

ESERCIZI SU GRAMMATICHE LIBERE E DIPENDENTI DA CONTESTO E PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI LIBERI DA CONTESTO

Esercizi #1 - #5 - #6 - #7 #8

Costruzione di grammatiche e riconoscimento di $L(G)$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI BARI
ALDO MORO

Dipartimento di Informatica
CdS Informatica

Esercizi

- Esercizi sui seguenti argomenti: ricavare un linguaggio da una grammatica, costruire una grammatica per un linguaggio:
 - *Esercizio #1*
 - *Esercizio #5*
 - *Esercizio #6*
 - *Esercizio #7*
 - *Esercizio #8*

Esercizio #1

- Sia data la seguente grammatica $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{0,1\}, V = \{S, A, B\}, S$$

$$P = \{S \rightarrow A|B, A \rightarrow B|0A1, B \rightarrow 0|0B\}$$

- Determinare $L(G)$
- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 000011$ e determinare l'altezza

Esercizio #1 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione

- $B \xRightarrow{5} 0$

- $B \xRightarrow{6} 0B \xRightarrow{5} 00$

- $B \xRightarrow{6} 0B \xRightarrow{6} 00B \xRightarrow{5} 000$

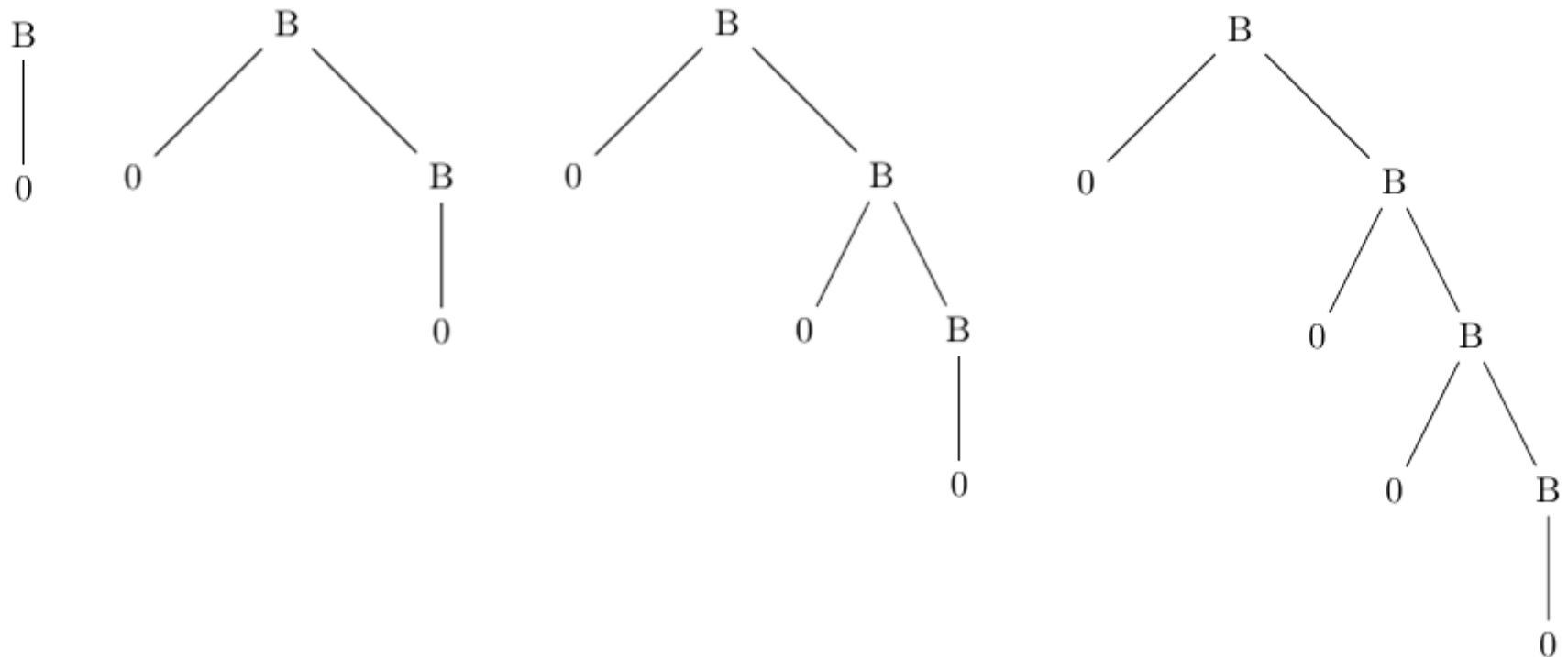
- $B \xRightarrow{6} 0B \xRightarrow{6} 00B \xRightarrow{6} 000B \xRightarrow{5} 0000$

- ...

Esercizio #1 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione



Esercizio #1 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione
- In generale:

$$B \xRightarrow{*} 0^n, n > 0$$

Esercizio #1 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione
 - $A \Rightarrow_3 B$
 - Ci si riconduce allo studio del comportamento del NT B rispetto a P
 - $A \Rightarrow_4 0A1$
 - $A \Rightarrow_4 0A1 \Rightarrow_4 00A11$
 - $A \Rightarrow_4 0A1 \Rightarrow_4 00A11 \Rightarrow_4 \dots \Rightarrow_3 0^m B 1^m$

Esercizio #1 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione
 - $S \Rightarrow_1 A$
 - Ci si riconduce allo studio del comportamento del NT A rispetto a P
 - $S \Rightarrow_2 B$
 - Ci si riconduce allo studio del comportamento del NT B rispetto a P

