Linguaggi di Programmazione (corso A)
Docente: Giovanni Semeraro

Capitolo 5 – Grammatiche e macchine

Classificazione delle grammatiche secondo Chomsky

- Definizione: Gerarchia di Chomsky (1956-1959)
  - Sia G = (X, V, S, P) una grammatica. Dalla definizione di grammatica, si ha:

$$P = \left\{ v \to w \,|\, v \in (X \cup V)^{+} \text{e } \ v \,\text{contiene almeno un}\ NT,\ \ w \in (X \cup V)^{*} \right\}$$

A seconda delle restrizioni imposte sulle regole di produzione, si distinguono le varie classi di grammatiche.

Classificazione delle grammatiche secondo Chomsky

- Definizione: Gerarchia di Chomsky (1956-1959)
  - Tipo ‘0’ - Quando le stringhe che appaiono nella produzione $v \to w$ non sono soggette ad alcuna limitazione.
  - Tipo ‘1’ - Dipendente da contesto - quando le produzioni sono limitate alla forma:
    (1) $yAz \to ywz$, con $A \in V,\ y, z \in (X \cup V)^*,\ w \in (X \cup V)^+$
    (2) $S \to \lambda$, purché *S* non compaia nella parte destra di alcuna produzione.
  - Tipo ‘2’ - Libera da contesto - quando le produzioni sono limitate alla forma: $v \to w$ con $v \in V$
  - Tipo ‘3’ - Lineare destra - quando le produzioni sono limitate alla forma:
    (1) $A \to bC$ con $A, C \in V$ e $b \in X$;
    (2) $A \to b$ con $A \in V$ e $b \in X \cup \{\lambda\}$.

Classificazione delle grammatiche secondo Chomsky

- Una grammatica di tipo ‘3’ è detta lineare destra perché il *NT*, se c’è, compare a destra (nella parte destra della produzione).
  Un linguaggio generato da una tale grammatica è detto *di tipo ‘3’* o *lineare a destro*.

Esempi di linguaggi di tipo ‘3’

- Consideriamo la grammatica G_1:

$$S \rightarrow \lambda \mid 0 \mid 0S \mid 1 \mid 1S$$

G_1 è lineare destra. $L(G_1) = \{0,1\}^*$(l’insieme di tutte le stringhe binarie).

- Consideriamo la grammatica G_2:

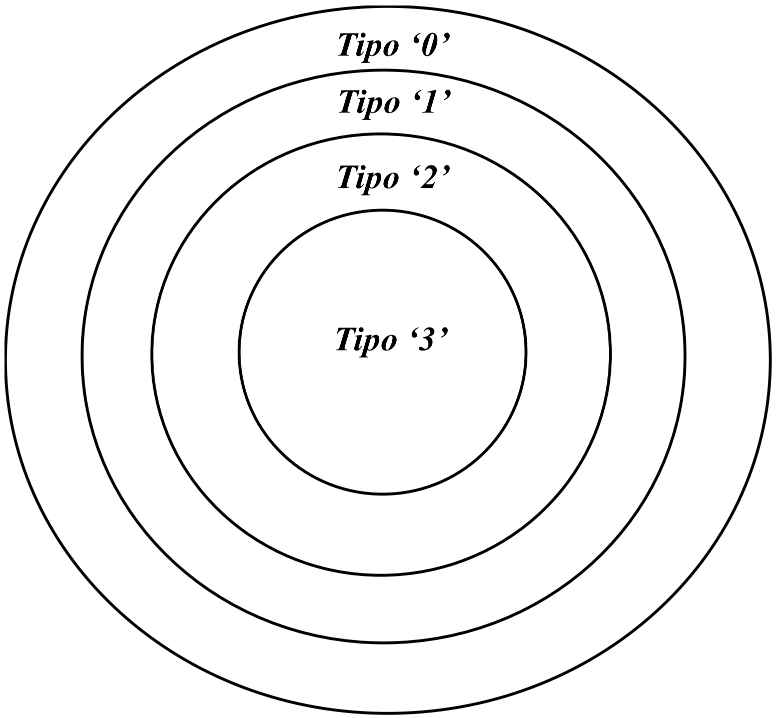
$$S \rightarrow \lambda \mid 0S \mid 1T$$
$$T \rightarrow 0T \mid 1S$$

G_2 è lineare destra.

$$L(G_2) = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ha un numero pari di } 1 \right\}$$

Teorema della gerarchia

- Dimostriamo formalmente che le quattro classi di linguaggi viste costituiscono una gerarchia



Teorema della gerarchia

- Denotiamo con $\mathcal{L}_i$ il seguente insieme:

$$\mathcal{L}_i = \{L \subset X^* \mid L = L(G),\ G\ di\ tipo\ i\}$$

 (classe dei linguaggi di tipo *i*).

La gerarchia di Chomsky è una gerarchia in senso stretto di classi di linguaggi:

$$\mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_0$$

Dimostrazione

Teorema della gerarchia

- $\mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2$

  Per dimostrare che la classe di linguaggi $\mathcal{L}_3$ è *inclusa propriamente* nella classe di linguaggi $\mathcal{L}_2$ si deve dimostrare che ogni linguaggio di tipo ‘3’ può essere generato da una grammatica di tipo ‘2’ e che esiste almeno un linguaggio C.F. (di tipo ‘2’) che non può essere generato da una grammatica di tipo ‘3’.

