ESAME 29.04.21

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$

- disegna il grafico e determina le radici α, β con $\alpha < \beta$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{2}{3} \nearrow \text{pt. min} \\ -2 \end{cases}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{8}^{4}}{3^3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4$

$= \frac{4}{27} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4$

$= \frac{4 + 12 - 36 - 4 \cdot 27}{27} < 0$

$f(-2) = -\cancel{2^2} + \cancel{4} + 4 - 4$

$= 0 \Rightarrow -2$ è doppia radice

$f'(x)$ >0 se $x < -2 \lor x > \frac{2}{3}$
<0 se $-2 < x < \frac{2}{3}$
$=0$ se $x = -2 \lor x = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$

$f''(x) = 3x + 2$

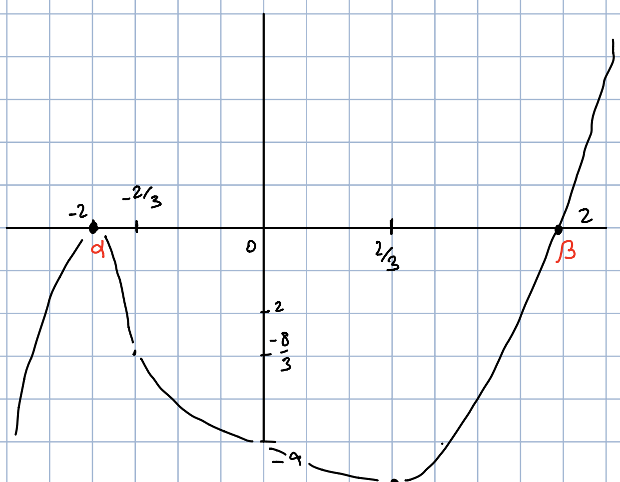
$f''(x)$ $=0$ se $x = -\frac{2}{3}$
>0 se $x > -\frac{2}{3}$
<0 se $x < -\frac{2}{3}$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{8}^{4}}{27}\right) + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4$

$= -\frac{4}{27} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4 < 0$

$= \frac{-4 + 12 - 36 - 27 \cdot 4}{27}$

$f(0) = -4$



per trovare β: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4 = \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - 4x - 2) \Rightarrow \ldots$

$= (x+2)^2(x-2) \cdot \frac{1}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$

- studia la CONVERGENZA ad α e β con NEWTON $\qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}$

uso TEO: $J_\alpha = [\alpha, \alpha + r]$ (o $[\alpha - r, \alpha]$), $f(x) \cdot f''(x) > 0 \ \forall x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$, $f'(x) \neq 0$ $\Rightarrow \forall x_0 \in J_\alpha$ il metodo di Newton converge in modo MONOTONO

in $]-\infty, -2[$ $\ f \cdot f'' > 0 \Rightarrow$ converge in modo LINEARE $p = 1$ ← perché RADICE DOPPIA

in $]-2, -2/3[$ $\ f \cdot f'' > 0 \Rightarrow$ " "

in $]-2/3, 2/3[$ $\ f \cdot f'' < 0 \Rightarrow$ all'iteraz. successiva ricade in $]-\infty; -2/3[$

in $]2/3, 2[$ $\ f \cdot f'' < 0 \Rightarrow$ all'iteraz. successiva ricade in $[2/3, +\infty[$

in $]2, +\infty[$ $\ f \cdot f'' > 0 \Rightarrow$ converge in modo QUADRATICO

- considera x_0: $\quad x_0 = -3 \to$ converge e tende a α con ordine $p = 1$

$x_0 = -1 \Rightarrow$ " " " $p = 1$

$x_0 = -2/3 \to$ converge e tende a α con ordine $p = 1$

$x_0 = 3 \to$ converge e tende a β con ordine $p = 2$

$x_0 = 1 \to$ converge " " $p = 2$

$x_0 = 2/3 \to$ non converge

- sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g

$g(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow g(-2) = -2 - \frac{0}{m} = -2$ ok

$\beta = 2 \Rightarrow g(2) = 2 - 0 = 2$ ok

considera il metodo iterativo: $x_{k+1} = g(x_k)$ $k = 0, 1, \ldots$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$$

- Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente (MONOTONA) a β con fattore asintotico $= 1/5$

$\beta = 2$

$\frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} + \cancel{4 \cdot 2}^{2} = 6 + 2 = 8$

Io devo verificare che $g'(\beta) = 1/5 \Rightarrow \frac{1}{5} = 1 - \frac{f'(\beta)}{m} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{f'(2)}{m} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{m} \Rightarrow m = \frac{5}{\cancel{4}_1} \cdot \cancel{8}^{2} = 10$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$

- La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente?

