4.2.1 Analisi

La funzione *merge* impiega $\Theta(r-p)$, visto che le copie dei vettori (riga 1,2) sommate impiegano $\Theta(r-p)$ e il ciclo *for* impiega $\Theta(r-p)$

$$T^A(p,r) = \begin{cases} a & \text{se } p \geq r \\ T^A\left(p,\ \dfrac{p+r}{2}\right) + T^A\left(\dfrac{p+r}{2},\ r\right) + T^A_{\text{merge}}(p,r) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$n = r - p + 1$

$$T^A(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 1 \\ T^A\left(\dfrac{n}{2}\right) + T^A\left(\dfrac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$T^A(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 1 \\ T^A\left(\dfrac{n}{2}\right) + T^A\left(\dfrac{n}{2}\right) + c\,n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(n) = 2\,T\left(\dfrac{n}{2}\right) + c\,n \\ T\left(\dfrac{n}{2}\right) = 2\,T\left(\dfrac{n}{4}\right) + c\,\dfrac{n}{2} \\ T\left(\dfrac{n}{4}\right) = 2\,T\left(\dfrac{n}{8}\right) + c\,\dfrac{n}{4} \\ \vdots \\ T(1) = a \end{cases}$$

moltiplico per 2^k per potere semplificare

k rappresenta il numero di passaggi che occorrono nella ricorsione.

Il primo livello parte da $k = 0$

$$\begin{cases} T(n) = 2\,T\left(\dfrac{n}{2}\right) + c\,n \\ 2\,T\left(\dfrac{n}{2}\right) = 4\,T\left(\dfrac{n}{4}\right) + c\,n \\ 4\,T\left(\dfrac{n}{4}\right) = 8\,T\left(\dfrac{n}{8}\right) + c\,n \\ \vdots \\ 2^k\,T(1) = 2^k\,a \end{cases}$$

Semplificando ottengo:

$$T(n) = k\,c\,n + 2^k\,a$$

$$\sum_{i=0}^{k}\left[2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right)\right] \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1}\left[2^{i+1}\,T\left(\frac{n}{2^{i+1}}\right) + c\,n\right] + 2^k\,a$$

Sommatoria del lato sinistro della catena di uguaglianze

Sommatoria del lato destro della catena di uguaglianze
Escludo il caso k dato che l'ultima uguaglianze ha una forma diversa

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left[2^{i+1}\,T\left(\frac{n}{2^{i+1}}\right)n\right] + \sum_{i=0}^{k-1}[c\,n] + 2^k\,a$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}[c\,n] = c\,n\sum_{i=0}^{k-1}[1] = c\,n\,k$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left[2^{i+1}\,T\left(\frac{n}{2^{i+1}}\right)n\right] + c\,n\,k + 2^k\,a$$

faccio partire la sommatoria da $i = 1$ $\rightarrow$ $\sum_{i=1}^{k}\left[2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right)n\right]$

estraggo il primo elemento di $\sum_{i=0}^{k}\left[2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right)\right]$ ovvero $T(n)$ e faccio partire la sommatoria da $i = 1$

$$T(n) + \sum_{i=1}^{k}\left[2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{k}\left[2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right)n\right] + c\,n\,k + 2^k\,a$$

$$T(n) = c\,n\,k + 2^k\,a$$

Quanto vale k ?

k agisce in funzione di n

quindi $T\left(\dfrac{n}{2^k}\right)$

Il caso base lo ottengo quando $\left(\dfrac{n}{2^k}\right) \leq 1$

$$\frac{n}{2^k} \leq 1 \;\Rightarrow\; n \leq 2^k \;\Rightarrow\; \log(n) \leq k$$

$$T(n) = c\,n\,k + 2^k a = c\,n\,\log(n) + n\,a = \Theta(n\,\log(n))$$