TECNICHE DI ANALISI NUMERICA E SIMULAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Anno Accademico 2017/18

Presentazione del corso (1)

- Docente:

  Massimo Masera

  Dipartimento di Fisica Sperimentale

  Tel. 011 6707373 (Primo piano, Istituto vecchio)

  E-mail: masera@to.infn.it

  URL: http://www.to.infn.it/~masera

  Orario delle lezioni: tutti i giorni dalle 9 alle 11 in Aula Informatica B (se ci stiamo)

Dovremmo fare lezione nelle nuove aule informatiche al primo piano interrato… Tuttavia i lavori di sistemazione non sono stati ultimati e navigheremo a vista

http://personalpages.to.infn.it/~masera/

Massimo Masera

Dipartimento di Fisica
dell'Università di Torino
Tel. +39 011 6707373

CORSI

- Complementi di Elettromagnetismo
- Tecniche di Analisi Numerica e Simulazione
  - Materiale per esercizi
  - Documentazione sul C++
- Fisica Nucleare

Per accedere al materiale:

Username: tans09
Password: Bayes2009

RICERCA

- Esperimento ALICE al CERN
- Centro di Competenza sul Calcolo Scientifico (C^3S)

Presentazione del corso (2)

- 6 crediti: ~60 ore di lezione ed esercitazione al computer.
- Scopi del corso:
  - Interpretazione dei dati sperimentali: concetti di incertezza e probabilità
  - Simulazioni mediante metodi Monte Carlo
  - Strumenti statistici per l'analisi dei dati
  - Applicazioni al computer
    - *ambiente Unix: Linux, Mac OS X (no Windows)*
    - *uso di strumenti quali ROOT e programmi in C/C++ utilizzati nella Fisica delle Alte Energie*

Presentazione del corso (3)

- Prima approssimazione:
  - Questo non è un corso di programmazione
- Seconda approssimazione:
  - Visto che si userà il C++ e l'ambiente ROOT per la parte pratica, finiremo per (ri)vedere le basi del C++. L'approccio sarà comunque di tipo "bottom-up" (traduzione: "se ho questo problema come lo risolvo con il C++ e ROOT")
- L'effettivo programma da svolgere verrà definito strada facendo, come sempre
- Modalità di esame:
  - Prova orale sugli argomenti trattati a lezione
  - Esecuzione di una simulazione MonteCarlo (singoli o "gruppi" di 2 persone) da discutere all'esame
    - N.B. il programma, insieme a una **breve** relazione che lo illustri e presenti i risultati va consegnata qualche giorno prima dell'esame
- *Sono in debito con il prof. Ramello, che tiene un corso simile per finalità e contenuto al Dottorato di Ricerca in Fisica*

A proposito di C++ e ROOT

- In principio era il **Fortran**
  - Primo linguaggio ad alto livello: 1956
  - Versione più usata: Fortran 77 (ISO 1539:1980)
  - Ancora usato per il calcolo scientifico, anche se era (a torto) considerato superato quando ho cominciato gli studi universitari
  - L'ultima revisione dello standard è del 2008 (ISO/IEC 1539-1:2010)
- I limiti del Fortran per quanto riguarda il trattamento di grandi moli di dati e la nascita di nuovi paradigmi di calcolo, quali la programmazione ad oggetti, hanno portato all'adozione del **C++** nella Fisica, in particolare nella fisica delle alte energie, a partire dalla metà degli anni 90.
- Nel corso dell'ultimo decennio si è anche imposto l'uso di linguaggi più semplici e flessibili quali il Python in particolare per l'analisi dati

A proposito di C++ e ROOT

- Il C++ è nato come estensione del C (il primo nome era *C con classi*) a partire dal 1979 su iniziativa di Bjarne Stroustrup che lavorava ai Bell Laboratories.
- Nel 1985 B.S. pubblicò la prima edizione del *The C++ Programming Language*, un libro che in assenza di uno standard ufficiale servì come documentazione de facto di questo linguaggio.
- Il primo standard è il **C++98** (ISO/IEC 14882:1998)
- Una major revision del linguaggio è il **C++11** (ISO/IEC 14882:2011)
- Negli esempi userò il C++98, ma il C++11 è ormai supportato da tutti i compilatori e si sta imponendo come linguaggio di riferimento negli attuali progetti di calcolo che fanno riferimento al C++
- Il C++ è il terzo linguaggio di programmazione per diffusione, dopo il C e il Java
- **ROOT** è un framework di calcolo sviluppato al CERN a partire dalla fine degli anni 90 ad opera di Rene Brun e Fons Rademakers
- ROOT5 è il livello più avanzato del progetto originale e incorpora un interprete C++ sviluppato da Masaru Goto
- ROOT6 ha un interprete basato su Clang e LLVM, quindi più vicino allo standard del linguaggio C++.
- Le applicazioni descritte in questo corso dovrebbero funzionare sia con ROOT5 che con ROOT6

Presentazione del corso (4)

