

TD

Lorenzo Segoni

21 novembre 2025



# Table des matières

1	TD1	1
---	-----	---



# Chapitre 1

## TD1

### Exercice 1

Ces familles sont-elles identifiables ?

1.  $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma \in \mathbb{R}\}$
2.  $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma > 0\}$
3.  $\{\mathcal{B}(\rho) : \rho \in ]0, 1[\}$
4.  $\{\mathcal{E}(\lambda) : \lambda > 0\}$
5.  $\{\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}.$

### Corrigé de l'exercice 1

1. Si on prend le contre exemple

$$\sigma_1 = -5, \sigma_2 = -5 \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) = \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

**La famille n'est pas identifiable.**

2. Soit  $\sigma, \sigma'$  et on suppose  $P_\sigma = P_{\sigma'}$ , implique que pour tout intervalle  $I \in \mathbb{R}$

$$\int_I f_\sigma(x) dx = \int_I f_{\sigma'}(x) dx$$

où  $f_\sigma$  densité de  $P_\sigma$

Par exemple, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 f_\sigma(x) dx &= \int_{-\infty}^1 f_{\sigma'}(x) dx \\ \text{i.e. } F_\sigma(1) &= F_{\sigma'}(1) \\ \text{i.e. } \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma'}\right) \end{aligned}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

On a  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{\sigma} \leq \frac{x}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Or  $\Phi$  est strictement croissante.

Donc  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma'} \Rightarrow \sigma = \sigma'$ . **La famille est identifiable.**

**3.** Soit  $\rho, \rho' \in ]0, 1[$  et supposons  $P_\rho = P_{\rho'}$ . Alors pour tout  $k \in \{0, 1\}$

$$\mathbb{P}_\rho(X = k) = \mathbb{P}_{\rho'}(X = k)$$

En particulier, pour  $k = 1$  :

$$\rho = \rho'$$

Pour une loi de Bernoulli, la fonction de masse est  $\mathbb{P}(X = 1) = \rho$ .

Donc la fonction de masse détermine uniquement le paramètre  $\rho$ . **La famille est identifiable.**

**4.** Soit  $\lambda, \lambda' > 0$  et supposons  $P_\lambda = P_{\lambda'}$ . Considérons la densité exponentielle

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0$$

Si  $P_\lambda = P_{\lambda'}$ , alors les densités sont égales presque partout :

$$\lambda e^{-\lambda x} = \lambda' e^{-\lambda' x} \quad \text{p.p.}$$

Pour  $x > 0$ , on doit avoir

$$\lambda e^{-\lambda x} = \lambda' e^{-\lambda' x}$$

En dérivant par rapport à  $x$  :

$$-\lambda^2 e^{-\lambda x} = -(\lambda')^2 e^{-\lambda' x}$$

En divisant la deuxième équation par la première :

$$\lambda = \lambda'$$

On peut aussi évaluer les moments :  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ . Si les distributions sont égales, les espérances le sont aussi, donc  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'}$ , d'où  $\lambda = \lambda'$ .

### La famille est identifiable.

5. Considérons le contre-exemple :  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$  et  $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (\frac{1}{2}, 2)$ . Pour la loi exponentielle bivariée  $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2)$ , on a la fonction de survie :

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$$

Pour  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$  :

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-x-y} = e^{-(x+y)}$$

Pour  $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (\frac{1}{2}, 2)$  :

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = e^{-\frac{x}{2}-2y}$$

Or  $e^{-x-y} \neq e^{-\frac{x}{2}-2y}$  en général (par exemple pour  $x = y = 1$  :  $e^{-2} \neq e^{-2.5}$ ).

En fait, on peut montrer que si l'on observe seulement les lois marginales  $\mathcal{E}(\lambda_1)$  et  $\mathcal{E}(\lambda_2)$ , on récupère bien  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Mais le problème est que deux couples de paramètres différents peuvent donner la même loi bivariée (ou plus précisément, on ne peut identifier que le produit  $\lambda_1 \lambda_2$  à partir de certaines informations).

### La famille n'est pas identifiable.

### Exercice 2

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note  $m = \mathbb{E}[X_1]$  et  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$ .

1. Vérifier que

$$\bar{X}_n \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

sont des estimateurs consistants de  $m$  et de  $\sigma^2$ .

