DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Nelle slides che seguono sono richiamate le definizioni delle più comuni funzioni densità di probabilità.

Per le dimostrazioni cfr. un qualsiasi testo di probabilità e statistica (e.g. Loreti, Galeotti, etc.)

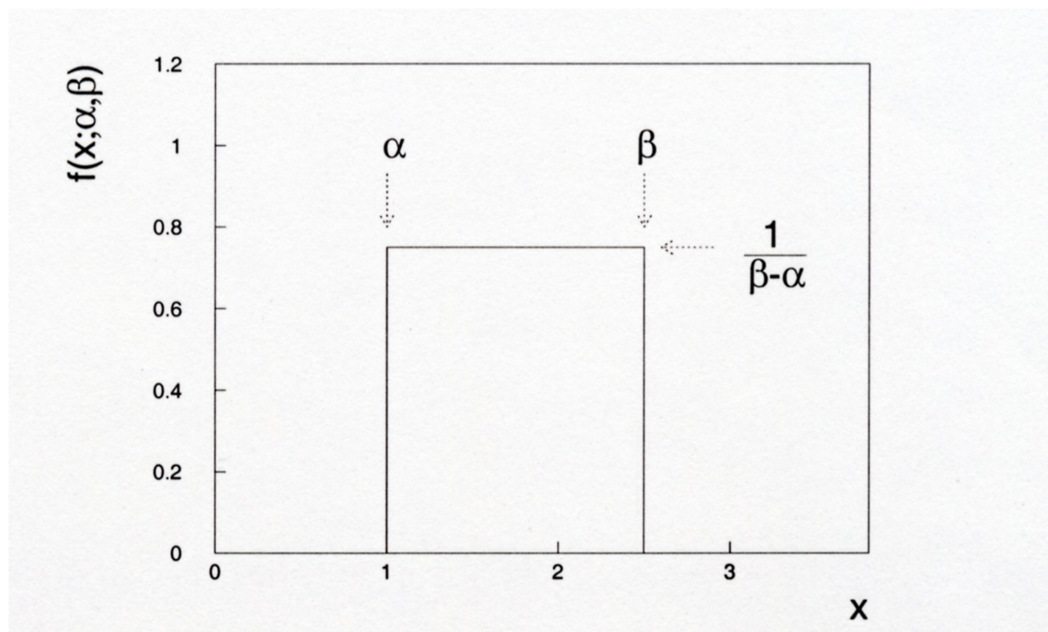
Distribuzione uniforme

Una variabile aleatoria reale x è distribuita uniformemente su di un intervallo reale [α,β] se:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$\mu=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sigma^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$



Distribuzione uniforme

Per una qualsiasi variabile aleatoria con densità di probabilità *f(x)* e distribuzione integrale *F(x),* la variabile **y=F(x) ha distribuzione uniforme nell'intervallo [0,1].**

Infatti F(x) ha valori tra 0 e 1 e ha densità di probabilità *g(y)=1*:

$$y \equiv F(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(x)\left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1} = 1 \qquad (0 \le y \le 1)$$

Questa è una proprietà estremamente importante perché fornisce il mezzo per ottenere numeri casuali con densità di probabilità *f(x)* a partire da numeri casuali distribuiti uniformemente → metodi Monte Carlo

Distribuzione binomiale (1)

Si considerino *N* prove indipendenti (bernoulliane) che possano portare ciascuna ad un risultato S (successo) con probabilità *p*.

q=1-p è la probabilità di non ottenere S. Il numero di combinazioni che portano a *n* successi su *N* prove è

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\left(N-n\right)!}$$

La probabilità di ottenere quindi *n* successi in *N* prove è

$$f(n;N,p) = \frac{N!}{n!\left(N-n\right)!} p^n \left(1-p\right)^{\left(N-n\right)}$$

Questa è una distribuzione binomiale nella v.a. discreta *n* con parametri *N* e *p*

Distribuzione binomiale (2)

Sia *y* il numero di volte in cui S si verifica in una prova (*y*=0 ,1):

$$\boxed{\begin{aligned} E\left[y\right] &= 1\times p+0\times q=p \\ E\left[y^2\right] &= p \\ V\left[y\right] &= E\left[y^2\right]-E\left[y\right]^2=p-p^2=pq \end{aligned}}$$

