TD

Lorenzo Segoni

19 novembre 2025

Table des matières

1 TD1 **1**

Chapitre 1

TD1

Exercice 1

Ces familles sont-elles identifiables ?

1. $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma \in \mathbb{R}\}$

2. $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma > 0\}$

3. $\{\mathcal{B}(\rho) : \rho \in]0, 1[\}$

4. $\{\mathcal{E}(\lambda) : \lambda > 0\}$

5. $\{\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$.

Corrigé de l'exercice 1

1. Si on prend le contre exemple

$$\sigma_1 = -5, \sigma_2 = -5 \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) = \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

La famille n'est pas identifiable.

2. Soit σ, σ' et on suppose $P_\sigma = P_{\sigma'}$, implique que pour tout intervalle $I \in \mathbb{R}$

$$\int_I f_\sigma(x)dx = \int_I f_{\sigma'}(x)dx$$

où f_σ densité de P_σ
Par exemple, on doit avoir :

$$\int_{-\infty}^1 f_\sigma(x)dx = \int_{-\infty}^1 f_{\sigma'}(x)dx$$
$$\text{i.e. } F_\sigma(1) = F_{\sigma'}(1)$$
$$\text{i.e. } \Phi(\frac{1}{\sigma}) = \Phi(\frac{1}{\sigma'})$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

On a $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{\sigma} \leq \frac{x}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(\frac{1}{\sigma})\end{aligned}$$

Or Φ est strict croissante.

Donc $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma'} \Rightarrow \sigma = \sigma'$.**La famille est identifiable.**

3. Soit $\rho, \rho' \in]0,1[$ et supposons $P_\rho = P_{\rho'}$. Alors pour tout $k \in \{0,1\}$

$$\mathbb{P}_\rho(X = k) = \mathbb{P}_{\rho'}(X = k)$$

En particulier, pour $k = 1$:

$$\rho = \rho'$$

Pour une loi de Bernoulli, la fonction de masse est $\mathbb{P}(X = 1) = \rho$.

Donc la fonction de masse détermine uniquement le paramètre ρ. **La famille est identifiable.**

4. Soit $\lambda, \lambda' > 0$ et supposons $P_\lambda = P_{\lambda'}$. Considérons la densité exponentielle

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0$$

Si $P_\lambda = P_{\lambda'}$, alors les densités sont égales presque partout :

$$\lambda e^{-\lambda x} = \lambda' e^{-\lambda' x} \quad \text{p.p.}$$

Pour $x > 0$, on doit avoir

$$\lambda e^{-\lambda x} = \lambda' e^{-\lambda' x}$$

En dérivant par rapport à x :

$$-\lambda^2 e^{-\lambda x} = -(\lambda')^2 e^{-\lambda' x}$$

En divisant la deuxième équation par la première :

$$\lambda = \lambda'$$

On peut aussi évaluer les moments : $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$. Si les distributions sont égales, les espérances le sont aussi, donc $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'}$, d'où $\lambda = \lambda'$.

La famille est identifiable.

5. Considérons le contre-exemple : $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$ et $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (\frac{1}{2}, 2)$.
Pour la loi exponentielle bivariée $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2)$, on a la fonction de survie :

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$$

Pour $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$:

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-x-y} = e^{-(x+y)}$$

Pour $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (\frac{1}{2}, 2)$:

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-\frac{x}{2} - 2y}$$

Or $e^{-x-y} \neq e^{-\frac{x}{2} - 2y}$ en général (par exemple pour $x = y = 1$: $e^{-2} \neq e^{-2.5}$).

En fait, on peut montrer que si l'on observe seulement les lois marginales $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$, on récupère bien λ_1 et λ_2. Mais le problème est que deux couples de paramètres différents peuvent donner la même loi bivariée (ou plus précisément, on ne peut identifier que le produit $\lambda_1 \lambda_2$ à partir de certaines informations).

La famille n'est pas identifiable.

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$.

1. Vérifier que

$$\overline{X}_n \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

sont des estimateurs consistants de m et de σ^2.

