RISPOSTA TRANSITORIA

Definisco la risposta transitoria di un sistema chiuso come

$$Y_t(t) = Y(t) - \tilde{Y}(t)$$

Diversamente dalla risposta a regime permanente, quella transitoria non dipende unicamente dall'ingresso $u(t)$ ma anche dalle condizioni iniziali:

$$\underline{Hp}: \begin{cases} X(0) = 0 & \text{STATO INIZIALE NULLO} \\ u(t) = \delta_{-1}(t) & \text{INGRESSO A GRADINO} \end{cases}$$

Per gestire il transitorio di un sistema possiamo utilizzare due differenti approcci:

1) STUDIO DEI POLI — RICHIEDE LA CONOSCENZA DEL MODELLO MATEMATICO DEL SISTEMA

2) PARAMETRI GLOBALI — METODO PIÙ INTUITIVO

Scanned by TapScanner

STUDIO DEI POLI

$$Y_t(t) = Y(t) - \tilde{Y}(t)$$

$$Y_t(s) = Y(s) - \mathcal{L}(\tilde{Y}(t))$$

$$\tilde{Y}(t) = W(s)\Big|_{s=0} \qquad u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_t(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s} - \frac{W(0)}{s}$$

$P_1, \dots, P_n$ poli distinti di $W(s)$

$$Y_t(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - P_i} + \frac{R_0}{s} - \frac{W(0)}{s}$$

$$R_0 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{W(s)}{s} = W(0)$$

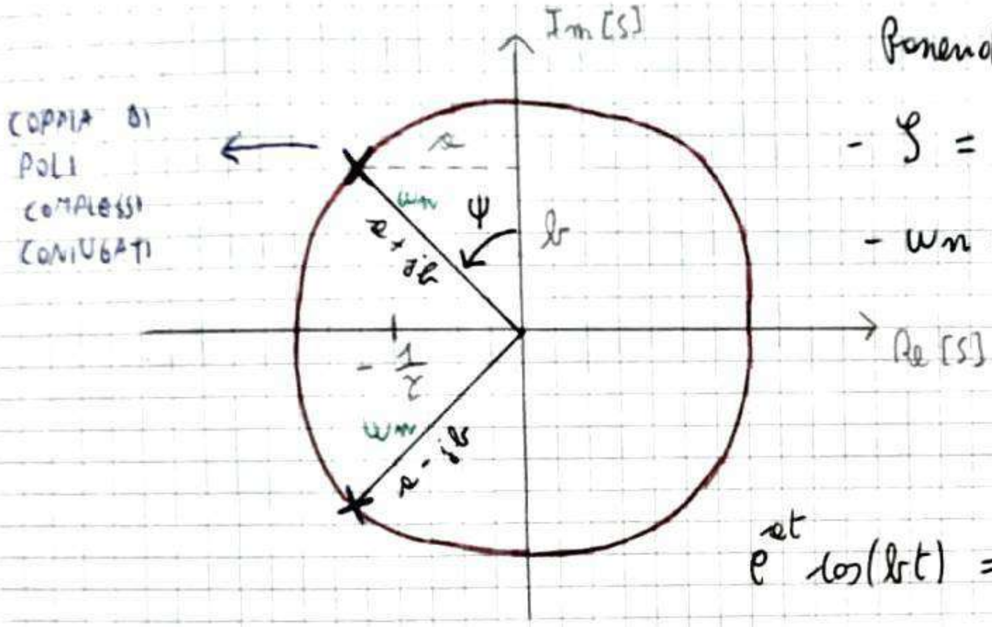
$$\rightarrow Y_t(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - P_i} + \cancel{\frac{R_0}{s}} - \cancel{\frac{R_0}{s}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - P_i}$$

Per avere quindi un transitorio breve (cioè $y_t(t) \to 0$ il più velocemente possibile) è quindi necessario che i poli si trovino più a sinistra possibile. (POLI GRANDI IN VALORE ASSOLUTO)

Tale limite dipende dalla costante temporale, quindi

$$\boxed{\tau < \tau_{MAX}}$$

- Graficamente, nel caso di poli COMPLESSI CONIUGATI:



Ponendo:

- $\xi = \sin\psi$
- $\omega_n = \sqrt{a^2+b^2}$
- $e^{p_1 t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ ($P_1 = $

posso scrivere

$$e^{at}\cos(bt) = e^{-\xi\omega_n t}\cdot\cos\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right]$$

Quanto più la parte immaginaria pesa sulla parte reale tanto più l'andamento è oscillatorio

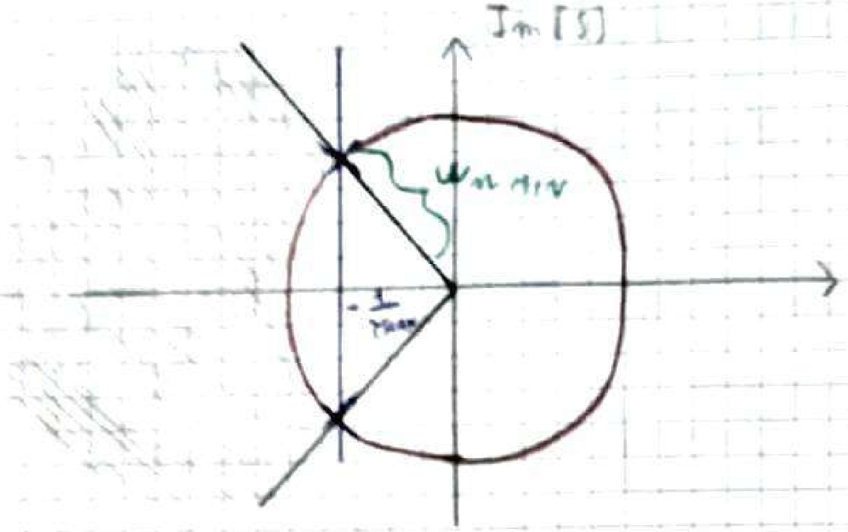
(casi limite: $\xi = 0$ IMM. PURO ; $\xi = 1$ REALE PURO)

Da ciò traggo le seguenti condizioni

$$\boxed{\xi > \xi_{MIN}} \qquad \boxed{\omega_n > \omega_{n\,MIN}}$$

Scanned by TapScanner

Unendo le tre condizioni otteniamo :