  $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$ discende dalle definizioni di linguaggio di tipo ‘3’ e di grammatica di tipo ‘2’. Infatti, si osserva facilmente che ogni grammatica di tipo ‘3’ è anche una grammatica di tipo ‘2’.

  $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2$: posponiamo questa dimostrazione.
  Mostreremo che $L = \{a^k b^k \mid k > 0\}$ non è di tipo ‘3’ (abbiamo già determinato una grammatica di tipo ‘2’ che genera *L*).

Teorema della gerarchia

- $\mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1$

  Abbiamo già osservato che le produzioni C.F. sono un caso particolare delle produzioni C.S. con l'unica eccezione rappresentata dalle produzioni:

  $$A \to \lambda, \qquad A \neq S$$

  che sono C.F. ma ***non*** C.S. Dunque:

  $$\forall L : L \in \mathcal{L}_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists G,\ G \text{ è C.F.} : L = L(G).$$

  Se $A \to \lambda,\ A \in V \setminus \{S\}$ non è una produzione di G, allora G è anche C.S. (di tipo '1') e l'asserto è dimostrato. Il problema sorge se G ha almeno una λ-produzione. In tal caso, ci avvaliamo del seguente risultato:

Lemma della stringa vuota

- Sia $G = (X, V, S, P)$ una grammatica C.F. con almeno una λ-produzione. Allora esiste una grammatica C.F. *G'* tale che:
  - i) $L(G)=L(G')$ (*G'* è equivalente a *G*);
  - ii) se $\lambda \notin L(G)$ allora in *G'* non esistono produzioni del tipo $A \to \lambda$;
  - iii) se $\lambda \in L(G)$ allora in *G'* esiste un'unica produzione $S' \to \lambda$, ove *S'* è il simbolo iniziale di *G'* ed *S'* non compare nella parte destra di alcuna produzione di *G'*.

Teorema della gerarchia

- Riprendiamo la dimostrazione di $\mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1$

$$\forall L : L \in \mathcal{L}_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists G, G \text{ è C.F.} : L = L(G).$$

Se G ha almeno una λ-produzione, utilizziamo il Lemma della stringa vuota per determinare una grammatica C.F. *G'* equivalente a G, ma priva di λ-produzioni (al più, in *G'* compare la produzione $S' \rightarrow \lambda$, ed *S'* non compare nella parte destra di alcuna produzione di *G'*). *G'* è di tipo '1'.

Questo dimostra che $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$.

Teorema della gerarchia

- $\mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1$

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$$

è di tipo '1' ma non di tipo '2'. Si osservi che, per asserire che *L* è di tipo '1', ci siamo avvalsi del teorema che stabilisce l'equivalenza delle classi di linguaggi contestuali e monotoni.

- $\mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_0$

Non lo dimostriamo formalmente. La dimostrazione comporta la conoscenza degli automi limitati lineari e delle macchine di Turing (che riconoscono linguaggi di tipo '0' o ricorsivamente enumerabili). Ci limitiamo ad osservare che $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$ discende direttamente dalle definizioni di linguaggio di tipo '1' e di grammatica di tipo '0'. *c.v.d.*

Operazioni sui linguaggi

- Siano L_1 ed L_2 due linguaggi definiti su uno stesso alfabeto X ($L_1, L_2 \subseteq X^*$).
  - *L'unione di L_1 ed L_2 è:*

$$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$$

  - *La concatenazione di L_1 ed L_2 (anche detta il prodotto di L_1 ed L_2 o "L_1 punto L_2") è:*

$$L_1 \cdot L_2 = \{w \mid w = w_1 w_2,\ \ w_1 \in L_1,\ \ w_2 \in L_2\}$$

  - L'*iterazione* di L_1 (o *chiusura riflessiva e transitiva* di L_1 rispetto all'operazione di concatenazione, anche detta *stellatura* di L_1 o "*L_1 star*" o *chiusura di Kleene*) è:

$$L_1^* = \{w \mid w = w_1 w_2 \ldots w_n,\ \ n \geq 0 \text{ e } \forall i : w_i \in L_1\}$$

Operazioni sui linguaggi

- Siano L_1 ed L_2 due linguaggi definiti su uno stesso alfabeto X ($L_1, L_2 \subseteq X^*$).
  - Il *complemento* di L_1 è:

$$\overline{L_1} = X^* - L_1$$

  - L'*intersezione* di L_1 ed L_2 è:

$$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$$

Proprietà

- Dati $L_1, L_2, L_3 \subseteq X^*$ $(\equiv L_1, L_2, L_3 \in 2^{X^*}$), risulta:
  - $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$ (proprietà associativa)
  - $L_1 \cdot L_2 \neq L_2 \cdot L_1$
  - $L_1 \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\} \cdot L_1 = L_1$ ($\{\lambda\}$ è l'elemento neutro rispetto all'operazione di concatenazione di linguaggi)