2. Calculer leur biais et en déduire un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

## Corrigé de l'exercice 2

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon.

**1.** On sait que  $m = \mathbb{E}[X_1]$ .

On considère  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

—  $\bar{X}_n$  est fortement consistant par la loi des grands nombres.

—  $\bar{X}_n$  est sans biais par linéarité de l'espérance.

C'est un estimateur par la méthode des moments (EMM) de  $m$ .

**2.** Estimation de  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$ .

On considère la variance empirique :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2 \\ &= \bar{X}_n^2 - (\bar{X}_n)^2, \end{aligned}$$

où  $\bar{X}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ .

**Consistance de  $S_n$**  On sait que :

—  $\bar{X}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1^2]$  par la loi des grands nombres,

—  $(\bar{X}_n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} (\mathbb{E}[X_1])^2$  par la loi des grands nombres et continuité de  $x \mapsto x^2$ .

Donc

$$S_n = \bar{X}_n^2 - (\bar{X}_n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2.$$

Ainsi,  $S_n$  est consistant (fortement).

**Biais de  $S_n$**  On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right] \\
 &= \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] - \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 \\
 &= \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{V}(\bar{X}_n) + \mathbb{E}^2[\bar{X}_n]) \\
 &= \mathbb{E}[X_1^2] - \left(\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} + (\mathbb{E}[X_1])^2\right) \\
 &= \mathbb{V}(X_1) - \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} \\
 &= \frac{n-1}{n} \mathbb{V}(X_1) \\
 &= \frac{n-1}{n} \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Donc le biais est :

$$\begin{aligned}
 B(S_n, \sigma^2) &= \mathbb{E}[S_n] - \sigma^2 \\
 &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 \\
 &= -\frac{\sigma^2}{n}.
 \end{aligned}$$

$S_n$  est un estimateur biaisé de  $\sigma^2$ , mais asymptotiquement sans biais car  $B(S_n, \sigma^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Variance empirique corrigée** Soit

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Alors

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \frac{n}{n-1} \mathbb{E}[S_n] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Donc  $\hat{\sigma}_n^2$  est sans biais.

- $\hat{\sigma}_n^2$  est appelée **variance empirique corrigée** ou **variance d'échantillon**.
- $\hat{\sigma}_n^2$  est également fortement consistant car  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n$  et  $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$ .
- En pratique, pour  $n$  grand, la différence entre  $S_n$  et  $\hat{\sigma}_n^2$  est négligeable.

## Exercice 3

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note  $m = \mathbb{E}[X_1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . On propose comme estimateurs de  $m$ ,  $\bar{X}_n$  et

$$T_{n,1} = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}).$$

1. Montrer que  $T_{n,1}$  est sans biais.
2. Lequel des deux estimateurs  $\bar{X}_n$  et  $T_{n,1}$  choisiriez-vous pour estimer  $m$  ?
3. Que pensez-vous de l'estimateur  $T_{n,2} = 0$  pour l'estimation de  $m$  ?

## Corrigé de l'exercice 3

1.  $T_{n,1}$  est sans biais :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{n,1}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_{n-1} + X_n)\right] \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n]) \\ &= \frac{1}{2}(m + m) \\ &= m.\end{aligned}$$

Donc  $T_{n,1}$  est sans biais.

2. Comparaison de  $\bar{X}_n$  et  $T_{n,1}$  :

On compare les risques quadratiques. Comme les deux estimateurs sont sans biais, le risque quadratique est égal à la variance.

**Risque de  $\bar{X}_n$  :**

$$\begin{aligned}R(\bar{X}_n, m) &= \mathbb{V}(\bar{X}_n) \\ &= \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

**Risque de  $T_{n,1}$  :**

$$\begin{aligned}
 R(T_{n,1}, m) &= \mathbb{V}(T_{n,1}) \\
 &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}(X_{n-1} + X_n)\right) \\
 &= \frac{1}{4}(\mathbb{V}(X_{n-1}) + \mathbb{V}(X_n)) \quad \text{car } X_{n-1} \perp\!\!\!\perp X_n \\
 &= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) \\
 &= \frac{\sigma^2}{2}.
 \end{aligned}$$

**Comparaison :**

- Si  $n = 2$  :  $R(\bar{X}_n, m) = \frac{\sigma^2}{2} = R(T_{n,1}, m)$ , donc  $\bar{X}_2 = T_{2,1}$ .
- Si  $n > 2$  :  $R(\bar{X}_n, m) = \frac{\sigma^2}{n} < \frac{\sigma^2}{2} = R(T_{n,1}, m)$ .