Esercizio #1 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Linguaggio L generato dalla grammatica G

- $L(G) = \{0^{n+m}1^m | n > 0, m \geq 0\}$

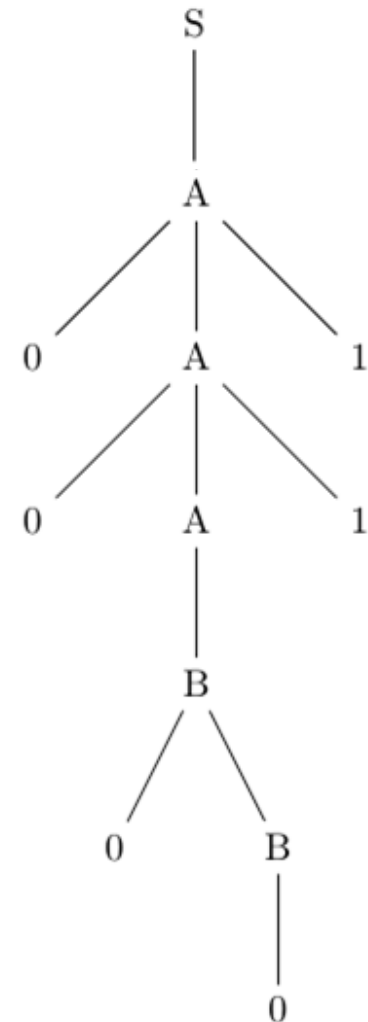
- $L(G) = \{0^n1^m | m \geq 0, n > 0, n > m\}$

Esercizio #1 - Soluzione

- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- La grammatica G è di tipo context free
 - G è CF se e solo se $\forall v \rightarrow w \in P: v \in V, w \in (X \cup V)^*$
 - In altre parole, se per ogni regola di produzione $v \rightarrow w$ allora v è NT

Esercizio #1 - Soluzione

- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 000011$ e determinare l'altezza
- Altezza albero di derivazione: lunghezza del suo cammino più lungo, identificata dal numero di NT che si trovano sul cammino più lungo
- L'altezza dell'albero di derivazione è **6**



Esercizio #5

- Sia data la seguente grammatica $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{0,1\}, V = \{S, A\}, S$$

$$P = \{S \rightarrow \lambda | 1S | 0A, A \rightarrow 0A | 1A\}$$

- Determinare $L(G)$
- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 1111$ e determinare l'altezza

Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione

- $A \Rightarrow_4 0A \Rightarrow_4 00A \Rightarrow_4 000A$

- $A \Rightarrow_5 1A \Rightarrow_5 11A \Rightarrow_5 111A$

- $A \Rightarrow_4 0A \Rightarrow_5 01A \Rightarrow_4 010A$

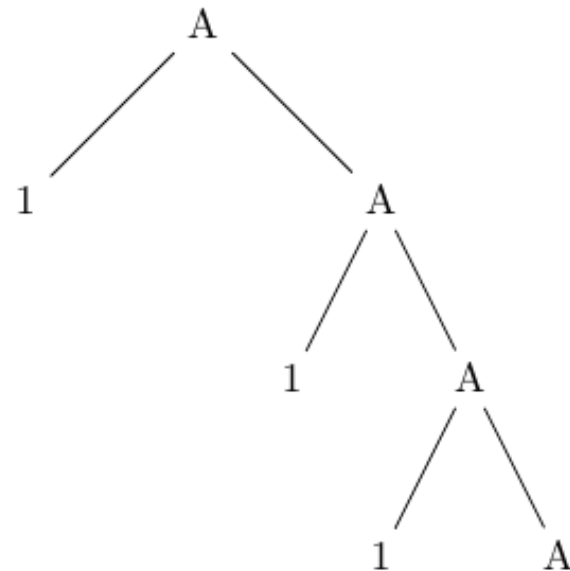
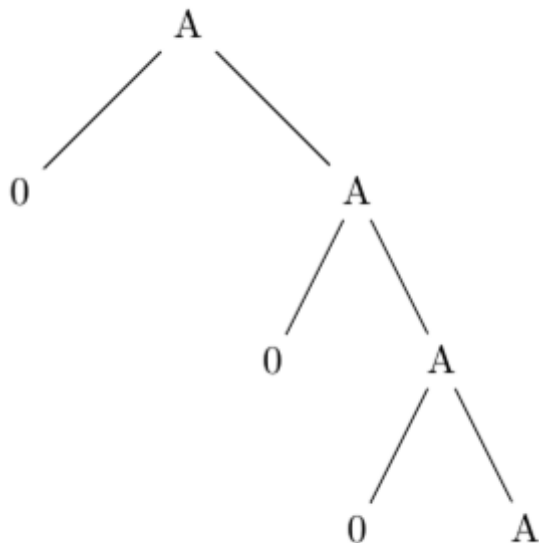
- $A \Rightarrow_4 1A \Rightarrow_5 10A \Rightarrow_4 101A$

- ...

Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

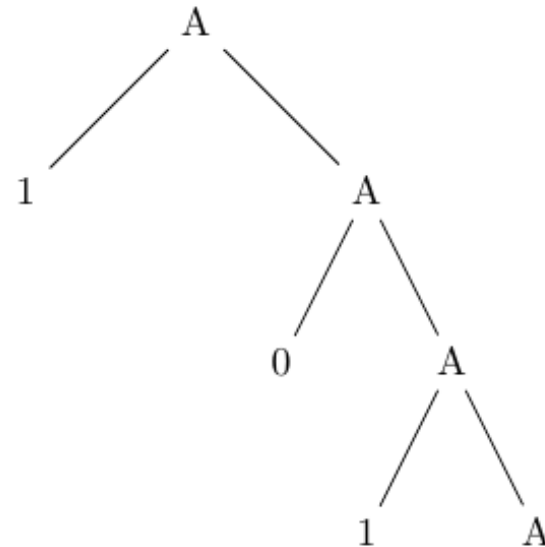
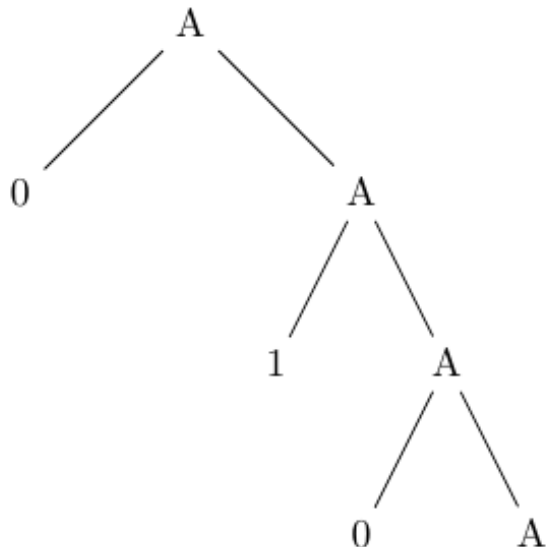
- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione



Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione



Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione
- In generale:

$$A \xRightarrow{*} \alpha A, \alpha \in X^+$$

Esercizio #5 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione
 - Osservazione
 - Nei casi analizzati, così come in tutte le altri casi possibili, leggendo la frontiera dell'albero di derivazione da sinistra verso destra otterremo sempre una forma di frase che contiene sempre il NT A

Esercizio #5 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione

- $S \Rightarrow_1 \lambda$

- $S \Rightarrow_2 1S \Rightarrow_1 1$

- $S \Rightarrow_2 1S \Rightarrow_2 11S \Rightarrow_1 11$

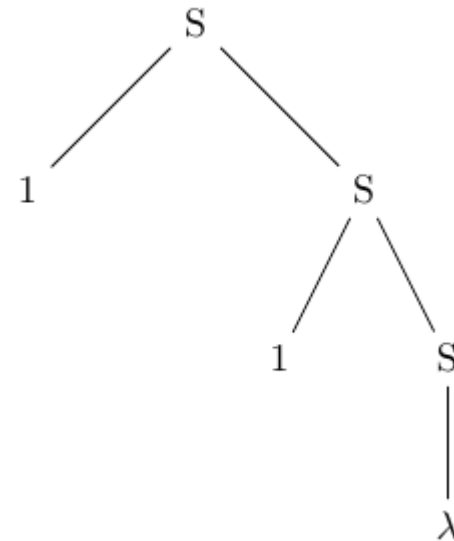
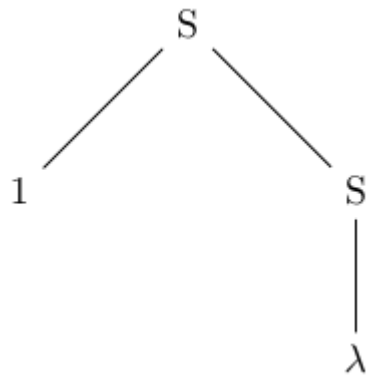
- $S \Rightarrow^n 1^n S \Rightarrow_1 1^n$

Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione

S
|
 λ



Esercizio #5 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione
 - Osservazione
 - Applicando la regola di produzione (3) introdurremo il NT A che, tramite l'applicazione delle regole di produzione (4) e (5), non porterà mai ad una forma frase terminale
 - $S \Rightarrow_3 0A \stackrel{*}{\Rightarrow} 0\alpha A, \alpha \in X^+$

Esercizio #5 - Soluzione

• Determinare $L(G)$

- Linguaggio L generato dalla grammatica G

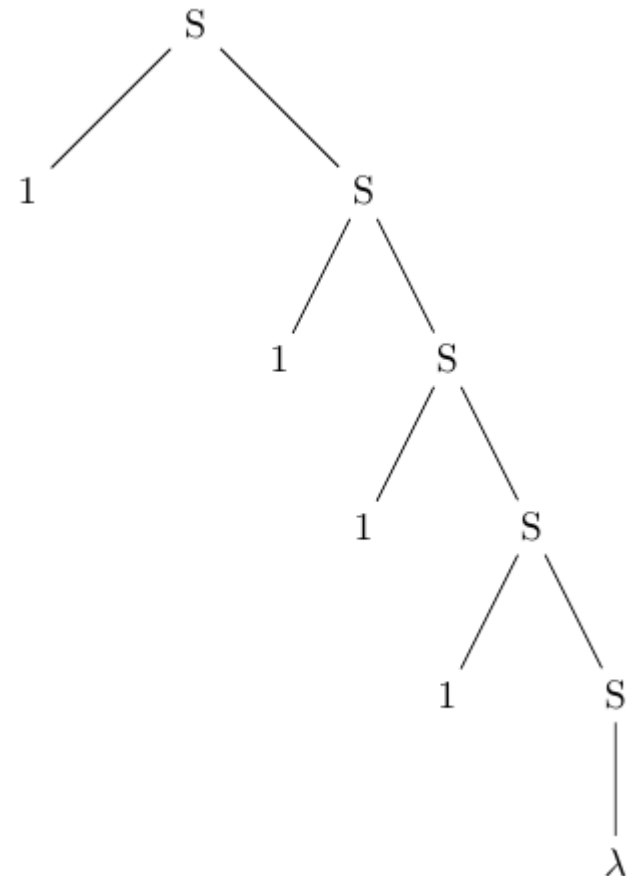
- $L(G) = \{1^n | n \geq 0\}$

Esercizio #5 - Soluzione

- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- La grammatica G è di tipo context free
 - G è CF se e solo se $\forall v \rightarrow w \in P: v \in V, w \in (X \cup V)^*$
 - In altre parole, se per ogni regola di produzione $v \rightarrow w$ allora v è NT