Utilizzando la v.a. ausiliaria *y*, il numero *n* di successi su *N* prove è

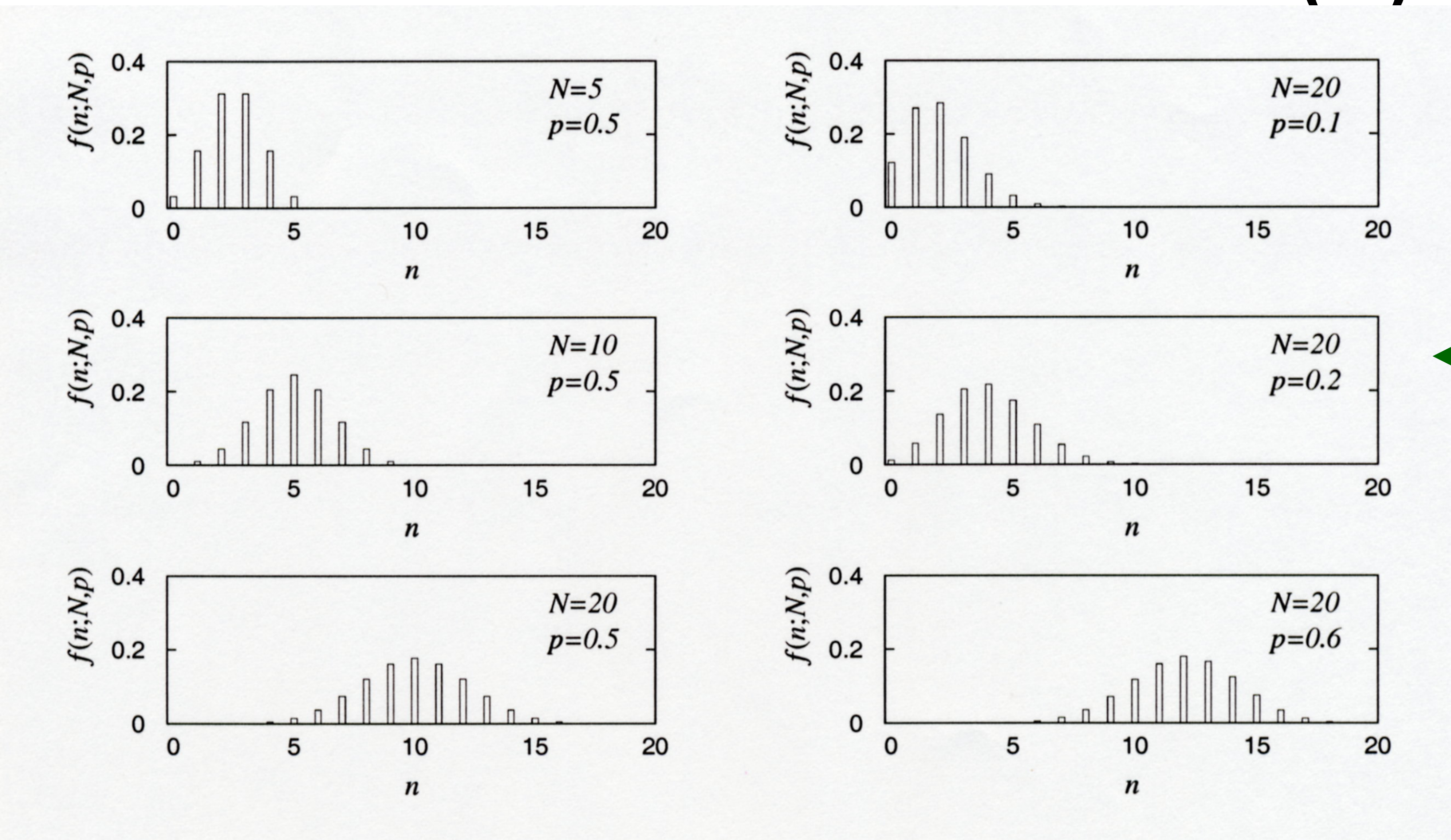
$$n=\sum_{i=1}^{N} y_i$$

La media e la varianza della binomiale si possono esprimere come:

$$\mu_n \equiv E[n]=E\left[\sum_{i=1}^{N} y_i\right]=\sum_{i=1}^{N} E\left[y_i\right]=Np$$

$$\sigma_n^2=V\left[\sum_{i=1}^{N} y_i\right]=\sum_{i=1}^{N} V\left[y_i\right]=Npq$$

Distribuzione binomiale (3)



Esempi di binomiale

Applicazione: si osservano N decadimenti di J/ψ , di cui n sono $J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$. Il numero n ha distribuzione binomiale e p è il "***branching ratio***" della J/ψ in μ+μ-.