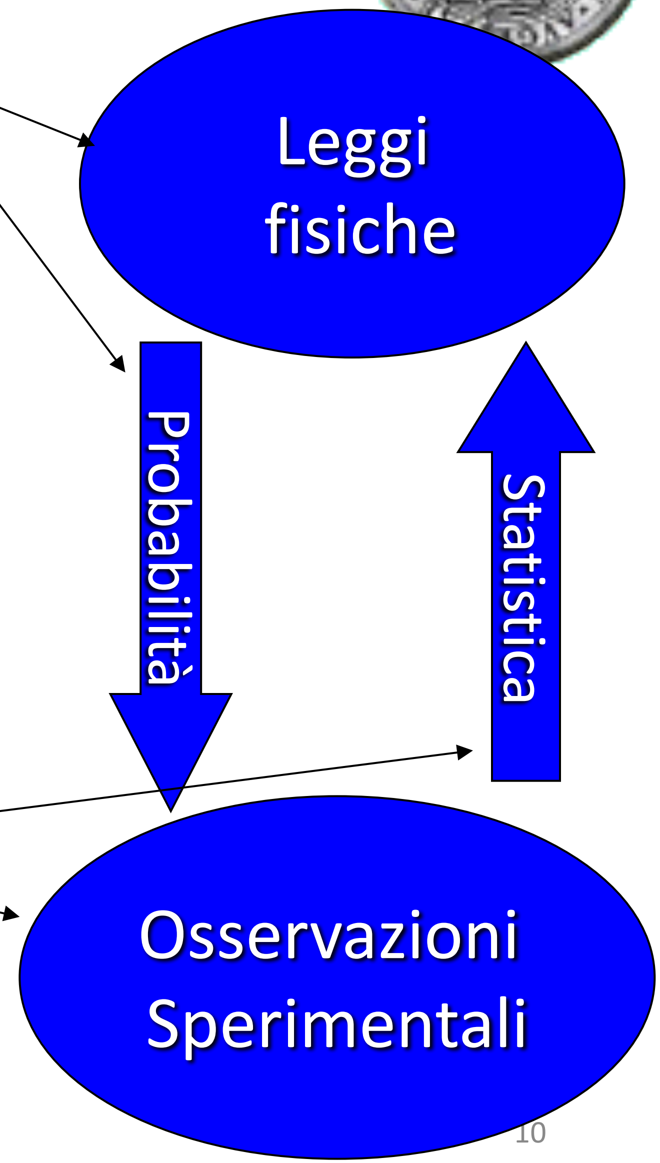
- (Iper)Testi di riferimento:
  - G. Cowan, *Statistical Data Analysis*, Clarendon, Oxford, 1998
  - Root: http://root.cern.ch
- Si vedano anche:
  - M.Loreti, *Teoria degli errori e fondamenti di statistica*, Decibel/Zanichelli 1998 (scaricabile da http://wwwcdf.pd.infn.it/labo/book.pdf)
  - L. Lyons, *Statistics for Nuclear and Particle Physics*, Cambridge Univ. Press 1986
  - F. James, *Monte Carlo Theory and practice*, Reports on Progress in Physics, **43**, 1145-1189 (1980)
  - C. Amsler et al. (Particle Data Group), Physics Letters B667, 1 (2008), capitoli 31 e 32, (http://pdg.lbl.gov)
  - W.H.Press et Al, *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*, 3^{rd} Edition, Cambridge Univ. Press 2007 (http://www.nr.com)
  - G. D'Agostini, *Bayesian reasoning in high-energy physics: principles and applications*, CERN 99-03 19 July 1999
  - D.S. Sivi, Data analysis – A Bayesian tutorial, second edition, Oxford 2006
  - G. Feldman, R. Cousins Unified approach to the classical statistical analysis of small signals, Phys. Rev. D57 (1998) 3873
  - S.Lippman, J. Lajole *C++ Primer* Third Edition, Addison Wesley 1998 (1236 pagine)

Introduzione

- "*The result of this experiment was inconclusive, so we had to use statistics*" …. *(L.Lyons, op. Cit.)*
- "*There are three kinds of lies: lies, damn lies and statistics*" (Benjamin Disraeli/Mark Twain)
- … In effetti, Lord Rutherford sosteneva che un buon esperimento non ha bisogno della statistica !
- Questo non è praticamente mai vero: la statistica è utilizzata in fisica principalmente per
  - per passare dai dati grezzi ai risultati finali
  - per confrontare i risultati con modelli e teorie
- Metodi probabilistico – statistici vengono usati infine per la <u>simulazione</u> degli apparati sperimentali mediante tecniche Monte Carlo

La manifestazione di leggi fisiche è caratterizzata da elementi probabilistici legati sia alla natura probabilistica delle leggi stesse sia alla risposta non deterministica degli apparati di misura.

