Zeri di funzione

Es: legge dei gas (van der Waals)

$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$ con p = pressione del gas, v volume occupato, R = costante universale dei gas, T temperatura, a, b costanti relative al gas

Questa legge descrive meglio lo stato gassoso ad alte pressioni e in prossimità del punto di ebollizione rispetto alla legge dei gas perfetti $pv = RT$

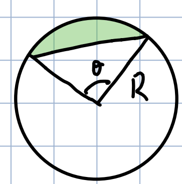
Assegnati p e T, il calcolo del volume v per un certo gas richiede la ricerca della radice dell equazione

$$\left(p+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT=0$$

Es: Area del segmento circolare di raggio R: $A=\frac{R^2}{2}(\theta-\sin\theta)$

Se l'area e il raggio sono assegnati, per determinare l'angolo corrispondente dobbiamo calcolare la radice dell'equazione

$$A-\frac{R^2}{2}(x-\sin x)=0$$



Ricerca degli zeri di una funzione

Data una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (scalare) continua, trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(\alpha) = 0$$

α si chiama radice dell'equazione $f(x)=0$ oppure zero della funzione

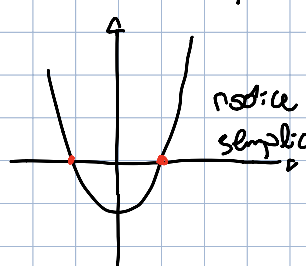
Prima domanda: c'è una soluzione? → corrisponde a trovare i punti del grafico di f in cui la funzione si interseca con l'asse x

↳ Dipende dalla funzione stessa
(zero, una, infinite, ...)

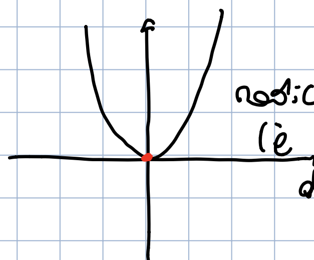
Inoltre le radici possono essere semplici oppure multiple

molteplicità k: α è radice fino alla derivata k-esima esclusa

es:



radice semplice



radice multipla
(è anche radice della derivata)

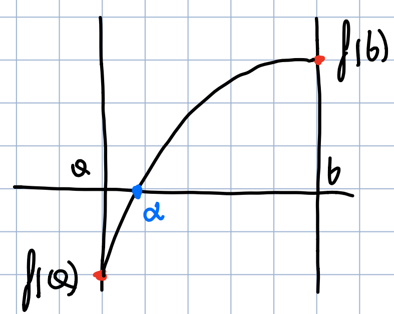
Localizzazione della radice

Dobbiamo prima di tutto trovare un intervallo $[a,b]$ di ampiezza sufficientemente piccola che contenga la radice α cercata

↓

Lo facciamo attraverso il seguente teorema:

Teorema Sia f una funzione continua in $[a,b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$ (segno opposto). Allora f ha almeno uno zero α in $[a,b]$



Un intervallo $[a,b]$ in cui la funzione f assume segno opposto agli estremi si chiama intervallo di localizzazione ("bracket")

Per individuare un valore approssimato della radice all'interno dell'intervallo si possono usare diversi metodi:

↓

Un metodo semplice per individuare α è il metodo di bisezione:

Dato $[a,b]$ t.c. $f(a)f(b) < 0$, tale metodo a ogni passo dimezza l'ampiezza dell'intervallo di localizzazione e individua la metà che contiene la radice cercata (sempre valutando il segno della funzione) finché non raggiunge l'accuratezza cercata tol

```
if sign(fa)==sign(fb)
    'attenzione segno concorde agli estremi';  return
else
    while (|b-a|>tol)
       m=a+(b-a)/2
       fm=f(m)
       if fm==0  return end
       if sign(fa)==sign(fm)
            a=m;    fa=fm
       else
            b=m;    fb=fm
       end
    end
end
```

