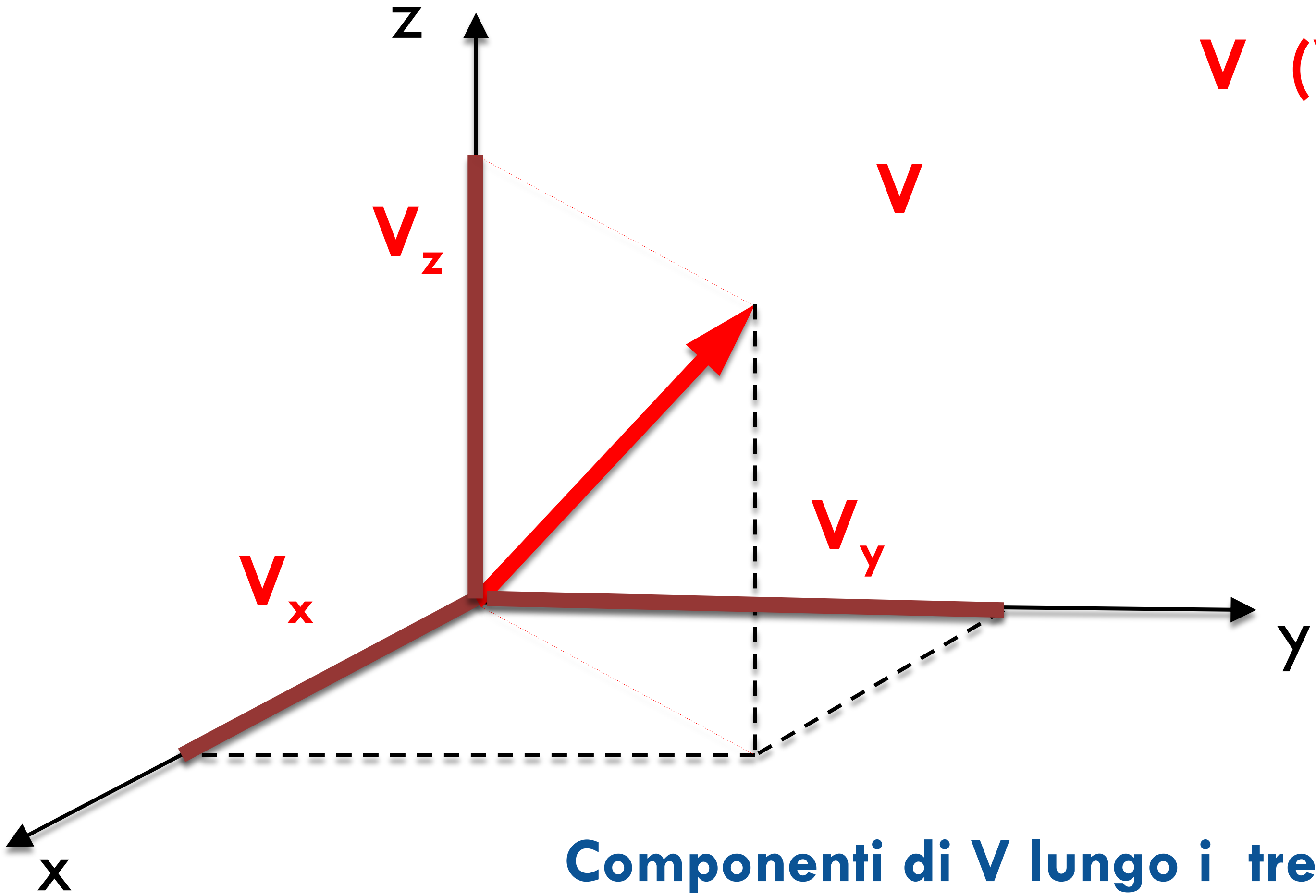


Da cui segue :

