Sistemas Lineares
Métodos Diretos
Métodos Iterativos Estacionários

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Métodos Diretos

Introdução

- Encontra a solução exata a menos de erros de ponto flutuante.
- A idéia dos métodos é transformar o sistema em um sistema trivial (sistema triangular).
- A complexidade é em torno de n^3 (número de operações de ponto flutuante).
- Em certos casos, métodos diretos não são eficientes, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero).

Sistema linear $n \times n$:

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

a_{ij} = coeficientes, b_j = constantes, x_j = variáveis $(i, j = 1, \cdots, n)$
Na forma matricial $Ax = b$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Substituição Regressiva

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \cdots, n$.

Solução:

$$a_{nn} x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$\text{linha i} \Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{\ }$$

Algoritmo para a substituição regressiva: $x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$

Data: A,b,n
Result: x
for *i=n,1,-1* **do**
    soma = b[i];
    for *j=i+1,n,1* **do**
        soma = soma - a[i][j] ∗ x[j];
    end
    x[i] = soma/a[i][i];
end

Esforço computacional (Nºde operações (+,-,x,/) ou flops):

divisão: n

subtração e multiplicação: $2\sum\limits_{j=1}^{n-1} j = 2n(n-1)/2$

total $= n^2$

Idéia do método:

$$Ax = b \qquad \underset{\text{operações de linhas elementares}}{\Longrightarrow} \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Operações de linhas elementares:

- trocar a ordem de duas equações;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- somar uma equação à outra.

Observação: A eliminação deve ser feita de forma sistemática, ou seja, usando uma sequência de operações elementares de modo a transformar um sistema linear em um outro equivalente, onde a matriz é triangular superior.

Exemplo: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal: pivô: $a_{11} = -3$
multiplicadores: $m_{21} = -7/3 = -2.333$, $m_{31} = 2/3 = 0.667$, $m_{41} = -1/3 = -0.333$
$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (m_{21})L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (m_{31})L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - (m_{41})L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ 1 & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ 1 & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

pivô: $a_{22} = 17.664$

multiplicadores: $m_{32} = -2.336/17.664 = -0.132$, $m_{42} = 0.664/17.664 = 0.038$

$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (m_{32})L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - (m_{42})L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

Terceiro Passo: Eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

pivô: $a_{33} = 1.982$

multiplicadores: $m_{43} = 5.434/1.982 = 2.742$

Operações: $L_4 \leftarrow L_4 - (m_{43})L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.999 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & -11.966 & -11.963 \end{array}\right]$$

Substituição Regressiva:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & -11.966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24.998 \\ 7.298 \\ -11.963 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -11.966\, x_4 = -11.963 \Rightarrow x_4 &= 1.000 \\ 1.982x_3 + 5.319x_4 = 7.298 \Rightarrow x_3 &= 0.998 \\ 17.664x_2 - 2.666x_3 + 9.999x_4 = 24.998 \Rightarrow x_2 &= 1.000 \\ -3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \Rightarrow x_1 &= 1.001 \end{aligned}$$

Cálculo do Resíduo: $R = b - A\,x$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.001 \\ 1.000 \\ 0.998 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.003 \\ 0.004 \\ 0.011 \end{bmatrix}$$

Observação: A solução é exata a menos dos erros de ponto flutuante. Sendo assim, o resíduo tem que ser bem pequeno, em torno do número de casas decimais utilizadas para os cálculos.

Algoritmo para a Eliminação de Gauss:

Passo k: Eliminar os coeficientes da k-ésima coluna abaixo da diagonal $(1 \leq k \leq n-1)$

Operação sobre a Linha i:

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} L_k \text{ onde } m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}, \quad k+1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$$

```
Data: A,b,n
Result: x
for k=1,n-1 do
    for i=k+1,n do
        fator = a[i][k] / a[k][k];
        for j=k+1,n do
            a[i][j] = a[i][j] - fator * a[k][j];
        end
        b[i] = b[i] - fator * b[k]
    end
end
```

Esforço computacional:

adição e subtração: $n^3/3 + O(n)$

multiplicação e divisão: $n^3/3 + O(n^2)$

total $= 2n^3/3 + O(n^2)$

Obs: $O(m^n)$ significa “termos de ordem m^n e menores“.

Esporço Computacional:
Eliminação Progressiva: $2n^3/3 + O(n^2)$
Substituição Regressiva: n^2

n	Elim.	Subst.	Flops	$2n^3/3$	% Elim.
10	705	100	805	667	87.58%
100	671550	10000	681550	666667	98.53%
1000	6.67×10^8	1×10^6	6.68×10^8	6.67×10^8	99.85%

- O tempo de computação cresce bastante à medida que o sistema fica maior. A quantidade de flops cresce quase três ordens de grandeza para cada aumento na ordem de grandeza da dimensão;
- A maior parte do esforço vem da parte da eliminação. Esforços para melhorar o algoritmo devem se concentrar neste passo.