devo studiare $g''(x) \Rightarrow g''(x) = -\frac{f''(x)}{m} = -\frac{3x-2}{10}$

g'' è $< 0 \Rightarrow -3x - 2 < 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \Rightarrow g'$ è DECRESCENTE in $x > -\frac{2}{3}$

Ora nell'intervallo $[\overset{x_0}{1}, \overset{\beta}{2}]$ g' è DECRESCENTE e $g'(1) = 1 - \frac{\frac{3}{2}}{10} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} < 1$

$\max\{g'(1), g'(2)\}$

quindi $0 < g'(x) < 1 \quad \forall x \in [1,2]$ e con $x_0 = 1$ CONVERGE a β

ESAME 22.01.18

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad 3x^2 - 6x > 0$

$3x(x-2) > 0 \qquad x < 0 \vee x > 2$

$f'(x) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 2$

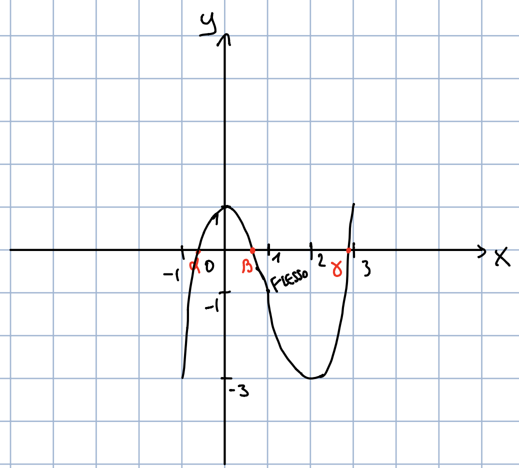
$< 0 \rightarrow 0 < x < 2$

$= 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2 \rightarrow$ 0 PT MAX, 2 PT MIN

$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$f(0) = 1$

$f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$



$f''(x) = 6x - 6 \qquad f''(x) > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow$ 1 PT FLESSO

$< 0 \rightarrow x < 1$

$= 0 \rightarrow x = 1$

$\alpha \in]-\infty; 0[\ , \ \beta \in]0, 1[\ , \ \gamma \in]2, +\infty[$

volendo localizzare meglio α e γ: $f(-1) = -3 \Rightarrow \alpha \in]-1,0[$

$f(3) = 1 \Rightarrow \gamma \in]2,3[$

- studia la convergenza ad α con NEWTON.

Dato che α, β, γ sono radici semplici $\Rightarrow$ studio $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$\hookrightarrow$ ovvero $f'(\alpha) \neq 0$, $f'(\beta) \neq 0$, $f'(\gamma) \neq 0$

$g'(x) = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$

dato che sono radici $g'(\alpha) = 0$

$\rightarrow$ converge SUPERLINEARMENTE

ORDINE DI CONVERGENZA: allora studio $g''(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ e guardo se $f''(\alpha) \neq 0$ o $f''(\alpha) = 0$

$f''(\alpha) \neq 0 \rightarrow$ QUADRATICO

$f''(\alpha) = 0 \rightarrow$ maggiore di QUADRATICO, es. CUBICA

in questo caso $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ QUADRATICO

e con il teo $(f \cdot f'' > 0)$ da $]-\infty; \alpha[$ converge in maniera monotona

da $]\alpha; 0[$ al passo successivo finisce in $]-\infty; \alpha[$

- la successione con $x_0 = -0{,}5$ converge ad α? $\rightarrow$ sì converge con ordine quadratico perché α radice semplice in modo MONOTONO a partire da x_1

$\hookrightarrow$ (perché $f \cdot f'' > 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$)

- la successione con $x_0 = 1$ converge a β? $\rightarrow$ sì, dopo un passo ricade in $]0,1[$ e converge quadraticamente in maniera MONOTONA

- studia la convergenza a γ con Newton.

γ è radice semplice $\Rightarrow f''(\gamma) \neq 0 \rightarrow$ conv. QUADRATICA

la successione con $x_0 = 3$ converge a γ? sì con ordine quadratico in maniera MONOTONA

- Sia $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$. Verifica che α, β, γ sono punti fissi

$g(\alpha) = 3 - \dfrac{1}{\alpha^2} \rightarrow$ non conosciamo $\alpha \Rightarrow g(x) = x$ e devo ottenere $f(x)$

$\Rightarrow x = 3 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ ok

- Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo

$x_{k+1} = g(x_k)$.

