

Modélisation Déterministe

Lorenzo Segoni

20 novembre 2025

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Exemples Historiques	1
1.1.1	Les Grandes Épidémies Historiques	1
1.1.2	Les Défis Sanitaires Contemporains	3
1.1.3	Focus sur les Épidémies Émergentes	4
1.1.4	Les Vecteurs Contemporains : Le Moustique Tigre	6
1.1.5	Les Coronavirus : De SARS-CoV-2 au Khosta-2	8
1.2	L'Émergence Accélérée de Nouvelles Maladies	10
1.3	La Modélisation Mathématique des Épidémies	11
1.3.1	Développement Historique	11
1.3.2	La modélisation	12
1.3.3	But de la modélisation	12
1.3.4	Hypothèses et but de la modélisation	13
1.3.5	Notations	13
1.3.6	Mécanismes de transmission de l'infection	14
1.3.7	Hypothèses pour les modèles SI, SIS et SIR	17
1.4	Action de masse	18
2	Le Modèle <i>SI</i>	21
2.1	Introduction	21
2.2	Le modèle	21
2.3	Points d'équilibre	26
2.3.1	Recherche des points d'équilibre pour le modèle <i>SI</i>	27
2.4	Représentation dans le plan de la trajectoire	27
2.5	La courbe d'épidémie : incidence	28
3	Le Modèle <i>SIS</i>	31
3.1	Introducation	31
3.2	Le modèle	31
3.3	Recherche des points d'équilibre du modèle	37
3.4	Interprétation de la condition $\mathcal{R}_0 > 1$	38

3.5 Représentation dans le plan de la trajectoire	39
4 Le Modèle SIR (sans naissances-morts)	41
4.1 Introduction	41
4.2 Le modèle	41
4.3 Situation épidémique et de non épidémique	43
4.4 Nombre de reproduction de base (basic reproduction number) R_0	47
4.5 Étude qualitative du système (4.1)	47
4.5.1 Les points d'équilibre du système (4.2)	50
4.5.2 Étude des trajectoires dans le plan SI	54
4.5.3 Comment trouver S_∞ ?	57
4.5.4 Solution approchée dans le cas d'une épidémie non sévère	60
4.5.5 Estimation de la taille de l'épidémie lorsque $S_0 \approx \rho$ et $S_0 > \rho$	63
4.5.6 Estimation des paramètres du modèle	65
4.5.7 Courbes typiques	66
4.5.8 Réduction de \mathcal{R}_0	66
4.6 Étude de cas	68
4.6.1 La grande épidémie de peste à Londres : village d'Eyam (1665-1666)	68
4.6.2 Cas d'une épidémie dite sévère ($\frac{R(t)}{\rho}$ non petit)	70
5 Système différentiels	77
5.1 Introduction	77
5.2 Notions de stabilité (au sens de Lyapounov) d'un point d'équilibre	78
5.3 Stabilité des systèmes linéaires	80
5.4 Stabilité des systèmes linéaires perturbés	83
5.5 Stabilité des systèmes non linéaires	84
6 Annexe : Théorèmes utilisé	107
6.1 Théorèmes fondamentaux : des gendarmes et des accroissements finis	107
6.2 Théorèmes Equation Differentielle	108
6.3 Fonctions hyperboliques	110
6.4 Développements limités	114

Chapitre 1

Introduction

1.1 Exemples Historiques

Les maladies infectieuses ont marqué l'histoire de l'humanité de manière dramatique, causant des millions de morts et transformant profondément les sociétés. De la peste noire médiévale aux pandémies contemporaines, ces fléaux continuent de représenter un défi majeur pour la santé publique mondiale. *En France, les maladies infectieuses constituent aujourd'hui la troisième cause de mortalité*, illustrant l'importance persistante de cette problématique sanitaire.

1.1.1 Les Grandes Épidémies Historiques

La Peste Noire (1346-1350)

Entre 1346 et 1350, la peste noire, probablement bubonique, a tué le quart de la population européenne. Cette épidémie, causée par la bactérie *Yersinia pestis*, a particulièrement ravagé la France avec des bilans dramatiques dans les principales villes.

En France, on dénombra par exemple 120 000 morts en Provence, 45 000 à Lyon et 100 000 à Rouen. Cette épidémie s'est répétée régulièrement pendant plus de 300 ans, notamment lors de la Grande peste de Londres en 1665-1666.

Les inquisiteurs du Moyen Âge ont lourdement aggravé les ravages de la grande peste. En 1233, le Pape Grégoire IX a déclaré dans une bulle pontificale que le chat, incarnant la luxure et la paresse, était un serviteur du diable. *Les inquisiteurs les ont pourchassés et exterminés, ce qui a permis aux rats de pulluler dans les villes.* Lorsque les rats, vecteurs de la Peste Noire, ont débarqué en France, ils se sont multipliés faute de prédateurs et ont répandu le fléau.

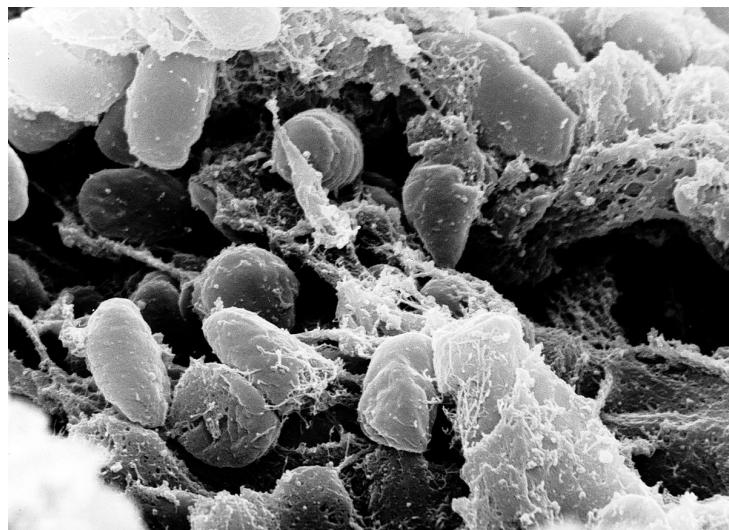


FIGURE 1.1 – *Yersinia pestis* : la bactérie responsable de la peste noire principalement bubonique

La Variole et les Populations Amérindiennes

La petite vérole ou variole, maladie très contagieuse et immunisante dont 15% de cas sont mortels, a tué environ 2 millions d’Aztèques.

La Grippe Espagnole (1918-1919)

L’épidémie de grippe de 1918-1919, dite grippe espagnole, a fait entre 50 à 100 millions de morts au total. Cette pandémie reste l’une des plus meurtrières de l’histoire moderne.

Autres Épidémies Historiques Marquantes

Le virus de la grippe de Hong Kong (pandémie de 1968-1969) a causé 1 million de morts. Cette pandémie était causée par une souche réassortie H3N2 du virus H2N2 de la grippe A.

De 1918 à 1921, 25 millions de personnes en Russie furent atteintes de typhus. Cette maladie est causée par les Rickettsies, famille de bactéries responsables du typhus. *La Rickettsie sévit à l’état endémique chez les rongeurs qui lui servent d’hôte, y compris les souris et les rats, et est transmise aux humains par la morsure ou piqûre d’acariens, de puces et des poux de corps.*



FIGURE 1.2 – Jeune fille du Bangladesh atteinte de variole en 1973

1.1.2 Les Défis Sanitaires Contemporains

Bilan Actuel des Maladies Infectieuses

Malgré les progrès de la médecine dans la lutte contre les maladies, on observe encore, par an :

- **Un million de morts dues à la malaria ou paludisme**
- *Plus de 100 millions de cas de malaria en Inde*
- **Un million de morts dues à la rougeole**
- **Deux millions de morts dues à la tuberculose**
- **Trois millions de morts dues au V.I.H. dont 3 500 en France**, avec dix millions d'infectés par le V.I.H.

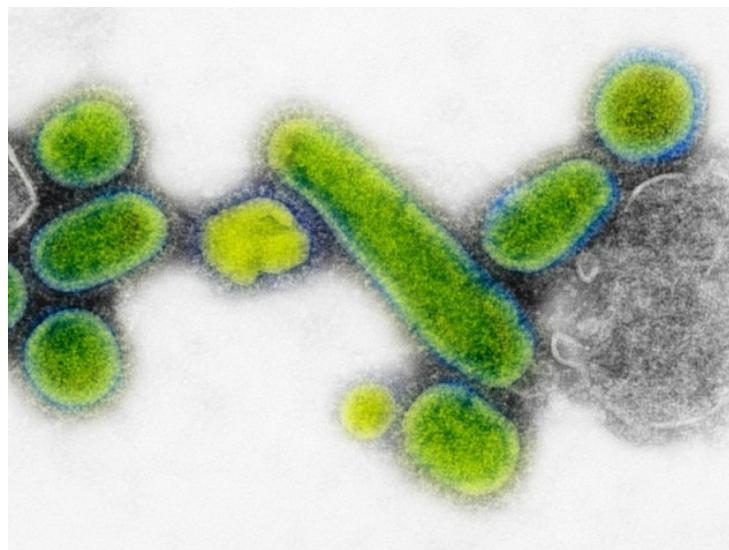


FIGURE 1.3 – Virus reconstitué de la grippe espagnole, celui qui est le plus proche par ses effets sur l'organisme du virus H5N1 (grippe A)

- **Trois millions de morts dues aux maladies respiratoires**
- *Près de deux millions de morts dues à la tuberculose (liés dans un grand nombre de cas au Sida) dont 700 en France*

Les Épidémies Émergentes Récentes

Plus récemment, plusieurs virus ont suscité la préoccupation de la communauté internationale : *le virus d’Ebola, l’épidémie de SRAS en 2002-2003, la dengue, le chikungunya, la fièvre Zika et le coronavirus Sars-Cov-2 (Covid-19)*. L’apparition de plusieurs souches de la grippe aviaire a entraîné l’abattage forcé de millions de volailles.

1.1.3 Focus sur les Épidémies Émergentes

L’Épidémie de Fièvre Hémorragique Ebola

Ce virus, qui provoque des fièvres hémorragiques, tire son nom d’une rivière du Nord de l’actuelle République démocratique du Congo (ex-Zaïre), où il a été repéré pour la première fois en 1976. Son taux de mortalité varie entre 25 et 90% chez l’homme.

L’épidémie de fièvre hémorragique Ebola en Afrique de l’ouest a tué plus de 2 400 personnes sur 4 784 cas au 12 septembre 2014, selon l’OMS. Dans les trois pays les plus touchés (Guinée, Libéria et Sierra Leone), le nombre de cas avait augmenté plus vite que la capacité à les gérer.

L’Organisation mondiale de la santé avait rappelé qu’il n’y avait plus un seul lit disponible pour traiter les patients d’Ebola au Libéria. En résumé, l’épidémie qui a sévi en

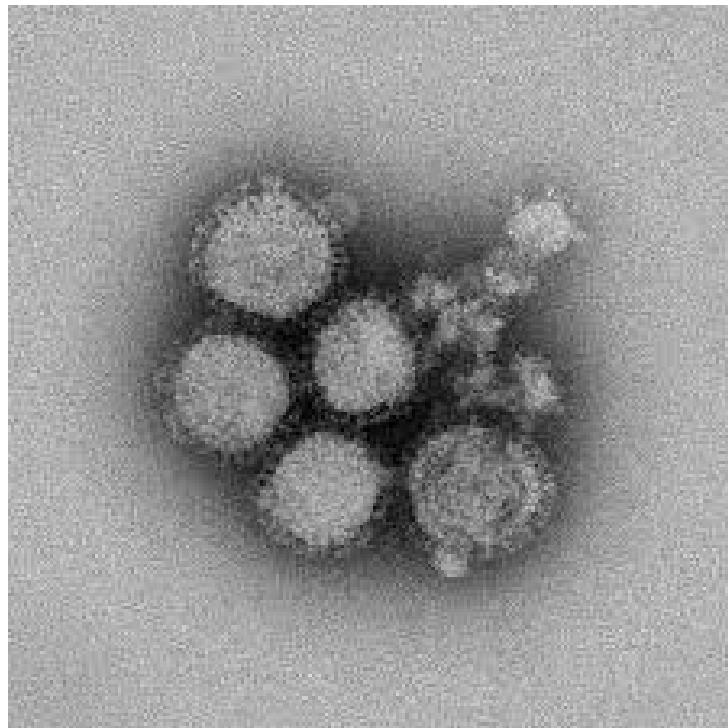


FIGURE 1.4 – Souche de l'agent responsable de la pandémie de 1968 : grippe de Hong Kong, causée par une souche réassortie H3N2 du virus H2N2 de la grippe A

Afrique de l'Ouest en 2014 et 2015 affichait une létalité de 39,5% au 27 mars 2016 (11 323 morts sur 28 646 cas recensés).

La Maladie de Marburg

Le lundi 9 août, l'OMS alerte sur la maladie de Marburg qui continue sa progression avec la détection du premier cas en Afrique de l'Ouest, en Guinée. **Hautement transmissible, la maladie à virus de Marburg est un cousin à peine moins meurtrier du virus Ebola, contre lequel il n'y a ni vaccin ni traitement.** Elle se manifeste par une fièvre aiguë accompagnée d'hémorragies internes et externes entraînant la mort dans 50% des cas en moyenne.

La maladie, autrefois appelée fièvre hémorragique à virus Marburg, tire son nom de la ville allemande où elle a été identifiée pour la première fois en 1967. Ce virus de la famille des filoviridae, comme Ebola, se transmet à l'homme par les chauves-souris frugivores (roussettes), considérées comme l'hôte naturel du virus.

Le Virus Chapare

Ce virus est apparu en 2004 en Bolivie, dans la province de Chapare qui lui a donné son nom. Dans un hôpital de La Paz, plusieurs personnes ont été prises en charge pour une fièvre hémorragique. *Cinq personnes en contact avec ces patients ont été à leur tour infectées, dont un interne en médecine, un ambulancier et un gastro-entérologue.*

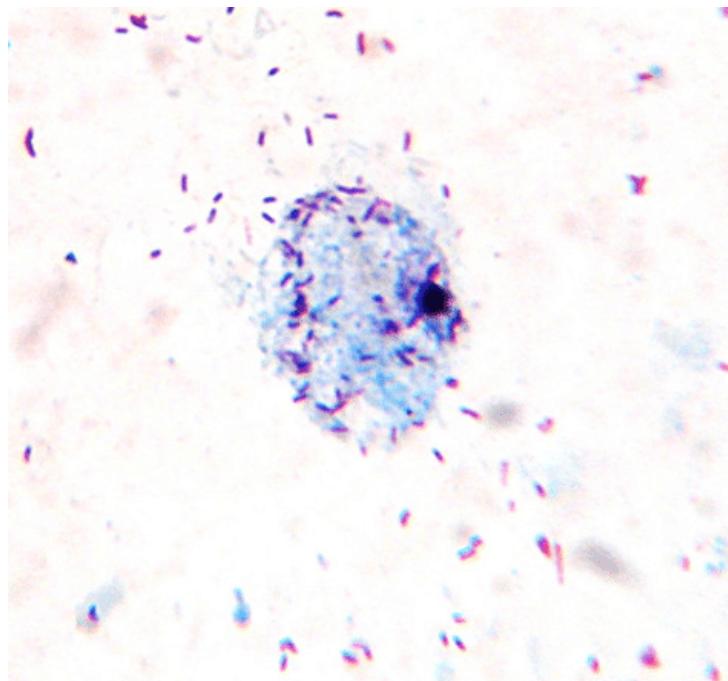


FIGURE 1.5 – Les Rickettsies : famille de bactéries responsable du typhus



FIGURE 1.6 – Image colorisée d'une particule virale Ebola obtenue par microscopie électronique en transmission en août 2014

Au total, trois personnes sont décédées.

Ce qui inquiète les scientifiques, c'est qu'il s'agit de la première description de la transmission interhumaine du virus Chapare. Les patients infectés ont souffert de fièvres, de douleurs abdominales, de vomissements et de saignements de gencives. *Aucun traitement spécifique n'existe à ce jour.*

1.1.4 Les Vecteurs Contemporains : Le Moustique Tigre

Présentation et Répartition

D'après Santé Publique France, au 1er mai 2020, l'Aedes albopictus est présent dans 57 départements français.



FIGURE 1.7 – Aedes aegypti est une espèce de moustique qui est le vecteur principal de la dengue, du virus Zika, du chikungunya et de la fièvre jaune. Il en est de même d’Aedes albopictus

Le Virus Zika

Proche du virus de la dengue et du chikungunya, le virus Zika a fait son apparition en novembre 2019 dans le Var (3 cas avérés) et 1 cas importé (Île-de-France) entre le 1er mai et le 13 septembre 2020.

Le virus Zika est une maladie virale transmise à l'homme par l'intermédiaire d'une piqûre du moustique du genre Aedes. Dans certains cas, le virus peut se transmettre par voie sexuelle. Les symptômes sont le plus souvent bénins mais le virus peut provoquer des anomalies congénitales en cas d'infection pendant la grossesse.

Ce virus Zika, identifié pour la première fois en Ouganda dans la forêt du même nom en 1947, débarque dans nos contrées. Une fois contaminé, l'hôte peut contracter de la fièvre, des douleurs musculaires, ou des éruptions cutanées. *Dans les cas les plus graves, des complications neurologiques ont aussi été observées.*

Durant l'épidémie de 2013-2014, la Polynésie française a fait état de 32 000 personnes touchées par le virus Zika. Selon le HCSP, 72 d'entre elles avaient présenté des complications neurologiques graves, dont 42 syndromes de Guillain-Barré, qui peut déboucher sur une paralysie totale des membres et du visage.

La Dengue à Paris

La dengue a été détectée dans le 13ème puis le 15ème arrondissement de Paris depuis fin août 2023. Pour éviter toute propagation, une opération de démosication a été diligentée par l'ARS Île-de-France dans la nuit du vendredi 15 au samedi 16 septembre 2023.

L'épandage de produits insecticides s'est déroulé dans le 15ème arrondissement et plus particulièrement dans le quartier Dombasle, dans un rayon de 150 mètres autour du domicile des personnes contaminées. Les habitants ont été invités à rentrer leurs plantes

d'extérieur, à bien fermer leurs fenêtres, à garder à l'intérieur leurs animaux domestiques.

Nouveaux Virus Transmis par le Moustique Tigre

D'après un article de la revue médicale "La Santé au quotidien" du 26 juin 2023, le moustique tigre transmet deux nouveaux virus. Une étude de surveillance menée dans le Grand Est a identifié deux nouveaux virus transmis par le moustique tigre : les virus West Nile (virus de Nil occidental) et Usutu.

Le virus West Nile est connu depuis plusieurs années en France et est régulièrement mis en évidence sur le bassin méditerranéen. Seules 20% des personnes contaminées développent des symptômes. Quand les symptômes sont présents, le virus se manifeste par une fièvre soudaine, des maux de tête, des courbatures voire des complications neurologiques : méningites et encéphalites.

Le virus d'Usutu se transmet par les moustiques, les moustiques tigre mais aussi par les oiseaux. Les symptômes incluent une désorientation et une perte de coordination motrice.

1.1.5 Les Coronavirus : De SARS-CoV-2 au Khosta-2

Le COVID-19

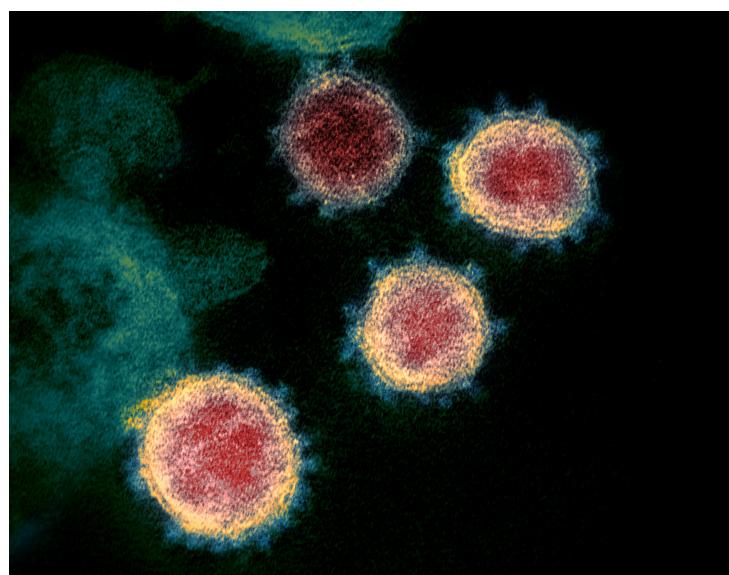


FIGURE 1.8 – Image d'illustration de virus Sars-Cov-2 dans un organisme humain

Le Covid-19 est la maladie infectieuse causée par le coronavirus le plus récemment découvert. Les coronavirus sont une famille de virus qui provoquent des maladies allant d'un simple rhume à des pathologies plus sévères. Ce nouveau coronavirus et cette nouvelle maladie n'avaient encore jamais été décelés avant qu'une flambée épidémique ne soit signalée à Wuhan, en Chine, en décembre 2019.

Le Covid-19 est un virus dangereux parce que :

- Il est très contagieux : chaque personne infectée va contaminer au moins 3 personnes en l'absence de mesures de protection
- Une personne contaminée mais qui ne ressent pas encore de symptômes peut contaminer d'autres personnes

Pays	Nombre de cas	+	Nombre de mort	+
Monde Entier	219 M		4,55 M	
France	6,92 M	10 327	116k	149
Usa	41,4 M	160 k	664 k	2 652
Indie	32,6 M		437 k	
Brésil	21 M	13 406	588 k	731
Royaume Uni	7,28 M	26 251	134 k	185
Russie	7,18 M	17 837	194 k	781
Turquie	6,68 M		60 117	
Argentine	5,23 M	3 017	114 k	176
Iran	5,08 M		110 k	
Colombie	4,93 M	1 435	126 k	26
Espagne	4,92 M	3 261	85 548	155
Italie	4,61 M	4 009	130 k	72
Indonésie	4,17 M	4 128	139 k	250
Allemagne	4,12 M	6 325	93 319	68
Mexique	3,53 M		269 k	
Pologne	2,86 M	536	75 433	8
Afrique du Sud	2,86 M	3 699	85 302	300

TABLE 1.1 – Sars-Cov-2 : nombre de cas et de morts (au 14/09/2021)

Le Coronavirus Khosta-2

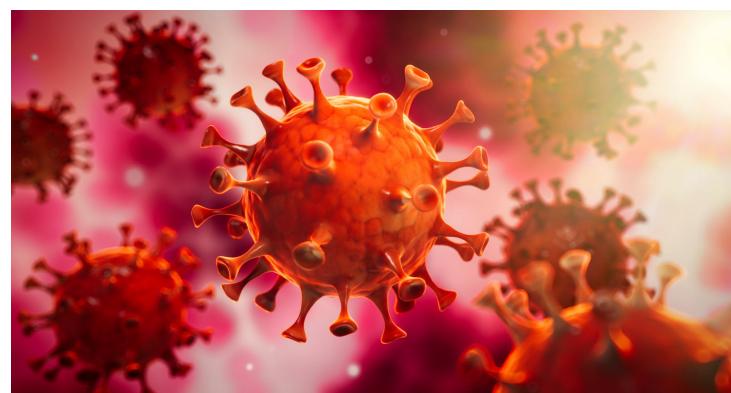


FIGURE 1.9 – Image d'illustration de virus Khosta-2 dans un organisme hôte

La découverte en 2020 d'un nouveau virus proche du Covid inquiète les scientifiques. De la même famille que le Sars-CoV-2 et découvert sur des chauves-souris en Russie, il laisse planer l'angoisse d'une nouvelle épidémie.

Pays	Nombre de cas	Nombre de mort
Monde Entier	775,567 M	7,057 M
UE	185,823 M	1,263 M
Usa	103,437 M	1,193 M
Chine	99,373 M	122,304 k
Inde	35,042 M	533,623 k
France	38,997 M	168,091 k
Allemagne	38,438 M	174,878 k
Brésil	37,512 M	702,116 k
Corée du sud	34,572 M	35,934 k
Japon	33,804 M	74,693 k
Italie	26,781 M	197,303 k
Royaume Uni	24,975 M	232,112 k
Russie	24,269 M	403,188 k
Turquie	17,005 M	101,419 k
Espagne	13,980M	121,852 k
Australie	11,861 M	25,236 k
Vietnam	11,624 M	43,206 k
Argentine	10,101 M	130,663 k

TABLE 1.2 – Sars-Cov-2 : nombre de cas et de morts (au 15/09/2024)

D'après les experts, ce coronavirus serait non seulement capable de se répliquer chez les humains, mais il pourrait aussi contourner la protection immunitaire apportée par les actuels vaccins contre le Covid-19. Malgré tout, les scientifiques se veulent rassurants : le Khosta-2 semblerait ne pas provoquer de formes graves chez l'homme.

1.2 L'Émergence Accélérée de Nouvelles Maladies

Plus généralement, en soixante ans, plus de 350 nouvelles maladies infectieuses sont apparues : une émergence de virus qui semble s'accélérer. Les exemples incluent le Virus Nipah, la variole du singe, et le virus Langya.

Les experts s'interrogent :

- Quand une nouvelle épidémie mondiale (pandémie) va-t-elle frapper ?
- Pourra-t-on y faire face ?

Par exemple, récemment, un virus géant nommé "Mollivirus sibericum" vient d'être trouvé dans les sols gelés de Sibérie par une équipe de chercheurs franco-russe. Ce type de virus peuvent être facilement pris pour des bactéries par leur taille.