  Dunque anche $\left(2^{X^*}, \cdot\right)$ è un monoide;
  - $L_1 \cdot \varnothing = \varnothing \cdot L_1 = \varnothing$ ($\varnothing$ è l'elemento assorbente);
  - Se $\lambda \in L_1$ $\quad L_2 \subseteq L_1 \cdot L_2$, $\quad L_2 \subseteq L_2 \cdot L_1$
  - Se $\lambda \in L_2$ $\quad L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$, $\quad L_1 \subseteq L_2 \cdot L_1$

Esempio

Definizione di potenza di un linguaggio

- Sia L un linguaggio definito su un alfabeto X. Dicesi *potenza n-esima* di L, e si denota con L^n, $n \geq 0$, il seguente linguaggio:

$$L^n = \begin{cases} \{\lambda\} & \text{se } n = 0 \\ L^{n-1} \cdot L & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Posto:

$$L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$$

si ha:

$$L^* = \{\lambda\} \cup L^+ = L^0 \cup L^+ = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

Definizione di potenza di un linguaggio

- L^+ è detta chiusura transitiva rispetto alla operazione di concatenazione.
  Dunque si ha:

$$L^0 = \{\lambda\}$$

$$L^1 = L^0 \cdot L = L$$

$$L^2 = L^1 \cdot L = (L^0 \cdot L) \cdot L$$

$$L^3 = L^2 \cdot L = (L^1 \cdot L) \cdot L = \big((L^0 \cdot L) \cdot L\big) \cdot L$$

Proposizione

- Sia L un linguaggio definito su un alfabeto X. Si ha:

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i = \{\lambda\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$$

Esempio

Proprietà di chiusura delle classi di linguaggi

- Definizioni
  - L *linguaggio* definito su X $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $L \subseteq X^* \Leftrightarrow L \in 2^{X^*}$
  - $\mathcal{L}$ *classe di linguaggi* su X $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{L} \subseteq 2^{X^*} \Leftrightarrow \mathcal{L} \in 2^{2^{X^*}}$

Proprietà di chiusura delle classi di linguaggi

- Definizione di chiusura
  - Sia $\mathcal{L}$ una classe di linguaggi su *X*.

    Sia α un'operazione binaria sui linguaggi di $\mathcal{L}$:

    $$\alpha : 2^{X^*} \times 2^{X^*} \to 2^{X^*}, \qquad (L_1, L_2) \mapsto \alpha(L_1, L_2)$$

    Sia β un'operazione unaria sui linguaggi di $\mathcal{L}$:

    $$\beta : 2^{X^*} \to 2^{X^*}, \qquad L \mapsto \beta(L)$$

    $\mathcal{L}$ è *chiusa* rispetto ad α $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, L_1, L_2 \in \mathcal{L} : \alpha(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$

    $\mathcal{L}$ è *chiusa* rispetto a β $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, L_1 \in \mathcal{L} : \beta(L_1) \in \mathcal{L}$

- Esempio
  - $\mathcal{L}$ è chiusa rispetto all'iterazione se $\forall\, L_1 \in \mathcal{L} : L_1^* \in \mathcal{L}$

Teorema di chiusura

- La classe dei linguaggi di tipo i, $i = 0, 1, 2, 3$, è chiusa rispetto alle operazioni di *unione, concatenazione* ed *iterazione*.

  Dimostrazione

  La dimostrazione di questo teorema è *costruttiva*.

  Siano L_1 ed L_2 due linguaggi:

  $L_1 = L(G_1)$ $\qquad G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$

  $L_2 = L(G_2)$ $\qquad G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$

  Assumiamo che: $V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad S \notin V_1 \cup V_2$

  Poniamo: $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

  Nel caso in cui tale assunzione non sia vera, ridenominiamo i nonterminali in comune.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- Lo schema generale della dimostrazione è il seguente:
  - consideriamo un'operazione alla volta (denotata con α);
  - date G_1 e G_2, costruiamo G;
  - si dimostra che, se G_1 e G_2 sono di tipo i, allora G è di tipo i;
  - si dimostra che $L(G) = \alpha(L_1, L_2)$ e dunque la classe di linguaggi $\mathcal{L}_i$ è chiusa rispetto alla operazione α.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- UNIONE

Costruiamo la grammatica: $G_3 = (X, V, S, P_3)$ ove:

$$P_3 = \{S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

Osserviamo che, se G_1 e G_2 sono entrambe di tipo *i*, *i* = 0, 1, 2, lo è anche G_3. In ciascuno di questi casi, si ha:

$$L(G_3) = L_1 \cup L_2$$

Infatti una derivazione da *S* in G_3 deve necessariamente iniziare o con:

$S \Rightarrow S_1$ ed in tal caso può generare unicamente parole di $L(G_1)$ oppure con

$S \Rightarrow S_2$ ed in tal caso genera una parola di $L(G_2)$.

Dunque, risulta dimostrato che <u>$\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, sono chiuse rispetto all'unione</u>.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- UNIONE

  Però, se G_1 e G_2 sono di tipo '3', G_3 non è lineare destra, perché le produzioni $S \rightarrow S_1$ ed $S \rightarrow S_2$ non sono ammesse.

  Per avere ancora produzioni lineari destre che simulino il passo iniziale di una derivazione in G_1 ed anche il passo iniziale di una derivazione in G_2, costruiamo pertanto la grammatica: $G_4 = (X, V, S, P_4)$ ove:

$$P_4 = \{S \rightarrow w \mid S_1 \rightarrow w \in P_1\} \cup \{S \rightarrow w \mid S_2 \rightarrow w \in P_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

  G_4 è lineare destra se G_1 e G_2 lo sono e inoltre:

$$L(G_4) = L_1 \cup L_2$$

  ed <u>$\mathcal{L}_3$ è chiusa rispetto all'unione</u>.