$x^{-2} = -2x^{-3}$

$g(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ $\quad g'(x) = +\frac{2}{x^3}$

quindi devo sapere che $|g'(x)| < 1$ e la velocità di conv. è $|g'(x)|$

$\frac{2}{|x^3|} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq |x^3| \Rightarrow x = \pm\sqrt[3]{2}$ $\quad$ se $x = \pm\sqrt[3]{2}$ allora $g'(x) = 1 \rightarrow$ SUBLINEARE

$x < \pm\sqrt[3]{2}$ allora è LINEARE

ESAME 12.02.18

$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad f'(x) = -x^2 + 2x$
$\qquad x(-x+2)$

$f'(x) > 0$ se $x < 0 \vee x > 2$
< 0 se $0 < x < 2$
$= 0$ se $x = 0$ $x = 2$

$f(0) = -1/3$

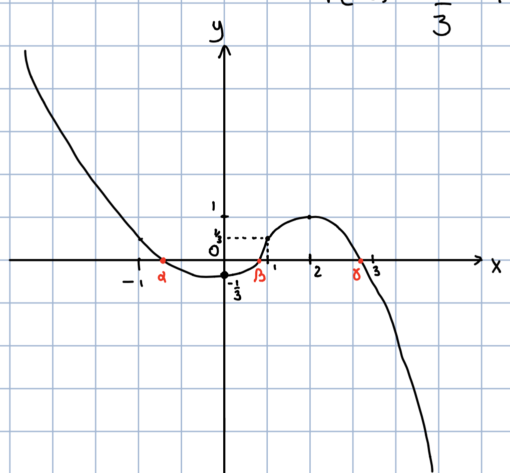
$\Rightarrow$ 0 pt. MIN
2 pt MAX

$f(2) = -\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 4 - 3 = 1$

$f(1) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad f''(x) = -2x + 2$ $\quad f''(x) > 0$ se $x < 1$
< 0 se $x > 1$ $\Rightarrow$ 1 pt. FLESSO
$= 0$ se $x = 1$

asse $y = -1/3$

$f(3) = -\cancel{9} + \cancel{9} - \frac{1}{3} = -1/3$
$f(-2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + 4$ $\quad f(-1) = \cancel{\frac{1}{3}} + 1 - \cancel{\frac{1}{3}}$



metodo di Newton converge superlinearmente per radici semplici

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $\quad g'(x) = \frac{f \cdot f''}{f'(x)^2}$ $\quad g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$

$\alpha \in]-1, 0[$ $\quad \beta \in]0, 1[$ $\quad \gamma \in]2, 3[$

se $x_0 \in]-\infty, \alpha[$ converge ad α perché $f \cdot f'' > 0$

$x_0 \in]\alpha, 0[$ converge ad α all'iteraz. x_1 perché va in $]-\infty, \alpha[$

$x_0 \in]\beta, 1[$ converge a β perché $f \cdot f'' > 0$

CONV. QUADRATICA perché rad. semplici e $f''(\alpha), f''(\beta), f''(\gamma) \neq 0$

$x_0 \in]0, \beta[$ converge a β all'iteraz. x_1 perché va in $]\beta, 1[$

$x_0 \in]\gamma, +\infty[$ converge a γ perché $f \cdot f'' > 0$

$x_0 \in]2, \gamma[$ converge a γ all'iteraz. x_1 perché va in $]\gamma, +\infty[$

- convergenza ad α: $f'(\alpha) \neq 0$ $f(\alpha) \cdot f''(\alpha) = 0$ $\Rightarrow$ conv. quadratica perché $f''(\alpha) \neq 0$

se $x_0 = -0{,}5$ converge ad α? si, ricade poi nell'intervallo $]-1, \alpha[$ e converge monotono quadraticamente perche $f''(\alpha) \neq 0$

Se $x_0 = 1$ converge a β? si ricade nell'intervallo $]0, \beta[$ e converge MONOTONICAMENTE quadraticamente perché $f''(\beta) \neq 0$

- convergenza a γ: $f'(\gamma) \neq 0$ $f(\gamma) \cdot f''(\gamma) = 0$ $\Rightarrow$ $f''(\gamma) \neq 0$ ed è rad. semplice $\to$ conv. quadratica monotona

se $x_0 = 3$ converge a γ quadraticamente in maniera monotona

- $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$. verifica che α, β, γ sono punti fissi

verifico che $g(x) = x \to f(x)$ $\quad 3 - \dfrac{1}{x^2} = x \Rightarrow 3x^2 - 1 - x^3 = 0 \Rightarrow -\dfrac{x^3}{3} + x^2 - \dfrac{1}{3} = 0$ ok

studia la convergenza ad α, β, γ del metodo it. $x_{k+1} = g(x_k)$ $k = 0, 1, \dots$

Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza? $g'(x) = \dfrac{2}{x^3}$ $\quad g''(x) = \dfrac{-6}{x^4}$

$|g'(x)| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{2}{x^3}\right| < 1 \qquad x = \pm\sqrt[3]{2}$

se $x_0 = \pm\sqrt[3]{2}$ allora converge lentamente (sublineare)
sennò converge linearmente

ESAME 20.1.20

- $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$ $_{1}x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24 \cdot 4}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6}$ $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, -2