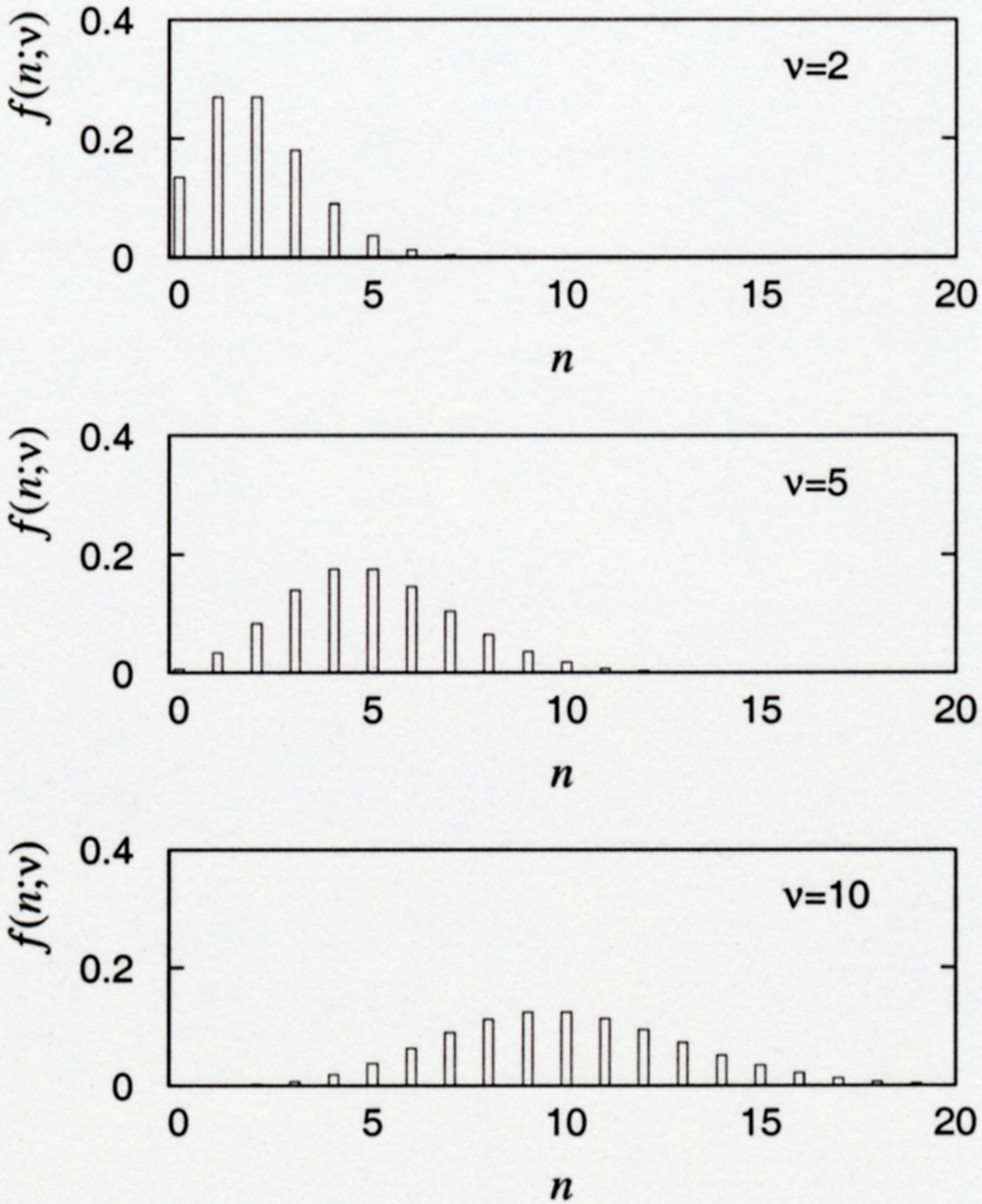
Distribuzione di Poisson

La distribuzione binomiale, nel limite di infinite prove ($N \rightarrow \infty$) e di $p \rightarrow 0$, con $\mu = Np \rightarrow \nu$ tende a

$$f(n;\nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \sigma_n^2 = \nu$$

Rappresenta la probabilità che si verifichino esattamente *n* eventi in un intervallo *x* (spesso di tempo) posto che questi siano indipendenti ed abbiano tasso medio ν. Ad esempio la probabilità di osservare *n* decadimenti in una massa nota di sostanza radioattiva in un tempo *t*