1.3 La Modélisation Mathématique des Épidémies

1.3.1 Développement Historique

Devant l'ampleur des phénomènes épidémiques, les épidémiologistes se sont demandés s'ils ne pouvaient pas utiliser des méthodes mathématiques pour rendre plus efficaces les recherches médicales. Ils se demandèrent en particulier si, derrière l'évolution d'un processus de contagion, ne se cachaient pas des lois.

La réponse à cette question fut positive. Les épidémiologistes construisirent des "modèles" supposés traduire schématiquement certains aspects de la propagation d'une maladie contagieuse.

Les Premiers Modèles

Les premiers modèles ont commencé au début du 20ème siècle (1906) avec un modèle pour les épidémies de rougeole. En 1911 et 1917, on voit apparaître les premiers modèles utilisant les équations différentielles pour le paludisme.

L'épidémiologie mathématique a marqué sa première victoire en 1927, lorsque W.O. Kermack, médecin en santé publique et A.G McKendrick, biochimiste, ont mis au point un modèle simple de la propagation des épidémies. Ce modèle fut validé sur les épidémies de peste en Inde.

Selon ce modèle, lorsqu'un infectant venant de l'extérieur s'infiltre dans une population, la maladie peut se propager soudainement puis disparaître de façon tout aussi soudaine sans infecter toute la communauté. C'est ce que l'on observe dans d'innombrables épidémies au cours des siècles.

Kermack et McKendrick présentent les premiers modèles qui mettent en évidence un effet de seuil pour la propagation de l'épidémie. Les premiers modèles stochastiques apparaissent en 1928 (Reed et Frost).

Conclusion

Les maladies respiratoires, le Sida, les maladies diarrhéiques, la tuberculose, le paludisme et la rougeole représentent 90% des décès par maladies infectieuses dans le monde. Face à cette réalité, la recherche médicale et mathématique continue d'évoluer pour mieux comprendre et contrôler ces phénomènes.

À l'heure actuelle, la littérature est très abondante avec à la fois des articles mathématiques et d'autres ayant des applications directes en Santé Publique. La modélisation mathématique des épidémies est devenue un outil indispensable pour anticiper et gérer les crises sanitaires futures.

L'histoire nous enseigne que les épidémies ont toujours accompagné l'humanité, mais

les outils modernes de surveillance, de modélisation et de intervention nous donnent aujourd’hui des moyens sans précédent pour les combattre efficacement.

1.3.2 La modélisation

La **modélisation d’un phénomène** peut être réalisée de façon *déterministe* ou *stochastique*, et s’appuyer sur une échelle de *temps continue* ou *discrète*.

- Les **modèles déterministes** en *temps continu* sont particulièrement adaptés à l’étude de *grandes populations*. Ils prennent la forme d’un *système d’équations différentielles*, dont le comportement peut dans la plupart des cas être *analysé mathématiquement et visualisé par ordinateur*.
- À l’inverse, les **modèles stochastiques** se révèlent plus pertinents pour de *petites populations*. Leur étude est plus complexe sur le plan mathématique et leur comportement doit souvent être *exploré à l’aide de simulations numériques*. L’intérêt principal réside dans la *comparaison de la robustesse des résultats* obtenus avec ceux des *modèles déterministes*.

De manière générale, toute modélisation commence par la **description précise du problème à étudier**, suivie de sa *mise en équations à partir d’hypothèses plus ou moins simplificatrices*. Vient ensuite l'**analyse du modèle**, soit par des *techniques mathématiques*, soit par *simulation*, et enfin l'**interprétation du comportement observé**, en fonction des *paramètres identifiés et estimés*.

1.3.3 But de la modélisation

Lorsque l’expérimentation directe n’est plus possible, les modèles deviennent un outil **indispensable**. Ils permettent tout d’abord de **mieux comprendre les évolutions observées et de comparer différents phénomènes**, comme par exemple l’évolution de plusieurs maladies. Ils offrent aussi la possibilité de mettre en parallèle **l’efficacité de différentes méthodes de contrôle**, soit de *manière théorique*, soit grâce à des *simulations réalisées pour diverses valeurs de paramètres et sur la base de données variées*.

Un autre intérêt majeur réside dans la capacité des modèles à orienter le **choix de stratégies optimales**, par exemple dans la *distribution de vaccins en vue d’éradiquer certaines maladies*. Ils contribuent également à **identifier les informations qu’il est nécessaire de collecter ou d’enregistrer**, et permettent de **prédirer l’étendue et la taille potentielles d’épidémies**. Enfin, la modélisation oblige le chercheur à **clarifier et préciser les hypothèses formulées**, ce qui constitue en soi un gain méthodologique essentiel.

1.3.4 Hypothèses et but de la modélisation

L'étude d'une épidémie s'intéresse principalement à l'**évolution des relations entre deux groupes d'individus au sein d'une population donnée** : d'une part les *malades infectieux*, et d'autre part les *individus susceptibles d'être contaminés*. Le but des modélisations en épidémiologie est de **prévoir l'évolution d'une maladie** afin de pouvoir ensuite *proposer des thérapies adaptées*. Celles-ci peuvent prendre la forme d'un *traitement curatif de masse* (administration médicamenteuse, mesures d'hygiène ou diététiques) et/ou de *mesures préventives*, comme la vaccination lorsque cela est possible.

Selon Bailey [?], l'**étude d'une épidémie repose** en pratique sur *l'analyse d'un échantillon*, à partir duquel on tente ensuite de construire un *modèle généralisable à l'ensemble de la population*.

Pour introduire la démarche, considérons d'abord une situation simple : un **petit groupe d'individus infectés** est inséré dans une large population d'individus encore sains mais susceptibles de contracter la maladie. La question centrale est alors : *que va-t-il se passer ? L'infection va-t-elle s'éteindre rapidement ou au contraire se propager ? Peut-elle aboutir à un état endémique, c'est-à-dire au maintien durable d'un sous-groupe d'individus porteurs de la maladie ?*

1.3.5 Notations

À chaque instant, la population est subdivisée en **groupes disjoints**, chacun correspondant à un *statut différent* vis-à-vis de la maladie :

- **S (susceptibles)** : individus qui ne sont **pas** encore malades mais qui *peuvent le devenir*.
- **I (infectieux)** : individus malades **capables de transmettre l'infection**.
- **R (retirés)** : individus qui ont *contracté la maladie* et qui **ne peuvent plus la transmettre**. Ils peuvent être considérés comme *immunisés de façon permanente, isolés, ou encore décédés*. Ce groupe n'est toutefois pertinent que pour certaines maladies.

Dans certains cas, il est nécessaire de distinguer davantage les **stades de l'infection**. On introduit alors :

- une **période de latence**, correspondant au temps écoulé entre le contact initial et le moment où l'individu devient contagieux,
- une **période d'incubation**, qui est le délai entre l'infection effective et l'apparition des symptômes. Cette distinction amène à définir deux sous-groupes supplémentaires, insérés entre les classes S et I, afin de mieux représenter la dynamique réelle de certaines maladies.

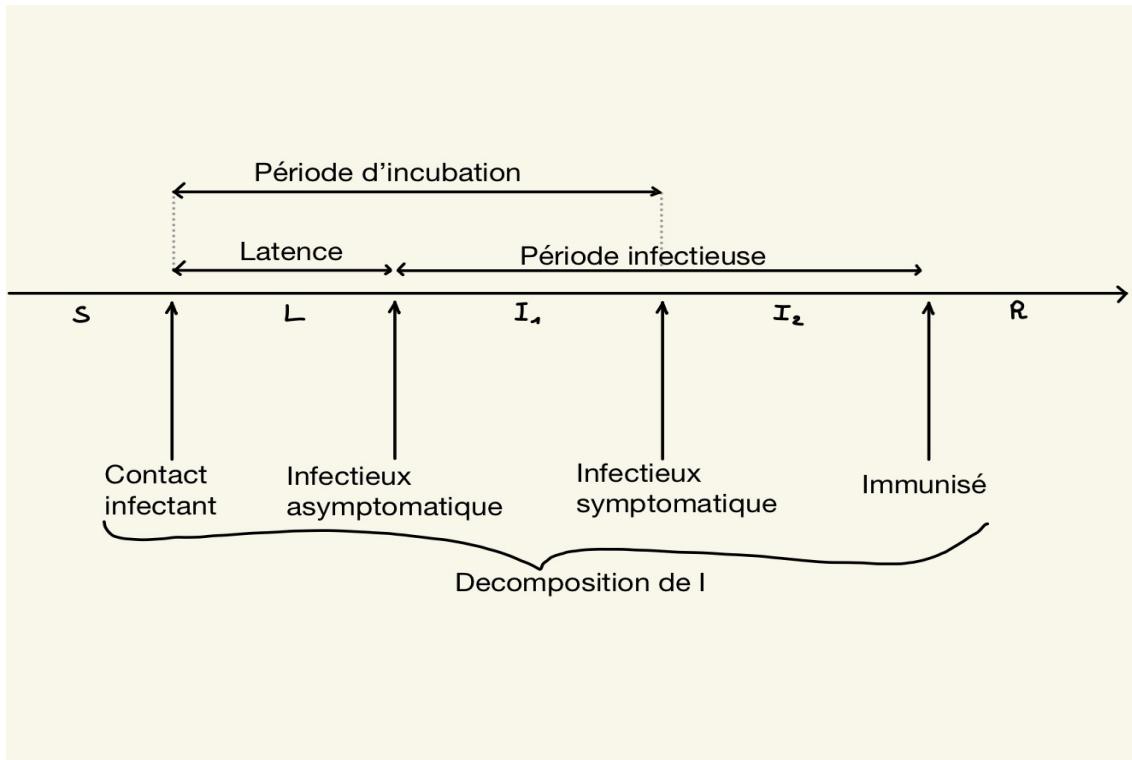


FIGURE 1.10 – Structure d'une épidémie

1.3.6 Mécanismes de transmission de l'infection

Le **mécanisme de transmission** est aujourd’hui bien connu pour la *plupart* des maladies.

De manière générale, les maladies d’origine **virale** – comme la *grippe*, la *rougeole*, la *rubéole* ou encore la *varicelle* – confèrent à l’individu une **immunité durable contre une réinfection**. En revanche, de nombreuses maladies **bactériennes**, telles que la *tuberculose*, la *méningite* ou la *gonorrhée*, ne confèrent pas une telle immunité : une personne peut donc être **réinfectée plusieurs fois au cours de sa vie**.

Certaines maladies, comme la **malaria**, ne se transmettent *pas* directement d’un individu à l’autre, mais **nécessitent l’intervention d’agents vecteurs**, le plus souvent des *insectes*.

Dans ce cas, la **transmission interhumaine** ne peut avoir lieu qu’après qu’un **vecteur a contaminé un individu**, par exemple par une *piqûre*, une *transfusion sanguine*, ou encore par *transmission de la mère à l’enfant pendant la grossesse*.

Les maladies transmissibles comme la *rougeole*, la *grippe* ou la *tuberculose* sont étroitement liées aux conditions de la *vie moderne* et à la *densité des populations*.

En épidémiologie, on distingue les **épidémies**, qui sont des *manifestations soudaines d'une maladie*, et les **états endémiques**, correspondant à la *présence persistante de la*

Maladie	Période d'incubation	Durée de la maladie
Choléra	habituellement 2h à 5 j	en moyenne 5 j
Coqueluche (Whooping cough)	habituellement 5-6 j	isolation pendant les 5 premiers jours
Covid-19	4-6 j	en moyenne 15 j
Dengue (dengue fever)	8-10 j	7 j
Ebola	2-21 j	—
Grippe (Influenza)	1-3 j	limitée à 3 j dès l'apparition des symptômes
Diphthérie (Diphtheria)	2-5 j	1-2 j après la prise de traitement
Malaria	—	—
Méningite (meningitis)	1-3 j	—
Oreillons (Mumps)	14-18 j	—
Poliomyélite	3-35 j (7-14 j pour la forme paralytique)	Le virus persiste dans la gorge 1 semaine après le début et reste dans les fèces 3-6 semaines
Rougeole (Measles)	14-18 j	infectieuse depuis l'apparition des symptômes respiratoires jusqu'à 4 j après l'apparition des rougeurs
Rubéole (German measles)	12-23 j (habituellement 16-18 j)	infectieuse de 7 j avant à 5 j après l'apparition des rougeurs
Variole (Chickenpox)	10-21 j (habituellement 14-16 j)	habituellement 5-6 j
Variole (Smallpox)	7-19 j (habituellement 12 j)	8-9 j en moyenne

TABLE 1.3 – Données épidémiologiques des principales maladies infectieuses

maladie dans une population.

Dans les pays dits « sous-développés », des millions de personnes meurent chaque année de la rougeole, d'infections respiratoires, de la diarrhée et d'autres affections pourtant considérées comme bénignes et facilement traitables dans les pays dits « développés ».

D'autres maladies comme la *malaria*, le *typhus*, le *choléra*, la *bilharziose ou schistosomiase* (maladie provoquée par les bilharzies, vers vivant en parasite dans l'appareil circulatoire de l'homme, et transmise par leurs oeufs) et la *maladie du sommeil* (sleeping sickness en anglais) restent **fortement endémiques dans certaines régions du globe**.

Avant de mettre en place un modèle, il est donc indispensable de disposer d'une **connaissance précise et réaliste de la biologie de la maladie étudiée**. Il faut en particulier considérer :

- la durée de la période d'infectiosité
- la durée de la période d'incubation
- le statut immunitaire acquis ou non après l'infection.

La **deuxième étape d'une modélisation** consiste à *collecter les données nécessaires sur les caractéristiques démographiques, épidémiologiques et biologiques*. Cela inclut no-

tamment les **taux de transition** liés à l'infection, mais aussi les **paramètres propres à la population étudiée**, tels que les *taux de naissance et de mortalité*.

La troisième étape concerne le choix parcimonieux du modèle.

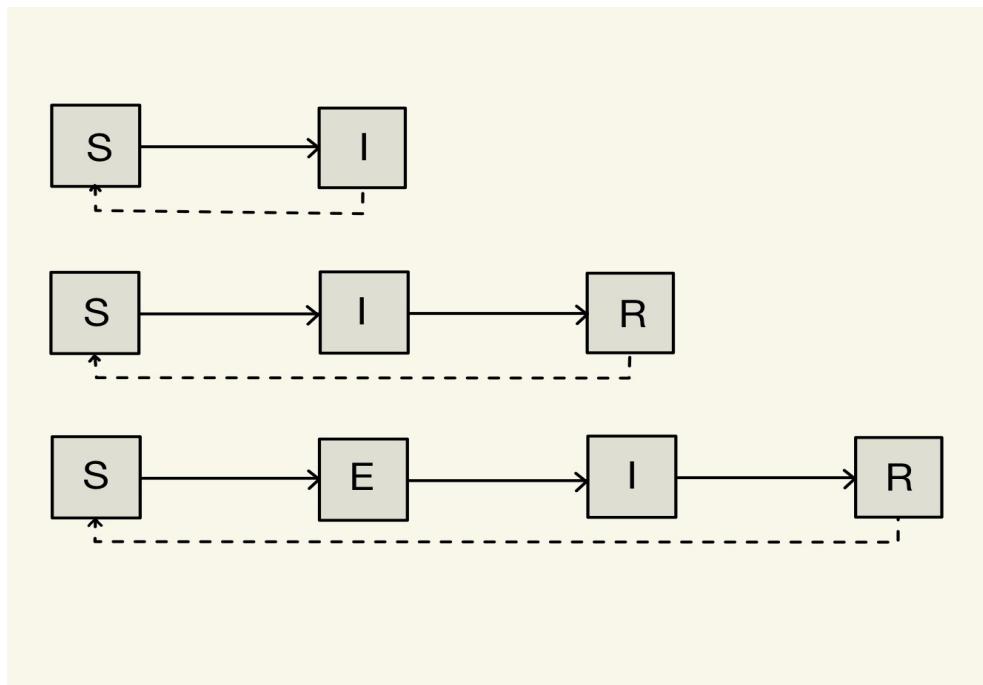


FIGURE 1.11 – Évolution du modèle SI, SIR et SEIR dans le temps

Parmi les modèles les plus utilisés en épidémiologie figurent les *modèles compartimentaux*.

- Le **modèle SEIR** est par exemple adapté à la *rougeole*, car il prend en compte l'existence d'une **période de latence** (d'environ huit jours pour cette maladie) entre *l'infection et le début de la contagiosité*.
- Lorsque cette période de latence n'existe **pas**, c'est-à-dire lorsque les individus deviennent *infectieux immédiatement après avoir été infectés*, on préfère utiliser le **modèle SIR**, qui constitue une *alternative simplifiée* (à SEIR).
- Le **modèle S(E)IR** suggère, quant à lui, une *longue période d'immunité* : c'est le cas de maladies comme la *rougeole*, où il n'y a pas de transition de la classe R (retirés) vers la classe S (susceptibles). Dans les situations où cette immunité n'est que *temporaire*, il faut au contraire choisir un modèle permettant le retour de R vers S, comme le **modèle S(E)IRS**. Le cas le plus simple de ce type est le **modèle SIS**, utilisé par exemple pour représenter la *tuberculose*.

Un exemple historique : la grande peste de Londres

La première épidémie probablement étudiée sous l'angle de la *modélisation* fut la **grande peste de Londres (1665-1666)**. Cette épidémie causa la *mort d'environ un sixième de la population* et entraîna la fermeture de l'université de Cambridge pendant deux ans. À cette époque, Isaac Newton, alors étudiant à Cambridge, se réfugia chez lui pour échapper à la contagion ; c'est durant cette période qu'il formula la loi de la gravitation universelle.

Le mécanisme typique de la peste, lorsqu'elle *surgit brutalement*, est une **croissance rapide en intensité**, suivie d'une **disparition laissant néanmoins une part importante de la population non infectée**. Ce même schéma a été observé dans de nombreuses autres épidémies, qu'elles soient mortelles ou qu'elles aboutissent à une immunisation définitive des survivants.

Une des premières questions qui a retenu l'attention des scientifiques est de comprendre **pourquoi une maladie se développe soudainement dans une communauté**.

L'un des grands succès fondateurs de l'épidémiologie mathématique fut la formulation, par **Kermack et McKendrick en 1927**, d'un *modèle simple capable de prédire un comportement très proche de celui observé dans de nombreuses épidémies réelles*.

La **vitesse de progression** d'une épidémie dépend étroitement des *caractéristiques biologiques de la maladie*. Ainsi, dans le cas de la **grippe**, la période de latence est estimée entre un et trois jours, tandis que la durée d'infection s'étend généralement de deux à trois jours. Dans ces conditions, une épidémie de grippe peut se *propager à l'échelle d'une ville entière en moins de six semaines*.

1.3.7 Hypothèses pour les modèles SI, SIS et SIR

Pour pouvoir modéliser efficacement une épidémie, il est indispensable d'adopter des **hypothèses simplificatrices**. La *formalisation mathématique du modèle permet d'expliquer ces hypothèses, de mettre en évidence leurs implications et, en même temps, de souligner les limites qu'elles entraînent*.

Nous retiendrons les hypothèses suivantes :

1. **La transmission de la maladie se fait par contact direct entre individus infectés et individus susceptibles.** Cette hypothèse convient à de *nombreuses maladies virales* comme la grippe, la rougeole ou le SIDA, ainsi qu'à des *maladies bactériennes* comme la *tuberculose*. En revanche, elle n'est **pas** adaptée aux maladies nécessitant un *vecteur animal* (par exemple la rage ou la malaria).
2. **Absence de temps de latence** : les individus deviennent *immédiatement infectieux dès leur contamination*.

- 3. Homogénéité des contacts :** on suppose que tous les *individus susceptibles* le sont de manière uniforme et que tous les infectés transmettent la maladie avec la même intensité. Cette hypothèse correspond à un « mélange homogène », dont on déduit une *loi d'action de masse* : le nombre de nouveaux cas est alors **proportionnel** à la fois à la *taille du groupe des susceptibles* (S) et à celle du *groupe des infectieux* (I).
- 4. Population totale constante :** la taille de la population reste fixée à une valeur N . Dans une version plus générale, on peut intégrer des *naissances et des morts*, mais il est souvent supposé que ces deux *phénomènes s'équilibrent*. Cette hypothèse est surtout pertinente lorsque l'on s'intéresse à l'évolution d'une *épidémie sur une courte période de temps, comme c'est le cas pour la grippe ou certaines maladies infantiles*.

1.4 Action de masse

On considère une ville de 100 000 habitants. On note l'ensemble de la population par \mathcal{P} , de sorte que

$$\text{Card}(\mathcal{P}) = 10^5.$$

La population reste constante au cours du temps : il n'y a donc ni naissances, ni décès. Parmi cette population, certains individus peuvent être malades.

Supposons qu'un individu infecté, noté i_0 , rencontre en moyenne 10 personnes par jour. Comme la population totale est de 10^5 habitants, la probabilité que i_0 rencontre un individu donné est

$$p = \frac{10}{10^5} = 10^{-4}.$$

Si l'on note S le nombre d'individus susceptibles (c'est-à-dire non infectés mais pouvant contracter la maladie), alors l'individu infecté i_0 peut espérer entrer en contact, par jour, avec en moyenne

$$pS$$

individus susceptibles.

Ainsi, pS représente le nombre moyen quotidien de contacts entre un individu infectieux et des individus susceptibles.

On suppose maintenant que $q = 0.1$ désigne la probabilité qu'un individu susceptible contracte effectivement l'infection lors d'un contact avec un individu infectieux. Le nombre moyen de nouveaux infectés produits par i_0 au cours d'une journée est alors

$$pqS.$$

En particulier, avec $p = 10^{-4}$, on obtient

$$pqS = 10^{-5} \cdot S.$$

En posant

$$\lambda = pq,$$

on obtient la loi d'infection dite « de masse » :

$$\lambda SI$$

représente le nombre moyen journalier de nouveaux infectés dans la population, où I désigne le nombre d'individus déjà infectés.

Chapitre 2

Le Modèle *SI*

2.1 Introduction

L'infection se propage par **contact** entre les membres d'une communauté mais au travers de laquelle, il n'y a pas de «retrait» (morts, isolés, ...).

À la fin, tous les individus susceptibles deviennent infectés.

Ces hypothèses sont réductrices dans la plupart des situations mais peuvent-être approximativement appliquées dans les situations où :

Hypothèse 2.1. 1. la maladie est **hautement infectieuse** mais **pas suffisamment grave** pour les cas de retraits par mort ou isolation,
2. **aucun infecté ne guérit** de la maladie durant la partie majeure de l'épidémie,

C'est le cas de certaines infections peu graves de l'appareil respiratoire.

Il faut remarqué que pour toute maladie, le **modèle SI est vrai en court terme.**

2.2 Le modèle

On peut représenter ce problème de cette façon :

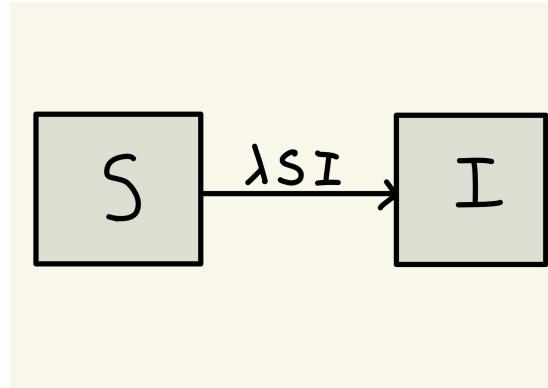


FIGURE 2.1 – Schéma modélisé SI

Définition 2.1. On peut donc en déduire le système différentiel ;

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda SI \\ \forall t, \quad S(t) + I(t) = N \end{cases} \quad (2.1)$$

à cause de l'infection, S décroît et I croît. Le paramètre λ est la constante de proportionnalité, c'est le taux d'infection (ou de contact) (par unité de temps et par individu).

Hypothèse 2.2. On prend l'hypothèse d'une grande population.

On sait que pour tout t , $N = S(t) + I(t)$ (c'est à dire une population constante), car on a un même flux entrant et sortant.

Définition 2.2. Pour résoudre ce système différentiel, on va donc le réduire en une seule équation différentielle :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda(N - I(t))I(t) \quad (2.2)$$

La résolution de ce modèle nous donne :

$$\forall t \geq 0, \quad I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + S_0 e^{-\lambda Nt}} = \frac{I_0 N e^{\lambda N t}}{S_0 + I_0 e^{\lambda N t}} \quad (2.3)$$

et

$$\forall t \geq 0, \quad S(t) = \frac{NS_0}{S_0 + I_0 e^{\lambda N t}} \quad (2.4)$$

Démonstration. **Existence et unicité de la solution.** On suppose que les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sont satisfaites (continuité et condition de Lipschitz sur les fonctions du système).

Ainsi, pour toute condition initiale donnée, il existe une solution unique $(S(t), I(t))$ définie sur $[0, +\infty[$.

Passage du discret au continu. En discrétisant le système avec un pas $\Delta t > 0$, on écrit

$$\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t) = -\lambda S(t)I(t)\Delta t.$$

Sous l'hypothèse de grande population (paramètre λ petit devant $S(t)$), on identifie

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \approx \frac{dS}{dt}.$$

De même pour I , ce qui justifie l'écriture du système différentiel continu.

