ESERCIZI SU OPERAZIONI SUI LINGUAGGI, LINGUAGGI REGOLARI, AUTOMI A STATI FINITI E PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI REGOLARI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Dipartimento di Informatica
CdS Informatica

Esercizi

- Esercizi sui seguenti argomenti
  - Operazioni sui linguaggi
  - Linguaggi regolari
  - Automi a stati finiti
  - Pumping Lemma per i linguaggi regolari
    - *Esercizio #6*
    - *Esercizio #7*
    - *Esercizio #9*
    - *Esercizio #10*
    - *Esercizio #11*

Esercizio #6

Sia dato il seguente automa riconoscitore a stati finiti non deterministico

$$M = (Q, \delta, q_0, F)$$

con alfabeto di ingresso $X = \{1,2\}$ ove

$$Q = \{q_0, B, C, D\}$$

$\delta(q_0, 1) = \{B, C\}$ $\delta(q_0, 2) = \{D\}$

$\delta(B, 1) = \{B, D\}$ $\delta(B, 2) = -$

$\delta(C, 1) = \{D\}$ $\delta(C, 2) = -$

$\delta(D, 1) = -$ $\delta(D, 2) = \{B\}$

$$F = \{D\}$$

Esercizio #6

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $T(M)$
- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti deterministico equivalente a M

Esercizio #6 - Soluzione

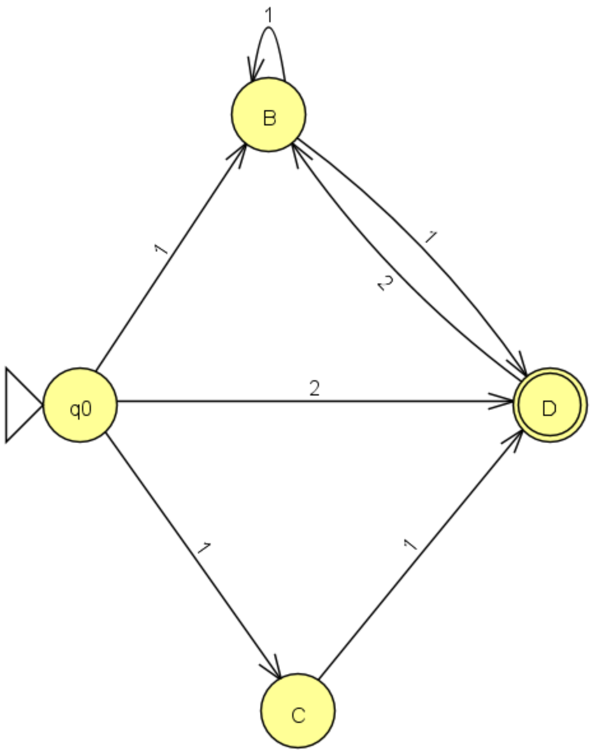
- Determinare una grammatica lineare destra che genera $T(M)$
  - $G = (X, V, S, P)$ t.c. $L(G) = T(M)$ si costruisce secondo il seguente algoritmo
    - $X = \{1,2\}$ coincide con l'alfabeto di ingresso di M
    - $S = q_0$
    - $V = Q = \{q_0, B, C, D\}$

Esercizio #6 - Soluzione

- L'insieme P delle produzioni si costruisce secondo il seguente passo dell'algoritmo:
  - $P = \{q \to xq' | q' \in \delta(q, x)\} \cup$
    $\cup \{q \to x \mid \delta(q, x) \in F\} \cup \{q_0 \to \lambda | q_0 \in F\}$
- Dunque si ha:
  - $P = \{S \to 1B|1C|2D|2, B \to 1B|1D|1,$
    $C \to 1D|1, D \to 2B\}$

Esercizio #6 - Soluzione

- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti deterministico equivalente a M. Da svolgere in autonomia applicando l'algoritmo di conversione



Esercizio #7

Sia dato il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$$

- Di che tipo è L?
  - Il più specifico nella gerarchia di Chomsky
- Giustificare formalmente la risposta

Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$
    - $L_1 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_1 FSA$ t.c. $M_1 = T(M_1)$