2. Calculer leur biais et en déduire un estimateur sans biais de σ^2.

Corrigé de l'exercice 2

Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon.

1. On sait que $m = \mathbb{E}[X_1]$.
On considère $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

- $\overline{X}_n$ est fortement consistant par la loi des grands nombres.
- $\overline{X}_n$ est sans biais par linéarité de l'espérance.

C'est un estimateur par la méthode des moments (EMM) de m.

2. Estimation de $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$.
On considère la variance empirique :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X}_n^2 + \overline{X}_n^2 \\ &= \overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2, \end{aligned}$$

où $\overline{X_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Consistance de S_n On sait que :

- $\overline{X_n^2} \xrightarrow[\text{p.s.}]{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_1^2]$ par la loi des grands nombres,
- $\left(\overline{X}_n\right)^2 \xrightarrow[\text{p.s.}]{n\to+\infty} (\mathbb{E}[X_1])^2$ par la loi des grands nombres et continuité de $x \mapsto x^2$.

Donc

$$S_n = \overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2 \xrightarrow[\text{p.s.}]{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2.$$

Ainsi, S_n est consistant (fortement).

Biais de S_n On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\overline{X^2}_n\right] - \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \\
&= \mathbb{E}[X_1^2] - \left(\mathbb{V}(\overline{X}_n) + \mathbb{E}^2[\overline{X}_n]\right) \\
&= \mathbb{E}[X_1^2] - \left(\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} + (\mathbb{E}[X_1])^2\right) \\
&= \mathbb{V}(X_1) - \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{V}(X_1) \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Donc le biais est :

$$\begin{aligned}
B(S_n, \sigma^2) &= \mathbb{E}[S_n] - \sigma^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 \\
&= -\frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

> S_n est un estimateur biaisé de σ^2, mais asymptotiquement sans biais car $B(S_n, \sigma^2) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Variance empirique corrigée Soit

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Alors

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[S_n] = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

Donc $\hat{\sigma}_n^2$ est sans biais.

> — $\hat{\sigma}_n^2$ est appelée **variance empirique corrigée** ou **variance d'échantillon**.
>
> — $\hat{\sigma}_n^2$ est également fortement consistant car $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n$ et $\frac{n}{n-1} \to 1$.
>
> — En pratique, pour n grand, la différence entre S_n et $\hat{\sigma}_n^2$ est négligeable.

Exercice 3

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. On propose comme estimateurs de m, $\overline{X}_n$ et

$$T_{n,1} = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}).$$

1. Montrer que $T_{n,1}$ est sans biais.

2. Lequel des deux estimateurs $\overline{X}_n$ et $T_{n,1}$ choisiriez-vous pour estimer m ?

3. Que pensez-vous de l'estimateur $T_{n,2} = 0$ pour l'estimation de m ?

Corrigé de l'exercice 3

1. $T_{n,1}$ est sans biais :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{n,1}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_{n-1} + X_n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n]\right) \\
&= \frac{1}{2}(m + m) \\
&= m.
\end{aligned}$$

Donc $T_{n,1}$ est sans biais.

2. Comparaison de $\overline{X}_n$ et $T_{n,1}$:

On compare les risques quadratiques. Comme les deux estimateurs sont sans biais, le risque quadratique est égal à la variance.

Risque de $\overline{X}_n$:

$$\begin{aligned}
R(\overline{X}_n, m) &= \mathbb{V}(\overline{X}_n) \\
&= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Risque de $T_{n,1}$:

$$\begin{aligned}
R(T_{n,1}, m) &= \mathbb{V}(T_{n,1}) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}(X_{n-1} + X_n)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}(X_{n-1}) + \mathbb{V}(X_n)\right) \quad \text{car } X_{n-1} \perp\!\!\!\perp X_n \\
&= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{2}.
\end{aligned}$$

Comparaison :

— Si $n = 2$: $R(\overline{X}_n, m) = \frac{\sigma^2}{2} = R(T_{n,1}, m)$, donc $\overline{X}_2 = T_{2,1}$.

