Zeri di funzione

Rossana Vermiglio

CD Lab CD Lab
Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Università degli Studi di Udine

Gruppo UMI *Modellistica Socio-Epidemiologica*

Esempio: La legge di van der Waals

La legge di van der Waals (1837-1923, Nobel per la Fisica nel 1910)

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT$$

con p pressione del gas, v volume occupato, R costante universale dei gas, T la temperatura a, b costanti relative al gas, descrive meglio lo stato gassoso ad alte pressioni ed in prossimità del punto di ebollizione rispetto alla legge dei gas perfetti

$$pv = RT$$

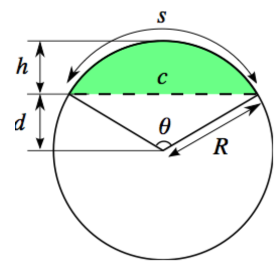
Assegnati i valori di pressione p e di temperatura T, il calcolo del volume v per un particolare gas richiede la ricerca della **radice** dell'equazione

$$\overbrace{(p + \frac{a}{x^2})(x - b) - RT}^{f(x)} = 0$$

→ trovare le RADICI di x^2

Esempio: Area segmento circolare

Consideriamo un cerchio di raggio R. L'area del segmento circolare



è data da

$$\mathcal{A} = \frac{R^2}{2}(\theta - \sin(\theta))$$

Se l'area $\mathcal{A}$ ed il raggio R sono assegnati, per determinare l'angolo corrispondente dobbiamo calcolare la **radice** dell'equazione

$$\mathcal{A} - \frac{R^2}{2}(x - \sin(x)) = 0.$$

Ricerca degli zeri di una funzione

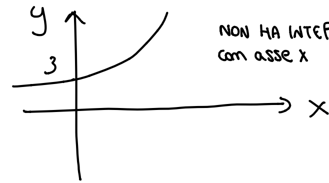
Data una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (scalare) trovare α tale che $f(\alpha)=0$

↳ e anche CONTINUA

α si chiama **radice** dell'equazione $f(x)=0$ oppure **zero** della funzione f

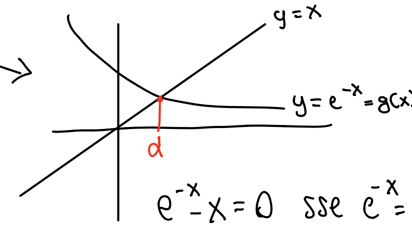
Il problema ha sempre soluzione? La soluzione, se esiste, è unica?

- **no** soluzioni : $f(x)=e^x+2$;



NON HA INTERSEZ. con asse x   f(x)>0 SEMPRE

- **unica** soluzione: $f(x)=e^{-x}-x$;



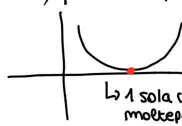
$e^{-x}-x=0$ sse $e^{-x}=x$

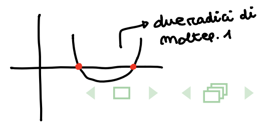
↳ es. di PUNTO FISSO $g(x)=e^{-x}$ infatti $g(\alpha)=\alpha$

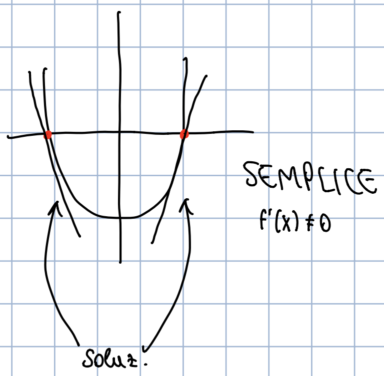
- **due** soluzioni: $f(x)=x^2-1$;
- **tre** soluzioni : $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$;
- ...
- **infinite** soluzioni: $f(x)=\cos(x)$ → il cos(x) si annulla in ∞ punti

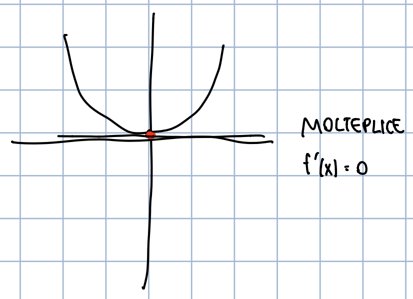
Inoltre le radici possono essere **semplici** (i.e. $f'(\alpha)\neq 0$) o con **molteplicità** $\mu>1$ (i.e. $f^{(k)}(\alpha)=0,\ k=1,\ldots,\mu-1,\ f^{(\mu)}(\alpha)\neq 0$).

↳ ha le DERIVATE CONTINUE






SEMPLICE
f'(x) ≠ 0
Soluz.


MOLTEPLICE
f'(x) = 0

Come primo passo abbiamo bisogno di **localizzare la radice** α a cui siamo interessati, cercando un intervallo $[a, b]$ di ampiezza sufficientemente piccola che la contenga.

Come fare? Lo strumento matematico che ci permette di risolvere questa questione è dato dal seguente teorema:

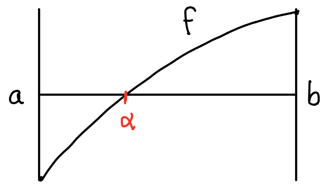
Teorema:

Sia f una funzione **continua** in $[a, b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$ (**segno opposto**), allora f ha almeno uno zero α in (a, b).

↳ segni opposti f(a) e f(b)

Un intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume segno opposto agli estremi si chiama **intervallo di localizzazione** ("bracket").

Come si può ridurre l'ampiezza di tale intervallo per "isolare" la radice con un'accuratezza prefissata?



Dato $[a, b]$ tale che $fa * fb < 0$, $(fa = f(a),\ fb = f(b))$, il **metodo di bisezione** ad ogni passo dimezza l'ampiezza dell' intervallo di localizzazione ed individua la metà che contiene la radice cercata, valutando il segno della funzione, finchè non raggiunge l'accuratezza desiderata tol.

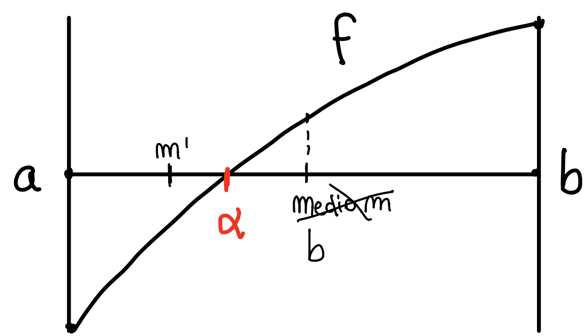
PRECISIONE

```
if sign(fa)==sign(fb)
     'attenzione segno concorde agli estremi';  return
else
     while (|b-a|>tol)
        m=a+(b-a)/2
        fm=f(m)
        if fm==0  return end
        if sign(fa)==sign(fm)
             a=m;    fa=fm
        else
             b=m;    fb=fm
        end
     end
end
```

dichiaro qual è l'ERRORE ASSOLUTO max accettato

finchè l'ampiezza dell'intervallo non soddisfa la precisione TOL

se il segno è discorde



Metodo di bisezione, continua

prima o poi tende sempre ad α

Il metodo di bisezione **converge sempre** per funzioni continue.

Il numero di iterazioni necessarie per ottenere un'intervallo di localizzazzione di ampiezza prefissata tol è

$$k = \left\lceil \log_2 \left(\frac{|b-a|}{tol} \right) \right\rceil$$

ad ogni passo DIMEZZO l'intervallo

dopo k passi ho $\left|\frac{b-a}{2^k}\right| < tol$

e **non** dipende dalla funzione considerata, ma solo dall'ampiezza dell'intervallo di localizzazzione iniziale.

precisione di 7 cifre

Per $|b-a| = 1$ e $tol = 10^{-7}$ sono necessarie $k = \lceil (7 \times 3.32192) \rceil = 24$ iterazioni. In particolare per $tol = 10^{-1}$ servono $k = 4$ iterazioni: è un algoritmo piuttosto **lento**!

→ NON ENTRA IN GIOCO f, SOLO L'INTERVALLO

Metodo di bisezione, continua

Vogliamo stimare l'errore dell' approssimazione di α ottenuta scegliendo $\tilde{\alpha} = m = (a+b)/2$ dopo k iterazioni. Il test dell' algoritmo sopra descritto controlla l'errore assoluto, del quale fornisce la seguente limitazione

punto medio dopo K iteraz.

ERRORE ASS

$$\underbrace{|\alpha}_{\text{RIS CORRETTO}} - \underbrace{\tilde{\alpha}|}_{\text{RIS. OTTENUTO}} \leqslant \frac{|b-a|}{2} \leqslant \frac{\text{tol}}{2}.$$

$e_{ASS} \leq \frac{tol}{2}$ e quindi il calcolatore ritiene $\tilde{\alpha}$ il risultato corretto e non lo distingue da α

In analisi numerica, dove le quantità in gioco possono avere ordini di grandezza molto variabili, risulta in generale più opportuno controllare l'errore relativo. Modificando nell'algoritmo il test di controllo nel modo seguente

qual è l'errore relativo max accettato

```
while ({|b-a|}/{min(|a|,|b|)} > tol)
```

$$\frac{|\alpha-\tilde{\alpha}|}{|\alpha|} \leq \frac{|b-a|}{\underbrace{2|\alpha|}_{\text{non lo sappiamo}}} \leq \frac{|b-a|}{\underbrace{2\min\{|a|,|b|\}}_{\text{il più piccolo possibile}}} \leq \frac{tol}{2}$$

serve per fare la MAGGIORAZ.

si ottiene la seguente stima dell'errore relativo

$$\frac{|\alpha-\tilde{\alpha}|}{|\alpha|} \leqslant \frac{|b-a|}{2\min\{|a|,|b|\}} \leqslant \frac{\text{tol}}{2}.$$

È importante osservare che questo criterio può non funzionare se $\min\{|a|,|b|\}$ si avvicina a zero.

Aspetti da tenere in considerazione dell'algoritmo di BISEZIONE:

1. con il metodo di BISEZ. posso costruirmi degli INTERVALLI DI LOCALIZZAZIONE piccoli quanto voglio ⇒ posso LOCALIZZARE bene la radice che mi interessa

2. posso costruire, tramite questo algoritmo, una buona APPROSIMAZIONE della radice

3. è un algo iterativo (ovvero solo al limite può dare un'approssimaz. della soluz, quando esce dal WHILE) e ho bisogno di un CRITERIO D'ARRESTO per fermare le iterazioni
↳ deve tenere conto dell' ACCURATEZZA con cui voglio ricostruire la soluzione)

Si considerano, di un algoritmo, <u>velocità</u> e <u>convergenza</u>.

Metodo di iterazione funzionale

Un ulteriore approccio, al posto del metodo di BISEZIONE (troppo lento!)

Una classe importante di metodi deriva dalla riformulazione del problema come problema di punto fisso

Invece che cercare gli ZERI (RADICI) di f(x), cerco il punto fisso nella nuova funzione

$$\boxed{f(x) = 0 \quad \textbf{zeri di funzione} \Leftrightarrow x = g(x) \quad \textbf{punto fisso}}$$

I problemi sono **matematicamente equivalenti** se hanno le stesse soluzioni nell'intervallo di interesse.