Il metodo di bisezione converge sempre per funzioni continue

Il numero di iterazioni necessarie per ottenere un'intervallo di localizzazione di ampiezza prefissata tol è

$$K = \left\lceil \log_2 \frac{|b-a|}{tol} \right\rceil$$

Non dipende dalla funzione considerata, ma solo dall'ampiezza dell'intervallo di localizzazione iniziale

Per $|b-a| = 1$ e $tol = 10^{-7}$ sono necessarie $K = 7 \cdot 3.32192 = 24$ iterazioni, mentre per $tol = 10^{-1}$ ne servono 4 → è un algoritmo lento

Per stimare l'errore compiuto approssimando α scegliamo $\tilde{\alpha} = m = \frac{a+b}{2}$ dopo K iterazioni

Il test dell'algoritmo testa l'errore assoluto, fornendo la seguente limitazione:

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq \frac{|b-a|}{2} \leq \frac{tol}{2}$$

In analisi numerica, dove le quantità possono avere ordini di grandezza molto variabili è generalmente più opportuno controllare l'errore relativo

↳ Modificando il test come

```
while ({|b-a|}/{min(|a|,|b|)} > tol)
```

si ottiene la stima dell'errore relativo:

$$\frac{|\alpha - \tilde{\alpha}|}{|\alpha|} \leq \frac{|b-a|}{2\min\{|b|,|a|\}} \leq \frac{tol}{2}$$

(questo non funziona se $\min\{|a|,|b|\} \approx 0$)

Metodo di iterazione funzionale

Riformuliamo il problema di trovare uno zero di funzione in quello di trovare un punto fisso

$$f(x) = 0 \quad \text{zeri di funzione} \iff x = g(x) \quad \text{punto fisso}$$

I problemi sono matematicamente equivalenti se hanno le stesse soluzioni nell'intervallo di interesse

Al problema di punto fisso associamo uno schema iterativo "metodo di iterazione funzionale":

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k), & k = 0, 1, \dots \\ x_0 & \text{dato} \end{cases}$$

La funzione g è detta funzione di iterazione

Se g è continua e la successione x_k $k \geq 0$ è convergente, converge a un punto fisso di g (ovvero $\alpha = g(\alpha)$) e quindi a uno zero di f (ovvero $f(\alpha) = 0$)

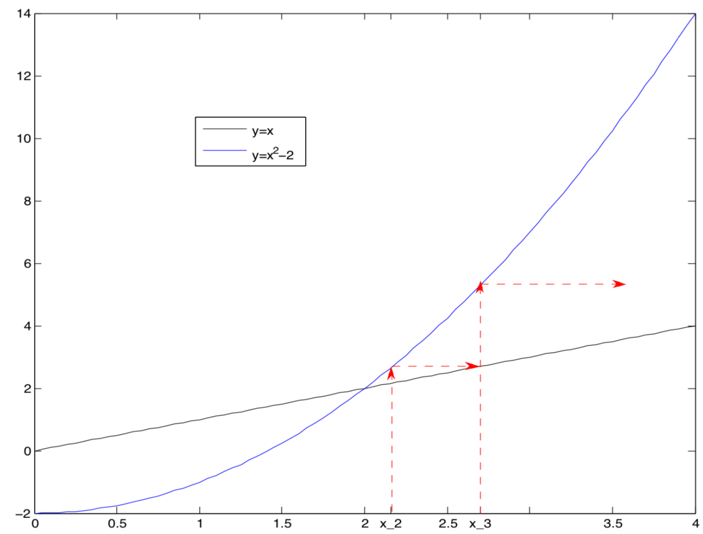
es: $f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2$

Scegliamo $x_0 = 2.01$; otteniamo una successione non convergente:

$$g(x_0) = (2.01)^2 - 2 = 4.0401 - 2 = \underbrace{2.0401}_{> 2.01} = x_1$$

il punto fisso è repulsivo

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	2.0100	5.0000e-03
1	2.0401	2.0050e-02
2	2.1620	8.1004e-02
3	2.6743	3.3714e-01
4	5.1518	5.1518
5	2.4541e+01	11.1270e+01
6	6.0025e+02	2.9912e+02
7	3.6029e+05	1.8015e+05
8	1.2981e+11	6.4905e+10