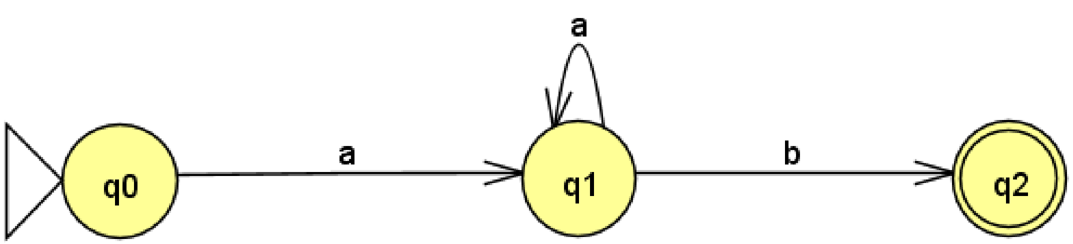
Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$
  - $L_1 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_1 FSA$ t.c. $M_1 = T(M_1)$
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ alfabeto degli stati
  - $F = \{q_2\}$ insieme degli stati finali
  - $\delta: Q \times X \to Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_1	$-$
b	$-$	q_2	$-$

Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$



- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
- Quindi, $L_1 \in \mathcal{L}_3$

Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \left\{a^n b a^{2m} \middle| n, m > 0\right\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_2 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_2 FSA$ t.c. $M_2 = T(M_2)$

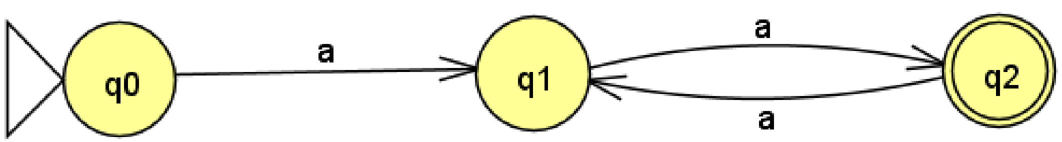
Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \left\{a^n b a^{2m} \middle| n, m > 0\right\}$?
  - $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
  - $L_2 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_2$ FSA t.c. $M_2 = T(M_2)$
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ alfabeto degli stati
  - $F = \{q_2\}$ insieme degli stati finali
  - $\delta: Q \times X \rightarrow Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_2	q_1

Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$



- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
- Quindi, $L_2 \in \mathcal{L}_3$

Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - Osserviamo che

$$L = \{a^n | n > 0\}\ \{b\}\{a^{2m} | m > 0\}$$

- Per il teorema di chiusura, $L \in \mathcal{L}_3$ in quanto concatenazione di 3 linguaggi lineari destri (dimostrazione per esercizio).
- Un'espressione regolare che denota *L* (ossia t.c. S(*R*) = *L*) è:

$$R = aa^*\ b\ aa(aa)^*$$

Esercizio #9

Progettare, commentando opportunamente, un automa a stati finiti che riconosce il seguente linguaggio:

$$L = \{w \in X^* | \#(1, w) = 3k, k > 0\}$$

dove

$X = \{0,1,2\}$

$\#\,(x, w)$ indica il numero delle volte che il simbolo $x \in X$ compare nella stringa w

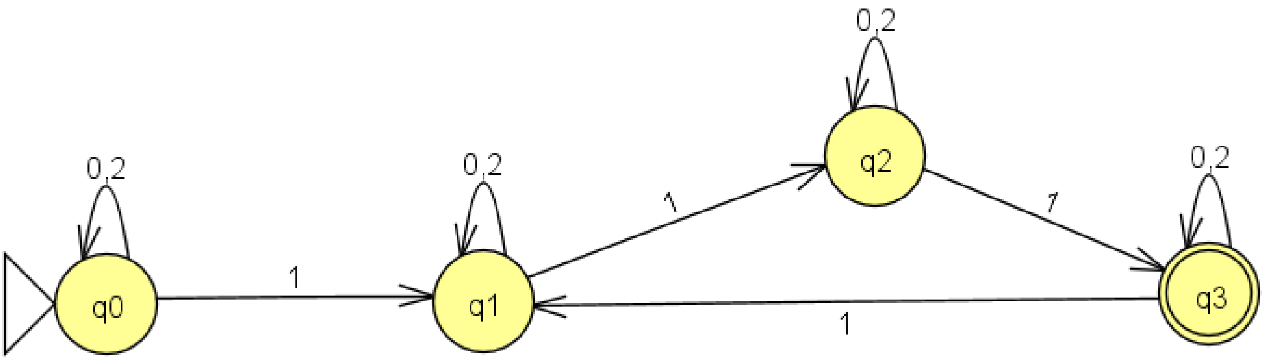
Esercizio #9 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)$ FSA t.c. $L = T(M)$
  - $X = \{0,1,2\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ alfabeto degli stati
  - $F = \{q_3\}$ insieme degli stati finali