Esempi
Di
poissoniana

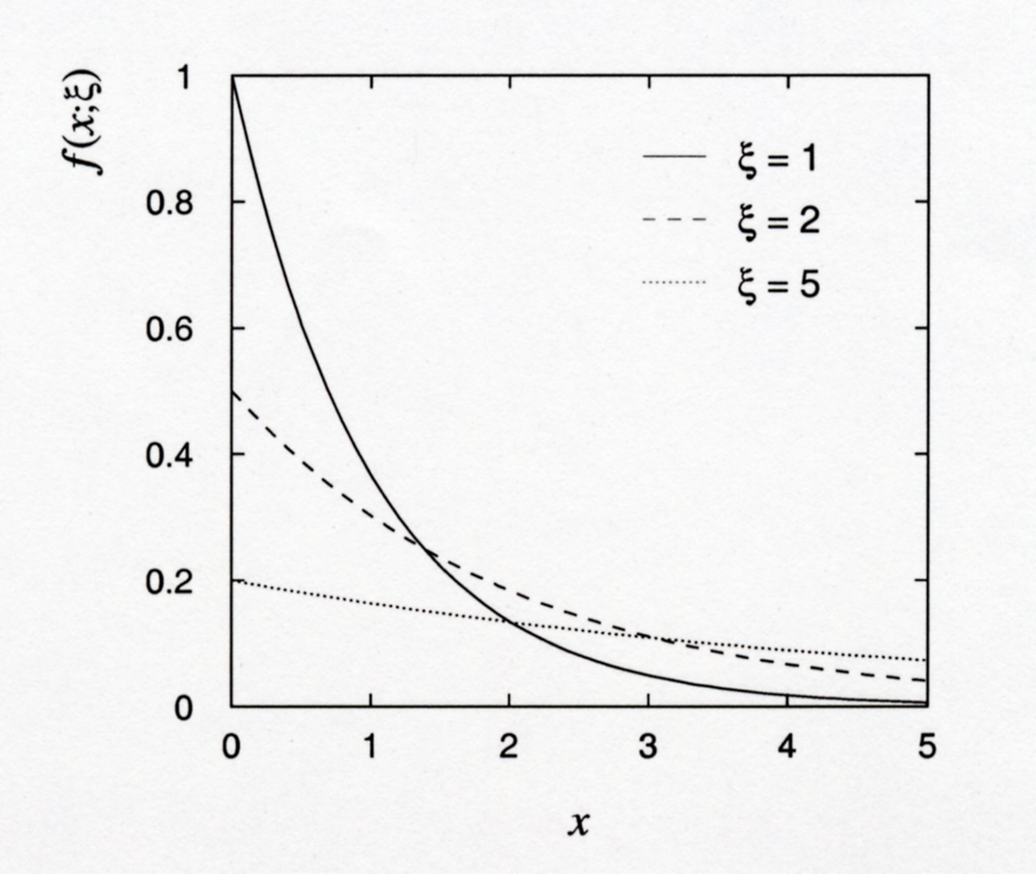
Distribuzione esponenziale

La distribuzione esponenziale è tipica dei processi di decadimento ed è caratterizzata da un unico parametro che coincide con il valor medio.

$$f(x;\xi) = \frac{1}{\xi} e^{-\frac{x}{\xi}} \qquad x \geq 0$$

$$\mu = \frac{1}{\xi}\int_0^\infty x\, e^{-\frac{x}{\xi}} dx = \xi$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\xi}\int_0^\infty (x-\xi)^2 e^{-\frac{x}{\xi}} dx = \xi^2$$



Distribuzione normale

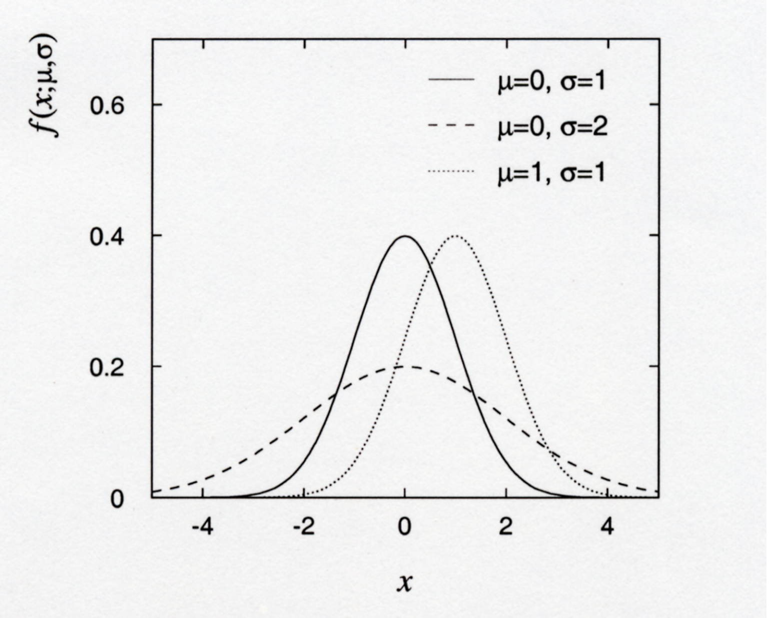
La distribuzione normale (o di Gauss) per la v.a. continua x, con valor medio μ e varianza σ^2, è definita da:

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2 parametri

normalizzazione

Caso particolare: normale ridotta.
μ=0 e σ=1



Teorema del limite centrale

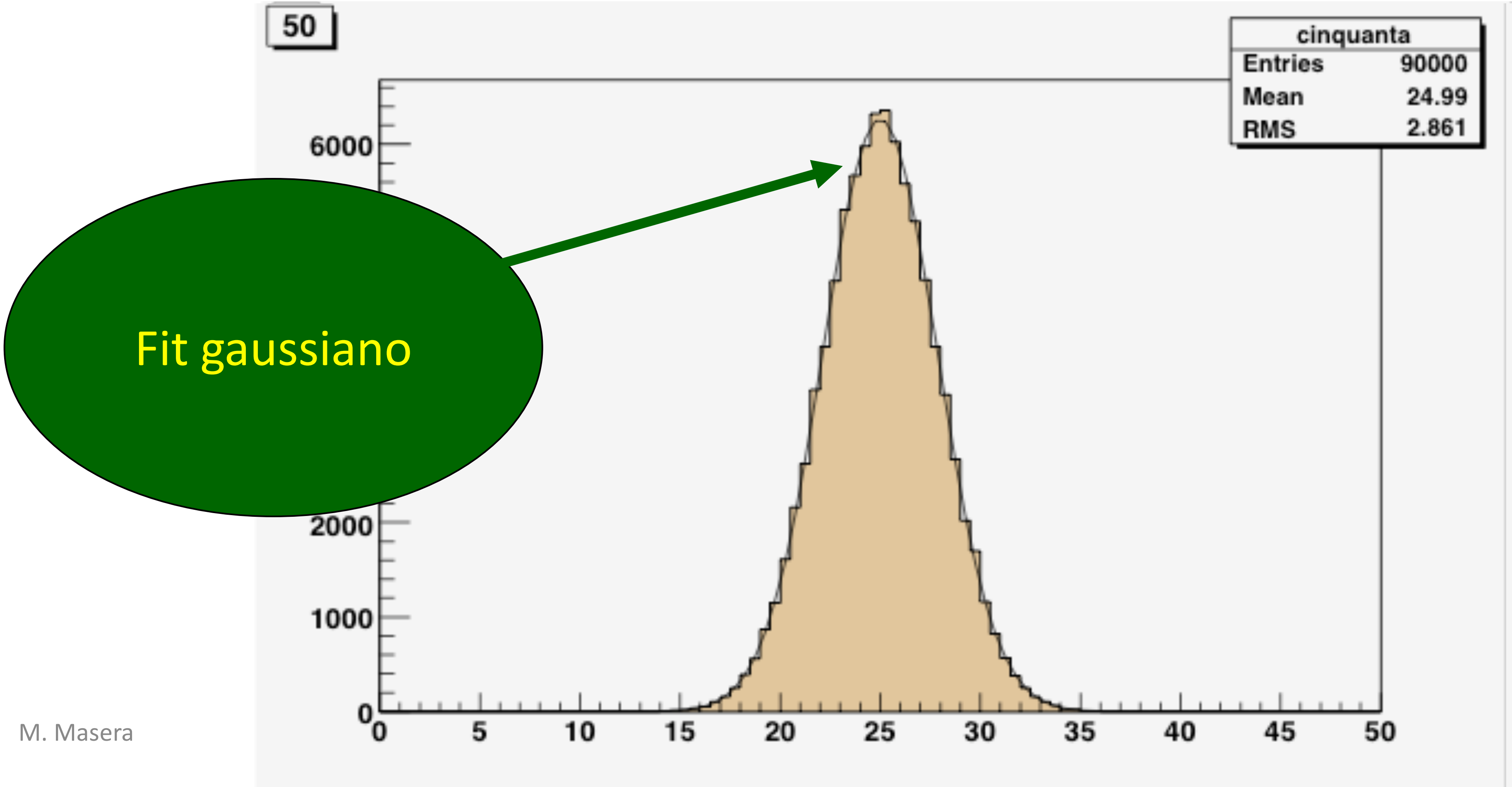
La somma di n variabili aleatorie indipendenti x_i, dotate di densità di probabilità arbitrarie con media e varianza finite, segue una densità di probabilità gaussiana, nel limite di $n \rightarrow \infty$

$$E\left[y = \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$V[y] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

⚠ Il prodotto di n variabili aleatorie non è gaussiano, ma il suo logaritmo sì

Teorema del limite centrale: esempio con somma di distribuzioni che seguono una densità uniforme su un dominio non connesso.



❖ Come conseguenza del teorema del limite centrale, la distribuzione di Gauss si applica a tutti quei fenomeni che sono somma di diversi contributi indipendenti, come accade di solito nel caso degli errori statistici di misura.

❖ Per n finito, il teorema è una buona approssimazione se non ci sono termini della somma dominanti

❖ Approssimazione accettabile: deflessione per diffusione multipla coulombiana di una particella. Singole interazioni danno occasionalmente luogo a diffusioni grandi che producono *code* non gaussiane

❖ Approssimazione non accettabile: perdita di energia di una particella carica in un mezzo → distribuzione di Landau

Funzioni caratteristiche / 1

La funzione caratteristica $\phi_x(k)$ di una variabile aleatoria x con densità di probabilità $f(x)$ è definita come:

$$\phi_x(k) = E\left[e^{ikx}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x)dx$$

che è a meno di una costante moltiplicativa la *trasformata di Fourier* di $f(x)$.

La densità di probabilità può essere ottenuta dalla funzione caratteristica attraverso la trsformata inversa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \phi_x(k)dk$$

La conoscenza della funzione caratteristica è equivalente a quella della densità di probabilità.