Al problema di punto fisso rimane associato uno schema iterativo **metodo di iterazione funzionale**

come definisco g?

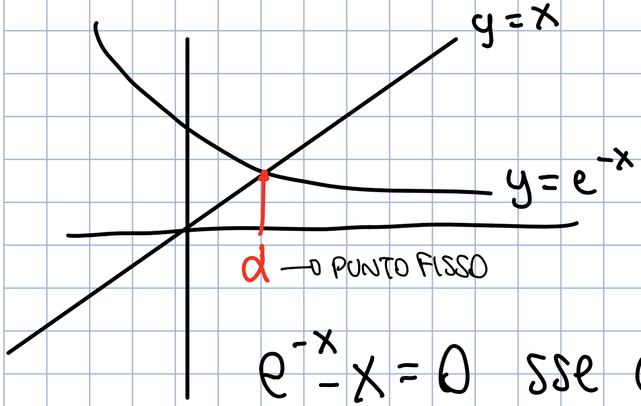
$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots, \\ x_0 \quad \text{dato} \end{cases} \tag{1}$$

per trovare x_1, sostituisco $x_0 \Rightarrow x_1 = g(x_0)$

ma come lo scelgo?

la funzione g è detta **funzione di iterazione.**

Se g è continua e la successione $\{x_k\}_{k \geqslant 0}$ è **convergente**, converge ad un punto fisso di g (i.e. $\alpha = g(\alpha)$) e quindi ad uno zero di f (i.e. $f(\alpha) = 0$).



$e^{-x} - x = 0$ sse $e^{-x} = x$

Metodo di iterazione funzionale: esempio

In generale si possono scrivere più problemi di punto fisso equivalenti ma le proprietà dei metodi di iterazione funzionale risultanti possono essere ben diverse

Data $f(x) = x^2 - x - 2$ si vuole approssimare la radice $\alpha = 2$.

PUNTO INIZIALE

- Sia $g(x) = x^2 - 2$. Scelto $x_0 = 2.01$, si ottiene una successione **non convergente**. Il punto fisso è repulsivo.

$\frac{|2-2,01|}{2} = 5 \cdot 10^{-3}$ STIMA dell'ERR. REL.

$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

$g(x) = x^2 - 2$ (la ottengo spostando x a dx)

$\begin{cases} g(2) = 4 - 2 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(\alpha) = \alpha$ e $f(\alpha) = 0$ OK

calcolo poi

$x_1 = g(x_0) = 2,0401$ → mi sto allontanando

↳ SUCCESSIONE NON CONVERGENTE il PUNTO FISSO è REPULSIVO

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	2.0100	5.0000e-03
1	2.0401	2.0050e-02
2	2.1620	8.1004e-02
3	2.6743	3.3714e-01
4	5.1518	5.1518
5	2.4541e+01	11.1270e+01
6	6.0025e+02	2.9912e+02
7	3.6029e+05	1.8015e+05
8	1.2981e+11	6.4905e+10

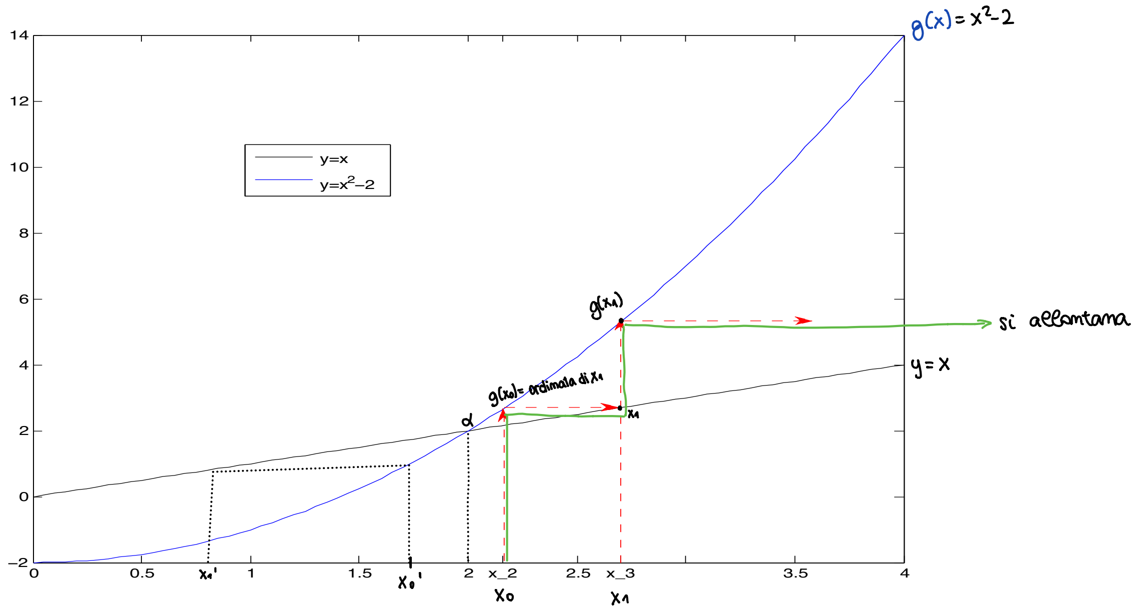
$\frac{|\alpha - \tilde{\alpha}|}{\alpha}$

continuando ad applicare lo schema iterativo, mi allontano ed ottengo un errore più grande

↳ PUNTO FISSO REPULSIVO

Metodo di iterazione funzionale: esempio, continua

x_1 lo ottengo da $g(x_0)$ che mi da l'ordinata
e poi cerco l'intersez. con la retta $y=x$



si ALLONTANA

si ALLONTANA

Metodo di iterazione funzionale: esempio, continua

- Sia $g(x) = \sqrt{x+2}$. Scelto $x_0 = 1$ si ottiene una successione **monotona** convergente , il punto fisso è attrattivo.

la ottengo ($g(x)$):

$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

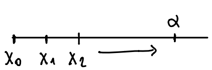
$x^2 = x + 2$

$x = \sqrt{x+2} = g(x)$

$g(2) = 2$ OK

$f(2) = 0$

Rimane nella stessa DIREZIONE verso α



errore che si riduce

Stima la velocità della CONVERGENZA

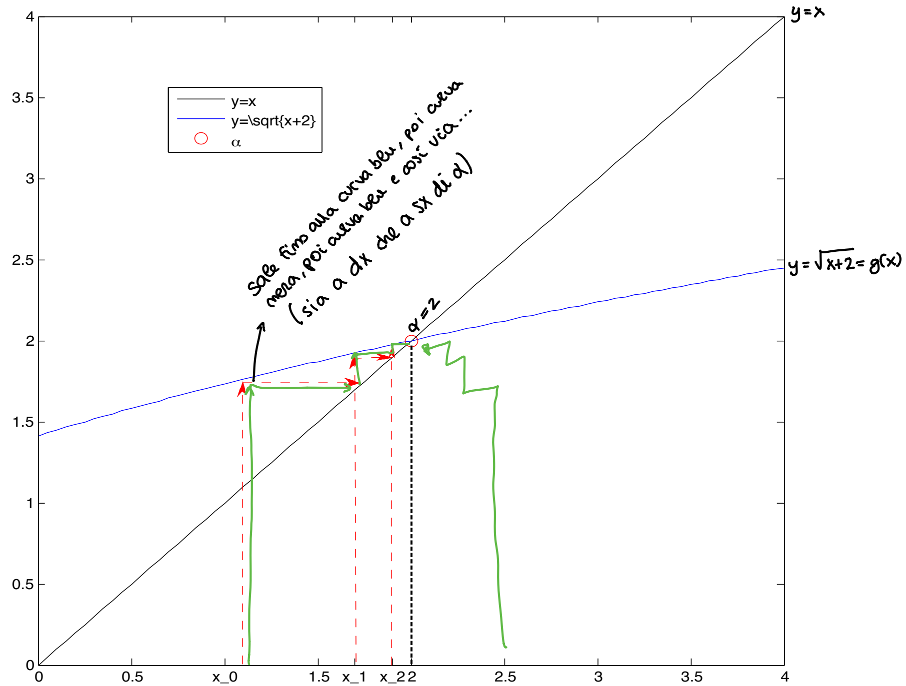
k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert/\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000000	5.0000e-01	
1	1.73205080	1.3397e-01	2.6795e-01
2	1.93185165	3.4074e-02	2.5433e-01
3	1.98288972	8.5551e-03	2.5107e-01
4	1.99571784	2.1411e-03	2.5027e-01
5	1.99892917	5.3541e-04	2.5007e-01
6	1.99973227	1.3386e-04	2.5002e-01
7	1.99993306	3.3466e-05	2.5000e-01
8	1.99998326	8.3666e-06	2.500041e-01
9	1.99999581	2.0916e-06	2.500002e-01
10	1.99999895	5.2291e-07	2.5000006e-01

Osservazione: Il rapporto fra gli errori in passi successivi $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$ tende a $1/4 = 2.5e-01$. Ciò ci fornisce una misura della velocità di convergenza.

$|\epsilon_{k+1}| \approx \ell \cdot |\epsilon_k|$

fattore / di quanto si riduce ad ogni passo

tende a $1/4 = 2,5\,e^{-1} = 0,25$



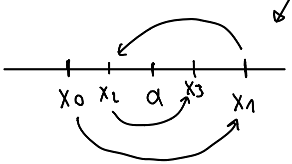
⟹ PUNTO FISSO ATTRATTIVO

- Sia $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$. Scelto $x_0 = 1$, si ottiene una successione **convergente in maniera alternata**. Il punto fisso è attrattivo

$g(x) = 1 + \frac{2}{x} = x \rightarrow$ moltiplico per x

$x + 2 = x^2$

$x^2 - 2 - x = f(x) = 0$

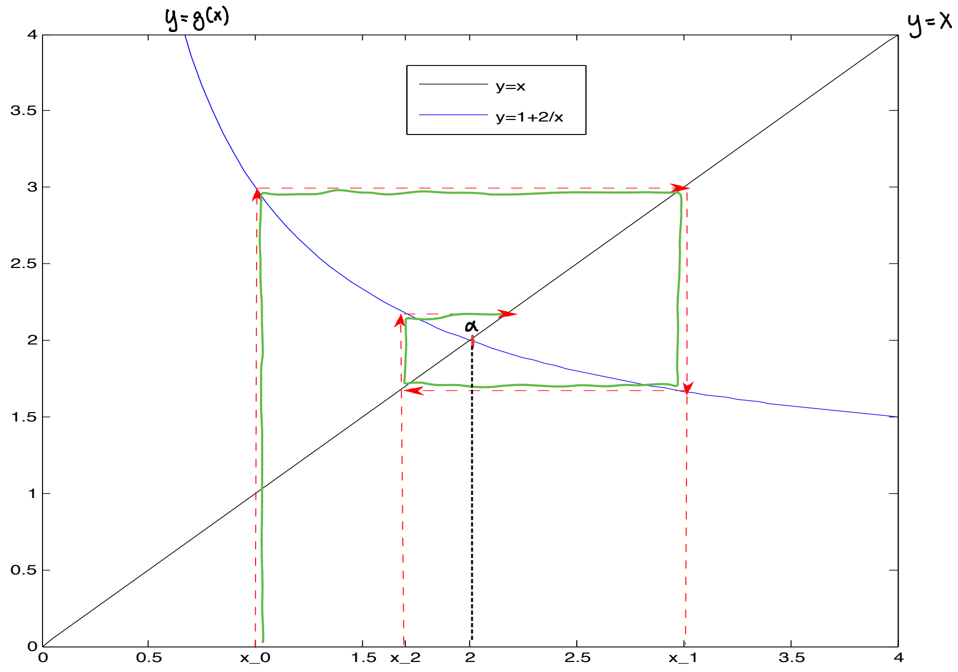


k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert / \lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000	5.0000e-01	
1	3.0000	5.0000e-01	1.0
2	1.6667	1.6667e-01	3.3333e-01
3	2.2000	1.0000e-01	6.0000e-01
4	1.9091	4.5455e-02	4.5455e-01
5	2.0476	2.3810e-02	4.8837e-01
6	1.9767	1.1628e-02	4.8837e-01
7	2.0118	5.8824e-03	5.0588e-01
8	1.9942	2.9240e-03	4.9708e-01
9	2.0029	1.4663e-03	5.0147e-01
10	1.9985	7.3206e-04	4.9927e-01

Osservazione: Il rapporto fra gli errori in questo caso tende ad $1/2 = 5.0e-01$. Il metodo risulta più lento del precedente.

