MD1 - 18/09/18 - Soluzioni

Domanda n. 1: [28] Chiamiamo un numero *palindromo* se è lo stesso sia letto da sinistra a destra che da destra a sinistra (ad esempio 131, 2517152, ecc.). Chiamiamo un numero *alternante* se le cifre in posizione dispari sono dispari e quelle in posizione pari sono pari (ad esempio 1632941212, 743, 9252901, ecc.) Quanti numeri alternanti palindromi di $n = 11$ cifre contengono la cifra "0"?

SOL: Formata la prima metà (cifre 1..6) del numero, la seconda è obbligata. Contiamo prima quanti numeri non contengono lo 0 e poi per complemento abbiamo quelli che lo contengono. Ci sono 3 cifre pari e ognuna ha 4 possibili valori (2,4,6,8) e 3 cifre dispari di 5 valori, per cui la prima metà del numero si può comporre in $4^3 \times 5^3$ modi. Se invece lo 0 fosse permesso, i modi sarebbero 5^6. Quindi i modi in cui lo 0 è presente sono

$$5^6 - 4^3 \times 5^3 = 7625$$

(se $n = 13$ la risposta è 38125)

Domanda n. 2: [23] Chiamiamo un numero *non-decrescente* se le sue cifre sono non-decrescenti (ad es. 12247, o 25678). (Si noti che cui la prima cifra deve essere diversa da 0). Quanti sono i numeri non-decrescenti di $n = 7$ cifre?

SOL: Il numero è determinato da quanti 1, quanti 2, ecc. ci sono (non può esserci lo 0). Quindi i numeri sono tanti quante le soluzioni di

$$x_1 + \cdots x_9 = 7$$

ossia $\binom{7+8}{7} = 6435$

(se $n = 6$ la risposta è 3003)

Domanda n. 3: [19] Chiamiamo un numero *decrescente* se le sue cifre sono strettamente decrescenti (ad es. 86531 o 97643). Quanti sono i numeri decrescenti di $n = 6$ cifre in cui la terza cifra non è un 5?

SOL: I numeri decrescenti sono $\binom{10}{6} = 210$ in quanto basta che prendo 6 cifre diverse e poi le ordino (lo 0 si può prendere, tanto verrà comunque messo alla fine). Quelli in qui la terza cifra è un 5 sono $\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} = 60$ in quanto devo prendere due cifre maggiori di 5 e 3 cifre minori di 5. Sottraendo, abbiamo $210 - 60 = 150$ numeri in cui la terza cifra non è il 5.

(se $n = 7$ la risposta è 90)

Domanda n. 4: [27] Si consideri un tipico mazzo di 52 carte da ramino (4 semi e valori 2,...,10,J,Q,K,A). Diciamo che un *insieme* di 5 carte realizza una scala se tali carte possono essere messe in ordine consecutivo, come ad esempio (3,4,5,6,7) oppure (A,2,3,4,5), fino a (10,J,Q,K,A) che è la scala più alta. (si noti che l'asso A può assumere sia il valore "1" che "14" in una scala, considerando J=11, Q=12, K=13). Supponiamo ora che dal mazzo vengano tolti due assi e un jack. Quanti sono gli insiemi di 5 carte nel mazzo restante che realizzano una scala?

SOL: La scala (A,2,3,4,5) può essere fatta in $2 \times 4^4 = 512$ modi. Le 5 scale da (2,3,4,5,6) a (6,7,8,9,10) in $4^5 = 1024$ modi ciascuna, per un totale di 5120 modi. Le 3 scale (7,8,9,10,J), (8,9,10,J,Q) e (9,10,J,Q,K) in $3 \times 4^4 = 768$ modi ciascuna per un totale di 2304 modi. La scala (10,J,Q,K,A) in $2 \times 3 \times 4^3 = 384$ modi. In concusione si hanno $512 + 5120 + 576 + 384 = 8320$ modi.