Funzioni caratteristiche / 2

La conoscenza della funzione caratteristica consente di determinare i momenti della variabile aleatoria per derivazione invece che per integrazione:

$$\left.\frac{d^m \phi_x(k)}{dk^m}\right|_{k=0} = \left.\frac{d^m}{dk^m}\int e^{ikx} f(x)dx\right|_{k=0}$$

$$= i^m \int x^m f(x)\, dx = i^m E\left[x^m\right]$$

$$E\left[x^m\right] = (-i)^m \left.\frac{d^m \phi_x(k)}{dk^m}\right|_{k=0}$$

Funzioni caratteristiche / 3

Ad esempio, per la distribuzione gaussiana la funzione caratteristica è
$\phi_x(k) = e^{\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)}$
Da cui si ricava:

$$E[x] = -i \left. \frac{d}{dk} e^{\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)} \right|_{k=0} = \mu$$

e
$$V[x] = E\left[x^2\right] - E^2[x]$$

$$= - \left. \frac{d^2}{d^2 k} e^{\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)} \right|_{k=0} - \mu^2$$

$$= -\left(-\sigma^2 - \mu^2\right) - \mu^2 = \sigma^2$$

Funzioni caratteristiche / 4

Teorema dell'addizione

La funzione caratteristica della somma di n variabili aleatorie indipendenti $x_1, x_2, ..., x_n$ (con dens. di prob. $f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n)$) è data dal prodotto delle funzioni caratteristiche individuali $\phi_1(k), \phi_2(k), ..., \phi_n(k)$

Infatti, se $z = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$, la funzione caratteristica per z è

$$\phi_z(k) = \int ... \int \exp\left(ik \sum_{i=1}^{i=n} x_i \right) f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$$

$$= \int e^{ikx_1} f_1(x_1) dx_1 \int e^{ikx_2} f_2(x_2) dx_2 \ldots \int e^{ikx_n} f_n(x_n) dx_n$$

$$= \prod_i \phi_i\,(k)$$

Teorema del limite centrale /1

Si considerano n variabili aleatorie x_j indipendenti con medie μ_j e varianze σ^2 (il teorema vale anche se le varianze non sono uguali)

Le variabili aleatorie $y_j = \frac{x_j - \mu_j}{\sqrt{n}}$ hanno $\boxed{\text{valor medio nullo}}$ e

$E\left[y_j^2\right] = \frac{\sigma^2}{n}$

Le funzioni caratteristiche possono essere espanse in serie di Mc Laurin

$$\phi_j(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \left.\frac{d^l \phi}{dk^l}\right|_{k=0} \frac{k^l}{l!}$$

Teorema del limite centrale /2

La funzione caratteristica per $z = \sum_j y_j$ è data, trascurando per n grande i momenti di ordine superiore a 2, da

$$\phi_z(k) = \prod_{j=1}^{n} \phi_j(k)$$

Per grandi n, la funzione caratteristica per z è quella di una gaussiana con media nulla e varianza σ.
Tornando a $\sum_j x_j$ si può dire che

$$z = \sum_j y_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_j x_j - \sum_j \mu_j\right) \Longrightarrow \sum_j x_j = \sqrt{n}\, z + \sum_j \mu_j$$

Teorema del limite centrale /3

Quindi anche la somma delle x_j è gaussiana con media e varianza date da:

$$E\left[\sum_j x_j\right] = \sum_j \mu_j$$

$$V\left[\sum_j x_j\right] = nV\left[z\right] = n\sigma^2$$

Se le varianze non sono uguali tra loro, la somma delle variabili aleatorie x_j è gaussiana con varianza data dalla somma delle varianze σ_j^2.

Distribuzione normale multivariata

Nel caso di un set di v.a. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ la densità di probabilità è:

$$f(\vec{x};\vec{\mu},V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|V|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right]$$

dove $E[x_i] = \mu_i$ e V è la matrice di covarianza: $V_{ij} = \mathrm{cov}[x_i, x_j]$

Per n=2: $f(x_1,x_2;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

con $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}[x_1,x_2]}{\sigma_1\sigma_2}$

Distribuzione χ^2

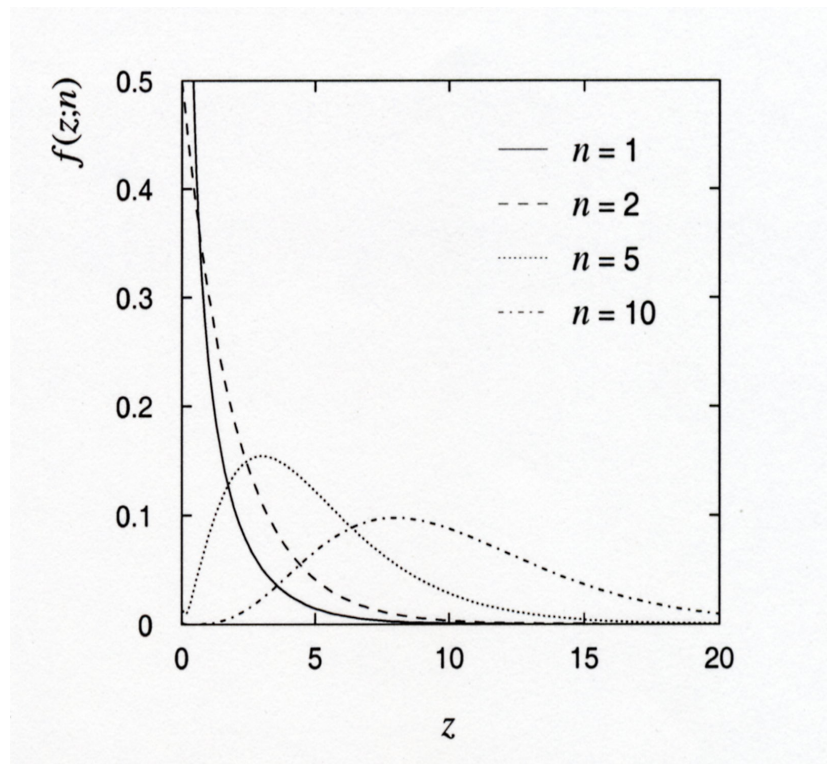
La distribuzione χ^2 della v.a. continua x è definita da:

$$f(x;n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \geq 0$$

dove $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{(\alpha-1)} e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$E[x]=n$ e $V[x]=2n$ con $n=1,2,\ldots$

n è detto numero di gradi libertà



Distribuzione χ^2

L'importanza di questa distribuzione deriva dal fatto che, nel caso di v.a. x_i indipendenti gaussiane, la somma:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

segue una distribuzione χ^2 con *n* gradi di libertà

Per grandi valori di *n*, la distribuzione tende ad una gaussiana con valor medio *n* e varianza *2n*

Viene utilizzata nelle procedure di minimizzazione → test del χ^2

Distribuzione di Breit-Wigner

La distribuzione di Breit-Wigner (o Cauchy) è definita come:

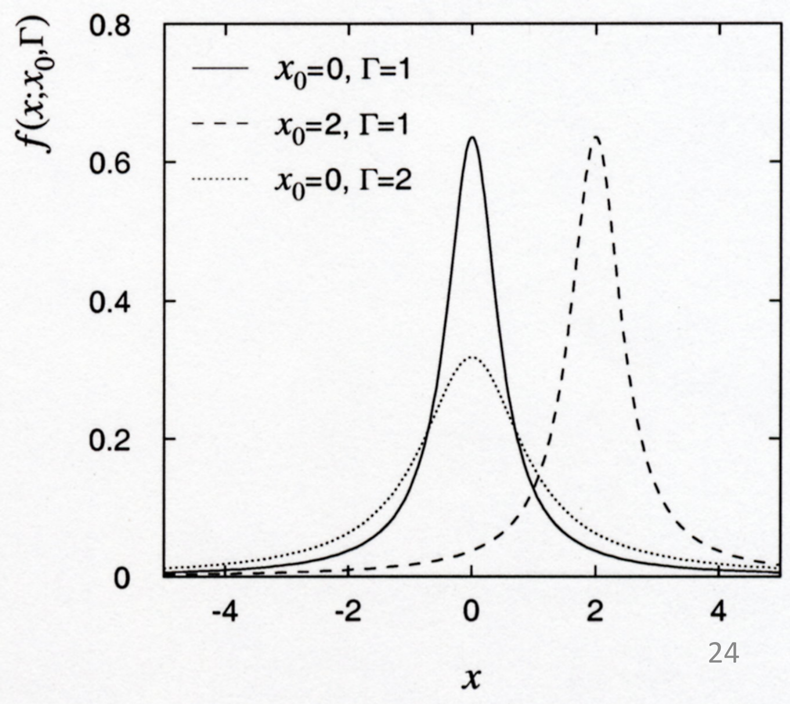
$$f(x;\vartheta,d)=\frac{1}{\pi d}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\vartheta}{d}\right)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{\frac{\Gamma}{2}}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2+(x-\vartheta)^2}$$

$\Gamma = 2d$

La funzione integrale è definita e la condizione di normalizzazione è soddisfatta.

Nessuno dei momenti esiste

$$F(x;\vartheta,d)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\vartheta}{d}\right)$$



Distribuzione di Breit-Wigner

- Il parametro θ è il valore più probabile della distribuzione (moda)
- Il parametro Γ=2d è un parametro di dispersione ed indica la larghezza totale a metà altezza
- La Breit-Wigner è usata per descrivere lo spettro in massa invariante delle risonanze (e.g. ρ, ϕ,...): θ è la massa e Γ il tasso di decadimento (reciproco della vita media)

Distribuzione di Landau

La densità di probabilità per la perdita di energia Δ da parte di una particella carica che attraversi un dato spessore di materiale è

$$f(\Delta;\beta,x) = \frac{1}{\xi}\phi(\lambda), \qquad 0 \leq \Delta < \infty$$

con

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{2\pi N_A e^4 z^2 \rho Z}{m_e c^2 A}\dfrac{x}{\beta^2} \\ \lambda = \dfrac{\Delta - \Delta_{m.p.}}{\xi} \\ \Delta_{m.p.} = \xi\left\{\ln\dfrac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2\xi}{I^2} - \beta^2 + 1 - C\right\} \end{cases}$$