Esempio

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

Costruiamo la grammatica: $G_5 = (X, V, S, P_5)$ ove:

$$P_5 = \{S \to S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

Osserviamo che, se G_1 e G_2 sono entrambe di tipo i, $i = 0, 1, 2$, lo è anche G_5.

Se G_1 e G_2 sono C.F. (tipo '2'), allora si ha:

$$L(G_5) = L_1 \cdot L_2$$

in quanto ogni derivazione da S in G_5 ha la seguente "struttura":

$$S \Rightarrow S_1 S_2 \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} w_1 S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} w_1 w_2$$

ove, evidentemente, si ha:

$$S_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \qquad\qquad S_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_2$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

  Il seguente controesempio mostra che la condizione che G_1 e G_2 siano di tipo '2' è fondamentale per la validità di

  $$L(G_5) = L_1 \cdot L_2$$

  Controesempio: Consideriamo G_1 con $P_1 = \{S_1 \to b\}$ e G_2 con $P_2 = \{bS_2 \to bb\}$. Da cui $L_1 = L(G_1) = \{b\}$ ed $L_2 = L(G_2) = \varnothing$

  Dunque $L_1 \cdot L_2 = \varnothing$

  Se costruiamo G_5, si ha: $P_{5*} = \{S \to S_1 S_2,\ S_1 \to b,\ bS_2 \to bb\}$

  ed $L(G_5) \neq \varnothing$ in quanto $S \underset{G_5}{\Rightarrow} bb$ attraverso la seguente derivazione:

  $$S \Rightarrow S_1 S_2 \Rightarrow bS_2 \Rightarrow bb$$

  Dunque la G_5 va bene solo per grammatiche di tipo '2' e risulta dimostrato che $\mathscr{L}_2$ è chiusa rispetto alla concatenazione.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

  La dimostrazione fatta non va bene per grammatiche di tipo ‘0’ e di tipo ‘1’, in quanto entrambe queste classi di grammatiche presentano produzioni dipendenti da contesto.

  In presenza di grammatiche di tali tipi è necessario impedire che le derivazioni da S_2 si servano di precedenti derivazioni da S_1 e/o viceversa. In altri termini, è necessario evitare interferenze tra derivazioni da S_1 e derivazioni da S_2 nella definizione dei contesti. È possibile ottenere ciò considerando copie distinte di X in derivazioni distinte (da S_1 e da S_2), in modo che nessun *NT* derivato da S_1 possa far uso di parte di una forma di frase derivata da S_2 come contesto per l’applicazione di una produzione (e viceversa).

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

Siano pertanto: $X' = \{x' \mid x \in X\}$ e $X'' = \{x'' \mid x \in X\}$

due copie distinte di *X* tali che:

$$X' \cap X'' = \varnothing \qquad X' \cap X = \varnothing \qquad X' \cap V = \varnothing$$

$$X'' \cap X = \varnothing \qquad X'' \cap V = \varnothing$$

e sia P_1' l'insieme delle produzioni ottenute da P_1 sostituendo ogni occorrenza di un terminale *x* in *X* con il corrispondente nonterminale x' in X':

$$P_1' = P_1\left[{x'}/{x}\right]$$

Similmente, sia P_2'' l'insieme delle produzioni ottenute da P_2 sostituendo ogni occorrenza di un terminale *x* in *X* con il corrispondente x'' in X'':

$$P_2'' = P_2\left[{x''}/{x}\right]$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

  In questo modo evitiamo l'interferenza tra contesti.

  Costruiamo ora la grammatica: $G_6 = (X,\ V \cup X' \cup X'',\ S,\ P_6)$

  ove: $P_6 = \{S \to S_1 S_2\} \cup P_1' \cup P_2'' \cup \{x' \to x \mid x \in X\} \cup \{x'' \to x \mid x \in X\}$

  Se G_1 e G_2 sono entrambe di tipo *i*, *i* = 0, 1, lo è anche G_6.

  Inoltre, si ha: $L(G_6) = L_1 \cdot L_2$

  Il controesempio visto in precedenza non dà più problemi:

  $$P_1' = \{S_1 \to b'\} \qquad\qquad P_2'' = \{b''S_2 \to b''b''\}$$

  e: $G_6 = (X,\ V \cup \{b'\} \cup \{b''\},\ S,\ P_6)$ dove:

  $$P_6 = \{S \to S_1 S_2,\ S_1 \to b',\ b''S_2 \to b''b'',\ b' \to b,\ b'' \to b\}$$

  ed $L(G_6) = \varnothing$ in quanto $S \overset{*}{\underset{G_6}{\not\Rightarrow}} bb$, $S \Rightarrow S_1 S_2 \Rightarrow b'S_2 \Rightarrow bS_2$

  Risulta così dimostrato che <u>$\mathcal{L}_0$ ed $\mathcal{L}_1$ sono chiuse rispetto alla concatenazione</u>.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

  È immediato osservare che, se G_1 e G_2 sono di tipo ‘3’ né G_5 né G_6 sono di tipo ‘3’, per la presenza della produzione $S \to S_1S_2$.

