SPAZI DI PROBABILITÀ

<u>Definizione</u>: Un insieme S contenente tutti i possibili risultati di un esperimento casuale è detto SPAZIO CAMPIONE.

<u>Definizione</u>: I sottoinsiemi dello spazio campione sui quali vogliamo definire la probabilità vengono detti EVENTI e l'insieme degli eventi costituisce un'algebra, detta ALGEBRA DEGLI EVENTI.

Proprietà algebra degli eventi $\mathcal{A}$:

I) $\emptyset, S \in \mathcal{A}$

II) se $A \in \mathcal{A} \longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

III) se $A, B \in \mathcal{A} \longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ e $A \cap B \in \mathcal{A}$

<u>Definizione</u>: Data un'algebra degli eventi $\mathcal{A}$, la probabilità P è una funzione dell'algebra $\mathcal{A}$ in $[0, 1]$.

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

tale che:

I) $P(S) = 1$

II) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ $\rightarrow$ A e B DISGIUNTI

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

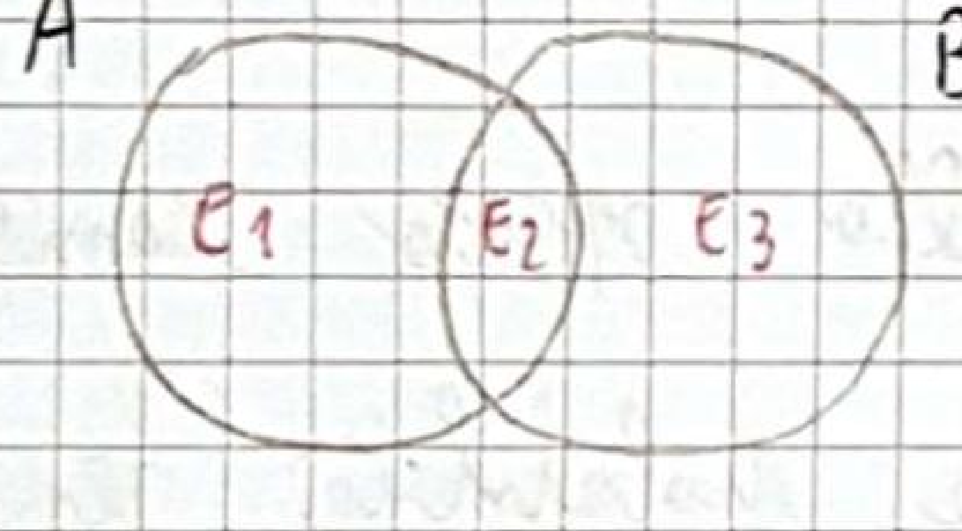
Conseguenze: 1) $P(E^c) = 1 - P(E)$

2) $P(\phi) = 1 - P(S) = 0$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

con A e B due eventi qualsiasi.

DIM.: 3)



$E_1 = A \setminus B$ $\qquad E_2 = A \cap B$ $\qquad E_3 = B \setminus A$

$A \cup B = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$A = E_1 \cup E_2$ $\qquad B = E_2 \cup E_3$

$P(A) = P(E_1) + P(E_2)$

$P(B) = P(E_2) + P(E_3)$

$$P(A \cup B) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_2) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

SPAZI A PROBABILITÀ UNIFORME

<u>Definizione</u>: $S = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$. Il numero di elementi di S si chiama CARDINALITÀ $\# S$, con $\# S = n$.

Se $P(s_1) = P(s_2) = \dots = P(s_n) \equiv p$, S si dice SPAZIO EQUIPROBABILE.

$S = \{s_1\} \cup \{s_2\} \cup \{s_3\} \cup \dots \cup \{s_n\}$, $\{s_i\}$ disgiunti

$$1 = P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = n \cdot p$$

$$\longrightarrow \quad p = \frac{1}{n}$$

Se $A \in \mathcal{A}$ un evento e sono $e_1, \dots, e_K$ i suoi elementi, che sono ovviamente anche elementi di S

$$\longrightarrow P(A) = P(e_1) + \dots + P(e_K) = K \cdot p = \frac{K}{n} = \frac{\# A}{\# S}$$

alternativamente: $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \dfrac{\# A^c}{\# S}$

CALCOLO COMBINATORIO

Teorema: Se gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_K$ contengono rispettivamente $n_1, n_2, \dots, n_K$ oggetti, il numero di modi diversi di scegliere prima un oggetto di A_1, poi un oggetto di $A_2, \dots,$ infine un oggetto di A_K è

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_K$$

DISPOSIZIONI

Definizione: Sia A un insieme di n oggetti. Si definisce DISPOSIZIONE DI n ELEMENTI DI CLASSE K ogni sottoinsieme ordinato di K elementi tale che i sottoinsiemi differiscono almeno in un elemento oppure, se hanno gli stessi elementi, nel modo in cui sono ordinati.

$$D_{n,K} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-K+1) = \frac{n!}{(n-K)!}$$

Teorema: Il numero di DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE di n oggetti a gruppi di K è dato da

$$D_{n,K}^{(r)} = n^K$$

La probabilità

- L'insieme dei tre oggetti che abbiamo introdotto, lo spazio campione S, l'algebra degli eventi $\mathcal{A}$ e la funzione di probabilità P si chiama **spazio di probabilità** $(S, \mathcal{A}, P)$;

PERMUTAZIONI

Definizione: Le PERMUTAZIONI di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono solo per l'ordine degli oggetti.

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Teorema: Il numero delle PERMUTAZIONI DI n OGGETTI NON TUTTI DISTINTI è dato da

$$P_{n, n_1, \ldots, n_K} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_K!}$$

COMBINAZIONI

Definizione: Le COMBINAZIONI sono tutti i gruppi di K oggetti che si possono formare da un insieme di n oggetti distinti, in modo che i gruppi differiscono per almeno un oggetto (senza tener conto del loro ordine)

$$C_{n,K} = \frac{D_{n,K}}{P_K} = \frac{\frac{n!}{(n-K)!}}{K!} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

Scanned by TapScanner

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

<u>Definizione</u>: Siano A e B due eventi di S e sia $P(A) \neq 0$

La PROBABILITÀ CONDIZIONATA di A dato l'evento B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>Definizione</u>: Due eventi si dicono INDIPENDENTI se

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$\longrightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

<u>Teorema delle probabilità totali</u>:

Sia $B_1, \dots, B_n$ una PARTIZIONE di S, cioè una collezione di sottoinsiemi tali che

$$B_i \cap B_j = \emptyset \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$$

e sia A un elemento dell'algebra. Vale allora il TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$$

DIM.: $A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$

dove $A \cap B_i$ sono disgiunti

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i)$$

FORMULA DI BAYES

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)}$$

Più spesso la formula di Bayes viene usata in combinazione con il teorema delle probabilità totali. Data una partizione dello spazio campione B_i, $i = 1, 2, \dots, n$, ed un evento A

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i)}$$

Scanned by TapScanner