$U_y = -y_P$

$U_x = -x_P$

Rappresentazione dei VETTORI nello spazio



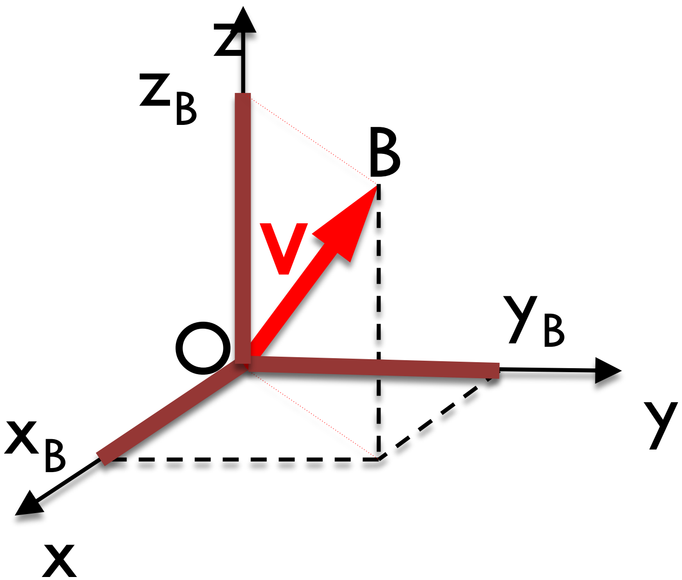
$\mathbf{V}\ (V_x, V_y, V_z)$

$$V_z = z_P$$
$$V_y = y_P$$
$$V_x = x_P$$

Componenti di V lungo i tre assi cartesiani

=

Proiezioni di OP sui tre assi cartesiani



$|\mathbf{V}|$ = lunghezza(**OB**)

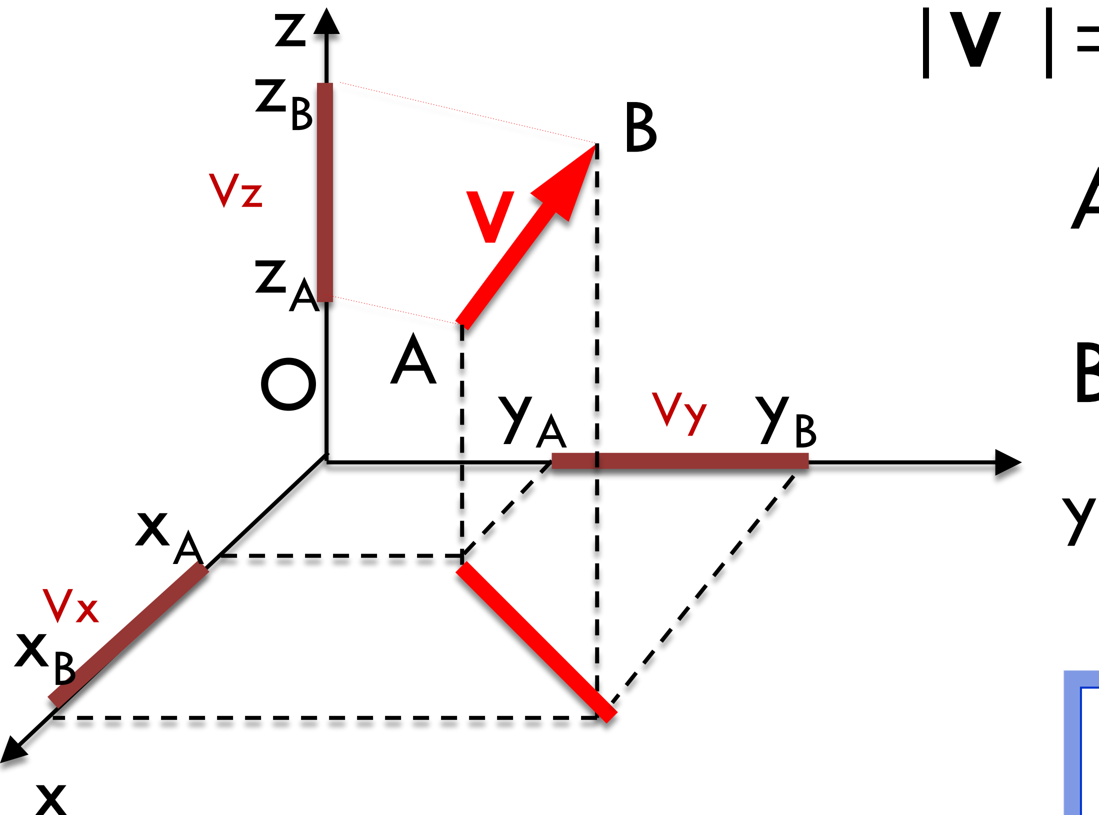
O (0,0,0) B (x_B, y_B, z_B)

$V_x = x_B$
$V_y = y_B$
$V_z = z_B$

proiezioni di **OB** sui tre assi = componenti di **V** lungo i tre assi cartesiani

$\mathbf{V}\ (V_X, V_Y, V_Z)$

Se il primo estremo di **V** non coincide con O



$|\mathbf{V}| =$ lunghezza (AB)

A (x_A, y_A, z_A)

B (x_B, y_B, z_B)

$$V_x = x_B - x_A$$
$$V_y = y_B - y_A$$
$$V_z = z_B - z_A$$

I vettori sono enti che hanno delle specifiche operazioni di somma e prodotto.