La statistica viene usata, all'inverso, per effettuare stime di parametri, per quantificare le incertezze sulle misure e per effettuare test di ipotesi (i.e. validazione di modelli e teorie).
L'inferenza statistica non è facile da applicare e non fornisce sempre risposte univoche



Interpretazione dei dati

- In fisica si è affermato nel XX secolo l'approccio frequentista sia per quanto riguarda il concetto di probabilità sia per quanto riguarda l'interpretazione della misura
- Questo approccio è quello più usato ed è quello che viene tradizionalmente insegnato nei corsi del triennio
- Negli ultimi decenni, soprattutto grazie ad esperimenti che avevano come risultato limiti a processi fisici (e.g. decadimento del protone, rivelazione di monopoli magnetici) o fornivano risultati vicino ai limiti fisici (e.g. massa del neutrino) si è usato anche in fisica delle alte energie un approccio diverso, detto Bayesiano
- Il dibattito sui meriti e i limiti dei due approcci è tutt'altro che chiuso, come si vede dagli esempi delle slide successive

G. D'Agostini, "Telling the truth with statistics" CERN Academic Training – febbraio 2005

For example:

Frequentista

Bayesiano

- Why should one be allowed to state that "the interval 170–180 GeV contains the value of the top quark mass with a given probability",

  . . . but not that say that "the value of the top quark mass lies in that interval with the same probability"?

  ⇒ quite an odd ideology about what probability is! Aristotle would get mad. . .

  - So unnatural that essentially all teachers teach 'standard confidence intervals' as probability intervals (or this is, at least, what remains in the students minds – who will later become teachers, and the circle goes on).
  - And even statistics experts, when they have to transmit to the rest of the community the meaning of what they do, they have hard time in doing it ⟶ Slide

Why Isn't Everyone a Bayesian?

B. EFRON*

Originally a talk delivered at a conference on Bayesian statistics, this article attempts to answer the following question: why is most scientific data analysis carried out in a non-Bayesian framework? The argument consists mainly of some practical examples of data analysis, in which the Bayesian approach is difficult but Fisherian/frequentist solutions are relatively easy. There is a brief discussion of objectivity in statistical analyses and of the difficulties of achieving objectivity within a Bayesian framework. The article ends with a list of practical advantages of Fisherian/frequentist methods, which so far seem to have outweighed the philosophical superiority of Bayesianism.

KEY WORDS: Fisherian inference; Frequentist theory; Neyman–Pearson–Wald; Objectivity.

1. INTRODUCTION

The title is a reasonable question to ask on at least two counts. First of all, everyone used to be a Bayesian. Laplace wholeheartedly endorsed Bayes's formulation of the inference problem, and most 19th-century scientists followed suit. This included Gauss, whose statistical work is usually presented in frequentist terms.

A second and more important point is the cogency of the Bayesian argument. Modern statisticians, following the lead of Savage and de Finetti, have advanced powerful theoretical reasons for preferring Bayesian inference. A byproduct of this work is a disturbing catalogue of inconsistencies in the frequentist point of view.

Nevertheless, everyone is not a Bayesian. The current era is the first century in which statistics has been widely used for scientific reporting, and in fact, 20th-century statistics is mainly non-Bayesian. [Lindley (1975) predicts a change for the 21st!] What has happened?

... markable degree ... 1920 and 1935. NPW began ... 1933, asymptoting in the 1950s, though there have continued to be significant advances such as Stein estimation, empirical Bayes, and robustness theory.

Working together in rather uneasy alliance, Fisher and NPW dominate current theory and practice, with Fisherian ideas particularly prevalent in applied statistics. I am going to try to explain why.

3. FISHERIAN STATISTICS

In its inferential aspects Fisherian statistics lies closer to Bayes than to NPW in one crucial way: the assumption that there is a *correct* inference in any given situation. For example, if $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ is a random sample from a Cauchy distribution with unknown center θ,

$$f_\theta(x_i) = \frac{1}{\pi[1 + (x_i - \theta)^2]},$$

then in the absence of prior knowledge about θ the correct 95% central confidence interval for θ is, to a good approximation,

$$\hat{\theta} \pm 1.96 \Big/ \sqrt{-\ddot{l}_{\hat{\theta}}},$$

... optimal inference. In short, he does not have to think a lot about the specific situation in order to get on toward its solution.

Bayesian theory requires a great deal of thought about the given situation to apply sensibly. This is seen clearly in the efforts of Novick (1973), Kadane, Dickey, Winkler, Smith, and Peters (1980), and many others to at least partially automate Bayesian inference. All of this thinking is admirable in principle, but not necessarily in day-to-day practice. The same objection applies to some aspects of

*B. Efron is Professor, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305.

B.Efron, 1986

SUMMARY

FREQUENTIST METHODS STILL OFFER THE ONLY WAY TO PRESENT EXPERIMENTAL RESULTS OBJECTIVELY WITH THE USUAL SCIENTIFIC MEANING.

BUT

- BAYESIAN METHODS ARE GOOD FOR DECISION MAKING.
  DO PHYSICISTS MAKE DECISIONS?

- BAYESIAN METHODS ARE GOOD FOR BETTING
  DO PHYSICISTS MAKE BETS?

- BAYESIAN METHODS ARE GOOD WHEN THERE <u>IS</u> A PRIOR PROBABILITY OR PHASE SPACE
  MAXIMUM ENTROPY METHOD

- BAYESIAN METHODS ARE A GOOD WAY TO COMBINE NEW KNOWLEDGE WITH PRIOR BELIEFS.
  DO WE DO THIS?

