SISTEMI DI TIPO K

Desidero studiare la fedeltà di risposta di un sistema a regime permanente, cioè quanto la sua uscita differisce da quella desiderata.

SISTEMA DI CONTROLLO PROPORZIONALE : vogliamo che l'uscita sia il più possibile simile (o uguale idealmente) a un segnale che è proporzionale all'ingresso di riferimento

$\downarrow$

$$Y_{des}(t) = K_d \cdot u(t)$$

- INGRESSO POLINOMIALE : $\boxed{u(t) = \frac{t^k}{k!}}$

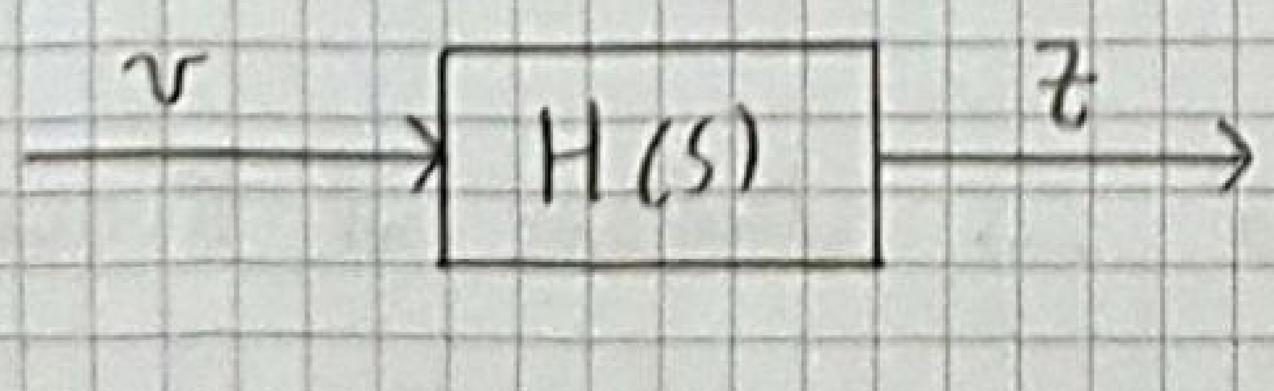
ERRORE : $e(t) = Y_{des}(t) - Y(t) = K_d \cdot u(t) - Y(t)$

$$e(s) = K_d\, U(s) - Y(s) = K_d\, U(s) - W(s)\, U(s) =$$

$$= [K_d - W(s)]\, U(s) = W_e(s)\, U(s)$$

$$W_e(s) = \frac{e(s)}{U(s)} = K_d - W(s)$$

Calcolo della risposta a regime permanente in un sistema lineare e stazionario con funzione di trasferimento $H(s)$



Condizione: affinché esista la risposta a regime permanente per ingressi polinomiali $\longrightarrow$ $H(s)$ ha tutti i poli con $\mathrm{Re} < 0$

$$v(t) = \frac{t^k}{k!} \rightsquigarrow v(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

$$\tilde{z}(t) = C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1}\, t + C_k$$

$$C_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i H(s)}{ds^i} \right]_{s=0}$$

$$z(s) = H(s)\, v(s) = H(s) \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{n_{H(s)}}{(s-p_1) \cdot \ldots \cdot (s-p_n) \cdot s^{k+1}}$$

$p_1, \dots, p_n$ poli distinti

$$z(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n} + \boxed{\frac{C_0}{s^{k+1}} + \frac{C_1}{s^k} + \dots + \frac{C_k}{s}}$$

$$z(t) = \underbrace{A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_n e^{p_n t}}_{\text{RISP. TRANSITIVA}} + C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1} t + C_k$$

per $t \to \infty$ $\longrightarrow$ SI ANNULLANO TUTTI I TERMINI PERCHÉ $H(s)$ HA I POLI A PARTE REALE NEGATIVA

$$u \longrightarrow \boxed{W_e(s)} \xrightarrow{\ e\ }$$

$$\tilde{e}(t) = C_{e,0} \frac{t^k}{k!} + C_{e,1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{e,k-1}\, t + C_{e,k}$$

Definizione: Un sistema si dice di tipo K se l'errore a regime permanente per un ingresso polinomiale $\tilde{e}(t)$ è COSTANTE e DIVERSO DA ZERO.

Condizione: Un sistema è di tipo K se:

$$\begin{cases} C_{e,0} = C_{e,1} = \dots = C_{e,K-1} = 0 \\ C_{e,K} \neq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{e}(t) = C_{e,K} \neq 0$$

Nei sistemi di tipo K possiamo riportare le seguenti caratteristiche in termini di errore ed ingresso:

[grado dell'ingresso : h]

1) $h < K \longrightarrow \tilde{e}(t) = 0$

2) $h = K \longrightarrow \tilde{e}(t) = C_{e,K} \neq 0$

3) $h > K \longrightarrow \tilde{e}(t) \to \infty$ (ERRORE ILLIMITATO)

- $u(t) = \frac{t^h}{h!}$, $h > k$ (ed esempio : $\underbrace{h = 3}$, $k = 1$) SISTEMA DI TIPO 1