Réduction à une équation pour $I(t)$. Comme $S(t) + I(t) = N$ est constant, $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= I'(t) = \lambda S(t)I(t) \\ &= \lambda(N - I(t))I(t) \\ &= -\lambda I^2(t) + \lambda NI(t) \\ &= \boxed{\lambda(N - I(t))I(t)}. \end{aligned}$$

Changement de variable (linéarisation). On pose :

$$Y(t) = \frac{1}{I(t)}.$$

Ceci est bien défini car $I(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ (en effet $I(0) = I_0 > 0$ et $I'(t) \geq 0$).

On différencie, en remplaçant $I'(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= \left(\frac{1}{I(t)} \right)' = -\frac{I'(t)}{I^2(t)} \\
&= \frac{\lambda I^2(t)}{I^2(t)} - \frac{\lambda NI(t)}{I^2(t)} \\
&= \lambda - \lambda N \frac{1}{I(t)} \\
&= -\lambda NY(t) + \lambda.
\end{aligned}$$

On a obtenu l'équation différentielle linéaire suivante :

$$Y'(t) = -\lambda NY(t) + \lambda.$$

Cette équation est de la forme générale

$$Y'(t) + aY(t) = b,$$

où $a = \lambda N$ et $b = \lambda$ sont des constantes positives.

Résolution de l'équation homogène

On commence par résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire en prenant $b = 0$:

$$Y'_h(t) = -\lambda NY_h(t).$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

La méthode standard donne :

$$Y_h(t) = Ke^{-\lambda Nt}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète

$$Y'(t) = -\lambda NY(t) + \lambda.$$

La méthode du **facteur intégrant** consiste à multiplier l'équation par $e^{\lambda Nt}$ afin de transformer le membre de gauche en une dérivée d'un produit.

En effet :

$$(Y(t)e^{\lambda Nt})' = Y'(t)e^{\lambda Nt} + \lambda NY(t)e^{\lambda Nt}.$$

Or, l'équation initiale donne

$$Y'(t) + \lambda NY(t) = \lambda,$$

donc en multipliant par $e^{\lambda N t}$:

$$(Y(t)e^{\lambda N t})' = \lambda e^{\lambda N t}.$$

On peut maintenant intégrer des deux côtés :

$$\begin{aligned} Y(t)e^{\lambda N t} &= \int \lambda e^{\lambda N t} dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda N} e^{\lambda N t} + C \\ &= \frac{1}{N} e^{\lambda N t} + C. \end{aligned}$$

En divisant par $e^{\lambda N t}$, on obtient la solution générale :

$$Y(t) = \frac{1}{N} + C e^{-\lambda N t}.$$

Utilisation de la condition initiale. À $t = 0$, on a

$$Y(0) = Y_0 = \frac{1}{I_0}$$

Et avec l'expression obtenu avant on a $Y(0) = \frac{1}{N} + C$. Donc on obtient

$$\frac{1}{I_0} = \frac{1}{N} + C \implies C = \frac{1}{I_0} - \frac{1}{N} = \frac{N - I_0}{NI_0} = \frac{S_0}{NI_0}.$$

Ainsi

$$Y(t) = \frac{1}{N} + \frac{S_0}{NI_0} e^{-\lambda N t}.$$

Expression finale de la solution En revenant à $I(t) = 1/Y(t)$:

$$I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + S_0 e^{-\lambda N t}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{\lambda N t}$:

$$I(t) = \frac{NI_0 e^{\lambda N t}}{S_0 + I_0 e^{\lambda N t}}.$$

Expression explicite de $S(t)$. En utilisant la conservation de la population $S(t) +$

$I(t) = N$, on obtient

$$S(t) = N - I(t) = N - \frac{NI_0e^{\lambda Nt}}{S_0 + I_0e^{\lambda Nt}}.$$

En mettant au même dénominateur :

$$S(t) = \frac{N(S_0 + I_0e^{\lambda Nt}) - NI_0e^{\lambda Nt}}{S_0 + I_0e^{\lambda Nt}} = \boxed{\frac{NS_0}{S_0 + I_0e^{\lambda Nt}}}.$$

□

Comportement asymptotique

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-\lambda Nt} \rightarrow 0$ donc

$$I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + S_0e^{-\lambda Nt}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{NI_0}{I_0} = N.$$

À long terme, toute la population est infectée, ce qui correspond aux hypothèses du modèle SI.

2.3 Points d'équilibre

Définition 2.3. Un **point d'équilibre** du système (2.1) est un point (S^*, I^*) particulier de ce système, donc une solution du système (2.1) obtenue en posant $\frac{S'(t)}{dt} = 0$ et $\frac{I'(t)}{dt} = 0$.

Donc on a :

$$\begin{cases} \frac{S'(t)}{dt} = 0 \\ \frac{I'(t)}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I'(t) = \lambda S(t)I(t), \\ \lambda S(t)I(t) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow (S^*, I^*) (\sim (S_\infty, I_\infty))$$

C'est un point où il n'y a **ni augmentation, ni diminution** (*pas de variations au cours du temps*). Si on part de ce point, le système reste dans cet état. On dit aussi que la trajectoire (ensemble des couples $(S(t), I(t) \geq 0)$) qui est ici une *courbe plane est constante*.

La recherche des équilibres est très importante, car dans tous les cas que l'on va examiner dans ce cours, les trajectoires du système vont tendre (asymptotiquement, $t \rightarrow +\infty$) vers l'un des points d'équilibre, et celui-ci sera dit **asymptotiquement stable**.

2.3.1 Recherche des points d'équilibre pour le modèle SI

On obtient les deux points d'équilibre suivants :

$$(S_1^* = N, I_1^* = 0) \quad \text{et} \quad (S_2^* = 0, I_2^* = N)$$

- Le point (S_1^*, I_1^*) est appelé point de **non épidémie** (ou **d'absence d'épidémie**) car il n'y a pas de propagation de l'épidémie s'il n'y a pas au moins un individu infectieux.
- Le second point (S_2^*, I_2^*) est justement le point vers lequel la trajectoire va tendre, on dit que ce point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.

2.4 Représentation dans le plan de la trajectoire

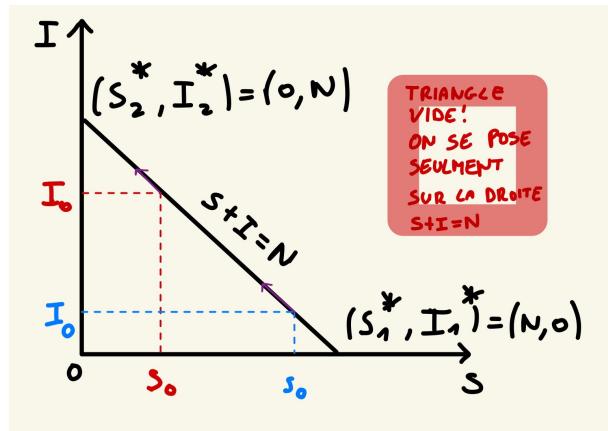


FIGURE 2.2 – Représentation du modèle SI dans le plan (S, I) .

La figure ci-dessus illustre les trajectoires possibles du modèle *SI* dans le plan des variables (S, I) .

L'équation de conservation $S(t) + I(t) = N$ implique que l'évolution du système se fait uniquement sur la **droite** :

$$S + I = N.$$

Ainsi, le **triangle des états possibles** $(S, I) \geq 0$ est réduit à cette droite, ce qui signifie que la dynamique peut être représentée par un **seul degré de liberté** (par exemple $I(t)$).

Les deux points extrêmes de la droite correspondent aux situations limites :

- $(S_1^*, I_1^*) = (N, 0)$ (aucun infecté, *tout le monde susceptible*)
- $(S_2^*, I_2^*) = (0, N)$ (*toute la population infectée*).

Au cours du temps, la trajectoire se déplace de (S_0, I_0) vers $(0, N)$: le nombre de susceptibles décroît continûment tandis que celui des infectés augmente. Le **triangle intérieur** du graphique est vide, car les solutions physiques se trouvent uniquement sur la droite $S + I = N$.

Cette représentation géométrique est utile pour *visualiser la conservation de la population totale* et pour *interpréter graphiquement la dynamique épidémique*.

2.5 La courbe d'épidémie : incidence

En pratique, les données recueillies ne concernent pas directement le nombre de personnes infectées $I(t)$, mais le nombre de **nouveaux cas d'infections** par unité de temps (jour, semaine, mois, etc.).

Définition 2.4. On appelle cette quantité **incidence**, notée $f(t)$, et définie par :

$$f(t) = \frac{dI(t)}{dt}.$$

On obtient ainsi la **courbe d'épidémie**, qui décrit l'évolution du nombre de nouvelles infections au cours du temps.

Proposition 2.1. À partir de la solution de $I(t)$, on calcule :

$$f(t) = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\lambda I_0 S_0 N^2 e^{\lambda N t}}{(S_0 + I_0 e^{\lambda N t})^2}. \quad (2.5)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I'(t) &= \left(\frac{I_0 N e^{\lambda N t}}{S_0 + I_0 e^{\lambda N t}} \right)' \\ &= \frac{I_0 N \lambda N e^{\lambda N t} \cdot (S_0 + I_0 e^{\lambda N t}) - I_0 N e^{\lambda N t} \cdot I_0 \lambda N e^{\lambda N t}}{(S_0 + I_0 e^{\lambda N t})^2} \\ &= \frac{\lambda I_0 N^2 e^{\lambda N t} \cdot (S_0 + I_0 e^{\lambda N t}) - \lambda I_0 N^2 e^{\lambda N t} \cdot I_0 e^{\lambda N t}}{(S_0 + I_0 e^{\lambda N t})^2} \\ &= \frac{\lambda I_0 N^2 e^{\lambda N t} \cdot (S_0 + I_0 e^{\lambda N t} - I_0 e^{\lambda N t})}{(S_0 + I_0 e^{\lambda N t})^2} \\ &= \frac{\lambda I_0 S_0 N^2 e^{\lambda N t}}{(S_0 + I_0 e^{\lambda N t})^2}. \end{aligned}$$

□

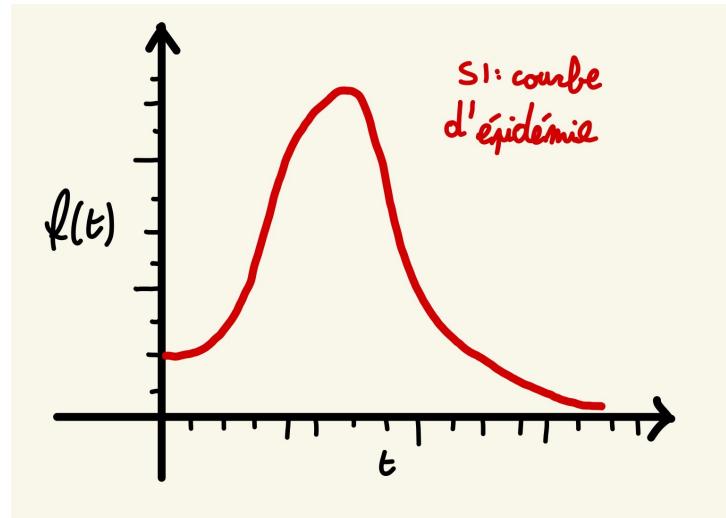


FIGURE 2.3 – Courbe d'épidémie obtenue dans le modèle SI.

Propriétés de la courbe d'épidémie

- La courbe est **unimodale** : elle présente un *seul maximum* (forme en cloche).
- On peut calculer explicitement le temps t^* où *l'incidence est maximale*.

Calcul du maximum. Le maximum est atteint lorsque $f'(t) = 0$. Après dérivation et simplification, on trouve que cela se produit lorsque $I(t) = \frac{N}{2}$.

Proposition 2.2. *En reportant dans l'expression de $I(t)$, on obtient :*

$$t^* = \frac{\log\left(\frac{S_0}{I_0}\right)}{\lambda N}.$$

La valeur maximale de l'incidence est alors donnée par :

$$f(t^*) = \frac{\lambda N^2}{4}, \quad I(t^*) = \frac{N}{2}.$$

Démonstration. a

□

Interprétation. L'incidence croît rapidement depuis 0, atteint un maximum au temps t^* , puis décroît progressivement vers 0. Cela traduit le fait que, dans le modèle *SI*, l'épidémie démarre rapidement, atteint un pic, puis finit par infecter l'ensemble de la population à long terme.

Chapitre 3

Le Modèle SIS

3.1 Introuduction

Le modèle épidémiologique *SIS* (pour **Susceptible–Infecté–Susceptible**) décrit la propagation d'une maladie infectieuse dans une population fermée, sous l'hypothèse que les individus infectés peuvent redevenir susceptibles après leur guérison.

Hypothèse 3.1. Les hypothèses principales du modèle sont :

1. La population totale est **constante** et vaut N , avec N **grand**. Elle se divise en deux compartiments :
 - $S(t)$: nombre d'individus *susceptibles* à l'instant t ,
 - $I(t)$: nombre d'individus *infectés* à l'instant t ,avec $S(t) + I(t) = N$ pour tout $t \geq 0$.
2. La *transmission de l'infection* est proportionnelle aux contacts entre *susceptibles* et *infectés*, avec un taux $\lambda > 0$.
3. Les *individus infectés* guérissent et redeviennent *susceptibles*, avec un taux de guérison $\mu > 0$.

Ce modèle ne procure pas d'immunité (exemple : la **tuberculose**).

3.2 Le modèle

On a ce modèle :

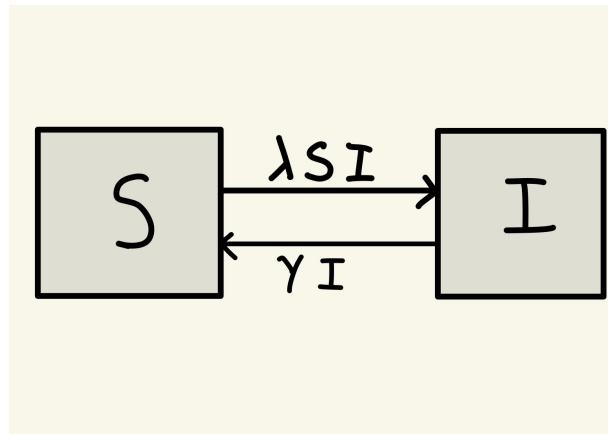


FIGURE 3.1 – Schéma modèle SIS

Définition 3.1. Le système d'équations différentielles est :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\lambda SI + \gamma I, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda SI - \gamma I \\ S(0) + I(0) = S_0 + I_0 = N \end{cases} \quad (3.1)$$

où

- λ est le *taux d'infection* (ou de contact) (**par unité de temps et par individu**).
- γ représente le *taux de guérison* **par unité de temps et par individu infectieux**.

Puisque il y a pas de changement de population (population fermé) et on a pas de naissance et de mort, on a que $S + I$ est constante et égale à N

Proposition 3.1. En remplaçant S par $N - I$ le système différentiel (3.1) se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda \left(\frac{\lambda N - \gamma}{\lambda} - I \right) I, \quad \text{avec } I(0) = I_0. \quad (3.2)$$

Là encore, (3.2) est une équation différentielle logistique si le terme $\lambda N / \gamma - 1 \neq 0$, donc

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\lambda I_0 e^{(\lambda N - \gamma)t}}{I_0 (\lambda N - \gamma) (e^{(\lambda N - \gamma)t} - 1) + (\lambda N - \gamma)} & \text{si } \lambda N - \gamma \neq 0, \\ \frac{I_0}{1 + \lambda I_0 t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Réduction à une équation pour $I(t)$.

En remplaçant S par $N - I$ dans le système différentiel (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dI(t)}{dt} &= I'(t) = \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
&= \lambda(N - I(t))I(t) - \gamma I(t) \\
&= \lambda NI(t) - \lambda I^2(t) - \gamma I(t) \\
&= (\lambda N - \gamma)I(t) - \lambda I^2(t) \\
&= \lambda \left(\frac{\lambda N - \gamma}{\lambda} - I(t) \right) I(t)
\end{aligned}$$

Posons $K = \frac{\lambda N - \gamma}{\lambda}$. L'équation se réécrit :

$$I'(t) = \lambda(K - I(t))I(t), \quad \text{avec } I(0) = I_0$$

Cas 1 : $\lambda N - \gamma \neq 0$ (équation logistique)

Dans ce cas, $K \neq 0$ et l'équation est une équation différentielle de type logistique. Nous allons la résoudre par séparation des variables.

Séparation des variables. L'équation se réécrit :

$$\frac{dI}{I(K - I)} = \lambda dt$$

Décomposition en éléments simples. Pour intégrer le membre de gauche, décomposons en éléments simples :

$$\frac{1}{I(K - I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{K - I}$$

En multipliant par $I(K - I)$:

$$1 = A(K - I) + BI$$

En identifiant les coefficients :

- Pour $I = 0$: $1 = AK$, donc $A = \frac{1}{K}$
- Pour $I = K$: $1 = BK$, donc $B = \frac{1}{K}$

D'où :

$$\frac{1}{I(K - I)} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{K - I} \right)$$

Intégration. En intégrant des deux côtés :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{K} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{K-I} \right) dI &= \int \lambda dt \\ \frac{1}{K} [\ln |I| - \ln |K-I|] &= \lambda t + C_1 \\ \frac{1}{K} \ln \left| \frac{I}{K-I} \right| &= \lambda t + C_1 \\ \ln \left| \frac{I}{K-I} \right| &= K\lambda t + C_2 \end{aligned}$$

où $C_2 = KC_1$ est une nouvelle constante d'intégration.

En prenant l'exponentielle :

$$\frac{I}{K-I} = Ce^{K\lambda t}$$

où $C = e^{C_2}$ est une constante positive.

Résolution pour $I(t)$. En résolvant pour I :

$$\begin{aligned} I &= C(K-I)e^{K\lambda t} \\ I &= CKe^{K\lambda t} - CIe^{K\lambda t} \\ I + CIe^{K\lambda t} &= CKe^{K\lambda t} \\ I(1 + Ce^{K\lambda t}) &= CKe^{K\lambda t} \\ I(t) &= \frac{CKe^{K\lambda t}}{1 + Ce^{K\lambda t}} \end{aligned}$$

Détermination de la constante C . À $t = 0$:

$$I_0 = \frac{CK}{1+C}$$

En résolvant pour C :

$$\begin{aligned} I_0(1+C) &= CK \\ I_0 + I_0C &= CK \\ I_0 &= CK - I_0C \\ I_0 &= C(K - I_0) \\ C &= \frac{I_0}{K - I_0} \end{aligned}$$

Expression finale. En substituant C et $K = \frac{\lambda N - \gamma}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{\frac{I_0}{K-I_0} \cdot K e^{K\lambda t}}{1 + \frac{I_0}{K-I_0} e^{K\lambda t}} \\
&= \frac{I_0 K e^{K\lambda t}}{K - I_0 + I_0 e^{K\lambda t}} \\
&= \frac{K I_0 e^{K\lambda t}}{(K - I_0)(1 - e^{K\lambda t}) + K}
\end{aligned}$$

En remplaçant $K\lambda = \lambda N - \gamma$:

$$I(t) = \frac{\frac{\lambda N - \gamma}{\lambda} \cdot I_0 e^{(\lambda N - \gamma)t}}{\left(\frac{\lambda N - \gamma}{\lambda} - I_0\right)(1 - e^{(\lambda N - \gamma)t}) + \frac{\lambda N - \gamma}{\lambda}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par λ et en réarrangeant :

$$I(t) = \frac{(\lambda N - \gamma) I_0 e^{(\lambda N - \gamma)t}}{I_0 (\lambda N - \gamma) (e^{(\lambda N - \gamma)t} - 1) + (\lambda N - \gamma)}$$

Cette expression peut aussi s'écrire en factorisant :

$$I(t) = \frac{\lambda I_0 e^{(\lambda N - \gamma)t}}{I_0 (\lambda N - \gamma) (e^{(\lambda N - \gamma)t} - 1) + (\lambda N - \gamma)}$$

Cas 2 : $\lambda N - \gamma = 0$ (cas dégénéré)

Dans ce cas, $K = 0$ et l'équation d'avant devient :

$$I'(t) = -\lambda I^2(t)$$

Changement de variable. Posons $Y(t) = \frac{1}{I(t)}$, qui est bien défini car $I(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

En dérivant :

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= -\frac{I'(t)}{I^2(t)} \\
&= -\frac{-\lambda I^2(t)}{I^2(t)} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Ceci est une équation différentielle élémentaire dont la solution générale est :

$$Y(t) = \lambda t + C$$

Détermination de la constante. À $t = 0$:

$$Y(0) = \frac{1}{I_0} = C$$

Donc :

$$Y(t) = \lambda t + \frac{1}{I_0}$$

Expression de $I(t)$. En revenant à $I(t) = \frac{1}{Y(t)}$:

$$I(t) = \frac{1}{\lambda t + \frac{1}{I_0}} = \frac{I_0}{1 + \lambda I_0 t}$$

Conclusion

En combinant les deux cas, on obtient la solution complète :

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\lambda I_0 e^{(\lambda N - \gamma)t}}{I_0(\lambda N - \gamma)(e^{(\lambda N - \gamma)t} - 1) + (\lambda N - \gamma)} & \text{si } \lambda N - \gamma \neq 0, \\ \frac{I_0}{1 + \lambda I_0 t} & \text{si } \lambda N - \gamma = 0. \end{cases}$$

□

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$I(t) \rightarrow \begin{cases} N - \frac{\gamma}{\lambda} & \text{si } \lambda N - \gamma > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Les points d'équilibre du système SIS satisfont $I'(t) = 0$, soit :

$$\lambda(N - I)I - \gamma I = 0 \Leftrightarrow I[\lambda(N - I) - \gamma] = 0$$

Donc soit $I^* = 0$, soit $I^* = N - \frac{\gamma}{\lambda}$.

Cas 1 : $\lambda N - \gamma > 0$

Dans ce cas, $I^* = N - \frac{\gamma}{\lambda} > 0$ est un équilibre positif.

De la solution explicite, en divisant numérateur et dénominateur par $e^{(\lambda N - \gamma)t}$:

$$I(t) = \frac{\lambda I_0}{I_0(\lambda N - \gamma)(1 - e^{-(\lambda N - \gamma)t}) + (\lambda N - \gamma)e^{-(\lambda N - \gamma)t}}$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, comme $\lambda N - \gamma > 0$, on a $e^{-(\lambda N - \gamma)t} \rightarrow 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) &= \frac{\lambda I_0}{I_0(\lambda N - \gamma)} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda N - \gamma} \\
&= \frac{\lambda N - \gamma + \gamma}{\lambda(\lambda N - \gamma)} \cdot \lambda \\
&= N - \frac{\gamma}{\lambda}
\end{aligned}$$

Cas 2 : $\lambda N - \gamma \leq 0$

Si $\lambda N - \gamma < 0$, alors $e^{(\lambda N - \gamma)t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Le numérateur de $I(t)$ tend vers 0 tandis que le dénominateur reste strictement positif, donc $I(t) \rightarrow 0$.

Si $\lambda N - \gamma = 0$, alors $I(t) = \frac{I_0}{1+\lambda I_0 t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

□

Notation 3.1. Soit $\mathcal{R}_0 = \frac{\lambda N}{\gamma}$. On appelle \mathcal{R}_0 le **nombre de reproduction de base**. Alors

$$I(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} N - \frac{\gamma}{\lambda} & \text{si } \mathcal{R}_0 > 1, \\ 0 & \text{si } \mathcal{R}_0 \leq 1. \end{cases}$$

Les conditions $\mathcal{R}_0 > 1$ et $\mathcal{R}_0 \leq 1$ conduisent à des comportements différents du modèle. Il y a donc **disparition de l'infection** si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et **maintien d'un état endémique** dans le cas contraire.

3.3 Recherche des points d'équilibre du modèle

Définition 3.2. On obtient les deux points d'équilibre suivants :

$$(S_1^* = N, I_1^* = 0) \quad \text{et} \quad (S_2^* = \frac{\gamma}{\lambda}, I_2^* = N - \frac{\gamma}{\lambda})$$

- Le point (S_1^*, I_1^*) est un point d'équilibre d'**absence d'épidémie** car il n'y a pas de propagation de l'épidémie s'il n'y a pas au moins un individu infectieux.
- Le second point (S_2^*, I_2^*) est le point d'équilibre (**endémique**) vers lequel la trajectoire va tendre lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$. C'est donc un *équilibre asymptotiquement stable*.

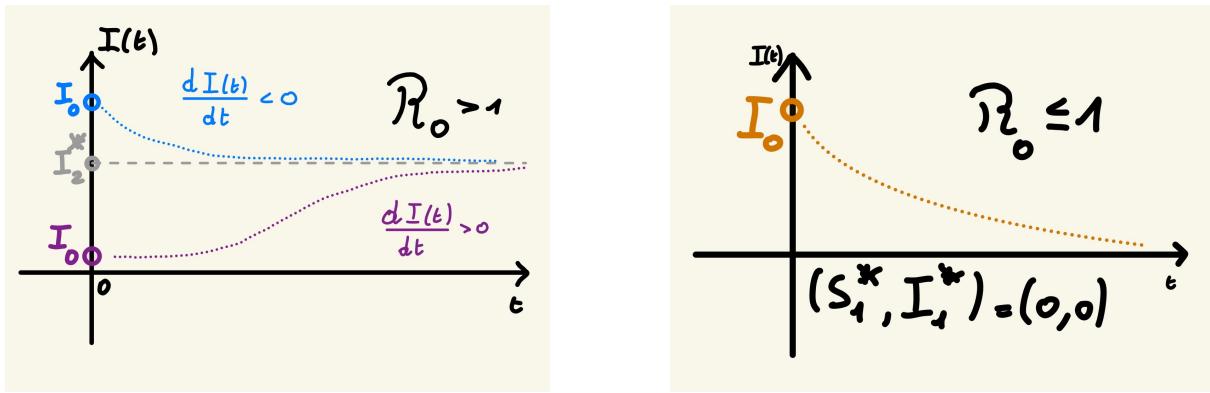


FIGURE 3.2 – Comportement asymptotique du modèle SIS. À gauche : cas $\lambda N > \gamma$ (régime endémique). À droite : cas $\lambda N < \gamma$ (régime d'extinction).

