# Alberi binari: specifiche sintattiche e semantiche. Realizzazioni. Visita di alberi binari.

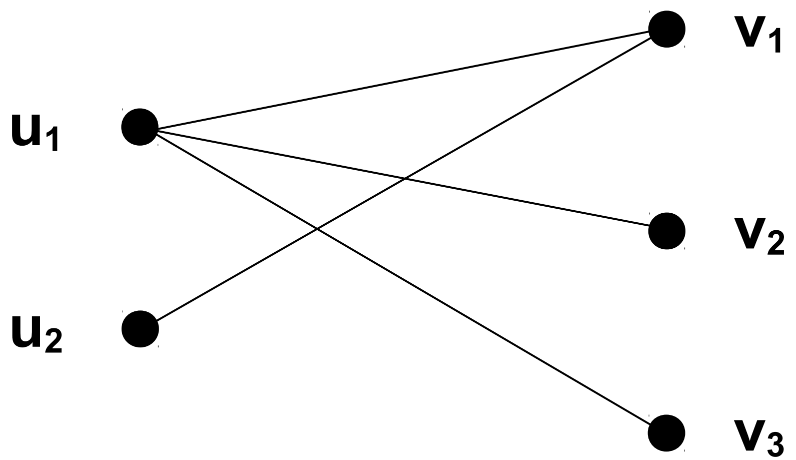
**Algoritmi e Strutture Dati + Lab**
A.A. 14/15

Informatica
Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"

Nicola Di Mauro

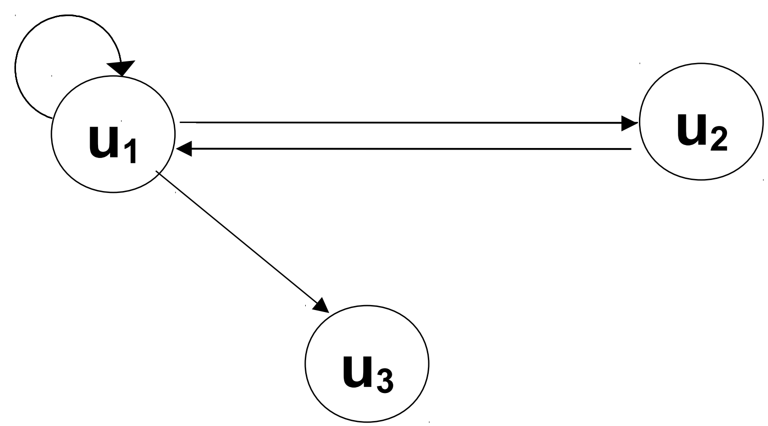
## GENERALITA'

**RICORDANDO CHE UNA RELAZIONE TRA DUE INSIEMI U E V E' UN SOTTOINSIEME A DI UxV, SI PUO' DARE UNA DESCRIZIONE DI A IN FORMA DIAGRAMMATICA SCRIVENDO TUTTI GLI ELEMENTI DI U, TUTTI GLI ELEMENTI DI V E CONGIUNGENDOLI. QUESTA RAPPRESENTAZIONE E' DETTA GRAFO (BIPARTITO).**

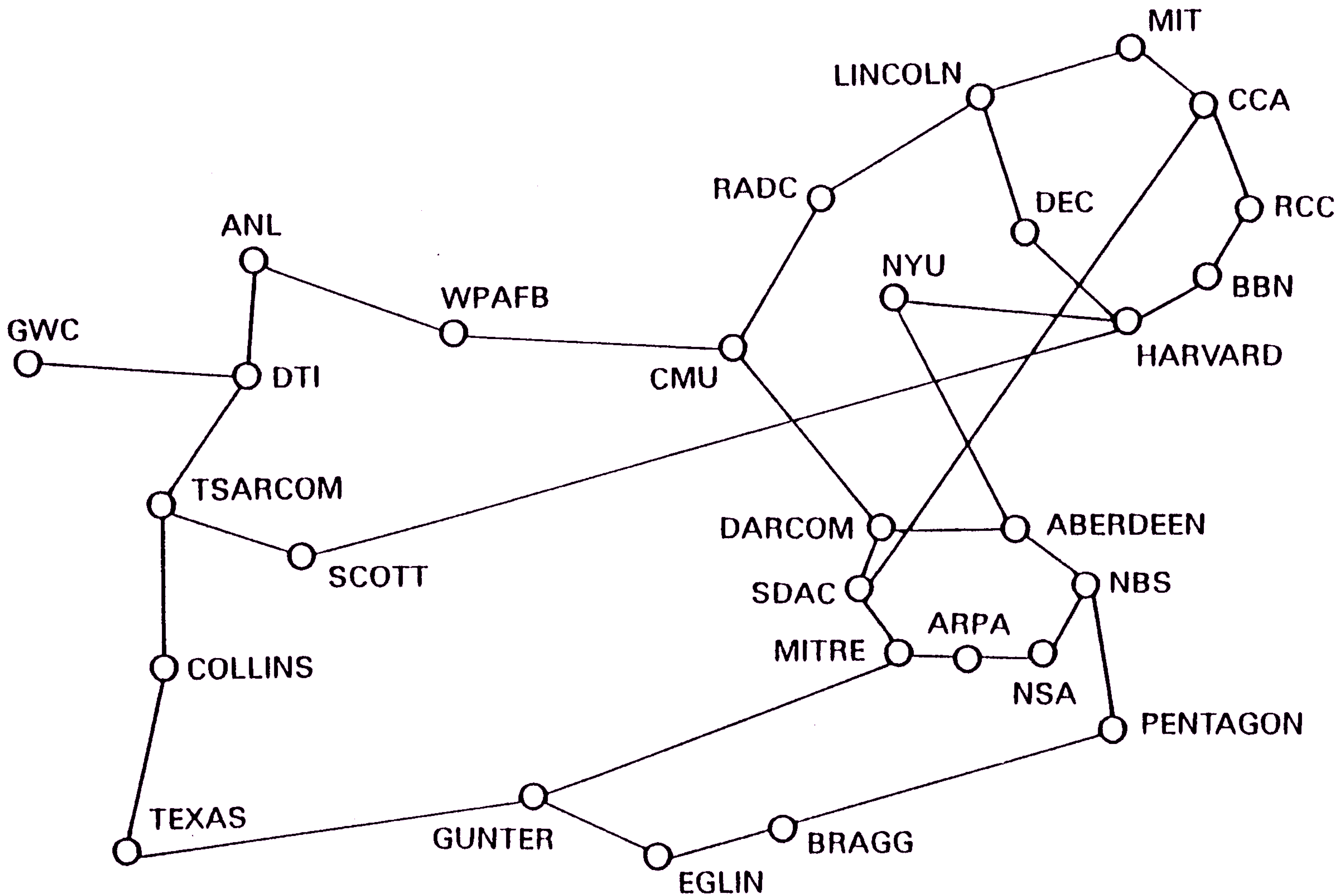


SE $U \equiv V \Rightarrow A \subseteq U x U$. IN TAL CASO GLI ELEMENTI DI U VENGONO SCRITTI UNA SOLA VOLTA E VIENE SEGNATA UNA FRECCIA SULLA CONGIUNZIONE DA $u_i$ A $u_j$ PER QUELLE COPPIE $< u_i, u_j > \in A$. SI PARLA IN QUESTO CASO DI GRAFO ORIENTATO.

GLI ELEMENTI $u \in U$ SONO DETTI NODI O VERTICI DEL GRAFO ORIENTATO. LA LINEA DI CONGIUNZIONE E' DETTA ARCO.




NEL CASO LE COPPIE $< u_i, u_j >$ SIANO CONGIUNTE TANTO ATTRAVERSO L'ARCO (i,j) QUANTO ATTRAVERSO L'ARCO (j,i) SI POTRA' UTILIZZARE UNA UNICA CONNESSIONE SENZA FRECCIA: L'ARCO INCIDE SUI DUE NODI E SI PARLA DI GRAFO NON ORIENTATO. GRAFI NON ORIENTATI SONO USATI PER RAPPRESENTARE RELAZIONI SIMMETRICHE TRA OGGETTI.

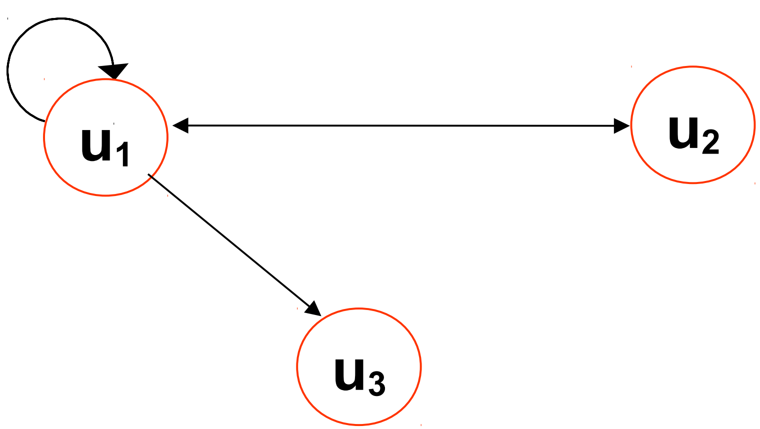



*Parte della mappa di ARPANET.*

# GRAFI ORIENTATI: DEFINIZIONI

**UN GRAFO ORIENTATO G E' UNA COPPIA <N,A> DOVE N E' UN INSIEME FINITO NON VUOTO (INSIEME DI NODI) E A $\subseteq$ NxN E' UN INSIEME FINITO DI COPPIE ORDINATE DI NODI, DETTI ARCHI (O SPIGOLI O LINEE). SE $< u_i, u_j > \in$ A NEL GRAFO VI E' UN ARCO DA $u_i$ AD $u_j$.**

**NELL'ESEMPIO N = $\{u_1,u_2,u_3\}$, A = $\{(u_1,u_1),(u_1,u_2),(u_2,u_1),(u_1,u_3)\}$.**



# GRAFI ORIENTATI: DEFINIZIONI

IN UN GRAFO ORIENTATO G UN **CAMMINO** E' UNA SEQUENZA DI NODI $u_0$, $u_1$, … , $u_k$ TALI CHE

$(u_i, u_{i+1}) \in A$, PER $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

IL CAMMINO PARTE DAL NODO $u_0$, ATTRAVERSA I NODI $u_1, \ldots, u_{k-1}$, ARRIVA AL NODO $u_k$, ED HA LUNGHEZZA UGUALE A k.

