1 Criterio di Nyquist

Si consideri il seguente sistema in controreazione:

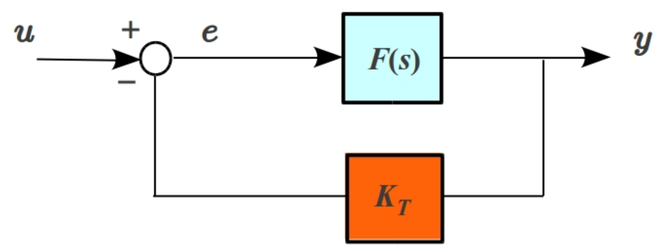

Fig.1 - Schema in controreazione

Theorem 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema a ciclo chiuso di Fig.1 sia stabile è che il diagramma polare della funzione* $F(j\omega)$*, per* ω *che varia tra* $-\infty$ *e* $+\infty$*, compia nel piano di Nyquist un numero* $\overset{\frown}{N}$ *di giri attorno al punto critico* $(-\frac{1}{K_T}, j0)$*, in senso* **antiorario***, pari al numero* P_p *di poli a parte reale positiva di* $F(s)$*. Assumendo come positivo il verso* **orario** *di rotazione, tale condizione diviene:*

$$\overset{\frown}{N} = -P_p \tag{1}$$

Dimostrazione. Sia $W(s)$ la funzione di trasferimento in catena chiusa, che è data da:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + K_T F(s)} \tag{2}$$

Si indichino con $n_F(s)$ e $d_F(s)$ rispettivamente il numeratore ed il denominatore di $F(s)$, e con $n_W(s)$ e $d_W(s)$ rispettivamente il numeratore ed il denominatore di $W(s)$. Si definisca inoltre la funzione $E(s) = 1 + K_T F(s)$. Si può facilmente verificare che:

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{d_W(s)} = \frac{n_F(s)}{d_F(s) + K_T n_F(s)} \tag{3}$$

$$E(s) = \frac{F(s)}{W(s)} = \frac{d_F(s) + K_T n_F(s)}{d_F(s)} = \frac{d_W(s)}{d_F(s)} \tag{4}$$

Dalla relazione (4) si deduce che la funzione $E(s)$ è data dal rapporto tra il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa e il denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta. In altre parole, gli zeri di $E(s)$ coincidono con i poli di $W(s)$, mentre i poli di $E(s)$ coincidono con i poli di $F(s)$. Si calcoli ora la variazione di fase di $E(s)$ per $s = j\omega$, per ω che varia tra $-\infty$ e $+\infty$, cioè quando la variabile s percorre l'intero asse immaginario, da $-\infty$ a $+\infty$. Per far questo, si osservi innanzitutto che:

- $F(s)$ è una funzione fisicamente realizzabile, cioè il grado di $d_F(s)$ è maggiore del grado di $n_F(s)$. Per questo motivo, il grado di $d_W(s)$ è sicuramente uguale al grado di $d_F(s)$. Si indichi tale grado con n, con k_1 il coefficiente del termine di grado massimo di $d_W(s)$ e con k_2 il coefficiente del termine di grado massimo di $d_F(s)$. Dalla fisica realizzabilità della $F(s)$ e dalla (3), si deduce facilmente che $k_2 = k_1$;

- indicando inoltre con $p_{W,1}$, ..., $p_{W,n}$ i poli di $W(s)$, cioè le radici di $d_W(s)$, e con $p_{F,1}$, ..., $p_{F,n}$ i poli di $F(s)$, cioè le radici di $d_F(s)$, si può scrivere:

$$E(s) = \frac{d_W(s)}{d_F(s)} = \frac{k_1(s - p_{W,1}) \cdots (s - p_{W,n})}{k_2(s - p_{F,1}) \cdots (s - p_{F,n})} = \frac{(s - p_{W,1}) \cdots (s - p_{W,n})}{(s - p_{F,1}) \cdots (s - p_{F,n})} \tag{5}$$

Si assuma che né $d_W(s)$ né $d_F(s)$ abbiano radici sull'asse immaginario. Per ricavare la variazione di fase di $E(j\omega)$ per ω che varia tra $-\infty$ e $+\infty$, si consideri che:

$$\angle E(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left(\angle j\omega - p_{W,k} - \angle j\omega - p_{F,k} \right) \tag{6}$$

e che nel piano di Gauss il numero complesso $j\omega - p_{W,k}$, al variare di ω, può essere rappresentato come un vettore che unisce $p_{W,k}$ e il punto dell'asse immaginario $j\omega$, come descritto in Fig.2.