  Dobbiamo simulare l’effetto della produzione $S \to S_1S_2$, che determina la concatenazione delle parole generate da S_1 e da S_2. A tale scopo osserviamo che, data una grammatica di tipo ‘3’, ogni forma di frase derivata dal simbolo iniziale di tale grammatica ha due peculiarità:

  (1) in essa compare al più un NT

  (2) se in essa compare un NT, questo è il simbolo più a destra

$$\left(S \Rightarrow x_1A \Rightarrow x_1x_2B \overset{*}{\Rightarrow} x_1x_2x_3 \ldots x_nN \Rightarrow x_1x_2x_3 \ldots x_nx_{n+1} \right)$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

Modifichiamo pertanto ogni produzione del tipo $A \to b$ in G_1 in modo che essa non costituisca l'ultima produzione applicata in una derivazione da S_1 in G_1, ma possa innescare una derivazione da S_2 in G_2. Poniamo dunque a destra della *b* il simbolo iniziale S_2 di G_2.

Le produzioni del tipo $A \to b$ in G_1 vengono trasformate in: $A \to bS_2$. Costruiamo dunque la grammatica:

$$G_7 = (X,\ V - \{S\},\ S_1,\ P_7)$$

ove:

$$P_7 = \{A \to bB \mid A \to bB \in P_1\} \cup \{A \to bS_2 \mid A \to b \in P_1,\ b \neq \lambda\} \cup$$

$$\cup \{A \to bS_2 \mid A \to bB \in P_1,\ B \to \lambda \in P\} \cup \qquad (*)$$

$$\cup \{S_1 \to w \mid S_2 \to w \in P_2,\ S_1 \to \lambda \in P_1\} \cup \qquad (**)$$

$$\cup\, P_2$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- CONCATENAZIONE

  Le (*) e (**) sono state introdotte per garantire la correttezza della grammatica generata, anche in presenza di λ-produzioni in G_1.

  G_7 è di tipo '3' se G_1 e G_2 lo sono ed inoltre:

$$L(G_7) = L_1 \cdot L_2$$

  ed <u>$\mathcal{L}_3$ è chiusa rispetto alla concatenazione</u>.

$$\begin{aligned}
P_7 = &\{A \to bB \mid A \to bB \in P_1\} \cup \{A \to bS_2 \mid A \to b \in P_1,\ b \neq \lambda\} \cup \\
&\cup \{A \to bS_2 \mid A \to bB \in P_1,\ B \to \lambda \in P\} \cup && (*) \\
&\cup \{S_1 \to w \mid S_2 \to w \in P_2,\ S_1 \to \lambda \in P_1\} \cup && (**) \\
&\cup P_2
\end{aligned}$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE

  Costruiamo la grammatica:

  $$G_8 = (X,\ V_1 \cup \{S\},\ S,\ P_8)$$

  ove:

  $$P_8 = \{S \to \lambda,\ S \to S_1 S\} \cup P_1$$

  Data la grammatica $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ che genera L_1, la grammatica G_8 genera la parola vuota λ e tutte le parole che si possono ottenere per concatenazione di parole generate da S_1 in G_1. Si ha infatti:

  $$S \overset{n}{\underset{G_8}{\Rightarrow}} \underbrace{S_1 S_1 \ldots S_1}_{n} S \Rightarrow S_1 S_1 \ldots S_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2 \ldots w_n$$

  con: $w_i \in L_1,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE

  Vediamo per quali classi di grammatiche la G_8 è la grammatica che stiamo cercando:

  - se G_1 è di tipo '3', G_8 non è di tipo '3', perché non è lin. dx;
  - se G_1 è di tipo '2', G_8 è di tipo '2' e si ha: $L(G_8) = L_1^*$
    e risulta dimostrato che <u>$\mathcal{L}_2$ è chiusa rispetto all'iterazione.</u>
  - se G_1 è di tipo '1', G_8 non è di tipo '1', perché S compare nella parte destra della produzione $S \to S_1S$ ed $S \to \lambda$ è una produzione in P_8; possiamo trasformare facilmente G_8 nella grammatica equivalente G'_8, definita come segue:

    $$G'_8 = (X,\ V_1 \cup \{S, S'\},\ S,\ P'_8)$$

    $$P'_8 = \{S \to \lambda \mid S',\ S' \to S_1 \mid S_1S'\} \cup P_1$$

    ma G'_8 incorre nello stesso problema di interferenza nella definizione dei contesti visto per la concatenazione.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE

  Vediamo per quali classi di grammatiche la G_8 è la grammatica che stiamo cercando:
  - se G_1 è di tipo ‘0’, lo è anche G_8, ma si incorre nello stesso problema di interferenza nella definizione dei contesti visto nella dimostrazione per la concatenazione.