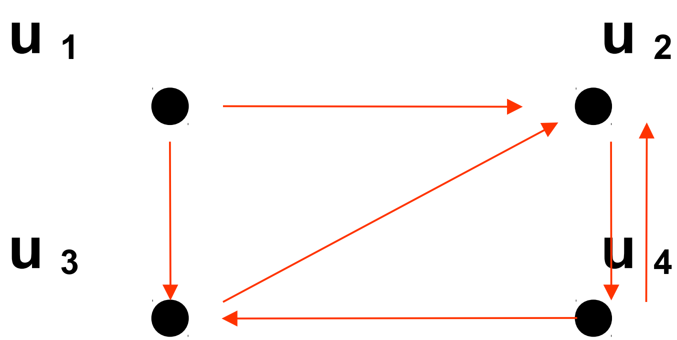
SE NON CI SONO NODI RIPETUTI IL CAMMINO E' **SEMPLICE** ($u_i \neq u_j$ PER $0 \leq i < j \leq k$ ).

SE $u_0 = u_k$ IL CAMMINO E' **CHIUSO**.

UN CAMMINO SIA SEMPLICE CHE CHIUSO E' UN **CICLO**.

UN **GRAFO** E' DETTO **COMPLETO** SE PER OGNI COPPIA DI NODI $u_i, u_j \in N$ ESISTE UN ARCO CHE VA DA $u_i$ AD $u_j$, ($A = N \times N$).

DEFINIREMO **GRAFO CONNESSO** UN GRAFO G = <N,A> IN CUI, DATI u E v $\in$ N ESISTE UN CAMMINO DA u A v O UN CAMMINO DA v AD u. G E' DETTO **FORTEMENTE CONNESSO** SE PER OGNI COPPIA DI NODI u E v ESISTE ALMENO UN CAMMINO DA u A v ED ALMENO UN CAMMINO DA v AD u.

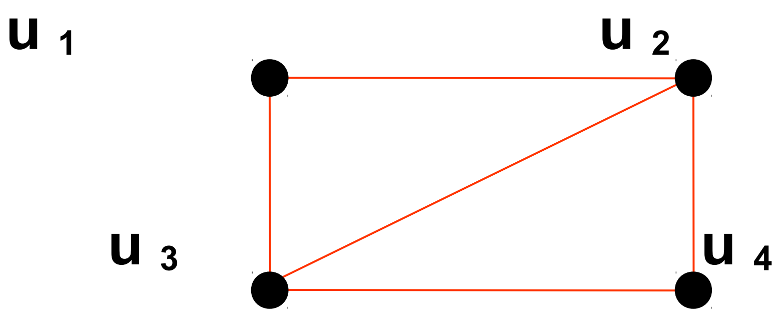



GRAFO ORIENTATO MA NON FORTEMENTE CONNESSO (NON ESISTE UN CAMMINO DA $u_4$ A $u_1$)

A CIASCUN NODO DEL GRAFO E' POSSIBILE ASSOCIARE UN'INFORMAZIONE DETTA **ETICHETTA (LABEL)** DEL NODO.

# GRAFI NON ORIENTATI: DEFINIZIONI

DEFINIREMO **GRAFO NON ORIENTATO** UN GRAFO G = <N,A> NEL QUALE GLI ARCHI SONO FORMATI DA COPPIE NON ORDINATE. MENTRE IN UN GRAFO ORIENTATO $(u_i,u_j)$ e $(u_j,u_i)$ INDICANO DUE ARCHI DISTINTI, IN UN GRAFO NON ORIENTATO INDICANO LO STESSO ARCO CHE INCIDE SUI DUE NODI.




I NODI CONGIUNTI DA UN ARCO SONO **ADIACENTI**. NELL'ESEMPIO I NODI $u_1$ E $u_3$ SONO ADIACENTI MA $u_1$ E $u_4$ NON LO SONO. ANCHE NEI GRAFI NON ORIENTATI TROVIAMO NOZIONI ANALOGHE A QUELLE DI CAMMINO (**CATENA**) E DI CICLO (**CIRCUITO**).

**IL GRAFO E' UNA STRUTTURA DATI DI GRANDE GENERALITA' ALLA QUALE SI POSSONO RICONDURRE STRUTTURE PIU' SEMPLICI: LE LISTE POSSONO ESSERE CONSIDERATE UN CASO PARTICOLARE DI GRAFO, COME PURE GLI ALBERI UTILI PER RAPPRESENTARE GERARCHIE.**

***AD ESEMPIO, L'ORGANIZZAZIONE DI UN INDICE:***

***0. TIPI DI DATO E STRUTTURE DATI***

***0.1 STRUTTURE DI DATI: SPECIFICHE REALIZZAZIONI***

***0.2 RAPPRESENTAZIONE IN MEMORIA***

***1. LISTE***

***1.1 REALIZZAZIONE CON PUNTATORI***

***1.2 REALIZZAZIONE CON CURSORI***

***1.3 REALIZZAZIONE CON DOPPI PUNTATORI***

***IN QUESTA ORGANIZZAZIONE OGNI ARGOMENTO PRINCIPALE HA DIVERSI ARGOMENTI SECONDARI, OGNUNO DEI QUALI PUO' DIVIDERSI IN SOTTOARGOMENTI E COSI' VIA.***

## IN GENERALE

## L'ALBERO E' UNA **STRUTTURA INFORMATIVA FONDAMENTALE** UTILE PER RAPPRESENTARE:

- PARTIZIONI SUCCESSIVE DI UN INSIEME IN SOTTOINSIEMI DISGIUNTI
- ORGANIZZAZIONI GERARCHICHE DI DATI
- PROCEDIMENTI DECISIONALI ENUMERATIVI

# ALBERI

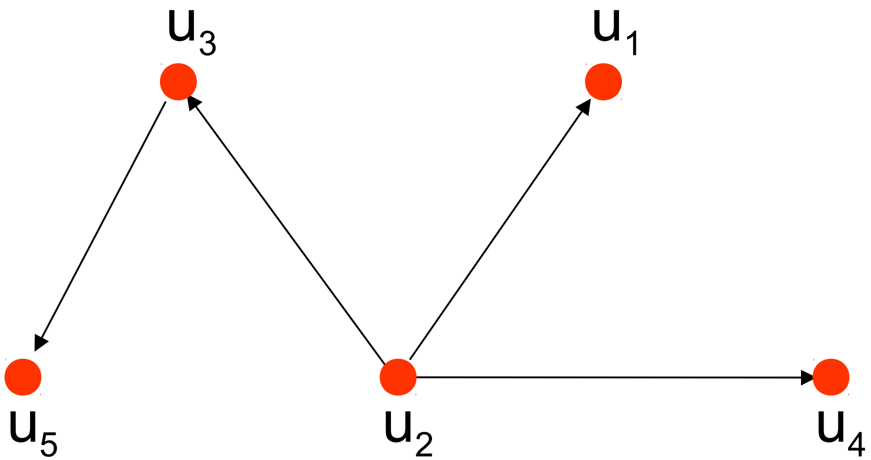
**UN PARTICOLARE TIPO DI GRAFO E' L'ALBERO, DEFINITO MATEMATICAMENTE CON UNA COPPIA**

$$T = (N,A)$$

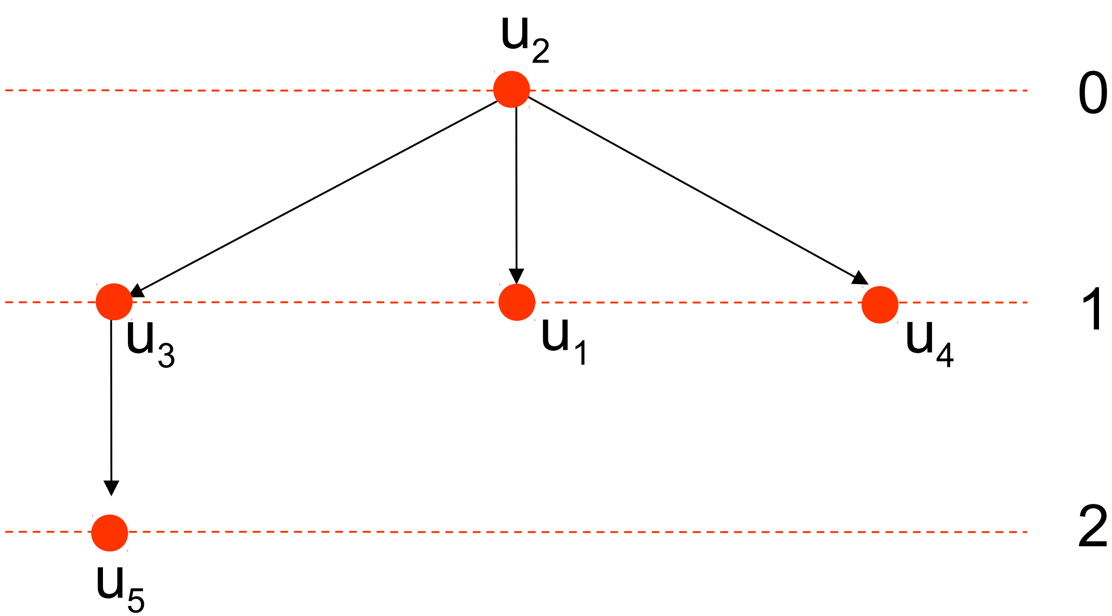
**DOVE N E' UN INSIEME FINITO DI NODI ED A E' UN INSIEME DI COPPIE NON ORDINATE ( ALBERO LIBERO ) TALI CHE :**

- **IL NUMERO DI ARCHI E' UGUALE AL NUMERO DI NODI MENO UNO $|A| = |N| - 1$**
- **T E' CONNESSO, OVVERO PER OGNI COPPIA DI NODI u E v IN N, ESISTE UNA SEQUENZA DI NODI DISTINTI $u_0, u_1, \ldots, u_k$ TALI CHE $u = u_0$, $v = u_k$ E LA COPPIA $< u_i, u_{i+1} >$ E' UN ARCO DI A, PER $i = 0, 1, \ldots, k-1$.**