Esercizio #5 - Soluzione

- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 1111$ e determinare l'altezza
 - Altezza albero di derivazione: lunghezza del suo cammino più lungo, identificata dal numero di NT che si trovano sul cammino più lungo
 - L'altezza dell'albero di derivazione è **5**



Esercizio #6

Sia data la seguente grammatica $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{0,1,2\}, V = \{S, A, B\}, S$$

$$P = \{S \rightarrow A0B, A \rightarrow 1A|\lambda, B \rightarrow 2B|\lambda\}$$

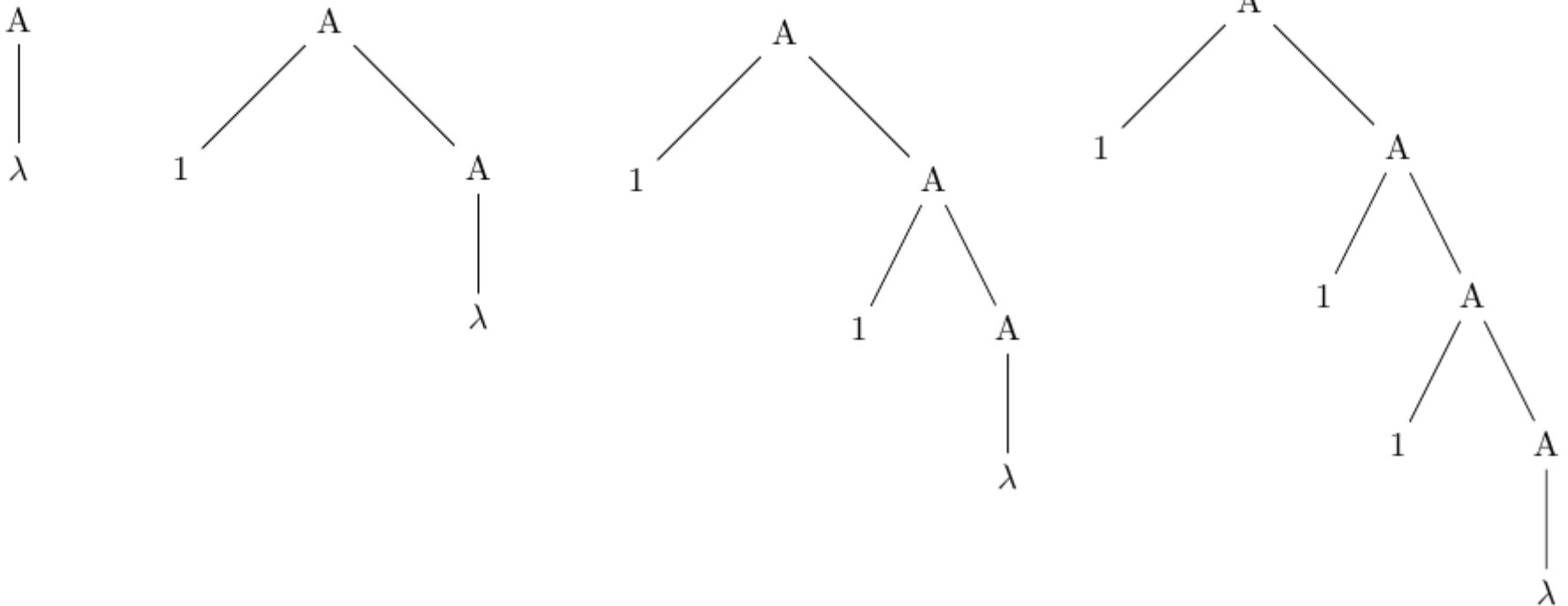
- Determinare $L(G)$
- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 110222$ e determinare l'altezza

Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione
 - $A \xRightarrow{3} \lambda$
 - $A \xRightarrow{2} 1A \xRightarrow{3} 1$
 - $A \xRightarrow{2} 1A \xRightarrow{2} 11A \xRightarrow{3} 11$
 - $A \xRightarrow{2} 1A \xRightarrow{2} 11A \xRightarrow{2} 111A \xRightarrow{3} 111$
 - ...

Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione



Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale A rispetto alle regole di produzione
 - In generale:

