Soluzione Test MD1 - 10/07/2018

Commenti sullo svolgimento

Alcuni voti sono stati dati in deroga a quella che era la procedura che vi avevo delineato, in quanto:

1. A chi ha sbagliato solo di un'unità una risposta (8018 vs 8019) ho praticamente considerato buono l'esercizio a meno che non avesse fatto delle grosse bestialità altrove
2. Chi ha fatto errori macroscopici (soprattutto nel problema sul grafo non-hamiltoniano) avrebbe fatto meglio a non scrivere nulla. Scripta manent e non posso ignorare lacune enormi. Questo può aver causato la dimiuzione del voto atteso
3. Stessa cosa per chi ha risolto l'esercizio più difficile con un metodo enumerativo anzichè generale (ossia, in pratica, contando tutti i casi "a mano"). Una soluzione di questo tipo non può conseguire il punteggio pieno, come vi avevo più volte spiegato

Prima di venire, eventualmente, a chiedere delucidazioni su un voto *studiate bene e capite* le soluzioni e ciò che avete sbagliato e solo allora potremo discutere l'elaborato.

Soluzioni

Domanda n. 1: Facile (pt: 19) Un numero intero è *palindromo* se letto da sinistra a destra è lo stesso che da destra a sinistra, altrimenti è *non-palindromo*. Sia $S = \{1000, 1001, \ldots, 9999\}$. Quanti dei numeri non-palindromi in S hanno la seconda cifra diversa da 0?

Risp:

Il numero ha 4 cifre. Le prime due cifre si possono prendere in $9 \times 9 = 81$ modi in quanto sia la prima che la seconda devono essere diverse da 0. Una volta presa la prima metà del numero, la seconda può essere presa in tutti i modi tranne uno (quello uguale alla prima metà rovesciata), ossia in 99 modi. In totale si hanno

$$81 \times 99 = 8019$$

numeri non palindromi in S con la seconda cifra $\neq 0$.

Domanda n. 2: Facile (pt: 19 + 2) Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quante delle funzioni di A in B sono non-iniettive?

BONUS 2pt: Quante delle funzioni di A in B sono biiettive?

Risp:

Supponiamo $A = \{1, \ldots, n\}$ e $B = \{1, \ldots, m\}$, con $m \geq n$. Contiamo le funzioni non-iniettive come "tutte meno quelle iniettive".

Tutte le funzioni sono m^n. Le funzioni iniettive sono $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$.

Nel caso specifico otteniamo $625 - 120 = 505$ funzioni non iniettive.

La risposta al bonus è 0 funzioni biiettive, in quanto $|A| \neq |B|$. Nei casi in cui $n = m$ le funzioni biiettive sarebbero $n!$.

Domanda n. 3: Media (pt: 26) Quante sono le soluzioni intere non-negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

tali che $x_1 = \min\{x_1, x_2, x_3\}$?

Risp:

Siccome $x_1 = \min\{x_1, x_2, x_3\}$, esistono variabili non-negative y_2 e y_3 tali che $x_2 = x_1 + y_2$ e $x_3 = x_1 + y_3$. L'equazione diventa perciò

$$3x_1 + y_2 + y_3 = 100$$

Fissato x_1, l'equazione

$$y_2 + y_3 = 100 - 3x_1$$

ha $100 - 3x_1 + 1$ soluzioni. Siccome x_1 può valere come minimo 0 e come massimo 33, il numero totale delle soluzioni al nostro problema è

$$\sum_{x_1=0}^{33}(101 - 3x_1) = 34 \times 101 - 3\sum_{x_1=0}^{33} x_1 = 34 \times 101 - 3\frac{33 \times 34}{2} = 17(202 - 99) = 1751$$

Domanda n. 3: Media (pt: 24) Si disegni un grafo 4-regolare non-hamiltoniano, descrivendo la ragione per la quale il grafo trovato non è hamiltoniano.

Risp: Questo è il problema sul quale sono state fatti più errori (anche macroscopici). La prima cosa da capire è cosa vuol dire 4-regolare osssia "ogni nodo ha grado 4" e NON "il grafo ha 4 nodi"!

Dopodichè, visto che non era richiesto che il grafo fosse connesso, la soluzione più semplice era prendere G con 2 componenti connesse, ognuna delle quali è una clique di 5 nodi.

Chi non avesse visto questa scappatoia, avrebbe cercato un grafo *connesso*, 4-regolare e non-hamiltoniano. Un tale grafo può essere costruito in questo modo: si prendano 4 grafi 4-regolari qualsiasi $G_1, \ldots, G_4$ (ad esempio, 4 cliques di 5 nodi ciascuna). Su ognuno di questi 4 grafi si prenda un arco. Chiamiamo tali archi i_1j_1, i_2j_2, i_3j_3 e i_4j_4. Si spezzi ognuno di questi archi introducendo un nodo a_k a metà fra i_k e j_k. Si noti che ora a_k ha grado 2 $\forall k$. Si inseriscano infine archi a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 e a_4a_1. Si noti che a_k ora ha grado 4 per ogni k e il grafo G così ottenuto è connesso e 4-regolare.

Il grafo G è non-hamiltoniano, in quanto, per ogni k, per visitare i nodi di G_k bisogna entrare dal nodo a_k, ma poi bisogna ancora passare dal nodo a_k per uscire da G_k e andare verso un altro G_j e quindi il circuito passa per a_k più di una volta.