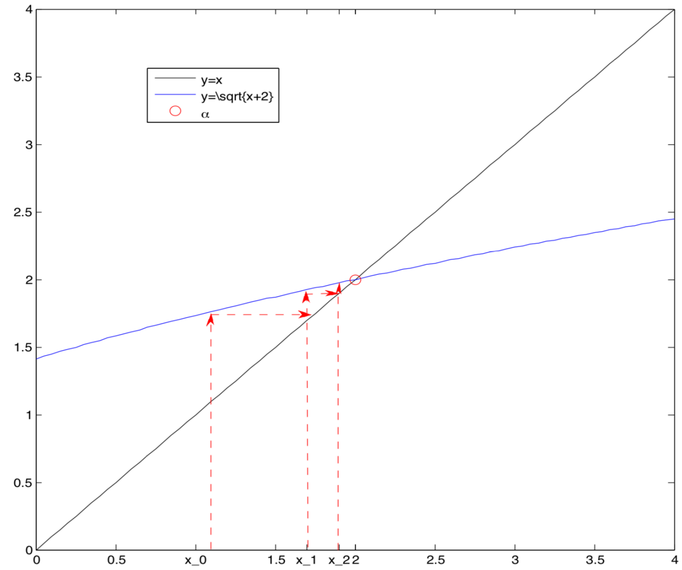


Troviamo un'altra g: $f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \sqrt{x+2} = g(x)$

scegliamo $x_0 = 1$

↳ otteniamo una successione monotona convergente, il punto fisso è attrattivo

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert/\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000000	5.0000e-01	
1	1.73205080	1.3397e-01	2.6795e-01
2	1.93185165	3.4074e-02	2.5433e-01
3	1.98288972	8.5551e-03	2.5107e-01
4	1.99571784	2.1411e-03	2.5027e-01
5	1.99892917	5.3541e-04	2.5007e-01
6	1.99973227	1.3386e-04	2.5002e-01
7	1.99993306	3.3466e-05	2.5000e-01
8	1.99998326	8.3666e-06	2.500041e-01
9	1.99999581	2.0916e-06	2.500002e-01
10	1.99999895	5.2291e-07	2.5000006e-01

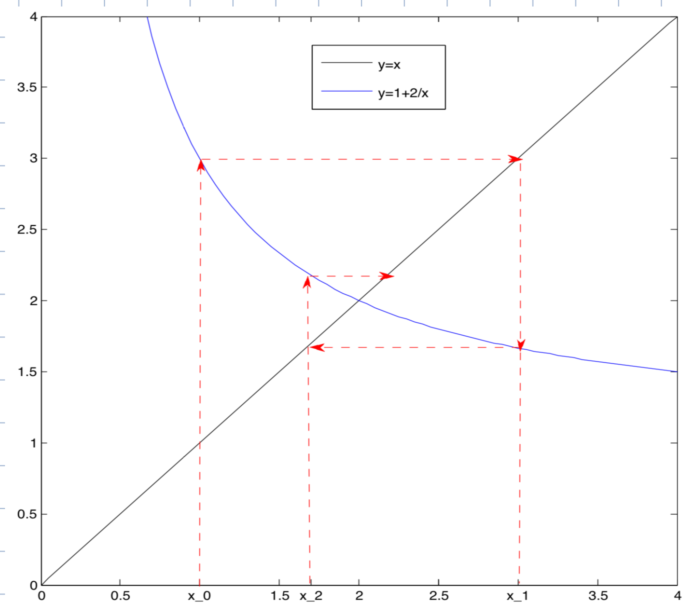


Oss: il rapporto fra gli errori in passi successivi $\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|}$ tende a $\frac{1}{4} = 2.5e-1$ → fornisce una stima della velocità di convergenza