Si definiranno :

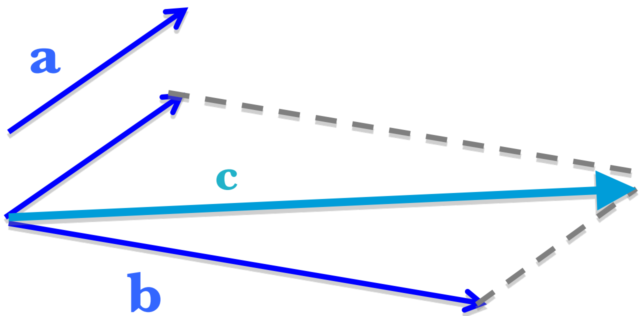
- Somma (e differenza) tra vettori
- Prodotto tra un vettore ed uno scalare
- Prodotto scalare tra vettori
- Prodotto vettoriale

OPERAZIONI TRA VETTORI

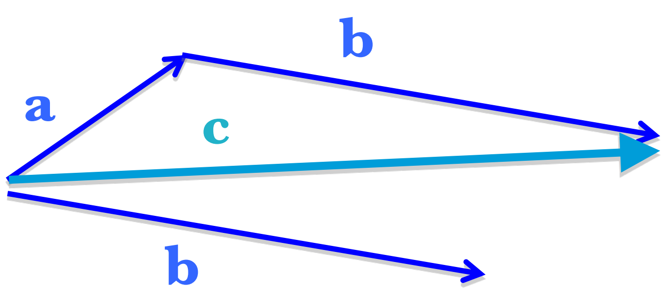
1. Somma tra vettori
2. Prodotto tra un vettore ed uno scalare
3. Prodotto scalare tra vettori
4. Prodotto vettoriale

Somma tra vettori

- Metodo 1



- Metodo 2:



Per determinare il vettore somma di **a** e **b** si possono usare due metodi :

- Metodo 1 :
  - Costruire un parallelogramma
  - Il vettore somma **c** = **a** + **b** giace sulla diagonale maggiore
- Metodo 2 :
  - Unire la punta di un vettore con la coda dell' altro
  - Unire la coda libera del primo con la punta libera del secondo

SOMMA DI DUE VETTORI A e B

$\mathbf{A}\ (A_X, A_Y, A_Z)$ $\mathbf{B}\ (B_X, B_Y, B_Z)$

Si definisce il vettore somma C:

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ di componenti $\mathbf{C}\ (C_X, C_Y, C_Z)$

