ESAME 21.9.20

5. $f(x) = \log_3(1+2x^2)$

$$P_0 = (-1, f(1)) = (-1,1)$$
$$P_1 = (1, f(1)) = (1,1)$$
$$P_2 = (2, f(2)) = (2,2)$$

– $p(x)$ con polinomio di Newton:

$$\begin{array}{cccc}
x & f(x) & & \\
-1 & 1 & & \\
 & & \frac{1-1}{1+1} = 0 & \\
1 & 1 & & \frac{1-0}{2+1} = \frac{1}{3} \\
 & & \frac{2-1}{2-1} = 1 & \\
2 & 2 & &
\end{array}$$

$$p(x) = 1 + 0 \cdot (x+1) + \frac{1}{3}(x+1)(x-1)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}(x^2-1)$$

– Determina $\tilde{p}(x)$ che interpola i 3 punti e $P_3 = (-2, f(2))$ in Newton:
$\hookrightarrow (-2,2)$

$$\begin{array}{ccccc}
x & f(x) & & & \\
-1 & 1 & & & \\
 & & \frac{1-1}{1+1} = 0 & & \\
1 & 1 & & \frac{1-0}{2+1} = \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{2-1}{2-1} = 1 & & 0 \\
2 & 2 & & \frac{-1}{-2-1} = \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{2-2}{\dots} = 0 & & \\
-2 & 2 & & &
\end{array}$$

$$\tilde{p}(x) = p(x)$$

– Determina il polinomio q di 1° grado di miglior approssimaz. dei quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati

calcolare i coeff. di $q(x) = a + bx$ risolvere il sistema (ho colonne = grado+1 ed elevo n.colonna)

$t_0 = x$, $f(x)$

$$\begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 \\ t_1^0 & t_1^1 \\ t_2^0 & t_2^1 \\ t_3^0 & t_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ e devi trovare a, b

1 2

$$Ax = b \Rightarrow A^t \cdot Ax = A^t \cdot b$$

$$A^t \cdot Ax \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$A^t \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 4a = 6 \\ 10b = 0 \end{array} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \quad b = 0$$

il polinomio di miglior appr. di grado 1 è: $q(x) = \frac{3}{2} + 0 \cdot x = \frac{3}{2}$

se ti chiede $q(x) = a$ allora basta la media tra gli y_i

5. $f(x) = \dfrac{(x^2+2)}{(x^2-2)}$

$P_0 = (-1, f(-1)) = (-1, -3)$
$P_1 = (0, f(0)) = (0, -1)$
$P_2 = (1, f(1)) = (1, -3)$
$P_3 = (3, f(3)) = (3, 11/7)$

- determina il polinomio di Newton:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -3 & & & \\ & & \frac{-1+3}{0+1} = 2 & & \\ 0 & -1 & & \frac{-2-2}{1+1} = -2 & \\ & & \frac{-3+1}{1} = -2 & & \\ 1 & -3 & & & \end{array}$$

$$p(x) = -3 + 2(x+1) - 2(x+1)(x-0)$$

con P_3:

$$\begin{array}{cccccc} -1 & -3 & & & & \\ & & \frac{-1+3}{0+1} = 2 & & & \\ 0 & -1 & & \frac{-2-2}{1+1} = -2 & & \\ & & \frac{-3+1}{1} = -2 & & \frac{\frac{30}{21}+2}{4} = \frac{\cancel{72}\,6}{\cancel{84}\,7} & \\ 1 & -3 & & \frac{\frac{32}{14}+2}{3} = \frac{\cancel{60}\,30}{\cancel{42}\,21} & & \\ & & \frac{\frac{11}{7}+3}{2} = \frac{32}{14} & & & \\ 3 & 11/7 & & & & \end{array}$$

$$\tilde{p}(x) = p(x) + \frac{6}{7}(x+1)(x-0)(x-1)$$

- Determina q di miglior approsimaz. dei 3 punti

$q = a + bx$ $\qquad A^T \cdot Ax = A^T \cdot b$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3a = -7 \Rightarrow a = -7/3$$
$$2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

il polinomio di miglior appr: $q = -\frac{7}{3}$

- Determina r di grado 0 => MEDIA tra $f(x_i) \to \frac{-3-1-3}{3} = -\frac{7}{3}$ $\quad q = -\frac{7}{3}$

- sia p_n il polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ una generica funzione f sufficientemente regolare. Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p_n(x)$ e determina una maggioraz. di $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$

$$E = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (t-t_0)\dots(t-t_n) \leq \frac{\max_{x\in[a,b]}\{f^{n+1}(x)\}}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

lo maggioro
con l'ampiezza dell'intervallo