UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

APPUNTI DEL CORSO MECCANICA ANALITICA

Lorenzo Liuzzo

December 15, 2022

Contents

1 Equazioni di Lagrange

1.1 Problema ad un corpo

Theorem 1.1. *(della forza viva)*
Sia T la forza viva (o energia cinetica) come $T = \frac{1}{2}m\dot{x} \cdot \dot{x}$. Allora lungo ogni soluzione $x = x(t)$ dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = F(x)$, si ha

$$\dot{T} = F(x) \cdot \dot{x}$$

o equivalentemente

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(x) \cdot \dot{x}\, dt$$

dove $F(x) \cdot \dot{x}$ è la potenza della forza e $\int_{t_0}^{t_1} F(x) \cdot \dot{x}$ è il lavoro svolto dalla forza.

Proof. Moltiplicando l'equazione di Newton per $\dot{x}$ e applicando la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto, si ottiene

$$(m\ddot{x}) \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x} \cdot \dot{x}) = \dot{T}$$

□

Nel caso di un campo di forze posizionali $F = F(x)$ l'integrale a secondo membro dipende dal movimento $x(t)$ nell'intervallo (t_0, t_1) attraverso la corrispondente traiettoia γ. Si ha dunque un integrale curvilineo della forma differenziale:

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{\gamma} F(x) \cdot dx$$

Nel caso in cui la forza sia conservativa, cioè in cui la forza ammetta potenziale, ossia una funzione scalare $V = V(x)$ tale che $F = -grad(V)$, chiamiamo V energia potenziale (o funzione delle forze). Questa condizione può essere riscritta dicendo che la forma differenziale del lavoro è esatta, cioè è il differenziale di una funzione, in particolare: $F(x) \cdot dx = -dV(x)$.

Theorem 1.2. *(dell'energia)*
Per un punto soggetto ad un campo di forze posizionali conservativo $F = F(x)$, lungo ogni soluzione $x = x(t)$ dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = F$, si ha

$$E = T + V \quad \dot{E} = 0$$

Proof.

$$F \cdot \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dt} = -\dot{V} \quad \Longrightarrow \quad \dot{T} = -\dot{V}$$

oppure, sfruttando la definizione integrale di lavoro (1.1) e il fatto che l'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta lungo una curva orientata dipenda solo dai suoi estremi (cioè che $\oint F(x) \cdot dx = 0$), si ha

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = -\int_{\gamma} dV = V(A) - V(B)$$

□

Definition 1.1. *(costante del moto)*

Una variabile dinamica che assume un medesimo valore per ogni punto del moto corrispondente ad una soluzione dell'equazione di Newton è detta costante del moto.

Dunque, la funzione $E(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + V(x)$ è una costante del moto. Pertanto, fissati i dati iniziali x_0 e $\dot{x}_0$, e quindi anche E_0, il teorema di conservazione dell'energia totale (1.2) va intesa nella forma

$$T - V = E_0 = E(x, \dot{x})$$

Introducendo la quantitità di moto $p = m\dot{x}$, è possibile riscrivere dell'equazione di Newton come

$$\dot{p} = F \quad \Longleftrightarrow \quad p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F dt$$

dove l'integrale della forza nel tempo viene detto impulso della forza.

Theorem 1.3. *(del momento angolare)*

Per un punto materiale soggetto ad una generica forza $F = F(x, \dot{x}, t)$, lungo ogni soluzione $x = x(t)$ dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = F$, si ha

$$\dot{L} = M$$

dove $L = x \times p$ è il momento angolare e $M = x \times F$ è il momento angolare della forza.

Proof. Moltiplicando vettorialmente l'equazione di Newton per x e applicando la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto, si ottiene

$$F \times x = x \times m\ddot{x} = x \times \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}(x \times p) - \frac{dx}{dt} \times p = \frac{d}{dt}(x \times p)$$

□

Corollary 1.3.1. *(conservazione del momento angolare)*

Per un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali $F = F(x)$, lungo ogni soluzione $x = x(t)$ dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = F$, si ha

$$\dot{L} = 0$$

ossia che il momento angolare L è una costante del moto.

Proof. Si applica il teorema del momento angolare (1.3). Poichè F è un campo di forze centrali, si ha che la forza è parallela al raggio vettore, perciò $M = x \times F = 0 \Longrightarrow \dot{L} = 0$.

□

Corollary 1.3.2. *(campi centrali e moti bidimensionali)*

Per un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali $F = F(x)$, per ogni soluzione $x = x(t)$ dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = F$, la traiettoia $x = x(t)$ giace in un piano passante per il centro di forza e ortogonale al vettore L momento angolare, determinato dalle condizioni iniziali x_0 e $\dot{x}_0$ che definiscono $L_0 = x_0 \times m\dot{x}_0$.