Fred James,

CERN 2005

L'approccio bayesiano si è di fatto affermato in procedure quali l'identificazione di particelle (PID).
Tuttavia l'applicazione di tecniche bayesiane in fisica non è banale e la discussione continua, come si è visto nelle slide precedenti.
Continua anche nella vita quotidiana, come potete vedere sotto….

```
Date: Wed, 01 Oct 2008 13:30:39 -0400
From: Elena Bruna <bruna@rhig.physics.yale.edu>
To: Francesco Prino <prino@to.infn.it>,
    Sergey Senyukov <serhiy.senyukov@cern.ch>,
    Massimo Masera <masera@to.infn.it>
Subject: PID for Ds

Ciao Francesco, Sergey, Masera,

ho riflettuto un po' sul PID per la Ds (e anche per la D+ e D0, insomma in
generale).
Vi trascrivo qui sotto alcuni punti che mi sono sembrati importanti, dopo
averne discusso ieri con Helen.

Le prior probabilities mi sembrano oscure, piu' ci penso e piu' mi chiedo
quanto sia utile usarle. ho la sensazione di diventare sempre meno
bayesiana.
```

Esempi (1)

La produzione di un certo numero di eventi è regolata dalla distribuzione di Poisson con parametro incognito μ

$$P(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

La probabilità di osservare n=3 eventi dipende dal parametro μ:

μ=1.0 → P(3)=0.0613
μ=2.0 → P(3)=0.1804
μ=3.0 → P(3)=0.2240
μ=4.0 → P(3)=0.1954
....

Se si osserva n=3 che cosa si può dire su μ ?

Risposta:
Si può definire un intervallo fiduciale.
Ma su questo torneremo più avanti

Esempi (2)

Nel caso di un lancio di una moneta, si ha probabilità di avere Testa P(T)=0.5. Nel caso di una moneta truccata, con due Teste, la probabilità P(T) è naturalmente 1. Si possono immaginare casi intermedi per i quali, grazie all'abilità di chi lancia la moneta e/o grazie ad un'opportuna distribuzione del peso, si abbia P(T)≠P(C)

Supponiamo che una moneta sia lanciata 10 volte. Se si osserva la sequenza:

CCTCTCTTTC

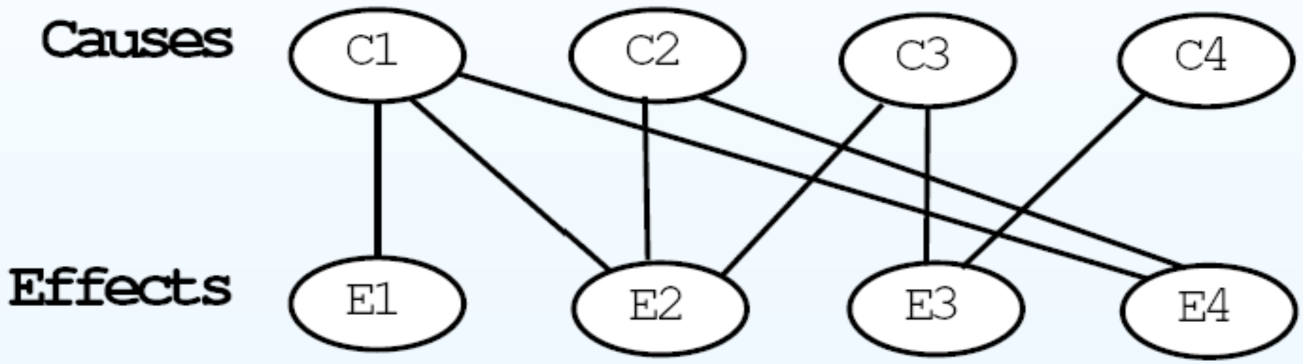
Che cosa si può dire sulla moneta?

E se si osserva: **TTTTTTTTTT** ?

Nel caso di lanci regolari di monete regolari, entrambe le sequenze hanno la medesima probabilità di venire osservate (2^{-10}), come del resto qualsiasi altra sequenza. Non si può quindi trarre alcuna conclusione <u>incontrovertibile</u> sulla regolarità della moneta dopo avere osservato una particolare sequenza di lanci. Le valutazioni di tipo inferenziale hanno sempre un grado di incertezza.

Causes $\longrightarrow$ effects

The same *apparent*† cause might produce several,different effects



Given an observed effect , we are not sure about the exact cause that has produced it.

$$\mathbf{E_2} \Rightarrow \{C_1,\, C_2,\, C_3\}?$$

The essential problem of the experimental method

"Now, these problems are classified as *probability of causes*, and are most interesting of all their scientific applications. I play at *écarté* with a gentleman whom I know to be perfectly honest. What is the chance that he turns up the king? It is 1/8. This is a problem of the *probability of effects*.

I play with a gentleman whom I do not know. He has dealt ten times, and he has turned the king up six times. What is the chance that he is a sharper? This is a problem in the probability of causes. It may be said that it is the essential problem of the experimental method."