$\Rightarrow |\varepsilon_{k+1}| \approx \frac{1}{2} |\varepsilon_k| \rightarrow$ ogni passo l'errore si "circa" dimezza $\longrightarrow$ converge più lentamente di $\sqrt{x+2}$

Metodo di iterazione funzionale: esempio, continua



Metodo di iterazione funzionale: esempio, continua

- Sia $g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$. Scelto $x_0 = 1$, si ottiene una successione **convergente in maniera monotona** per $k \geqslant 1$

$g(x) = x$

$\frac{x^2+2}{2x-1} = x$

$x+2 = 2x^2 - x$

$\underbrace{x^2 - x - 2}_{f(x)} = 0$

$g(2) = 0$ OK

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert / \lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000000	5.0000e-01	
1	3.0000000	5.0000e-01	1.0
2	2.20000000	1.0000e-01	2.0000e-01
3	2.01176470	5.8824e-03	5.8824e-02
4	2.00004578	2.2889e-05	3.8911e-03
5	2.0000000006942	3.4925e-10	1.5259e-05
6	2.00000000	0	0

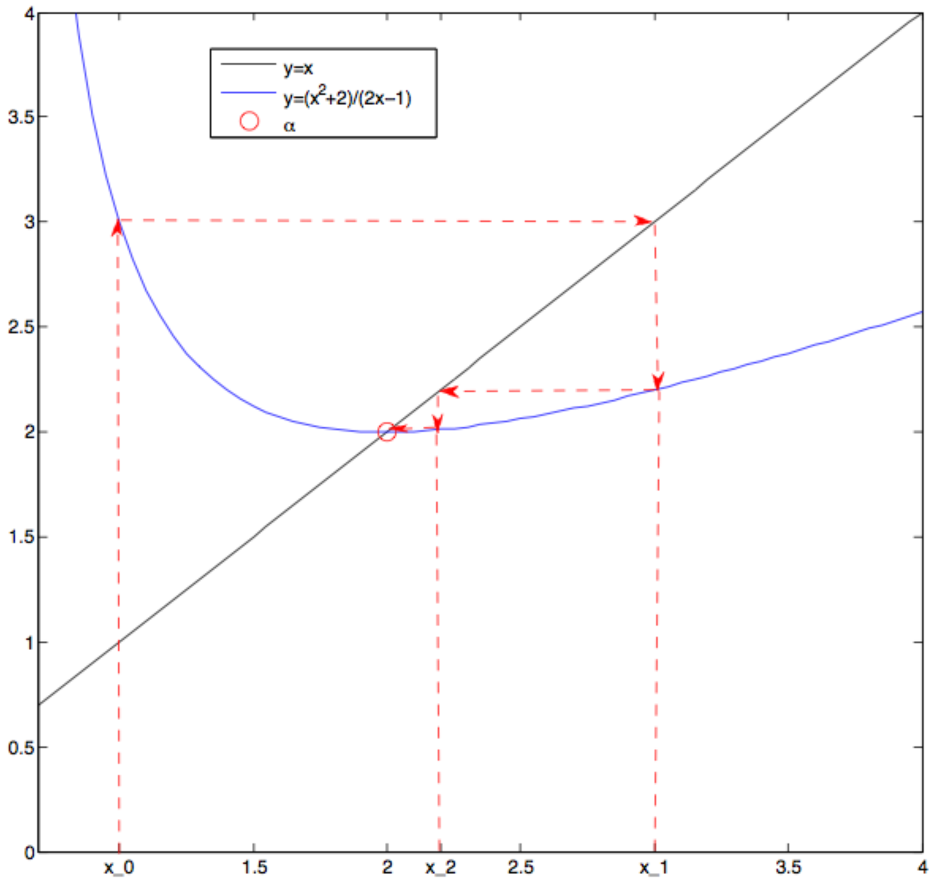
Osservazione: In questo caso l'errore tende a zero molto rapidamente e la riduzione degli errori risulta essere di tipo quadratico.

$|\varepsilon_{k+1}| \approx \ell \cdot |e_k|^2$

$\underset{i=0}{10^{-1}} \to \underset{i=1}{10^{-2}} \to \underset{i=2}{10^{-4}} \to \underset{i=3}{10^{-8}} \to \underset{i=4}{10^{-16}}$

con poche iteraz. arrivo alla precisione di macchina

Metodo di iterazione funzionale: esempio, continua

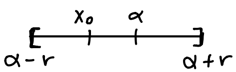


Convergenza locale del metodo iterazione funzionale

↳ LOCALE (solo nell'intorno della RADICE / PUNTO FISSO) ↳ lo scelgo vicino alla radice che voglio approssimare

CONDIZIONI che ASSICURANO la CONVERGENZA del sistema iterativo, ovvero come scelgo x_0 affinché la successione sia convergente?

Teorema: Sia g derivabile con continuità e sia α un suo punto fisso, i.e. $g(\alpha) = \alpha$. Se esiste un intorno circolare $I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r], r > 0$, in cui



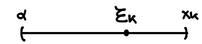
$-1 < g'(x) < 1$

$$|g'(x)| < 1, \quad x \in I_\alpha$$

↳ così l'errore DECRESCE

allora, preso $x_0 \in I_\alpha$, la successione $x_k, k = 0, 1, \ldots$ definita da (1) converge ad α. Inoltre α è l'unico punto fisso in I_α.

↳ metodo di ITERAZIONE FUNZIONALE



Dimostrazione: Per il teorema del valor medio, vale:

lega l'errore al passo k-esimo con quello al passo k+1-esimo

punto tra α e x_k

$$\underbrace{e_{k+1}} = \underbrace{x_{k+1}}_{} - \alpha = g(x_k) - g(\alpha) \overset{\text{teo val. medio}}{=} g'(\xi_k)(x_k - \alpha) = g'(\xi_k)e_k$$

$x_{k+1} = g(x_k)$, $\alpha = g(\alpha)$, $e_k = x_k - \alpha$

↳ la ottiene dalla fml di coeff. angolare

dove ξ_k è un punto tra x_k e α. La convergenza segue facilmente da

valore MAX della derivata in $I\alpha$ (ovvero λ max t.c. è più lento)

$|e_{k+1}| = |g'(\xi_k)| \cdot |e_k|$ $\longleftarrow$

$$|e_{k+1}| \leqslant \lambda |e_k|, \quad k = 0, \ldots,$$

↳ $|e_{k+1}| \leq \lambda^{k+1} |e_0| \leq \lambda^{k+1} r \to 0$

Se $g'(\xi_k) < 1$ e ha segno POSITIVO allora ad ogni passo l'errore DECRESCE ma il verso (verso α) non cambia

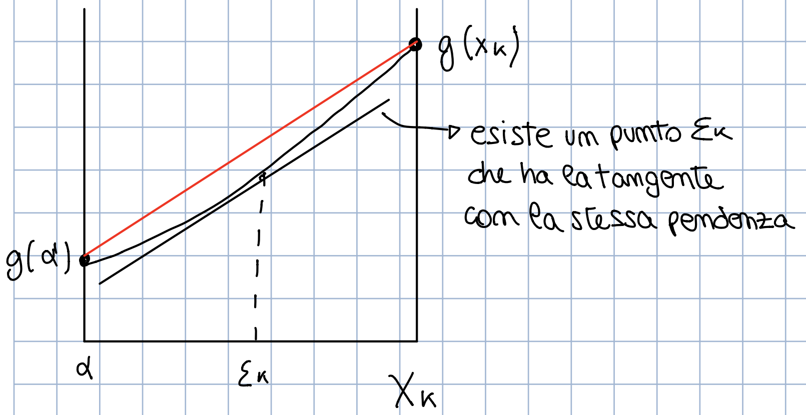
ha segno NEGATIVO allora ad ogni passo l'errore DECRESCE ma il verso (verso α) cambia (POSITIVO ⇆ NEG)

dove $\lambda = \max_{x \in I_\alpha} |g'(x)| < 1$.

Infine se per assurdo esiste $\beta = g(\beta)$ $\beta \neq \alpha$, allora esiste ξ tale che $|\beta - \alpha| = |g(\beta) - g(\alpha)| = |g'(\xi)||\beta - \alpha| < |\beta - \alpha|$. Ne segue $\beta = \alpha$.

C.V.D.

teorema VAL. MEDIO (richiamo)



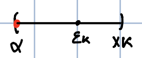
$$\frac{g(x_k) - g(\alpha)}{x_k - \alpha} = g'(\varepsilon_k)$$

l'errore DECRESCE perchè x_{k+1} si avvicina ad α

se $|g'(\varepsilon_k)| < 1 \Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| < |x_k - \alpha|$

se $g'(\alpha) = 1$

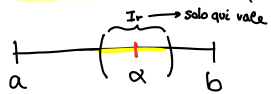
$(x_{k+1} - \alpha) = g'(\varepsilon_k)(x_k - \alpha) \approx g'(\alpha)$



Osservazioni

$|g'(x)|<1$

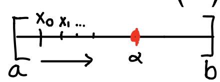
Poiché α non è noto, la richiesta che la condizione (2) valga in un intorno circolare I_α è piuttosto restrittiva.



se non so quanto vale la derivata

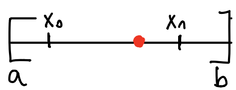
scelgo l'estremo più vicino ad α

- Se la condizione (2) è verificata in un intervallo $[a, b]$ contenente α nella sua parte interna, le ipotesi sono verificate nel massimo intervallo circolare I_α contenuto in $[a, b]$. La convergenza è assicurata se x_0 è l'estremo piú vicino ad α.
- Se $g'(x) > 0$ in $[a, b]$, la successione è monotona e x_0 può essere scelto indifferentemente come uno dei due estremi. Inoltre in questo caso è sufficiente che (2) valga in $[a, \alpha)$ con $x_0 = a$ o in $(\alpha, b]$ con $x_0 = b$.



se $0<g'(x)<1$

- Se $g'(x) < 0$ in $[a, b]$, la successione è alternata e in questo se non si puro stabilire quale dei due estremi sia il più vicino ad α si può scegliere come x_0 uno dei due estremi e
  - se $x_1 \in [a, b]$, la successione converge
  - se $x_1 \notin [a, b]$, si pone $x_0 = b$ e la successione converge



se $-1<g'(x)<0$

Osservazioni, continua

Il metodo di iterazione funzionale è convergente anche in ipotesi più deboli di quelle del teorema. Invece della condizione (2) si può considerare

DISTANZA tra x e α (esclusi gli estremi)

$$|g'(x)| < 1, \quad 0 < |x - \alpha| < r$$

Per continuitá risulta $|g'(x)| \leqslant 1$ per $x = \alpha, \alpha - r, \alpha + r$. Tuttavia se $|g'(\alpha)| = 1$ o ha un valore molto prossimo a 1, le successioni generate dal metodo convergono molto lentamente.