Variantes do Método de Gauss

Gauss-Jordan algoritmo: $[A|b] \implies [I|x]$,

onde I é a matriz identidade e x é a solução do sistema. Neste método o esforço computacional é $O(n^3)$, ou seja, aproximadamente 50% mais operações que a eliminação de Gauss ingênua.

Esforço Computacional:

- Regra de Cramer: $O(n!)$
- Gauss-Jordan: $O(n^3)$
- Eliminação de Gauss ingênua: $O(2n^3/3)$

Obs: a regra de Cramer é inviável computacionalmente quando n é grande. Observe que a regra de Cramer envolve o cálculo de determinantes.

Problemas com a Eliminação de Gauss ingênua

1. Divisão por zero
   Exemplo: solução exata $(1,1,1)^T$

$$
\begin{aligned}
2x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\
2x_1 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

   Solução $\rightarrow$ trocar L_1 com L_2

2. Erros de arredondamento
   Exemplo: solução exata $(1/3, 2/3)^T$

$$
\begin{aligned}
0.0003x_1 + 3x_2 &= 2.0001 \\
x_1 + x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{0.0003} L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.6666 = 2/3 \\ x_1 &= \frac{2.0001 - 3(x_2)}{0.0003} \end{aligned}$$

Tabela: Resultado muito sensível à precisão.

№de Dígitos	x_2	x_1	% Error relativo x_1
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.30000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

Técnicas para melhorar a solução:

- Usar mais dígitos significativos, ou seja, aumentar a precisão.
- Usar a estratégia de pivoteamento parcial.

Pivoteamento Parcial:

1. no início de cada etapa k, $1 \leq k \leq n-1$, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes a_{ik}, $k \leq i \leq n$,
2. trocar as linhas k e i, se for necessário.

Exemplo: solução exata $(1/3, 2/3)^T$

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 3x_2 &= 2.0001 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0.0003 & 3 & 2.0001 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0.0003}{1} L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 & 1.9998 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.6666 = 2/3 \\ x_1 &= 1 - x_2 \end{aligned}$$

Tabela: Resultado usando pivoteamento parcial.

№de Dígitos	x_2	x_1	% Error relativo x_1
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

Pseudocódigo para implementar o pivoteamento parcial [2]:

```
p = k
maior = |a_{k,k}|
DOFOR ii = k+1, n
  dummy = |a_{ii,k}|
  IF (dummy > maior )
     maior = dummy
     p = ii
  END IF
END DO
IF (p ≠ k)
  DOFOR jj = k, n
     dummy = a_{p,jj}
     a_{p,jj} = a_{k,jj}
     a_{k,jj} = dummy
  END DO
  dummy = b_p
  b_p = b_k
  b_k = dummy
END IF
```

FIGURA 9.5

Exemplo com Pivoteamento: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Escolher o pivô (a_{11}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (-3/7)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (-2/7)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (1/7)L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 1.571 & 6.857 & 11.143 \\ 1 & -1.857 & 5.714 & 1.571 & 5.429 \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Escolher o pivô (a_{22}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 1.571 & 6.857 & 11.143 \\ 1 & -1.857 & 5.714 & 1.571 & 5.429 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (2.714/7.571)L_2$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - (-1.857/7.571)L_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & \color{blue}{1.981} & \color{blue}{5.321} & \color{blue}{7.302} \\ 1 & -1.875 & \color{blue}{5.434} & \color{blue}{2.623} & \color{blue}{8.057} \end{array}\right]$$

Terceiro Passo: Escolher o pivô (a_{33}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

$$L_3 \longleftrightarrow L_4 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & \color{red}{5.434} & \color{blue}{2.623} & \color{blue}{8.057} \\ 1 & -1.857 & \color{blue}{1.981} & \color{blue}{5.321} & \color{blue}{7.302} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - (\color{red}{1.981/5.434})L_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \\ 1 & -1.857 & 1.981 & 4.365 & 4.364 \end{array}\right]$$

Substituição Regressiva:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \\ 1 & -1.857 & 1.981 & 4.365 & 4.364 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 4.365x_4 = 4.364 \Rightarrow x_4 &= 1.000 \\ 5.434x_3 + 2.623x_4 = 8.057 \Rightarrow x_3 &= 1.000 \\ 7.571x_2 - 1.143x_3 + 4.286x_4 = 10.714 \Rightarrow x_2 &= 1.000 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11 \Rightarrow x_1 &= 1.000 \end{aligned}$$

Cálculo do Resíduo: $R = b - Ax$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observação: Na eliminação de Gauss com pivoteamento todos os multiplicadores são em módulo menores ou iguais a 1.

