Soluzioni - MD1 - 13/12/18

Domanda [25pt] Si consideri la sequenza di cifre 123456789. Vogliamo inserire all'interno di tale sequenza dei segni di operazione '+' e/o '-' in modo da formare delle espressioni matematiche valide, come ad esempio

$$1 + 234 - 5 - 6 + 789$$

$$12 - 3 + 45678 + 9$$

eccetera. L'espressione deve cominciare con la cifra 1, deve contenere almeno un'operazione e ogni {+,-} deve sempre essere seguito da una cifra (e non da un altro {+,-}).

Quante espressioni di questo tipo possiamo formare?

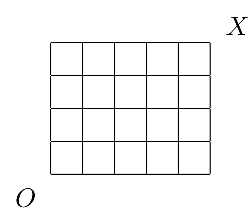
SOL: Supponiamo di spaziare le 9 cifre con 8 separatori, chiamiamoli s, ottenendo

$$1s2s3s4s5s6s7s8s9$$

Se a ogni separatore diamo un valore tra 3 possibilità, ossia '+', '-', 'niente' dove 'niente' rappresenta che non inseriamo un'operazione in quella posizione ma lasciamo le cifre adiacenti fra loro, allora ogni assegnamento rappresenta un'espressione diversa. L'unico assegnamento vietato è quello che assegna 'niente' a tutti i separatori. Quindi, le soluzioni sono in tutto

$$3^8 - 1 = 6560$$

Domanda [29pt] Si consideri la griglia $G(n, m)$ a quadretti data da $n + 1$ linee verticali intersecate con $m + 1$ linee orizzontali. Chiamiamo $O = (0, 0)$ l'angolo in basso a sinistra e $X = (n, m)$ quello in alto a destra. Ad esempio, la seguente griglia corrisponde a $n = 5$, $m = 4$.



Un *cammino* in $G(n, m)$ si ottiene passando da un punto della griglia ad un altro muovendosi lungo le linee e spostandosi esclusivamente da sinistra a destra in orizzontale e dal basso all'alto in verticale.

Siano $A = (2, 4)$, $B = (6, 3)$ e $C = (9, 6)$. Quanti sono i cammini da O a X in $G(11, 8)$ che non passano per alcun punto dell'insieme $\{A, B, C\}$?

SOL: In generale, il numero di cammini tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è 0 se $(x_1 > x_2\ OR\ y_1 > y_2)$, mentre se $(x_1 \leq x_2\ AND\ y_1 \leq y_2)$ tale numero è

$$\frac{(d_x + d_y)!}{d_x!\, d_y!} = \binom{d_x + d_y}{d_x}$$

dove $d_x = x_2 - x_1$ e $d_y = y_2 - y_1$.

Denotiamo con $c(P, Q)$ il numero di cammini tra due generici punti P e Q, e con $c(P, Q|S)$ i cammini tra P e Q che passano per ogni punto di $S \subseteq \{A, B, C\}$. usiamo il principio di inclusione/esclusione:

- I cammini da 0 a X sono in tutto

$$c(O,X) = \binom{19}{8} = 75,582$$

- I cammini da 0 a X che passano per A sono in tutto

$$c(O,X|A) = c(O,A) \times c(A,X) = \binom{6}{2}\binom{13}{4} = 10,725$$

- I cammini da 0 a X che passano per B sono in tutto

$$c(O,X|B) = c(O,B) \times c(B,X) = \binom{9}{3}\binom{10}{5} = 21,168$$

- I cammini da 0 a X che passano per C sono in tutto

$$c(O,X|C) = c(O,C) \times c(C,X) = \binom{15}{6}\binom{4}{2} = 30,030$$

- I cammini da 0 a X che passano per A e B sono 0 in quanto B non è raggiungibile da A

$$c(O,X|A,B) = 0$$

- I cammini da 0 a X che passano per A, C sono in tutto

$$c(O,X|A,C) = c(O,A) \times c(A,C) \times c(C,X) = \binom{6}{2}\binom{9}{2}\binom{4}{2} = 3,240$$

- I cammini da 0 a X che passano per B, C sono in tutto

$$c(O,X|B,C) = c(O,B) \times c(B,C) \times c(C,X) = \binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{4}{2} = 10,080$$

- Non ci sono cammini da 0 a X che passano per A, B, C

$$c(O,X|A,B,C) = 0$$

  Applicando il principio di inclusione/esclusione abbiamo che i cammini che non passano nè per A nè per B nè per C sono

$$\begin{aligned} c(O,X) &- (c(O,X|A) + c(O,X|B) + c(O,X|C)) \\ &+ (c(O,X|A,B) + c(O,X|A,C) + c(O,X|B,C)) \\ &- C(O,X|A,B,C) = \\ = 75,582 &- (10,725 + 21,168 + 30,030) + (3,240 + 10,080) = 26,979 \end{aligned}$$

Domanda [24pt] Si consideri la seguente equazione a variabili intere non-negative:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$$

Quante sono le soluzioni in cui

$$(x_1, x_3 \geq 1) \wedge (x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ sono pari})?$$

SOL: Si noti che x_5 deve essere dispari. Introduciamo variabili $y_i \geq 0$ per $i = 1, \ldots, 5$ in modo che

$$x_1 = 2y_1 + 2, \quad x_3 = 2y_3 + 2$$

$$x_2 = 2y_2, \quad x_4 = 2y_4, \quad x_5 = 2y_5 + 1$$

L'equazione diventa

$$2y_1 + 2 + 2y_2 + 2y_3 + 2 + 2y_4 + 2y_5 + 1 = 31$$

ossia

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 = 26$$

ossia

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13$$

e ci sono

$$\binom{17}{4} = 2,380$$

soluzioni.

Domanda [24pt] Sia T un albero per cui valgono queste condizioni:

1. Nessun nodo ha grado ≥ 6
2. Nessun nodo ha grado $= 4$
3. I nodi di grado 3 sono due in più dei nodi di grado 2
4. I nodi di grado 5 sono il doppio di quelli di grado 3
5. Ci sono in tutto 21 archi

Quante foglie ha T?

SOL: Chiamiamo x il numero di foglie e y il numero di nodi di grado 3. Dalle ipotesi sappiamo che $y \geq 2$.

La somma dei gradi è

$$x + 2(y - 2) + 3y + 5(2y)$$

e vale $2m = 42$. Otteniamo

$$x + 15y = 46$$

Ora, è chiaro che deve essere $y \leq 3$. Se fosse $y = 3$ si avrebbe $x = 1$ ma quasto è impossibile visto che ogni albero ha almeno due foglie. Quindi $y = 2$ da cui $x = 16$.

Domanda [20pt] La nazione di Elbonia ha adottato le seguenti regole per le targhe automobilistiche

1. La targa si compone di 3 lettere seguite da 3 cifre seguite da 1 lettera
2. Per motivi scaramantici, le targhe contenenti come cifre "666" sono vietate
3. La prima lettera della targa è una vocale (i.e., A/E/I/O/U)) se e solo se l'ultima lettera della targa è una consonante

Sapendo che l'alfabeto di Elbonia è il medesimo dell'alfabeto italiano, quante sono le targhe possibili in Elbonia?

SOL: Le stringhe di 4 lettere che cominciano per vocale e finiscono per consonante sono

$$5 \times 21 \times 21 \times 16 = 35,280$$

e altrettante cominciano per consonante e finiscono per vocale. Per ognuna di queste stringhe, le cifre centrali possono essere scelte in 999 modi (tutti tranne il 666). Per cui, le targhe possibili in Elbonia sono in tutto

$$35,280 \times 2 \times 999 = 70,489,440$$