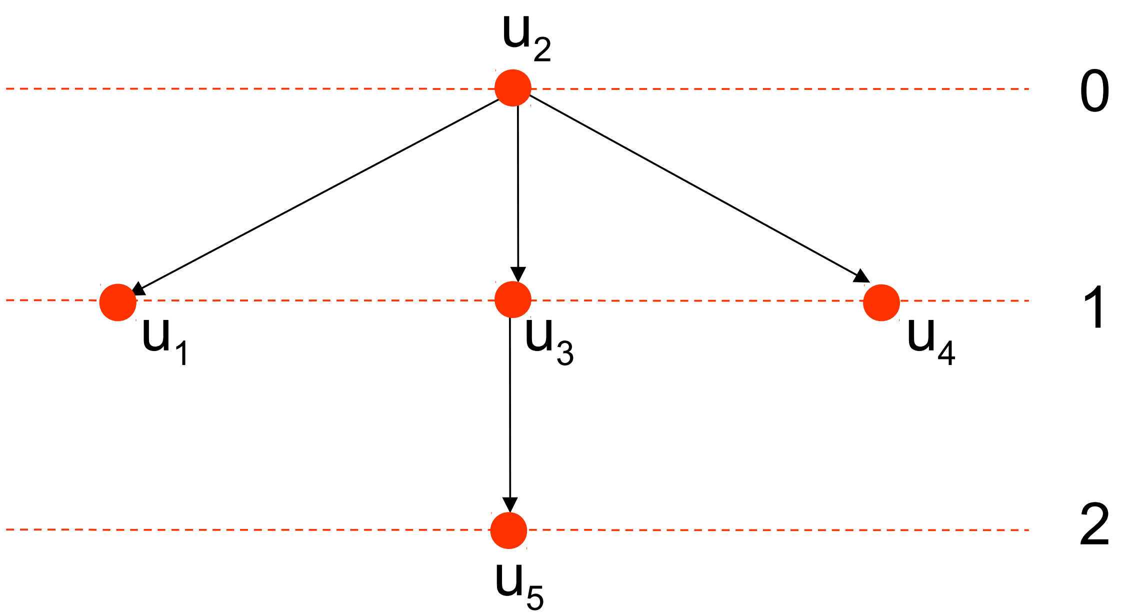
**UN ALBERO RADICATO E' OTTENUTO DA UN ALBERO LIBERO DESIGNANDO ARBIRARIAMENTE UN NODO r COME RADICE E ORDINANDO I NODI PER LIVELLI.**




**ALBERO NON RADICATO**




**ALBERO RADICATO**




**ALBERO RADICATO ORDINATO**

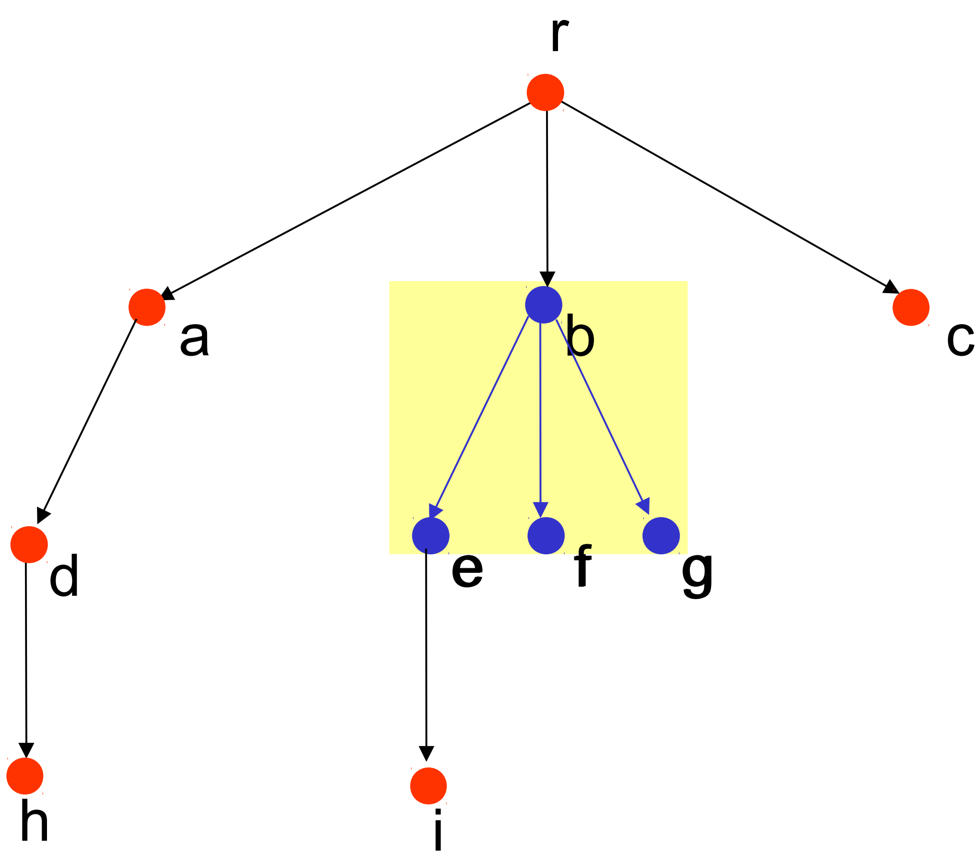
**LA RADICE r E' A LIVELLO 0 E TUTTI I NODI u, э' < u, r > ∈ A, SONO FIGLI DI r E STANNO A LIVELLO 1 ( r E' PADRE ). NODI CON LO STESSO PADRE SONO FRATELLI. NODI TERMINALI SENZA FIGLI SONO DETTI FOGLIE.**

**UN ALBERO ORDINATO E' OTTENUTO DA UNO RADICATO STABILENDO UN ORDINAMENTO TRA NODI ALLO STESSO LIVELLO.**

**SE T E' UN ALBERO ED n E m SONO NODI DI T SI DICE CHE:**

- **m E' DISCENDENTE DI n SE n E' ANTENATO DI m CIOE' SE n=m ( ANTENATO PROPRIO ) OPPURE SE n E' GENITORE DI UN ANTENATO DI m**
- **UN NODO E' NODO INTERNO SE NON E' FOGLIA**
- **UNA LINEA DI T CONNETTE DUE NODI, UNO DEI QUALI E' GENITORE DELL'ALTRO**
- **UN CAMMINO IN T E' LA SEQUENZA DI LINEE CHE UNISCE DUE NODI, UNO DEI QUALI E' ANTENATO DELL'ALTRO: LA LUNGHEZZA DI UN CAMMINO E' COSTITUITA DAL NUMERO DI LINEE CHE LO COMPONGONO**
- **LA ALTEZZA DI UN NODO E' LA LUNGHEZZA DEL CAMMINO PIU' LUNGO DA QUEL NODO AD UNA FOGLIA**
- **LA PROFONDITA' DI UN NODO E' LA LUNGHEZZA DEL CAMMINO DALLA RADICE A QUEL NODO**

**DEFINIAMO ALBERO DI ORDINE K UN ALBERO IN CUI OGNI NODO HA AL MASSIMO K FIGLI**




**ALBERO TERNARIO**

IN UN ALBERO VALGONO LE SEQUENTI **PROPRIETA'**:

- UN ALBERO E' UN **GRAFO ACICLICO**, IN CUI PER OGNI NODO C'E' UN SOLO ARCO ENTRANTE (TRANNE CHE PER LA RADICE CHE NON NE HA NESSUNO)
- UN ALBERO E' UN **GRAFO DEBOLMENTE CONNESSO**
- SE ESISTE UN CAMMINO CHE VA DA UN NODO u AD UN ALTRO NODO v, TALE CAMMINO E' UNICO
- IN UN ALBERO ESISTE UN SOLO CAMMINO CHE VA DALLA RADICE A QUALUNQUE ALTRO NODO
- TUTTI I NODI DI UN ALBERO T (TRANNE r) POSSONO ESSERE RIPARTITI IN INSIEMI DISGIUNTI CIASCUNO DEI QUALI INDIVIDUA UN ALBERO (DATO UN NODO u, I SUOI DISCENDENTI COSTITUISCONO UN ALBERO DETTO **SOTTOALBERO DI RADICE u**)

# LA NATURA RICORSIVA DEGLI ALBERI

**UN ALBERO PUO' ESSERE DEFINITO RICORSIVAMENTE**

- **UN ALBERO E' UN INSIEME NON VUOTO DI NODI AI QUALI SONO ASSOCIATE DELLE INFORMAZIONI**
- **TRA I NODI ESISTE UN NODO PARTICOLARE CHE E' LA RADICE (LIVELLO 0)**
- **GLI ALTRI NODI SONO PARTIZIONATI IN SOTTOINSIEMI CHE SONO A LORO VOLTA ALBERI (LIVELLI SUCCESSIVI)**

**VALE A DIRE UN ALBERO E'**

***VUOTO O COSTITUITO DA UN SOLO NODO (DETTO RADICE)***

***OPPURE E' UNA RADICE CUI SONO CONNESSI ALTRI ALBERI***

# ALBERI BINARI

SONO PARTICOLARI ALBERI ORDINATI IN CUI OGNI NODO HA AL PIU' DUE FIGLI E SI FA SEMPRE DISTINZIONE TRA IL FIGLIO SINISTRO, CHE VIENE PRIMA NELL'ORDINAMENTO E IL FIGLIO DESTRO. NELL'ESEMPIO GLI ALBERI SONO ETICHETTATI CON INTERI E CON CARATTERI


## DEFINIZIONE:

UN ALBERO BINARIO E' UN GRAFO ORIENTATO CHE O E' VUOTO O E' COSTITUITO DA UN SOLO NODO O E' FORMATO DA UN NODO N (DETTO RADICE) E DA DUE SOTTOALBERI BINARI, CHE VENGONO CHIAMATI RISPETTIVAMENTE **SOTTOALBERO SINISTRO** E **SOTTOALBERO DESTRO**

