Prova scritta di Calcolo Scientifico (i fogli senza nome e cognome non saranno corretti)

Udine, 18 luglio 2017

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2,4,p,q)$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Determina p, q in modo che i numeri di $\mathcal{F}$ siano 177 e $realmax = 60$.
   - Sia $x = \frac{1}{5}$. Verifica che $x \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
   - Sia $y = \frac{7}{5}$. Verifica che $y \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Calcola $z = \tilde{x} + 2\tilde{y}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) 2\tilde{y}$.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \frac{(2+x^2)}{(x^2-2)}$.
   - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
   - Studia la stabilità dell' algoritmo che valuta $f(x)$ in un punto x.
   - Studia il condizionamento della funzione $g(x) = \sqrt{f(x)}$ e la stabilità dell'algoritmo che valuta $g(x)$ in un punto x.
3. Sia $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 1$.
   - Disegna il grafico di f. Localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$.
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente a α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza a γ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 4$ è convergente a γ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - La successione ottenuta con $x_0 = \frac{1}{2}$ è convergente? Se convergente, a quale delle tre radici converge? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

   Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{18}$. Verifica che α, β, γ sono punti fissi di g.
   - Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$.
   - La successione ottenuta con $x_0 = \frac{1}{2}$ è convergente? Se convergente, a quale delle tre radici converge? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Definisci il concetto di ordine di convergenza p per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & \alpha \\ \alpha & 2 & -2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to \|A(\alpha)\|_\infty$.
   - Calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Per quale scelta del parametro α il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione?
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la terza riga di A?
   - Sia $\alpha = -5$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Sia $\alpha = 8$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Nota la fattorizzazione LU di A spiega come risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$? Nota la fattorizzazione $PA = LU$ come risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$?
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo efficiente per calcolare in generale la soluzione di $Ux = d$ con U triangolare superiore e analizza il costo computazionale.
5. Sia $f(x) = \frac{(x^2+2)}{(x^2-2)}$.Dati i punti $P_0 = (-1, f(-1))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Dato l'ulteriore punto $P_3 = (3, f(3))$, determina in maniera efficiente il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di grado zero di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
   - Sia p_n il polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ una generica funzione f sufficientemente regolare. Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p_n(x)$ e determina una maggiorazione di $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$.
6.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo efficiente per calcolare un generico polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato e analizza la sua complessità computazionale.
   - Modifica la pseudocodifica al punto precedente in modo da calcolare anche $p_n'(x)$.