— Si $n > 2$: $R(\overline{X}_n, m) = \frac{\sigma^2}{n} < \frac{\sigma^2}{2} = R(T_{n,1}, m)$.

Conclusion : On préfère $\overline{X}_n$ à $T_{n,1}$ pour $n > 2$, car il est meilleur au sens du risque quadratique.

3. Estimateur $T_{n,2} = 0$:

Le risque quadratique de $T_{n,2}$ est :

$$\begin{aligned}
R(T_{n,2}, m) &= \mathbb{E}[(T_{n,2} - m)^2] \\
&= \mathbb{E}[(0 - m)^2] \\
&= m^2.
\end{aligned}$$

Comparaison avec $\overline{X}_n$:

$$R(\overline{X}_n, m) < R(T_{n,2}, m) \iff \frac{\sigma^2}{n} < m^2 \iff |m| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Donc $T_{n,2} = 0$ est “préférable” à $\overline{X}_n$ au sens du risque quadratique lorsque

$$|m| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

— Cet estimateur est néanmoins “stupide” car il ne dépend pas des observations !

— Lorsque $n \to +\infty$, l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $T_{n,2}$ est meilleur devient de plus en plus petit : $\left\{m : |m| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \to \{0\}$.

— Cela illustre qu'un estimateur peut être meilleur au sens du risque quadratique pour certaines valeurs du paramètre tout en étant manifestement inadéquat d'un point de vue pratique.

— $\overline{X}_n$ est préférable car il est consistant, contrairement à $T_{n,2}$.

Exercice 4

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta), \theta > 0$.

1. Un statisticien propose d'estimer θ par :

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

a. Justifier que $\widehat{\theta}_n$ est bien définie.

b. Calculer $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_n]$ et expliquer le choix du statisticien.

c. Donner la loi limite de $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$.

d. Donner la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_n]$, $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$, et $\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_n - \theta)^2]$.

2. Un statisticien propose d'utiliser

$$\widehat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{\overline{X}_n}.$$

a. L'estimateur $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ vérifie-t-il toujours des propriétés asymptotiques similaires à $\widehat{\theta}_n$?

b. Calculer $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_n^{(2)}]$, $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n^{(2)})$, et $\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2]$. Quel estimateur préférez-vous ?

Corrigé de l'exercice 4

1.

a. Pour que $\hat{\theta}_n$ soit bien défini, il faut $\bar{X}_n \neq 0$.
Or $\mathbb{P}(\bar{X}_n > 0) = 1$ car $\forall i, \mathbb{P}(X_i > 0) = 1$ (loi exponentielle).
Donc $\hat{\theta}_n$ est bien défini *presque sûrement*.

b. Calcul de l'espérance :

On rappelle que pour $X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$, on a $\mathbb{E}_\theta[X_i] = \frac{1}{\theta}$ et $\mathbb{V}_\theta(X_i) = \frac{1}{\theta^2}$.
Donc $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et consistant (fortement) pour l'estimation de $\frac{1}{\theta}$ par la loi forte des grands nombres.
$\hat{\theta}_n$ est un *estimateur par méthode des moments (EMM)* de θ.

> $\bar{X}_n$ est un EMM de $\frac{1}{\theta}$. Si on pose $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$ est un EMM de $g(\frac{1}{\theta}) = \theta$.

Propriétés asymptotiques :

— $\bar{X}_n$ est sans biais et consistant (fortement) pour l'estimation de $\frac{1}{\theta}$

— g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème de continuité, $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$ est consistant (fortement) pour l'estimation de $g(\frac{1}{\theta}) = \theta$

> En revanche, il n'y a aucune raison que $\hat{\theta}_n$ soit sans biais. En effet, par l'inégalité de Jensen (car g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$), on a $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[g(\bar{X}_n)] > g(\mathbb{E}[\bar{X}_n]) = g(\frac{1}{\theta}) = \theta$. L'estimateur est donc biaisé positivement.

c. Loi limite par la méthode Delta :