Proof. Per le proprietà del prodotto vettoriale, si ha che $L = x \times p$ è ortogonale a x. Ma per la conservazione del momento angolare (1.3.1), si ha che L è una costante del moto. Dunque, per ogni tempo t, il vettore $x(t)$, dovendo essere ortogonale ad un vettore costante, giace in un piano ortogonale a quel vettore.

□

Prendendo l'equazione della quantità di moto $\dot{p} = F$ e proiettandola su un asse qualsiasi, ad esempio x, si ottiene $\dot{p}_x = F_x$ e quindi se $F_x = 0 \Longrightarrow \dot{p}_x = 0$ e quindi $p_x = cost.$
Ma per forze posizionali conservative, $F_x = 0$ corrisponde a dire che V è invariante per traslazione lungo l'asse x, ossia

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{ovvero che} \quad V(x+h, ...) = V(x, ...) \quad \forall h$$

Proposition 1.1. *Se l'energia potenziale V è invariante per traslazioni lungo un asse, allora la componente della quantità di moto p lungo quell'asse è una costante del moto.*

Analogamente per il momento angolare, se ad esempio $M_x = x \cdot \frac{\partial V}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, allora $L_x = const.$

Proposition 1.2. *Se l'energia potenziale V è invariante per rotazioni rispetto ad un asse, allora la componente del momento angolare L su quell'asse è una costante del moto.*

Inoltre, nei casi in cui la forza sia indipendente dal tempo, cioè $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, si dice che l'energia potenziale è invariante per traslazioni temporali.

Proposition 1.3. *Se l'energia potenziale V è invariante per traslazioni temporali, allora l'energia $E = T + V$ è una costante del moto.*

1.2 Problema a N corpi

In un sistema di N punti materiali, le N equazioni di Newton del secondo ordine

$$m_k \cdot \ddot{x}_k = F_k \quad (k = 1, 2, ..., N)$$

si possono scrivere come un sistema di 2N equazioni di primo ordine

$$\dot{x}_k = \frac{p_k}{m_k} \qquad \dot{p}_k = F_k \quad (k = 1, 2, ..., N)$$

Si introducono la quantitità di moto totale del sistema, il momento angolare totale del sistema, la risultante delle forze e il momento risultante delle forze rispettivamente

$$p = \sum_k p_k = \sum_k m_k \dot{x}_k$$

$$L = \sum_k L_k = \sum_k x_k \times p_k$$

$$R = \sum_k F_k$$

$$M = \sum_k M_k = \sum_k x_k \times F_k$$

Le ipotesi sulle forze sono:

- ogni forza può essere decomposta in una componente dovuta agli altri punti del sistema e una dovuta ad agenti esterni, cioè $F_k = F_k^{(int)} + F_k^{(est)}$.
- ogni forza interna può essere decomposta nella somma di forze dovute singolarmente ad ogni altro punto del sistema, cioè $F_k^{(int)} = \sum_{j \neq k} F_{kj}$.
- ogni forza rispetti il principio di azione e reazione, cioè $F_{kj} = -F_{jk}$.

- ogni forza sia centrale, cioè $F_{kj} = f_{kj}(r_{kj}) \cdot \frac{x_k - x_j}{r_{kj}}$, dove $f_{kj} = f_{jk}$ e $r_{kj} = \|x_k - x_k\|$.

Le forze che soddisfano queste ipotesi sono anche dette forze classiche.

Theorem 1.4. *(equazioni cardinali della dinamica)*
Lungo le soluzioni del sistema di equazioni di Newton per un sistema a N punti materiali soggetto a forze di tipo classico si hanno le seguenti relazioni, dette rispettivamente la prima e la seconda equazione cardinale:

$$\dot{p} = R^{(est)} \qquad \dot{L} = M^{(est)}$$

dove $R^{(est)}$ e $M^{(est)}$ sono la risultante e il momento risultante delle forze esterne.

Corollary 1.4.1. *(condizioni necessarie per l'equilibrio di un sistema)*
Un sistema a N punti materiali soggetto a forze di tipo classico è in equilibrio se e solo se

$$R^{(est)} = 0 \quad e \quad M^{(est)} = 0$$

Theorem 1.5. *(potenziale delle forze interne)*
Per forze interne di tipo classico, il lavoro elementare delle forze interne è un differenziale esatto e si ha

$$\sum_k F_k^{(int)} \cdot dx_k = -dV^{(int)} = -d[\frac{1}{2} \sum_{1 \le k,j \le N}^{k \neq j} V_{kj}(r_{kj})]$$

Proof. Consideriamo una coppia di punti k e j. Poichè si hanno forze di tipo classico, essendo dunque $F_{kj} = -F_{jk}$, possiamo prendere $r_{kj} = x_k - x_j$ e scrivere

$$F_{kj} \cdot dx_k + F_{jk} \cdot dx_j = F_{kj} \cdot dr_{kj}$$

ossia ci siamo ridotti al problema di un solo corpo soggetto ad una forza centrale con simmetria sferica.

□

5

2 Equazioni di Hamilton

3 Principi variazionali