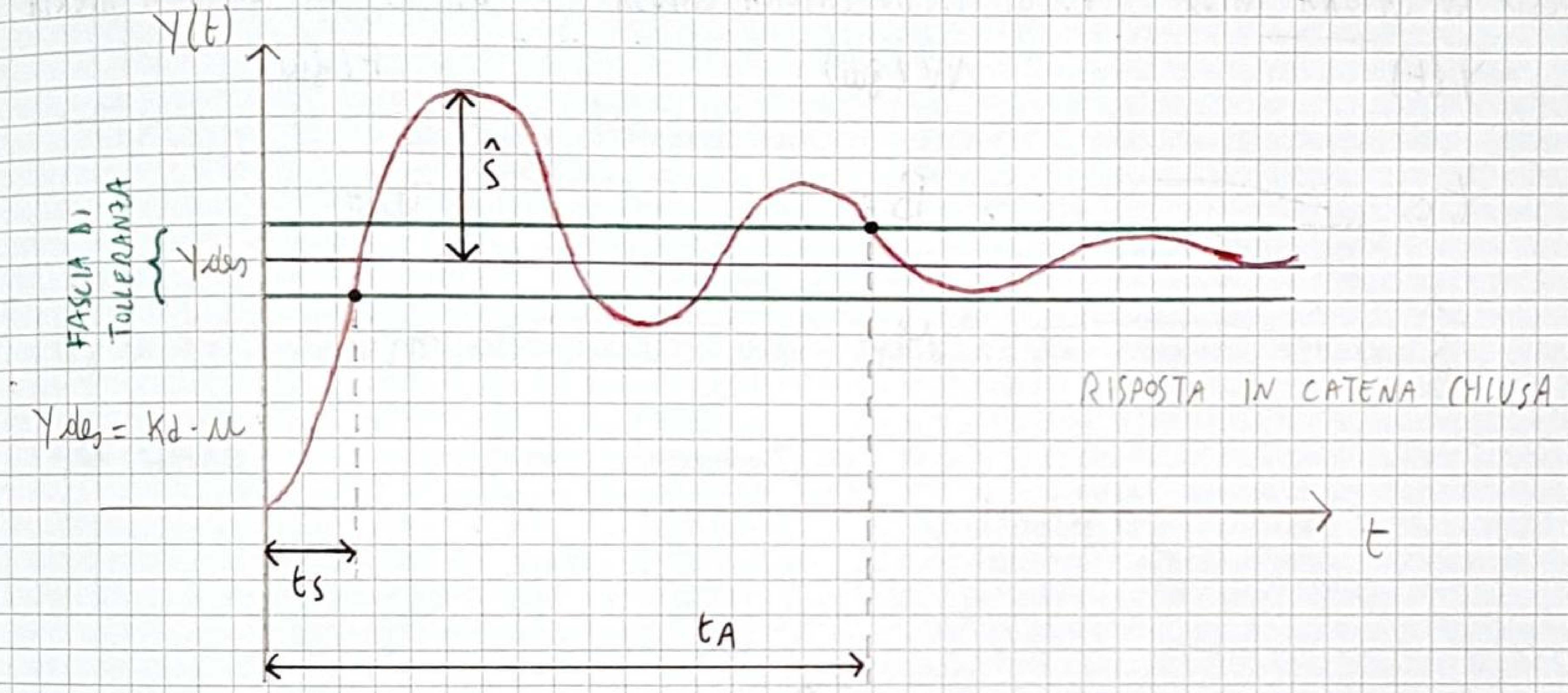
POLI POSIZIONATI NELLA ZONA GRIGIA ASSICURANO UN BREVE TRANSITORIO

Nel caso di poli complessi coniugati, la risposta transitoria decade tanto più velocemente a zero quanto più la parte reale dei poli è grande (in valore assoluto), e la frequenza di oscillazione del modo pseudoperiodico è tanto più elevata quanto più è grande la parte immaginaria dei poli stessi.

Scanned by TapScanner

PARAMETRI GLOBALI

Tracciando l'andamento temporale della risposta di un sistema in catena chiusa possiamo individuare 3 parametri:



$\hat{S}$: massimo valore assunto dalla risposta, normalizzato rispetto al valore di regime

INDICA LE OSCILLAZIONI

$$\hat{S} = \frac{Y_{MAX} - Y_{des}}{Y_{des}}$$

t_S : tempo necessario affinché la risposta raggiunga il valore di regime per la prima volta