**Conclusion :** On préfère  $\bar{X}_n$  à  $T_{n,1}$  pour  $n > 2$ , car il est meilleur au sens du risque quadratique.

### 3. Estimateur $T_{n,2} = 0$ :

Le risque quadratique de  $T_{n,2}$  est :

$$\begin{aligned}
 R(T_{n,2}, m) &= \mathbb{E}[(T_{n,2} - m)^2] \\
 &= \mathbb{E}[(0 - m)^2] \\
 &= m^2.
 \end{aligned}$$

**Comparaison avec  $\bar{X}_n$  :**

$$R(\bar{X}_n, m) < R(T_{n,2}, m) \iff \frac{\sigma^2}{n} < m^2 \iff |m| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Donc  $T_{n,2} = 0$  est “préférable” à  $\bar{X}_n$  au sens du risque quadratique lorsque

$$|m| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- Cet estimateur est néanmoins “stupide” car il ne dépend pas des observations !
- Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , l’ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles  $T_{n,2}$  est meilleur devient de plus en plus petit :  $\left\{m : |m| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \rightarrow \{0\}$ .
- Cela illustre qu’un estimateur peut être meilleur au sens du risque quadratique pour certaines valeurs du paramètre tout en étant manifestement inadéquat d’un point de vue pratique.
- $\bar{X}_n$  est préférable car il est consistant, contrairement à  $T_{n,2}$ .

#### Exercice 4

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\theta)$ ,  $\theta > 0$ .

- 1.** Un statisticien propose d’estimer  $\theta$  par :

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

- a. Justifier que  $\hat{\theta}_n$  est bien définie.
  - b. Calculer  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$  et expliquer le choix du statisticien.
  - c. Donner la loi limite de  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ .
  - d. Donner la loi de  $\sum_{i=1}^n X_i$ . Calculer  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$ ,  $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$ , et  $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$ .
- 2.** Un statisticien propose d’utiliser

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

- a. L’estimateur  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  vérifie-t-il toujours des propriétés asymptotiques similaires à  $\hat{\theta}_n$  ?
- b. Calculer  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^{(2)}]$ ,  $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n^{(2)})$ , et  $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2]$ . Quel estimateur préférez-vous ?

#### Corrigé de l’exercice 4

- 1.**

- a. Pour que  $\hat{\theta}_n$  soit bien défini, il faut  $\bar{X}_n \neq 0$ .

Or  $\mathbb{P}(\bar{X}_n > 0) = 1$  car  $\forall i, \mathbb{P}(X_i > 0) = 1$  (loi exponentielle).

Donc  $\hat{\theta}_n$  est bien défini *presque sûrement*.

**b. Calcul de l'espérance :**

On rappelle que pour  $X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$ , on a  $\mathbb{E}_\theta[X_i] = \frac{1}{\theta}$  et  $\mathbb{V}_\theta(X_i) = \frac{1}{\theta^2}$ .

Donc  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais et consistant (fortement) pour l'estimation de  $\frac{1}{\theta}$  par la loi forte des grands nombres.

$\hat{\theta}_n$  est un *estimateur par méthode des moments (EMM)* de  $\theta$ .

$\bar{X}_n$  est un EMM de  $\frac{1}{\theta}$ . Si on pose  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ , alors  $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$  est un EMM de  $g(\frac{1}{\theta}) = \theta$ .

**Propriétés asymptotiques :**

- $\bar{X}_n$  est sans biais et consistant (fortement) pour l'estimation de  $\frac{1}{\theta}$
- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc par le théorème de continuité,  $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$  est consistant (fortement) pour l'estimation de  $g(\frac{1}{\theta}) = \theta$

En revanche, il n'y a aucune raison que  $\hat{\theta}_n$  soit sans biais. En effet, par l'inégalité de Jensen (car  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ ), on a  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[g(\bar{X}_n)] > g(\mathbb{E}[\bar{X}_n]) = g(\frac{1}{\theta}) = \theta$ . L'estimateur est donc biaisé positivement.

