Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 7 febbraio 2019

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, p_{max}, p_{min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi t, p_{max}, p_{min} in modo che $p_{max} = t$, $realmin = 1/16$ e gli elementi siano 129. Calcola $realmax$.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Siano $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$. Scrivi x e y in base 2.
   - Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
   - Determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Calcola $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = 2^{\frac{1+2x}{1-x^4}}$ al variare di x.
   - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
   - Supponendo che l'esponenziale sia calcolato un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina, studia la stabilità dell'algoritmo che valuta la funzione f.
3. Sia $f(x) = e^{-2x^3+9x^2-1} - 1$.
   - Determina una funzione F la cui valutazione non utilizza la funzione esponenziale in modo che $F(x) = 0$ sia equivalente al problema $f(x) = 0$. Disegna il grafico di F e localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$.
   - Determina il massimo intervallo di convergenza ad α del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Determina il massimo intervallo di convergenza a γ del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Applica il metodo a pendenza costante m per la funzione F.
   - Studia la convergenza del metodo ad α. Proponi un valore di m e un valore x_0 per cui il metodo sia convergente in maniera monotona. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza del metodo a β. Proponi un valore di m e un valore x_0 per cui il metodo sia convergente in maniera monotona. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Per quali valori di α, β il sistema $Ax = b$ ha soluzione unica?
   - Per quali valori di α, β non esiste la fattorizzazione LU di A? Giustifica la risposta.
   - Sia $\beta = -\frac{1}{3}$. Determina un valore di$\alpha > 0$ tale che $||A||_1 = \frac{5}{3}$ e calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perché si applica?
   - Per quali valori di α si applica la strategia del pivot parziale al primo passo?
   - Sia $\alpha = \frac{1}{2}$. Determina $\beta > 0$ tale che $||A||_\infty = 5$ e calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo che calcola la soluzione x di $Ux = b$ con U triangolare superiore di dimensione n e analizza il costo computazionale.
5. Sia $f(x) = \log_4(x)$. Dati i punti $P_0 = (\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$,$P_1 = (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x \in [\frac{1}{4}, 4]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l'ulteriore punto $P_3 = (2, f(2))$, determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati.
6.
   - Sia data una successione convergente. Definisci il concetto di ordine di convergenza.
   - Dato un metodo di iterazione funzionale per il problema $f(x) = 0$. Proponi un criterio d'arresto e deriva la stima dell'errore.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo efficiente per calcolare il valore del polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato e analizza la complessità computazionale.
   - Modifica la pseudocodifica in modo da calcolare anche $p_n'(x)$.
   - Proponi una variante dell'algoritmo per valutare in maniera efficiente in un punto x il polinomio interpolante di Newton.
   - Scrivi la pseudocodifica per il metodo di bisezione e proponi un criterio di arresto.