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \qquad (1) \\ Ux &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

Como encontrar os fatores L e U?

Voltando ao Exemplo 1

Seja L matriz triangular inferior tal que $l_{ij} = m_{ij}$ para $i > j$ e $l_{ii} = 1$ e U a matriz triangular superior resultante da Eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & & & \\ -2.333 & 1.0 & & \\ 0.667 & -0.132 & 1.0 & \\ -0.333 & 0.038 & 2.742 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ & 17.664 & -2.666 & 9.999 \\ & & 1.982 & 5.319 \\ & & & -11.966 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} -3.000 & 8.000 & -2.000 & 3.000 \\ 6.999 & -1.000 & 2.000 & 3.000 \\ -2.001 & 3.004 & 1.000 & 6.000 \\ 0.999 & -1.993 & 5.999 & 2.000 \end{bmatrix} \approx A$$

Voltando ao Exemplo 2

Seja L matriz triangular inferior tal que $l_{ij} = m_{ij}$ para $i > j$ e $l_{ii} = 1$ e U a matriz triangular superior resultante da Eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1.000 & & & \\ -0.429 & 1.000 & & \\ 0.143 & -0.245 & 1.000 & \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 7.000 & -1.000 & 2.000 & 3.000 \\ & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ & & 5.434 & 2.623 \\ & & & 4.365 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = PA, \text{ sendo } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU [2]:

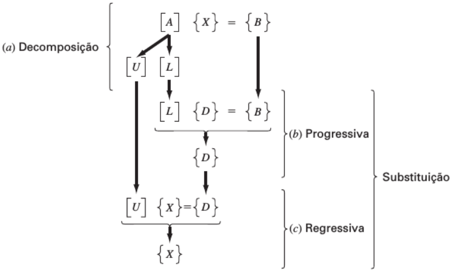
$$[A] \rightarrow [L][U]$$

onde

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$



- Processo de Substituição:

$$A\,x = b \longrightarrow P\,A\,x = P\,b \longrightarrow L\,U\,x = Pb$$

$$U\,x = y, \quad \text{então} \quad L\,y = Pb$$

1. $L\,y \;= P\,b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U\,x \;= y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo do Determinante

- Cálculo do determinante: $PA = LU \longrightarrow det(PA) = det(LU)$, então, pela propriedade de determinantes,

$$det(A) = \frac{det(L)det(U)}{det(P)},$$

onde

$$\begin{aligned} det(L) &= 1 \\ det(U) &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{(produto dos pivôs)} \\ det(P) &= (-1)^t \quad \text{onde } t \text{ é o número de permutações} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Cálculo da inversa

$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$

Exemplo 3 × 3: $[A]\,[A]^{-1} = [I] =$ matriz identidade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

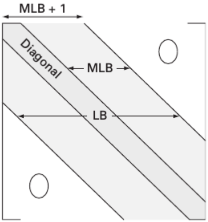
1. Fatoração LU de A: $PA = LU$
2. Resolve $L\,U\,\vec{x_j} = P\,I_j$, $j = 1, 2, 3$, onde

$$\vec{x_j} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_j = \text{j-ésima coluna de } [I]$$

Matrizes Esparsas:

$$
\begin{bmatrix}
f_1 & g_1 & & & & & \\
e_2 & f_2 & g_2 & & & & \\
 & e_3 & f_3 & g_3 & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\
 & & & & & e_n & f_n
\end{bmatrix}
$$

(a) Tridiagonal.

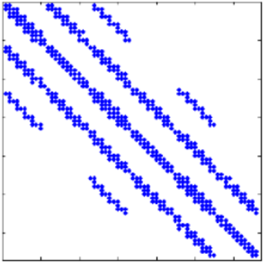


(b) Banda.

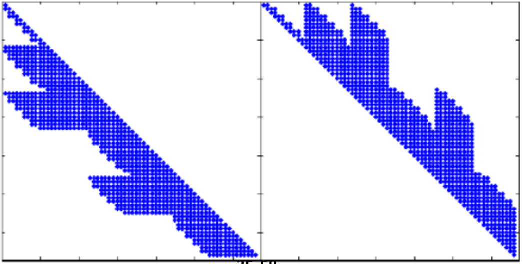
$$
\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\
 & b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\
c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\
 & c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\
 & & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\
 & & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\
 & & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\
 & & & & & c_9 & & b_9 & a_9
\end{bmatrix}
$$

(c) Pentadiagonal.

Matrix A: 582 nonzero entries.



$A = LU$: 1950 total nonzero entries.



