Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 9 luglio 2019`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\min}, e_{\max})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max} = e_{\min} + 2$, $realmin = 1/32$ e $realmax = 62$.
   - Quanti sono i numeri di $\mathcal{F}$?
   - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a $\mathcal{F}$?
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Sia $x = (1.\overline{0111})_2$ e $y = (11.\overline{0111})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ al variare di x nel campo di esistenza della funzione.
   - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
   - Assumi che $\sqrt{x}$ sia ottenuto con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina. Studia la stabilità dell'algoritmo al variare di x..
3. Sia $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 4$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -1.5$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza a β del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g.
   - Sia $m = 32$. Studia la convergenza ad α del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = -1.5$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Sia $m = -32$. Studia la convergenza a β del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
   - Per quale scelta del parametro α il sistema $Ax = b$ ha unica soluzione?
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la seconda riga di A?
   - Sia $\alpha = 1$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Nota la fattorizzazione $PA = LU$ con quali algoritmi risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$? Qual' è il costo computazionale?
5. Sia $f(x) = 3\log_2(x^2)$. Dati i punti $P_0 = (1/4, f(1/4))$, $P_1 = (1/2, f(1/2))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x\in[1/4,1]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l' ulteriore punto $P_3 = (2, f(2))$, determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati.
6. Si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$..
   - Scrivi la pseudocodifica del metodo di eliminazione di Gauss senza pivot parziale per calcolare x.
   - Modifica la pseudocodifica del metodo di eliminazione di Gauss per implementare la tecnica del pivot parziale in maniera efficiente.
   - Proponi un algoritmo efficiente per calcolare un generico polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato ed analizza la sua complessità computazionale.