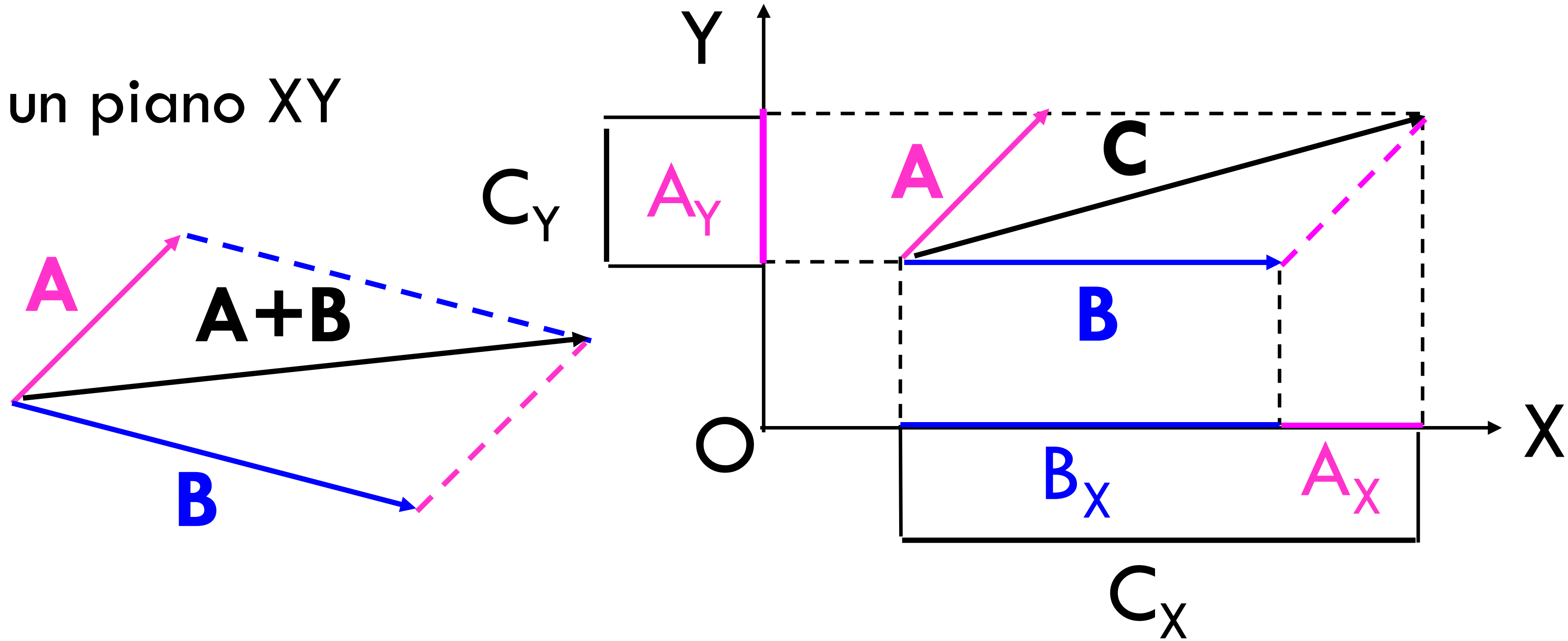
$$C_X = A_X + B_X$$

$$C_Y = A_Y + B_Y$$

$$C_Z = A_Z + B_Z$$

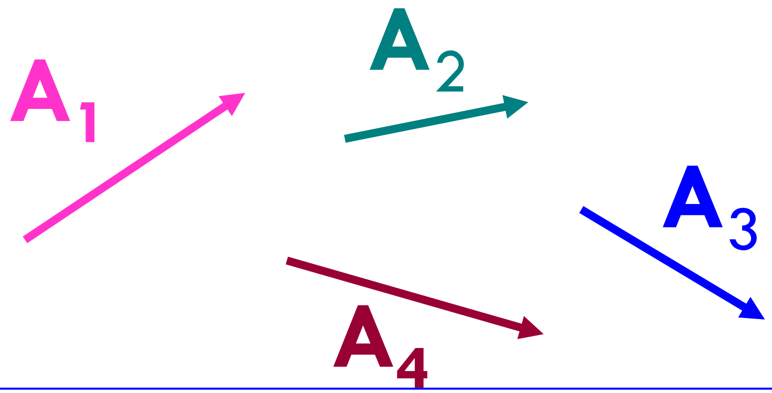
Somma di due vettori: componenti nel piano cartesiano

In un piano XY

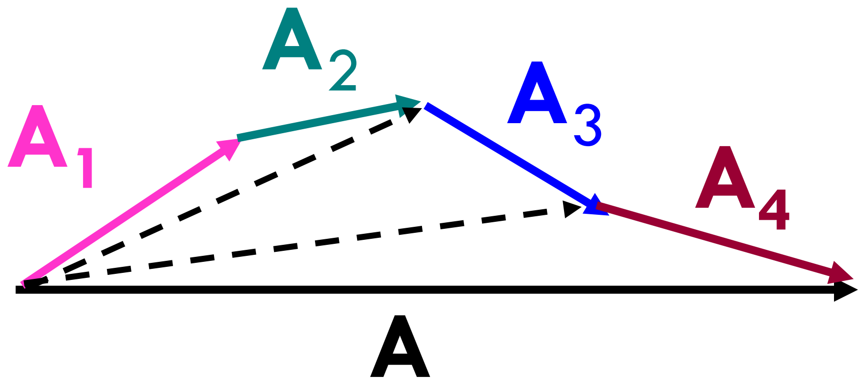


C= **A**+**B** = vettore somma = diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori **A** e **B**

SOMMA DI N VETTORI $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots \mathbf{A}_N$

