ESERCITAZIONE (nr. macchina e analisi errori)

ESAME 12.02.18

1. $\mathbb{F} = \mathbb{F}(2, t, e_{max}, e_{min})$ con ARROTONDAMENTO

- calcola t, e_{max}, e_{min}

$$\begin{cases} t = e_{min} + 1 \\ realmin = 1/32 \\ realmax = 62 \end{cases} \qquad \begin{matrix} realmin = B^{-e_{min}-1} \\ realmax = B^{e_{max}}(1-B^{-t}) \end{matrix}$$

nel caso non ricordassi le formule

$\#$ macchina più piccolo $= (0,\underbrace{100\ldots0}_{t})_2 \cdot 2^{-e_{min}} = 2^{-1} \cdot 2^{-e_{min}}$ realmin

$realmax = (0,11\ldots1)_2 \cdot 2^{e_{max}} = 2^{e_{max}} \cdot \sum_{i=1}^{t} 2^{-i} = 2^{e_{max}} \left(\left(\sum_{i=0}^{t} 2^{-i} \right) - 1 \right)$

perché ho aggiunto lo 0 nella somm.

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}^{t+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - 2^{-t} - 1$

$= 2^{e_{max}} \cdot (2 - 2^{-t} - 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{-e_{min}-1} = 1/2^5 = 2^{-5} \\ 2^{e_{max}}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) = 62 \end{cases}$$

$-e_{min} - 1 = -5$

$\hookrightarrow e_{min} = 4 \Rightarrow t = 5$

e per trovare $e_{max} \Rightarrow 2^{e_{max}} \frac{2^5 - 1}{2^5} = 62 \Rightarrow 2^{e_{max}} \cdot \frac{31}{32} = 62 \Rightarrow 2^{e_{max}} = 2^6 \Rightarrow e_{max} = 6$

$\mathbb{F} = \mathbb{F}(2, 5, 6, 4)$

- calcola $|\mathbb{F}|$, ovvero quanti elementi ha $\mathbb{F}$?

$d_1 \in \{1, 2, \ldots, B-1\}$

$\mathbb{F} = \{0\} \cup \{\pm (0, d_1 d_2 \ldots d_t)_2 \cdot 2^e \mid d_1 = 1,\ d_i \in \{0,1\},\ -e_{min} \le e \le e_{max}\}$

$= 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2^t \cdot (e_{max} + e_{min} + 1)$

$= 1 + 2 \cdot 2^4 (e_{max} + e_{min} + 1) = 1 + 2^5 \cdot 11 + = 353$

- definisci i numeri DENORMALIZZATI

$\pm (0, \overset{0}{d_1} d_2 \ldots d_t) \cdot 2^e \qquad d_1 = 0,\ e = -e_{min} \qquad \Rightarrow \pm (0,0 d_2 \ldots d_t)_2 \cdot 2^{-e_{min}}$

$2 \cdot (2^{t-1} - 1) = 2 \cdot (2^4 - 1) = 30$

- calcolare gli el. POSITIVI $\to$ sono 15 (la metà) $\to (0.0 d_2 d_3 d_4 d_5)_2 \cdot 2^{-4}$

il + piccolo $(0.00001)_2 \cdot 2^{-4} = 2^{-5} \cdot 2^{-4} = 2^{-9} \to$ i denormalizzati sono MULTIPLI di 2^{-9} $\Rightarrow K \cdot 2^{-9}$ con $K \in \{1, \ldots, 15\}$

il + grande $(0,01111)_2 \cdot 2^{-4} = 15/32 \cdot 2^{-4} = 15 \cdot 2^{-9}$

- Definire la PRECISIONE DI MACCHINA e quella di esso

$$u = \begin{cases} B^{1-t} & \text{TRONCAMENTO} \\ \frac{B^{1-t}}{2} & \text{ARROTONDAMENTO} \end{cases}$$

qui usiamo arr. $\rightarrow \frac{2^{1-t}}{2} = 2^{-t} = 2^{-5} = 1/32$

- $x = (1,\overline{01})_2$ $\quad \tilde{x} = fl(x) = fl((1,\overline{01})_2) = fl((0,1\overline{01})_2 \cdot 2) = fl((0,1010\overline{101})_2 \cdot 2) = (0,10101)_2 \cdot 2^1$