**c. Loi limite par la méthode Delta :**

**Étape 1 - TCL** : Par le Théorème Central Limite, on a :

$$\sqrt{n} \left( \bar{X}_n - \frac{1}{\theta} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n)) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right)$$

**Étape 2 - Méthode Delta** : Soit  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Cette fonction est dérivable avec  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

En particulier,  $g'\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{\theta})^2} = -\theta^2 \neq 0$ .

Par la méthode Delta, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left( g(\bar{X}_n) - g\left(\frac{1}{\theta}\right) \right) &= \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)^2 \mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n)\right) \\ &= \mathcal{N}\left(0, (-\theta^2)^2 \cdot \frac{1}{\theta^2}\right) \\ &= \mathcal{N}(0, \theta^2) \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\boxed{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)}$

**d. Loi de la somme :**

Pour  $X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$ , on sait que :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta)$$

Plus précisément,  $2\theta \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(2n)$  (loi du khi-deux à  $2n$  degrés de liberté).

**Loi de  $\hat{\theta}_n$**  :

Puisque  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ , on a :

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2n\theta}{2\theta \sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2n\theta}{U}$$

où  $U \sim \chi^2(2n)$ .

**Calcul de  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$**  :

Pour  $U \sim \chi^2(2n)$ , on a  $\mathbb{E}\left[\frac{1}{U}\right] = \frac{1}{2n-2}$  (pour  $n \geq 2$ ).

Donc :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = 2n\theta \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{U}\right] = 2n\theta \cdot \frac{1}{2n-2} = \frac{n}{n-1}\theta$$

**Calcul de  $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$**  :

Pour  $U \sim \chi^2(2n)$ , on a  $\mathbb{V}\left(\frac{1}{U}\right) = \frac{1}{(2n-2)^2(2n-4)}$  (pour  $n \geq 3$ ).

Donc :

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = (2n\theta)^2 \cdot \mathbb{V}\left(\frac{1}{U}\right) = 4n^2\theta^2 \cdot \frac{1}{(2n-2)^2(2n-4)} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

**Calcul du risque quadratique (EQM) :**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] &= \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta)^2 \\ &= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{n}{n-1}\theta - \theta\right)^2 \\ &= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{\theta}{n-1}\right)^2 \\ &= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} + \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \\ &= \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \left(\frac{n^2}{n-2} + 1\right) \\ &= \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2 + n - 2}{n-2} \\ &= \frac{\theta^2(n^2 + n - 2)}{(n-1)^2(n-2)} \end{aligned}$$

On peut simplifier :  $n^2 + n - 2 = (n - 1)(n + 2)$ , donc :

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \frac{\theta^2(n + 2)}{(n - 1)(n - 2)}$$

**2.**

**a. Propriétés asymptotiques de  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  :**

On a  $\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n$ .

**Consistance :** Puisque  $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$  et  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta$ , on a :

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} 1 \cdot \theta = \theta$$

Donc  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  est consistant.

**Loi limite :**

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) &= \sqrt{n} \left( \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n - \theta \right) \\ &= \frac{n-1}{n}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \theta\sqrt{n} \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \frac{n-1}{n}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \frac{\theta}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$  et  $\frac{\theta}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ .

Par le lemme de Slutsky :

$$\boxed{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)}$$

**Conclusion :** Oui,  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  vérifie les mêmes propriétés asymptotiques que  $\hat{\theta}_n$  (même loi limite).

**b. Calcul des caractéristiques de  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  :**

**Espérance :**

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^{(2)}] = \frac{n-1}{n}\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}\theta = \theta$$

Donc  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  est sans biais !