# LA SPECIFICA SINTATTICA

*TIPI: ALBEROBIN, BOOLEANO, NODO*

**CREABINALBERO : ( ) → ALBEROBIN**

**BINALBEROVUOTO : (ALBEROBIN) → BOOLEANO**

**BINRADICE : (ALBEROBIN) → NODO**

**BINPADRE : (NODO,ALBEROBIN) → NODO**

**FIGLIOSINISTRO : (NODO,ALBEROBIN) → NODO**

**FIGLIODESTRO : (NODO,ALBEROBIN) → NODO**

**SINISTROVUOTO : (NODO,ALBEROBIN) → BOOLEANO**

**DESTROVUOTO : (NODO,ALBEROBIN) → BOOLEANO**

**COSTRBINALBERO : (ALBEROBIN,ALBEROBIN) → ALBEROBIN**

**CANCSOTTOBINALBERO : (NODO,ALBEROBIN) → ALBEROBIN**

# LA SPECIFICA SEMANTICA

*TIPI: ALBEROBIN: insieme degli alberi binari T=(N,A), nei quali ad ogni nodo è associato un LIVELLO, BOOLEANO, NODO*

**CREABINALBERO = T'**

**POST: T' = (∅,∅) = Λ**

**------------------------------------------------------------------------------------------**

**BINALBEROVUOTO(T) = b**

**POST: b=VERO SE T = Λ; b=FALSO ALTRIMENTI**

**------------------------------------------------------------------------------------------**

**BINRADICE(T) = u**

**PRE: T ≠ Λ**

**POST: u → RADICE DI T → LIVELLO(u) = 0**

**------------------------------------------------------------------------------------------**

**BINPADRE(u,T) = v**

**PRE: T ≠ Λ, u ∈ N, LIVELLO(u) > 0**

**POST: v E' PADRE DI u → (v,u) ∈ A → LIVELLO(u)=LIVELLO(v)+1**

**FIGLIOSINISTRO(u,T)** = v

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$, u HA UN FIGLIO SINISTRO

POST: v E' IL FIGLIO SINISTRO DI u IN T

---

**FIGLIODESTRO(u,T)** = v

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$, u HA UN FIGLIO DESTRO

POST: v E' IL FIGLIO DESTRO DI u IN T

---

**SINISTROVUOTO(u,T)** = b

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$

POST: b=VERO SE u NON HA UN FIGLIO SINISTRO

b=FALSO ALTRIMENTI

**DESTROVUOTO(u,T)** = b

PRE: T $\neq \Lambda$, u $\in$ N

POST: b=VERO SE u NON HA UN FIGLIO DESTRO

b=FALSO ALTRIMENTI

---

**COSTRBINALBERO(T,T')** = T''

POST: T'' SI OTTIENE DA T E DA T' INTRODUCENDO AUTOMATICAMENTE UN NUOVO NODO r'' (RADICE DI T'') CHE AVRA' COME SOTTOALBERO SINISTRO T E SOTTOALBERO DESTRO T' (*SE T = $\Lambda$ E T' = $\Lambda$, L'OPERATORE INSERISCE LA SOLA RADICE r''; SE T = $\Lambda$, r'' NON HA FIGLIO SINISTRO; SE T' = $\Lambda$, r'' NON HA FIGLIO DESTRO*)

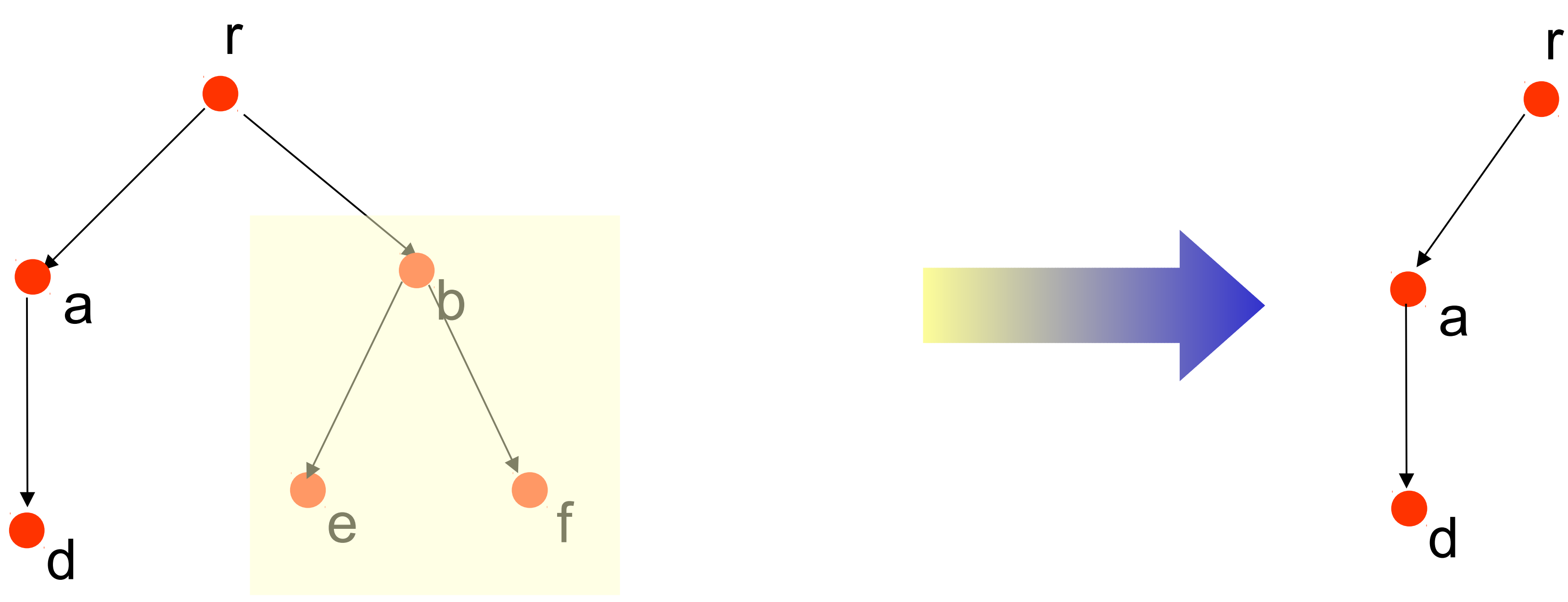
**CANCSOTTOBINALBERO(u,T) = T'**

**PRE: T $\neq \Lambda$, u $\in$ N**

**POST: T' E' OTTENUTO DA T ELIMINANDO IL SOTTOALBERO DI RADICE u, CON TUTTI I SUOI DISCENDENTI**

**VALIDA PER ALBERI DI OGNI ORDINE AGISCE POTANDO DAL NODO u. AD ESEMPIO:**

**CANCSOTTOBINALBERO(b,T)**



# ANCORA DUE OPERATORI UTILI!!!

## SPECIFICHE SINTATTICHE

***Tipi: Va aggiunto TIPOELEM del tipo dell'etichetta***

**LEGGINODO: (NODO,ALBEROBIN) → TIPOELEM**

**SCRIVINODO: (TIPOELEM,NODO,ALBEROBIN) → ALBEROBIN**

## SPECIFICHE SEMANTICHE

**LEGGINODO (n,T) = a**

**PRE: n E' UN NODO DI T, n $\in$ N**

**POST: a E' IL VALORE ASSOCIATO AL NODO n IN T**

**SCRIVINODO (a,n,T) = T'**

**PRE: n E' UN NODO DI T, n $\in$ N**

**POST: T' E' IL NUOVO ALBERO CORRISPONDENTE AL VECCHIO T CON IL VALORE a ASSEGNATO AL NODO n**

**L'ALGEBRA CHE ABBIAMO PRESENTATO OVVIAMENTE RAPPRESENTA UNA SCELTA PRECISA DI PROGETTO**

***SI E' SCELTO DI ENFATIZZARE LA NATURA RICORSIVA DEGLI ALBERI E DI COSTRUIRE L'ALBERO BINARIO DAL BASSO VERSO L'ALTO, CIOE' DAL LIVELLO DELLE FOGLIE VERSO LA RADICE.***

**NON SEMPRE QUESTA SCELTA E' OPPORTUNA: SOPRATTUTTO SE L'ALBERO E' USATO PER RAPPRESENTARE UN PROCESSO DECISIONALE E' PREFERIBILE UN'ALGEBRA CHE PREVEDA DI COSTRUIRE L'ALBERO DALL'ALTO VERSO IL BASSO, INSERENDO PRIMA LA RADICE E POI I NODI FIGLI VIA VIA.**

**IN TAL CASO, MENTRE RIMANGONO VALIDI GLI OPERATORI CREABINALBERO, BINALBEROVUOTO, BINRADICE,BINPADRE, FIGLIOSINISTRO, FIGLIODESTRO, SINISTROVUOTO, DESTROVUOTO, CANCSOTTOBINALBERO ANDREBBE SOSTITUITO L'OPERATORE DI COSTRUZIONE CON TRE OPERATORI NUOVI, UNO DEDICATO ALL'INSERIMENTO DELLA RADICE E GLI ALTRI DUE DEDICATI ALL'INSERIMENTO DEL FIGLIO SINISTRO E DEL FIGLIO DESTRO.**

## LA SPECIFICA SINTATTICA

INSBINRADICE: (*nodo, alberobin*) $\rightarrow$ *alberobin*
INSFIGLIOSINISTRO: *(nodo, alberobin)* $\rightarrow$ *alberobin*
INSFIGLIODESTRO: *(nodo, alberobin)* $\rightarrow$ *alberobin*

## LA SPECIFICA SEMANTICA

**INSBINRADICE(u, T)** =T'
PRE: T=$\Lambda$
POST: T'=(N,A), N={u}, LIVELLO(u)=0, A=Ø

**INSFIGLIOSINISTRO(u, T)** = T'
PRE: T$\neq\Lambda$, u $\in$ N, SINISTROVUOTO(u,T)= True
POST: N'= N$\cup${v}, T' E' OTTENUTO DA T AGGIUNGENDO v COME FIGLIO SINISTRO DI u

**INSFIGLIODESTRO(u, T)** = T'
PRE: T$\neq\Lambda$, u $\in$ N, DESTROVUOTO(u,T)= True
POST: N'= N$\cup${v} , T' E' OTTENUTO DA T AGGIUNGENDO v COME FIGLIO DESTRO DI u

OLTRE ALLE OPERAZIONI CITATE, PER GLI ALBERI IN GENERE E PER GLI ALBERI BINARI IN PARTICOLARE, SI DEFINISCONO I COSIDDETTI

## ALGORITMI DI VISITA

CIOE' ALGORITMI CHE CONSENTONO DI ANALIZZARE TUTTI I NODI DELL'ALBERO IN UN ORDINE DEFINITO.