3.4 Interprétation de la condition $\mathcal{R}_0 > 1$

$\mathcal{R}_0 > 1$ indique que chaque personne infectieuse doit avoir au moins un contact infectant (qui puisse transmettre l'infection) pendant sa période moyenne d'infectiosité pour que la maladie se maintienne à un **niveau endémique**.

Le destin des individus initialement infectieux Pour tout $t \geq 0$, $J(t)$ est le nombre d'individus **initialement infectieux** à l'instant t et qui le sont encore à l'instant t . Ainsi $J(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -\gamma J(t), \quad J(0) = I_0. \quad (3.3)$$

Donc, pour tout $t \geq 0$, $J(t) = I_0 e^{-\gamma t}$ et $e^{-\gamma t}$ approche une probabilité (approche fréquentiste) : la probabilité qu'un individu initialement infecté le soit toujours à l'instant t .

Loi de la durée d'infection Soit T la variable aléatoire **durée d'infection**, c.-à-d. « le temps entre le début et la fin de l'infection pour un individu malade ». Alors l'événement $(T > t)$ signifie que l'individu est encore malade au temps t , donc $P(T > t) = e^{-\gamma t}$.

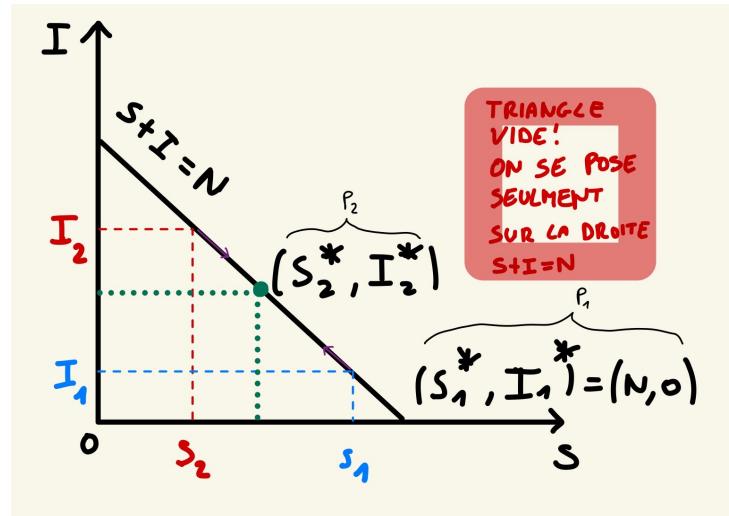
En d'autres termes, on voit que T suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\gamma}$ et on peut donc interpréter $\frac{1}{\gamma}$ comme une « **période moyenne d'infectiosité** ».

Autre variables importantes

- λN est le nombre moyen de contacts infectants, par unité de temps causés par un individu infectieux.

- $\mathcal{R}_0 = \frac{\lambda N}{\gamma}$ est le nombre moyen de contacts infectants effectués par un individu infectieux durant sa période d'infectiosité. \mathcal{R}_0 est appelé **nombre de reproduction de base**.

3.5 Représentation dans le plan de la trajectoire



Chapitre 4

Le Modèle SIR (sans naissances-morts)

4.1 Introduction

Ce modèle se distingue par l'hypothèse d'une **immunité permanente contre la réinfection**, justifiant ainsi l'introduction du compartiment R (Removed). Ce compartiment peut représenter *indifféremment les individus guéris et immunisés, les individus isolés ou les individus décédés.*

4.2 Le modèle

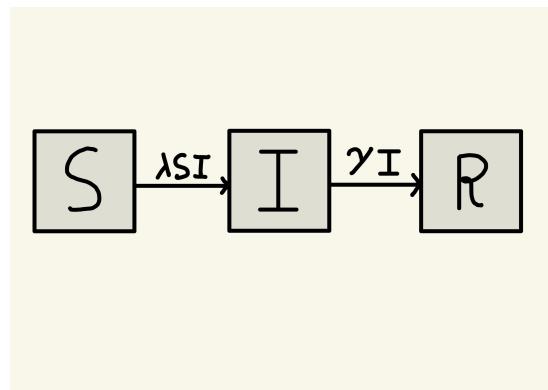


FIGURE 4.1 – Schéma du modèle SIR

- Conformément aux modèles précédents, le nombre moyen de nouveaux cas d'infection par unité de temps est proportionnel au nombre moyen de contacts entre les individus susceptibles (S) et infectés (I) par unité de temps.
- La transition vers le compartiment R est proportionnelle à I . La constante de proportionnalité γ représente le **taux** (*par unité de temps et par individu infecté*) de

guérison (lorsque R représente les individus guéris). Par un raisonnement analogue à celui effectué pour le modèle SIS , son inverse $\frac{1}{\gamma}$ représente la **durée moyenne de la maladie**, c'est-à-dire la *durée moyenne de séjour d'un individu infectieux dans le compartiment I* .

Définition 4.1. On en déduit le système :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda SI - \gamma I, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I, \\ \forall t > 0, \quad S(t) + I(t) + R(t) = S_0 + I_0 + R_0 = N \end{cases} \quad (4.1)$$

Hypothèse de population constante Pour tout $t > 0$, on a $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Ainsi, N est une **constante** (variable non dynamique). Les fonctions positives S , I et R sont donc *bornées*.

Les conditions initiales sont $S(0) > 0$ et $I(0) \geq 0$. Pour R , on distingue différents cas :

- $R(0) = 0$: **tous les individus sont susceptibles de contracter la maladie**. Il s'agit du cas le plus simple, que nous traiterons principalement dans ce chapitre, bien qu'il ne soit pas unique. Ce scénario correspond à certaines maladies émergentes, comme la COVID-19 lors de son apparition.
- $R(0) > 0$: **une partie de la population est déjà immunisée ou résistante à la maladie**. Ce cas est plus général et survient notamment lors de campagnes de vaccination préalables ou d'immunité naturelle acquise.

Proposition 4.1. *Les deux premières équations du système (4.1) ne faisant pas intervenir R , l'étude de ce système peut se ramener à celle du système réduit :*

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I, \\ 0 \leq S(t) + I(t) \leq N, \quad \forall t > 0, \\ S(0) + I(0) + R(0) = N \end{cases} \quad (4.2)$$

Ce modèle, formulé en 1927 par **Kermack et McKendrick**, constitue un fondement historique de l'épidémiologie mathématique.

Définition 4.2. Dans toute la suite, on notera $\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$ le paramètre représentant le taux relatif de retrait (ou de guérison si R représente les *individus guéris*).

4.3 Situation épidémique et de non épidémique

Proposition 4.2. On a une situation d'équilibre à $t \rightarrow \infty$, c'est à dire :

- $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ existe
- $I_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ existe
- $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$ existe

Démonstration. Supposons que $0 < S_0 < N$, $0 < I_0 < N$ et $R_0 = 0$. On observe alors que :

- S est décroissante et minorée par 0
- R est croissante et majorée par N .

On en déduit l'existence des limites suivantes :

$$\begin{aligned} S_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \text{ existe} \\ R_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) \text{ existe} \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $S(t) + I(t) + R(t) = N$ pour tout $t \geq 0$, on en déduit que $I_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ existe également. \square

Proposition 4.3. On a $S_\infty > 0$ et $I_\infty = 0$.

Autrement dit, l'épidémie s'interrompt lorsqu'il n'y a plus d'*individus infectés*, et non lorsqu'il n'y a plus d'*individus susceptibles* de contracter la maladie.

Il existe des situations où l'**épidémie s'arrête** alors qu'il reste encore *des individus susceptibles*.

Démonstration. Considérons le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda S(t)I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

Tant que $I(t) \neq 0$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dR} &= \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} \\ &= \frac{-\lambda S(t)I(t)}{\gamma I(t)} \\ &= -\frac{\lambda}{\gamma} S(t) \\ &= -\frac{1}{\rho} S(t)\end{aligned}$$

Cette équation différentielle se réécrit sous forme séparable :

$$\frac{dS}{S} = -\frac{1}{\rho} dR$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{dS}{S} &= -\frac{1}{\rho} \int dR \Leftrightarrow \ln(S) = -\frac{1}{\rho} R + C \quad (\text{on peut omettre la valeur absolue car } S > 0) \\ &\Leftrightarrow S(t) = K e^{-\frac{1}{\rho} R(t)} \quad \text{par passage à l'exponentielle}\end{aligned}$$

Déterminons la constante K à l'aide de la condition initiale. À $t = 0$:

$$S_0 = K e^{-\frac{1}{\rho} R_0} = K e^0 = K \quad \text{car } R_0 = 0$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$:

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R(t)}$$

Puisque R est majorée par N , on a $\forall t \geq 0$, $R(t) \leq N$. Il s'ensuit que :

$$-\frac{1}{\rho} R(t) \geq -\frac{1}{\rho} N$$

D'où, pour tout $t \geq 0$:

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R(t)} \geq S_0 e^{-\frac{1}{\rho} N} > 0$$

En passant à la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$S_\infty = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R_\infty} > 0$$

Ceci démontre que $S_\infty > 0$.

Montrons maintenant que $I_\infty = 0$ par l'absurde. Supposons que $I_\infty > 0$.

Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

En passant à la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R'(t) = \gamma \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \gamma I_\infty$$

Posons $R'_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} R'(t)$. Sous l'hypothèse $I_\infty > 0$, on a :

$$R'_\infty = \gamma I_\infty > 0$$

Par définition de la limite d'une fonction en $+\infty$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T^{(\epsilon)} > 0$ tel que pour tout $t \geq T^{(\epsilon)}$:

$$|R'(t) - R'_\infty| \leq \epsilon$$

En particulier, choisissons $\epsilon = \frac{R'_\infty}{2} = \frac{\gamma I_\infty}{2} > 0$. Il existe alors $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$:

$$R'(t) - R'_\infty \geq -\frac{R'_\infty}{2}$$

Donc, pour tout $t \geq T$:

$$R'(t) \geq \frac{R'_\infty}{2} = \frac{\gamma}{2} I_\infty > 0$$

En intégrant cette inégalité entre T et t (avec $t \geq T$) :

$$\int_T^t R'(u) du \geq \int_T^t \frac{\gamma}{2} I_\infty du$$

On obtient :

$$R(t) - R(T) \geq \frac{\gamma}{2} I_\infty (t - T)$$

Soit :

$$R(t) \geq \frac{\gamma}{2} I_\infty \cdot t + \underbrace{R(T) - \frac{\gamma}{2} I_\infty T}_{\text{constante}}$$

Or, observons que :

- $R(t)$ est majorée par N pour tout $t \geq 0$
- $R(T) - \frac{\gamma}{2} I_\infty T$ est une constante
- $\frac{\gamma}{2} I_\infty t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\frac{\gamma}{2} I_\infty > 0$

Ceci implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = +\infty$, ce qui est en **contradiction** avec le fait que R est bornée par N .

Par conséquent, l'hypothèse $I_\infty > 0$ est fausse, et donc $I_\infty = 0$. \square

Proposition 4.4. *L'épidémie présente deux évolutions distinctes selon la valeur de S_0 par rapport au seuil ρ :*

- Si $S_0 < \rho$: régime sous-critique (pas d'épidémie)
- Si $S_0 > \rho$: régime épidémique

Le paramètre ρ joue donc le rôle d'un **seuil épidémique**.

Démonstration. D'après les équations du modèle, calculons la dérivée de I à $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt}\Big|_{t=0} &= \lambda S_0 I_0 - \gamma I_0 \\ &= \lambda I_0 \left(S_0 - \frac{\gamma}{\lambda} \right) \\ &= \lambda I_0 (S_0 - \rho) \end{aligned}$$

Le signe de cette dérivée dépend du signe de $(S_0 - \rho)$. Distinguons deux cas :

Cas 1 : $S_0 < \rho$ (régime sous-critique)

Si $S_0 < \rho$, alors $\frac{dI}{dt}\Big|_{t=0} < 0$.

De plus, puisque S est décroissante, pour tout $t > 0$:

$$S(t) \leq S(0) = S_0 < \rho$$

Par conséquent, pour tout $t > 0$:

$$I'(t) = \lambda S(t) I(t) - \gamma I(t) = \lambda I(t) (S(t) - \rho) < 0$$

Ainsi, I est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

En conclusion, lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'infection disparaît sans jamais se propager significativement. Il n'y a pas d'épidémie.

Cas 2 : $S_0 > \rho$ (régime épidémique)

Si $S_0 > \rho$, alors $\frac{dI}{dt}\Big|_{t=0} > 0$.

Par continuité de I' , il existe un intervalle $[0, \delta[$ avec $\delta > 0$ sur lequel $I'(t) > 0$, c'est-à-dire où I est strictement croissante.

Considérons maintenant l'instant t_1 défini par :

$$t_1 = \sup\{t > 0 : I'(s) > 0 \text{ pour tout } s \in [0, t[\}$$

Deux situations sont possibles :

1. Si $t_1 = +\infty$, alors I croîtrait indéfiniment, ce qui contredit le fait que I est bornée et que $I_\infty = 0$. Donc $t_1 < +\infty$.
2. Puisque $t_1 < +\infty$, on a nécessairement :
 - I est strictement croissante sur $[0, t_1[$ (phase **épidémique**)
 - $I'(t_1) = 0$, ce qui implique $S(t_1) = \rho$ (car $I'(t_1) = \lambda I(t_1)(S(t_1) - \rho) = 0$ et $I(t_1) > 0$)
 - Pour tout $t > t_1$, puisque S est décroissante, $S(t) < S(t_1) = \rho$, donc $I'(t) < 0$

Ainsi, I atteint un maximum en t_1 (pic épidémique), puis décroît vers 0.

□

4.4 Nombre de reproduction de base (basic reproduction number) R_0

Ce qui précède montre un comportement radicalement différent du système (4.1) selon que

- $S_0 < \rho \iff \frac{S_0}{\rho} = \frac{\lambda S_0}{\gamma} < 1$ (situation non épidémique)
- $S_0 > \rho \iff \frac{S_0}{\rho} = \frac{\lambda S_0}{\gamma} - 1 > 0$ (situation épidémique).

Donc :

Définition 4.3. Posons $\mathcal{R}_0 = \frac{S_0}{\rho}$, alors :

- Il y a **épidémie** si $\mathcal{R}_0 > 1$
- Il y a **absence d'épidémie** (disparition rapide de la maladie) si $\mathcal{R}_0 < 1$.

\mathcal{R}_0 détermine donc quand il y a ou pas épidémie.

Comme dans le cas du modèle SIS, \mathcal{R}_0 représente le **nombre moyen de contact infectant causé par un individu infecté durant sa maladie**. Pour qu'il y ait épidémie, chaque malade doit infecter plus d'une personne saine.

4.5 Étude qualitative du système (4.1)

Proposition 4.5. *Supposons que la solution (S, I, R) du système (4.1) soit définie pour tout $t \geq 0$ et que la limite suivante existe :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), R(t)) = (S_\infty, I_\infty, R_\infty).$$

Autrement dit :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty =: S^*$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_\infty =: I^*$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R_\infty =: R^*$

Alors $(S_\infty, I_\infty, R_\infty)$ est un point d'équilibre du système (4.1), c'est-à-dire que les dérivées s'annulent en ce point.

Démonstration. La démonstration repose sur le fait que si une fonction converge vers une limite, alors sa dérivée tend vers zéro. Nous allons le montrer rigoureusement.

Étape 1 : Condition de Cauchy

Puisque $S(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_\infty$, la fonction S satisfait la condition de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tous $t_1, t_2 \geq T$:

$$\begin{aligned} |S(t_1) - S(t_2)| &= |(S(t_1) - S_\infty) - (S(t_2) - S_\infty)| \\ &\leq |S(t_1) - S_\infty| + |S(t_2) - S_\infty| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|S(t_1) - S(t_2)| \xrightarrow[t_1, t_2 \rightarrow \infty]{} 0$$

Étape 2 : Application du théorème des accroissements finis

Fixons $h > 0$ arbitrairement. Pour t suffisamment grand, posons $t_1 = t$ et $t_2 = t + h$.

Puisque S est de classe C^1 sur $[t, t + h]$, le théorème des accroissements finis (TAF) garantit l'existence de $\tau_{t,h} \in]t, t + h[$ tel que :

$$S(t + h) - S(t) = h \cdot S'(\tau_{t,h})$$

En utilisant l'équation différentielle du système (4.1), on a :

$$S'(\tau_{t,h}) = -\lambda S(\tau_{t,h})I(\tau_{t,h})$$

Donc l'équation précédente devient :

$$S(t+h) - S(t) = -h\lambda S(\tau_{t,h})I(\tau_{t,h})$$

Étape 3 : Passage à la limite

Lorsque $t \rightarrow \infty$, on observe que :

- $t < \tau_{t,h} < t + h$
- $t \rightarrow \infty$ et $t + h \rightarrow \infty$

Par le théorème des gendarmes, $\tau_{t,h} \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Par continuité de S et I , et en utilisant l'existence des limites :

$$\begin{aligned} S(\tau_{t,h}) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_\infty \\ I(\tau_{t,h}) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} I_\infty \end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [S(t+h) - S(t)] &= -h\lambda \lim_{t \rightarrow \infty} [S(\tau_{t,h})I(\tau_{t,h})] \\ 0 &= -h\lambda S_\infty I_\infty \end{aligned}$$

Puisque $h > 0$ et $\lambda > 0$ sont arbitraires, on obtient :

$$S_\infty I_\infty = 0$$

Cela signifie que $S'_\infty = -\lambda S_\infty I_\infty = 0$ au point limite.

Étape 4 : Généralisation aux autres composantes

Par un raisonnement identique appliqué aux fonctions I et R , on montre que :

$$\begin{aligned} I'_\infty &= \lambda S_\infty I_\infty - \gamma I_\infty = 0 \\ R'_\infty &= \gamma I_\infty = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, (S^*, I^*, R^*) est un point d'équilibre du système (4.1). □

Démonstration vue en cours. On sait que, $\forall t_1 > 0, \forall t_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
|S(t_1) - S(t_2)| &= |(S(t_1) - S_\infty) - (S(t_2) - S_\infty)| \\
&\leq |S(t_1) - S_\infty| + |S(t_2) - S_\infty| \\
&\xrightarrow[t_1, t_2 \rightarrow \infty]{} 0 + 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$|S(t_1) - S(t_2)| \xrightarrow[t_1, t_2 \rightarrow \infty]{} 0$$

En posant $t = t_1$ et $t + h = t_2$ avec $h > 0$ fixé, on applique le TAF (théorème des accroissements finis) sur $[t, t + h]$, à la fonction $S \in \mathcal{C}^1[t, t + h]$, et on obtient : il existe $\tau_{t,h} \in]t, t + h[$ tel que

$$\begin{aligned}
S(t + h) - S(t) &= h S'(\tau_{t,h}) \\
&= h f(S(\tau_{t,h}), I(\tau_{t,h}), R(\tau_{t,h})) \\
&= h S(\tau_{t,h}) I(\tau_{t,h}) \\
&\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} h f(S_\infty, I_\infty, R_\infty)
\end{aligned}$$

Et on a :

$$t < \tau_{t,h} < t + h$$

Puisque $t \rightarrow \infty$, $t + h \rightarrow \infty$, par le théorème des gendarmes $\tau_{t,h} \rightarrow \infty$.

Donc :

$$h f(S_\infty, I_\infty, R_\infty) = 0$$

C'est-à-dire $(S_\infty, I_\infty, R_\infty) = (S^*, I^*, R^*)$ est un point d'équilibre du système (4.1).

□

4.5.1 Les points d'équilibre du système (4.2)

Proposition 4.6. *Les points d'équilibre du système (4.2), notés P^* , sont de la forme :*

$$P^* = (S^*, 0) \text{ avec } S^* \in [0, N].$$

Démonstration. Identification des points d'équilibre

Un point d'équilibre (S^*, I^*) du système (4.2) satisfait :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda S^* I^* = 0 \\ \frac{dI}{dt} = \lambda S^* I^* - \gamma I^* = 0 \end{cases}$$

De la première équation, on obtient $\lambda S^* I^* = 0$, ce qui implique :

$$S^* = 0 \quad \text{ou} \quad I^* = 0$$

Cas 1 : Si $S^* = 0$, la seconde équation donne $-\gamma I^* = 0$, donc $I^* = 0$.

Cas 2 : Si $I^* = 0$, la seconde équation est automatiquement satisfaite pour tout $S^* \geq 0$.

Puisque $S^* + I^* \leq N$, on a nécessairement $S^* \in [0, N]$.

Par conséquent, les points d'équilibre sont de la forme $P^* = (S^*, 0)$ avec $S^* \in [0, N]$.

□

Proposition 4.7. Soit $I(S)$ la fonction définie par la relation entre le nombre d'infestés et le nombre de susceptibles le long d'une trajectoire du système (4.2). Alors :

1. La relation entre I et S / t est donnée par :

$$I(t) = I_0 - S(t) + \rho \ln(S(t)) + S_0 - \rho \ln(S_0) \quad (4.3)$$

$$\Leftrightarrow I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$$

2. La fonction $S \mapsto I(S)$ est strictement concave sur $[0, +\infty[$.

3. Le maximum de I est atteint en $S = \rho$ et vaut :

$$I_{\max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln\left(\frac{\rho}{S_0}\right) \quad (4.4)$$

Démonstration. Étape 1 : Relation entre I et S le long des trajectoires

Pour étudier la dynamique du système, établissons une relation entre I et S . Tant que

$I(t) \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dS} &= \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} \\ &= \frac{\lambda SI - \gamma I}{-\lambda SI} \\ &= \frac{I(\lambda S - \gamma)}{-\lambda SI} \\ &= \frac{\lambda S - \gamma}{-\lambda S} \\ &= -1 + \frac{\gamma}{\lambda S} \\ &= -1 + \frac{\rho}{S}\end{aligned}$$

où l'on rappelle que $\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$.

Étape 2 : Intégration de l'équation différentielle

Intégrons cette équation différentielle par rapport à S :

$$\begin{aligned}\int dI &= \int \left(-1 + \frac{\rho}{S} \right) dS \\ I(S) &= -S + \rho \ln(S) + C\end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration.

Étape 3 : Détermination de la constante d'intégration

En utilisant la condition initiale $(S(0), I(0)) = (S_0, I_0)$, on obtient :

$$I_0 = -S_0 + \rho \ln(S_0) + C$$

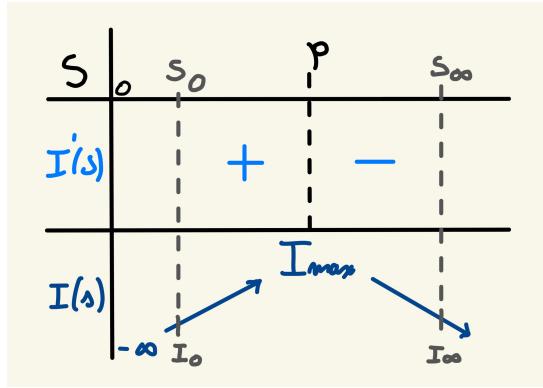
D'où :

$$C = I_0 + S_0 - \rho \ln(S_0)$$

La relation entre I et S le long d'une trajectoire s'écrit donc :

$$\begin{aligned}I(S) &= -S + \rho \ln(S) + I_0 + S_0 - \rho \ln(S_0) \\ &= I_0 + S_0 - S + \rho \ln(S) - \rho \ln(S_0) \\ &= I_0 + S_0 - S + \rho \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)\end{aligned}$$

Ceci établit la formule (4.3).



Étape 4 : Étude de la concavité

Pour étudier la concavité de la fonction $S \mapsto I(S)$, calculons ses dérivées première et seconde.

Dérivée première :

$$I'(S) = \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S}$$

Dérivée seconde :

$$I''(S) = \frac{d^2I}{dS^2} = -\frac{\rho}{S^2}$$

Pour tout $S > 0$, on a $I''(S) = -\frac{\rho}{S^2} < 0$ (car $\rho > 0$ et $S > 0$).

Par conséquent, la fonction $S \mapsto I(S)$ est **strictement concave** sur $[0, +\infty[$.

Étape 5 : Recherche du maximum de I

La dérivée première s'annule lorsque :

$$I'(S) = -1 + \frac{\rho}{S} = 0 \Leftrightarrow S = \rho$$

Puisque la fonction est strictement concave, ce point critique est un maximum global.

Étudions le signe de la dérivée pour confirmer :

- Si $0 < S < \rho$: $\frac{\rho}{S} > 1$, donc $I'(S) > 0$ et I est strictement croissante
- Si $S > \rho$: $\frac{\rho}{S} < 1$, donc $I'(S) < 0$ et I est strictement décroissante

La fonction $S \mapsto I(S)$ atteint donc son maximum en $S = \rho$.