Spessore attraversato

Perdita di energia più probabile

Energia di ionizzazione

Costante di Eulero: 0.5772

Distribuzione di Landau

La funzione ϕ è stata calcolata da Landau:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u \ln u - \lambda u} \sin \pi u \, du$$

La funzione è normalizzabile.
Tuttavia, come per la distribuzione
Breit-Wigner, la media ed i momenti di ordine più elevato non sono definiti

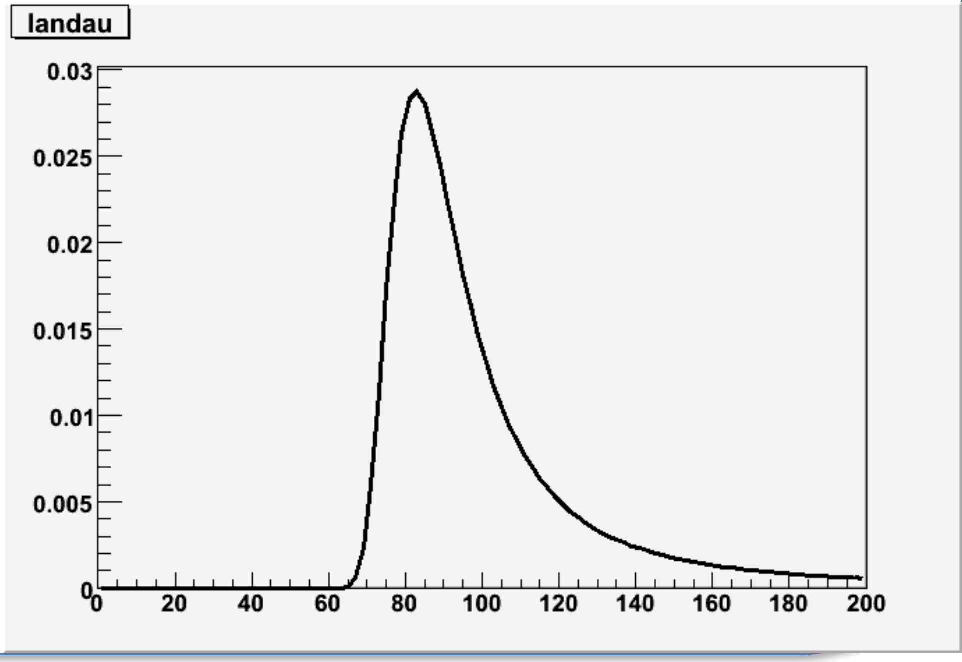


Table 28.1. Some common probability density functions, with corresponding characteristic functions and means and variances. In the Table, $\Gamma(k)$ is the gamma function, equal to $(k-1)!$ when k is an integer.

Distribution	Probability density function f (variable; parameters)	Characteristic function $\phi(u)$	Mean	Variance σ^2
Uniform	$f(x;a,b) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{e^{ibu} - e^{iau}}{(b-a)iu}$	$\overline{x} = \dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Binomial	$f(r;n,p) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}\, p^r q^{n-r}$ $r = 0,1,2,\ldots,n\,;\quad 0 \le p \le 1\,;\quad q = 1-p$	$(q + pe^{iu})^n$	$\overline{r} = np$	npq
Poisson	$f(r;\mu) = \dfrac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}\,;\quad r = 0,1,2,\ldots\,;\quad \mu > 0$	$\exp[\mu(e^{iu} - 1)]$	$\overline{r} = \mu$	μ
Normal (Gaussian)	$f(x;\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ $-\infty < x < \infty\,;\quad -\infty < \mu < \infty\,;\quad \sigma > 0$	$\exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)$	$\overline{x} = \mu$	σ^2
Multivariate Gaussian	$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},S) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lvert S\rvert}}$ $\times \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T S^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$ $-\infty < x_j < \infty;\quad -\infty < \mu_j < \infty;\quad \det S > 0$	$\exp\left[i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T S \boldsymbol{u}\right]$	$\boldsymbol{\mu}$	S_{jk}
χ^2	$f(z;n) = \dfrac{z^{n/2-1}e^{-z/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\,;\quad z \ge 0$	$(1-2iu)^{-n/2}$	$\overline{z} = n$	$2n$
Student's t	$f(t;n) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\, \dfrac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$ $-\infty < t < \infty\,;\quad n$ not required to be integer	—	$\overline{t} = 0$ for $n \ge 2$	$n/(n-2)$ for $n \ge 3$
Gamma	$f(x;\lambda,k) = \dfrac{x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}\,;\quad 0 < x < \infty\,;$ k not required to be integer	$(1 - iu/\lambda)^{-k}$	$\overline{x} = k/\lambda$	k/λ^2