RISULTANO PARTICOLARMENTE IMPORTANTI IN PROBLEMI PER I QUALI, AD ESEMPIO, SI DEBBA RICERCARE IN QUALE NODO O A QUALE LIVELLO E' CONTENUTO IN ETICHETTA UN VALORE DATO IN INPUT OPPURE QUANDO SI VOGLIA ESPLORARE L'ALBERO PER VERIFICARNE LA PROFONDITA'.

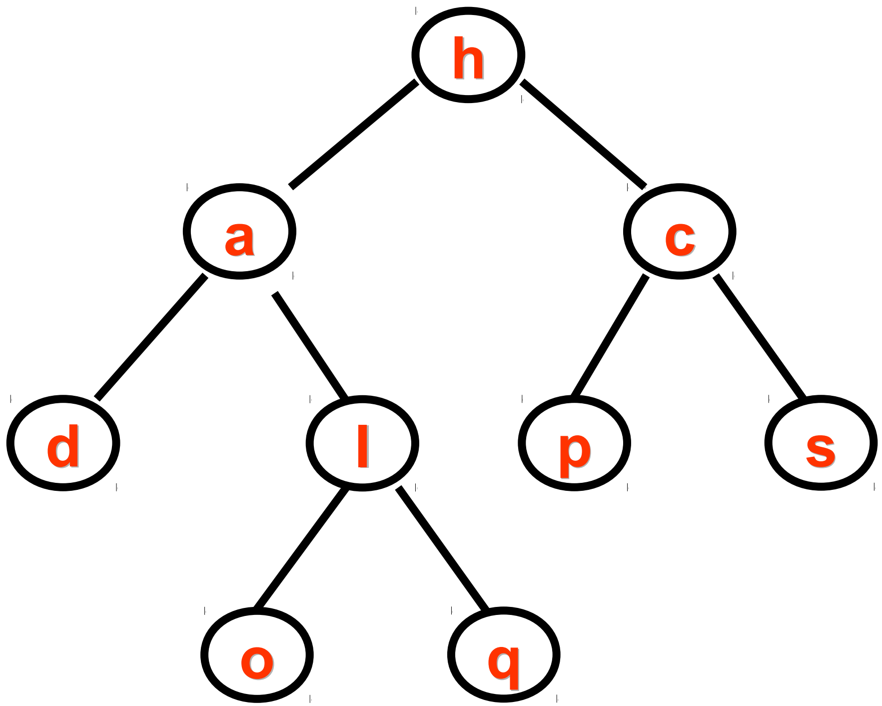
**LA VISITA DI UN ALBERO CONSISTE NEL SEGUIRE UNA ROTTA DI VIAGGIO CHE CONSENTA DI ESAMINARE OGNI NODO DELL'ALBERO ESATTAMENTE UNA VOLTA.**

**I PIU' COMUNI ALGORITMI DI VISITA SONO TRE:**

- **VISITA IN PRE-ORDINE**: SI APPLICA AD UN ALBERO NON VUOTO E RICHIEDE DAPPRIMA L'ANALISI DELLA RADICE DELL'ALBERO E, POI, LA VISITA, EFFETTUATA CON LO STESSO METODO, DEI DUE SOTTOALBERI, PRIMA IL SINISTRO, POI IL DESTRO
- **VISITA IN POST-ORDINE**: SI APPLICA AD UN ALBERO NON VUOTO E RICHIEDE DAPPRIMA LA VISITA, EFFETTUATA CON LO STESSO METODO, DEI SOTTOALBERI, PRIMA IL SINISTRO E POI IL DESTRO, E, IN SEGUITO, L'ANALISI DELLA RADICE DELL'ALBERO
- **VISITA SIMMETRICA**: RICHIEDE PRIMA LA VISITA DEL SOTTOALBERO SINISTRO (EFFETTUATA SEMPRE CON LO STESSO METODO), POI L'ANALISI DELLA RADICE, E POI LA VISITA DEL SOTTOALBERO DESTRO