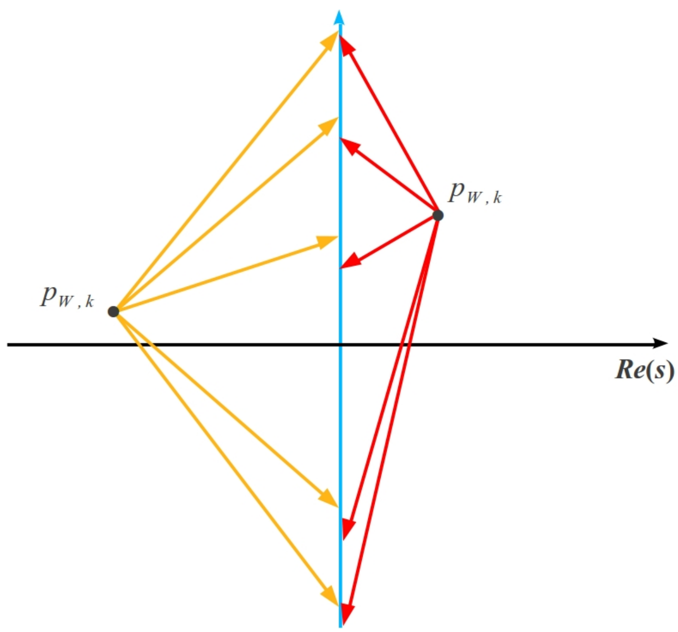

Fig.2 - Piano di Gauss

Dalla medesima figura si nota che, per ω che varia tra $-\infty$ e $+\infty$, la variazione di fase di $j\omega - p_{W,k}$ è pari a π in senso orario, se $p_{W,k}$ è a parte reale positiva, mentre è pari a π in senso antiorario se $p_{W,k}$ è a parte reale negativa. Assumendo come verso positivo per la fase quello orario, si ha una variazione di $+\pi$ quando $p_{W,k}$ è a parte reale positiva, e di $-\pi$ quando $p_{W,k}$ è a parte reale negativa. Un ragionamento analogo può essere fatto per il termine $j\omega - p_{F,k}$. Indicando con ϕ_E la variazione di fase di $E(j\omega)$ per ω che varia tra $-\infty$ e $+\infty$, con Z_p il numero di zeri a parte reale positiva di $E(s)$ (poli a parte reale positiva di $W(s)$), e con P_p il numero di poli a parte reale positiva di $E(s)$ (poli a parte reale positiva di $F(s)$), si ha:

$$\phi_E = Z_p\pi - (n - Z_p)\pi - [P_p\pi - (n - P_p)\pi] = 2\pi\,(Z_p - P_p) \tag{7}$$

Il numero di giri che il diagramma della funzione $E(j\omega)$ compie intorno all'origine è uguale a $\frac{\phi_E}{2\pi}$. Inoltre, dalla definizione di $E(s)$, si può concludere che il numero di giri che il diagramma della funzione $E(j\omega)$ compie intorno all'origine è pari al numero di giri che la funzione $F(j\omega)$ compie intorno al punto critico $(-\frac{1}{K_T}, j0)$. Perciò si può scrivere:

$$\overset{\frown}{N} = (Z_p - P_p) \tag{8}$$

Affinché il sistema in catena chiusa di Fig.1 sia stabile, tutti i poli di $W(s)$, ovvero gli zeri di $E(s)$, devono essere a parte reale negativa, e quindi $Z_p = 0$. Di conseguenza:

$$\overset{\curvearrowright}{N} = -P_p \tag{9}$$

come volevasi dimostrare. $\square$

Caso particolare: se $P_P = 0 \longrightarrow \vec{N} = 0$

CRITERIO DI NYQUIST RIDOTTO

Note:

- Scegliendo il percorso da $w = 0^-$ a $w = 0^+$ in verso ORARIO, $s = 0$ si comporta come un polo a parte reale NEGATIVA

- Scegliendo il percorso da $w = 0^-$ a $w = 0^+$ in verso ANTIORARIO, $s = 0$ si comporta come un polo a parte reale POSITIVA

- $F(s) = \dfrac{\dots}{s^n(\dots)} \longrightarrow$ chiusura $n \cdot 180°$