Esercizio #9 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)$ FSA t.c.
$$L = T(M)$$
  - $\delta: Q \times Q \rightarrow Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2	q_3
0	q_0	q_1	q_2	q_3
1	q_1	q_2	q_3	q_1
2	q_0	q_1	q_2	q_3



Esercizio #10

Si considerino le seguenti espressioni regolari:

$$R_1 = (01)^* + 1 + 0$$

$$R_2 = 0^* 1^*$$

- Determinare $L = S(R_1) \cap S(R_2)$
- Calcolare L^2

Esercizio #10 - Soluzione

- $R_1 = (01)^* + 1 + 0$
  - Troviamo ora $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1

$$S\big((01)^* + 1 + 0\big) = S((01)^*) \cup S(1) \cup S(0) =$$
$$= (S(01))^* \cup S(1) \cup S(0) = \{01\}^* \cup \{1\} \cup \{0\}$$

  - $S(R_1) = \{\lambda, 0, 1, 01, 0101, 010101, 01010101, \ldots\}$

Esercizio #10 - Soluzione

- $R_2 = 0^*1^*$
  - Troviamo ora $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1

$$S(0^*1^*) = S(0^*) \cdot S(1^*) = \left(S(0)\right)^* \cdot \left(S(1)\right)^* = \{0\}^* \cdot \{1\}^*$$

  - $S(R_2) = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111, 0000, \ldots\}$

Esercizio #10 - Soluzione

- Determinare $L = S(R_1) \cap S(R_2)$
  - $S(R_1) = \{\lambda, 0, 1, 01, 0101, 010101, 01010101, \ldots\}$
  - $S(R_2) = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111, 0000, \ldots\}$

$$L = S(R_1) \cap S(R_2) = \{\lambda, 0, 1, 01\}$$

- Calcolare L^2
  - $L^2 = \{\lambda, 0, 1, 01, 00, 001, 10, 11, 101, 010, 011, 0101\}$

Esercizio #11

Siano dati l'alfabeto $X = \{a, b\}$ ed il linguaggio

$$L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$$

- Determinare un'espressione regolare che denoti L

Esercizio #11 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L = \mathrm{L}_1 \cdot L_2 \cdot L_3$
  - $L_1 = \{w_1 | w_1 \in \{a, b\}^*\}$
  - $L_2 = bb$
  - $L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$

Esercizio #11 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 \mid w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_1 = \{w_1 \mid w_1 \in \{a, b\}^*\}$
  - $R_1 = (a + b)^*$

Esercizio #11 - Soluzione

- $L = \left\{w_1 w_2 w_3 \middle| w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\right\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_2 = bb$
  - $R_2 = bb$

Esercizio #11 - Soluzione

- $L = \left\{w_1 w_2 w_3 \middle| w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\right\}$
  - Determinare un’espressione regolare che denoti L
  - $L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
  - $R_3 = (aa)^*$

Esercizio #11 - Soluzione

- $L = \left\{ w_1 w_2 w_3 \middle| w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0 \right\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_1 = \{w_1 | w_1 \in \{a, b\}^*\}, L_2 = bb, L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
  - $R_1 = (a + b)^*, R_2 = bb, R_3 = (aa)^*$
  - $R = (a + b)^* bb (aa)^*$

Credits

- Si ringrazia il Tutor 2018-2019: *Francesco Paolo Caforio*