Domanda n. 4: Difficile (pt: 30) Nel piano cartesiano definiamo una "croce", di centro (x, y) e lati $a > 0$ e $b > 0$, un simbolo formato da due segmenti perpendicolari che si incrociano nel punto (x, y): il segmento verticale va da $V_1 = (x, y - a)$ a $V_2 = (x, y + a)$. Quello orizzontale va da $H_1 = (x - b, y)$ a $H_2 = (x + b, y)$. Chiamiamo i punti V_1, V_2, H_1, H_2 gli *estremi* della croce.

Si consideri ora la griglia $G_{n,m}$ dei punti a coordinate intere dati da

$$G_{n,m} = \{(x, y) : x \in \{1, \ldots, n\}, y \in \{1, \ldots, m\}\}$$

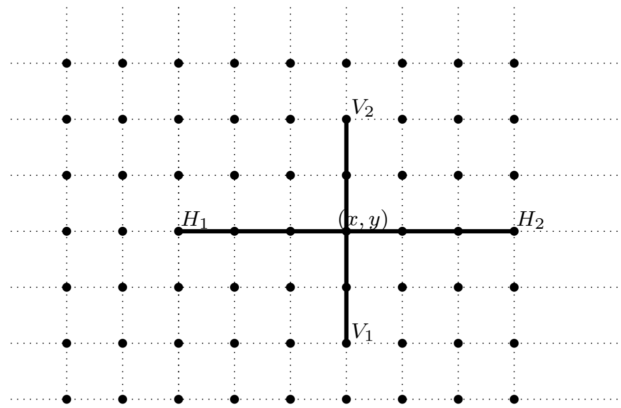

Figure 1: Esempio di una croce valida per $n = 9$, $m = 7$, $a = 2$, $b = 3$

individuati dall'intersezione di n linee verticali parallele con m orizzontali parallele (si veda la figura 1).

Quante sono le croci i cui estremi sono tutti contenuti in $G_{11,11}$?

(Di questo problema esiste sia una soluzione semplice che una più complessa, per la quale sono richiesti molti calcoli. Chi intraprende questa strada faccia la massima attenzione nei calcoli visto che per conseguire il voto, il risultato deve essere numericamente corretto.)

Risp:

Generalizziamo al caso G_{nn} con n dispari.

Siccome gli estremi devono essere in G, è facile osservare che anche il centro deve essere in G e che a e b devono essere interi. Definiamo $\bar{n} := (n-1)/2$. Avremo che $1 \leq a, b \leq \bar{n}$.

Soluzione complessa: Possiamo quindi contare tutte le croci di lati a e b al variare di a, b.

$$\text{num. croci totale} = \sum_{a=1}^{\bar{n}} \sum_{b=1}^{\bar{n}} (\text{n. di croci di lato } (a, b))$$

Fissati a e b, il centro di una croce ha coordinate (x, y) con $a+1 \leq x \leq n-a$ e $b+1 \leq y \leq n-b$. Si tratta di un rettangolo di punti la cui base ha $n - a - (a+1) + 1 = n - 2a$ punti, e la cui altezza ha $n - 2b$ punti. Quindi il numero di centri possibili per a, b è

$$(n-2a) \times (n-2b) = n^2 - 2n(a+b) + 4ab$$

Quindi il numero totale di croci è

$$\sum_{a=1}^{\bar{n}} \sum_{b=1}^{\bar{n}} (n^2 - 2n(a+b) + 4ab) = n^2\bar{n}^2 - 2n \sum_{a=1}^{\bar{n}} \sum_{b=1}^{\bar{n}} (a+b) + 4 \sum_{a=1}^{\bar{n}} \sum_{b=1}^{\bar{n}} ab =$$

$$= n^2\bar{n}^2 - 4n\bar{n}\frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2} + 4\left(\frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2}\right)^2 = n^2\bar{n}^2 - 2n\bar{n}^2(\bar{n}+1) + \bar{n}^2(\bar{n}+1)^2 =$$

(ricordando che $n = 2\bar{n} + 1$),

$$= \bar{n}^2[(2\bar{n}+1)^2 - 4\bar{n}(\bar{n}+1) - 2(\bar{n}+1) + (\bar{n}+1)^2] = \bar{n}[4\bar{n}^2 + 4\bar{n} + 1 - 4\bar{n}^2 - 4\bar{n} - 2\bar{n} - 2 + \bar{n}^2 + 1 + 2\bar{n}] = \bar{n}^4$$

Nel caso specifico, essendo $n = 11$ e quindi $\bar{n} = 5$ si hanno $5^4 = 625$ croci.

Soluzione semplice: Per individuare una croce è necessario e sufficiente individuare un rettangolo la cui base e altezza siano entrambe pari (e poi si porrà il centro della croce nel mezzo). Quindi si tratta di scegliere 2 rette orizzontali h_1 e h_2 e due verticali v_1 e v_2 e intersecarle, ma la distanza tra le rette deve essere pari. Quindi, ragionando su h_1, h_2 (lo stesso vale per v_1, v_2), o le prendiamo entrambe di coordinate dispari (e ci sono $\bar{n}+1$ coordinate dispari, i.e. $\{1, 3, \dots n\}$) o entrambe di coordinate pari (e ci sono $\bar{n}$ coordinate pari: $\{2, 4, \dots, n-1\}$). Quindi le due rette orizzontali si possono prendere in

$$\binom{\bar{n}+1}{2} + \binom{\bar{n}}{2} = \frac{(\bar{n}+1)\bar{n} + \bar{n}(\bar{n}-1)}{2} = \bar{n}^2$$

modi.

Siccome ci sono altrettanti modi per prendere le due rette verticali, i rettangoli cercati sono

$$\bar{n}^2 \times \bar{n}^2 = \bar{n}^4$$