**Variance :**

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n^{(2)}) = \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\theta^2}{n-2}$$

**EQM :**

Puisque  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  est sans biais :

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2] = \mathbb{V}(\hat{\theta}_n^{(2)}) = \frac{\theta^2}{n-2}$$

**Comparaison des estimateurs :**

Estimateur	Biais	Variance	EQM
$\hat{\theta}_n$	$\frac{\theta}{n-1}$	$\frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$	$\frac{\theta^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}$
$\hat{\theta}_n^{(2)}$	0	$\frac{\theta^2}{n-2}$	$\frac{\theta^2}{n-2}$

**Comparaison de l'EQM :**

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_n)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_n^{(2)})} = \frac{\theta^2(n+2)}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n-2}{\theta^2} = \frac{n+2}{n-1} > 1$$

**Conclusion :** On préfère  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  car :

- Il est sans biais
- Il a une variance plus faible que  $\hat{\theta}_n$
- Il a un risque quadratique plus faible :  $\text{EQM}(\hat{\theta}_n^{(2)}) < \text{EQM}(\hat{\theta}_n)$
- Il conserve les mêmes propriétés asymptotiques (consistance, normalité asymptotique)

L'estimateur  $\hat{\theta}_n^{(2)}$  est obtenu en corrigeant le biais de  $\hat{\theta}_n$ . C'est un estimateur **sans biais à variance minimale** parmi ceux de la forme  $c\hat{\theta}_n$ .

### Exercice 5

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x),$$

où  $\theta > 0$  est un paramètre inconnu.

1. On pose  $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .
  - a. Donner la densité de  $X_{(n)}$ .
  - b. Calculer  $\mathbb{E}[X_{(n)}]$ ,  $\mathbb{E}[X_{(n)}^2]$ , puis en déduire  $\mathbb{V}(X_{(n)})$ .
  - c. Montrer que  $X_{(n)}$  est consistant pour l'estimation de  $\theta$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}[X_1]$  puis en déduire un estimateur  $\hat{\theta}_n$  consistant de  $\theta$ .

**3.** Qui de  $X_{(n)}$  ou  $\hat{\theta}_n$  choisiriez-vous pour estimer  $\theta$  ?

Corrigé de l'exercice 5

**1.**

**a.** Soit  $t \in [0, \theta]$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq t) &= \mathbb{P}_\theta(\forall i, X_i \leq t) \\ &= [\mathbb{P}_\theta(X_i \leq t)]^n\end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(X_i \leq t) &= \int_0^t \frac{2x}{\theta^2} dx \\ &= \frac{2}{\theta^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t \\ &= \frac{t^2}{\theta^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) = \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}$$

Ainsi  $X_{(n)}$  admet pour densité :

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

**b.** Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_0^\theta x \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta x^{2n} dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^\theta \\ &= \frac{2n}{2n+1} \theta\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_0^\theta x^2 \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta x^{2n+1} dx \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[ \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^\theta \\ &= \frac{n}{n+1} \theta^2\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_\theta[X_{(n)}] &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \mathbb{E}^2[X_{(n)}] \\ &= \frac{n}{n+1} \theta^2 - \frac{4n^2}{(2n+1)^2} \theta^2 \\ &= \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}\end{aligned}$$

### c. Méthode 1 :

$$R(X_{(n)}, \theta) = \underbrace{\mathbb{V}_\theta(X_{(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{(B(X_{(n)}, \theta))^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Ainsi  $X_{(n)}$  est **consistant** (puisque convergent en  $L^2$ ).

**MÉTHODE 2 :** Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $\theta - \epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(|X_{(n)} - \theta| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}_\theta(\theta - X_{(n)} \geq \epsilon) \\ &= \mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq \theta - \epsilon) \\ &= \frac{(\theta - \epsilon)^{2n}}{\theta^{2n}} \\ &= \left( \frac{\theta - \epsilon}{\theta} \right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Ainsi,  $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$  (consistance faible).

**2.** On a :

$$\mathbb{E}_\theta[X_i] = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\theta = \frac{2}{3} \theta$$

On pose :

$$\hat{\theta}_n = \frac{3}{2}\bar{X}_n$$

un estimateur du moment de  $\theta$ , sans biais et (faiblement) consistant.

**3.** Calcul du risque quadratique :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{9}{4}\mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{9}{4n}\mathbb{V}_\theta(X_i)$$

Or,

$$\mathbb{E}_\theta[X_i^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

Donc :

$$\mathbb{V}_\theta(X_i) = \mathbb{E}_\theta[X_i^2] - \mathbb{E}_\theta^2[X_i] = \frac{\theta^2}{2} - \left( \frac{2}{3}\theta \right)^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

Ainsi :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \frac{9}{4n} \cdot \frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8n}$$

et

$$\begin{aligned} R(X_{(n)}, \theta) &= \frac{\theta^2(2n+1)}{(n+1)(2n+1)^2} \\ &= \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Donc, d'un point de vue asymptotique, on préfère  $X_{(n)}$ , car la convergence de son risque quadratique est beaucoup plus rapide !