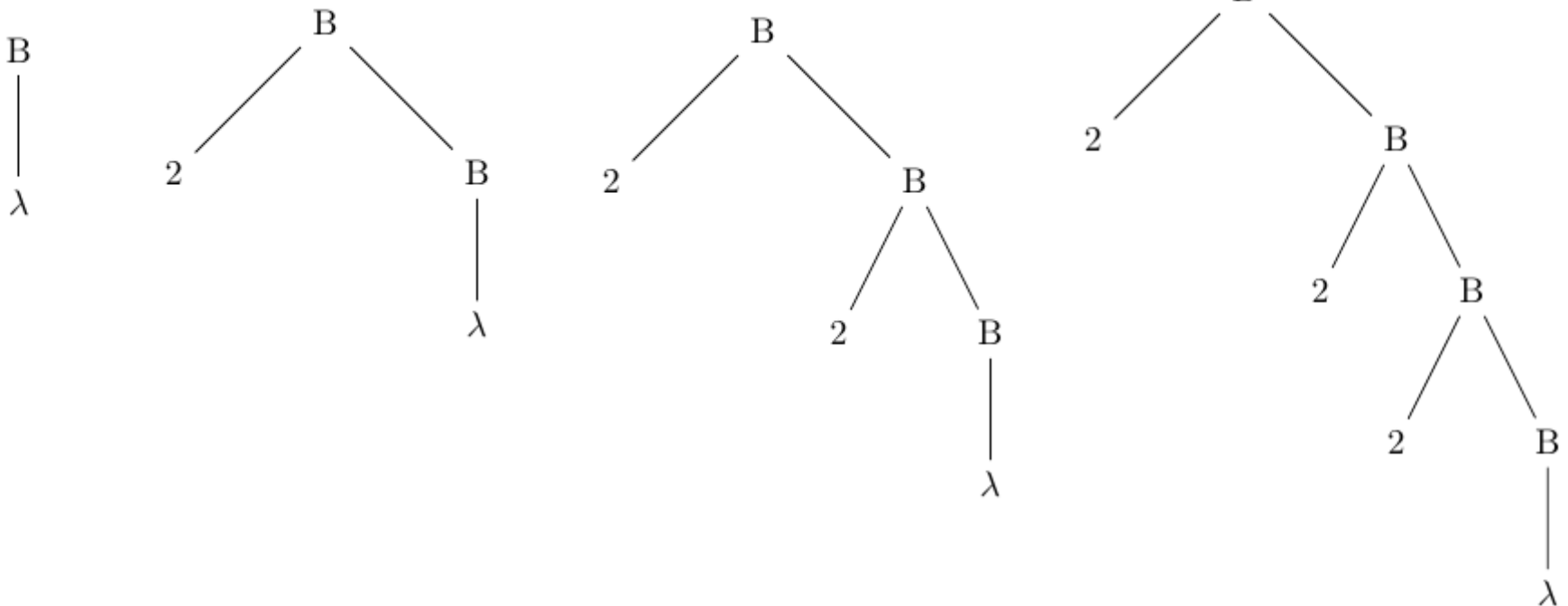
$$A \xRightarrow{*} 1^n, n \geq 0$$

Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione
 - $B \xRightarrow{5} \lambda$
 - $B \xRightarrow{4} 2B \xRightarrow{5} 2$
 - $B \xRightarrow{4} 2B \xRightarrow{4} 22B \xRightarrow{5} 22$
 - $B \xRightarrow{4} 2B \xRightarrow{4} 22B \xRightarrow{4} 222B \xRightarrow{5} 222$
 - ...

Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione



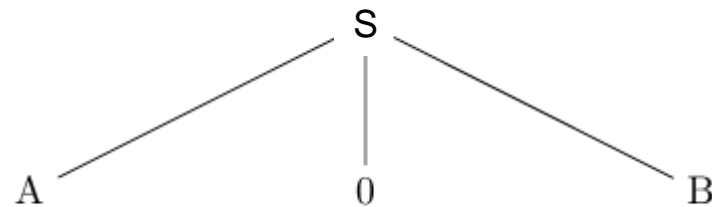
Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento del non terminale B rispetto alle regole di produzione
 - In generale:

$$B \xRightarrow{*} 2^m, m \geq 0$$

Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione
 - $S \xRightarrow[1]{} A0B$



Esercizio #6 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Linguaggio L generato dalla grammatica G
- $L(G) = \{1^n 0 2^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

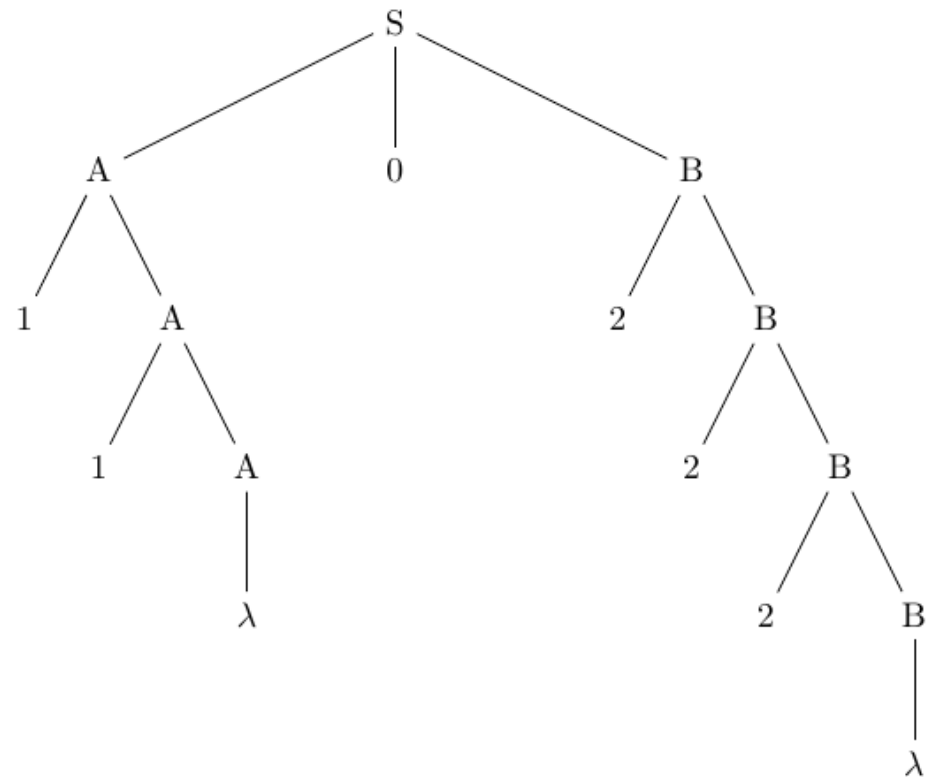
Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- La grammatica G è di tipo context free
 - G è CF se e solo se $\forall v \rightarrow w \in P: v \in V, w \in (X \cup V)^*$
 - In altre parole, se per ogni regola di produzione $v \rightarrow w$ allora v è NT