Esempio: L'equazione di punto fisso $x = \sin x$ ha la soluzione $\alpha = 0$. Il metodo di iterazione funzionale $x_{k+1} = g(x_k) = \sin x_k$ è convergente nell'intorno circolare I_α con $r \leqslant \pi$. Si ha infatti $g'(\alpha) = 1$ e $g'(\pi) = g'(-\pi) = -1$. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ converge molto lentamente.

k	x_k	k	x_k
0	1.0000000	94	0.174802889482536
1	0.841470984807897	95	0.173914034254936
2	0.745624141665558	96	0.173038655849547
3	0.678430477360740	97	0.172176416309364
4	0.627571832049159	98	0.171326989444225
5	0.587180996573431	99	0.170490060308578
6	0.554016390755630	100	0.169665324707324
...	...	...	...

Conclusioni sulla convergenza

Se $g(\alpha) = \alpha$ e $|g'(\alpha)| < 1$ allora per la continuità di g' abbiamo che esiste un intorno circolare I_α in cui vale (2). Inoltre

- se $0 < g'(\alpha) < 1 \rightsquigarrow$ convergenza **locale monotona**
- se $-1 < g'(\alpha) < 0 \rightsquigarrow$ convergenza **locale di tipo alternato**.
- se $g'(\alpha) = 0 \rightsquigarrow$ convergenza **locale** e il comportamento della successione può non essere nè monotono nè alternato
- se $|g'(\alpha)| > 1 \rightsquigarrow$ **punto fisso repulsivo**
- se $|g'(\alpha)| = 1$, ma $|g'(x)| < 1, x \neq \alpha, x \in I_\alpha \rightsquigarrow$ convergenza **locale lenta**

Come misurare la velocità di convergenza di una successione convergente?

↳ è $|g'(\xi_k)|$ che, per $k >> 0$, tende a $g'(\alpha)$

↳ ci da quindi un'informazione anche sulla VELOCITÀ

↳ più $|g'(\alpha)|$ è piccolo, più converge velocemente

Fattore asintotico di convergenza e ordine di convergenza

Sia $\{x_k\}_{k \geqslant 0}$ una successione convergente ad α e sia

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{|x_{k+1}-\alpha|}^{\text{distanza tra } x_{k+1} \text{ e } \alpha \Rightarrow e_{k+1}}}{\underbrace{|x_k-\alpha|}_{\text{distanza tra } x_k \text{ e } \alpha \Rightarrow e_k}} = \ell \qquad \left(\underset{k \gg 0}{|e_{k+1}| \approx \ell |e_k|} \right)$$

Se

- $\ell = 1$ si parla di convergenza **sublineare** → converge LENTAMENTE
- $0 < \ell < 1$ si parla di convergenza **lineare** o di **ordine di convergenza** $p = 1$. → errore decresce linearmente
- $\ell = 0$ si parla di convergenza **superlineare**

ℓ è il **fattore asintotico di riduzione**. (asintotico perchè è una stima per $k \to \infty$)

⇒ Per il metodo di iterazione funzionale risulta $\ell = |g'(\alpha)|$

Ordine di convergenza, continua

Nel caso di convergenza SUPERLINEARE

→ grado della derivata ≠ 0

Una successione ha ordine di convergenza $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = L > 0 \qquad \left(\underbrace{|e_{k+1}| \approx L\,|e_k|^p}_{k \gg 0} \right)$$

→ l'errore si riduce esponenzialmente ad ogni passo

$$g(x_k) - g(\alpha) = g'(\alpha)(x_k - \alpha) + g''(\alpha)\left(\frac{x_k}{2} - \alpha\right)^2 + \dots + g^{(p)}(\alpha)\frac{(x_k-\alpha)^p}{p!} + O\left(|x_k - \alpha|^{te}\right)$$

Sia g derivabile con continuità fino all'ordine $p \geqslant 2$, p intero in un intorno del punto fisso α.

↳ se $p = 2$ vuol dire che ad ogni iterata l'errore è il QUADRATO dell'errore precedente

Allora il metodo di iterazione funzionale ha ordine di convergenza p se e soltanto se

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

e

FML TAYLOR: $\underbrace{g(x_k) - g(\alpha)}_{e_{k+1}\text{ è}} = g'(\alpha)(x_k-\alpha) + g''(\alpha)\frac{(x_k-\alpha)^2}{2} + \dots + g^{(p)}(\alpha)\frac{(x_k-\alpha)^p}{p!} + O(|x_k-\alpha|^{p+1})$ $\Rightarrow e_{k+1} \approx L \cdot e_k^p$

↳ "O grande"

$$L = |g^{(p)}(\alpha)|/p!$$

FML. di TAYLOR

$$L = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots +}_{0 \text{ perché } g'(x_0), g''(x_0) \dots g^{n-1}(x_0) = 0} \frac{f^m(x_0)\cdot(x-x_0)^m}{m!}$$

↑ L

Riassumendo possiamo concludere che: se $|g'(\alpha)| < 1$ allora esiste un intorno $I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$ tale che, preso $x_0 \in I_\alpha$, l'iterazione funzionale converge ad α. Se $|g'(\alpha)| \neq 0$, allora la convergenza è lineare. Se vale la condizione sopra allora il metodo converge con ordine p e $L = |g^{(p)}(\alpha)|/p!$.

Riprendendo le funz. sopra $\quad f(x) = x^2 - x - 2$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 2 \\ g'(x) = 2x \quad g'(2) = 4 > 1 \rightarrow \text{non c'è la CONVERGENZA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x+2} \\ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} \quad g'(2) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \exists\, I_\alpha \text{ t.c. } \forall x \in I_\alpha \quad 0 < g'(x) < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0 \in I_\alpha,\ x_k \rightarrow \alpha$ in maniera monotona (successione)

(LINEARE $p = 1$ $\ell = \frac{1}{4}$)

$$\begin{cases} g(x) = 1 + \dfrac{2}{x} \\ g'(x) = \dfrac{-2}{x^2} \quad g'(2) = -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \exists\, I_\alpha \text{ t.c. } \forall x \in I_\alpha \quad -1 < g'(x) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_k \rightarrow \alpha$ in maniera ALTERNATA con $p = 1$ (LINEARE) $\ell = 1/2$

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1} \\ g'(x) = \dfrac{2x(2x-1) - (x^2+2)\cdot 2}{(2x-1)^2} \end{cases} \quad g'(2) = \frac{4 \cdot 3 - 12}{\dots} = 0$$

$g''(2) \neq 0 \qquad p = 2$

$|e_{k+1}| \approx L\,|e_k|^2$

$L = \dfrac{g''(\alpha)}{2!}$

Criteri di arresto

Assegnata una precisione tol, si può cercare di controllare

- l'errore assoluto con

$|x_{k+1}-x_k| = |x_{k+1} - \alpha + \alpha - x_k|$

$= |g'(\xi_k)(x_k-\alpha) - (x_k-\alpha)|$

$= |(g'(\xi_k)-1)(x_k-\alpha)|$

distanza tra 2 iterate successive

$$|x_{k+1}-x_k| < \text{tol}$$

  da cui si ottiene

$\Rightarrow |x_k - \alpha| = \dfrac{|x_{k+1}-x_k|}{|g'(\xi_k)-1|} \leq \dfrac{\text{TOL}}{|g'(\xi_k)-1|}$ $\approx g'(\alpha)$

$$|x_k-\alpha| = \frac{|x_{k+1}-x_k|}{|g'(\xi_k)-1|} < \frac{\text{tol}}{|g'(\xi_k)-1|}$$

quando $e_{ass} = |x_{k+1}-x_k| < tol$ allora si ARRESTA

- l'errore relativo con

$$\frac{|x_{k+1}-x_k|}{\min\{|x_{k+1}|,|x_k|\}} < \text{tol},$$

lo ricava da qui

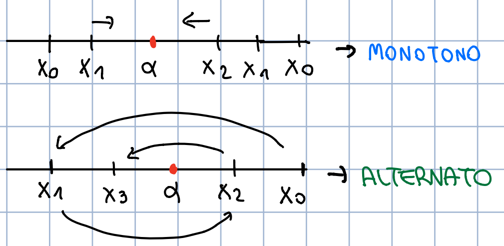
  se $|x_{k+1}|, |x_k| \neq 0$, da cui si ottiene

COMBINO →

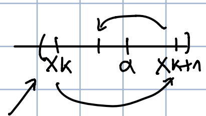
$$\frac{|x_k-\alpha|}{|\alpha|} = \frac{|x_{k+1}-x_k|}{|\alpha||g'(\xi_k)-1|} < \frac{\text{tol}\min\{|x_{k+1}|,|x_k|\}}{|\alpha||g'(\xi_k)-1|}.$$

In entrambi i casi risulta che l'errore commesso può essere tanto più grande della precisione tol fissata se $g'(\xi_k) \approx 1$

Due situaz. localmente

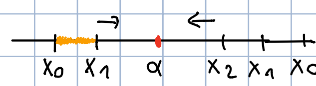


ERRORE ASSOLUTO:



se $|x_{k+1} - x_k| < tol$, con ALTERNATO non ci sono problemi perchè α sarà compreso tra x_{k+1} e x_k
e quindi e' ERRORE ASS. < della prec. tol

con MONOTONO dipende perchè se procede LENTAMENTE



$\rightarrow$ potrebbe essere più piccolo della distanza da α (quando converge lentamente

$$|x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - \alpha + \alpha - x_k|$$
$$= |g'(\xi_k)(x_k - \alpha) - (x_k - \alpha)|$$
$$= |(g'(\xi_k) - 1)(x_k - \alpha)|$$

$$\Rightarrow |x_k - \alpha| = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|g'(\xi_k) - 1|} \leq \frac{TOL}{|\underbrace{g'(\xi_k)}_{\approx g'(\alpha)} - 1|}$$

il CRITERIO D'ARRESTO funziona bene se il denominatore $(g'(\xi_k) - 1)$ non è vicino a 0

Criteri di arresto, continua

Con il criterio d'arresto

$$|f(x_k)| < \text{tol},$$

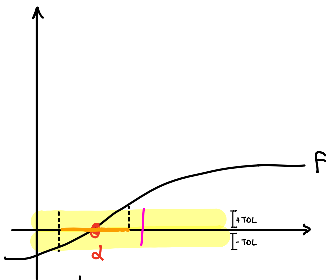
↱ $f(x_k)$ sarà identico (per la macchina) a $f(\alpha)$ anche se x_k non sarà proprio la radice esatta α.
Infatti α, che è RADICE, ha $f(\alpha)=0$. x_k è la sua approssimaz. e $f(x_k)=0,0\ldots1$ ma $<$ TOL perciò $=0$

si ottiene

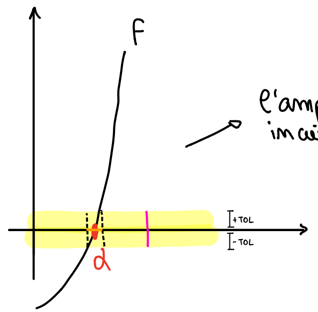
$$|x_k - \alpha| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi_k)|} < \frac{\text{tol}}{|f'(\xi_k)|}.$$

Può non essere soddisfacente se $|f'(\xi_k)| \approx 0$

ci sono 2 casi: (uso come CRITERIO D'ARRESTO $|f(x_k)| < tol$)



↳ qui (•) è più grande di (•)



l'ampiezza dell'intervallo in cui c'è α (•) è $<$ della TOL (•)

$$f(\alpha) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

$$\xi_k \in (x_k, \alpha) \Rightarrow ||x_k - \alpha|| = \frac{|f(x)|}{|f'(\xi_k)|} \le \frac{tol}{|f'(\xi_k)|}$$

Esercizio: Considera il problema dell'area del segmento circolare. Studia la convergenza del metodo di iterazione funzionale definito dalla funzione di iterazione $g(x) = \sin(x) - \frac{2\mathcal{A}}{R^2}$ e proponi un valore iniziale x_0. Scrivi una pseudocodifica.