**ESEMPIO:**

**SIA UN ALBERO BINARIO CHE HA DEI CARATTERI NEI NODI**



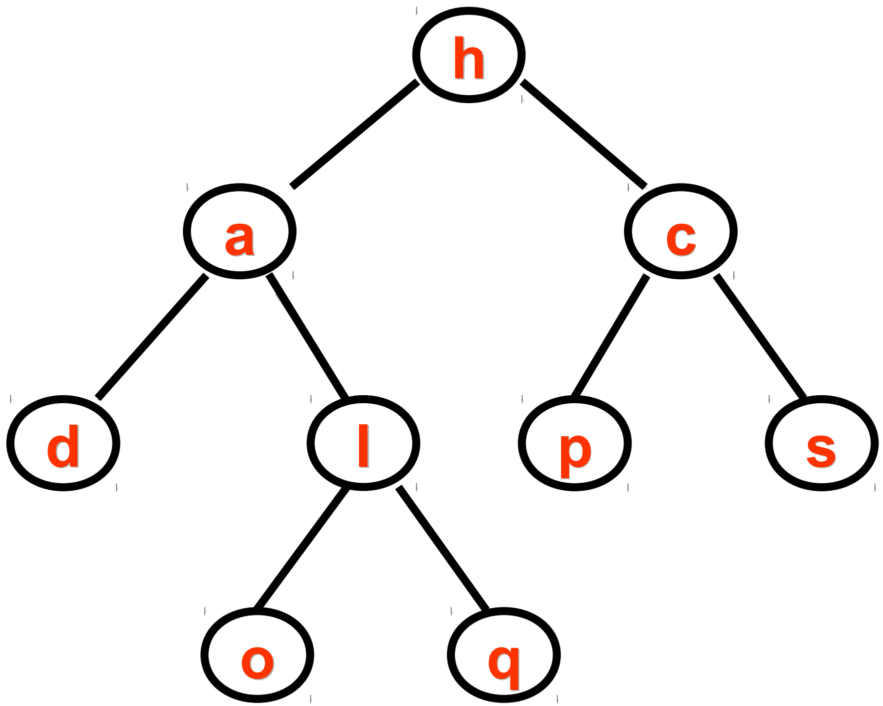

**LA VISITA IN PREORDINE: h a d l o q c p s**

**LA VISITA IN POSTORDINE: d o q l a p s c h**

**LA VISITA SIMMETRICA: d a o l q h p c s**

**ESEMPIO:**

**SIA UN ALBERO BINARIO CHE HA DEI CARATTERI NEI NODI**



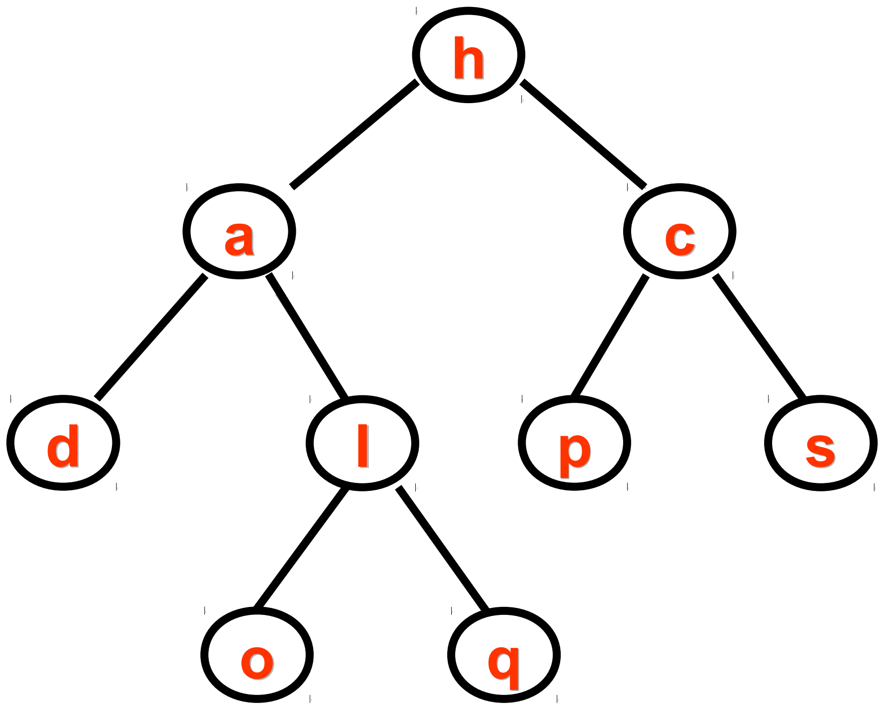

**LA VISITA IN PREORDINE:** h a d l o q c p s

**LA VISITA IN POSTORDINE:** d o q l a p s c h

**LA VISITA SIMMETRICA:** d a o l q h p c s

**ESEMPIO:**

**SIA UN ALBERO BINARIO CHE HA DEI CARATTERI NEI NODI**




**LA VISITA IN PREORDINE:** h a d l o q c p s

**LA VISITA IN POSTORDINE:** d o q l a p s c h

**LA VISITA SIMMETRICA:** d a o l q h p c s

# LA FORMULAZIONE DEGLI ALGORITMI DI VISITA

**GLI ALGORITMI SI POSSONO FACILMENTE FORMULARE IN MODO RICORSIVO. AD ESEMPIO:**

***VISITA IN PREORDINE L'ALBERO BINARIO T***

**SE L'ALBERO NON E' VUOTO**

**ALLORA**

**ANALIZZA LA RADICE DI T**

**VISITA IN PREORDINE IL SOTTOALBERO SINISTRO DI T**

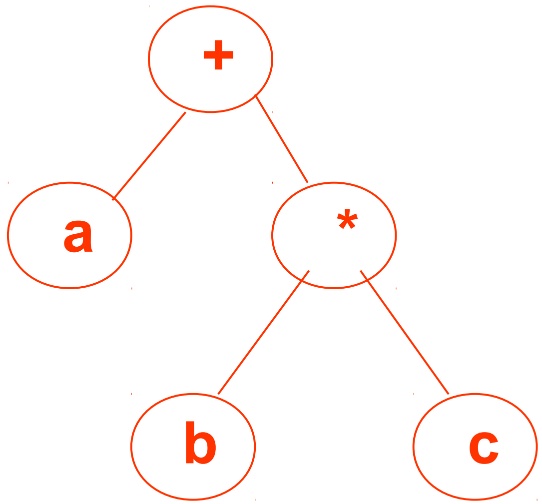
**VISITA IN PREORDINE IL SOTTOALBERO DESTRO DI T**

**FINE**

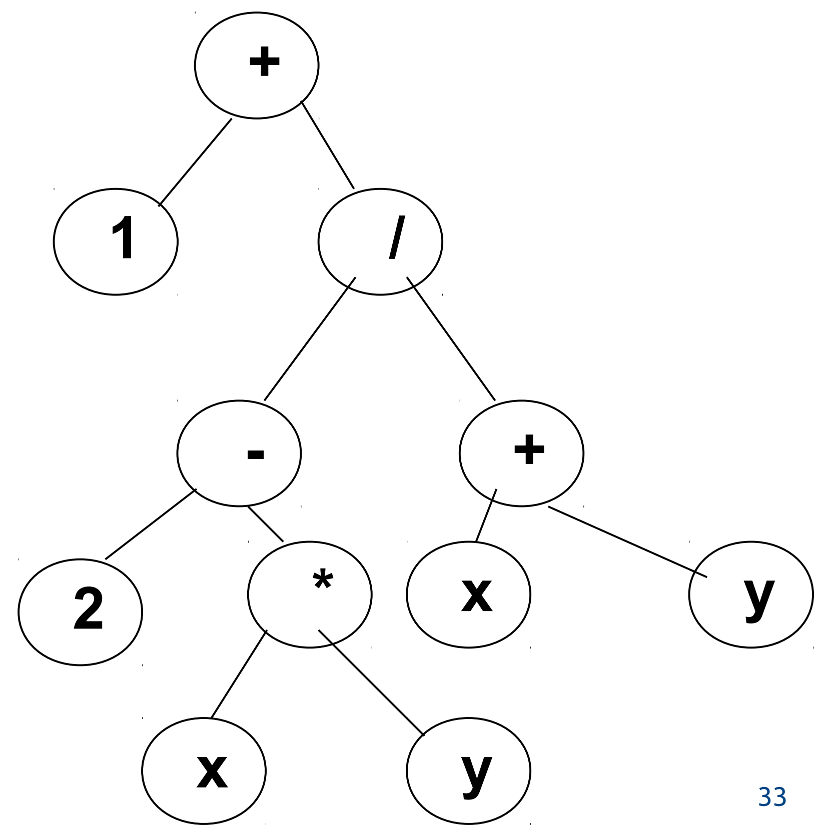
# *APPLICAZIONI: ALBERI DI ANALISI (PARSE TREE)*

**RAPPRESENTANO ESPRESSIONI DA VALUTARE COMINCIANDO DAL BASSO VERSO L'ALTO.**

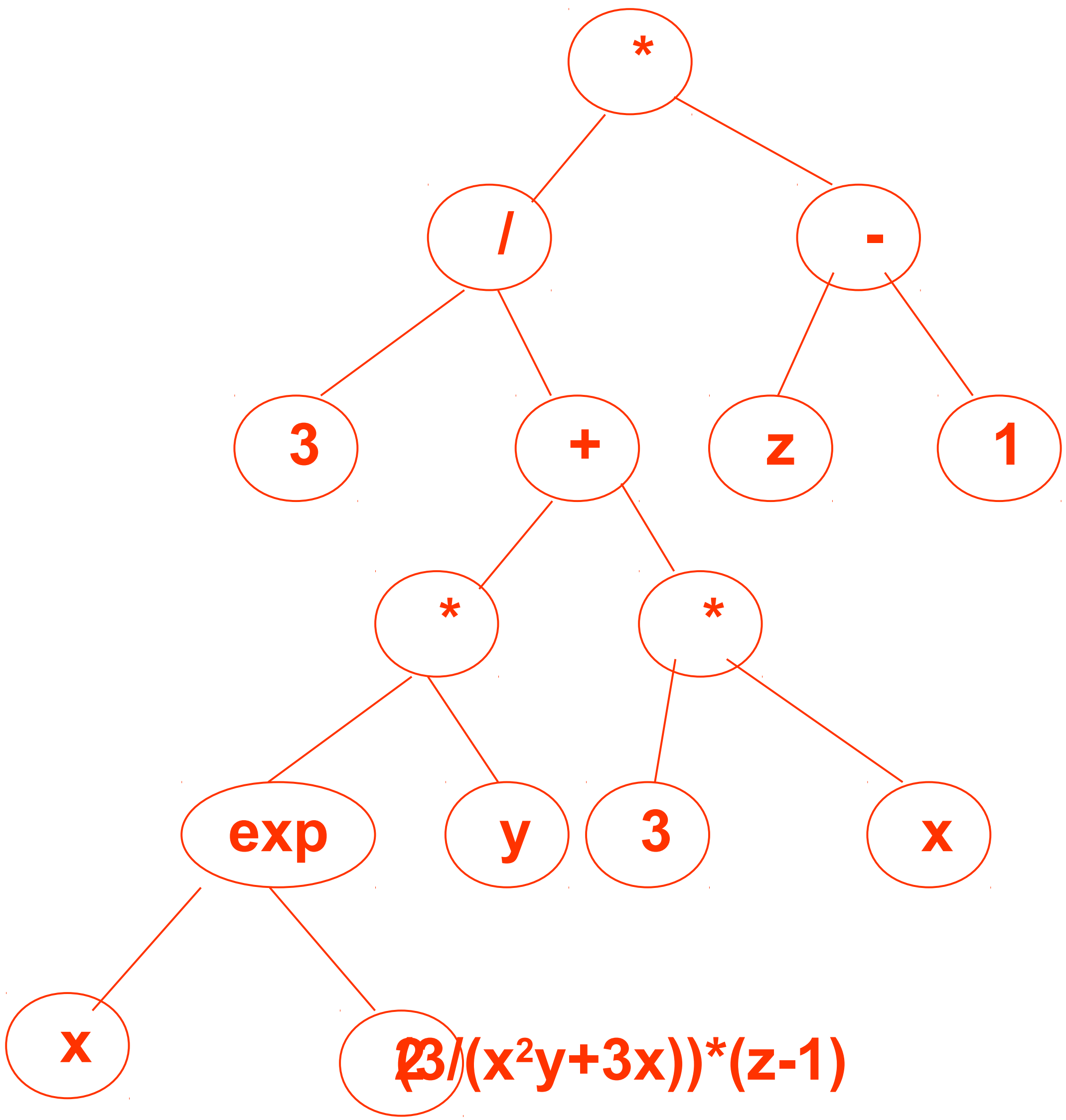
**a + b * c**




$$1 + \frac{2 - x * y}{x + y}$$



# UN ESEMPIO DI ALBERO BINARIO (DI PARSING)

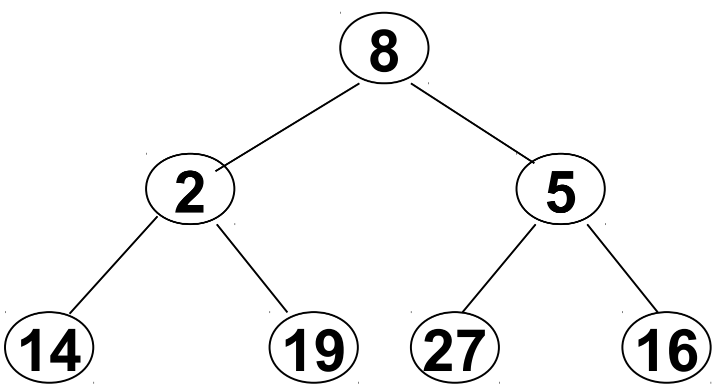



$(3/(x^2y+3x))*(z-1)$

```
( *
    ( /
        ( 3 )
        ( + ( * ( exp ( x ) ( 2 ) )
          ( y )
           )
           ( + ( 3 ) ( x ) )
       )
    ( - ( z ) ( 1 ) )
)
```

# LE RAPPRESENTAZIONI

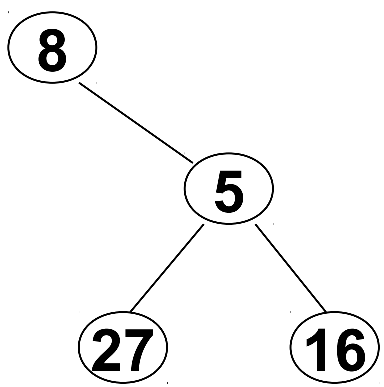
**UNA POSSIBILE RAPPRESENTAZIONE DI UN ALBERO BINARIO E' QUELLA SEQUENZIALE MEDIANTE VETTORE. LA RADICE E' IN PRIMA POSIZIONE; PER IL GENERICO NODO p MEMORIZZATO IN POSIZIONE i, SE ESISTE IL FIGLIO SINISTRO E' MEMORIZZATO IN POSIZIONE 2*i, SE ESISTE IL FIGLIO DESTRO E' MEMORIZZATO IN POSIZIONE 2*i+1**




| | |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |
| 4 | 14 |
| 5 | 19 |
| 6 | 27 |
| 7 | 16 |

# RAPPRESENTAZIO MEDIANTE VETTORE SEQUENZIALE

## SE L’ALBERO E’ INCOMPLETO




| | |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | - |
| 3 | 5 |
| 4 | - |
| 5 | - |
| 6 | 27 |
| 7 | 16 |

## REALIZZAZIONE SEQUENZIALE

# PROBLEMI

ALCUNE COMPONENTI DEL VETTORE NON CORRISPONDONO AD ALCUN NODO DELL'ALBERO.

QUESTO, IN CASO DI REALIZZAZIONE CON LINGUAGGI A TIPIZZAZIONE FORTE, POTREBBE GENERARE PROBLEMI, NON AVENDO UN MODO DI AVVALORARE, CON UN b O CON ALTRO, ELEMENTI DI TIPO PER I QUALI DOVREMMO ESPRIMERE UN "NON DEFINITO".