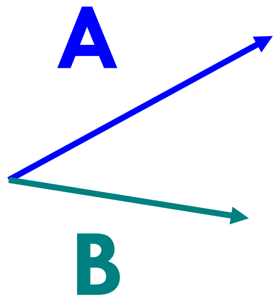


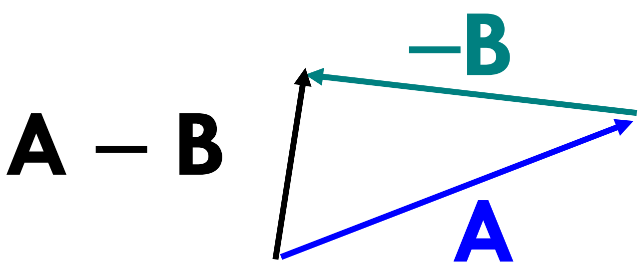
$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots \mathbf{A}_N$ vettore che congiunge il primo estremo di $\mathbf{A}_1$ con il secondo estremo di $\mathbf{A}_N$

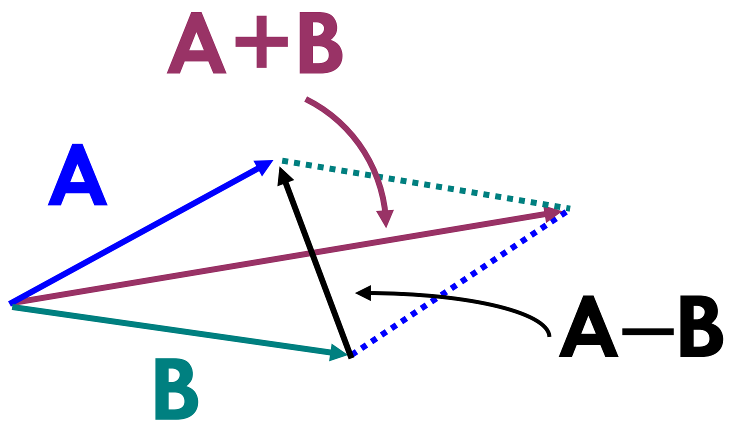


DIFFERENZA DI DUE VETTORI A e B:

somma dei vettori **A** e **–B**







OPERAZIONI TRA VETTORI

1. Somma tra vettori
2. Prodotto tra un vettore ed uno scalare
3. Prodotto scalare tra vettori
4. Prodotto vettoriale

PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

Sia **A** un vettore ed m uno scalare. Si definisce **B** come prodotto di m per **A**

$$\boxed{\vec{B} = m\vec{A}}$$ vettore parallelo ad **A**

$$\left|\vec{B}\right| = |m|\left|\vec{A}\right|$$

verso di **B**

<u>concorde</u> col verso di **A** se m > 0

<u>opposto</u> al verso di **A** se m < 0

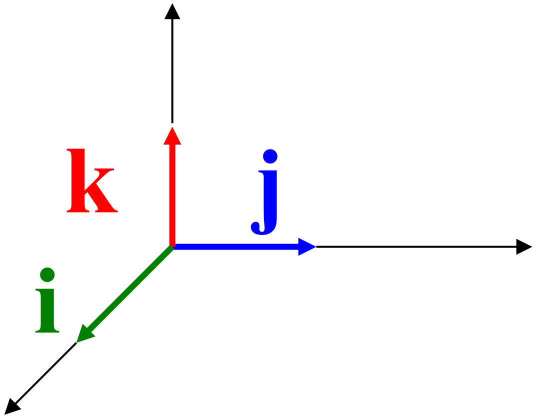
RAPPRESENTAZIONE DI UN VETTORE TRAMITE VERSORE

Un vettore nello spazio lo si può scrivere come multiplo di un vettore di modulo unitario, chiamato versore