Métodos Iterativos

1. Idéia dos métodos
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel
4. Convergência dos métodos
5. Método SOR

Introdução

- Encontra uma solução aproximada com precisão pré-fixada.
- O objetivo é transformar o sistema $Ax = b$ em uma expressão recursiva tal que $x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c$ para uma condição inicial $x^{(0)}$ conhecida.
- Depende de critérios de convergência relacionados a matriz de iteração M.
- A complexidade, por iteração, é em torno de n^2 (número de operações de ponto flutuante).
- Quando a matriz dos coeficientes é esparsa, somente os coeficientes não nulos necessitam ser armazenados.

Ideia Gerais

$$Ax = b \tag{3}$$

Isolar x, reescrevendo o sistema (3) da seguinte forma:

$$x = Mx + c \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \text{matriz } n \times n \\ c &= \text{vetor } n \times 1 \end{aligned}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{5}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\,x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\,x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

até que $e_{rel} = \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (critério de parada)
onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tolerância dada} \\ k_{max} &= \text{número máximo de iterações dado} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{(norma do máximo)} \end{aligned}$$

Outro critério de parada: $||r|| = ||b - Ax^{(k+1)}|| < \epsilon$, Seja A um sistema $n \times n$

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$
\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \right]
$$

$$
\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \right]
$$

$$
\vdots
$$

Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow D\,x &= -(E + F)\,x + b \\ \Rightarrow D\,x^{(k+1)} &= -(E + F)\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Jacobi:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -D^{-1}(E + F)\,x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{-1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow (E + D)\,x &= -F\,x + b \\ \Rightarrow (E + D)\,x^{(k+1)} &= -F\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -(E + D)^{-1} F\,x^{(k)} + (E + D)^{-1}\,b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Seidel, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

A convergência da sequência gerada pelo método iterativo estacionário, $x^{k+1} = M\,x^k + c$, é dada pelo Teorema 1, onde são fornecidas condições necessárias e suficientes de convergência.

Teorema 1: O método iterativo $x^{k+1} = M\,x^k + c$ converge com qualquer x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M.

Observações:

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do raio espectral. Quanto menor o raio espectral, mais rápida a convergência.
- A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 1.12$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & -0.4 \\ 0 & 0.96 & 0.08 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 0.6928$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi diverge e Gauss-Seidel converge [1].

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 0.8266$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & -1.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 1.2$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi converge e Gauss-Seidel diverge [1].

Teorema 2 (Critério das Linhas): É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonalmente dominante, ou seja,

$$\alpha_i = \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\Big)/|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema 3 (Critério de Sassenfeld): É condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A satisfaça

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 < 1 \\ \beta_i &= \frac{\left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right]}{|a_{ii}|} < 1, \qquad i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

Observação: O critério de linhas é apenas suficiente, veja os exemplos a seguir. Observe que nos dois exemplos a matriz A não é diagonalmente dominante.

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 3 - x_1^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{divergindo}$$

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.3333 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 1.4444 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5556 \\ 1.5556 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{convergindo}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1-\omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}
$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$
\begin{aligned}
& (D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\
& Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)Dx^{(k)} \\
& \Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)x^{(k)}
\end{aligned}
$$

Observação: Para $\omega = 1$, temos o método de Gauss-Seidel:

$$
x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1} F\, x^{(k)} + (E + D)^{-1}\, b \tag{6}
$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo SOR, usando 5 casas decimais e $\omega = 1.5$,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) + (1-\omega)x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) + (1-\omega)x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right) + (1-\omega)x_3^{(k)} \end{aligned}$$

Armazenamento de Matrizes Stencil

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$

A é tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & d_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & e_9 & & d_9 & a_9 \end{bmatrix} \Rightarrow AA = \begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & d_3 & a_3 & 0 & c_3 \\ e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\ e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 \\ e_7 & 0 & a_7 & b_7 & \\ e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & \\ e_9 & d_9 & a_9 & & \end{bmatrix}$$

A é Pentadiagonal

Armazenamento de Matrizes Esparsas - Formato CSR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

AA	1	1	5	3	4	6	7	8	9	3	6	2	5
JA	1	2	3	1	2	1	3	4	5	3	4	3	5
IA	1	4	6	10	12	14							

- n - ordem de A
- nnz - número de coeficientes não nulos
- $2nnz + n + 1$ - número de alocações para armazenar A
- $AA(k) = a_{ij}, JA(k) = j, IA(i) \leq k < IA(i+1)$

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.

Sugestão de Exercícios

Na referência [1] 2.6; 2.7; 2.8; 2.11; 2.12; 2.13; 2.16; 2.17; 2.19; 2.29.

Na referência [1] 2.31; 2.32; 2.33; 2.38; 2.39; 2.40 (utilizando os algorítmos sor e jacobi implementados em octave).