VARIABILI ALEATORIE

<u>Definizione</u>: Una VARIABILE ALEATORIA è una funzione reale X definita su S a valori reali

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Essa associa ad ogni possibile risultato di un esperimento, cioè ad ogni elemento dello spazio campione S, un numero reale.

Se la variabile aleatoria può prendere valori discreti, allora si dice DISCRETA.
Se può assumere valori in un intervallo in $\mathbb{R}$ si dice CONTINUA.

<u>Definizione</u>: La funzione $f(x_i) = P(X = x_i)$ $\quad i = 1, 2 \ldots$ che ad ogni valore assunto dalla variabile aleatoria discreta X associa la corrispondente probabilità è detta DISTRIBUZIONE (DENSITÀ) DI PROBABILITÀ di X.

<u>Definizione</u>: Si definisce FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (DISTRIBUZIONE) di una variabile aleatoria X la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} \rightarrow [0,1])$$

Scanned by TapScanner

Proprietà :

- $F(x) \in [0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ non decrescente

Per una variabile discreta si ha la seguente relazione tra funzione di distribuzione e densità di probabilità :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i}^{x} f(x_i)$$

In generale, nel caso di una variabile aleatoria discreta, una funzione $f(x)$ è una distribuzione di probabilità se :

1) $f(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i$

2) $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$ NORMALIZZAZIONE

Scanned by TapScanner

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

<u>Definizioni</u>:

- X è una v. a. CONTINUA se può assumere un insieme continuo di valori in $\mathbb{R}$.
- X è una v. a. continua se $F(x)$ è (assolutamente) continua.
- X è una v. a. continua se $\exists\, f(x) \geq 0$ tale che

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx \qquad \forall B \subset \mathbb{R}$$

- $P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\, dx$

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dX = 0$$

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dX$$

$$P(\{X \leq a\}) = P(\{X < a\} \cup \{X = a\}) =$$

$$= P(X < a) + \cancel{P(X = a)} = P(X < a)$$

$$\longrightarrow \quad P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

- $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$F(x)$ è una primitiva di $f(x)$,

cioè $\int_a^b f(x)\, dX = F(b) - F(a)$

In base a queste considerazioni, si presuppone che:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ NORMALIZZAZIONE $\leftarrow \begin{cases} \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \end{cases}$

VARIABILI ALEATORIE VETTORIALI

<u>Definizione</u>: Siano X e Y due variabili aleatorie che riguardano lo stesso esperimento casuale. Si dice

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE CONGIUNTA $F(x,y)$ di X e Y

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

<u>Definizione</u>: Si definisce DENSITÀ CONGIUNTA (DISCRETA)

$$P_{ij} = P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \qquad \sum_{ij} P_{ij} = 1$$

NORMALIZZAZIONE

<u>Definizione</u>: Si definiscono DENSITÀ MARGINALI (DISCRETE)

$$P_{X,i} = P(X = i) = \sum_j P(X = i, Y = j) = \sum_j P_{ij}$$

$$P_{Y,j} = P(Y = j) = \sum_i P(X = i, Y = j) = \sum_i P_{ij}$$

VARIABILI VETTORIALI CONTINUE

__Definizione__: Due variabili X e Y si dicono CONGIUNTAMENTE CONTINUE se $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, tale che $\forall C \subset \mathbb{R}^2$

$$P(X,Y \in C) = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

con $f(x,y)$ DENSITA' CONGIUNTA.

- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = 1$ NORMALIZZAZIONE

- $F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) =$

$$= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)\, dx\, dy \longrightarrow f(a,b) = \frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b}$$

- Data la densità congiunta $f(x,y)$, le DENSITA' MARGINALI sono

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

Definizione: Due variabili aleatorie sono INDIPENDENTI se $\forall (A,B) \subset \mathbb{R}^2 \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$,

cioè $\iint_{A \times B} f(x,y)\, dx\, dy = \int_A f(x)\, dx \int_B f_Y\, d(y)$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Conseguenza: Se X e Y sono indipendenti, allora dalla conoscenza delle marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ posso risalire alla congiunta $f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$.

Se invece X e Y non sono indipendenti, allora non è possibile risalire dalle marginali alla congiunta.

Viceversa, dalla congiunta $f_{XY}(x,y)$ posso SEMPRE ricavare le marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$

$$f_{XY} \xrightarrow{\text{SEMPRE}} (f_X, f_Y)$$

$$f_{XY} \underset{\text{INDIPENDENTI}}{\overset{\text{SOLO SE}}{\longleftrightarrow}} (f_X, f_Y)$$

La conclusione vale anche per variabili aleatorie DISCRETE:

$$P_{XY}(i,j) \xrightarrow{\text{SEMPRE}} (P_X(i), P_Y(j))$$

$$(P_X, P_Y) \overset{\text{INDIPENDENTI}}{\longleftrightarrow} P_{XY}$$

$$P_{ij} = P_{X,i} \cdot P_{Y,j}$$

Scanned by TapScanner

DENSITÀ CONDIZIONATA

VARIABILI DISCRETE

<u>Definizione</u>: Siano X e Y due variabili aleatorie discrete.

Si dice DENSITÀ DISCRETA CONDIZIONATA

di X dato $Y = y$

$$P_{X|Y}(x,y) = P(X = x \mid Y = y) =$$

$$= \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

VARIABILI CONTINUE

<u>Definizione</u>: Siano X e Y due variabili aleatorie continue.

Si definisce $f_{X|Y}(x|y)$ la DENSITÀ CONDIZIONATA

di X dato $Y = y$ in modo che

$$P(X \in A \mid Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\, dx \qquad \forall A \in \mathbb{R}$$

$$f_{X|Y} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Se X e Y sono indipendenti sappiamo che

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$\longrightarrow f_{X|Y} = \frac{f_{XY}}{f_Y} = \frac{f_X \cancel{f_Y}}{\cancel{f_Y}} = f_X(x)$$