Rappresentazione tramite versori

Versore = vettore di lunghezza unitaria

i **j** **k** versori degli assi coordinati

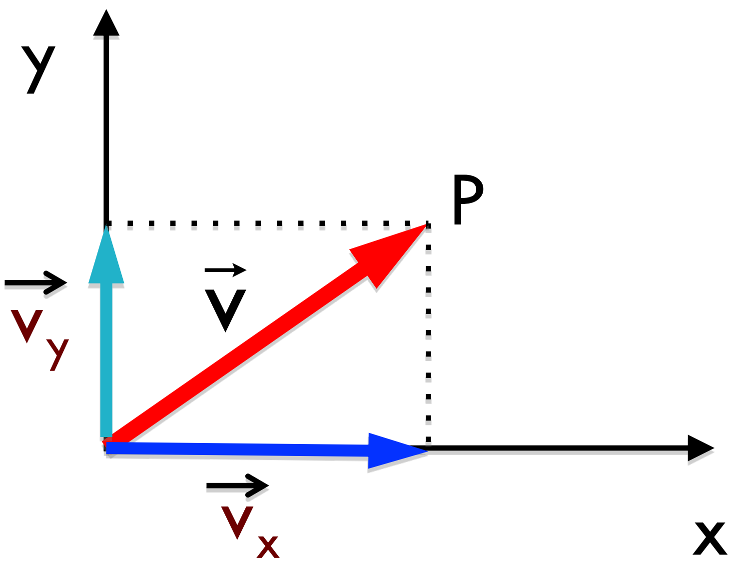


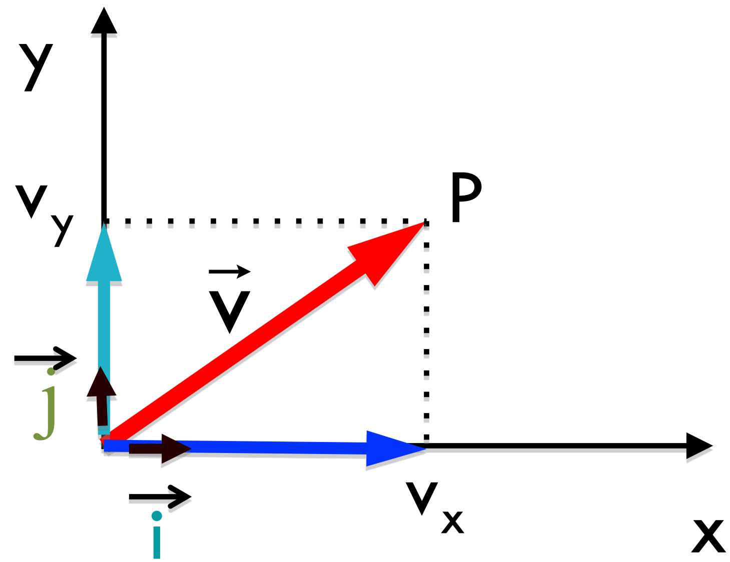
i (1,0,0)

j (0,1,0)

k (0,0,1)

RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI NEL PIANO

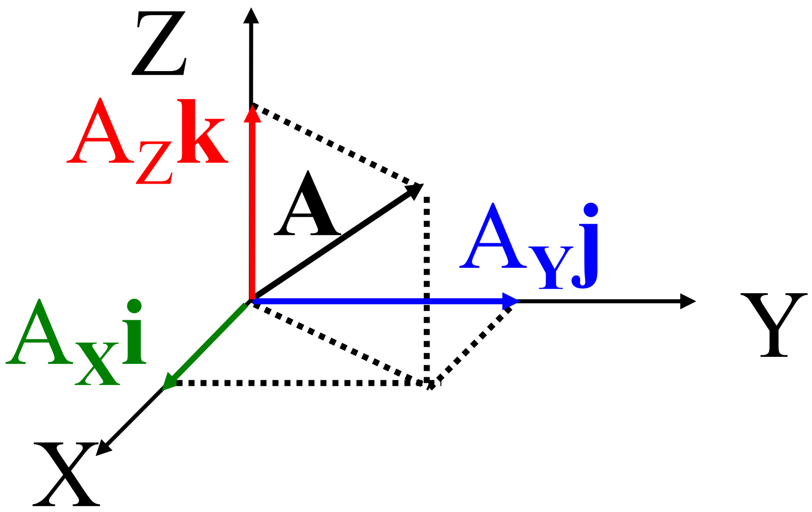




$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \Longleftrightarrow \boxed{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}$$

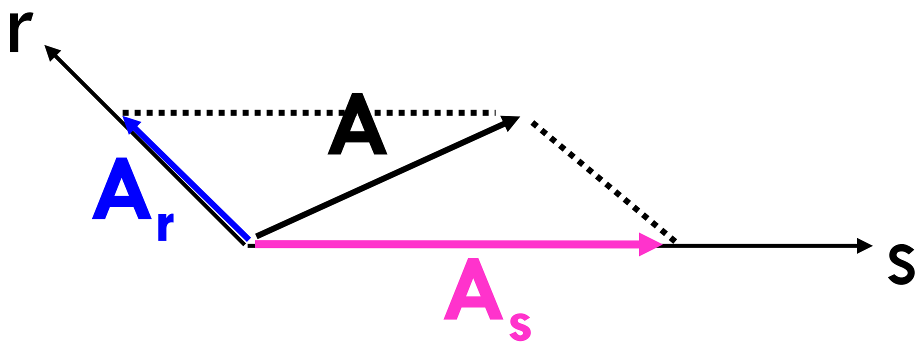
Scomposizione lungo gli assi cartesiani

$$\boxed{\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}}$$



SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE LUNGO DUE DIREZIONI ORIENTATE r ED s