$\to$ INGRESSO DI GRADO 3

$$\tilde{e}(t) = c_{e,0}\frac{t^3}{3!} + c_{e,1}\frac{t^2}{2!} + c_{e,2}t + c_{e,3}$$

$$k = 1 \longrightarrow \begin{cases} c_{e,0} = 0 \\ c_{e,1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{e}(t) = \underbrace{c_{e,1}}_{\neq 0}\frac{t^2}{2!} + c_{e,2}t + c_{e,3}$$

$h = k+1$, sistema di tipo k

$$\tilde{e}(t) = c_{e,0}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + c_{e,1}\frac{t^k}{k!} + \dots + c_{e,k-1}\frac{t^2}{2!} + c_{e,k}t + c_{e,k+1}$$

$$\text{tipo } k \to \begin{cases} c_{e,0} = \dots = c_{e,k-1} = 0 \\ c_{e,k} \neq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{e}(t) = \underbrace{c_{e,k}}_{\neq 0}t + c_{e,k+1}$$

$\neq 0 \longrightarrow \tilde{e}(t) \to \infty$

- $h < k \quad , \quad u(t) = \frac{t^h}{h!}$

h : grado dell' ingresso

k : tipo del sistema

$h = k - 1 \quad ; \quad k - h = 1$

$$\hat{e}(t) = c_{e,0} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + c_{e,1} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + c_{e,k-2}\, t + c_{e,k-1}$$

$$\text{tipo } k \rightarrow \begin{cases} c_{e,0} = \ldots = c_{e,k-1} = 0 \\ c_{e,k} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \hat{e}(t) = 0$$

$$u(t) = t, \quad h = 1, \quad \text{tipo} = 2 \rightarrow \begin{cases} c_{e,0} = c_{e,1} = \\ c_{e,2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{e}(t) = \cancel{c_{e,0}}\, t + \cancel{c_{e,1}} = 0$$

Nel caso $h = K$ $\quad (\tilde{e}(t) = C_{e,K} \neq 0)$

$$\tilde{e}(t) = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot e(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot W_e(s)\, u(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot W_e(s) \cdot \frac{1}{s^{K+1}} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{W_e(s)}{s^K} = C_{e,K} \quad \checkmark$$

Dall'ultimo passaggio deduciamo che s^K deve semplificarsi con il numeratore

$n(s)$: numeratore di $W_e(s)$

$d(s)$: denominatore di $W_e(s)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{W_e(s)}{s^K} = \lim_{s\to 0} \frac{n(s)}{s^K d(s)}$$

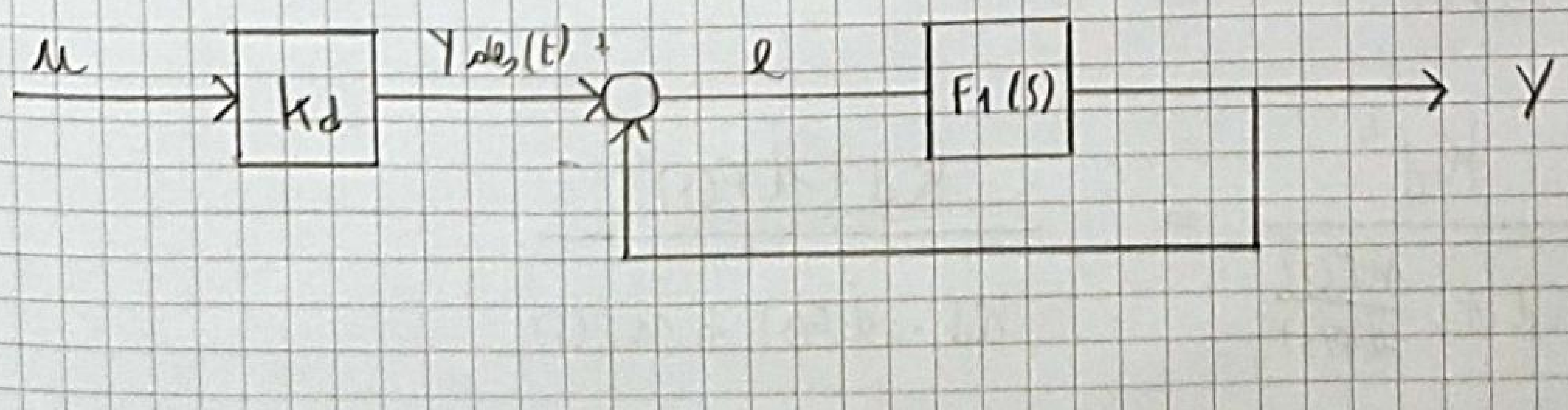
Sia $n(s) = s^K \bar{n}(s)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{n(s)}{s^K d(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s^K}\, \bar{n}(s)}{\cancel{s^K}\, d(s)} = C_{e,K}$$

Introduciamo quindi una nuova <u>condizione</u>:

Il sistema è di tipo K se $W_e(s)$ ha uno zero di molteplicità K in $s = 0$.