Esercizio #6 - Soluzione

- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = 110222$ e determinare l'altezza

- Altezza albero di derivazione: lunghezza del suo cammino più lungo, identificata dal numero di NT che si trovano sul cammino più lungo
- L'altezza dell'albero di derivazione è **5**



Esercizio #7

Sia data la seguente grammatica $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{a, b, c\}, V = \{S\}, S$$

$$P = \{S \rightarrow \lambda | aSa | bSb | cSc\}$$

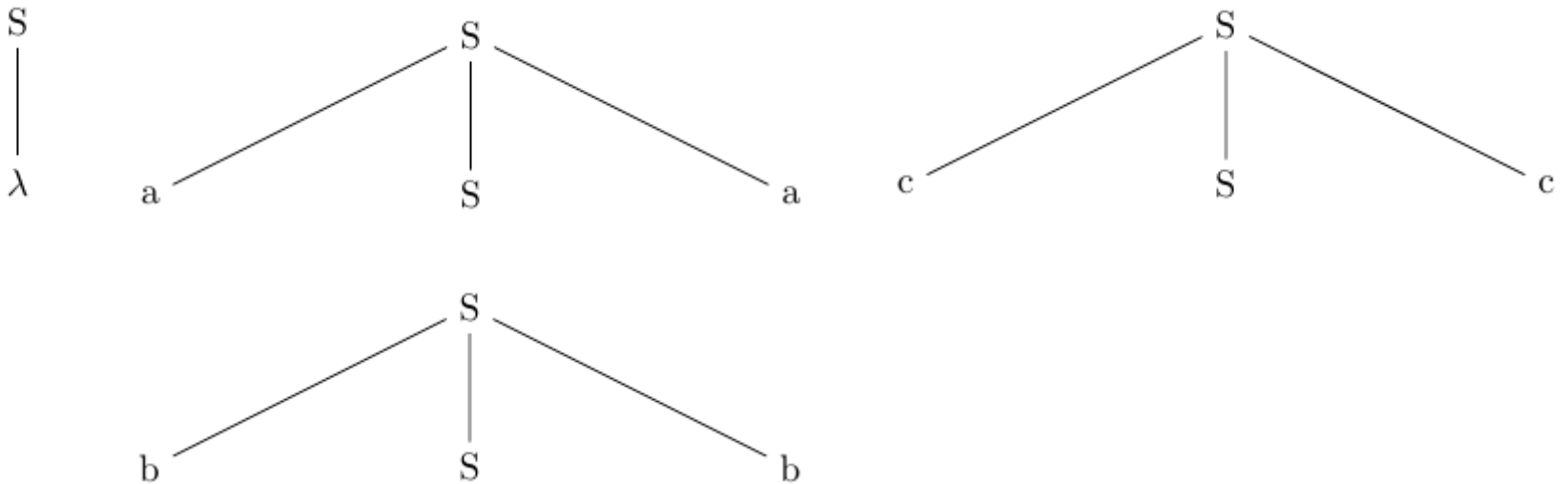
- Determinare $L(G)$
- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = acbbca$ e determinare l'altezza

Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione
 - $S \Rightarrow_1 \lambda$
 - $S \Rightarrow_2 aSa$
 - $S \Rightarrow_3 bSb$
 - $S \Rightarrow_4 cSc$
 - ...

Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Studio del comportamento dell'assioma S rispetto alle regole di produzione