Regola: si determinano i due vettori paralleli a r ed s la cui somma è **A**



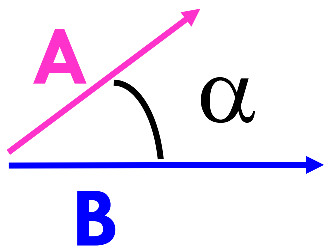
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_s$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

1. Somma tra vettori
2. Prodotto tra un vettore ed uno scalare
3. Prodotto scalare tra vettori
4. Prodotto vettoriale

PRODOTTO SCALARE

Il risultato è uno **SCALARE**



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\alpha$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

(perché cos90°=0)

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = \mathrm{A}\,\mathrm{A}\cos 0 = \mathrm{A}^2$$

Proprietà del prodotto scalare

$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$

$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = 0$

proprietà commutativa

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$

proprietà distributiva

$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$

Prodotto scalare in componenti cartesiane

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (A_X\, \mathbf{i} + A_Y\, \mathbf{j} + A_Z\, \mathbf{k}) \bullet (B_X\, \mathbf{i} + B_Y\, \mathbf{j} + B_Z\, \mathbf{k}) =$$

$$= A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$$

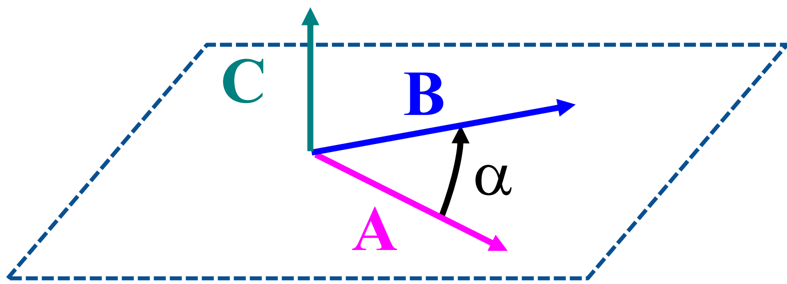
$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A^2 = A_X{}^2 + A_Y{}^2 + A_Z{}^2$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

1. Somma tra vettori
2. Prodotto tra un vettore ed uno scalare
3. Prodotto scalare tra vettori
4. Prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale di due vettori

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ oppure $\mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$