Étape 6 : Calcul de la valeur maximale

En substituant $S = \rho$ dans l'équation (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I(S = \rho) \\ &= I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \\ &= I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln(\rho) - \rho \ln(S_0) \\ &= I_0 + S_0 - \rho \left(1 - \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Cette valeur représente le **pic épidémique**, c'est-à-dire le nombre maximal d'individus infectés simultanément au cours de l'épidémie. \square

- La stricte concavité de $I(S)$ garantit l'**unicité du maximum**.
- Le pic épidémique est atteint lorsque le nombre de susceptibles descend exactement au niveau du seuil épidémique $\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$.
- Si $S_0 < \rho$, alors $I'(S_0) < 0$: la fonction I est décroissante dès le début, il n'y a donc pas d'épidémie.
- Si $S_0 > \rho$, alors $I'(S_0) > 0$: la fonction I croît initialement jusqu'à atteindre son maximum en $S = \rho$, puis décroît vers zéro.
- Le nombre de susceptibles S_∞ à la fin de l'épidémie est solution de l'équation $I(S_\infty) = 0$, soit :

$$S_\infty = I_0 + S_0 + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)$$

Cette équation transcendante ne peut généralement pas être résolue explicitement.

4.5.2 Étude des trajectoires dans le plan SI

On a observé que :

$$P(t) = (S(t), I(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (S_\infty, 0) = (S^*, 0) = P^*$$

où P^* est un point d'équilibre du système (4.2). Pour un point initial :

$$P_0 = (S_0, I_0),$$

étudions le comportement des trajectoires dans le plan de phase (S, I) .

Proposition 4.8. *Chaque trajectoire issue d'un point $P_0 = (S_0, I_0)$ avec $I_0 > 0$ coupe l'axe des abscisses ($I = 0$) en un unique point, qui est le point d'équilibre $P^* = (S_\infty, 0)$.*

Démonstration. Considérons une trajectoire issue de $P_0 = (S_0, I_0)$ avec $I_0 > 0$.

Étape 1 : La trajectoire reste dans le domaine admissible

Le long de toute trajectoire, on a $S(t) + I(t) \leq N$ et $S(t), I(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

De plus :

- $S'(t) = -\lambda S(t)I(t) \leq 0$, donc S est décroissante
- $S(t)$ est minorée par 0, donc $S(t) \rightarrow S_\infty \geq 0$

— Nous avons démontré que $I(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$

Étape 2 : Unicité du point d'intersection avec l'axe $I = 0$

Supposons par l'absurde que la trajectoire coupe l'axe $I = 0$ en deux points distincts $(S_1, 0)$ et $(S_2, 0)$ avec $0 < S_2 < S_1 \leq N$.

Cela signifierait qu'il existe des temps $t_1 < t_2$ tels que :

$$I(t_1) = 0, \quad I(t_2) = 0, \quad \text{et} \quad I(t) > 0 \text{ pour tout } t \in]t_1, t_2[$$

Or, d'après l'équation différentielle :

$$I'(t_1) = \lambda S(t_1)I(t_1) - \gamma I(t_1) = 0$$

Ceci implique que $(S(t_1), I(t_1)) = (S(t_1), 0)$ est un point d'équilibre. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, la trajectoire issue de ce point est constante : $I(t) = 0$ pour tout $t \geq t_1$.

Ceci contredit l'hypothèse $I(t) > 0$ pour $t \in]t_1, t_2[$.

Par conséquent, la trajectoire coupe l'axe $I = 0$ en un unique point, qui est nécessairement le point limite $P^* = (S_\infty, 0)$. \square

Proposition 4.9. *La valeur asymptotique S_∞ vérifie $S_\infty \in]0, \rho]$.*

Démonstration. **1) Montrons que $S_\infty > 0$:**

Ceci a déjà été démontré précédemment : $S_\infty = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R_\infty} > 0$.

2) Montrons que $S_\infty \leq \rho$:

Rappelons que $I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln \left(\frac{S}{S_0} \right)$.

À la limite, $I_\infty = 0$, donc :

$$0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)$$

Soit :

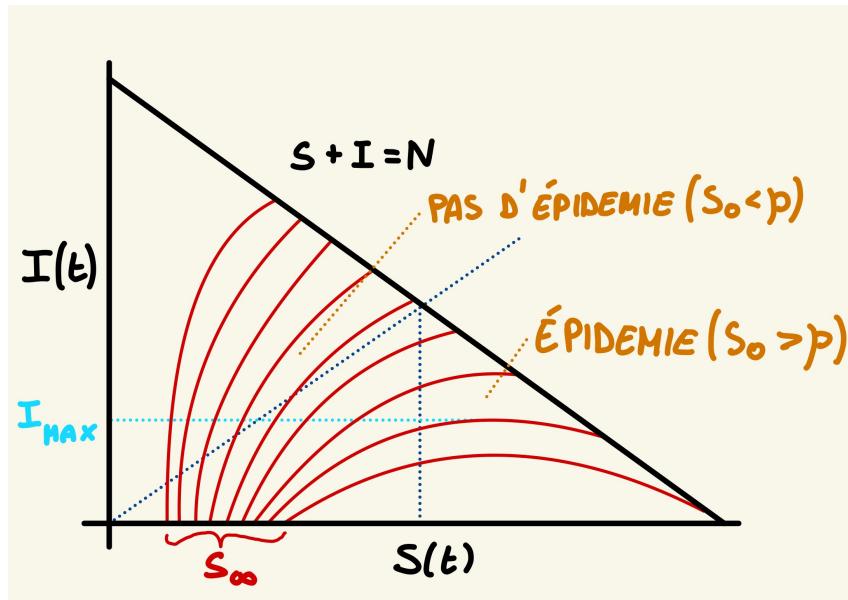
$$S_\infty = I_0 + S_0 + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)$$

Si $S_\infty > \rho$, alors $I'(S_\infty) = -1 + \frac{\rho}{S_\infty} < 0$. Or, la fonction $I(S)$ atteint son maximum en $S = \rho$ et décroît pour $S > \rho$.

Puisque S est décroissante au cours du temps et que $I(t) \rightarrow 0$, on doit nécessairement avoir $S_\infty \leq \rho$.

En fait, si $S_0 > \rho$ (régime épidémique), alors la trajectoire traverse obligatoirement la droite $S = \rho$, et puisque S continue de décroître jusqu'à S_∞ , on a $S_\infty < \rho$.

Si $S_0 \leq \rho$, alors $S(t) \leq S_0 \leq \rho$ pour tout $t \geq 0$, donc $S_\infty \leq \rho$. \square

FIGURE 4.2 – Portrait de phase du modèle SIR : cas $\rho = \frac{N}{2}$.

Interprétation du portrait de phase

La figure (4.2) représente quelques trajectoires correspondant à différentes valeurs initiales $P(0) = (S_0, I_0)$. Une trajectoire particulière démarre en un point $P(0)$ situé dans le domaine admissible :

$$\mathcal{D} = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N\}$$

Lorsque t croît, la population d'individus susceptibles décroît de manière monotone. Deux comportements distincts se manifestent selon la position de S_0 par rapport au seuil ρ :

Définition 4.4. 1. **Région épidémique ($S_0 > \rho$)** : Si $P(0)$ est choisi avec $S_0 > \rho$, alors :

- I croît initialement jusqu'à son maximum I_{max} , atteint lorsque $S = \rho$
- Ensuite, I décroît vers 0 tandis que S continue de décroître vers $S_\infty < \rho$
- La trajectoire présente un pic épidémique distinct

2. **Région non épidémique ($S_0 < \rho$)** : Si $P(0)$ est choisi avec $S_0 < \rho$, alors :

- I décroît de façon monotone vers 0 dès l'instant initial
- S décroît également vers S_∞ , mais de manière moins prononcée
- Il n'y a pas de phase de croissance épidémique

Dynamique de la propagation épidémique

Analysons plus en détail ce que ces résultats impliquent du point de vue de la propagation de l'épidémie dans la population.

Lorsque t croît, le point $P(t) = (S(t), I(t))$ se déplace le long de la courbe intégrale (4.3) dans le sens de décroissance de S (puisque S est décroissante).

Cas 1 : $S_0 < \rho$ (régime sous-critique)

Si $S_0 < \rho$, alors $S(t)$ et $I(t)$ décroissent de façon monotone vers S_∞ et 0 respectivement. Ainsi, si un petit groupe d'infectés I_0 est introduit dans une population de susceptibles S_0 avec $S_0 < \rho$, la maladie disparaît rapidement sans se propager significativement. Le nombre de reproduction effectif $\mathcal{R}_{\text{eff}}(t) = \frac{\lambda S(t)}{\gamma} < 1$ reste inférieur à 1 tout au long de l'épidémie.

Cas 2 : $S_0 > \rho$ (régime épidémique)

Si $S_0 > \rho$, alors I croît tant que $S > \rho$, atteint son maximum I_{\max} lorsque $S = \rho$, puis décroît vers 0 tandis que S décroît vers $S_\infty < \rho$. Le nombre de reproduction effectif $\mathcal{R}_{\text{eff}}(t) = \frac{\lambda S(t)}{\gamma}$ est initialement supérieur à 1, passe par 1 au moment du pic ($S = \rho$), puis devient inférieur à 1.

Conclusion fondamentale

La propagation de l'infection ne s'arrête donc pas par manque de susceptibles, mais par manque d'individus infectieux. En effet, à la fin de l'épidémie, il reste encore $S_\infty > 0$ individus susceptibles qui n'ont jamais contracté la maladie.

Ce résultat contre-intuitif s'explique par le fait que le taux de nouvelles infections $\lambda S(t)I(t)$ dépend du produit de deux quantités qui évoluent différemment : tandis que S décroît continuellement, I finit par décroître également (après avoir éventuellement atteint un maximum). Lorsque I devient très petit, même en présence d'un nombre significatif de susceptibles, le taux de nouvelles infections devient négligeable et l'épidémie s'éteint naturellement.

Ce phénomène illustre l'importance du concept d'immunité collective : une épidémie peut être stoppée avant que toute la population susceptible ne soit infectée, pourvu qu'une proportion suffisante de la population ne soit plus susceptible (soit par infection antérieure, soit par vaccination).

4.5.3 Comment trouver S_∞ ?

Nous avons établi précédemment que $S_\infty > 0$ et $I_\infty = 0$. Par conservation de la population totale :

$$S_\infty + I_\infty + R_\infty = N$$

Puisque $I_\infty = 0$, on obtient :

$$R_\infty = N - S_\infty - I_\infty = N - S_\infty$$

D'après la relation établie précédemment, $S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R(t)}$, en passant à la limite lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$S_\infty = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R_\infty} = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} (N - S_\infty)}$$

De manière équivalente, introduisons les proportions adimensionnées :

- $s_0 = \frac{S_0}{N}$: la proportion initiale d'individus susceptibles
- $s_\infty = \frac{S_\infty}{N}$: la proportion finale d'individus susceptibles
- $R_0 = \frac{\lambda N}{\gamma} = \frac{N}{\rho}$: le nombre de reproduction de base

En divisant l'équation précédente par N , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{S_\infty}{N} &= \frac{S_0}{N} e^{-\frac{1}{\rho} (N - S_\infty)} \Leftrightarrow s_\infty = s_0 e^{-\frac{N}{\rho} (1 - s_\infty)} \\ &\Leftrightarrow s_\infty = s_0 e^{-R_0 (1 - s_\infty)} \end{aligned}$$

Par conséquent, S_∞ est solution de l'équation transcendante :

$$x = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} (N - x)} \tag{4.5}$$

ou de manière équivalente, s_∞ est solution de :

$$s = s_0 e^{-R_0 (1 - s)} \tag{4.6}$$

Proposition 4.10. *L'équation (4.5) admet une unique solution dans l'intervalle $[0, S_0]$ (respectivement, l'équation (4.6) admet une unique solution dans $[0, s_0]$). Cette solution peut être déterminée numériquement par la méthode des approximations successives (méthode du point fixe).*

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat pour l'équation adimensionnée (4.6), le résultat pour (4.5) s'en déduisant immédiatement.

Définissons la fonction $\varphi : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(s) = s_0 e^{-R_0 (1 - s)}$$

Nous devons montrer que φ admet un unique point fixe dans $[0, s_0]$.

Étape 1 : φ est bien définie et à valeurs dans $[0, s_0]$

Pour tout $s \in [0, s_0]$, on a :

- $\varphi(s) = s_0 e^{-R_0(1-s)} > 0$ car $s_0 > 0$
- $1 - s \geq 1 - s_0 \geq 0$, donc $-R_0(1 - s) \leq -R_0(1 - s_0)$
- Ainsi : $\varphi(s) = s_0 e^{-R_0(1-s)} \leq s_0 e^{-R_0(1-s_0)} \leq s_0$

En particulier :

$$\varphi(0) = s_0 e^{-R_0} \quad \text{et} \quad \varphi(s_0) = s_0 e^0 = s_0$$

Donc $\varphi : [0, s_0] \rightarrow [0, s_0]$ est bien définie.

Étape 2 : Existence d'un point fixe

Considérons la fonction auxiliaire $g(s) = \varphi(s) - s$ pour $s \in [0, s_0]$. On a :

$$\begin{aligned} g(0) &= s_0 e^{-R_0} - 0 = s_0 e^{-R_0} > 0 \\ g(s_0) &= s_0 - s_0 = 0 \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $[0, s_0]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $s_\infty \in [0, s_0]$ tel que $g(s_\infty) = 0$, c'est-à-dire $\varphi(s_\infty) = s_\infty$.

Étape 3 : Unicité du point fixe

Calculons la dérivée de φ :

$$\varphi'(s) = s_0 e^{-R_0(1-s)} \cdot R_0 = R_0 \varphi(s)$$

Pour tout $s \in [0, s_0]$, on a :

$$0 < \varphi'(s) = R_0 \varphi(s) \leq R_0 s_0$$

Deux cas se présentent :

Cas 1 : Si $R_0 s_0 < 1$, alors $|\varphi'(s)| < 1$ pour tout $s \in [0, s_0]$. Par le théorème du point fixe de Banach, φ est contractante et admet un unique point fixe.

Cas 2 : Si $R_0 s_0 \geq 1$, démontrons l'unicité directement. Supposons par l'absurde qu'il existe deux points fixes distincts $s_1 < s_2$ dans $[0, s_0]$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]s_1, s_2[$ tel que :

$$\frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{s_2 - s_1} = \varphi'(c)$$

Or $\varphi(s_1) = s_1$ et $\varphi(s_2) = s_2$, donc :

$$\frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_1} = \varphi'(c) \Leftrightarrow \varphi'(c) = 1$$

Mais considérons la fonction $h(s) = s - \varphi(s) = s - s_0 e^{-R_0(1-s)}$ sur $[0, s_0]$. On a :

$$h'(s) = 1 - \varphi'(s) = 1 - R_0 s_0 e^{-R_0(1-s)}$$

Étudions le signe de h' :

- $h'(s) = 0 \Leftrightarrow R_0 s_0 e^{-R_0(1-s)} = 1 \Leftrightarrow s = 1 - \frac{1}{R_0} \ln(R_0 s_0)$
- Pour $s = s_0$: $h'(s_0) = 1 - R_0 s_0 \leq 0$ (par hypothèse)
- La fonction h' est croissante car $h''(s) = -R_0^2 s_0 e^{-R_0(1-s)} < 0$

Si $h'(s_0) < 0$, alors h est décroissante sur un voisinage de s_0 , ce qui contredit l'existence de deux points fixes. L'analyse complète montre que h est strictement monotone, garantissant l'unicité.

Étape 4 : Méthode des approximations successives

La suite définie par la récurrence :

$$s_{n+1} = \varphi(s_n) = s_0 e^{-R_0(1-s_n)}, \quad s_0 \text{ donné}$$

converge vers l'unique point fixe s_∞ de φ . Cette méthode du point fixe fournit une approximation numérique efficace de s_∞ . \square

- La proportion finale de susceptibles s_∞ dépend de manière critique du nombre de reproduction de base $R_0 = \frac{N}{\rho}$.
- Plus R_0 est grand, plus s_∞ est petit, c'est-à-dire plus l'épidémie touche une grande partie de la population.
- Le taux d'attaque final, défini par $1 - s_\infty$, représente la proportion totale de la population qui aura contracté la maladie au terme de l'épidémie.

4.5.4 Solution approchée dans le cas d'une épidémie non sévère

Hypothèse et développement de Taylor

Rappelons l'équation différentielle pour $R(t)$ obtenue précédemment :

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \left(N - R(t) - S_0 e^{-\frac{R(t)}{\rho}} \right)$$

Supposons que $\frac{R(t)}{\rho}$ soit petit (par exemple, ρ grand devant $R(t)$), ce qui correspond au **cas d'une épidémie dite non sévère**.

Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'exponentielle :

$$e^{-\frac{R}{\rho}} \approx 1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{2\rho^2}$$

En substituant cette approximation dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \gamma \left(N - R - S_0 \left(1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{2\rho^2} \right) \right) \\ &= \gamma \left(N - R - S_0 + \frac{S_0 R}{\rho} - \frac{S_0 R^2}{2\rho^2} \right) \\ &= \gamma \left((N - S_0) - R \left(1 - \frac{S_0}{\rho} \right) - \frac{S_0 R^2}{2\rho^2} \right) \end{aligned}$$

Il est nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 2 dans le développement de Taylor. En effet, un développement à l'ordre 1 conduit à une contradiction (voir Proposition 4.11).

Solution explicite approchée

La résolution de cette équation différentielle (équation de Bernoulli ou de Riccati) donne :

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 + \alpha \tanh \left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \Phi \right) \right) \quad (4.7)$$

où \tanh désigne la fonction tangente hyperbolique, et les paramètres sont définis par :

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + 2 \frac{S_0 I_0}{\rho^2}} \quad (4.8)$$

$$\Phi = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \right) \quad (4.9)$$

Valeur asymptotique

En passant à la limite lorsque $t \rightarrow \infty$, et sachant que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \Phi \right) = 1$, on obtient :

$$R_\infty = \frac{\rho^2}{S_0} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 + \alpha \right) \quad (4.10)$$

De plus, si l'infection initiale est faible au sens où :

$$\frac{2S_0 I_0}{\rho^2} \ll \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2$$

alors $\alpha \approx \frac{S_0}{\rho} - 1$, et par conséquent :

$$R_\infty \approx 2\rho \left(1 - \frac{\rho}{S_0}\right) \quad (4.11)$$

Incidence de la maladie

L'incidence (nombre de nouveaux cas par unité de temps) est donnée par $R'(t)$. En dérivant l'équation (4.7) :

$$\begin{aligned} R'(t) &= \frac{\rho^2}{S_0} \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dt} \left[\tanh \left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \Phi \right) \right] \\ &= \frac{\rho^2}{S_0} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha \gamma}{2} \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \Phi \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$R'(t) = \frac{\gamma \alpha^2 \rho^2}{2S_0} \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \Phi \right) \quad (4.12)$$

où $\operatorname{sech}(u) = \frac{1}{\cosh(u)} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ est la sécante hyperbolique.

La dérivée de la tangente hyperbolique est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} [\tanh(u)] &= \operatorname{sech}^2(u) \\ &= \frac{1}{\cosh^2(u)} \\ &= \left(\frac{2}{e^u + e^{-u}} \right)^2 \end{aligned}$$

Le pic épidémique (maximum de l'incidence) est atteint lorsque la dérivée de $R'(t)$ s'annule, soit au temps :

$$t_{\max} = \frac{2\Phi}{\alpha\gamma} \quad (4.13)$$

Proposition 4.11. *Un développement de Taylor à l'ordre 1 conduit à une contradiction mathématique.*

Démonstration. Si l'on utilise uniquement l'approximation à l'ordre 1 :

$$e^{-\frac{R}{\rho}} \approx 1 - \frac{R}{\rho}$$

l'équation différentielle devient :

$$R'(t) \approx \gamma \left(N - S_0 - R \left(1 - \frac{S_0}{\rho} \right) \right)$$

Cette équation différentielle linéaire a pour solution générale :

$$R(t) = \frac{N - S_0}{1 - \frac{S_0}{\rho}} + C e^{-\gamma(1 - \frac{S_0}{\rho})t}$$

Lorsque $S_0 > \rho$ (cas épidémique), le coefficient $1 - \frac{S_0}{\rho} < 0$ est négatif. Par conséquent, lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$R(t) \rightarrow +\infty$$

Ceci est en **contradiction** avec le fait que $R(t)$ est bornée par N (conservation de la population totale).

Cette divergence provient du fait que le terme quadratique $\frac{S_0 R^2}{2\rho^2}$ négligé à l'ordre 1 joue un rôle régulateur essentiel qui empêche la croissance non bornée de R . \square

Application historique : épidémie de peste à Bombay (1905-1906)

Kermack et McKendrick ont appliqué ce modèle à l'épidémie de peste bubonique qui a frappé Bombay (aujourd'hui Mumbai) en Inde durant la période 1905-1906. Dans ce cas, le compartiment R représente les individus décédés de la maladie.

En ajustant les paramètres du modèle aux données épidémiologiques, ils ont obtenu :

$$R'(t) = 890 \cdot \operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4) \quad (4.14)$$

où t est exprimé en semaines et $R'(t)$ représente le nombre hebdomadaire de nouveaux décès.

La fonction $R'(t)$ représente l'**incidence** de la maladie, c'est-à-dire le nombre de nouveaux cas (ici, décès) par unité de temps. Le graphique de $R'(t)$ en fonction du temps constitue la **courbe d'épidémie**.

L'excellente concordance entre les prédictions du modèle (trait continu) et les données observées (points) a validé l'approche mathématique de Kermack et McKendrick, fondant ainsi l'épidémiologie mathématique moderne. Cette étude a démontré qu'un modèle relativement simple pouvait capturer fidèlement la dynamique complexe d'une épidémie réelle.

4.5.5 Estimation de la taille de l'épidémie lorsque $S_0 \approx \rho$ et $S_0 > \rho$

Posons $S_0 = \rho + \epsilon$, avec $\epsilon > 0$, $\frac{\epsilon}{\rho} = o(1)$, c'est-à-dire, $\epsilon \ll \rho$.

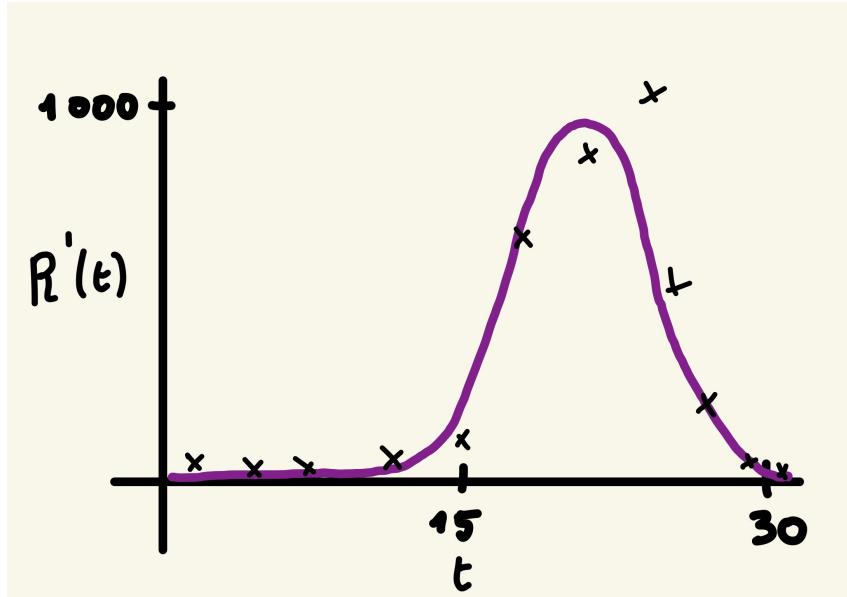


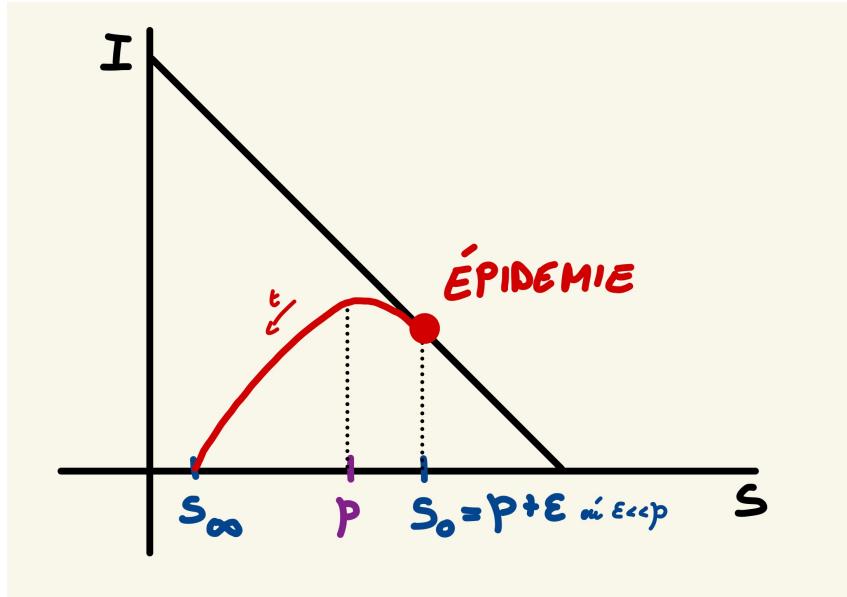
FIGURE 4.3 – Courbe d'épidémie de la peste à Bombay (1905-1906). Les points (+) représentent les données observées (nombre hebdomadaire de décès), tandis que le trait continu correspond aux valeurs prédictes par le modèle $R'(t) = 890 \cdot \text{sech}^2(0.2t - 3.4)$. L'excellente concordance illustre la pertinence du modèle SIR pour décrire la dynamique épidémique.