(H. Poincaré – *Science and Hypothesis*)

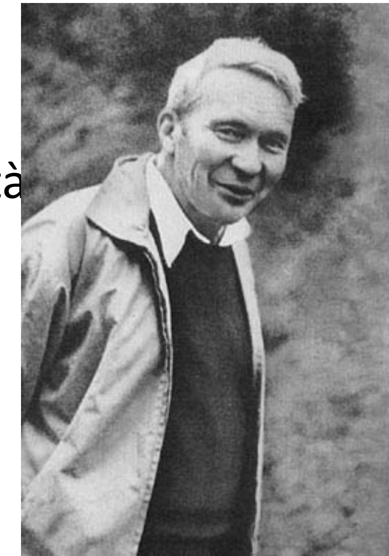
Probabilità (1)

Definizione assiomatica

Sia ***S*** un insieme (spazio campione $\leftrightarrow$ evento certo) con sottoinsiemi ***A,B***,... (***A*** $\leftrightarrow$ evento). La probabilità è una funzione reale che obbedisce ai seguenti assiomi, proposti da Kolmogorov nel 1933

$$\begin{cases} \forall \ A \subset S, \quad 0 \le P(A) \le 1 \\ P(S) = 1 \\ Se \quad A \cap B = \varnothing, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

Da questi assiomi si possono derivare altre proprietà della probabilità quali:



Probabilità (2)

Proprietà:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup \overline{A}) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$Se \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilità condizionata: ***P(A|B)*** indica la probabilità di osservare ***A***, posto che si sia verificato ***B***

Probabilità (3)

$$P(A) \equiv P(A \mid S) = P(A \cap S)$$
$$= P\left[A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right]$$
$$= P\left[\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right]$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

S è lo spazio campione, che ha probabilità unitaria, pari a quella dell'unione tra un evento ***B*** e la sua negazione

Questa è la probabilità che ***A*** e ***B*** si verifichino contemporaneamente, normalizzata all'intero spazio campione

$$\left.\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B \mid A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A \mid A) = P(B \mid B) = 1$$

P(A) e ***P(B)***$\neq 0$

Per definire la probabilità condizionata, la normalizzazione è rispetto all'evento ***B***

Il teorema di Bayes

Dalle relazioni precedenti: $\boxed{P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A) = P(A \cap B)}$

$P(A|B) > P(A) \quad \Rightarrow A \text{ e } B$ positivamente correlati

$P(A|B) < P(A) \quad \Rightarrow A \text{ e } B$ negativamente correlati

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}}$$

Rev. Thomas Bayes (1702-1761)

Eventi indipendenti: $P(A|B) = P(A) \quad e \quad P(B|A) = P(B)$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)}$$

Indipendenti non significa disgiunti: $A \cap B = \varnothing$

Legge delle probabilità totali

$$A_i \subset S, \quad \forall i \neq j \quad \left(A_i \cap A_j\right) = \varnothing$$

$$\cup_i A_i = S$$

$$Se \quad B \subset S \quad \Rightarrow \quad B = B \cap S = B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$$

$$P(B) = P\left[\cup_i (B \cap A_i)\right] = \sum_i P(B \cap A_i) \quad visto \quad che \quad (B \cap A_i) \quad sono\ disgiunti$$

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$ *Legge delle probabilità totali*

Il teorema di Bayes diventa:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

Interpretazione:

A: ipotesi da testare

A_i: ipotesi alternative

B: evento osservato

Interpretazione della probabilità (1)

Definizione "classica" (Laplace): Rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili, purché siano <u>ugualmente probabili</u>

Definizione frequentista (R. von Mises 1883-1953): Sia f(A;N)=n/N la frequenza relativa con cui un evento si è presentato in un numero totale N di casi reali:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f(A;N)$$

Questa definizione è consistente con gli assiomi di Kolmogorov ed è piuttosto naturale in molti casi fisici, laddove ha senso parlare di esperimenti ripetuti.

Difetti:

- E' basata su di un esperimento
- Si presuppone a priori la convergenza della frequenza relativa
  - In effetti, il limite non converge in generale nel senso che l'analisi dà a questo termine:

$$\cancel{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : N > M \Rightarrow \quad | f(A;N) - P(A) | < \varepsilon}$$

Interpretazione della probabilità (2)

La convergenza è di tipo debole o stocastico:

$$\forall\ \varepsilon,\delta > 0 \quad \exists M: \quad N > M \Rightarrow P\left[\,|\, f(A;N) - P(A)\,| \geq \varepsilon\right] \leq \delta$$