$y = (10,\overline{01})_2$ $\quad \tilde{y} = fl(y) = fl((10,\overline{01})_2) = fl((0,10\overline{01})_2 \cdot 2^2) = fl((0,100\overline{101})_2 \cdot 2^2) = (0,10011)_2 \cdot 2^2$

esponente che va bene $\hookrightarrow > -4$, < 6

- scrivere $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$ come fraz. in base 10

$\tilde{x} = (0,10101)_2 \cdot 2 = (2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}) = 1 + 1/4 + 1/16 = 21/16$

$\tilde{y} = (0,10011)_2 \cdot 2^2 = (2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}) \cdot 2^2 = 19/8$

$x = (1,\overline{01})_2 = \frac{(1001)_2 - (1)_2}{(11)_2} = \frac{(100)_2}{(11)_2} = 4/3$ (metodo FRAZ. GENERATRICE)

$y = (10,\overline{01})_2 = \quad 2^2 y = 4y = (1001,\overline{01})_2 = (1001)_2 + (0,\overline{01})_2 + (10)_2 - (10)_2$

$= y + (1001)_2 - (10)_2$

$\Rightarrow 3y = (1001)_2 - (10)_2 = 1+8-2 = 7 \Rightarrow y = 7/3$

$erel_x = \left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right| = \left|\frac{4/3 - 21/16}{4/3}\right| = 1/64 = 2^{-6}$ $\quad err\,REL\,y = \left|\frac{y - \tilde{y}}{y}\right| = \left|1 - \frac{\tilde{y}}{y}\right| = \left|1 - \frac{19}{8} \cdot \frac{3}{7}\right| = 1/56$

- calcola $\tilde{z} = \tilde{x}\ fl(+)\ \tilde{y}$ e calcola e t.c. $\frac{\tilde{z}}{2^{e+1}} <$ realmin $< \frac{\tilde{z}}{2^e}$ $\quad$ (realmin $= \frac{1}{32}$)

$\tilde{z} = fl(\tilde{x} + \tilde{y}) = fl((0,10101)_2 \cdot 2 + (0,10011)_2 \cdot 2^2)$

$= fl((0,010101)_2 \cdot 2^2 + (0,10011)_2 \cdot 2^2)$

$= fl((0,111011)_2 \cdot 2^2$

$= (0,11110)_2 \cdot 2^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}) \cdot 2^2 = \frac{15}{4}$

$$\begin{array}{r} 0,010101 \; + \\ 0,10011 \\ \hline 0,111011 \end{array}$$

determino e $\rightarrow \underbrace{\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2^{e+1}}}_{\frac{15}{2^{e+3}}} < \frac{1}{32} < \underbrace{\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2^e}}_{\frac{15}{2^{e+2}}}$ $\rightarrow$ moltiplico per $2^{e+3} \rightarrow 15 < \frac{2^{e+3}}{2^5} < 15 \cdot 2$

$15 < 2^{e+3-5} < 30$

$2^{e-2} = \underset{2^4}{16} \Rightarrow e-2 = 4 \Rightarrow e = 6$

2. $y = f(x)$

- err INERENTE $\dfrac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)}$

- condizionamento $f(x) = \dfrac{2e^x}{1-x^2}$ $\quad cond_f(x) = \dfrac{|x| \cdot |f'(x)|}{|f(x)|} = |x| \cdot \cancel{2e^x} \left| \dfrac{1-x^2+2x}{(1-x^2)^{\cancel{2}}} \right| \cdot \dfrac{|\cancel{1-x^2}|}{\cancel{2e^x}} = |x| \cdot \left| \dfrac{1-x^2+2x}{(1-x^2)} \right|$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{e^x(1-x^2) - e^x(-2x)}{(1-x^2)^2} = 2e^x \, \frac{1-x^2+2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} cond_f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\,|1-x^2+2x|}{|1-x^2|} = +\infty$$

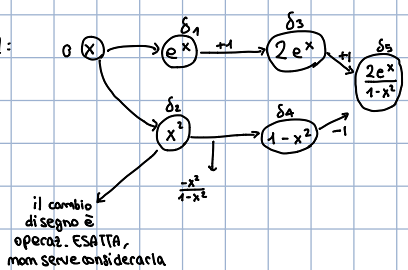
$$1-x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \quad \Rightarrow \lim_{x \to \pm 1} \frac{|x|\,|1-x^2+2x|}{|1-x^2|} = +\infty$$

il calcolo di f è MAL CONDIZ. se x è vicino a 1 o -1 o se |x| è grande

- err ALGO $\dfrac{g(\tilde{x}) - \tilde{g}(\tilde{x})}{g(\tilde{x})}$

- $\dfrac{2e^x}{1-x^2} = e^x \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} \right)$ verifica STABILITÀ con GRAFI