$f(x) = x^2 - 3x - 4$ $\qquad x_{1,2} = \overset{\alpha}{4}, \overset{\beta}{-1}$

$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow x = 3/2$

$g(x) = \frac{x^2-4}{3}$ $\quad g(4) = 4$ OK $\quad g(-1) = -1$ OK

$g'(x) = \frac{2}{3}x$ $\quad g'(\alpha) = \frac{8}{3} > 1$ PUNTO REP. Non converge ad α

$g'(\beta) = -\frac{2}{3} > -1$ CONVERGE LOCALMENTE a β in maniera ALTERNATA con ordine $p=1$, $\ell = \frac{2}{3}$

$g(x) = \sqrt{3x+4}$ $\quad \underbrace{g(4) = 4}$ $\quad g(-1) \neq -1$ ↳ non è P.FISSO

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ $\quad g'(4) = \frac{3}{8} < 1 \rightarrow$ CONVERGE LOCALMENTE ad α in maniera MONOTONA con ordine $p=1$ e $\ell = \frac{3}{8}$

$g(x) = 3 + \frac{4}{x}$ $\quad g(4) = 4$ $\quad g(-1) = -1$ OK entrambi P.FISSI

$g'(x) = \frac{-4}{x^2}$ $\quad g'(4) = -\frac{1}{4} \rightarrow$ CONVERGE LOCALMENTE ad α in maniera ALTERNATA con ordine $p=1$ e $\ell = \frac{1}{4}$

$g'(-1) = -4$

Una classe di metodi di iterazione funzionale può essere costruita definendo una funzione di punto fisso come segue

Se α è radice di $f \Rightarrow f(\alpha)=0 \Rightarrow g(\alpha)=0$

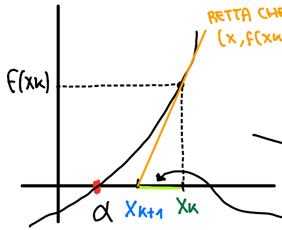
$m(\alpha)\neq 0$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{m(x)}.$$

↳ coeff. angolare

RETTA CHE PASSA per $(x, f(x_k))$ che ha coeff. $m(x_k)$

L'iterata



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m(x_k)}$$

è l'intersezione con l'asse delle x della retta che passa per $(x_k, f(x_k))$ con coefficiente angolare $m(x_k)$.

Le SCELTE del COEFFICIENTE ANGOLARE $m(x)$:

- $m(x) = m \rightsquigarrow$ **metodo a pendenza costante**
- $m(x) = f'(x) \rightsquigarrow$ **il metodo di Newton o delle tangenti**

Metodo a pendenza costante

nel metodo it. funz. $x_{k+1} = g(x_k)$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{m}, \ k = 0, 1, \ldots \\ x_0 \quad \text{dato} \end{cases}$$ → Qui $g = x_k - \frac{f(x_k)}{m}$

Per avere la convergenza (locale) dobbiamo imporre la condizione

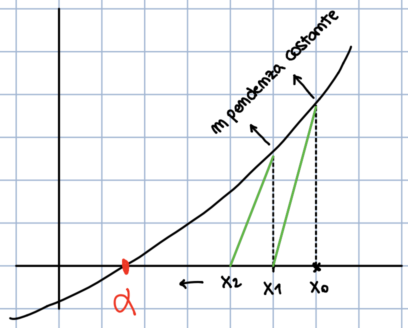
$$\ell = |g'(\alpha)| = |1 - \frac{f'(\alpha)}{\underset{\text{Log}'(\alpha)}{m}}| < 1$$

Se α è una radice semplice, la convergenza è assicurata se valgono le seguenti condizioni

- $f'(x) \neq 0, \ x \in I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$ → senno $g'(\alpha) = 0$
- $mf'(x) > 0, \ x \in I_\alpha$ → senno $|1 - (-\ldots)| > 1$
- $|m| > \frac{1}{2} \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)|$ → così $f'(\alpha)$ non diventa enorme $\frac{f'(\alpha)}{\frac{1}{2} f'(\alpha)} = 2$ GRANDE
  ↳ se m è tanto piccolo il rapporto $\frac{f'(\alpha)}{m}$ cresce

Una scelta impropria di m può dare origine ad un metodo non convergente. Si potrebbe porre $m = f'(x_0)$, scegliendo $x_0 \in I_\alpha$ in modo che $|f'(x_0)| > \frac{1}{2} \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)|$.

Se $f'(\alpha) \neq m$ il metodo converge linearmente, mentre ha convergenza super-lineare se $f'(\alpha) = m$. Se α è una radice multipla e $|g'(x)| < 1, x \neq \alpha$, si ha convergenza sublineare.



$g(x) = x - \frac{f(x)}{m} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m} \Rightarrow$ devo trovare un m tale per cui: $|g'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{m}\right| < 1$, $x \in I_\alpha$

sse $\quad 0 < \frac{f'(x)}{m} < 2$, $x \in I_\alpha$

↳ m deve avere lo stesso segno della derivata $\qquad f' > 0 \Rightarrow m > 0$

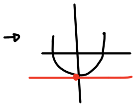
$\Rightarrow \frac{1}{2} \max |f'(x)| < |m|$

→ col METODO di NEWTON se - α radice SEMPLICE allora la convergenza sarà SUPERLINEARE

- α radice DI MOLTEPLICITÀ μ allora la convergenza sarà LINEARE

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ x_0 \quad \text{dato} \end{cases}$$

→ Vuol dire che la tangente non è // asse x →



- α radice semplice (i.e. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Poiché

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$$

più p è grande più converge velocemente
p è l'ordine della prima derivata ≠ 0

$\rightsquigarrow$ convergenza locale superlineare. Inoltre da

$$g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

possiamo dedurre che il metodo convergerà quadraticamente se $f''(\alpha) \neq 0$, mentre convergerà ancora più velocemente se $f''(\alpha) = 0$.

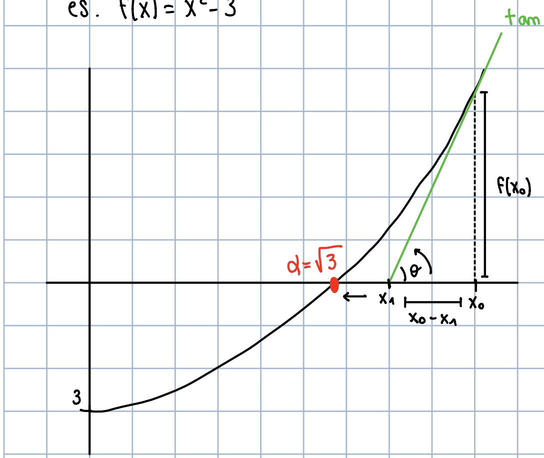
$p \geq 2$ $\quad$ $p=2$ se derivata seconda $= 0$

$p=2$ $\quad \underbrace{10^{-1}, 10^{-2}}_{k}, \underbrace{10^{-4}}_{k+1}, \underbrace{10^{-8}}_{k+2}, 10^{-16}$

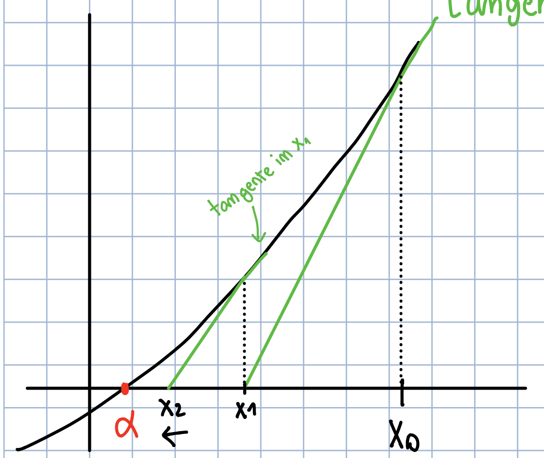
$p=3$ $\quad \underbrace{10^{-1}}_{k}, \underbrace{10^{-3}}_{k+1}, \underbrace{10^{-9}}_{k+2}, \ldots$

Come ottengo la formula $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$?

es. $f(x) = x^2 - 3$



$\tan\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$



$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x)^2 - f''(x)\cdot f(x)}{f'(x)^2}\right) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ CONVERGENZA SUPERLINEARE

Metodo di Newton, continua

- α sia una radice di molteplicità $\mu > 1$ (i.e. $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(\mu-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(\mu)}(\alpha) \neq 0$)) allora

non si annulla in α, la ottengo con RUFFINI

$$f(x) = (x-\alpha)^{\mu} h(x), \text{ es:}$$

funzione ottenuta con ruffini

es. $x^3 + x^2 - 8x - 12$

$$f(x) = \underbrace{(x+2)^2}_{(x-\alpha)^m} \underbrace{(x-3)}_{h(x)}$$

con h funzione continua tale che $h(\alpha) \neq 0$.