**Remarque :**

$$\frac{R(X_{(n)}, \theta)}{R(\hat{\theta}_n, \theta)} = \frac{8n}{(n+1)(2n+1)}$$

et

$$\frac{R(X_{(n)}, \theta)}{R(\hat{\theta}_n, \theta)} \leq 1 \iff 8n \leq (n+1)(2n+1) \iff 2n^2 - 5n + 1 \geq 0$$

On remarque que pour  $n \geq 3$ , on a bien :

$$R(X_{(n)}, \theta) \leq R(\hat{\theta}_n, \theta)$$

### Exercice 6

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty]}(x),$$

où  $\theta > 0$  est un paramètre inconnu.

1. Montrer que  $Y = X_1/\theta - 1$  suit une loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .
2.
  - a. Déterminer la fonction de répartition de  $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ .
  - b. Calculer le risque quadratique de  $X_{(1)}$  pour l'estimation de  $\theta$  puis analyser la consistance de cet estimateur.
3.
  - a. Estimer  $\theta$  par la méthode des moments.
  - b. Quelle est la loi limite de l'estimateur ainsi obtenu ? Étudier également sa convergence en moyenne quadratique.
4. Comparer les deux estimateurs.

### Corrigé de l'exercice 6

1. Soit  $Y = X_1/\theta - 1$ . On cherche la loi de  $Y$ .

On a  $X_1 \sim f_\theta$  où  $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty]}(x)$ .

Par changement de variable :  $Y = \frac{X_1}{\theta} - 1 \Rightarrow X_1 = \theta(Y + 1)$ .

On a  $X_1 \geq \theta \Rightarrow Y + 1 \geq 1 \Rightarrow Y \geq 0$ .

Le Jacobien est  $\frac{dX_1}{dY} = \theta$ . Donc

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_\theta(\theta(y+1)) \cdot |\theta| \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta(y+1)-\theta}{\theta}} \cdot \theta \cdot \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(y) \\ &= e^{-y} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(y) \end{aligned}$$

On reconnaît la densité de  $\mathcal{E}(1)$ . Donc  $Y \sim \mathcal{E}(1)$ .

Ainsi  $Y = X_1/\theta - 1 \sim \mathcal{E}(1)$ .

- 2.

- a. Déterminer  $F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x)$  où  $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(1)} > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) \quad (\text{indépendance}) \\
&= [\mathbb{P}(X_1 > x)]^n
\end{aligned}$$

Or, pour  $x \geq \theta$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t-\theta}{\theta}} dt \\
&= e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}
\end{aligned}$$

Pour  $x < \theta$  :  $\mathbb{P}(X_1 > x) = 1$ .

Donc, pour  $x \geq \theta$  :

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - e^{-n \frac{x-\theta}{\theta}}$$

et pour  $x < \theta$  :  $F_{X_{(1)}}(x) = 0$ .

**b.** On peut écrire  $X_{(1)} = \theta + \theta Z$  où  $Z \sim \mathcal{E}(n)$ .

En effet, pour  $z \geq 0$  :

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - e^{-nz}$$

ce qui est la CDF de  $\mathcal{E}(n)$ .

$$\text{Donc } \mathbb{E}[X_{(1)}] = \theta + \theta \mathbb{E}[Z] = \theta + \theta \cdot \frac{1}{n} = \theta \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Et } \mathbb{V}(X_{(1)}) = \theta^2 \mathbb{V}(Z) = \theta^2 \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Le risque quadratique de  $X_{(1)}$  pour estimer  $\theta$  est :

$$\begin{aligned}
R(\theta, X_{(1)}) &= \mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2] \\
&= \mathbb{V}(X_{(1)}) + (\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta)^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n^2} + \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n^2} + \frac{\theta^2}{n^2} \\
&= \frac{2\theta^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Bien sûr, on peut aussi calculer directement :  $\mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2] = \mathbb{V}(\theta Z) + (\mathbb{E}[\theta Z])^2 = \theta^2 \mathbb{V}(Z) + \theta^2 (\mathbb{E}[Z])^2 = \theta^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\theta^2}{n^2}$ .