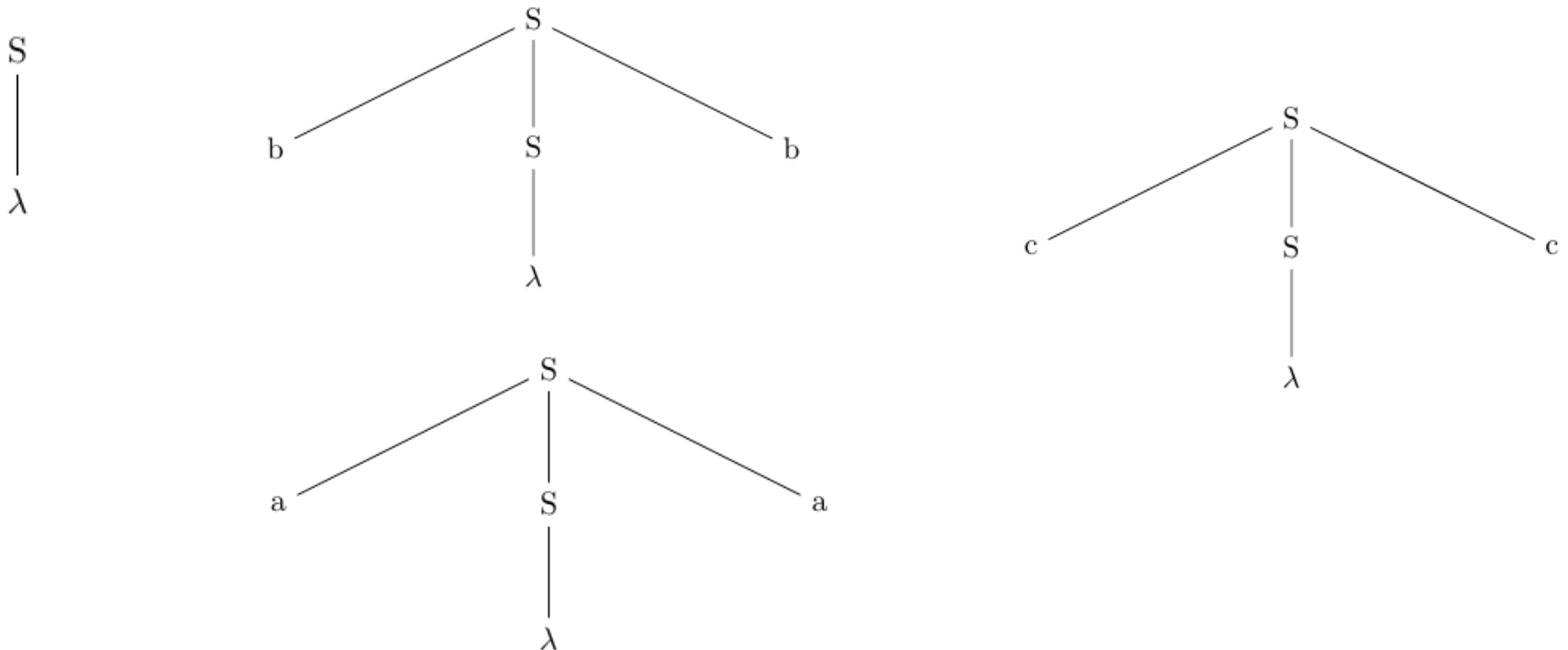


Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Derivazioni di alcune parole generate da G
 - $S \xRightarrow{*} \lambda$
 - $S \xRightarrow{*} aa$
 - $S \xRightarrow{*} bb$
 - $S \xRightarrow{*} cc$
 - $S \xRightarrow{*} abccba$
 - $S \xRightarrow{*} ccabaabacc$
 - ...

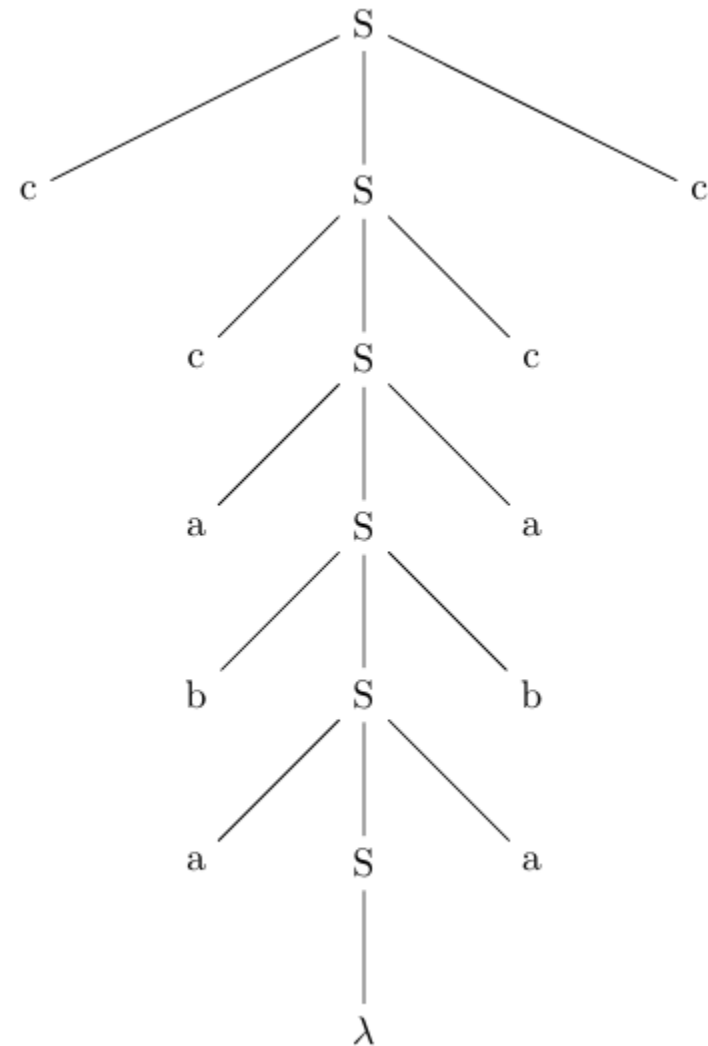
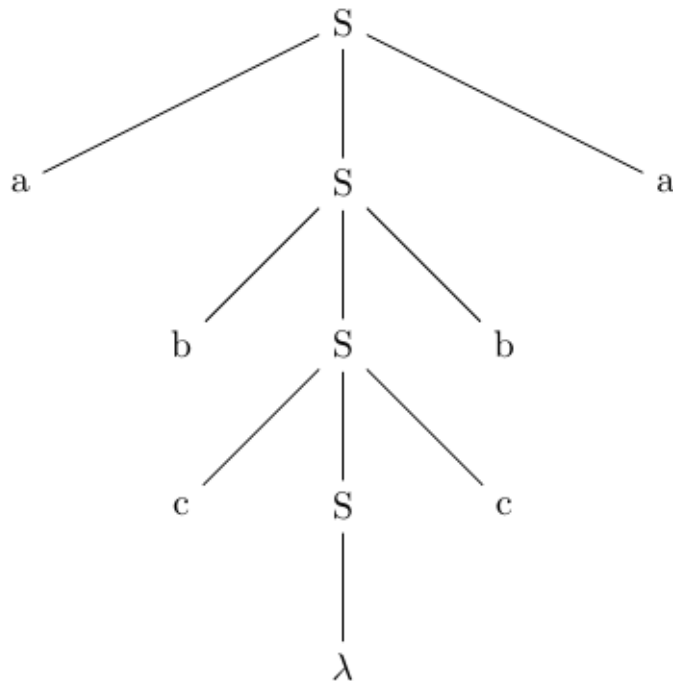
Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Alberi di derivazione di alcune parole generate da G



Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Alberi di derivazione di alcune parole generate da G



Esercizio #7 - Soluzione

- Determinare $L(G)$
 - Linguaggio L generato dalla grammatica G
 - $L(G) = \{w \in X^* | w = x_1x_2x_3 \dots x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1, n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$
 - G produce il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari

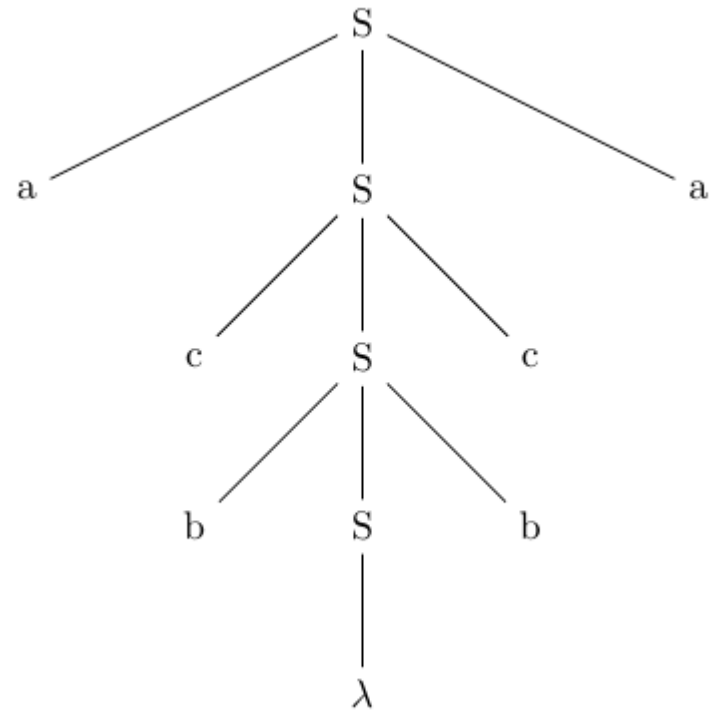


Esercizio #7 - Soluzione

- Di che tipo è G ? Motivare la risposta
- La grammatica G è di tipo context free
 - G è CF se e solo se $\forall v \rightarrow w \in P: v \in V, w \in (X \cup V)^*$
 - In altre parole, se per ogni regola di produzione $v \rightarrow w$ allora v è NT

Esercizio #7 - Soluzione

- Costruire un albero di derivazione per la parola $z = acbbca$ e determinare l'altezza
 - Altezza albero di derivazione: lunghezza del suo cammino più lungo, identificata dal numero di NT che si trovano sul cammino più lungo
 - L'altezza dell'albero di derivazione è **4**



Esercizio #8

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid n > 0, m > 0\}$.

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .
- Alcune parole che costituiscono L
 - $L = \{abc, a^2bc^2, a^3bc^3, a^4bc^4, \dots, ab^2c, a^2b^2c^2, a^3b^2c^3, a^4b^2c^4, \dots, \dots, ab^3c, a^2b^3c^2, a^3b^3c^3, a^4b^3c^4, \dots\}$

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .
 - Regole di produzione della grammatica G

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\}, V = \{S, B\}, S$$

$$P = \{S \rightarrow aSc | aBc, B \rightarrow bB | b\}$$

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .
 - Generazione di stringhe $w \in L$ mediante l'uso delle regole di produzione P in G
 - $aaabccc \in L$
 - $S \Rightarrow_{1} aSc \Rightarrow_{1} aaScc \Rightarrow_{2} aaaBccc \Rightarrow_{4} aaabccc$
 - $S \stackrel{*}{\Rightarrow} aaabccc, aaabccc \in L(G)$
 - $abbbbc \in L$
 - $S \Rightarrow_{2} aBc \Rightarrow_{3} abBc \Rightarrow_{3} abbBc \Rightarrow_{3} abbbBc \Rightarrow_{4} abbbbc$
 - $S \stackrel{*}{\Rightarrow} abbbbc, abbbbc \in L(G)$

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .
 - Generazione di stringhe $w \in L$ mediante l'uso delle regole di produzione P in G
 - $aaabccc \in L$
 - $S \xRightarrow{1} aSc \xRightarrow{1} aaScc \xRightarrow{2} aaaBccc \xRightarrow{4} aaabccc$
 - $S \xRightarrow{*} aaabccc, aaabccc \in L(G)$
 - $abbbbc \in L$
 - $S \xRightarrow{2} aBc \xRightarrow{3} abBc \xRightarrow{3} abbBc \xRightarrow{3} abbbBc \xRightarrow{4} abbbbc$
 - $S \xRightarrow{*} abbbbc, abbbbc \in L(G)$

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare una grammatica generativa corretta per L .
 - Generazione di stringhe $w \in L$ mediante l'uso delle regole di produzione P in G
 - $aabc \notin L$
 - $S \xRightarrow{1} aSc \xRightarrow{1} aaSc \xRightarrow{2} \dots$
 - $aabc \notin L(G)$

Credits

- Si ringraziano il Prof. Marco de Gemmis ed il Tutor 2018-2019: *Francesco Paolo Caforio*