Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 9 settembre 2020`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $realmin = 1/16$, $e_{\max} = t$, e $realmax/u = 56$
   - Siano dati $x = (1.\overline{101})_2$ e $y = (10.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero e tale che $\tilde{z} \cdot 2^e = realmin$. Qual è il risultato di $realmax - \tilde{z}$? Giustifica la risposta.

2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$ con $f(x) = e^{g(x)}$, g funzione reale.
   - Scrivi il numero di condizionamento di f in funzione di quello di g. Sia $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Studia il condizionamento della funzione $f(x)$ con x che varia nel campo di esistenza di f.
   - Supponi che le funzioni $\exp(x), \sqrt{x}$ forniscano delle approssimazioni i cui errori relativi sono maggiorati dalla precisione di macchina u. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo che calcola la funzione f con x numero di macchina.
   - In presenza di instabilità per alcuni valori di x, proponi una variante stabile dell'algoritmo.

3. Sia $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton a α e β.
   - •• Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -2$
     (b) $x_0 = 0$
     (c) $x_0 = 1/3$
     (d) $x_0 = 5/3$
     (e) $x_0 = 2$
     (f) $x_0 = 3$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

     Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a β con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{5}$. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - ⋆ Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad β con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = 20$. Studia la convergenza locale ad α del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = 0$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & \alpha+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \alpha+1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = -6$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - ⋆ Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Ux = d$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.

5. Sia $f(x) = \log_3(1 + 2x^2)$. Dati i punti $P_0 = (0, f(0))$, $P_1 = (1, f(1))$ e $P_2 = (2, f(2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (-2, f(-2))$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e P_3 nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Si vogliono stimare i parametri r, I_0 della funzione $I(t) = e^{rt} I_0, t \geq 0$ che descrive la crescita del numero degli infetti nello sviluppo di un'epidemia nella fase iniziale. Siano I_k, il numero degli infetti rilevati al tempo $t_k > 0, k = 1, 2, \ldots, N$. Ponendo $I_0 = e^\ell$, scrivi il sistema sovradeterminato da risolvere per determinare r, ℓ. (Suggerimento: scrivi $I(t) = e^{f(t)}$.)