Soluzione Test MD1 - 29/01/2018

Commenti generali

Il test è andato peggio di quanto mi aspettassi. I voti si sono distribuiti in maniera bimodale, senza troppe vie di mezzo: o tutto (o quasi) giusto, o tutto (o quasi) sbagliato.

Ho cercato di rimediare ai voti bassi guardando allo svolgimento e dando qualche punto a chi, pur sbagliando, aveva seguito il ragionamento corretto in larga parte, magari sbagliando un calcolo.

Mi aspetto che la prossima provetta andrà meglio, magari cercherò di dare degli esercizi un po' più semplici (anche se "semplici" è un concetto relativo, visto che, come dicevo prima, ci sono stati alcuni studenti per i quali questi problemi sono risultati decisamente più semplici che per gli altri).

Ricordate quando vi avevo detto che nei test "ho visto cose che voi umani..."? In questo esame si è aggiunta una perla alla collezione. Alla domanda "Quante delle tre proprietà richieste a una relazione per essere un'equivalenza sono possedute da ρ?" uno studente ha risposto: 8.

E vabbè...

Soluzioni

Domanda n. 1: [**8**] Una signora ha a disposizione 4 cappelli (rosso, verde, nero e blu), 2 foulard (verde e azzurro), 3 giacche (rossa, nera e blu), 4 gonne (nera, blu, bianca e grigia) e 3 paia di scarpe (rosse, nere e marroni). In quanti modi diversi può vestirsi (indossando un capo di ogni tipo) sapendo che

(i) il colore del cappello e quello delle scarpe devono essere diversi AND

(ii) se indossa la gonna grigia, allora la giacca e il cappello non sono entrambi (i.e., contemporaneamente) rossi

Risp:

Siano P_1 la proprietà "non vale (i)" e P_2 la proprietà "non vale (ii)". Noi cerchiamo soluzioni che non possiedono alcuna P_i e quindi tali che valgono sia (i) che (ii).

Se non vale (i) allora "cappello = scarpe" e $|A_1| = 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 48$. (il primo 2 è dovuto al fatto che il colore uguale di scarpe e cappello può essere rosso o nero)

Se non vale (ii) allora "gonna = grigia AND giacca = rosso AND cappello = rosso" e quindi $|A_2| = 2 \times 3 = 6$.

Se non valgono nè (i) nè (ii) allora "gonna = grigia AND giacca = rosso AND cappello = rosso AND scarpe = rosso" e quindi $|A_1 \cap A_2| = 2$.

L'insieme di tutti i modi di vestirsi ha cardinalità $|S| = 4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 = 288$. Per il principio di inclusione/esclusione, le soluzioni del problema sono

$$288 - (48 + 6) + 2 = 236$$

Domanda n. 2: [**4**] Sia $a = (a_1, \ldots, a_9) = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ e sia $S = \{3, 5, 7\}$. Quante sono le sequenze binarie $x = (x_1, \ldots, x_9)$ tali che $x_i \neq a_i$ per almeno un $i \in S$?

Risp: Le sequenze tali che $x_i = a_i$ per ogni $i \in S$ sono $2^{9-3} = 64$. Quindi quelle cercate sono $2^9 - 2^6 = 448$.

Domanda n. 3: [**3**] Sull'insieme $S = \{2, \ldots, 100\}$ si consideri la relazione ρ definita da:

> $a \in S$ è in relazione con $b \in S$ se a e b hanno almeno un divisore proprio in comune (ossia un divisore $\notin \{1, a, b\}$).

Quante delle tre proprietà richieste a una relazione per essere un'equivalenza sono possedute da ρ?

Risp: Una. Vale solo la simmetrica. Riflessiva no, perchè ρ non vale tra un primo e se stesso. Transitiva neanche, e.g. $4 \,\rho\, 6$, e $6 \,\rho\, 9$ ma non vale ρ tra 4 e 9.

Domanda n. 4: [**9**] In una città ci sono degli appezzamenti rettangolari di terreni in vendita. Per ognuno di questi rettangoli, la differenza fra la base b e l'altezza h (espresse in metri, con $b > h$ sempre) è pari a 1. Sapendo che una persona ha comprato 20 terreni, in cui i valori delle basi $b_1, \ldots, b_{20}$, sono numeri naturali consecutivi (i.e., $b_2 = b_1 + 1$, $b_3 = b_2 + 1$, ecc.), e sapendo che il terreno più grande da lui acquistato ha area $2256\, m^2$, a quanto ammonta l'area complessiva dei terreni da lui acquistati?

Risp: L'area di ogni rettangolo è $b(b-1)$. Definiamo

$$V(n) = \sum_{b=1}^{n} b(b-1) = \sum_{b=1}^{n} b^2 - \sum_{b=1}^{n} b = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Abbiamo $2256 = 2^4 \times 3 \times 47$ per cui o b o $b-1$ è multiplo di 47. Essendo che $2^4 \times 3 = 48$ abbiamo $b_{20} = 48$ e $h_{20} = 47$ per il terreno più grande. Il terreno più piccolo ha base $b_1 = b_{20} - 20 + 1 = 29$. La somma delle aree è perciò

$$V(48) - V(28) = (47 \times 48 \times 49 - 27 \times 28 \times 29)/3 = 29540$$

Domanda n. 5: [**11**] Si consideri l'equazione in cui tutte le variabili sono numeri naturali

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

Quante sono le soluzioni dell'equazione in cui *esattamente* tre delle cinque variabili sono dei multipli di 3?

Risp: Calcoliamo il numero S di soluzioni in cui i multipli di 3 sono x_1, x_2 e x_3. Per ogni scelta di tre variabili x_i, x_j e x_k ci saranno altrettante soluzioni in cui i multipli di 3 sono tali variabili, per cui alla fine dovremo moltiplicare S per $\binom{5}{3}$ per avere la risposta. Definiamo nuove variabili naturali y_1, y_2, y_3 tali che $x_i = 3y_i$ per $i = 1, 2, 3$. Inoltre, ragionando modulo 3, otteniamo che $x_4 + x_5$ è congruo a 1 modulo tre, e sappiamo che nè x_4 nè x_5 sono congrui a 3. Quindi sia x_4 che x_5 sono 1 o 2 (modulo 3) e l'unico modo in cui la loro somma è congrua a 1 è che siano entrambi congrui a 2. Quindi possiamo introdurre nuove variabili naturali y_4 e y_5 tali che $x_i = 3y_i + 2$ per $i = 4, 5$. L'equazione iniziale diventa

$$3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2 + 3y_5 + 2 = 100$$

ossia

$$3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 96$$

ossia

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 32$$

Ad ogni soluzione di questa equazione corrisponde una soluzione dell'equazione iniziale, in cui x_1, x_2, x_3 sono multipli di 3 e x_4, x_5 non lo sono. Quindi $S = \binom{32+4}{4} = 58905$ e il numero complessivo di soluzioni al problema iniziale è

$$S \times \binom{5}{2} = 589050$$

Domanda n. 6: [5] Sia A un insieme di 6 elementi. Quante sono le funzioni non invertibili di A in A?

Risp: Se A ha cardinalità k, le funzioni totali sono k^k, quelle invertibili sono $k!$ per cui le non invertibili sono $k^k - k!$. Per $k = 6$ tale valore è 45936.