LA **SOLUZIONE** E' QUELLA DI UTILIZZARE UNA RAPPRESENTAZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI COMPONENTE DELL'ARRAY UN CAMPO DI TIPO BOOLEANO CHE VARRA' **VERO** SE NELLA COMPONENTE E' EFFETTIVAMENTE PRESENTE UN NODO DELL'ALBERO, **FALSO** ALTRIMENTI.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | VERO | 8 |
| 2 | FALSO | 24 |
| 3 | VERO | 5 |
| 4 | FALSO | 62 |
| 5 | FALSO | 3 |
| 6 | VERO | 27 |
| 7 | VERO | 16 |

**TUTTAVIA E' IMMEDIATO VERIFICARE CHE:**

- **ALBERI BINARI NON COMPLETI VENGONO RAPPRESENTATI CON SPRECO DI MEMORIA**
- **E' IMPOSTO UN LIMITE MASSIMO PER IL NUMERO DI NODI DELL'ALBERO**
- **LE OPERAZIONI DI AGGIUNTA ED ELIMINAZIONE DI NODI O DI SOTTOALBERI COMPORTANO DIVERSI SPOSTAMENTI NELL'ARRAY**

# LE RAPPRESENTAZIONI

**PRIMA DI INTRODURRE LA RAPPRESENTAZIONE COLLEGATA VA FATTA QUALCHE CONSIDERAZIONE TEORICA CIRCA LA CORRISPONDENZA TRA “ALBERO BINARIO” E “LISTA”**

OGNI VALORE T DEL TIPO ALBERO PUO’ ESSERE RAPPRESENTATO MEDIANTE UN TIPO LISTA NEL MODO SEGUENTE:

- SE T E’ VUOTO, LA LISTA CHE LO RAPPRESENTA E’ LA LISTA VUOTA
- SE T NON E’ VUOTO, LA LISTA CHE LO RAPPRESENTA E’ FORMATA DA TRE ELEMENTI:
  - IL PRIMO E’ L’ATOMO CHE RAPPRESENTA LA RADICE DI T
  - IL SECONDO E’ UNA LISTA CHE RAPPRESENTA, CON LO STESSO METODO, IL SOTTOALBERO SINISTRO DI T
  - IL TERZO E’ UN’ALTRA LISTA CHE RAPPRESENTA IL SOTTOALBERO DESTRO DI T

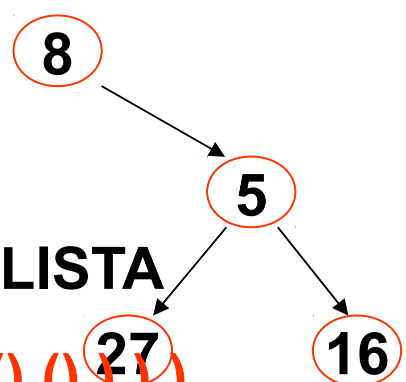
**POSSIAMO USARE UNA RAPPRESENTAZIONE CON PARENTESI PER RAPPRESENTARE UN ALBERO BINARIO MEDIANTE LISTA**

() ALBERO VUOTO

(a) ALBERO COSTITUITO DALLA SOLA RADICE

(a () () ) ALBERO BINARIO COSTITUITO DA RADICE a, UN FIGLIO SINISTRO VUOTO E UN FIGLIO DESTRO VUOTO

**AD ESEMPIO L'ALBERO SEGUENTE**



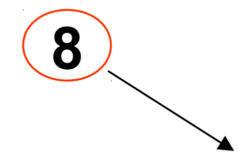

**CORRISPONDE ALLA LISTA**

( 8 () ( 5 ( 27 () () ) ( 16 () () ) ) )

# LA RAPPRESENTAZIONE COLLEGATA DI UN ALBERO

| INIZIO |
| --- |
| 3 |

| | SIN | NODO | DES |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 16 | 0 |
| 2 | | | |
| 3 | 0 | 8 | 7 |
| 4 | | | |
| 5 | 0 | 27 | 0 |
| 6 | | | |
| 7 | 5 | 5 | 1 |




UN PRIMO METODO RICHIEDE DI UTILIZZARE UN ARRAY, IN MODO CHE AD OGNI NODO DELL'ALBERO CORRISPONDA UNA COMPONENTE DELL'ARRAY IN CUI SONO MEMORIZZATE LE INFORMAZIONI (NODO, RIFERIMENTO AL FIGLIO SINISTRO, RIFERIMENTO AL FIGLIO DESTRO).

IL RIFERIMENTO E' IL VALORE DELL'INDICE IN CORRISPONDENZA DEL QUALE SI TROVA LA COMPONENTE CHE CORRISPONDE AL FIGLIO SINISTRO O DESTRO.

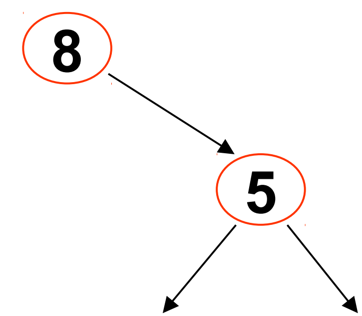
SE IL FIGLIO NON ESISTE IL RIFERIMENTO HA VALORE 0.

# LA RAPPRESENTAZIONE COLLEGATA DI UN ALBERO

| 3 |
|---|

INIZIO

| | SIN | NODO | DES |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 16 | 0 |
| 2 | | | |
| 3 | 0 | 8 | 7 |
| 4 | | | |
| 5 | 0 | 27 | 0 |
| 6 | | | |
| 7 | 5 | 5 | 1 |




UN PRIMO METODO RICHIEDE DI UTILIZZARE UN ARRAY, IN MODO CHE AD OGNI NODO DELL'ALBERO CORRISPONDA UNA COMPONENTE DELL'ARRAY IN CUI SONO MEMORIZZATE LE INFORMAZIONI (NODO, RIFERIMENTO AL FIGLIO SINISTRO, RIFERIMENTO AL FIGLIO DESTRO).

IL RIFERIMENTO E' IL VALORE DELL'INDICE IN CORRISPONDENZA DEL QUALE SI TROVA LA COMPONENTE CHE CORRISPONDE AL FIGLIO SINISTRO O DESTRO.

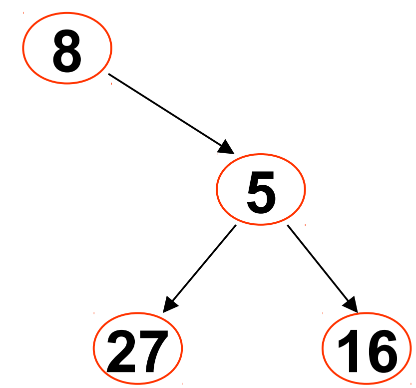
SE IL FIGLIO NON ESISTE IL RIFERIMENTO HA VALORE 0.

# LA RAPPRESENTAZIONE COLLEGATA DI UN ALBERO

**3**

**INIZIO**

| | SIN | NODO | DES |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 16 | 0 |
| 2 | | | |
| 3 | 0 | 8 | 7 |
| 4 | | | |
| 5 | 0 | 27 | 0 |
| 6 | | | |
| 7 | 5 | 5 | 1 |

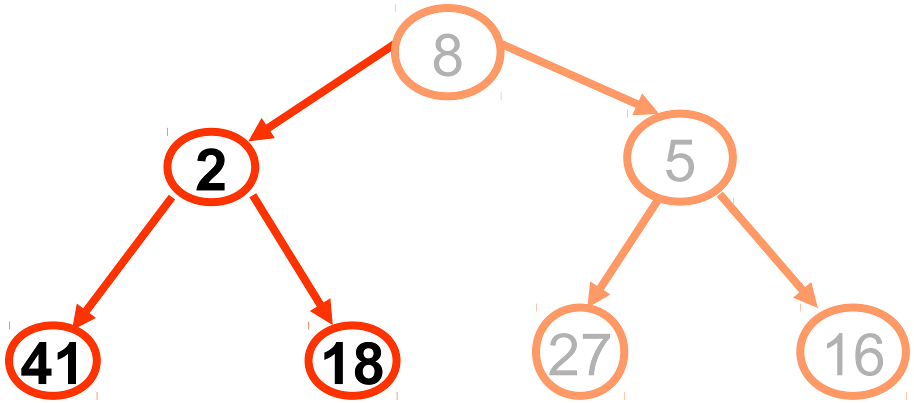



**UN PRIMO METODO RICHIEDE DI UTILIZZARE UN ARRAY, IN MODO CHE AD OGNI NODO DELL'ALBERO CORRISPONDA UNA COMPONENTE DELL'ARRAY IN CUI SONO MEMORIZZATE LE INFORMAZIONI (NODO, RIFERIMENTO AL FIGLIO SINISTRO, RIFERIMENTO AL FIGLIO DESTRO).**

**IL RIFERIMENTO E' IL VALORE DELL'INDICE IN CORRISPONDENZA DEL QUALE SI TROVA LA COMPONENTE CHE CORRISPONDE AL FIGLIO SINISTRO O DESTRO.**

**SE IL FIGLIO NON ESISTE IL RIFERIMENTO HA VALORE 0.**

# SE VOLESSIMO COMPLETARE L'ALBERO

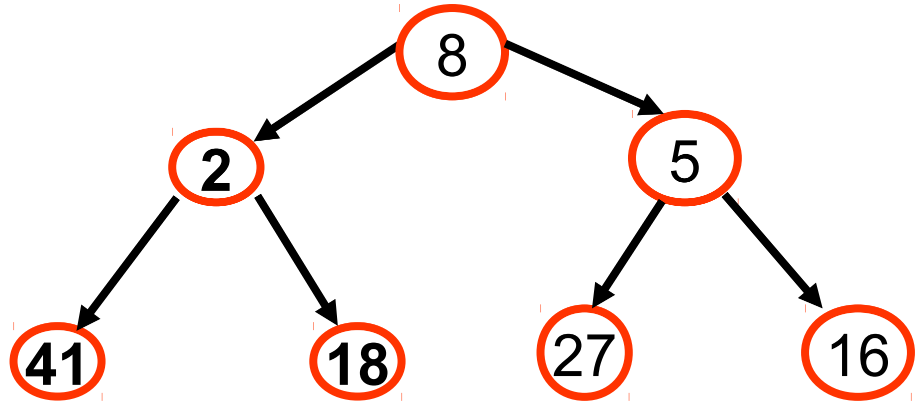



**3**

**INIZIO**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 16 | 0 |
| 2 | 0 | 41 | 0 |
| 3 | 4 | 8 | 7 |
| 4 | 2 | 2 | 6 |
| 5 | 0 | 27 | 0 |
| 6 | 0 | 18 | 0 |
| 7 | 5 | 5 | 1 |