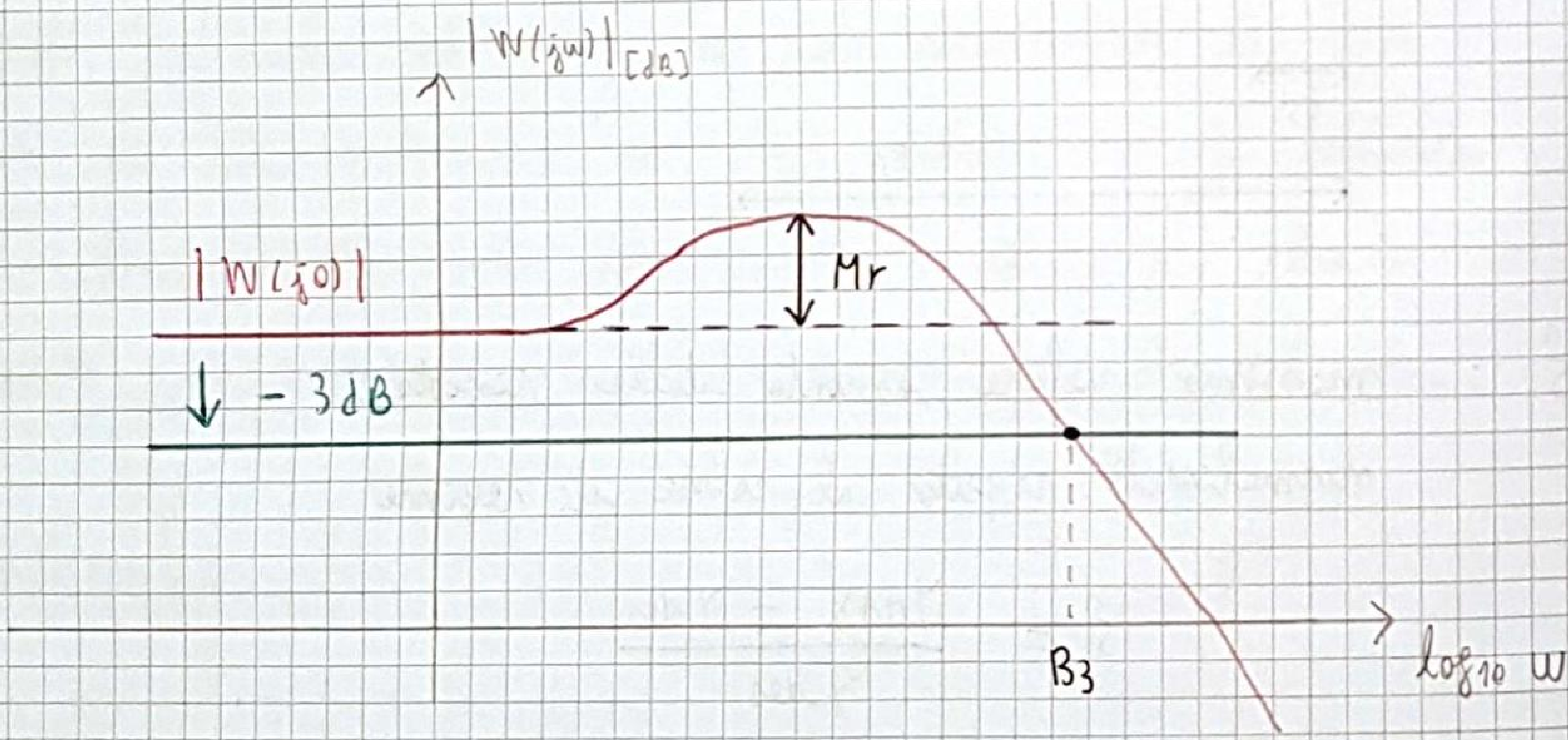
INDICA LA PRONTEZZA DEL SISTEMA

t_A : tempo necessario perché la risposta entri in una fascia di ampiezza $\mathcal{E}$ attorno al valore di regime (fascia di tolleranza)

INDICA LA DURATA DEL TRANSITORIO

Esistono delle relazioni empiriche tra questi parametri e altri parametri nel dominio della frequenza, sia in catena chiusa che aperta

RISPOSTA IN CATENA CHIUSA $Y(t)$	F. DI T. IN CATENA CHIUSA $W(j\omega)$	F. DI T. IN CATENA APERTA $F(j\omega)$
t_s →	B_3 →	ω_t
$\hat{S}$ →	M_r →	$m\varphi$



B_3 : pulsazione oltre la quale il modulo della risposta armonica risulta attenuato di 3 dB rapportato al suo valore in $\omega = 0$.

$$|W(jB_3)|_{[dB]} = |W(j0)|_{[dB]} - 3\,dB$$

M_r : massimo valore del modulo della risposta armonica rapportato al suo valore in $\omega = 0$

$$M_r = \frac{|W(j\omega)|_{MAX}}{|W(j0)|}$$

$$M_{r\,[dB]} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|_{MAX} - 20 \log_{10} |W(j0)| = 20 \log_{10} \frac{|W(j\omega)|_{MAX}}{|W(j0)|}$$

B_3 e t_s sono inversamente proporzionali tra loro. Quindi per ridurre t_s devo aumentare B_3

$$\boxed{B_{3\,[rad/s]} \cdot t_{s\,[s]} \simeq 3}$$

M_r e $\hat{s}$ sono direttamente proporzionali tra loro

$$\boxed{1 + \hat{s} \simeq 0{,}85\, M_r}$$

ω_t : pulsazione in corrispondenza della quale $|F(j\omega_t)|_{[dB]} = 0\,dB$

$$\boxed{\omega_{t\,[rad/s]} = [3 \div 5] \cdot B_{3\,[Hz]}}$$

$$m\varphi = 180° + \angle F(j\omega_t)$$

$m\varphi$ e M_r sono inversamente proporzionali tra loro.

I vantaggi di utilizzo di ω_t e $m\varphi$ al posto di t_s e $\hat{s}$ sono:

- li studiamo nella catena aperta
- li studiamo alla stessa pulsazione

Scanned by TapScanner