Le risque quadratique tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  à vitesse  $1/n^2$ .

**L'estimateur  $X_{(1)}$  est convergent en moyenne quadratique.**

Par Chebyshev,  $X_{(1)} \xrightarrow{L^2} \theta$ , donc aussi  $X_{(1)} \xrightarrow{p} \theta$ .

### 3.

#### a.

Estimation par la méthode des moments.

D'abord, calculons  $\mathbb{E}[X_1]$  :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx$$

Par changement de variable  $u = \frac{x-\theta}{\theta}$ , on a  $x = \theta(u+1)$  et  $dx = \theta du$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1] &= \int_0^{+\infty} \theta(u+1) e^{-u} \theta du \\ &= \theta \int_0^{+\infty} (u+1) e^{-u} du \\ &= \theta \left[ \int_0^{+\infty} ue^{-u} du + \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right] \\ &= \theta[1+1] = 2\theta\end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \Gamma(2) = 1 \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1.$

Par la méthode des moments, on égalise le moment empirique au moment théorique :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2\theta$$

Donc l'estimateur est :

$$\hat{\theta}_n^{(MM)} = \frac{\bar{X}_n}{2}$$

**b.** Loi limite et convergence en moyenne quadratique.

Par le théorème limite central, puisque  $\mathbb{E}[X_1] = 2\theta$  et  $\mathbb{V}(X_1) < \infty$ , on a :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$ .

Calculons  $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1^2] &= \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \theta^2(u+1)^2 e^{-u} du \\
&= \theta^2 \int_0^{+\infty} (u^2 + 2u + 1) e^{-u} du \\
&= \theta^2[2 + 2 + 1] = 5\theta^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \Gamma(3) = 2.$$

Donc  $\mathbb{V}(X_1) = 5\theta^2 - 4\theta^2 = \theta^2$ .

Par conséquent :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

Donc :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(MM)} - \theta) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{n}(\bar{X}_n - 2\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$$

**Loi limite :**  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(MM)} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$ .

Pour la convergence en moyenne quadratique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta}_n^{(MM)} - \theta\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\bar{X}_n - 2\theta}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 2\theta)^2] \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}(\bar{X}_n) + (\mathbb{E}[\bar{X}_n] - 2\theta)^2\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta^2}{n} \\
&= \frac{\theta^2}{4n}
\end{aligned}$$

L'estimateur converge en moyenne quadratique avec  $R(\theta, \hat{\theta}_n^{(MM)}) = \frac{\theta^2}{4n}$ .

#### 4. Comparaison des deux estimateurs.

- **Estimateur du minimum :**  $\hat{\theta}_n^{(1)} = X_{(1)}$ 
  - Risque quadratique :  $R(\theta, X_{(1)}) = \frac{2\theta^2}{n^2}$
  - Vitesse de convergence :  $1/n^2$  (super-rapide !)
  - Biais :  $\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta = \frac{\theta}{n}$  (estimateur biaisé)

- **Estimateur des moments :**  $\widehat{\theta}_n^{(MM)} = \frac{\overline{X}_n}{2}$
- Risque quadratique :  $R(\theta, \widehat{\theta}_n^{(MM)}) = \frac{\theta^2}{4n}$
- Vitesse de convergence :  $1/n$  (convergence standard)
- Biais :  $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_n^{(MM)}] - \theta = 0$  (estimateur sans biais)

Le ratio des risques est  $\frac{R(\theta, X_{(1)})}{R(\theta, \widehat{\theta}_n^{(MM)})} = \frac{2\theta^2/n^2}{\theta^2/(4n)} = \frac{8}{n}$ . Pour  $n$  grand,  $X_{(1)}$  est beaucoup meilleur que l'estimateur des moments !

**Conclusion :**  $X_{(1)}$  est un meilleur estimateur que  $\widehat{\theta}_n^{(MM)}$  asymptotiquement, car il converge plus vite (à vitesse  $1/n^2$  au lieu de  $1/n$ ). Bien que  $X_{(1)}$  soit biaisé, son biais décroît assez vite pour que le risque global soit plus petit.