Étape 1 - TCL : Par le Théorème Central Limite, on a :

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{V}_\theta(X_i)\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right)$$

Étape 2 - Méthode Delta : Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Cette fonction est dérivable avec $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
En particulier, $g'\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{\theta})^2} = -\theta^2 \neq 0$.
Par la méthode Delta, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) &= \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)^2 \mathbb{V}_\theta(X_i)\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, (-\theta^2)^2 \cdot \frac{1}{\theta^2}\right) \\
&= \mathcal{N}(0, \theta^2)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)}$

d. Loi de la somme :

Pour $X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta)$$

Plus précisément, $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n)$ (loi du khi-deux à $2n$ degrés de liberté).
Loi de $\hat{\theta}_n$:
Puisque $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$, on a :

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{2n\theta}{2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{2n\theta}{U}$$

où $U \sim \chi^2(2n)$.
Calcul de $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$:
Pour $U \sim \chi^2(2n)$, on a $\mathbb{E}\left[\frac{1}{U}\right] = \frac{1}{2n-2}$ (pour $n \geq 2$).
Donc :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = 2n\theta \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{U}\right] = 2n\theta \cdot \frac{1}{2n-2} = \frac{n}{n-1}\theta$$

Calcul de $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$:
Pour $U \sim \chi^2(2n)$, on a $\mathbb{V}\left(\frac{1}{U}\right) = \frac{1}{(2n-2)^2(2n-4)}$ (pour $n \geq 3$).
Donc :

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = (2n\theta)^2 \cdot \mathbb{V}\left(\frac{1}{U}\right) = 4n^2\theta^2 \cdot \frac{1}{(2n-2)^2(2n-4)} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

Calcul du risque quadratique (EQM) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] &= \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) + \left(\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta\right)^2 \\
&= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{n}{n-1}\theta - \theta\right)^2 \\
&= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{\theta}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \\
&= \frac{\theta^2}{(n-1)^2}\left(\frac{n^2}{n-2} + 1\right) \\
&= \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2+n-2}{n-2} \\
&= \frac{\theta^2(n^2+n-2)}{(n-1)^2(n-2)}
\end{aligned}$$

On peut simplifier : $n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2)$, donc :

$$\boxed{\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \frac{\theta^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}}$$

2.

a. Propriétés asymptotiques de $\hat{\theta}_n^{(2)}$:

On a $\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n$.

Consistance : Puisque $\frac{n-1}{n} \to 1$ et $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta$, on a :

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} 1 \cdot \theta = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_n^{(2)}$ est consistant.

Loi limite :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) &= \sqrt{n}\left(\frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n - \theta\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \theta\sqrt{n}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \frac{\theta}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Or $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$ et $\frac{\theta}{\sqrt{n}} \to 0$.

Par le lemme de Slutsky :

$$\boxed{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)}$$

Conclusion : Oui, $\hat{\theta}_n^{(2)}$ vérifie les mêmes propriétés asymptotiques que $\hat{\theta}_n$ (même loi limite).

b. Calcul des caractéristiques de $\hat{\theta}_n^{(2)}$:

Espérance :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^{(2)}] = \frac{n-1}{n}\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}\theta = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_n^{(2)}$ est **sans biais** !

Variance :

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n^{(2)}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\theta^2}{n-2}$$

EQM :

Puisque $\hat{\theta}_n^{(2)}$ est sans biais :

$$\boxed{\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2] = \mathbb{V}(\hat{\theta}_n^{(2)}) = \frac{\theta^2}{n-2}}$$

Comparaison des estimateurs :

Estimateur	Biais	Variance	EQM
$\hat{\theta}_n$	$\frac{\theta}{n-1}$	$\frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$	$\frac{\theta^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}$
$\hat{\theta}_n^{(2)}$	0	$\frac{\theta^2}{n-2}$	$\frac{\theta^2}{n-2}$

Comparaison de l'EQM :

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_n)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_n^{(2)})} = \frac{\theta^2(n+2)}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n-2}{\theta^2} = \frac{n+2}{n-1} > 1$$