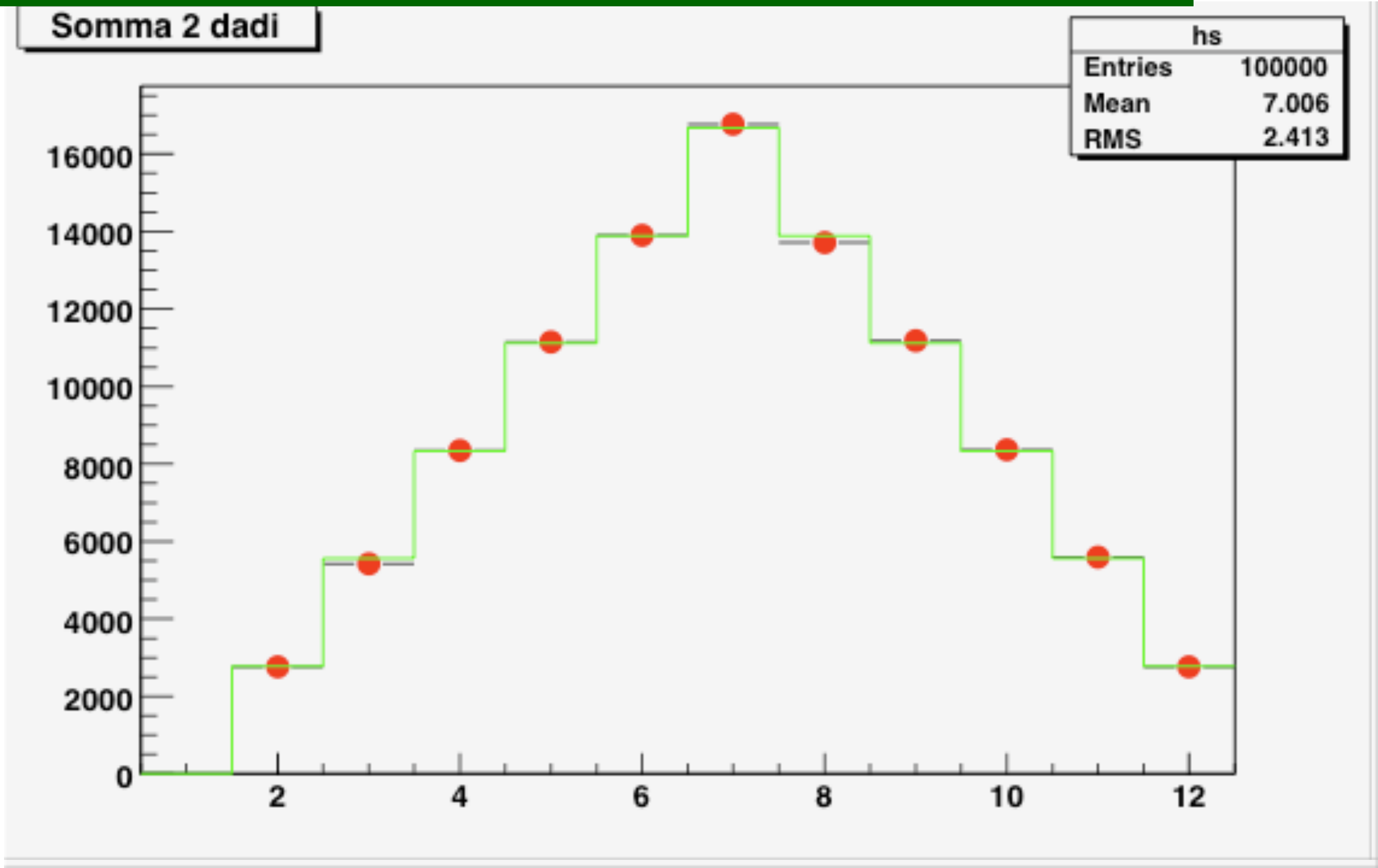
Con N,M naturali e ε,δ reali.

La legge dei grandi numeri afferma che la frequenza relativa di qualunque evento casuale converge stocasticamente alla sua probabilità all'aumentare del numero delle prove

Esempio

Talvolta, la probabilità è calcolabile a priori. Ad esempio nel caso del lancio di 2 dadi, si valuta la probabilità di ottenere un numero come somma dei 2. In verde: frequenza attesa, in rosso frequenza assoluta dopo N prove. Esempio di simulazione Monte Carlo (con Root)

L'inferenza statistica, per piccoli campioni può essere problematica !!!



Interpretazione della probabilità (3)

Definizione di probabilità soggettiva (o bayesiana):

A, ***B***, ... sono ipotesi (→ Spazio delle ipotesi), ossia affermazioni, mutuamente esclusive, che possono essere vere o false.

P(A) è il grado di fiducia (***degree of belief***) che ***A*** sia vero

Questa definizione soddisfa gli assiomi di Kolmogorov

Per quanto l'interpretazione in termini di frequenza sia spesso più naturale, la probabilità soggettiva consente di trattare fenomeni non ripetibili, a titolo di esempio:

- Errori sistematici (la ripetizione della misura non giova...)
- Che una particella in un certo evento sia un K^+
- Che la Natura sia supersimmetrica
- Che pioverà dopodomani (evento futuro incerto)
- Che sia piovuto a Passerano Marmorito il 3 Settembre 1704 (evento passato incerto)

Interpretazione della probabilità (4)