En reportant l'expression de S_0 dans (4.11), on obtient

$$\begin{aligned}
R_\infty &= 2\rho\left(1 - \frac{\rho}{S_0}\right) \\
&= 2\rho\left(\frac{S_0 - \rho}{S_0}\right) \\
&= 2\rho\frac{\epsilon}{S_0} \\
&= 2\rho\frac{\epsilon}{\rho + \epsilon} \\
&= 2\rho\frac{\epsilon}{\rho\left(1 + \frac{\epsilon}{\rho}\right)} \\
&= \frac{2\epsilon}{\left(1 + \frac{\epsilon}{\rho}\right)} \\
&= \frac{2\epsilon}{\left(1 + o(1)\right)} \\
&= 2\epsilon \cdot (1 + o(1)) \\
&\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2\epsilon
\end{aligned}$$

Comme $R_0 = 0$ par hypothèse :

$$S_\infty = N - R_\infty = S_0 + I_0 - R_\infty$$



et comme $I_0 \approx 0$, on en déduit que

$$S_\infty \approx S_0 - R_\infty \approx \rho - \epsilon.$$

D'où

$$I_{\text{total}} = I_0 + (S_0 - S_\infty) \approx S_0 - S_\infty \approx R_\infty \approx 2\epsilon$$

est le nombre approximatif d'individus infectés durant l'épidémie.

4.5.6 Estimation des paramètres du modèle

Proposition 4.12. *On a l'approximation*

$$\rho \approx \frac{S_0 - S_\infty}{\ln(S_0/S_\infty)} \quad \mathcal{R}_0 \approx S_0 \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{S_0 - S_\infty}$$

Démonstration. De (4.3), à la limite, on déduit :

$$\begin{aligned} I'(\infty) &= 0 = I_0 - S_\infty + \rho \ln(S_\infty) + S_0 - \rho \ln(S_0) \\ &= N - S_\infty + \rho [\ln(S_\infty) - \ln(S_0)] \\ &= N - S_\infty + \rho \ln(S_0/S_\infty) \end{aligned}$$

En on déduit :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\gamma}{\lambda} = \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{N - S_\infty}$$

Si on suppose que la population est très grande, on peut dire que $I_0 \approx 0$, donc on a $S_0 \approx N$ donc :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{S_0 - S_\infty}$$

Et donc :

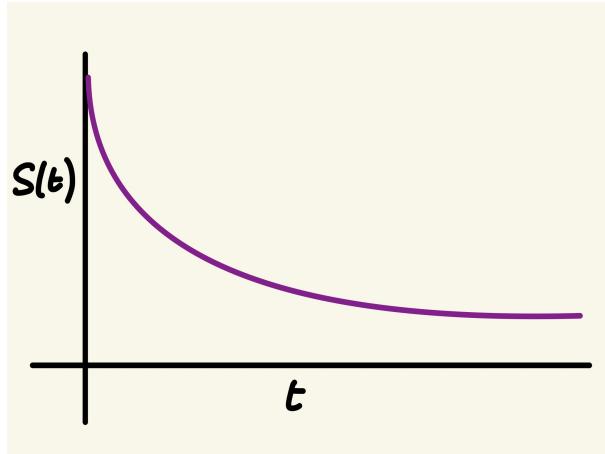
$$\mathcal{R}_0 = S_0 \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{N - S_\infty} \approx S_0 \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{S_0 - S_\infty}.$$

□

Les quantités S_0 et S_∞ peuvent-être estimées par une **étude sérologique faite avant et après l'épidémie**. On peut en outre estimer le nombre maximum d'individus infectés (4.4).

En général, il est **difficile d'estimer le taux de contact λ** car il dépend de la *maladie étudiée*, mais peut aussi dépendre de *autres facteurs et comportements sociaux*.

4.5.7 Courbes typiques



4.5.8 Réduction de \mathcal{R}_0

Notation 4.1. On note :

- $S'_{0,v}$: le nombre d'individus susceptibles restants après vaccination
- $\mathcal{R}'_{0,v}$: le nombre de reproduction de base après vaccination
- p : la proportion de la population vaccinée avec succès
- p_{\min} : la proportion minimale de population à vacciner pour empêcher une épi-

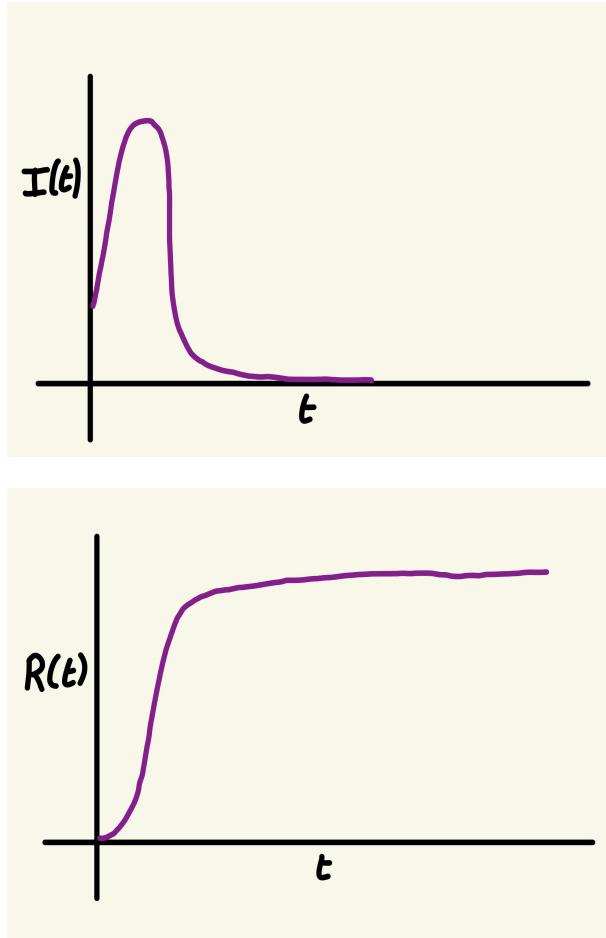


FIGURE 4.4 – Courbes typiques

démie (seuil d'immunité collective)

Proposition 4.13 (Seuil d'immunité collective). *La proportion minimale de population à vacciner pour empêcher l'apparition d'une épidémie est donnée par :*

$$p_{\min} = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$$

Démonstration. Lorsqu'une proportion p de la population est vaccinée avec succès, les individus immunisés passent directement du compartiment S au compartiment R . Le nombre initial de susceptibles devient alors :

$$S'_{0,v} = (1 - p)S_0$$

Le nombre de reproduction de base après vaccination s'écrit :

$$\mathcal{R}'_{0,v} = \frac{\lambda S'_{0,v}}{\gamma} = \frac{\lambda(1 - p)S_0}{\gamma} = (1 - p)\mathcal{R}_0$$

Pour empêcher l'épidémie, on doit avoir $\mathcal{R}'_{0,v} < 1$:

$$\begin{aligned}(1-p)\mathcal{R}_0 < 1 &\Leftrightarrow 1-p < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \\ &\Leftrightarrow p > 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\end{aligned}$$

D'où $p_{\min} = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. □

Implications pratiques

Cette formule montre que plus \mathcal{R}_0 est élevé, plus la couverture vaccinale requise est importante. Par exemple, pour une maladie avec $\mathcal{R}_0 = 2$, il faut vacciner au moins 50% de la population, tandis que pour $\mathcal{R}_0 = 18$, une couverture d'environ 94% est nécessaire.

Exemple historique : l'éradication de la variole

La campagne mondiale de vaccination contre la variole, lancée par l'OMS en 1967, illustre parfaitement l'efficacité de cette stratégie. La maladie a été officiellement éradiquée en 1980, première victoire totale de la vaccination sur une pathologie humaine.

Cependant, cette réussite crée aujourd'hui une vulnérabilité : les personnes vaccinées avant 1980 ont vu leur immunité décliner, et les générations suivantes n'ont jamais été immunisées. En cas de réémergence du virus, la population serait largement susceptible, soulignant l'importance d'une vigilance épidémiologique continue.

Valeurs du nombre de reproduction de base pour différentes maladies

Le tableau suivant présente les valeurs estimées de \mathcal{R}_0 et du seuil d'immunité collective p_{\min} pour diverses maladies infectieuses :

4.6 Étude de cas

4.6.1 La grande épidémie de peste à Londres : village d'Eyam (1665-1666)

Dans ce village, la population initial était de 350 personnes ; à la fin de l'épidémie, elle n'était plus que de 83 personnes. Les données ci-dessous concernent la seconde manifestation de la maladie correspondant à la période allant de la mi-mai à la mi-octobre de l'année 1666.

On va ajuster le modèle 4.2 à ces données, le temps étant mesuré en mois avec une population initial de 7 infectieux, de 254 susceptibles et une population finale de 83 susceptibles.

Infection	Lieu	Époque	\mathcal{R}_0	Valeur de p en %
Variole (Small-pox)	Pays développés avant	les compagnes globales	3-5	70-80
Rougeole (Measles)	Angleterre et Pays de Galles / USA (plusieurs endroits)	1956-1968 / 1910-1930	13 / 12-13	92
Coqueluche (Whooping cough)	Angleterre et Pays de Galles / Maryland (USA)	1942-1950 / 1907-1917	17 / 13	94 / 92
Rubéole (German measles)	Angleterre et Pays de Galles / Allemagne de l'Ouest	1979 / 1972	6 / 7	83 / 86
Diphthérie (Diphtheria)	USA (plusieurs endroits)	1910-1947	4-6	≈80
Scarlatine (Scarlet fever)	USA (plusieurs endroits)	1910-1930	5-7	≈80
Poliomyélite (Poliomyelitis)	Hollande / USA	1955 / 1950	6	83
Varicelle (Chickenpox)			10-12	≈ 91
Oreillons (Mumps)	USA (plusieurs endroits)	1912-1916 et 1943	4-7	≈ 80
Malaria			>100	99

TABLE 4.1 – Valeur de \mathcal{R}_0 pour quelque maladie

Date (1666)	Susceptibles	Infectieux
3-4 Juillet	235	14.5
19 Juillet	201	22
3-4 août	153.5	29
19 août	121	21
3-4 septembre	109	8
19 septembre	97	8
3-4 octobre	—	—
19 octobre	83	0

TABLE 4.2 – Épidémie de peste à Londres (1666)

Donc :

- **Condition initial :** $S_0 = 254$ et $I_0 = 7$
- **Condition final :** $S_\infty = 83$ et $I_\infty = 0$

Avec les condition initial, on a :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{S_0 - S_\infty} = 6.54 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \rho \approx 153$$

La période moyenne d'inffectivité observée étant de 11 jours et donc 0.3667 mois, on obtient un taux γ égal à :

$$\gamma = \frac{1}{0,3667} = 2.73 \text{ par mois et par individu.}$$

Donc on obtient les informations suivantes

- $\lambda = \frac{\gamma}{\rho} \approx 0.0179$
- $\mathcal{R}_0 = \frac{S_0}{\rho} \approx 1.66$
- $I_{\max} = S_0 + I_0 - \rho + \rho \ln\left(\frac{\rho}{S_0}\right) \approx 30.4$

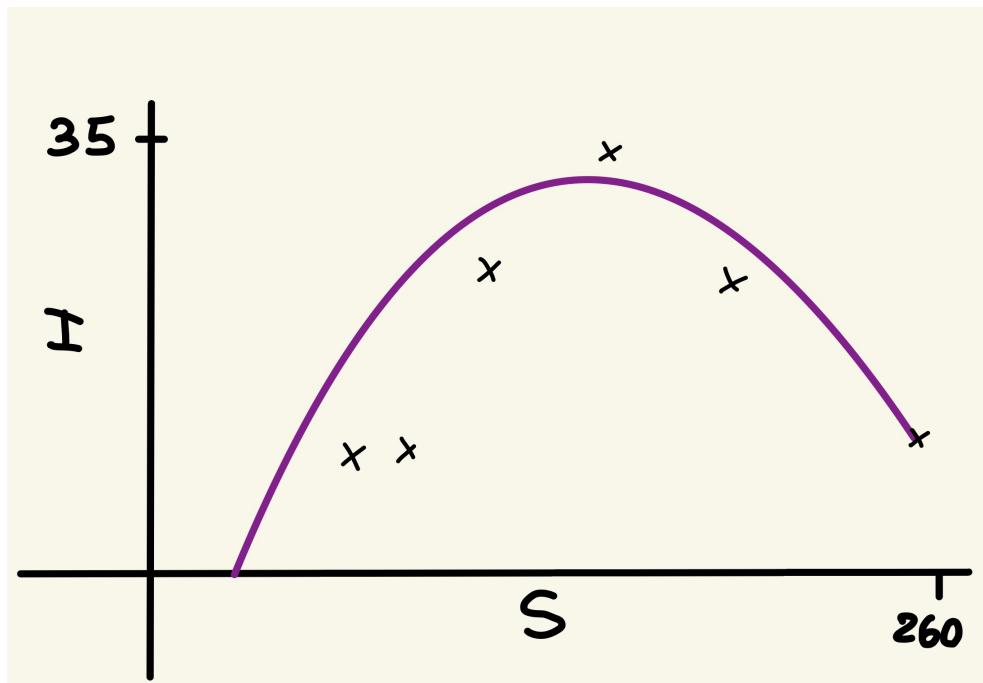


FIGURE 4.5 – Épidémie de peste à Eyam, seconde manifestation

4.6.2 Cas d'une épidémie dite sévère ($\frac{R(t)}{\rho}$ non petit)

Épidémie de grippe dans un internat d'une école de garçons en Angleterre en 1978 (Source : British Medical Journal, numéro du 4 mars 1978). On a

- $N = 763$
- $t_0 = 22 \text{ janvier } 1978 = 0j$
- $t_\infty = 4 \text{ février } 1978 = 13j$
- $I_0 = 1 \Rightarrow S_0 = 762$

L'épidémie a été sévère car $\frac{R(t)}{\rho}$ n'est pas petit. L'analyse de ces données a montré que la durée moyenne de la maladie était d'environ 2.5 jours. Les résultats de l'article sont les suivants :

- $\lambda \approx 0.00218$
- $\rho \approx 202$

Un programme basé sur une grille pour estimer conjointement λ et γ donne les résultats suivants :

- $\lambda \approx 0.00221$
- $\gamma \approx 0.43995$

Ce qui nous donne

- $\rho \approx 199.43$
- $\mathcal{R}_0 \approx 3.77$

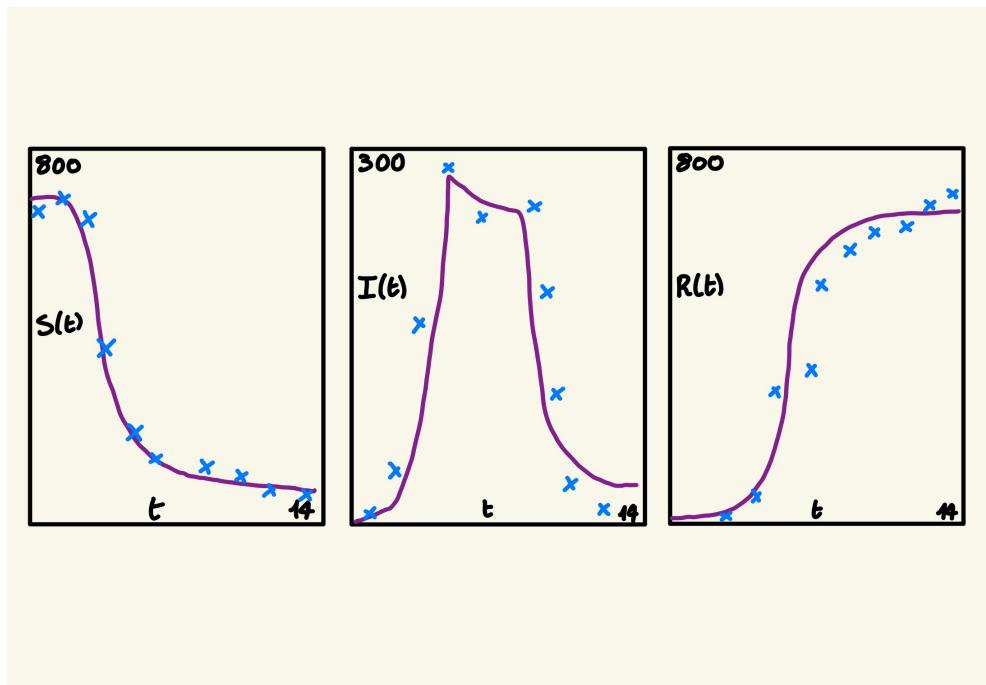


FIGURE 4.6 – Épidémie de grippe dans un internat d'Angleterre en 1978

Exercices

Exercice 1

Dans le modèle SIR , sachant que $(S(t), I(t), R(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (S_\infty, I_\infty, R_\infty)$, démontrer que $(S_\infty, I_\infty, R_\infty)$ est un point d'équilibre du système décrivant ce modèle.

Corrigé de l'exercice 1

On sait que, $\forall t_1 > 0, \forall t_2 > 0 :$

$$\begin{aligned}|S(t_1) - S(t_2)| &= |(S(t_1) - S_\infty) - (S(t_2) - S_\infty)| \\&\leq |S(t_1) - S_\infty| + |S(t_2) - S_\infty| \\&\xrightarrow[t_1, t_2 \rightarrow \infty]{} 0 + 0\end{aligned}$$

D'où :

$$|S(t_1) - S(t_2)| \xrightarrow[t_1, t_2 \rightarrow \infty]{} 0$$

En posant $t = t_1$ et $t + h = t_2$ avec $h > 0$ fixé, on applique le TAF (théorème des accroissements finis) sur $[t, t + h]$, à la fonction $S \in \mathcal{C}^1[t, t + h]$, et on obtient : il existe $\tau_{t,h} \in]t, t + h[$ tel que

$$\begin{aligned}S(t + h) - S(t) &= h S'(\tau_{t,h}) \\&= h f(S(\tau_{t,h}), I(\tau_{t,h}), R(\tau_{t,h})) \\&= h S(\tau_{t,h}) I(\tau_{t,h}) \\&\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} h f(S_\infty, I_\infty, R_\infty)\end{aligned}$$

Et on a :

$$t < \tau_{t,h} < t + h$$

Puisque $t \rightarrow \infty$, $t + h \rightarrow \infty$, par le théorème des gendarmes $\tau_{t,h} \rightarrow \infty$.

Donc :

$$hf(S_\infty, I_\infty, R_\infty) = 0$$

C'est-à-dire $(S_\infty, I_\infty, R_\infty) = (S^*, I^*, R^*)$ est un point d'équilibre du système (4.1).

Exercice 2

La propagation d'une maladie dans une population de N étudiants de première année d'une université A se modélise par un modèle *SIR*. En début de semestre, S_0 étudiants étaient susceptibles de contracter la maladie alors que S_∞ étudiants l'étaient en fin de semestre.

1. Donner l'expression du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 . A quelle condition sur \mathcal{R}_0 parle t-on d'épidémie.
2. Que donne le calcul de \mathcal{R}_0 si $\lambda = 0,0009$, $\gamma = 1/3$, $N = 510$, $S_0 = 500$, $I_0 = 10$ et $R_0 = 0$?
3. Donner l'expression du nombre moyen d'étudiants nouvellement infectés par unité de temps.

Corrigé de l'exercice 2

1. On sait que $\mathcal{R}_0 = \frac{S_0}{\rho}$. De plus :

$\mathcal{R}_0 > 1$ épidémie active $\mathcal{R}_0 < 1$ absence d'épidémie (disparition rapide)

2. On a :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{S_0}{\rho} = \frac{\lambda S_0}{\gamma} = \frac{500 \cdot 0,0009}{1/3} = 1,35$$

3. Par définition λSI est le nombre moyen d'individus nouvellement malades par unité de temps.

Exercice 3

La propagation de la grippe durant l'année X dans un internat de garçon contentait $N = S(0) + I(0) + R(0) = 762 + 1 + 0$ est modélisée par un modèle *SIR* sans naissances et morts. Quelques jours plus tard, l'infection ayant disparue au sein de cet internat, on a dénombré au total 51 enfants guéris (R_∞). L'analyse de ces

données a montré que la durée moyenne de la maladie était d'environ 3 jours.

1. Calculer S_∞ . Que représente $\frac{S_\infty}{N}$?
2. Estimer le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 , puis montrer en justifiant votre réponse qu'il y a eu épidémie.
3. Le pic de l'épidémie ayant été observé au temps t_1 , que vaut $I(t_1)$. Que représente ce nombre
4. Quelle fraction de la population d'élèves aurait du être immunisée contre la grippe juste avant l'apparition de celle-ci pour éviter l'épidémie ?

Corrigé de l'exercice 3

1. On connaît N et R_∞ . Dans le modèle *SIR* on sait que $I_\infty = 0$, donc :

$$S_\infty = N - R_\infty = 763 - 512 = 251$$

Et on a aussi $\frac{S_\infty}{N} = 32.9\%$, qui représente la proportion d'individus qui ont échappé de la maladie.

2. On a

$$\mathcal{R}_0 \approx S_0 \frac{\ln(S_0/S_\infty)}{S_0 - S_\infty} \approx 1,653$$

Puisque $\mathcal{R}_0 \approx 1,653 > 1$, donc il y a épidémie

3. Le pic d'épidémie est quand il y a le maximum d'infecté.

$$I_{\max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \approx 70$$

4. On a :

$$P_{\min} = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \approx 1 - \frac{1}{1.65} = 0.395$$

Donc on aurait du vacciner au moins 39.5% de la population.

Chapitre 5

Système différentiels

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.1)$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

est une fonction non linéaire de x_1, \dots, x_n . Malheureusement, il n'existe pas de méthodes pour résoudre l'équation (5.1). Toutefois dans la majeure partie des applications, il n'est pas nécessaire d'expliciter les solutions de (5.1) comme on l'a vu dans le modèle SIR. Les questions que l'on se pose sont les suivantes :

1. Existe t-il un point $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ ne dépendant pas de t , solution de (5.1) ?
Un tel point s'il existe est appelé **point d'équilibre**.
2. Soit Φ et Γ deux solutions de (5.1) telle que $\Gamma(0)$ soit proche de $\Phi(0)$, c'est-à-dire pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $\Gamma_j(0)$ proche de $\Phi_j(0)$. La solution Γ restera-t-elle proche de $\Phi(t)$ ou s'en éloignera-t-elle lorsque t tend vers l'infini ?

C'est le problème de **stabilité** : problème fondamental dans l'étude qualitative des équations différentielles.

3. Que se passe-t-il pour les solutions $x(t)$ de (5.1) lorsque t tend vers l'infini ? Tendent-elles toutes vers des points d'équilibre ? Si tel n'est pas le cas, tendent-elles alors vers une solution périodique ?

Définition 5.1 (Point d'équilibre). $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre de (5.1) si, et seulement si, $f(t, x^*) \equiv 0$.

Exemple 5.1. Chercher tous les points d'équilibre du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y \end{cases}$$

Solution : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est un point d'équilibre si, et seulement si, $1 - y_0 = 0$ et $x_0^3 + y_0 = 0$. Ce qui donne $y_0 = 1$ et x_0 . Ainsi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le seul point d'équilibre de ce système.

Le problème de la stabilité est généralement difficile à résoudre, car en général on sait pas résoudre explicitement l'équation (5.1). Le seul cas maniable est celui où $f(t, x)$ ne dépend pas explicitement de t , c'est-à-dire f est seulement fonction de x . De telles équations différentielles sont dites **autonomes**.

Et même pour les équations différentielles autonomes, il y a seulement deux cas (en général) où l'on peut complètement résoudre la question de la stabilité.

- Le premier cas est celui où f est linéaire : il sera traité dans la section 5.3
- Le second cas est celui où nous nous intéressons qu'à la stabilité d'un point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$; il sera traité à la section 5.4.

La question 3 est très importante dans beaucoup d'applications puisque la réponse à cette question donne une réduction concernant l'évolution à long terme du système considéré. Dans la section 5.5 nous répondrons à cette question, dans le cas où il serait possible de le faire et appliquerons ces résultats aux modèles de propagation d'épidémie dans les chapitres suivants.

5.2 Notions de stabilité (au sens de Lyapounov) d'un point d'équilibre

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la stabilité d'un point d'équilibre x^* d'un système différentiel autonome.

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2)$$

Nous voulons savoir quand x^* est stable, asymptotiquement stable ou instable, c'est-à-dire nous voulons savoir si tout solution Φ de (5.2) "suffisamment proche" de x^* à l'instant $t = 0$, reste "proche" de x^* pour tout instant $t > 0$.

Cette notion est due au mathématicien russe Aleksandr Lyapounov (1857-1918).

