5.7.2 Teorema

$\#IN(x) \geq 2^{bh(x)} - 1$ $\qquad \#IN(x)$: numero di nodi interni

$bh(x)$: Black Height

Dimostrazione per induzione sull'altezza dell'albero $h(x)$

Caso base: $h(x) = 0$

Quando l'altezza è 0 vuol dire che non ci sono nodi interni (escluse le foglie).

L'insieme dei nodi avrà solamente una foglia $\{ \blacksquare \}$

$\#IN(x) = 0 \ \geq \ 2^0 - 1 = 0 \quad \checkmark$

Caso induttivo: $h(x) > 0$

Quindi x ha due figli α e β

$h(x) = 1 + max\{h(\alpha),\ h(\beta)\} \ \Rightarrow \ h(x) - 1 \ \geq \ h(\alpha),\ h(\beta)$

$\#IN(\alpha) \geq 2^{bh(\alpha)} - 1$

$\#IN(\beta) \geq 2^{bh(\beta)} - 1$

Osserviazioni:

1. $bh(\alpha) = bh(\beta)$ ossia hanno lo stesso numero di nodi **neri**, altrimenti x non sarebbe red-black
2. $bh(x) \ \leq \ 1 + bh(\alpha) = 1 + bh(\beta)$

$\#IN(x) = \underset{\text{radice } x}{1} + \ \#IN(\alpha) + \ \#IN(\beta) \ = \ 1 + (2^{bh(\alpha)} - 1) + (2^{bh(\beta)} - 1) =$

$2 \cdot 2^{bh(\alpha)} - 1 = 2^{bh(\alpha)+1} - 1 \underset{\text{dalla seconda osservazione}}{\geq} 2^{bh(x)} - 1$

E quindi che $\quad \#IN(x) \geq 2^{bh(x)} - 1$

Osservazione:

Da questo teorema si puo osservare, inoltre, che l'altezza di un albero red-black è logaritmica nel numero di nodi

$\underbrace{\#IN(x)}_{n} \geq 2^{bh(t)} - 1 \Rightarrow n + 1 \geq 2^{bh(t)} \Rightarrow bh(x) \leq log(n+1)$

Come visto prima, $bh = \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$ $\qquad$ quindi $h \leq 2\ bh(x) \leq log(n+1) \Rightarrow h(x) = O(log\ n)$