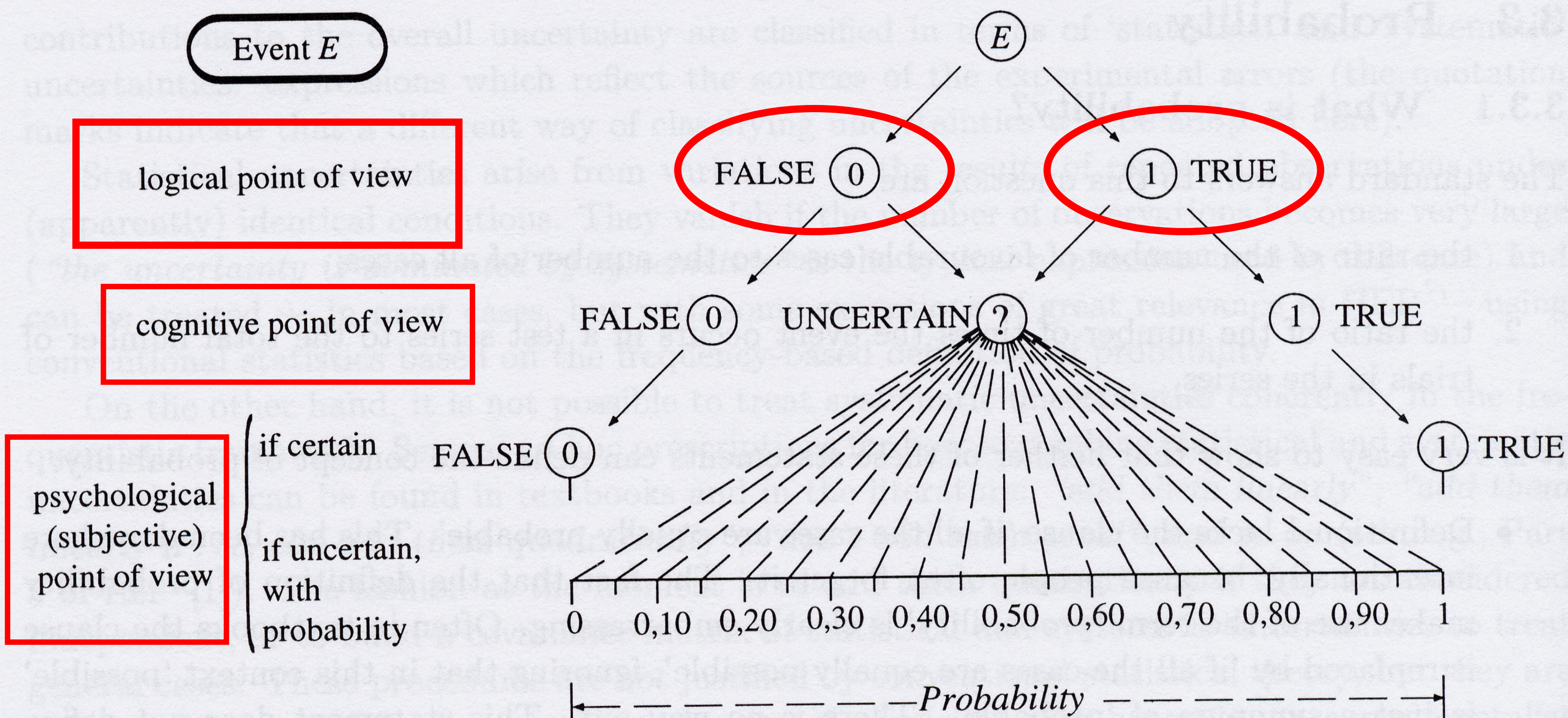


Figure 3.1: Certain and uncertain events [28].

R. D'Agostino, Op. Cit.

Interpretazione della probabilità (5)

- La definizione soggettiva della probabilità è adottata dagli statistici bayesiani. La legge di Bayes può essere scritta come (cfr. slide pag. 20)

$$P(teoria \mid dati) \propto P(dati \mid teoria) \times P(teoria)$$

- Dove:
  - P(dati | teoria) è la probabilità di osservare il dato effettivamente riscontrato posto che la teoria sia valida (***likelihood***)
  - P(teoria) è la probabilità a priori (***prior***) che la teoria sia valida e riflette lo stato delle conoscenze prima della misura. E’ una valutazione soggettiva dello sperimentatore che viene calibrata sulla base delle informazioni disponibili.
  - P(teoria|dati) è la probabilità ***a posteriori*** che la teoria sia valida alla luce dei nuovi dati