ALG 1:



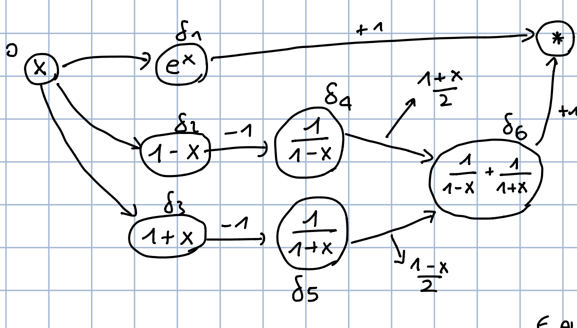
$|\delta_i| \leq u$

$$\epsilon_{ALGO} = \delta_5 + \delta_3 + \delta_4 - \delta_4 \frac{-x^2}{1-x^2}\delta_2$$

$$|\epsilon_{ALGO}| \leq |\delta_5| + |\delta_3| + |\delta_4| + |\delta_4| + \left|\frac{x^2}{1-x^2}\right| |\delta_2|$$
$$\leq 4u + \left|\frac{x^2}{1-x^2}\right| u$$

ALG 1 è INSTABILE in AVANTI se x è vicino a 1 o -1

ALG 2:



$$\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2}$$

$$\epsilon_{ALG2} = \delta_7 + \delta_1 + \delta_6 + \frac{1+x}{2}\left(\delta_4 - \delta_2\right) + \frac{1-x}{2}\left(\delta_5 - \delta_3\right) \qquad |\delta_i| \leq u$$

$$|\epsilon_{ALG2}| \leq |\delta_7| + |\delta_1| + |\delta_6| + \left|\frac{1+x}{2}\right| (|\delta_4| + |\delta_2|) + \left|\frac{1-x}{2}\right| (|\delta_5| + |\delta_3|)$$

$$\leq 3u + \frac{|1+x|}{\cancel{2}} \cancel{2}u + \frac{|1-x|}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}u = u\left(|1+x| + |1-x| + 3\right)$$

ALG 2 è INSTABILE se |x| è molto grande

COMPITO 24. 9. 2018

1) $\mathbb{F} = \mathbb{F}(2, t, p_{max}, p_{min})$ ARROT.

- $\begin{cases} p_{max} = p_{min} \\ realmin = 1/32 \\ |\mathbb{F}| = 145 \end{cases}$ $realmin = 2^{-p_{min}-1} = 1/32 = 2^{-5}$ $\Rightarrow \begin{cases} p_{MAX} = p_{MIN} \\ 2^{-p_{MIN}-1} = 2^{-5} \\ 1 + 2 \cdot 2^{t-1}(p_{MAX} + p_{MIN} + 1) = 145 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $p_{MIN} = 4 \quad p_{MAX} = 4$

$\cancel{1} + 2^t(2p_{MIN} + 1) = \cancel{145}\ 144$

$\Rightarrow 2^t \cdot 9 = 144 \quad t = 4$

$realmax = 2^{p_{MAX}}(1 - 2^{-t}) = 2^4(1 - 2^{-4}) = 2^4 - 1 = 15$

- $u = \frac{2^{1-t}}{2} = 2^{-4} = 1/16$

- $x = (0,\overline{1011})_2$ $\quad \tilde{x} = fl((0,1011\overline{1011})_2) = (0,1100)_2 \cdot 2^0$

$y = (11,\overline{101})_2$ $\quad \tilde{y} = fl((0,11\overline{101})_2 \cdot 2^2) = (0,1111)_2 \cdot 2^2$

$\tilde{z} = \tilde{x}\, fl(+)\, \tilde{y} = fl(\tilde{x} + \tilde{y}) = fl((0,001100)_2 \cdot 2^2 + (0,1111)_2 \cdot 2^2)$

$= fl((1,0010)_2 \cdot 2^2) = fl((0,10010)_2 \cdot 2^3) = (0,1001)_2 \cdot 2^3$