Poichè

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\mu} < 1.$$

$\rightsquigarrow$ convergenza locale lineare e monotona

In particolare, per le radici doppie il fattore di riduzione asintotica dell'errore è $l = \frac{1}{2}$ (confrontabile con il metodo di bisezione)

$\mu = 2$

$f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot h(x)$

$f'(x) = 2(x-\alpha)h(x) + (x-\alpha)^2 \cdot h'(x)$

$f''(x) = 2h(x) + 2(x-\alpha)h'(x) + 2(x-\alpha)^2 h'(x)$
$\quad + (x-\alpha)^2 h''(x)$

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{\cancel{(x-\alpha)^2} h(x)[2h(x) + (x-\alpha)\ldots]}{\cancel{(x-\alpha)^2}[2h(x) + (x-\alpha)\ldots]^2}$$

$$g'(\alpha) = \frac{\cancel{h(\alpha)}^{2} \cdot 2}{4\cancel{h^2(\alpha)}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

CONVERGENZA LINEARE
ad ogni iteraz. si riduce della metà

Metodo di Newton, continua

→ Esistono delle CONDIZIONI che garantiscono la CONVERGENZA del METODO di NEWTON? (le TEO ci fornisce condiz. sufficienti)

Teorema: Sia $J_\alpha = [\alpha, \alpha + r]$, $r > 0$ (oppure $J_\alpha = [\alpha - r, \alpha]$, $r > 0$) e $f \in C^2(J_\alpha)$. Se

↳ intorno dx

↳ intorno sx

↳ CLASSE (OVVERO DERIVATA PRIMA e SECONDA sono CONTINUE)

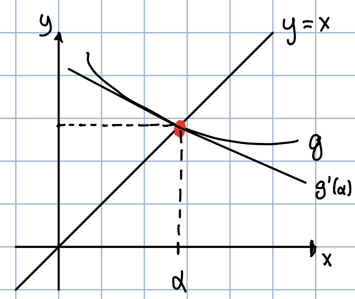
$$f(x)f''(x) > 0, \quad f'(x) \neq 0, \forall x \in J_\alpha, \ x \neq \alpha,$$

allora, preso $x_0 \in J_\alpha$, la successione definita dal metodo di Newton è convergente in maniera monotona. DIM →

Il metodo di Newton richiede il calcolo della derivata $f'(x_k)$ ad ogni iterazione. Quando il calcolo della derivata è costoso o la derivata non è esprimibile mediante una formula matematica, si possono definire dei metodi che approssimano $f'(x_k)$ **metodi quasi-Newton**

- metodo secanti : $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ → il rapp. incr. tra k e k-1
  Questo metodo ha bisogno di due valori iniziali (per partire)
- metodo di Steffensen: $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$

INTRODUZIONE (per i METODI di ITERAZIONE FUNZIONALE)



$e_{k+1} = g'(\xi_k) \cdot e_k \quad \Rightarrow e_{k+1} \approx g'(\alpha)\, e_k \quad k \gg 0$

$\downarrow k \to \infty$

tende a $g'(\alpha)$

Nei metodi di ITERAZ. FUNZ. la funzione di punto fisso $g(x)$

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{m(x)}$

- $= m$ se PENDENZA COSTANTE
- $= f'(x)$ se METODO di NEWTON

Per il metodo di iteraz. funzionale si ha $L = \dfrac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$ → FATTORE ASINTOTICO DI RIDUZIONE

TIPI DI CONVERGENZA

CONDIZIONI che garantiscono la CONVERGENZA (generico per l'iteraz. funz.)

se $|g'(\alpha)| < 1$ per continuità, $\exists\, I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$ tale che $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in I_\alpha$ → CONVERGENZA LOCALE $\forall x_0 \in I_\alpha$

LINEARE $p=1$

- POSITIVO: se $0 < g'(\alpha) < 1 \Rightarrow \exists\, I_\alpha$ tale che $0 < g'(x) < 1 \ \forall x \in I_\alpha$ → CONVERGENZA LOCALE $\forall x_0 \in I_\alpha$ e MONOTONA
- NEGATIVO: se $-1 < g'(\alpha) < 0 \Rightarrow \exists\, I_\alpha$ tale che $-1 < g'(x) < 0 \ \forall x \in I_\alpha$ → CONVERGENZA LOCALE $\forall x_0 \in I_\alpha$ e ALTERNATO
- UGUALE A 1: se $|g'(\alpha)| = 1$ e $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in I_\alpha, x \neq \alpha$ $\forall x_0 \in I_\alpha$ la successione converge LENTAMENTE

PIÙ VELOCE DI LINEARE $p \geq 2$

- UGUALE A 0: se $|g'(\alpha)| = 0$, $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ e $g^{(p)} \neq 0$ allora CONVERGE con ordine p. e $L = \dfrac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$

la VELOCITÀ di convergenza è $|g'(\xi_k)|$ che tende a $|g'(\alpha)|$ ↳ VELOCITÀ

FATTORE ASINTOTICO DI CONVERGENZA

SUBLINEARE : se $\ell = 1$

LINEARE : se $0 < \ell < 1$

SUPERLINEARE : se $\ell = 0$

→ col METODO di NEWTON se
- α radice SEMPLICE (la derivata prima $\neq 0$, $g'(\alpha) \neq 0$) allora la convergenza sarà SUPERLINEARE
- α radice DI MOLTEPLICITÀ μ allora la convergenza sarà LINEARE → $g'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mu}$ $p = 1$ e ci vedi il TIPO di CONVERGENZA
  ↳ $g'(\alpha) = \dots = g^{\mu-1}(\alpha) = 0$, $g^{\mu}(\alpha) \neq 0$

CONDIZIONI che garantiscono la CONVERGENZA (con Newton):

Sia $J_\alpha : [\alpha, \alpha + r]$ (o $[\alpha - r, \alpha]$), $r > 0$, $f \in C^2(J_\alpha)$. Se $f(x) \cdot f''(x) > 0$, $f'(x) \neq 0$, $x \in J_\alpha$ $\forall x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$ Allora, preso $x_0 \in J_\alpha$, la successione definita dal metodo di Newton è CONVERGENTE in maniera MONOTONA.

Dato che il metodo di Newton richiede il calcolo della derivata ad ogni passo (costoso!)

↳ metodi QUASI NEWTON : - metodo delle SECANTI

- metodo di STEFFENSEN

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ se metodo SECANTI (non è IT. FUNZ. ma valgono le stesse considerazioni)

$f'(x) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$ se metodo STEFFENSEN

l'indice di CONDIZIONAMENTO è $\frac{1}{f'(\alpha)}$

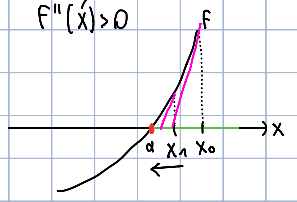
$f'(\alpha) \neq 0$ o $f'(\alpha) > 0 \Rightarrow f'(x)>0$ per x "vicini" ad α

o $f'(\alpha) < 0 \Rightarrow f'(x)<0$ per x "vicini" ad α

$f'(\alpha) > 0 \Rightarrow$

↳ ovvero $f(x)$ è CRESCENTE

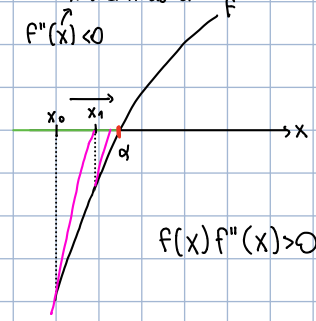
$f''(x) > 0$ (x vicini ad α)



$f(x)f''(x)>0$

o

$f''(x) < 0$ (x vicini ad α)

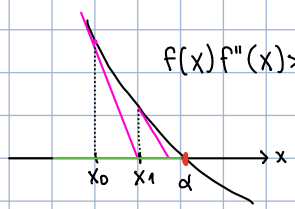


$f(x)f''(x)>0$

$f'(\alpha) < 0$

↳ ovvero $f(x)$ è DECRESCENTE

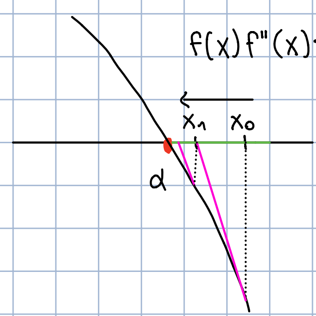
$f''(x) > 0$



$f(x)f''(x)>0$

o

$f''(x) < 0$



$f(x)f''(x)>0$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

→ radici SEMPLICI (ovvero $p=1$, ovvero $f'(\alpha)\neq 0$)

TEO: $f \in \overset{\text{CLASSE}}{C^2}(J_\alpha)$ $\quad J_\alpha = [\alpha - r, \alpha]$ tale che $f(x)f''(x)>0 \quad \forall x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$

allora $x_0 \in J_\alpha \setminus \{\alpha\} \Rightarrow x_k \nearrow \alpha$, $k \to +\infty$

↳ tende (la SUCCESSIONE) in maniera MONOTONA CRESCENTE ad α

DIM: se $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funzione crescente $\Rightarrow f(x) > 0 \quad x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$

(con $J_\alpha = [\alpha, \alpha + r]$)

se $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funz. decrescente $\Rightarrow f(x) < 0 \quad x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} > 0 \quad x \in J_\alpha$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \qquad \forall x_k \in J_\alpha$$

se $x_0 \in J_\alpha \setminus \{\alpha\} \Rightarrow x_k \in J_\alpha$? → per induz. $x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha) = \frac{f(\xi_k)f''(\xi_k)(x_k-\alpha)}{[f'(\xi_k)]^2}$

$\Rightarrow \alpha < x_{k+1} < x_k$ OK

[fragile]
Il metodo di Newton richiede ad ogni passo la valutazione del polinomio p_n e del suo derivato p'_n in un punto.

Sia z il punto , $p = p_n(z)$ e $dp = p'_n(z)$ possono essere calcolati con la seguente variante dell' **algoritmo di Horner**

```
p=a(n)
dp=p
for i=1 to n-1
        p=p*z+a(n-i)
        dp=dp*z+p
end
p=p*z+a(0)
```

Si basa sulla regola di Ruffini per determinare il polinomio $q_{n-1}(x)$ t.c.

$$p_n(x) = p_n(z) + q_{n-1}(x)(x - z)$$

e sull' osservazione

$$p'_n(x) = q'_{n-1}(x)(x - z) + q_{n-1}(x) \rightsquigarrow p'_n(z) = q_{n-1}(z)$$

Metodo delle secanti

Il metodo della secanti appartiene alla classe dei metodi quasi-Newton ed approssima la derivata $f'(x_k)$ con il rapporto incrementale costruito con i valori delle due iterate precedenti.

rapp. incrementale al posto di f'

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \dots \\ x_0, x_1 \quad \text{dati} \end{cases}$$

L'iterata x_{k+1} è l' intersezione con l'asse delle x della retta secante costruita con i punti $(x_k, f(x_k)), (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$. Vale

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k||e_{k-1}|} = c > 0 \rightsquigarrow$$

convergenza locale superlineare ma non quadratica!!