Définition 5.2 (Stabilité, Stabilité asymptotique, Instabilité). 1. Un point d'équilibre x^* de (5.2) est stable si toute solution Φ de (5.2) suffisamment proche de x^* à l'instant $t = 0$ reste proche de x^* pour tout $t > 0$. Autrement dit, x^* est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que pour toute solution Φ de (5.2), on ait :

$$|\Phi_j(t) - x^*| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\Phi_j(0) - x^*| < \delta(\varepsilon) \quad j = \{1, \dots, n\} \quad t > 0$$

Ou de manière équivalente

$$\|\Phi(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|\Phi(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0$$

2. Si de plus, δ peut être choisi de sorte que x^* soit stable et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t) - x^*\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi = x^*$, alors x^* est dit asymptotiquement stable.
3. x^* est dit instable si x^* n'est pas stable. Autrement dit, s'il existe une solution Φ de (5.2) qui soit proche de x^* à $t = 0$ mais qui ne le soit plus ("proche") pour $t > 0$.

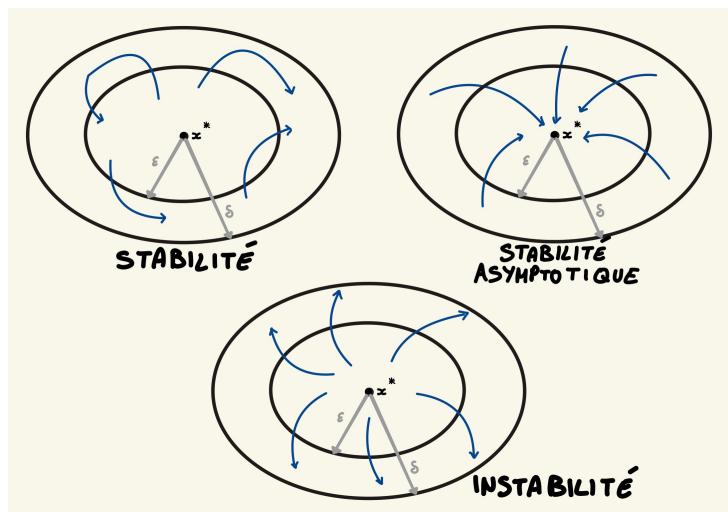


FIGURE 5.1 – Stabilité, Stabilité asymptotique, Instabilité

5.3 Stabilité des systèmes linéaires

La stabilité peut être complètement résolue dans le cas des équations différentielles linéaires

$$\dot{x} = Ax \quad (5.3)$$

Cela n'est pas une surprise dans la mesure où l'équation (5.3) peut être complètement résolue (algèbre linéaire).

On a :

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

On a la solution :

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0$$

On peut vérifier :

$$Y'(t) = \frac{d}{dt}Y(t) = Ae^{A(t-t_0)}Y_0 = AY(t)$$

Definition : Matrice exponentielle

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Propriété :

- Si A est diagonalisable, c'est à dire que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, on a

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} \quad \text{avec } e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \text{ où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } A$$

Ainsi

$$Y(t) = Pe^{Dt}P^{-1}Y_0$$

- Si A n'est pas diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PJP^{-1},$$

où J est la **forme de Jordan** de A , c'est-à-dire une matrice bloc-diagonale dont chaque bloc de Jordan $J_k(\lambda)$ associé à une valeur propre λ est de la forme :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc s'écrit $J_k(\lambda) = \lambda I + N$ avec N nilpotente ($N^m = 0$ si le bloc est de taille m). On a alors :

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \left(I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Nt)^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$

Ainsi, pour la matrice complète $A = PJP^{-1}$:

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

et la solution du système différentiel est :

$$Y(t) = Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}Y_0.$$

On a le théorème important :

Théorème 5.1. *Le point d'équilibre 0 de (5.3) est :*

1. *asymptotiquement stable si pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$*
2. *instable s'il existe $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) > 0$*
3. *Supposons que pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) \leq 0$ et que tout polynôme caractéristique de A soit de la forme*

$$\chi_A(X) = (i\sigma_1 - X)^{n_1} \cdots (i\sigma_p - X)^{n_p} \cdot Q(X)$$

où tous les zéros de Q sont de partie réelle strictement négative. Alors, 0 est stable si pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ la dimension du sous-espace propre associé à $i\sigma_j$ est égale à n_j . Dans le cas contraire, 0 est instable.

Définition 5.3 (Hyperbolicité d'un point d'équilibre de (5.3)). Le point d'équilibre 0 (ou la matrice A) de (5.3) est dit(e) **hyperbolique** si pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) \neq 0$.

Exemple 5.2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer si la solution 0 de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est stable, asymptotiquement stable ou instable.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$. Ainsi, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 + 2i$ et $\lambda_3 = -1 - 2i$ sont les valeurs propres de A . Etant toutes de partie réelle strictement négative, on conclut que 0 est asymptotiquement stable.

Exemple 5.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution nulle de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est instable.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = -(4 + \lambda)(6 - \lambda)$. Puisque l'une des valeurs propres de A est positive, on conclut immédiatement que 0 est instable.

Exemple 5.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution nulle de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = \lambda^2 + 6$. Ainsi, $\lambda_1 = \sqrt{6}i$ et $\lambda_2 = -\sqrt{6}i$ sont les valeurs propres de A . La partie c du Théorème (5.1) assure la stabilité de toute solution $x = \phi(t)$ de $\dot{x} = Ax$. Toutefois aucune solution n'est asymptotiquement stable. Cela vient directement du fait que la solution générale de $\dot{x} = Ax$ est

$$t \mapsto x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \sin(\sqrt{6}t) \\ 2 \cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6} \cos(\sqrt{6}t) \\ 2 \sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, toute solution x est périodique, de période $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$ et aucune solution x (exceptée $x \equiv 0$) ne tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$

5.4 Stabilité des systèmes linéaires perturbés

Dans la section précédente nous nous sommes intéressés à l'équation simple $\dot{c} = Ax$. L'autre équation simple est la suivante :

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (5.4)$$

où $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$ est très petit devant x . Plus précisément, on suppose que les fonctions :

$$\frac{g_1(x)}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}, \dots, \frac{g_n(x)}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}$$

sont des fonctions continues de x_1, \dots, x_n s'annulant en $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. C'est par exemple le cas où g est une fonction polynomiale des variables x_1, \dots, x_n dont les monômes qui la composent sont de degré ≥ 2 .

La fonction vectorielle g est une perturbation (petite) du système linéaire $\dot{x} = Ax$.

Exemple 5.5. Si $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ alors $\frac{x_1 x_2^2}{\max\{|x_1|, |x_2|\}}$ et $\frac{x_1 x_2}{\max\{|x_1|, |x_2|\}}$ sont des fonctions continues des variables x_1 et x_2 s'annulant en $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Si $g(0) = 0$, alors $x(t) \equiv 0$ est un point d'équilibre de (5.4). Nous voudrions savoir si ce point est stable ou instable. A première vue, il semble impossible de répondre à cette question car nous ne savons pas résoudre explicitement l'équation (5.4). Toutefois, si x est très petit, alors $g(x)$ l'est devant Ax . Ainsi, il paraît intuitif que la stabilité du point d'équilibre $x(t) \equiv 0$ de (5.4) soit déterminée par la stabilité de la partie linéaire de l'équation 5.4) : $\dot{x} = Ax$.

Théorème 5.2. Supposons que $\frac{g(x)}{\|x\|} = \frac{g(x)}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}$ soit une fonction continue des variables x_1, \dots, x_n nulle en $x = 0$. Alors :

1. Le point d'équilibre $x(t) \equiv 0$ de (5.4) est asymptotiquement stable s'il est asymptotiquement stable pour la partie linéaire $\dot{x} = Ax$. D'une manière équivalente, $x(t) \equiv 0$ de (??) est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative
2. Le point d'équilibre $x(t) \equiv 0$ de (5.4) est instable si au moins l'une des valeurs propres de A est de partie réelle strictement positive.
3. La stabilité de $x(t) \equiv 0$ de (5.4) ne peut pas être déduite de celle du point $x(t) \equiv 0$ du système $\dot{x} = Ax$ si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle ≤ 0

avec au moins l'une d'entre elle, imaginaire pure.

Exemple 5.6. Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + 9x_2^3 + 3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -6x_2 - 5x_3 + 7x_3^5 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1^2 + x_2^2 - x_3 \end{cases}$$

Déterminer si cela est possible quand le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ est stable ou instable.

Solution : Ecrivons le système sous la forme $\dot{x} = Ax + g(x)$ avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 9x_2^3 \\ 7x_3^5 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la fonction g satisfait aux hypothèses du (Théorème 5.2) et que $Sp(A) = \{-6, -2, -1\}$. Ainsi, 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

5.5 Stabilité des systèmes non linéaires

Le Théorème 5.2 peut être utilisé pour déterminer la stabilité des points d'équilibre d'équations différentielles autonomes quelconques. Soit x^* un point d'équilibre de l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.5}$$

Posons pour tout t , $z(t) = x(t) - x^*$, où $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$, alors :

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x^* + z) \tag{5.6}$$

Il est clair que 0 est un point d'équilibre de (5.6) et la stabilité du point d'équilibre x^* du système (5.5) est équivalente à celle du point d'équilibre 0 du système (5.6).

Lemme 5.1. Supposons que la fonction f de la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ soit deux fois continûment différentiable au voisinage du point x^* alors on peut écrire

$$f(x^* + z) = f(x^*) + Az + g(z) = Az + g(z) \tag{5.7}$$

où $z \mapsto \frac{g(z)}{\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}}$ est une fonction continue de z s'annulant en $z = 0$.

Démonstration. L'équation (5.7) est une conséquence immédiate de la formule de Taylor qui dit que les composantes $f_j(x^* + z)$ de $f(x^* + z)$ peuvent d'écrire sous la forme :

$$f_j(x^* + z) = f_j(x^*) + \frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x_1} z_1 + \dots + \frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x_n} z_n + g_j(z)$$

où $z \mapsto \frac{g(z)}{\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}}$ est une fonction continue de z s'annulant en $z = 0$. Ainsi

$$f(x^* + z) = f(x^*) + Az + g(z) = Az + g(z)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

□

Proposition 5.1. *Le Théorème 5.2 et le Lemme 5.1 nous fournissent un algorithme d'étude de la stabilité d'un point d'équilibre $x(t) = x^*$ de l'équation $\dot{x} = f(x)$:*

1. Poser $z = x - x^*$.
2. Mettre $f(x^* + z)$ sous la forme $Az + g(z)$ avec g fonction polynomiale de variables z_1, \dots, z_n composée de monômes de degré ≥ 2 .
3. Déterminer les valeurs propres de A
 - Si pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable (localement).
 - S'il existe $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) > 0$, alors x^* est instable.

Définition 5.4 (Hyperbolicité d'un point d'équilibre de 5.6). L'équilibre x^* est dit **hyperbolique** si la matrice A du système linéarisé autour de x^* n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle.

Exemple 5.7. Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1 - xy \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases} \quad (5.8)$$

Chercher les points d'équilibre de ce système et étudier quand c'est possible, la stabilité de chacun d'eux.

Solution : Les points d'équilibre de 5.8 sont $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

1. *Stabilité du point $(1, 1)$* : Soit $u = x - 1$ et $v = y - 1$, alors

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - v - uv \\ \frac{dv}{dt} = u - 3v - 3v^2 - v^3 \end{cases}$$

Le système se réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} uv \\ 3v^2 + v^3 \end{pmatrix}$$

On a $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $Sp(A) = \{-2\}$. Par conséquent, $(1, 1)$ est asymptotiquement stable

2. *Stabilité du point $(-1, -1)$* : Soit $u = x + 1$ et $v = y + 1$, alors

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v - uv \\ \frac{dv}{dt} = u - 3v + 3v^2 - v^3 \end{cases}$$

Le système se réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -uv \\ 3v^2 - v^3 \end{pmatrix}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $Sp(A) = \{-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\}$. Par conséquent, $(-1, -1)$ est instable.

Exercice

Exercice 4

Chercher tous les points d'équilibre du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - 1)(y - 1) \\ \frac{dy}{dt} = (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 4

On cherche les points d'équilibre

$$\begin{cases} x' = (x - 1)(y - 1) \\ y' = (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

On a donc au point d'équilibre $P_{eq} = (x_{eq}, y_{eq}) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si,

$$\begin{cases} (x_{eq} - 1)(y_{eq} - 1) = 0 \\ (x_{eq} + 1)(y_{eq} + 1) = 0 \end{cases}$$

Donc on obtient que les points possibles sont $(1, -1)$ ou $(-1, 1)$.

On vérifie

$$(1, -1) : \begin{cases} x' = (1 - 1)(-1 - 1) = 0 \\ y' = (1 + 1)(-1 + 1) = 0 \end{cases} \quad (-1, 1) : \begin{cases} x' = (-1 - 1)(1 - 1) = 0 \\ y' = (-1 + 1)(1 + 1) = 0 \end{cases}$$

On a donc les points d'équilibres $P_{eq}^{(1)} = (1, -1)$ et $P_{eq}^{(2)} = (-1, 1)$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution nulle de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est instable.

Corrigé de l'exercice 5

On a que :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 0 \\ 0 & -6 - \lambda & -2 \\ -6 & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -2 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} - (-3) - \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -6 & -3 - \lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 - \lambda \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) [(6 + \lambda)(3 + \lambda)] + 3[-12] \\ &= (2 - \lambda)[18 + 9\lambda + \lambda^2] - 36 \\ &= -\lambda^3 - 7\lambda^2 \\ &= -\lambda^2(\lambda + 7) \end{aligned}$$

Donc on a $Sp(A) = \{-7, 0\}$ avec 0 de multiplicité 2.

Exercice 6

Déterminer pour chacun des systèmes différentiels suivants, les points d'équilibre ainsi que leur comportement :

1.

$$\begin{cases} x' = xy - y \\ y' = xy - x \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x + y \end{cases}$$

Résoudre le système linéaire.

Corrigé de l'exercice 6

1. On cherche les points d'équilibre

$$\begin{cases} x' = xy - y \\ y' = xy - x \end{cases}$$

On a donc au point d'équilibre $P_{eq} = (x_{eq}, y_{eq}) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si,

$$\begin{cases} x_{eq}y_{eq} - y_{eq} = 0 \\ x_{eq}y_{eq} - x_{eq} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{eq}(x_{eq} - 1) = 0 \\ x_{eq}(y_{eq} - 1) = 0 \end{cases}$$

Donc on obtient que les points possibles sont $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ ou $(0, 0)$ ou $(1, 1)$

On vérifie

$$(1, 0) : \begin{cases} x' = 1 \cdot 0 - 0 = 0 \\ y' = 1 \cdot 0 - 1 = -1 \end{cases} \quad (0, 1) : \begin{cases} x' = 0 \cdot 1 - 1 = -1 \\ y' = 0 \cdot 1 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0) : \begin{cases} x' = 0 \cdot 0 - 0 = 0 \\ y' = 0 \cdot 0 - 0 = 0 \end{cases} \quad (1, 1) : \begin{cases} x' = 1 \cdot 1 - 1 = 1 \\ y' = 1 \cdot 1 - 1 = 1 \end{cases}$$

On a donc les points d'équilibres $P_{eq}^{(1)} = (0, 0)$ et $P_{eq}^{(2)} = (1, 1)$.

Soit $A(P(x, y))$ la matrice jacobienne du système linéaire au tour du point $P(x, y)$, alors :

$$A(P(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - 1 \\ y - 1 & x \end{pmatrix}$$

1. On regarde $P_{eq}^{(1)} = (0, 0)$.

$$A_1 = A(P_{eq}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a le système d'équilibre $X' = A_1 X$. Le point d'équilibre de ce système est $Q_{eq}^{(1)} = (0, 0)$.

On regarde le spectre de A_1 :

$$\chi_\lambda(A_1) = A_1 - \lambda I_2 = \lambda^2 - \text{Tr}(A_1)\lambda + \det(A_1) = \lambda^2 - 0\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \text{Sp}(A_1) = \{-1, +1\}$$

On constate que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A_1), \lambda = \{-1, +1\}$, on a $\text{Re}(\lambda) \neq 0$. Donc $Q_{eq}^{(1)}$ est hyperbolique pour le $X' = A_1 X$. Par hyperbolité le point d'équilibre $P_{eq}^{(1)}$ est donc hyperbolique.

Pour $Q_{eq}^{(1)}$, on a $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1 > 0$, par le théorème de la stabilité des systèmes linéaires permet de qualifier que $Q_{eq}^{(1)}$ est instable et par hyperbolité, on conclut que $P_{eq}^{(1)}$ est instable.

2. On regarde $P_{eq}^{(2)} = (1, 1)$.

$$A_1 = A(P_{eq}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a le système d'équilibre $X' = A_2 X$. Le point d'équilibre de ce système est $Q_{eq}^{(2)} = (0, 0)$.

On regarde le spectre de A_2 :

$$\chi_\lambda(A_2) = A_2 - \lambda I_2 = 0 \Rightarrow \text{Sp}(A_2) = \{+1\} \quad \text{avec multiplicité 2}$$

On constate que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A_2), \lambda = \{+1\}$, on a $\text{Re}(\lambda) \neq 0$. Donc $Q_{eq}^{(2)}$ est hyperbolique pour le $X' = A_2 X$. Par hyperbolité le point d'équilibre $P_{eq}^{(2)}$ est donc hyperbolique.

Pour $Q_{eq}^{(2)}$, on a $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = 1 > 0$, par le théorème de la stabilité des systèmes linéaires permet de qualifier que $Q_{eq}^{(2)}$ est instable et par hyperbolité, on conclut que $P_{eq}^{(2)}$ est instable.

2. On cherche les points d'équilibre

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

On a donc au point d'équilibre $P_{eq} = (x_{eq}, y_{eq}) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si,

$$\begin{cases} x_{eq} - x_{eq}y_{eq} = 0 \\ y_{eq} - x_{eq}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{eq}(1 - y_{eq}) = 0 \\ y_{eq} = x_{eq}^2 \end{cases}$$

Donc on obtient que les points possibles sont $(0, 0)$ ou $(1, 1)$ ou $(-1, 1)$ ou $(1, 1)$

On vérifie

$$(0, 0) : \begin{cases} x' = 0 \cdot 0 - 0 = 0 \\ y' = 1 - 0 = 0 \end{cases} \quad (1, 1) : \begin{cases} x' = 1 \cdot 1 - 1 = 0 \\ y' = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(-1, 1) : \begin{cases} x' = -1 \cdot 1 + 1 = 0 \\ y' = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

On a donc les points d'équilibres $P_{eq}^{(1)} = (0, 0)$ et $P_{eq}^{(2)} = (1, 1)$ et $P_{eq}^{(3)} = (-1, 1)$.

Soit $A(P(x, y))$ la matrice jacobienne du système linéaire au tour du point $P(x, y)$, alors :

$$A(P(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

1. On regarde $P_{eq}^{(1)} = (0, 0)$.

$$A_1 = A(P_{eq}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a le système d'équilibre $X' = A_1 X$. Le point d'équilibre de ce système est $Q_{eq}^{(1)} = (0, 0)$.

On regarde le spectre de A_1 :

$$\chi_\lambda(A_1) = A_1 - \lambda I_2 = 0 \Rightarrow Sp(A_1) = \{+1\} \quad \text{avec multiplicité 2}$$

On constate que $\forall \lambda \in Sp(A_1), \lambda = \{+1\}$, on a $Re(\lambda) \neq 0$. Donc $Q_{eq}^{(1)}$ est hyperbolique pour le $X' = A_1 X$. Par hyperbolité le point d'équilibre $P_{eq}^{(1)}$ est donc hyperbolique.

Pour $Q_{eq}^{(1)}$, on a $\lambda_1 = 1 > 1$ et $\lambda_2 = 1 > 0$, par le théorème de la stabilité des systèmes linéaires permet de qualifier que $Q_{eq}^{(1)}$ est instable et par hyperbolité, on conclut que $P_{eq}^{(1)}$ est instable.

2. On regarde $P_{eq}^{(2)} = (1, 1)$.

$$A_1 = A(P_{eq}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a le système d'équilibre $X' = A_2 X$. Le point d'équilibre de ce système est $Q_{eq}^{(2)} = (0, 0)$.

On regarde le spectre de A_2 :

$$\chi_\lambda(A_2) = A_2 - \lambda I_2 = \lambda^2 - Tr(A_2)\lambda + det(A_2) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow Sp(A_2) = \{-1, 2\}$$

On constate que $\forall \lambda \in Sp(A_2), \lambda = \{-1, 2\}$, on a $Re(\lambda) \neq 0$. Donc $Q_{eq}^{(2)}$ est hyperbolique pour le $X' = A_2 X$. Par hyperbolité le point d'équilibre $P_{eq}^{(2)}$ est donc hyperbolique.

Pour $Q_{eq}^{(2)}$, on a $\lambda_1 = -1 < 0$ et $\lambda_2 = 2 > 0$, par le théorème de la stabilité des systèmes linéaires permet de qualifier que $Q_{eq}^{(2)}$ est instable et par hyperbolité, on conclut que $P_{eq}^{(2)}$ est instable.

3. On regarde $P_{eq}^{(3)} = (-1, 1)$.

$$A_1 = A(P_{eq}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a le système d'équilibre $X' = A_3 X$. Le point d'équilibre de ce système est $Q_{eq}^{(3)} = (0, 0)$.

On regarde le spectre de A_3 :

$$\chi_\lambda(A_3) = A_3 - \lambda I_2 = \lambda^2 - Tr(A_3)\lambda + det(A_3) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow Sp(A_3) = \{-1, 2\}$$

On constate que $\forall \lambda \in Sp(A_3) = \{-1, 2\}$, on a $Re(\lambda) \neq 0$. Donc $Q_{eq}^{(3)}$ est hyperbolique pour le $X' = A_3 X$. Par hyperbolité le point d'équilibre $P_{eq}^{(3)}$ est donc hyperbolique.

Pour $Q_{eq}^{(3)}$, on a $Re(\lambda_1) = -1$ et $Re(\lambda_2) = 2 > 0$, par le théorème de la stabilité des systèmes linéaires permet de qualifier que $Q_{eq}^{(3)}$ est instable et par hyperbolité, on conclut que $P_{eq}^{(3)}$ est instable.

3. On cherche les points d'équilibre

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x + y \end{cases}$$

On a donc au point d'équilibre $P_{eq} = (x_{eq}, y_{eq}) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si,

$$\begin{cases} 3x_{eq} - 2y_{eq} = 0 \\ 4x_{eq} + y_{eq} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{eq} = \frac{2}{3}y_{eq} \\ 4 \cdot \frac{2}{3}y_{eq} + y_{eq} = \frac{11}{3}y_{eq} = 0 \end{cases}$$

Donc on obtient que les points possibles sont $(0, 0)$.

On vérifie

$$(0,0) : \begin{cases} x' = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ y' = 4 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

On a donc les points d'équilibres $P_{eq} = (0,0)$.

Soit $A(P(x,y))$ la matrice jacobienne du système linéaire au tour du point $P(x,y)$, alors :

$$A(P(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = A$$

On regarde le spectre :

$$\chi_\lambda(A) = A - \lambda I_2 = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 4\lambda + 11 = 0$$

$$\Rightarrow Sp(A) = \{2 - i\sqrt{7}, 2 + i\sqrt{7}\}$$

Puisque $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) = 2 > 0$ On a des points d'équilibre hyperbolique instable.

On peut écrire l'équation :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x + y \end{cases} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = AX \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comme $Sp(A) = \{2 - i\sqrt{7}, 2 + i\sqrt{7}\}$, on a que :

$$A - Re(\lambda)I_2 = N \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus on remarque que :

$$N^2 == \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = -Im^2(\lambda)I_2$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
e^{At} &= e^{(2I_2+N)t} \\
&= e^{2t}e^{Nt} \\
&= e^{2t} \cdot \left(\cos(\sqrt{7}t)I_2 + \frac{\sin(\sqrt{7}t)}{\sqrt{7}}N \right) \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{7}t) + \frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t) & -\frac{2}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t) \\ \frac{4}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t) & \cos(\sqrt{7}t) - \frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puisque la solution générale est $X(t) = e^{At}X_0$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \left((\cos(\sqrt{7}t) + \frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t))x_0 - \frac{2}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)y_0 \right) \\ y(t) = e^{2t} \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)x_0 + (\cos(\sqrt{7}t) - \frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t))y_0 \right) \end{cases}$$

Exercice 7

Soit le système différentiel suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = x(4 - x - 2y) \\ y'(t) = y(x - y - 1) \\ x(0) \geq 0, \quad y(0) \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les points d'équilibre de ce système, puis la matrice jacobienne du système linéarité en chacun de ces points.
2. Pour chacun de ces points d'équilibre, dire s'il est hyperbolique ou non.
3. Pour chaque point d'équilibre hyperbolique, étudier sa stabilité.

Corrigé de l'exercice 7

1. Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x(4 - x - 2y) = 0 \\ y(x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

— Cas 1 : $x = 0$. La deuxième équation donne : $y(-y - 1) = 0$

Soit $y = 0$ ou $y = -1$. Puisque $y(0) \geq 0$, on obtient le point $E_1 = (0, 0)$

— Cas 2 : $y = 0$ et $x \neq 0$. La première équation donne : $x(4 - x) = 0$

Soit $x = 4$ ou $x = 0$. On obtient le point $E_2 = (4, 0)$

— Cas 3 : $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

De la première équation : $4 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 4 - 2y$.

De la deuxième équation : $x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y + 1$.

En égalisant : $4 - 2y = y + 1 \Rightarrow 3 = 3y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2$.

