Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 9 luglio 2018

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, p_{max}, p_{min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi t, p_{max}, p_{min} in modo che $p_{max} = p_{min}$, $realmin = 1/32$ e gli elementi positivi siano 72. Calcola $realmax$.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Sia $x = (0.0\overline{10})_2$ Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
   - Sia $y = (11.\overline{10})_2$. Determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10 e calcola gli errori relativi.
   - Calcola $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati positivi relativi a $\mathcal{F}$?
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente ed il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ al variare di x.
   - Definisci l'errore algoritmico ed il concetto di stabilità.
   - Studia la stabilità dell'algoritmo che calcola la funzione f.
3. Sia $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x + 4$.
   - Disegna il grafico di f e determina le due radici reali α, β con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -1.5$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza a β del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}, m \neq 0$. Verifica che α, β siano punti fissi di g.
   - Sia $m = 16$. Studia la convergenza ad α del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = -1.5$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Sia $m = 32$. Studia la convergenza ad α del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = -1.5$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Sia $m = -4$. Studia la convergenza a β del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente a β?Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Definisci un criterio d'arresto e deriva le stime dell'errore.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \alpha \\ 3 & 2\alpha & -1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
   - Per quale valore di α non esiste la fattorizzazione LU di A? Giustifica la risposta.
   - Determina $\alpha > 0$ tale che $||A||_\infty = 8$ e calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Nota la fattorizzazione $A = LU$ come calcoli il determinante di A?
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Determina $\alpha < 0$ tale che $||A||_\infty = 16$ e calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo che calcola la soluzione x di $Ax = b$ con A triangolare inferiore di dimensione n e analizza il costo computazionale.
5. Sia $f(x) = \log_3(x)$. Dati i punti $P_0 = (\frac{1}{9}, f(\frac{1}{9}))$,$P_1 = (\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x \in [\frac{1}{3}, 3]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l'ulteriore punto $P_3 = (3, f(3))$., determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati.
6.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo efficiente per calcolare il valore del polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato e analizza la complessità computazionale.
   - Scrivi la pseudocodifica per il metodo di bisezione e proponi un criterio di arresto.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo che calcola i coefficienti del polinomio $p_n(x)$ che interpola i punti $x_i, y_i, i = 0, ..., n$ nella forma di Newton.