$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = L$

Da $|e_{k+1}| \approx L|e_k|^p$ si ottiene $\quad |e_k| \approx L|e_{k-1}|^p \Rightarrow |e_{k-1}| \approx \left(\frac{1}{L}|e_k|\right)^{\frac{1}{p}}$

$$|e_{k+1}| \approx c|e_k||e_{k-1}| \approx cL^{\frac{-1}{p}}|e_k|^{1+\frac{1}{p}} \approx L|e_k|^p$$

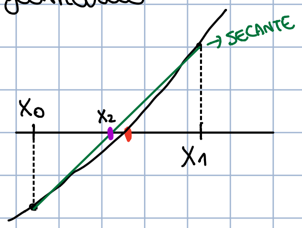
Pertanto

ordine $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots, \quad L = c^{\frac{1}{p}}$$

METODO DELLE SECANTI

sig. geometrico



$$\begin{cases} x_{k+1} = \underbrace{g(x_k, x_{k-1})}_{\text{dipende dai due precedenti}} \\ x_0, x_1 \text{ dati} \end{cases}$$

$x_k \to \alpha \qquad g(\alpha,\alpha) = \alpha$

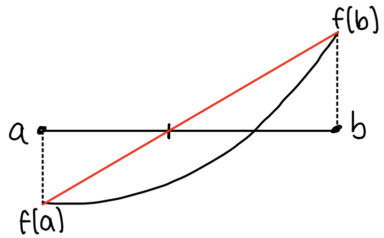
$$g(x,x') = x - \frac{f(x)(x-x')}{f(x)-f(x')}$$

Il metodo "regula falsi"

Il metodo "regula falsi" rappresenta una variante del metodo di bisezione, dove invece del punto medio viene proposta come approssimazione il valore ottenuto con la retta secante $(a, f(a)), (b, f(b))$

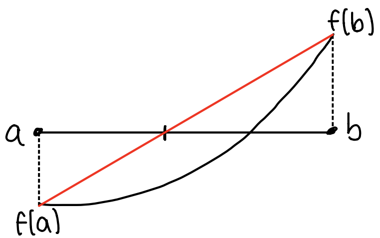
Come bisezione **converge** per funzioni continue

↳ funzioni definite per tutti i punti



Il metodo "regula falsi", continua

```
x=a; fa=eval(fun);
x=b; fb=eval(fun);
cv=a;
while it<nmax & err>toll
   c=(a*fb-b*fa)/(fb-fa);
   x=c;
   fc=eval(fun);
   fx=[fx;fc];
   xvect=[xvect;c];
   err=abs(c-cv);
  if (fc*fa > 0),
      fa=fc;   a=c;
   else
      fb=fc;   b=c;
   end
   cv=c;
   it=it+1;
end
```



Esempio: approssimare la radice quadrata di un numero

Per l'approssimazione della radice quadrata di un numero positivo a, i.e. $\alpha = \sqrt{a}$, si può risolvere il seguente problema

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

$\alpha = \sqrt{a}$ è radice semplice. Consideriamo il caso $a = 2$ e testiamo il comportamento dei vari metodi.

Ma prima esploriamo la storia di $\sqrt{2}$

Esempio: metodo di bisezione

$[a,b] = [1,2]$

k	x_k	ϵ_k
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.250000000000000	1.16e-01
3	1.375000000000000	2.77e-02
4	1.437500000000000	1.65e-02
5	1.406250000000000	5.63e-03
6	1.421875000000000	5.42e-03
7	1.414062500000000	1.07e-04
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
33	1.414213562267832	7.44e-11
34	1.414213562326040	3.33e-11
35	1.414213562355144	1.27e-11
36	1.414213562369696	2.40e-12
37	1.414213562376972	2.74e-12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
46	1.414213562373092	2.04e-15
47	1.414213562373099	2.98e-15
48	1.414213562373096	4.71e-16

Esempio: metodo a pendenza costante m=2

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.375000000000000	2.77e-02
3	1.429687500000000	1.09e-02
4	1.407684326171875	4.62e-03
5	1.416896745096892	1.90e-03
6	1.413098551963808	7.88e-04
7	1.414674793182702	3.26e-04
8	1.414022407949441	1.35e-04
9	1.414292722857873	5.60e-05
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
26	1.414213562348472	1.74e-11
27	1.414213562383294	7.21e-12
28	1.414213562368870	2.99e-12
29	1.414213562374845	1.24e-12
30	1.414213562372370	5.13e-13

$f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x > 0$

$x \in [1,2]$

$$g'(x) = \frac{1 - f'(x)}{\underbrace{m}_{=2}} \Rightarrow g'(\sqrt{2}) = 1 - \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\ell = |1 - \sqrt{2}| \approx |-0.4142|$$

Esempio: metodo a pendenza costante m=3

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.333333333333333	5.72e-02
2	1.407407407407407	4.81e-03
3	1.413808870598994	2.86e-04
4	1.414190363070860	1.64e-05
5	1.414212235403363	9.38e-07
6	1.414213486481837	5.37e-08
7	1.414213558032799	3.07e-09
8	1.414213562124869	1.75e-10
9	1.414213562358899	1.00e-11
10	1.414213562372283	5.74e-13
11	1.414213562373049	3.30e-14
12	1.414213562373092	1.88e-15
13	1.414213562373095	1.57e-16

$f(x) = x^2 - 2$
$f'(x) = 2x > 0$

$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m} = 1 - \frac{2}{3}x$

$g'(\alpha) = g'(\sqrt{2}) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\ell = |1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}| \approx 0.0572$$

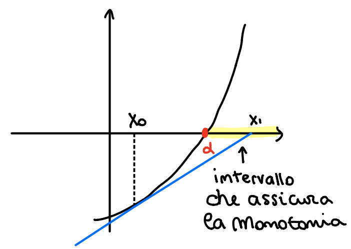
Esempio: metodo di Newton

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.416666666666667	1.74e-03
3	1.414215686274510	1.50e-06
4	1.414213562374690	1.13e-12
5	1.414213562373095	1.57e-16

$f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$



Esempio: metodo delle secanti

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	2.000000000000000	4.14e-01
2	1.333333333333333	5.72e-02
3	1.400000000000000	1.00e-02
4	1.414634146341463	2.97e-04
5	1.414211438474870	1.50e-06
6	1.414213562057320	2.23e-10
7	1.414213562373095	1.57e-16

Esempio: metodo regula falsi

k	x_k	ϵ_k
1	1.33333333333333	5.72e-02
2	1.40000000000000	1.00e-02
3	1.41176470588235	1.73e-03
4	1.41379310344828	2.97e-04
5	1.41414141414141	5.10e-05
6	1.41420118343195	8.75e-06
7	1.41421143847487	1.50e-06
8	1.41421319796954	2.58e-07
9	1.41421349985132	4.42e-08
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	1.41421356231892	3.83e-11
14	1.41421356236380	6.57e-12
15	1.41421356237150	1.13e-12
16	1.41421356237282	1.93e-13
17	1.41421356237305	3.34e-14
18	1.41421356237309	5.65e-15
19	1.41421356237309	9.42e-16
20	1.41421356237310	1.57e-16

Esercizio: Per l'approssimazione del reciproco di un numero positivo a, i.e. $\alpha = \frac{1}{a}$, si può risolvere il seguente problema $f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$. Scrivi la funzione di punto fisso per metodo di Newton e osserva che non sono coinvolte divisioni. Infine studia la convergenza.

– cerco la FUNZIONE DI PUNTO FISSO

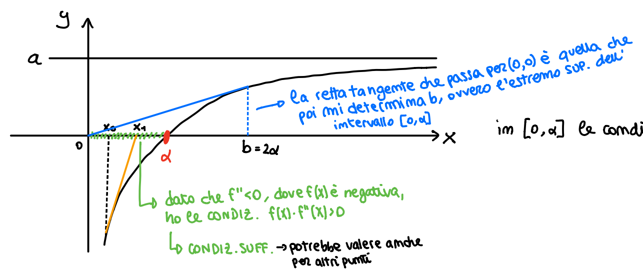
$$f(x) = a - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

FUNZ. P.FISSO (trovata col metodo di Newton)

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{ax-1}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} = x - ax^2 + x = 2x - ax^2$$

– STUDIO della CONVERGENZA: faccio il grafico



in $[0,\alpha]$ le condiz ($f \cdot f'' > 0$) sono verificate

COME TROVO b?

la generica retta tangente passante per 0: $0 = f(b) - f'(b) \cdot b$

$$a - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{b} \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a} \Rightarrow b = 2\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{1}{a}\right)$$

⇒ preso $x_0 \in (0,b)$ avremo che $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$

↳ $x_0 \in (0, 2\alpha)$

Condizionamento del problema

Consideriamo la funzione perturbata (e calcoliamone la RADICE)

$$\tilde{f}(x) = f(x) + e(x), \quad |e(x)| \leqslant \epsilon$$

una certa quantità epsilon

Osservazione: L' errore $e(x)$ potrebbe, per esempio, nascere dagli errori di arrotondamento nel calcolo della funzione $f(x)$.

Indichiamo con $\tilde{\alpha}$ la radice del problema perturbato, i.e. $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) = 0$.
In prima approssimazione si ottiene

$0 = \tilde{f}(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) + e(\tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = -e(\tilde{\alpha})$

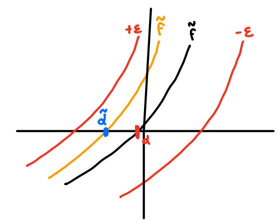
$$f(\tilde{\alpha}) = \cancel{f(\alpha)} + f'(\alpha)(\cancel{\tilde{\alpha} - \alpha}) = -e(\tilde{\alpha}),$$

tangente $= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{f(\tilde{\alpha}) - \cancel{f(\alpha)}}{\cancel{\tilde{\alpha} - \alpha}}$

da cui, assumendo $f'(\alpha) \neq 0$,

errore nella risposta

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| = \frac{|e(\tilde{\alpha})|}{|f'(\alpha)|} \leqslant \frac{\epsilon}{|f'(\alpha)|}.$$



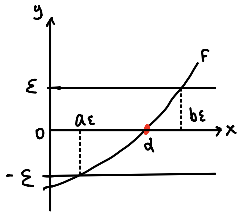
L'indice di condizionamento del problema è $\frac{1}{|f'(\alpha)|}$ e

se $f'(\alpha)$ è vicino a 0 il problema è MAL CONDIZ.

- $|f'(\alpha)| \approx 0 \rightsquigarrow$ problema **mal condizionato**
- $|f'(\alpha)| \gg 0 \rightsquigarrow$ problema **ben condizionato**.

Sia $[a_\epsilon, b_\epsilon]$ un intervallo che contiene α tale che

$$|f(x)| \leqslant \epsilon, \quad x \in [a_\epsilon, b_\epsilon].$$



- $x \notin [a_\epsilon, b_\epsilon]$: le due funzioni $\tilde{f}, f$ hanno lo stesso segno e $\tilde{f}(x)$ ci fornisce informazioni utili sulla localizzazione dello zero
- $x \in [a_\epsilon, b_\epsilon]$: il segno di $\tilde{f}(x)$ può essere positivo, negativo o zero senza nessuna relazione con il segno di $f(x)$

L'ampiezza di $[a_\epsilon, b_\epsilon]$ dipende dal condizionamento del problema: se è piccola, il problema è ben condizionato, se è grande il problema è mal condizionato.

