MD1 APPELLO GEN 26, 2017

(NB: esistono varie versioni diverse –ma equivalenti– degli esercizi. Viene data la soluzione ad una di esse. Chi avesse ricevuto una versione diversa non dovrebbe aver difficoltà ad apportare le modifiche necessarie e ricostruire la soluzione per la propria versione)

Esercizi

(1) Si calcoli
$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 98^2 + 99^2$$
Soluz: Scriviamo
$$S = \sum_{i=0}^{49}(2i+1)^2 - \sum_{i=1}^{49}(2i)^2$$
Sviluppando si ha
$$= 1 + \sum_{i=1}^{49}\left[(2i)^2 + 1^2 + 4i - (2i)^2\right] = 1 + 49 + 4\sum_{i=1}^{49} i$$
$$= 50 + 4\frac{50 \times 49}{2} = 4950$$

(2) Una strada rettilinea misura 90m. Nella strada parcheggiano delle automobili e delle corriere. Un'automobile occupa 5m, mentre una corriera occupa 15m. Quante combinazioni di automobili e/o corriere si possono disporre in modo da non lasciare alcuno spazio libero?
Soluz: Proponiamo due soluzioni, una *alla Fibonacci*, l'altra combinatoria.

- Metodo 1: Innanzitutto notiamo che tutti i numeri sono multipli di 5m, per cui 5m è l'unità di misura effettiva (il singolo spazio di parcheggio). L'utilitaria occupa uno spazio, la corriera 3 spazi, e abbiamo 18 spazi a disposizione.
  Chiamiamo $V(n)$ il numero di soluzioni possibili quando gli spazi a disposizione sono n. Chiaramente $V(1) = 1$ e $V(2) = 1$ e $V(3) = 2$ (o tre automobili o una corriera). Per $n > 3$ vale la ricorsione:
  $$V(n) = V(n-1) + V(n-3)$$
  In quanto se comincio mettendo un'automobile restano $n-1$ spazi, da riempire in $V(n-1)$ modi, e se comincio con una corriera, ne restano $n-3$ da riempire in $V(n-3)$ modi. Quindi si ha, in sequenza,
  $V(4) = V(3) + V(1) = 2 + 1 = 3$;
  $V(5) = 3 + 1 = 4$,
  $V(6) = 4 + 2 = 6$;
  $V(7) = 6 + 3 = 9$;
  $V(8) = 9 + 4 = 13$;
  $V(9) = 13 + 6 = 19$;
  $V(10) = 19 + 9 = 28$;
  $V(11) = 28 + 13 = 41$;
  $V(12) = 41 + 19 = 60$;
  $V(13) = 60 + 28 = 88$;

$V(14) = 88 + 41 = 129$;
$V(15) = 129 + 60 = 189$;
$V(16) = 189 + 88 = 277$;
$V(17) = 277 + 129 = 406$;
$V(18) = 406 + 189 = 595$
Quindi ci sono 595 soluzioni.

- Metodo 2: Ogni soluzione si compone di c corriere e a automobili, con $3c + a = 18$. Si deduce che c va da 0 a 6. Fissati c, a (tali che $3c + a = 18$, ossia $a = 18 - 3c$) i modi di disporre le corriere e le automobili sono tanti quanti le stringhe di c "C" e a "A", ossia
$$\frac{(c+a)!}{c!\,a!}$$
Quindi, in conclusione, il numero di soluzioni è
$$\sum_{c=0}^{6} \frac{(c+18-3c)!}{c!\,(18-3c)!} = \sum_{c=0}^{6} \frac{(18-2c)!}{c!\,(18-3c)!}$$
$$= \frac{18!}{18!} + \frac{16!}{1!15!} + \frac{14!}{2!12!} + \frac{12!}{3!9!} + \frac{10!}{4!6!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{6!}{6!0!}$$
$$= 1 + 16 + 7 \times 13 + 2 \times 11 \times 10 + 10 \times 3 \times 7 + 8 \times 7 + 1 = 595$$
c.v.d.

(3) Siano A un insieme di 6 elementi e B un insieme di 9 elementi. Quante sono le funzioni non iniettive di A in B?

Soluz: Le funzioni di A in B in totale sono
$$9^6 = 531441$$
Le funzioni iniettive sono
$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$$
in quanto il primo elemento di A ha 9 possibili immagini, il secondo 8, ecc.

Quindi le funzioni non iniettive sono in tutto
$$531441 - 60480 = 470961$$