On obtient le point $E_3 = (2, 1)$

Le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} f(x, y) = x(4 - x - 2y) = 4x - x^2 - 2xy \\ g(x, y) = y(x - y - 1) = xy - y^2 - y \end{cases}$$

Les dérivées partielles sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4 - 2x - 2y, & \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= y, & \frac{\partial g}{\partial y} &= x - 2y - 1 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 2x - 2y & -2x \\ y & x - 2y - 1 \end{pmatrix}$$

— Au point $E_1 = (0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— Au point $E_2 = (4, 0)$:

$$J(4, 0) = \begin{pmatrix} 4 - 8 - 0 & -8 \\ 0 & 4 - 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

— Au point $E_3 = (2, 1)$:

$$J(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 - 4 - 2 & -4 \\ 1 & 2 - 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un point d'équilibre est hyperbolique si aucune valeur propre de la jacobienne n'a une partie réelle nulle.

— Point $E_1 = (0, 0)$

Les valeurs propres de $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont :

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

Aucune valeur propre n'a une partie réelle nulle, donc E_1 est hyperbolique.

- Point $E_2 = (4, 0)$

Les valeurs propres de $J(4, 0) = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont :

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 3$$

Aucune valeur propre n'a une partie réelle nulle. E_2 est hyperbolique.

- Point $E_3 = (2, 1)$. Le polynôme caractéristique de $J(2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est $= \lambda^2 + 3\lambda + 6$.

Le discriminant est $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$. Les valeurs propres sont complexes conjuguées :

$$\lambda = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

La partie réelle est $-\frac{3}{2} \neq 0$. E_3 est hyperbolique.

3.

- Point $E_1 = (0, 0)$. Valeurs propres : $\lambda_1 = 4 > 0$ et $\lambda_2 = -1 < 0$

Il y a une valeur propre positive et une négative. E_1 est un point selle (instable).

- Point $E_2 = (4, 0)$. Valeurs propres : $\lambda_1 = -4 < 0$ et $\lambda_2 = 3 > 0$

Il y a une valeur propre positive et une négative. E_2 est un point selle (instable).

- Point $E_3 = (2, 1)$. Valeurs propres : $\lambda = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$

Les deux valeurs propres ont une partie réelle $\text{Re}(\lambda) = -\frac{3}{2} < 0$. E_3 est asymptotiquement stable.

Exercice 8

Soient $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u \geq 0, v \geq 0\}$, le premier quadrant de \mathbb{R}^2 et le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -axy - bx + c \\ y' = axy - dy \\ a > 0 \quad b > 0 \quad d > 0 \\ c \geq 0 \\ (x(0), y(0)) \in D \end{cases}$$

1. Déterminer les points d'équilibre de ce système.
2. Ces points d'équilibre existe-t-ils toujours dans D ? Sinon donner une condition nécessaire d'existence dans D . Lorsque l'existence dans D de l'un d'entre eux n'est pas toujours assurée, exprimer cette condition (d'existence dans D) à l'aide d'une relation faisant intervenir une quantité que l'on notera \mathcal{R}_0 .
3. Pour chaque point d'équilibre, quand il existe dans D , dire s'il est hyperbolique ou non.
4. Pour chaque point d'équilibre hyperbolique de D étudier sa stabilité.
5. Ces points d'équilibre lorsqu'ils existent dans D peuvent-ils être conjointement stables?
6. Etudier le cas $c = 0$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Les points d'équilibre sont les solutions du système :

$$\begin{cases} -axy - bx + c = 0 \\ axy - dy = 0 \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations :

$$-bx - dy + c = 0 \Rightarrow bx + dy = c \quad (*)$$

De la deuxième équation : $axy = dy$

— Cas 1 : $y = 0$. De l'équation $(*)$: $bx = c \Rightarrow x = \frac{c}{b}$.

Point d'équilibre : $E_1 = \left(\frac{c}{b}, 0\right)$

— Cas 2 : $y \neq 0$. De la deuxième équation : $ax = d \Rightarrow x = \frac{d}{a}$

De l'équation $(*)$: $b \cdot \frac{d}{a} + dy = c \Rightarrow dy = c - \frac{bd}{a} \Rightarrow y = \frac{c}{d} - \frac{b}{a}$

Point d'équilibre : $E_2 = \left(\frac{d}{a}, \frac{c}{d} - \frac{b}{a}\right)$

2. Le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ est le premier quadrant.

— Point $E_1 = \left(\frac{c}{b}, 0\right)$

Comme $b > 0$ et $c \geq 0$, on a $\frac{c}{b} \geq 0$.

E_1 existe toujours dans D .

— Point $E_2 = \left(\frac{d}{a}, \frac{ac-bd}{ad}\right)$

La première coordonnée : $\frac{d}{a} > 0$ (toujours positive) et la deuxième coordonnée :

$y = \frac{ac-bd}{ad}$ doit satisfaire $y \geq 0$

$$\frac{ac - bd}{ad} \geq 0 \Rightarrow ac - bd \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$$

Condition d'existence de E_2 dans D : $ac \geq bd$

On définit :

$$\boxed{\mathcal{R}_0 = \frac{ac}{bd}}$$

La condition d'existence de E_2 dans D s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{R}_0 \geq 1}$$

Interpretation :

- Si $\mathcal{R}_0 < 1$: seul E_1 existe dans D
- Si $\mathcal{R}_0 \geq 1$: les deux points E_1 et E_2 coexistent dans D
- Si $\mathcal{R}_0 = 1$: le point E_2 se réduit à E_1 (cas limite)

3. Calcul de la matrice jacobienne

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} f(x, y) = -axy - bx + c \\ g(x, y) = axy - dy \end{cases}$$

Les dérivées partielles sont :

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -ay - b$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -ax$
- $\frac{\partial g}{\partial x} = ay$, $\frac{\partial g}{\partial y} = ax - d$

La matrice jacobienne est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -ay - b & -ax \\ ay & ax - d \end{pmatrix}$$

Point $E_1 = \left(\frac{c}{b}, 0\right)$

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -b & -\frac{ac}{b} \\ 0 & \frac{ac}{b} - d \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les éléments diagonaux (matrice triangulaire) :

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2 = \frac{ac}{b} - d = \frac{ac - bd}{b}$$

— $\lambda_1 = -b < 0$ toujours

— $\lambda_2 = \frac{ac - bd}{b}$

Pour que E_1 soit hyperbolique, il faut $\lambda_2 \neq 0$, c'est-à-dire $ac \neq bd$, ou $\mathcal{R}_0 \neq 1$.

- Si $\mathcal{R}_0 \neq 1$: E_1 est hyperbolique
- Si $\mathcal{R}_0 = 1$: E_1 est non-hyperbolique (bifurcation)

Point $E_2 = \left(\frac{d}{a}, \frac{ac - bd}{ad}\right)$ (existe quand $\mathcal{R}_0 \geq 1$)

$$\begin{aligned} J(E_2) &= \begin{pmatrix} -a \cdot \frac{ac - bd}{ad} - b & -a \cdot \frac{d}{a} \\ a \cdot \frac{ac - bd}{ad} & a \cdot \frac{d}{a} - d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{ac - bd}{d} - b & -d \\ \frac{ac - bd}{d} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{ac - bd + bd}{d} & -d \\ \frac{ac - bd}{d} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{ac}{d} & -d \\ \frac{ac - bd}{d} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\frac{ac}{d} - \lambda & -d \\ \frac{ac - bd}{d} & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{ac}{d} - \lambda\right)(-\lambda) + d \cdot \frac{ac - bd}{d} \\ &= \frac{ac}{d}\lambda + \lambda^2 + ac - bd \\ &= \lambda^2 + \frac{ac}{d}\lambda + (ac - bd) \end{aligned}$$

Pour que E_2 soit hyperbolique, le discriminant doit être non-nul :

$$\Delta = \left(\frac{ac}{d}\right)^2 - 4(ac - bd) \neq 0 = \frac{a^2c^2}{d^2} - 4ac + 4bd$$

En général, pour $\mathcal{R}_0 > 1$, on a $\Delta > 0$ et les valeurs propres sont réelles.

Conclusion : E_2 est hyperbolique quand il existe dans D (c'est-à-dire quand $\mathcal{R}_0 > 1$).

Pour le cas limite $\mathcal{R}_0 = 1$, les deux points coïncident en un seul point non-hyperbolique.

4. Stabilité des points d'équilibre hyperboliques

Stabilité de E_1 (quand $\mathcal{R}_0 \neq 1$)

Valeurs propres : $\lambda_1 = -b < 0$ et $\lambda_2 = \frac{ac-bd}{b}$

- Cas 1 : Si $\mathcal{R}_0 < 1$ (i.e., $ac < bd$), alors $\lambda_2 = \frac{ac-bd}{b} < 0$

Les deux valeurs propres sont négatives, donc E_1 est asymptotiquement stable (puits)

- Cas 2 : Si $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e., $ac > bd$), alors $\lambda_2 = \frac{ac-bd}{b} > 0$.

Il y a une valeur propre positive, donc E_1 est instable (point selle)

Stabilité de E_2 (quand $\mathcal{R}_0 > 1$)

Valeurs propres du polynôme $\lambda^2 + \frac{ac}{d}\lambda + (ac - bd) = 0$:

Les valeurs propres sont : $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-ac \pm \sqrt{a^2c^2 - 4acd^2 + 4bd^3}}{2d}$

Comme $\frac{ac}{d} > 0$ et le produit des racines est $ac - bd > 0$, on a :

- La somme des racines : $-\frac{ac}{d} < 0$
- Le produit des racines : $ac - bd > 0$

Conclusion : Les deux valeurs propres ont une partie réelle négative, donc E_2 est asymptotiquement stable (puits) quand $\mathcal{R}_0 > 1$.

5.

Stabilité conjointe des deux points

Théorème : Deux points d'équilibre hyperboliques d'un système autonome en dimension 2 ne peuvent pas être conjointement asymptotiquement stables.

Preuve par argument topologique : Chaque puits attire un bassin de convergence non-vide. Si deux puits coexistaient, leurs bassins seraient disjoints et recouvreraient une partie ouverte du domaine D . Cependant, la dynamique du système ne permet pas cette configuration en dimension 2.

Analyse du système :

- Quand $\mathcal{R}_0 < 1$: E_1 est stable, E_2 n'existe pas
- Quand $\mathcal{R}_0 = 1$: bifurcation transcritique, les deux points fusionnent

- Quand $\mathcal{R}_0 > 1$: E_1 devient instable (selle), E_2 devient stable

Conclusion : les deux points d'équilibre ne peuvent pas être conjointement stables. Il existe une bifurcation transcritique au point $\mathcal{R}_0 = 1$ où la stabilité est transférée de E_1 à E_2 .

- 6.** Quand $c = 0$, le système devient :

$$\begin{cases} x' = -axy - bx = -x(ay + b) \\ y' = axy - dy = y(ax - d) \end{cases}$$

Points d'équilibre :

- On a $E_1 = \left(\frac{0}{b}, 0\right) = (0, 0)$
- On a $E_2 = \left(\frac{d}{a}, \frac{0-bd}{ad}\right) = \left(\frac{d}{a}, -\frac{b}{a}\right)$

Le point E_2 n'existe pas dans D car sa deuxième coordonnée est négative. Seul $E_1 = (0, 0)$ existe dans D .

Matrice jacobienne en $E_1 = (0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = -b < 0$, $\lambda_2 = -d < 0$

Donc E_1 est hyperbolique et asymptotiquement stable (puits).

Pour $c = 0$, on note $\mathcal{R}_0 = \frac{0}{bd} = 0 < 1$. Le système ne produit pas de comportement endogène (aucune source interne).

Propriétés :

1. Domaine invariant : D est invariant. Si $(x(0), y(0)) \in D$, alors $(x(t), y(t)) \in D$ pour tout $t \geq 0$.
 - De $x' = -x(ay + b) \leq 0$, x est décroissante
 - De $y' = y(ax - d)$, si $x < \frac{d}{a}$, alors $y' < 0$, donc y est décroissante
2. Convergence globale : *Toute trajectoire converge vers $(0, 0)$.
3. Interprétation biologique :
 - Sans terme source ($c = 0$), le système ne peut maintenir de population à l'équilibre
 - Les deux espèces s'éteignent exponentiellement
 - C'est le régime d'extinction

Conclusion :

Pour $c = 0$: seul $E_1 = (0, 0)$ existe et est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 9

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y'(t) = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \\ x(0) \quad .y(0) \quad \text{donnés} \end{cases}$$

1. Montrer que ce système admet un unique point d'équilibre $P^* = (x^*, y^*)$ de \mathbb{R}^2 .
2. Etudier la stabilité du point 0, point d'équilibre du système linéarisé autour de P^* . Peut-on conclure quant à la stabilité de P^* ?
3. Soit $d(P(t), P^*)$, la distance euclidienne entre le point $P(t) = (x(t), y(t))$ solution du système donné et P^* . C'est une fonction numérique de la variable t d'expression

$$d(P(t), P^*) = \sqrt{(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2}$$

Etudier les variations de la fonction d puis en déduire la stabilité du point P .

Corrigé de l'exercice 9

Un point d'équilibre satisfait $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$, soit le système :

$$\begin{cases} -y - x\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ x - y\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

On obtient (et on note) :

$$x = y\sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.9}$$

$$y = -x\sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.10}$$

On multiplie les deux équations

$$xy = -xy(x^2 + y^2)$$

Cela donne : $xy[1 + (x^2 + y^2)] = 0$. Puisque $1 + (x^2 + y^2) > 0$, on a nécessairement $xy = 0$.

- Si $x = 0$, alors de l'équation 5.9 : $0 = 0$ et de l'équation 5.10 : $y = 0$.
- Si $y = 0$, alors de l'équation 5.10 : $x = 0$, donc $y = 0$.

Le seul point d'équilibre est $P^* = (0, 0)$.

1. Calcul de la matrice jacobienne en un point (x, y) :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Posons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -\frac{x^2}{r} - r \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 - \frac{xy}{r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 1 - \frac{xy}{r} \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{y^2}{r} - r \end{aligned}$$

À l'origine $(0, 0)$, nous rencontrons une forme indéterminée. En utilisant la continuité et en passant à la limite, ou directement par développement limité au voisinage de l'origine, on établit que la jacobienne s'écrit formellement comme :

$$J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\det(J_F - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Les valeurs propres sont purement imaginaires. Le système linéarisé a un centre à l'origine. On ne peut pas conclure directement sur la stabilité de P^* par la théorème de linéarisation (cas critique).

2. On a avec le point $P^* = (0, 0)$:

$$d(P(t), P^*) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

On a :

$$\frac{d}{dt}d = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{d}$$

Avec $d \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\dot{d} &= \frac{1}{d} \left[x(-y - x\sqrt{x^2 + y^2}) + y(x - y\sqrt{x^2 + y^2}) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left[-xy - x^2\sqrt{x^2 + y^2} + xy - y^2\sqrt{x^2 + y^2} \right] \\ &= \frac{1}{d} \left[-(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \right] \\ &= \frac{1}{d} \cdot (-d^2 \cdot d) = -d^3\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\dot{d} = -d^3}$$

Étude des variations :

- $\dot{d} < 0$ pour tout $d > 0$
- La fonction $d(t)$ est strictement décroissante pour toute solution avec $d(0) > 0$
- $d(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$

Résolution explicite (pour information) :

$$\frac{d(d)}{dt} = -d^3 \Rightarrow \frac{d(d)}{d^3} = -dt$$

Intégrant : $-\frac{1}{2d^2} = -t + C$

Avec la condition initiale $d(0) = 0$: $C = \frac{1}{2d_0^2}$

$$d(t) = \frac{d_0}{\sqrt{1 + 2d_0^2 t}}$$

Conclusion sur la stabilité de $P^* = (0, 0)$:

- Pour toute condition initiale proche de l'origine, la distance $d(t)$ est décroissante
- Pour tout $t \geq 0$: $d(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
- Le point $P^* = (0, 0)$ est asymptotiquement stable (au sens du voisinage)

Remarque : La décroissance en $-d^3$ (plutôt que $-\lambda d$ linéaire) signifie que nous avons une convergence plus rapide que la stabilité linéaire.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la solution nulle de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est stable mais pas asymptotiquement stable.
2. Trouver l'espace vectoriel des solutions.

Corrigé de l'exercice 10

1. On a le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 6 \Leftrightarrow Sp(A) = \{-i\sqrt{6}, i\sqrt{6}\}$$

Les valeurs propres sont purement imaginaires.

On peut remarquer que $A^2 = -6I_2$

La solution générale s'écrit alors :

$$e^{At} = \cos(\omega t) I + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A.$$

Soit $X(0) = X_0 = (x_0, y_0)^T$. On a donc :

$$X(t) = e^{At}X_0 = \left(\cos(\omega t) I + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A \right) X_0.$$

En composantes :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\omega t) x_0 - \frac{3}{\omega} \sin(\omega t) y_0, \\ y(t) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega t) x_0 + \cos(\omega t) y_0, \end{cases} \quad \text{avec } \omega = \sqrt{6}.$$

Stabilité. On remarque que la quantité

$$Q(X) = 2x^2 + 3y^2$$

est conservée le long des trajectoires, car

$$\frac{d}{dt} Q(X(t)) = X(t)^T (A^T M + MA) X(t) = 0,$$

avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $Q(X(t)) = Q(X(0))$ pour tout t . Cela montre que si $X(0)$ est proche de 0, alors $X(t)$ reste proche de 0 pour tout t : l'origine est donc **stable au sens de Lyapunov**.

Non-asymptotique. Cependant, si $X(0) \neq 0$, alors $Q(X(t)) = Q(X(0)) > 0$ pour tout t : les trajectoires ne s'approchent jamais de l'origine. Les solutions sont périodiques, donc la solution nulle est **stable mais non asymptotiquement stable**.

2) Espace vectoriel des solutions.

L'espace des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{ X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid X(t) = e^{At}v, v \in \mathbb{R}^2 \}.$$

C'est un espace vectoriel de dimension 2.

En prenant $v = e_1 = (1, 0)^T$ et $v = e_2 = (0, 1)^T$, on obtient une base de \mathcal{S} :

$$u_1(t) = e^{At}e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \frac{2}{\omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

$$u_2(t) = e^{At}e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\omega} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Toute solution réelle s'écrit donc :

$$X(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions sont périodiques de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

Conclusion : l'origine est un *centre* — stable mais non asymptotiquement stable —, et les solutions décrivent des ellipses centrées en l'origine.

Chapitre 6

Annexe : Théorèmes utilisé

6.1 Théorèmes fondamentaux : des gendarmes et des accroissements finis

Théorème 6.1 (des gendarmes). *Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I contenant un point a , telles que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$$

Démonstration. L'idée est que $g(x)$ est encadrée entre deux fonctions $f(x)$ et $h(x)$ qui ont la même limite ℓ . Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $0 < |x - a| < \eta$, on a :

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui entraîne :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

d'où :

$$|g(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

□

Théorème 6.2 (des accroissements finis — TAF). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec :

$$\varphi(a) = f(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a)$$

Ainsi, $\varphi(a) = \varphi(b)$ et, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, soit :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

d'où :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Le théorème des accroissements finis formalise l'idée intuitive qu'une fonction dérivable atteint, en au moins un point, une pente égale à la pente de la corde reliant ses extrémités. Il permet notamment de démontrer la croissance ou la décroissance d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

6.2 Théorèmes Equation Differentielle

Théorème 6.3 (Cauchy–Lipschitz). *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant (t_0, x_0) . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, localement lipschitzienne par rapport à la variable x .*

Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle I contenant t_0 .

De plus, cette solution est unique : si y est une autre solution définie sur un intervalle J contenant t_0 , alors $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I \cap J$.

Le théorème dit que si une fonction suit des hypothèses très usuelles dans le monde réelle, et si on prend un intervalle spécifique (comme \mathbb{R}^+), et une condition initial, le système différentielle admet une unique solution

6.3 Fonctions hyperboliques

Dans cette annexe nous rassemblons les définitions, propriétés, identités et résultats usuels sur les fonctions hyperboliques. L'approche reste élémentaire : définitions par exponentielles, dérivées, formules d'addition, identités fondamentales, fonctions réciproques, séries de Taylor, intégrales usuelles et quelques applications.

Définition 6.1. Les *fonctions hyperboliques* \sinh , \cosh , \tanh , sech , csch , \coth sont définies pour tout réel x par :

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\cosh x \neq 0), \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \quad (x \neq 0), \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0).\end{aligned}$$

Proposition 6.1. 1. *Domaines :*

\sinh , \cosh , \tanh , sech sont définies sur \mathbb{R} ; csch , \coth sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. *Parité :*

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x.$$

3. *Croissance et signes :*

$$\cosh x \geq 1 \quad \forall x, \quad \sinh x \text{ est strictement croissante,}$$

avec $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$. De plus $\tanh x$ est strictement croissante et $-1 < \tanh x < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 6.2 (Identité fondamentale). *Pour tout réel x ,*

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1},$$

Démonstration.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1.$$

□

Proposition 6.3 (Formules d'addition). *Pour tous réels x, y ,*

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Démonstration.

$$\sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

La formule pour $\cosh(x + y)$ se démontre de façon analogue. □

Proposition 6.4 (Dérivées usuelles).

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\cosh x)' = \sinh x,$$

$$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x,$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x,$$

$$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x.$$

Démonstration. Direct par dérivation des définitions à l'aide de e^x . □

Proposition 6.5 (Séries de Taylor). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

Proposition 6.6 (Limites et asymptotiques). $1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$,
et $\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$, $\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$, $\cosh x \rightarrow +\infty$, et $\tanh x \rightarrow \pm 1$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Proposition 6.7 (Fonctions hyperboliques inverses).

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), & (\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \geq 1), & (\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (|x| < 1), & (\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Proposition 6.8 (Intégrales usuelles).

$$\begin{aligned}\int \sinh x \, dx &= \cosh x + C, \\ \int \cosh x \, dx &= \sinh x + C, \\ \int \tanh x \, dx &= \ln(\cosh x) + C, \\ \int \operatorname{sech}^2 x \, dx &= \tanh x + C, \\ \int \operatorname{sech} x \, dx &= 2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C.\end{aligned}$$

Proposition 6.9 (Identités supplémentaires).

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x, \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x, \\ \tanh(2x) &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.\end{aligned}$$

Proposition 6.10 (Solutions d'équation différentielle simple). *L'équation $y'' = y$ admet la base de solutions $\{\cosh x, \sinh x\}$. Ainsi, la solution générale est*

$$y(x) = A \cosh x + B \sinh x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Proposition 6.11 (Lien avec les fonctions trigonométriques). *La substitution $x \mapsto ix$ relie les fonctions trigonométriques et hyperboliques :*

$$\cos(ix) = \cosh x, \quad \sin(ix) = i \sinh x.$$

Proposition 6.12 (Formules d'exponentielle utiles).

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$$

Remarques pratiques :

- La substitution $t = \tanh(x/2)$ simplifie souvent les intégrales rationnelles en sinh et cosh.
- Beaucoup d'identités s'obtiennent aisément à partir de e^x et e^{-x} .
- sinh est strictement croissante, cosh minimale en 0, tanh bornée par 1.

Table récapitulative

Fonction	Dérivée
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$

6.4 Développements limités

Les développements limités (DL) permettent d'approcher une fonction par un polynôme au voisinage d'un point, le plus souvent 0. Ils sont fondamentaux pour l'analyse locale des fonctions, les approximations numériques et les calculs de limites.

Définition 6.2 (Développement limité). Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en a* si :

$$f(x) = P_n(x - a) + o((x - a)^n),$$

où P_n est un polynôme de degré $\leq n$, dit *polynôme de Taylor d'ordre n en a*.

Autrement dit :

$$P_n(x - a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Proposition 6.13. 1. Si f est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de a , alors elle admet un DL à l'ordre n en a .

2. Si f et g admettent des DL au voisinage de a , alors :

$(f + g)(x)$ a pour DL la somme des deux DL,

$(fg)(x)$ a pour DL le produit des deux DL, tronqué à l'ordre voulu,

$\frac{f}{g}(x)$ a pour DL le quotient des deux DL, si $g(a) \neq 0$.

3. Le DL est **unique** : si $f(x) = P(x) + o((x - a)^n) = Q(x) + o((x - a)^n)$, alors $P = Q$.

Proposition 6.14 (Développements limités usuels en 0). *On a, pour x réel petit :*

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad (x > -1), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \\ \tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Démonstration. Ces développements se déduisent de la série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$

ou par manipulation algébrique (produit, quotient, inversion de série). \square

Proposition 6.15 (Comportement du reste). *Si f est de classe C^{n+1} au voisinage de a , on peut écrire :*

$$f(x) = P_n(x-a) + R_n(x),$$

avec une forme de Lagrange du reste :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x).$$

Proposition 6.16 (DL de fonctions composées). *Si f admet un DL en a et g admet un DL en $f(a)$, alors :*

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \dots$$

On procède en remplaçant le DL de f dans celui de g et en développant à l'ordre voulu.

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &= x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + o(x^6) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6), \\ e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Proposition 6.17 (Règles pratiques de calcul de DL). 1. *On ne garde que les termes jusqu'à l'ordre demandé.*

2. *On remplace successivement les fonctions par leur DL tronqué.*
3. *On simplifie à chaque étape (en négligeant les $o(x^n)$ inutiles).*
4. *On peut utiliser des logiciels de calcul formel pour vérifier (par ex. `sympy` ou `Maple`).*

Proposition 6.18 (Applications classiques). 1. **Calcul de limites** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ découle du DL de $\sin x$.

2. **Études de fonctions** : signe, convexité, asymptotes locales.
3. **Approximation numérique** : $e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $|x| \ll 1$.

Table récapitulative des développements limités usuels :

Fonction	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$