# SE VOLESSIMO COMPLETARE L'ALBERO




**3**

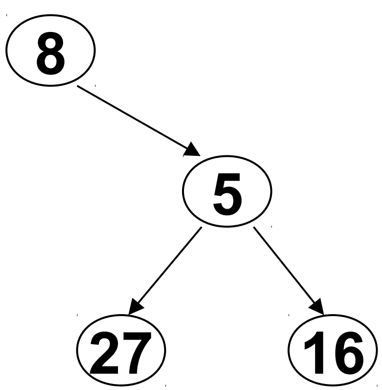
**INIZIO**

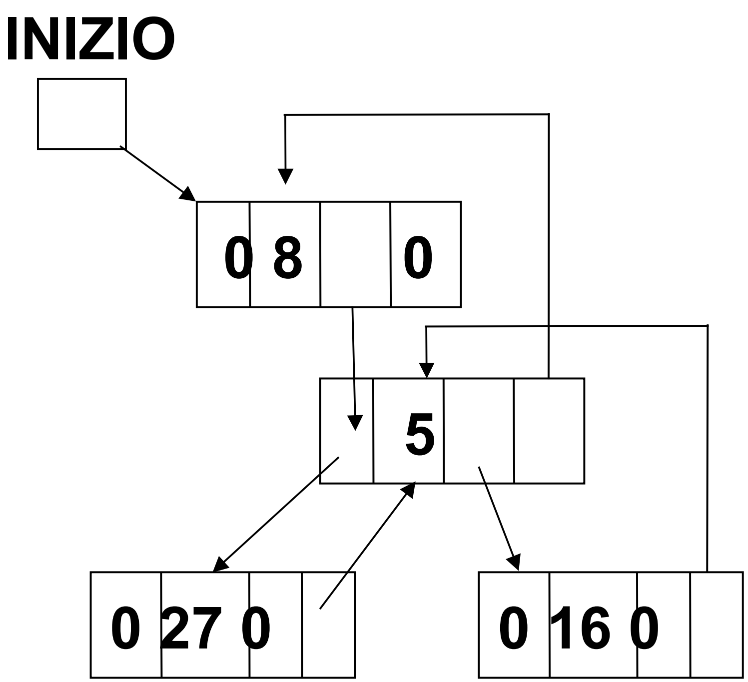
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 16 | 0 |
| 2 | 0 | 41 | 0 |
| 3 | 4 | 8 | 7 |
| 4 | 2 | 2 | 6 |
| 5 | 0 | 27 | 0 |
| 6 | 0 | 18 | 0 |
| 7 | 5 | 5 | 1 |

# LA RAPPRESENTAZIONE COLLEGATA CON USO DI VARIABILI DINAMICHE

**PROPRIO PERCHE' L'ALBERO BINARIO PUO' ESSERE VISTO COME UNA LISTA, OVVIAMENTE E' POSSIBILE USARE PUNTATORI INVECE CHE CURSORI E LA MANCANZA DI UN FIGLIO VIENE INDICATA COL VALORE nil NELL'APPOSITO CAMPO. PREVEDIAMO UN CAMPO PER IL FIGLIO DESTRO, UNO PER IL FIGLIO SINISTRO E, PER RAGIONI DI EFFICIENZA UN CAMPO PER IL PADRE**

( 8 () ( 5 ( 27 () () ) ( 16 () () ) ) )



# PROBLEMA: NUMERO NODI PER SOTTOALBERO

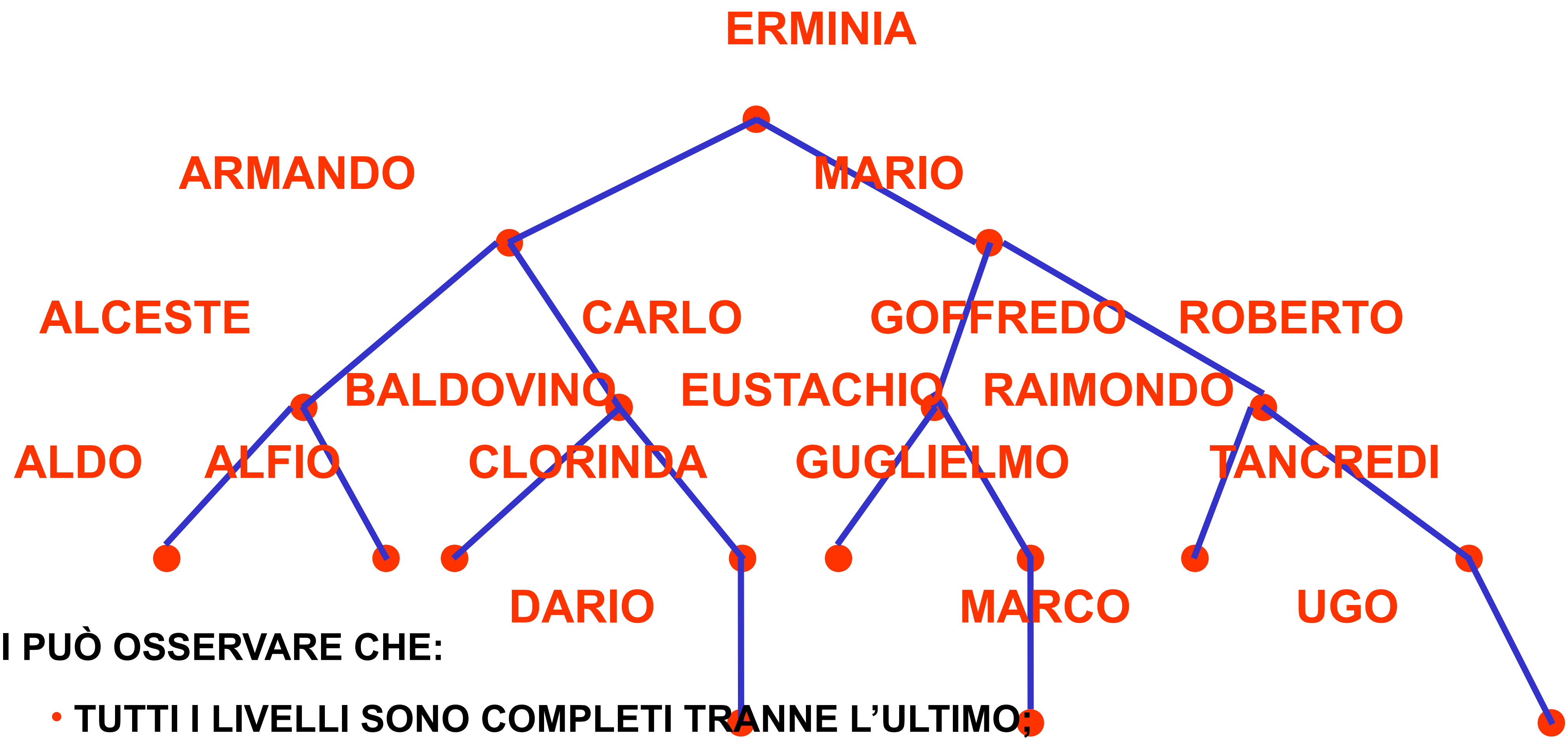
**DATO UN ALBERO BINARIO T, NON VUOTO, SI MEMORIZZI NELL'ETICHETTA DI OGNI NODO u IL NUMERO DI NODI CHE SI TROVANO NEL SOTTOALBERO CON RADICE IN u.**

```
CONTANODI(U:nodo; T:binalbero per riferimento)
  if (SINISTROVUOTO(U,T)) and (DESTROVUOTO(U,T)) then
    CONTO ← 1
    SCRIVINODO(CONTO,U,T)
  else
    if not SINISTROVUOTO(U,T) then
      CONTANODI(FIGLIOSINISTRO(U,T),T)
      SOMMASIN ← LEGGINODO(FIGLIOSINISTRO(U,T),T)
    else
      SOMMASIN ← 0
    if not DESTROVUOTO(U,T) then
      CONTANODI(FIGLIODESTRO(U,T),T)
      SOMMADES ← LEGGINODO(FIGLIODESTRO(U,T),T)
    else
      SOMMADES ← 0
    CONTO ← SOMMASIN+SOMMADES+1
    SCRIVINODO(CONTO,U,T)
```

# PROBLEMA: RICERCA BINARIA DI UN NOME IN UNA TABELLA

**ALDO**
**ALCESTE**
**ALFIO**
**ARMANDO**
**BALDOVINO**
**CARLO**
**CLORINDA**
**DARIO**
**ERMINIA**
**EUSTACHIO**
**GOFFREDO**
**GUGLIELMO**
**MARCO**
**MARIO**
**RAIMONDO**
**ROBERTO**
**TANCREDI**
**UGO**

## IL PROCEDIMENTO DI RICERCA BINARIA DI UN NOME IN UNA TABELLA PUO' ESSERE VISUALIZZATO MEDIANTE UN ALBERO BINARIO.




**SI PUÒ OSSERVARE CHE:**

- **TUTTI I LIVELLI SONO COMPLETI TRANNE L'ULTIMO;**
- **TUTTE LE CHIAVI ASSOCIATE A NODI CHE SI TROVANO NEL SOTTOALBERO SINISTRO DI UN DETERMINATO NODO INTERNO u SONO MINORI DELL CHIAVE ASSOCIATA AL NODO u;**
- **TUTTE LE CHIAVI ASSOCIATE A NODI CHE SI TROVANO NEL SOTTOALBERO DESTRO DI UN DETERMINATO NODO INTERNO u SONO MAGGIORI DELLA CHIAVE ASSOCIATA AL NODO u.**

# *RICERCA DELLA CHIAVE “CLORINDA”*

**ALDO**
**ALCESTE**
**ALFIO**
**ARMANDO**
**BALDOVINO**
**CARLO**
**CLORINDA**
**DARIO**
**ERMINIA**
**EUSTACHIO**
**GOFFREDO**
**GUGLIELMO**
**MARCO**
**MARIO**
**RAIMONDO**
**ROBERTO**
**TANCREDI**
**UGO**

# RICERCA BINARIA (IN UNA TABELLA)

```
RICERCA_BINARIA(A:tabella per riferimento;
                K: chiave; SUCCESSO: boolean per riferimento)

  MAX ← N
  MIN ← 1
  SUCCESSO ← false
  while (MAX ≥ MIN) do
    MED ← (MAX - MIN)/2
    if (A[MED].ATTR_CHIAVE=K) then
      SUCCESSO ← true
    else
      if (A[MED].ATTR_CHIAVE>K) then
        MAX ← MED-1
      else
        MIN ← MED+1
```