Errori arrotondamento

Analizziamo ora l'effetto degli errori di arrotondamento nel calcolo delle iterate del metodo di iterazione funzionale. Sia $\tilde{x}_k$ il valore effettivamente calcolato e supponiamo che valga inoltre

$$\tilde{x}_{k+1} = g(\tilde{x}_k) + \delta_k,$$

↳ contiene tutti gli errori (nel calcolo)

$g \to \tilde{g}$ $\quad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{g}(\tilde{x}_k) = g(\tilde{x}_k) + \delta_k$

con

↳ una certa costante δ

$$|\delta_k| \leqslant \delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Nelle ipotesi del teorema di convergenza, si può dimostrare che, preso $\tilde{x}_0 \in I_\alpha$, vale

$|\tilde{x}_{k+1} - \alpha| = |g(\tilde{x}_k) + \delta_k - g(\alpha)| = |g'(\xi_k)(\tilde{x}_k - \alpha) + \delta_k| \leq \lambda|\tilde{x}_k - \alpha| + |\delta_k| \leq \lambda(\lambda|\tilde{x}_{k-1} - \alpha| + \delta) + \delta = \lambda^2|\tilde{x}_{k-1} - \alpha| + (1-\lambda)\delta$

↳ uso teo. val. medio

↳ δ

$\sum_{i=1}^{k} \lambda^i = \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}$

$$|\tilde{x}_k - \alpha| \leqslant \lambda^k|\tilde{x}_0 - \alpha| + \sigma(1 - \lambda^k) \leqslant \sigma + \lambda^k(r - \sigma)$$

↳ l'errore all'iterata k-esima

↳ δ

dove $\lambda := \max_{x \in I\alpha} |g'(x)|$ e $\sigma := \frac{\delta}{1-\lambda}$.

Tale risultato dimostra che i valori effettivamente calcolati $\tilde{x}_k$ possono non avvicinarsi arbitrariamente ad α ma che, scegliendo un intorno circolare di α con raggio maggiore di σ la successione $\tilde{x}_k$ appartiene definitivamente a tale intorno. Pertanto σ ci fornisce una misura dell'incertezza con cui è possibile determinare la soluzione per effetto degli errori di arrotondamento. Analogo risultato vale per l'errore relativo.

 TECNICHE DI ACCELERAZIONE

PUNTO DI PARTENZA: abbiamo una successione che converge linearmente

Sia $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$ una successione che converge linearmente ad α in un opportuno intorno.

Si vuole costruire una nuova successione $(\bar{x}_k)_{k \geqslant 0}$ che converge ad α **più velocemente**. i.e.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\bar{x}_k - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 0$$

vince il numeratore, ovvero il numeratore tende a 0 più velocemente rispetto al denominatore

per T. VAL MEDIO:

$$x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha(1 - g'(\xi_k)) = x_{k+1} - g'(\xi_k)x_k$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x_{k+1} - g'(\xi_k)x_k \pm x_k}{1 - g'(\xi_k)}$$

$$= \frac{x_k(1 - g'(\xi_k)) + x_{k+1} - x_k}{1 - g'(\xi_k)}$$

Metodo di Aitken, continua

Dal teorema del valor medio si ricava

per T. VAL MEDIO:

$X_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$

$\Rightarrow \alpha(1 - g'(\xi_k)) = x_{k+1} - g'(\xi_k)x_k$

$\Rightarrow \alpha = \frac{x_{k+1} - g'(\xi_k)x_k \pm x_k}{1 - g'(\xi_k)}$

$= \frac{x_k \cdot (1 - g'(\xi_k)) + x_{k+1} - x_k}{1 - g'(\xi_k)}$

$$\alpha = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{1 - g'(\xi_k)}$$

e

non lo conosciamo, costruiamo un'approssimaz.

$$g'(\xi_k) \approx \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}$$

da cui si ottiene

sostituisco al posto di $g'(\xi_k)$

$$\bar{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

che converge più velocemente

quindi con x_0, x_1, x_2 costruisco $\bar{x}_0$

con x_1, x_2, x_3 costruisco $\bar{x}_1$

x_0	
x_1	
x_2	$\bar{x}_0$
x_3	$\bar{x}_1$
x_4	$\bar{x}_2$
$\downarrow$	$\downarrow$
tendono ad α	α

ma quella con $\bar{x}$ è più veloce

→ usa 3 valori.

Domanda: perchè non utilizzare i vecchi $\bar{x}$ per il calcolo di nuovi $\bar{x}$ (al posto che usare x)?

↳ nasce il METODO DI STEFFENSEN

Metodo di Steffensen

Per accelerare la convergenza lineare di $x_{k+1} = g(x_k)$, risulta più efficace della tecnica di Aitken, il **metodo di Steffensen** che riparte con il nuovo valore $\bar{x}_k$ secondo la schema iterativo

$$
\begin{aligned}
y_k &= g(x_k), z_k = g(y_k) \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

x_0

del metodo di Aitkem [è $x_1 \rightarrow y_0 = g(x_0)$

è $x_2 \rightarrow z_0 = g(y_0)$

$x_1 \rightarrow$ nuova iterata

Ha ordine di convergenza almeno **quadratico**.

Osservazione: Per $g(x) = x + f(x)$ il metodo di Steffensen si riscrive

$g(x_k) - x_k$, $g(x_k) \rightarrow y_k$

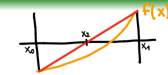
$$
x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots
$$

(metodo di quasi-Newton)

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$$

Metodo di Muller

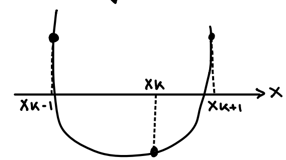
ha ordine di conv. $p \simeq 1,6$



Il metodo delle secanti usa la retta (=polinomio di grado 1) che passa per (= interpola) $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ per calcolare l'iterata x_{k+1}.

Allora MULLER propone, al posto di usare una retta secante, una PARABOLA

Un metodo con ordine di convergenza piú alto ($p \approx 1.839$) può essere ottenuto usando la parabola (=polinomio di grado 2) che interpola $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ (**metodo di Muller**).



Si possono considerare anche polinomi di grado $n > 2$, ma

- possono non avere zeri reali
- gli zeri possono essere difficili da calcolare
- la scelta della radice da usare come iterata successiva può non essere ovvia

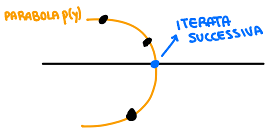
Metodo dell'interpolazione inversa

IDEA: Invece che andare a costruire la parabola, ribalto il problema e considero la parabola come funzione di y (invece che x), che passa per i 3 punti di prima

Un'alternativa è data dall'interpolazione inversa dove i valori x_k sono interpolati come funzioni di $y_k = f(x_k)$ da un polinomio $p(y)$ e l'iterata successiva è data da $p(0)$.

Per il polinomio di grado 2 con $a = x_{k-2}, b = x_{k-1}, c = x_k$ con valori $fa = f(x_{k-2}), fb = f(x_{k-1}), fc = f(x_k)$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&u = \tfrac{fb}{fa}, v = \tfrac{fb}{fa}, w = \tfrac{fa}{fc} \\
&n = v(w(u-w)(c-b) - (1-u)(b-a)), \\
&d = (w-1)(u-1)(v-1)
\end{aligned}
$$



e la nuova iterata è

$$x_{k+1} = b + \frac{n}{d}$$

L'ordine di convergenza del metodo di **interpolazione quadratica inversa (IQI)** è $p \approx 1.839$.

↳ costruisce una funzione che passa per dei punti

↳ perchè usa una parabola

↳ ribalto x con y

L'algoritmo di Brent

I metodi rapidamente convergenti per convergere hanno bisogno di una stima iniziale sufficientemente accurata, mentre quelli 'lenti' sono più costosi ma sicuri.

Una soluzione è fornita dai **metodi ibridi** che combinano le caratteristiche dei metodi veloci e dei metodi lenti.

L'**algoritmo di Brent** cerca di combinare l'affidabilità dell'algoritmo di bisezione con la velocità del metodo delle secanti o dell'interpolazione quadratica inversa ed è il metodo implementato dalla funzione *fzero* di MATLAB.

Tale algoritmo è stato proposto inizialmente da T. Dekker. Successivamente Richard Brent in "Algorithms for Minimization Without Derivatives" [1973] ha fornito alcuni miglioramenti. Una versione Fortran si trova in Forsythe, Malcolm and Moler, "Computer Methods for Mathematical Computations" [1976] esercizio CS 07/02/2019

3. Sia $f(x) = e^{-2x^3+9x^2-1} - 1$.

- Determina una funzione F la cui valutazione non utilizza la funzione esponenziale in modo che $F(x) = 0$ sia equivalente al problema $f(x) = 0$. Disegna il grafico di F e localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$.
- Determina il massimo intervallo di convergenza ad α del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
- Determina il massimo intervallo di convergenza a γ del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

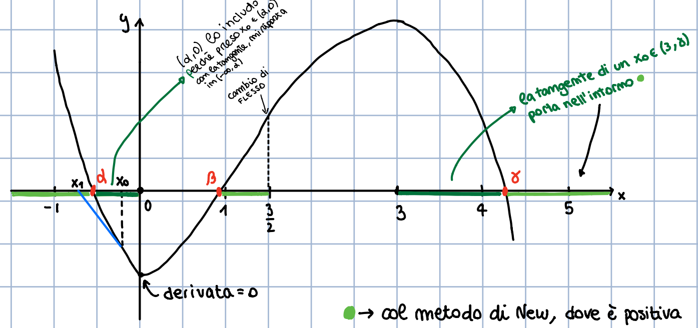
$f(x) = e^{-2x^3+9x^2-1} - 1 = 0 \overset{?}{\iff} F(x) = 0$ $\Rightarrow$ l'esponenziale $e^x - 1 = 0$ sse $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow F(x) = -2x^3 + 9x^2 - 1$ $\quad \alpha < \beta < \gamma$

$F'(x) = -6x^2 + 18x = 6x(-x+3)$ $\quad x_{1,2} = 3, 0$ (MAX/MIN)

$F''(x) = -12x + 18 = 6(-2x+3)$ $\quad x_{1,2} = \frac{3}{2}$ (FLESSO)

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$



VALORI:

$F(0) = -1$

$F(3) = 26$

$F(-1) = 10 > 0$

$F(4) = > 0$

$F(5) = -1 < 0$

→ col metodo di New, dove è positiva

$\alpha \in (-1, 0)$

$\beta \in (0, 1)$

$\gamma \in (4, 5)$

α: $\forall x_0 \in (-\infty, 0)$ la successione del metodo di Newton CONVERGE ad α con ordine $p = 2$ (der. seconda $\neq 0$) → QUADRATICO

Inoltre $x_0 < \alpha \Rightarrow x_k \nearrow \alpha$ (converge) monotona crescente

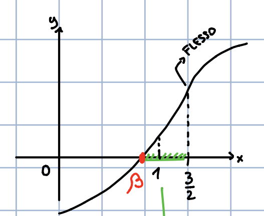
$x_0 \in (\alpha, 0) \Rightarrow x_k \nearrow \alpha$ " " , $k \geq 1$

γ: $\forall x_0 \in (3, +\infty)$ la successione del metodo di Newton CONVERGE a γ con $p = 2$

Inoltre $x_0 > \gamma \Rightarrow x_k \searrow \gamma$ (converge) monotona decrescente

$x_0 \in (3, \gamma) \Rightarrow x_k \searrow \gamma$ " " , $k \geq 1$

β:



$x_0 \in (\beta, 3/2) \Rightarrow x_k \searrow \beta$, $k \to +\infty$ con ordine $p = 2$

$F \cdot F'' > 0$ → CONVERGENZA ASSICURATA

RIPASSO: per determinare p → col metodo di Newton

RADICE SEMPLICE α t.c. $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$ se $g''(\alpha) \neq 0$ allora $p = 2$ (se $f''(\alpha) \neq 0$)

ho finito 7 aprile