Conclusion : On préfère $\boxed{\hat{\theta}_n^{(2)}}$ car :

- Il est sans biais
- Il a une variance plus faible que $\hat{\theta}_n$
- Il a un risque quadratique plus faible : $\text{EQM}(\hat{\theta}_n^{(2)}) < \text{EQM}(\hat{\theta}_n)$
- Il conserve les mêmes propriétés asymptotiques (consistance, normalité asymptotique)

L'estimateur $\hat{\theta}_n^{(2)}$ est obtenu en corrigeant le biais de $\hat{\theta}_n$. C'est un estimateur **sans biais à variance minimale** parmi ceux de la forme $c\hat{\theta}_n$.

Exercice 5

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x),$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1. On pose $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

  a. Donner la densité de $X_{(n)}$.

  b. Calculer $\mathbb{E}[X_{(n)}]$, $\mathbb{E}[X_{(n)}^2]$, puis en déduire $\mathbb{V}(X_{(n)})$.

  c. Montrer que $X_{(n)}$ est consistant pour l'estimation de θ.

2. Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ puis en déduire un estimateur $\widehat{\theta}_n$ consistant de θ.

3. Qui de $X_{(n)}$ ou $\widehat{\theta}_n$ choisiriez-vous pour estimer θ ?

Corrigé de l'exercice 5

1.

a. Soit $t \in [0, \theta]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq t) &= \mathbb{P}_\theta(\forall i,\, X_i \leq t) \\ &= [\mathbb{P}_\theta(X_i \leq t)]^n\end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(X_i \leq t) &= \int_0^t \frac{2x}{\theta^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t \\ &= \frac{t^2}{\theta^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) = \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}$$

Ainsi $X_{(n)}$ admet pour densité :

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

b. Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_0^\theta x \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1}\, dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta x^{2n}\, dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^\theta \\ &= \frac{2n}{2n+1}\,\theta\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_0^\theta x^2 \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1}\, dx \\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta x^{2n+1}\, dx \\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^\theta \\
&= \frac{n}{n+1}\,\theta^2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\theta[X_{(n)}] &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \mathbb{E}^2[X_{(n)}] \\
&= \frac{n}{n+1}\theta^2 - \frac{4n^2}{(2n+1)^2}\theta^2 \\
&= \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

c. Méthode 1 :

$$R(X_{(n)}, \theta) = \underbrace{\mathbb{V}_\theta(X_{(n)})}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{(B(X_{(n)}, \theta))^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

Ainsi $X_{(n)}$ est **consistant** (puisque convergent en L^2).

MÉTHODE 2 : Soit $\epsilon > 0$ tel que $\theta - \epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta(|X_{(n)} - \theta| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}_\theta(\theta - X_{(n)} \geq \epsilon) \\
&= \mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq \theta - \epsilon) \\
&= \frac{(\theta-\epsilon)^{2n}}{\theta^{2n}} \\
&= \left(\frac{\theta-\epsilon}{\theta}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ (consistance faible).

2. On a :

$$\mathbb{E}_\theta[X_i] = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2}\, dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{2}{3}\theta$$

On pose :

$$\hat{\theta}_n = \frac{3}{2}\bar{X}_n$$

un estimateur du moment de θ, sans biais et (faiblement) consistant.

3. Calcul du risque quadratique :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{9}{4}\mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{9}{4n}\mathbb{V}_\theta(X_i)$$

Or,

$$\mathbb{E}_\theta[X_i^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{2x}{\theta^2}\, dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

Donc :

$$\mathbb{V}_\theta(X_i) = \mathbb{E}_\theta[X_i^2] - \mathbb{E}_\theta^2[X_i] = \frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

Ainsi :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \frac{9}{4n} \cdot \frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8n}$$

et

$$\begin{aligned} R(X_{(n)}, \theta) &= \frac{\theta^2(2n+1)}{(n+1)(2n+1)^2} \\ &= \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Donc, d'un point de vue asymptotique, on préfère $X_{(n)}$, car la convergence de son risque quadratique est beaucoup plus rapide !

