Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 12 febbraio 2018`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $t = e_{\min} + 1$, $realmin = 1/32$ e $realmax = 62$.
   - Quanti sono i numeri di $\mathcal{F}$?
   - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a $\mathcal{F}$? Calcola gli elementi positivi di $\mathcal{F}$.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Sia $x = (1.\overline{01})_2$ e $y = (10.\overline{01})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10 e calcola gli errori relativi come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$ e calcola e tale che $\frac{\tilde{z}}{2^{e+1}} < realmin < \frac{\tilde{z}}{2^e}$.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \frac{2e^x}{1-x^2}$ al variare di x.
   - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
   - Assumi che e^x sia ottenuto con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina. Studia la stabilità degli algoritmi ottenuti dall' identità $\frac{2e^x}{1-x^2} = e^x(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$.
3. Sia $f(x) = \frac{-x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{3}$.
   - Disegna il grafico di f. Localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -0.5$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza a γ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 3$ è convergente a γ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Sia $g(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$. Verifica che α, β, γ sono punti fissi di g.
   - Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Proponi e analizza un criterio d'arresto.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
   - Calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Per quale scelta del parametri α il sistema $Ax = b$ ha unica soluzione?
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la terza riga di A?
   - Sia $\alpha = -3$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Nota la fattorizzazione $PA = LU$ con quali algoritmi risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$? Qual' è il costo computazioanale?
5. Sia $f(x) = 2\log_2(x)$. Dati i punti $P_0 = (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, $P_1 = (1, f(1))$, $P_2 = (2, f(2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x\in[0.5,2]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l' ulteriore punto $P_3 = (4, f(4))$, determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio $r$di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati.

   Si vuole risolvere $Ax = b$..
6.
   - Scrivi la pseudocodifica del metodo di eliminazione di Gauss senza pivot parziale per calcolare x.
   - Modifica la pseudocodifica del metodo di eliminazione di Gauss per implementare la tecnica del pivot parziale in maniera efficiente.
   - Proponi un algoritmo per calcolare x quando A è triangolare superiore e scrivi la sua pseudocodifica.