Tale condizione è però espressa per le catene chiuse; come esprimerla per le catene aperte?

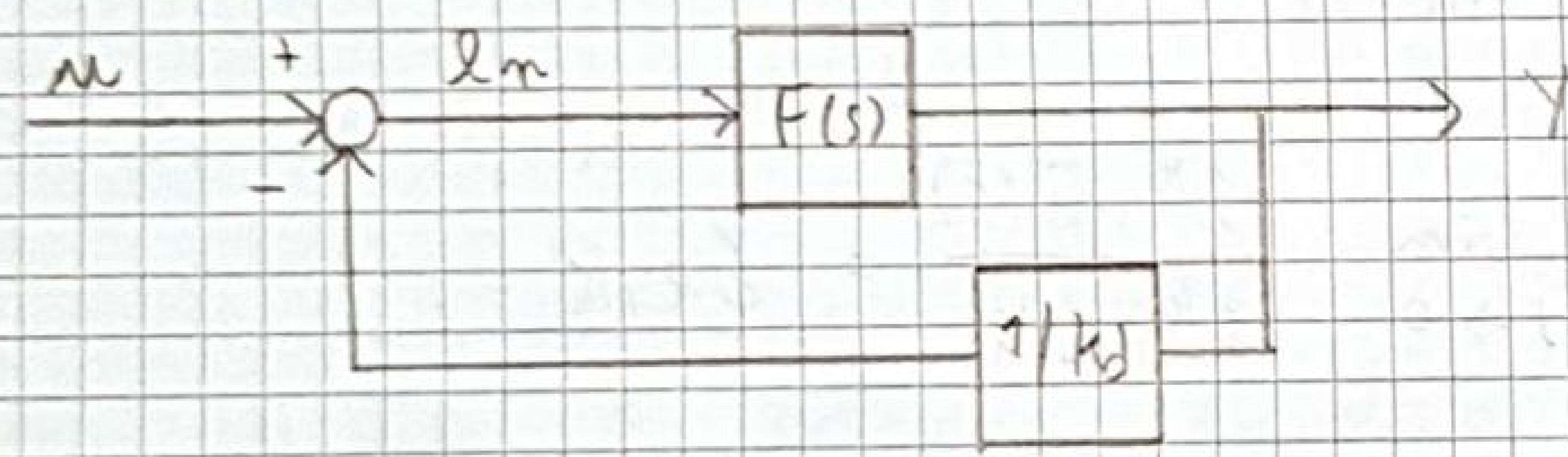


$$Y_{des}(t) = K_d \cdot u(t)$$

$$e(t) = Y_{des}(t) - Y = K_d \cdot u - Y$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K_d\, F_1(s)}{1 + F_1(s) \cdot \frac{K_d}{K_d}} =$$

$$= \frac{\overbrace{K_d\, F_1(s)}^{F(s)}}{1 + \frac{K_d\, F_1(s)}{K_d}} = \frac{F(s)}{1 + \frac{F(s)}{K_d}}$$



$$e_n = u - \frac{Y}{K_d} = \frac{K_d \cdot u - Y}{K_d} = \frac{e(t)}{K_d}$$

$$W_e(s) = K_d - W(s) = K_d - \frac{F(s)}{1 + \frac{F(s)}{K_d}} = \frac{K_d\left(1 + \frac{F(s)}{K_d}\right) - F(s)}{1 + \frac{F(s)}{K_d}} =$$

$$= \frac{K_d^2}{K_d + F(s)}$$

$$F(s) = \frac{nF(s)}{dF(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{K_d^2}{K_d + \frac{nF(s)}{dF(s)}} = \frac{K_d\, dF(s)}{K_d \cdot dF(s) + nF(s)}$$

Riassumendo:

SISTEMA DI TIPO K $\longleftrightarrow$ $W_e(s)$ ha K ZERI in $s = 0$ $\longleftrightarrow$ $F(s)$ ha K POLI in $s = 0$

$$\begin{cases} \tilde{e}_0 = \dfrac{K_d^2}{K_d + K_F} & \text{per } K = 0 \\ \tilde{e}_K = \dfrac{K_d^2}{K_F} & \text{per } K \geq 1 \end{cases}$$

Nel caso di $K \geq 1$:

$$\tilde{e}(t) = \lim_{s \to 0} \frac{W_e(s)}{s^K}$$

$$F(s) = \frac{n_F(s)}{s^K \cdot \bar{d}_F(s)}$$

$$\tilde{e}(t) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{K_d^2}{K_d + \dfrac{n_F(s)}{s^K \cdot \bar{d}_F(s)}} \right) \cdot \frac{1}{s^K} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{K_d^2 \cdot \cancel{s^K} \, \bar{d}_F(s)}{\underbrace{K_d \cdot s^K \cdot \bar{d}_F(s)}_{0} + n_F(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s^K}} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{K_d^2 \, \bar{d}_F(s)}{n_F(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{K_d^2}{\left(\dfrac{n_F(s)}{\bar{d}_F(s)} \right)} = \frac{K_d^2}{K_F}$$