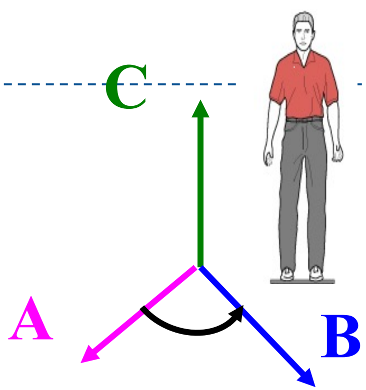


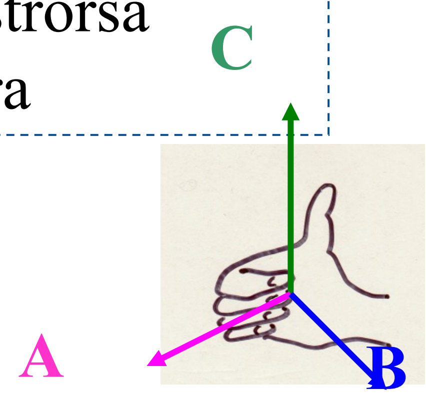
C vettore

modulo di **C** : C = A B senα

direzione di **C** : perpendicolare al piano definito da **A** e **B**

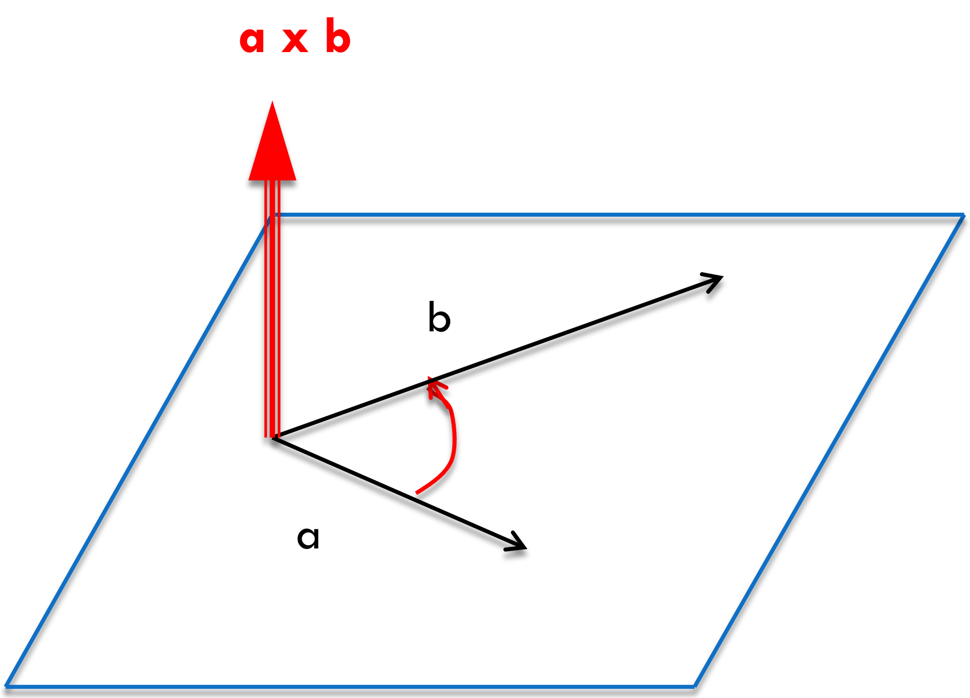
verso di **C** : definito dalla regola della vite destrorsa
o dalla regola della mano destra





Regole per determinare il verso di C=AxB

Regola della vite : direzione perpendicolare al piano e verso pari allo spostamento della vite se ruotata da **a** a **b**



Regola della mano destra

1. Supponete che la vostra mano destra sia il piano in cui sono disegnati i vettori;
2. Considerate le prime 3 dita della mano destra: pollice, indice e medio;
3. Orientate l'indice secondo la direzione di **a** e il medio secondo la direzione di **b**;
4. Orientare il pollice in modo che sia perpendicolare al piano formato dalle altre 2 dita;
5. La direzione e il verso del vettore prodotto sono quelli del pollice.

Proprietà del prodotto vettoriale:

proprietà anticommutativa

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\,\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$$

proprietà distributiva

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\,\mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\,\mathbf{k} \times \mathbf{j}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\,\mathbf{i} \times \mathbf{k}$$

In termini di componenti cartesiane

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{j}\times\mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i}$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k})\times$$

$$(B_X\,\mathbf{i} + B_Y\,\mathbf{j} + B_Z\,\mathbf{k}) =$$

$$= A_X B_Y\,\mathbf{k} - A_X B_Z\,\mathbf{j} +$$

$$- A_Y B_X\,\mathbf{k} + A_Y B_Z\,\mathbf{i} +$$

$$+ A_Z B_X\,\mathbf{j} - A_Z B_Y\,\mathbf{i} =$$

$$= (A_Y B_Z - A_Z B_Y)\,\mathbf{i} + (A_Z B_X - A_X B_Z)\,\mathbf{j} +$$

$$+ (A_X B_Y - A_Y B_X)\,\mathbf{k}$$

Regola mnemonica

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$= A_Y B_Z \mathbf{i} + A_Z B_X \mathbf{j} + A_X B_Y \mathbf{k}$$

$$- A_Y B_X \mathbf{k} - A_X B_Z \mathbf{j} - A_Z B_Y \mathbf{i}$$

Prodotto Triplo Misto Di Tre Vettori

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = (A_Y B_Z - A_Z B_Y)\, C_X +$$

$$+ \; (A_Z B_X - A_X B_Z)\, C_Y +$$

$$+ \; (A_X B_Y - A_Y B_X)\, C_Z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C})}$$

Derivata di un vettore

A vettore

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{vettore}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{dt} = m\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\frac{dm}{dt}$$

Se m = costante => $\frac{dm}{dt} = 0$

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{dt} = m\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\bullet\mathbf{B} + \mathbf{A}\bullet\frac{d\mathbf{B}}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}}$$

In termini di componenti cartesiane

$$\boxed{\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}}$$

Se $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ costanti

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_X}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_Y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_Z}{dt}\mathbf{k}}$$

In generale

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_X}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_Y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_Z}{dt}\mathbf{k} + \\ &\quad + A_X\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_Y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_Z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\end{aligned}}$$