  Il problema dell’interferenza dei contesti, comune agli ultimi due casi - G_1 di tipo i, $i = 0, 1$ - esiste ancora come mostrato dal seguente controesempio:

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE

  Controesempio:

  Consideriamo G_1 con $P_1 = \{S_1 \to b,\ bS_1 \to bc\}$ allora $L_1 = L(G) = \{b\}$ e $L_1^* = \{b\}^*$

  Del resto: $P_8 = \left\{ S \overset{(1)}{\to} \lambda \mid \overset{(2)}{S'},\ S' \overset{(3)}{\to} S_1 \mid \overset{(4)}{S_1 S'},\ S_1 \overset{(5)}{\to} b,\ bS_1 \overset{(6)}{\to} bc \right\}$

  Se consideriamo la derivazione: $S \underset{(2)}{\Rightarrow} S' \underset{(4)}{\Rightarrow} S_1 S' \underset{(3)}{\Rightarrow} S_1 S_1 \underset{(5)}{\Rightarrow} bS_1 \underset{(6)}{\Rightarrow} bc$

  si ottiene che: $bc \in L(G_8')$ e quindi $L(G_8') \neq L_1^*$

  Il problema dell'interferenza dei contesti può essere quindi risolto come segue.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE
  Eliminiamo dapprima le produzioni del tipo $S_1 \rightarrow \lambda$
  Utilizziamo gli insiemi ausiliari X' e X'' di *NT* per evitare interferenze:

$$X' = \{x' \mid x \in X\} \qquad X'' = \{x'' \mid x \in X\}$$

$$X' \cap X'' = \varnothing \qquad X' \cap X = \varnothing \qquad X' \cap V_1 = \varnothing$$

$$X'' \cap X = \varnothing \qquad X'' \cap V_1 = \varnothing$$

- Costruiamo due copie di G_1:

$$G_1' = (X,\ V_1 \cup X',\ S_1,\ P_1')$$

$$G_1'' = (X,\ V_1 \cup X'',\ S_2,\ P_1'')$$

ove:

$$P_1' = P_1\left[{}^{x'}\!/_{x}\right] \qquad P_1'' = P_1\left[{}^{x''}\!/_{x}\right]$$

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE
  Infine, combiniamo G_1', G_1'' con produzioni che costruiscono sequenze finite di copie di S_1 ed S_2 che si alternano, in modo da ottenere L_1^*.
  Dunque, la grammatica che otteniamo è:
  $$G_9 = (X,\ V_1 \cup X' \cup X'' \cup \{S, S_1', S_2, S_2'\},\ S,\ P_9)$$
  ove:
  $$P_9 = \{S \to \lambda \mid S_1' \mid S_2',\ S_1' \to S_1 \mid S_1 S_2',\ S_2' \to S_2 \mid S_2 S_1'\} \cup$$
  $$\cup P_1' \cup P''_1 \cup \{x' \to x \mid x \in X\} \cup \{x'' \to x \mid x \in X\}$$
  Se G_1 è di tipo *i*, *i* = 0,1, lo è anche G_9 e si ha:
  $$L(G_9) = L_1^*$$
  e risulta dimostrato che <u>$\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}_1$ sono chiuse rispetto all'iterazione.</u>

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE
  Resta da dimostrare che $\mathcal{L}_3$ è chiusa rispetto all'iterazione.
  Per costruire la nuova grammatica, introduciamo dapprima un nuovo simbolo iniziale S e la produzione $S \rightarrow \lambda$ che genera la stringa vuota.
  Inoltre, eliminiamo da P_1, se c'era, la produzione $S_1 \rightarrow \lambda$ ed aggiungiamo una produzione $S \rightarrow w$ per ogni produzione "iniziale" $S_1 \rightarrow w$ in P_1.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE
  Infine, per ogni produzione la cui parte destra contiene solo un terminale, del tipo $A \to b$, <u>nell'insieme delle produzioni che stiamo costruendo</u>, aggiungiamo la produzione $A \to bS$ in modo che, avendo derivato una forma di frase del tipo $w_1 w_2 ... w'_j A$ tale che ogni sottostringa $w_1, w_2, ..., w_j = w'_j b$ è una parola di L_1, abbiamo la possibilità di terminare la derivazione con $w_1 w_2 ... w_j$ o di continuarla generando la forma di frase $w_1 w_2 ... w_j S$, che consente di generare una parola più lunga di L_1^*.

Dimostrazione Teorema di chiusura

- ITERAZIONE
  Si noti che, per garantire la correttezza della grammatica generata anche in presenza di λ-produzioni in G_1, occorre aggiungere una produzione $A \to bS$ per ogni produzione $A \to bB$ nell'insieme delle produzioni che stiamo costruendo, quando $B \to \lambda$ è pure una produzione di tale insieme, alla stregua di quanto fatto per la concatenazione in $\mathcal{L}_3$.
  Costruiamo dunque la grammatica: $G_{10} = (X,\ V_1 \cup \{S\},\ S,\ P_{10})$
  ove: $P_{10} = \{S \to \lambda\} \cup \left(P_1 - \{S_1 \to \lambda\}\right) \cup \{S \to w \mid S_1 \to w \in P_1\} \cup$

  $$\cup \{A \to bS \mid A \to b \in P_{10},\ b \neq \lambda\} \cup$$

  $$\cup \{A \to bS \mid A \to bB \in P_{10},\ B \to \lambda \in P_{10}\}$$

  Si noti che la definizione di P_{10} è ricorsiva. Se G_1 è di tipo '3', lo è anche G_{10} e si ha: $L(G_{10}) = L_1^*$
  e risulta dimostrato che $\mathcal{L}_3$ è chiusa rispetto all'iterazione.