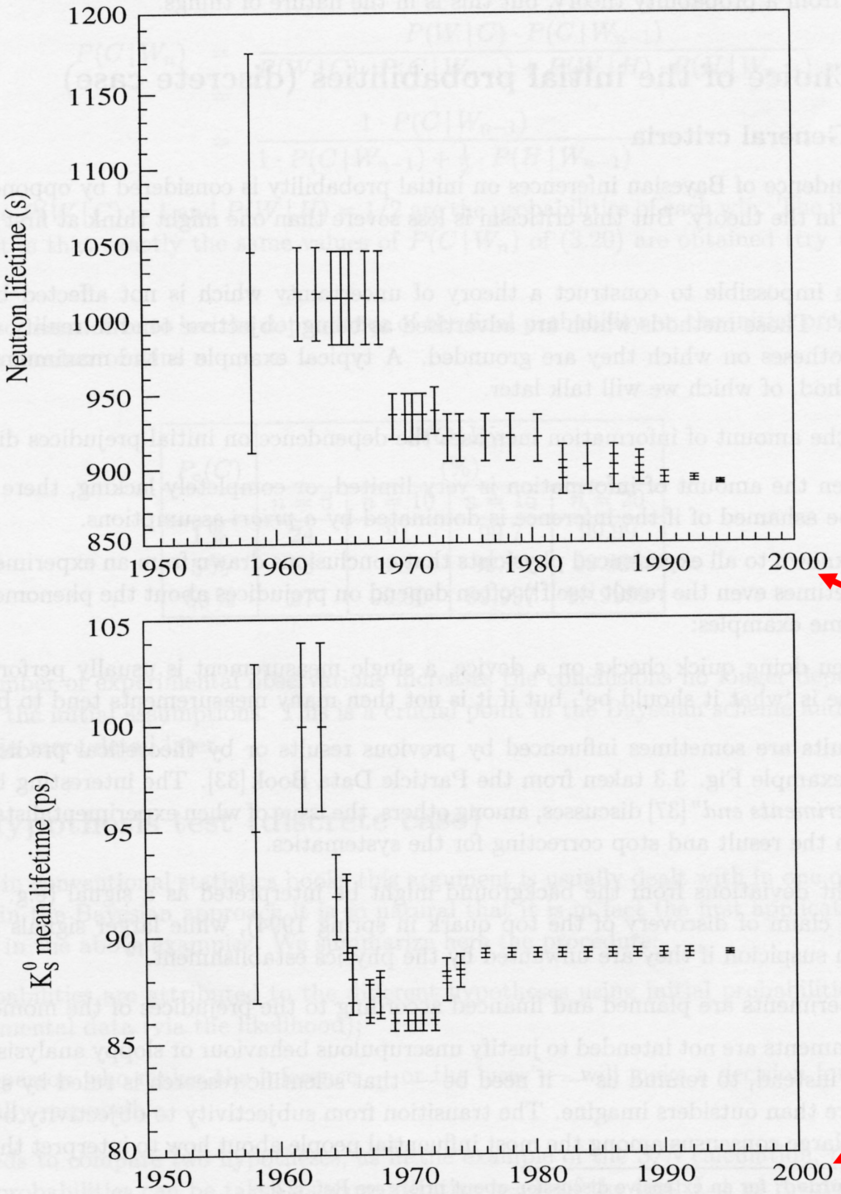


Figure 3.3: Results on two physical quantities as a function of the publication date.

Le valutazioni di grandezze fisiche sono di fatto spesso influenzate da risultati precedenti o da predizioni teoriche.
Esempio tratto dal
Particle Data Book (1994)

Anno di Pubblicazione
Misure di vita media

Interpretazione della probabilità (6)

- I sottoinsiemi dello spazio campione possono essere interpretati come ipotesi, ossia affermazioni che possono essere vere o false
- L'affermazione: "il bosone W ha massa tra 80.3 e 80.5 GeV/c^2" è nell'approccio classico o sempre vera o sempre falsa; ha probabilità 0 o 1.
- Nell'approccio soggettivista (bayesiano) ha invece senso un'espressione quale

$$P(80.3 \leq M_W \leq 80.5\ GeV/c^2)=0.68$$

Esempio di interpretazione della probabilità

Supponiamo che per una persona qualsiasi, la **probabilità a priori** di avere una malattia sia (Esempio tratto da G. Cowan, i valori riportati sotto sono fittizi):

P(malattia)=0.001 e quindi P(NO malattia)=0.999

I possibili esiti di un test sono **+** o **-**:

- P(+|malattia)=0.98 (identificazione corretta) P(-|malattia)=0.02 (falso negativo)
- P(+|NO malattia)=0.03 (falso positivo) P(-|NO malattia)=0.97 (ident. OK)

Se il risultato del test di una persona è +, quanto deve preoccuparsi?

$$P(malattia \mid +) = \frac{P(+ \mid malattia)P(malattia)}{P(+ \mid malattia)P(malattia) + P(+ \mid NO\, malattia)P(NO\, malattia)}$$

$$P(malattia \mid +) = \frac{0.98 \times 0.001}{0.98 \times 0.001 + 0.03 \times 0.999} = 0.032$$

Esempio di interpretazione della probabilità

La probabilità a posteriori è 0.032 (>> 0.001, ma anche <<1).

Il punto di vista della persona (***soggettivo***): il mio grado di *fiducia* di essere malato è del 3.2% → esprime un degree of belief

Il punto di vista del medico (***frequentista***): il 3.2% di persone come questa sono malate

Morale.... Un test che funziona nel 98% e ha il 3% di falsi positivi va usato con cautela: l'affidabilità dei test di screening di massa deve essere molto alta. In caso contrario vanno usati su persone per le quali la *probabilità a priori* sia diversa da quella della popolazione generale