Remarque :

$$\frac{R(X_{(n)}, \theta)}{R(\hat{\theta}_n, \theta)} = \frac{8n}{(n+1)(2n+1)}$$

et

$$\frac{R(X_{(n)}, \theta)}{R(\hat{\theta}_n, \theta)} \leq 1 \iff 8n \leq (n+1)(2n+1) \iff 2n^2 - 5n + 1 \geq 0$$

On remarque que pour $n \geq 3$, on a bien :

$$R(X_{(n)}, \theta) \leq R(\hat{\theta}_n, \theta)$$

Exercice 6

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{[\theta,+\infty]}(x),$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1. Montrer que $Y = X_1/\theta - 1$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

2.

a. Déterminer la fonction de répartition de $X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

b. Calculer le risque quadratique de $X_{(1)}$ pour l'estimation de θ puis analyser la consistance de cet estimateur.

3.

a. Estimer θ par la méthode des moments.

b. Quelle est la loi limite de l'estimateur ainsi obtenu ? Étudier également sa convergence en moyenne quadratique.

4. Comparer les deux estimateurs.

Corrigé de l'exercice 6

1. Soit $Y = X_1/\theta - 1$. On cherche la loi de Y.
On a $X_1 \sim f_\theta$ où $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$.
Par changement de variable : $Y = \frac{X_1}{\theta} - 1 \Rightarrow X_1 = \theta(Y+1)$.
On a $X_1 \geq \theta \Rightarrow Y + 1 \geq 1 \Rightarrow Y \geq 0$.
Le Jacobien est $\frac{dX_1}{dY} = \theta$. Donc

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_\theta(\theta(y+1)) \cdot |\theta| \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta(y+1)-\theta}{\theta}} \cdot \theta \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) \\ &= e^{-y} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) \end{aligned}$$

On reconnaît la densité de $\mathcal{E}(1)$. Donc $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Ainsi $Y = X_1/\theta - 1 \sim \mathcal{E}(1)$**.**

2.

a. Déterminer $F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x)$ où $X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(1)} > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) \quad \text{(indépendance)} \\
&= [\mathbb{P}(X_1 > x)]^n
\end{aligned}$$

Or, pour $x \geq \theta$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t-\theta}{\theta}} dt \\
&= e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}
\end{aligned}$$

Pour $x < \theta$: $\mathbb{P}(X_1 > x) = 1$.
Donc, pour $x \geq \theta$:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - e^{-n\frac{x-\theta}{\theta}}$$

et pour $x < \theta$: $F_{X_{(1)}}(x) = 0$.

b. On peut écrire $X_{(1)} = \theta + \theta Z$ où $Z \sim \mathcal{E}(n)$.
En effet, pour $z \geq 0$:

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - e^{-nz}$$

ce qui est la CDF de $\mathcal{E}(n)$.
Donc $\mathbb{E}[X_{(1)}] = \theta + \theta\mathbb{E}[Z] = \theta + \theta \cdot \frac{1}{n} = \theta\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Et $\mathbb{V}(X_{(1)}) = \theta^2\mathbb{V}(Z) = \theta^2 \cdot \frac{1}{n^2}$.
Le risque quadratique de $X_{(1)}$ pour estimer θ est :

$$\begin{aligned}
R(\theta, X_{(1)}) &= \mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2] \\
&= \mathbb{V}(X_{(1)}) + (\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta)^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n^2} + \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n^2} + \frac{\theta^2}{n^2} \\
&= \frac{2\theta^2}{n^2}
\end{aligned}$$

> Bien sûr, on peut aussi calculer directement : $\mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2] = \mathbb{V}(\theta Z) + (\mathbb{E}[\theta Z])^2 = \theta^2\mathbb{V}(Z) + \theta^2 (\mathbb{E}[Z])^2 = \theta^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\theta^2}{n^2}$.