Teorema di chiusura

- Per la loro importanza pratica, riassumiamo le modalità di costruzione delle grammatiche che generano i linguaggi *unione*, *concatenazione*, *iterazione* di L_1 ed L_2 nella Tavola che segue.

Teorema di chiusura

<table>
<tr><th></th><th>UNIONE</th><th>CONCATENAZIONE</th><th>ITERAZIONE</th></tr>
<tr><td>$\mathcal{L}_0$</td><td rowspan="3">$G_3 = (X, V, S, P_3)$
$P_3 = \{S \to S_1,\ S \to S_2\} \cup$
$\cup P_1 \cup P_2$</td><td rowspan="2">$X' = \{x' \mid x \in X\}$ $X'' = \{x'' \mid x \in X\}$
$X' \cap X'' = \varnothing$ $X' \cap X = \varnothing$ $X' \cap V = \varnothing$
$X'' \cap X = \varnothing$ $X'' \cap V = \varnothing$
$P_1' = P_1\left[{}^{x'}\!/_{x}\right]$ $P_2'' = P_2\left[{}^{x''}\!/_{x}\right]$
$G_6 = (X, V \cup X' \cup X'', S, P_6)$
$P_6 = \{S \to S_1S_2\} \cup P_1' \cup P_2'' \cup$
$\cup \{x' \to x \mid x \in X\} \cup$
$\cup \{x'' \to x \mid x \in X\}$</td><td rowspan="2">Eliminiamo le produzioni del tipo:
$S_1 \to \lambda$
$X' = \{x' \mid x \in X\}$ $X'' = \{x'' \mid x \in X\}$
$X' \cap X'' = \varnothing$ $X' \cap X = \varnothing$ $X' \cap V_1 = \varnothing$
$X'' \cap X = \varnothing$ $X'' \cap V_1 = \varnothing$
Costruiamo due copie di G_1:
$G_1' = (X, V_1 \cup X', S_1, P_1')$
$G_1'' = (X, V_1 \cup X'', S_2, P_1'')$
$P_1' = P_1\left[{}^{x'}\!/_{x}\right]$ $P_1'' = P_1\left[{}^{x''}\!/_{x}\right]$
$G_9 = (X, V_1 \cup X' \cup X'' \cup \{S, S_1', S_2, S_2'\}, S, P_9)$
$P_9 = \{S \to \lambda \mid S_1' \mid S_2',\ S_1' \to S_1 \mid S_1S_2',\ S_2' \to S_2 \mid S_2S_1'\} \cup$
$\cup P_1' \cup P_2' \cup \{x' \to x \mid x \in X\} \cup \{x'' \to x \mid x \in X\}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{L}_1$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{L}_2$</td><td>$G_5 = (X, V, S, P_5)$
$P_5 = \{S \to S_1S_2\} \cup P_1 \cup P_2$</td><td>$G_8 = \{X, V_1 \cup \{S\}, S, P_8\}$
$P_8 = \{S \to \lambda \mid S_1S\} \cup P_1$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{L}_3$</td><td>$G_4 = (X, V, S, P_4)$
$P_4 = \{S \to w \mid S_1 \to w \in P_1\} \cup$
$\cup \{S \to w \mid S_2 \to w \in P_2\} \cup$
$\cup P_1 \cup P_2$</td><td>$G_7 = (X, V - \{S\}, S_1, P_7)$
$P_7 = \{A \to bB \mid A \to bB \in P_1\} \cup$
$\cup \{A \to bS_2 \mid A \to b \in P_1,\ b \neq \lambda\} \cup$
$\cup \{A \to bS \mid A \to bB \in P_1,\ B \to \lambda \in P_1\} \cup$
$\cup \{S_1 \to w \mid S_2 \to w \in P_2,\ S_1 \to \lambda \in P_1\} \cup P_2$</td><td>$G_{10} = (X, V_1 \cup \{S\}, S, P_{10})$
$P_{10} = \{S \to \lambda\} \cup \left(P_1 - \{S_1 \to \lambda\}\right) \cup$
$\cup \{S \to w \mid S_1 \to w \in P_1\} \cup$
$\cup \{A \to bS \mid A \to b \in P_{10},\ b \neq \lambda\} \cup$
$\cup \{A \to bS \mid A \to bB \in P_{10},\ B \to \lambda \in P_{10}\}$</td></tr>
</table>

Altri teoremi di chiusura

- La classe dei linguaggi lineari destri (tipo ‘3’) è chiusa rispetto al complemento ed all’intersezione.
- La classe dei linguaggi non contestuali (tipo ‘2’) non è chiusa rispetto al complemento ed all’intersezione.
- La classe dei linguaggi contestuali (tipo ‘1’) è chiusa rispetto al complemento (e dunque anche rispetto all’intersezione).
- La classe dei linguaggi di tipo ‘0’ non è chiusa rispetto al complemento.

Dimostrazione

- La classe dei linguaggi lineari destri (tipo ‘3’) è chiusa rispetto al complemento ed all’intersezione.

  Dimostreremo prossimamente la chiusura di $\mathcal{L}_3$ rispetto al complemento. Dimostriamola rispetto all’intersezione:

  $$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$ (Leggi di De Morgan)

  La chiusura di $\mathcal{L}_3$ rispetto all’intersezione discende direttamente da questo risultato.