$f'(x) > 0 \rightarrow x < -2 \lor x > 4/3$

$< 0 \rightarrow -2 < x < 4/3$

$= 0 \rightarrow x = -2 \lor x = 4/3$

$f(0) = -12$

$f(-2) = -8 + 4 + 16 - 12 = 0 \rightarrow -2$ è radice e PT MAX

$f(4/3) = \frac{4^3}{3^3} + \frac{16}{9} - 8 \cdot \frac{4}{3} - 12$

$= \frac{64}{27} + \frac{16}{9} - \frac{32}{3} - 12 \Rightarrow < 0 \rightarrow 4/3$ è PT MIN

$f''(x) = 6x + 2$

$f''(x) > 0 \rightarrow x > -1/3$

$< 0 \rightarrow x < -1/3$

$= 0 \rightarrow x = -1/3$

$x = -1/3$ pt. flesso

$f(-1/3) = \frac{-1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{8}{3} - 12$

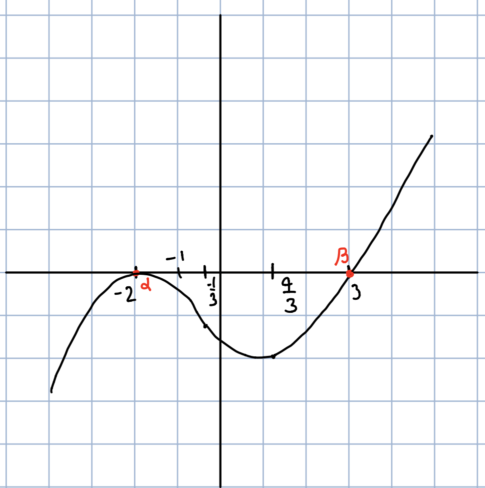
$= \frac{-1 + 3 - 72 - 324}{27} < 0$

ruffini

	+1	+1	-8	-12
-2		-2	+2	+12
	1	-1	-6	0

$(x-2)(x^2 - x - 6) = 0$ $_{1}x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ 3, -2

$\alpha = -2$ $\beta = 3$



- studia la convergenza ad α con Newton.

in $]-\infty, -2[\rightarrow f \cdot f'' > 0$ e α è RAD. MULTIPLA $\rightarrow$ conv. monotona lineare

in $]-2, -1/3[\rightarrow f \cdot f'' > 0$ " " "

$p = 1$ perché rad multipla

$\ell = |g'(\alpha)| = 1/2$

$= 1 - \frac{1}{\mu} = 1/2$

molteplicità $\mu = 2$

se $x_0 = -1$ allora converge ad α con $p = 1$ e $\ell = 1/2$

- studia la convergenza a β con Newton

in $]3,+\infty[$ $f \cdot f''>0$ e dato che è rad. semplice è conv. superlineare, $p=2$ perché $f''(\beta)\neq 0$

se $x_0=2$ all'iterata x_1 si ritrova in $]3,+\infty[$ e " "

- Sia $g(x)=x-\frac{f(x)}{m}$. verifica che α e β sono punti fissi di g.

verifico: $g(\alpha)=\alpha \Rightarrow \alpha-\frac{\overset{0}{f(\alpha)}}{m}=\alpha$ ok

$g(\beta)=\beta \Rightarrow \beta-\frac{\overset{0}{f(\beta)}}{m}=\beta$ ok

- se $m=-16$ studia la convergenza ad α del metodo it. $x_{k+1}=g(x_k)$ con $x_0=-1$

$g(x)=x+\frac{f(x)}{16}$ $\quad g'(x)=1+\frac{f'(x)}{16}=1+\frac{(3x^2+2x-8)}{16}$ $\quad g''(x)=\frac{f''(x)}{16}=\frac{6x+2}{16}$

TEO: $I_\alpha=[\alpha+r,\alpha-r]$ tale che $|g'(x)|<1$ $\forall x\in I_\alpha (\neq\alpha)$ allora preso $x_0\in I_\alpha \Rightarrow x_k\to\alpha$ $k\to+\infty$

$g'(\alpha)=1+\frac{\overset{0}{f'(\alpha)}}{16}=1$ quindi la convergenza è SUBLINEARE

se $x_0=-1$??

- Determina m in modo che $x_{k+1}=g(x_k)$ sia localmente convergente a β con fattore di riduz. $C=1/4$

$|g'(x)|=1/4 \Rightarrow 1+\frac{\overset{25}{f'(\beta)}}{m}=1/4 \Rightarrow 1+\frac{25}{m}=1/4 \Rightarrow \frac{25}{m}=-\frac{3}{4} \Rightarrow 25\cdot\left(\frac{4}{3}\right)=m \Rightarrow m=\frac{100}{3}$