Le risque quadratique tend vers 0 quand $n \to \infty$ à vitesse $1/n^2$.
L'estimateur $X_{(1)}$ est convergent en moyenne quadratique.

Par Chebyshev, $X_{(1)} \xrightarrow{L^2} \theta$, donc aussi $X_{(1)} \xrightarrow{p} \theta$.

3.

a.

Estimation par la méthode des moments.
D'abord, calculons $\mathbb{E}[X_1]$:

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_\theta^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx$$

Par changement de variable $u = \frac{x-\theta}{\theta}$, on a $x = \theta(u+1)$ et $dx = \theta du$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1] &= \int_0^{+\infty} \theta(u+1)e^{-u} du \\
&= \theta \int_0^{+\infty} (u+1)e^{-u} du \\
&= \theta \left[\int_0^{+\infty} ue^{-u} du + \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right] \\
&= \theta[1+1] = 2\theta
\end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \Gamma(2) = 1$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$.

Par la méthode des moments, on égalise le moment empirique au moment théorique :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2\theta$$

Donc l'estimateur est :

$$\widehat{\theta}_n^{(MM)} = \frac{\overline{X}_n}{2}$$

b. Loi limite et convergence en moyenne quadratique.
Par le théorème limite central, puisque $\mathbb{E}[X_1] = 2\theta$ et $\mathbb{V}(X_1) < \infty$, on a :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$.
Calculons $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2] &= \int_\theta^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \theta^2 (u+1)^2 e^{-u} du \\ &= \theta^2 \int_0^{+\infty} (u^2+2u+1) e^{-u} du \\ &= \theta^2 [2+2+1] = 5\theta^2\end{aligned}$$

> $\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \Gamma(3) = 2.$

Donc $\mathbb{V}(X_1) = 5\theta^2 - 4\theta^2 = \theta^2$.
Par conséquent :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

Donc :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n^{(MM)} - \theta\right) = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{n}(\overline{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$$

Loi limite : $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n^{(MM)} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$.
Pour la convergence en moyenne quadratique :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\theta}_n^{(MM)} - \theta\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\overline{X}_n - 2\theta}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{E}[(\overline{X}_n - 2\theta)^2] \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}(\overline{X}_n) + (\mathbb{E}[\overline{X}_n] - 2\theta)^2\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta^2}{n} \\ &= \frac{\theta^2}{4n}\end{aligned}$$

L'estimateur converge en moyenne quadratique avec $R(\theta, \widehat{\theta}_n^{(MM)}) = \frac{\theta^2}{4n}$.

4. Comparaison des deux estimateurs.

- **Estimateur du minimum :** $\hat{\theta}_n^{(1)} = X_{(1)}$
  - Risque quadratique : $R(\theta, X_{(1)}) = \frac{2\theta^2}{n^2}$
  - Vitesse de convergence : $1/n^2$ (super-rapide !)
  - Biais : $\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta = \frac{\theta}{n}$ (estimateur biaisé)

- **Estimateur des moments :** $\widehat{\theta}_n^{(MM)} = \frac{\overline{X}_n}{2}$
  - Risque quadratique : $R(\theta, \widehat{\theta}_n^{(MM)}) = \frac{\theta^2}{4n}$
  - Vitesse de convergence : $1/n$ (convergence standard)
  - Biais : $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_n^{(MM)}] - \theta = 0$ (estimateur sans biais)

Le ratio des risques est $\frac{R(\theta, X_{(1)})}{R(\theta, \widehat{\theta}_n^{(MM)})} = \frac{2\theta^2/n^2}{\theta^2/(4n)} = \frac{8}{n}$. Pour n grand, $X_{(1)}$ est beaucoup meilleur que l'estimateur des moments !

Conclusion : $X_{(1)}$ est un meilleur estimateur que $\widehat{\theta}_n^{(MM)}$ asymptotiquement, car il converge plus vite (à vitesse $1/n^2$ au lieu de $1/n$). Bien que $X_{(1)}$ soit biaisé, son biais décroît assez vite pour que le risque global soit plus petit.