Dimostrazione

- La classe dei linguaggi non contestuali (tipo ‘2’) non è chiusa rispetto al complemento ed all’intersezione.

  Consideriamo i linguaggi
  $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m > 0\}$ $\qquad$ $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m > 0\}$
  L_1 e L_2 sono linguaggi liberi, mentre $L_1 \cap L_2$ non lo è:

  $$L_1 \cap L_2 = \{a^k b^k c^k \mid k > 0\}$$

  Il complemento è: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
  Dunque, se L_1, $L_2 \in \mathcal{L}_2$ e se $\mathcal{L}_2$ fosse chiusa rispetto al complemento, …

Dimostrazione

- La classe dei linguaggi contestuali (tipo ‘1’) è chiusa rispetto al complemento (e dunque anche rispetto all’intersezione).

  Un risultato recente ha stabilito che L_1 è chiusa rispetto al complemento (e quindi all’intersezione). Non se ne conosce la dimostrazione.
- La classe dei linguaggi di tipo ‘0’ non è chiusa rispetto al complemento.

  Non lo dimostriamo

L'operazione di riflessione

- Definizione di stringa riflessa
  Sia *w* una parola su un alfabeto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $w = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} x_{i_n}$. Dicesi *stringa riflessa* (o *riflessione*) di *w* la stringa

$$w^R = x_{i_n} x_{i_{n-1}} \ldots x_{i_2} x_{i_1}$$

- Operazione di riflessione
  Sia *w* una parola su un alfabeto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e sia w^R la stringa riflessa di *w*. L'operazione che trasforma *w* in w^R è detta *operazione di riflessione*.

L'operazione di riflessione

- Definizione di parola palindromica
  Un *palindromo* (o *parola palindromica*) è una parola la cui lettura a ritroso riproduce la parola di partenza:

$$w \text{ palindromo} \overset{def}{\Leftrightarrow} w = w^R$$

  Un palindromo è dunque una parola che coincide con la sua riflessione.

Esempio

- Alcuni palindromi sull'alfabeto $\{a, b, ..., z\}$ sono:
  - *a*;
  - *ii* (plurale di io?);
  - *non, ala, ara, ici*;
  - *osso, alla, arra*;
  - *radar, alalà, arerà* (ignorando l'accento);
  - *ossesso, ingegni*;
  - *avallava, ovattavo*;
  - *onorarono*;
  - *accavallavacca*, *accumolomucca*;
  - *feci nulla all'Unicef*, *ogni tela male tingo* (ignorando spazi bianchi, punteggiatura e differenza tra maiuscole e minuscole).

Palindromi

- I palindromi (su un qualunque alfabeto) sono di due tipi:
  - palindromi di lunghezza pari: hanno un “asse di simmetria” costituito dalla parola vuota
  - palindromi di lunghezza dispari: hanno un “asse di simmetria” costituito da uno dei simboli dell’alfabeto

- Più precisamente, si ha la seguente caratterizzazione (senza dimostrazione):

Teorema

- Sia *w* una parola su un alfabeto *X*. *w* è palindromo se e solo se

$$w = \alpha x \alpha^R, \ \ x \in X \cup \{\lambda\}$$

Teorema

- La classe dei linguaggi non contestuali (tipo ‘2’) è chiusa rispetto all’operazione di riflessione.

  Dimostrazione

  Sia $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ una grammatica non contestuale.
  Dobbiamo dimostrare che:

  $$L(G_1) \text{ non contestuale } \Rightarrow \left(L(G_1)\right)^R = \{w^R \mid L(G_1)\}$$

  è non contestuale.

  Costruiamo la grammatica: $G_{11} = (X, V_1, S_1, P_{11})$

  ove: $P_{11} = \{A \rightarrow w^R \mid A \rightarrow w \in P_1\}$

  Risulta allora: $L(G_{11}) = \left(L(G_1)\right)^R$

  Quindi se in $P_{\underline{1}}$ abbiamo la produzione: $A \rightarrow BaC$

  in $P_{\underline{11}}$ avremo la produzione: $A \rightarrow CaB$

Esercizi

Utilizzo proprietà di chiusura

Schema di Ragionamento per Utilizzo Proprietà di Chiusura	
Siano L, L_1 ed L_2 tre linguaggi tali che: $L = \alpha(L_1, L_2)$ ove $\alpha = \cup, \cdot$	
Esatto	***Errato***
Supponiamo che $L_2 \in \mathcal{L}_i$ Se $\mathrm{L} \notin L_i$ allora $\mathrm{L}_1 \notin L_i$	Se $\underset{j=1,2}{L_j} \notin \mathcal{L}_i$ allora $\mathrm{L} \notin \mathcal{L}_i$

Esempio: $\underset{n,m>0}{a^n b^m} = a^n b^n \cup \underset{n \neq m}{a^n b^m}$

Lineare dx Non sono lineari dx

Riferimenti

- Semeraro, G., Elementi di Teoria dei Linguaggi Formali, ilmiolibro.it, 2017 (http://ilmiolibro.kataweb.it/libro/informatica-e-internet/317883/elementi-di-teoria-dei-linguaggi-formali/).
  - Capitolo 5