$f(x) = x^2 - x - 2 \iff x^2 = x + 2 \iff x = 1 + \frac{2}{x} = g(x)$

Scelto $x_0 = 1$, si ottiene una successione convergente in maniera alternata; il punto fisso è attrattivo

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert/\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000	5.0000e-01	
1	3.0000	5.0000e-01	1.0
2	1.6667	1.6667e-01	3.3333e-01
3	2.2000	1.0000e-01	6.0000e-01
4	1.9091	4.5455e-02	4.5455e-01
5	2.0476	2.3810e-02	4.8837e-01
6	1.9767	1.1628e-02	4.8837e-01
7	2.0118	5.8824e-03	5.0588e-01
8	1.9942	2.9240e-03	4.9708e-01
9	2.0029	1.4663e-03	5.0147e-01
10	1.9985	7.3206e-04	4.9927e-01

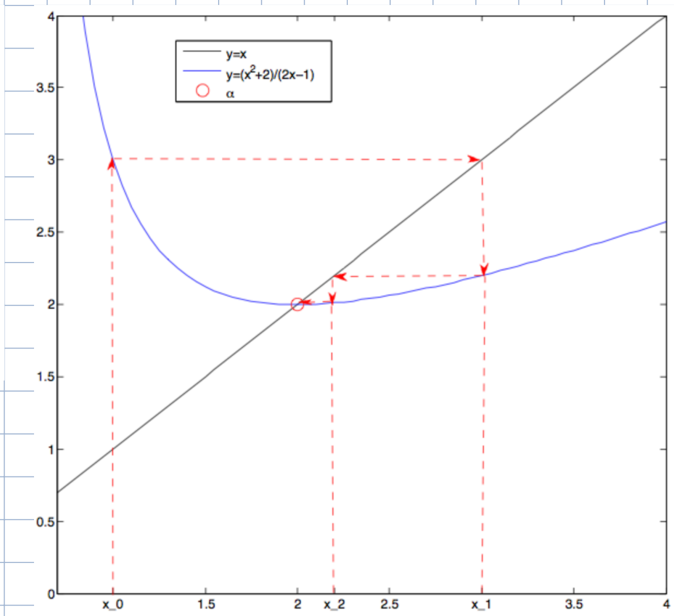


Il rapporto fra gli errori tende a $\frac{1}{2} = 5.0e-1$ → questo metodo risulta essere più lento del precedente

$f(x) = x^2 - x - 2 \iff 2x^2 - x - x^2 - 2 \iff 2x^2 - x = x^2 + 2 \iff x = \frac{x^2+2}{2x-1} = g(x)$

$x_0 = 1$, successione monotona convergente per $k \geq 1$

k	x_k	$\lvert\varepsilon_k\rvert$	$\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert/\lvert\varepsilon_k\rvert$
0	1.0000000	5.0000e-01	
1	3.0000000	5.0000e-01	1.0
2	2.20000000	1.0000e-01	2.0000e-01
3	2.01176470	5.8824e-03	5.8824e-02
4	2.00004578	2.2889e-05	3.8911e-03
5	2.0000000006942	3.4925e-10	1.5259e-05
6	2.00000000	0 $< u$	0



In questo caso l'errore tende a zero molto rapidamente e la riduzione degli errori risulta essere di tipo quadratico

Convergenza locale del metodo di iterazione funzionale

Teorema: Sia α un punto fisso di g, ovvero $g(\alpha)=\alpha$, e sia g derivabile con continuità in un intorno circolare $I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$, $r>0$.
Se

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{per ogni } x \in I_\alpha \quad *$$

allora, preso $x_0 \in I_\alpha$, la successione x_k, $k=0,1,\dots$ definita da

$$\begin{cases} x_k = g(x_{k-1}), & k>0 \\ x_0 \end{cases}$$

appartiene a I_α e converge a α. Inoltre α è l'unico punto fisso in I_α

Dim: Per definizione $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = g(x_k) - g(\alpha)$

Per il teorema del valore medio esiste un punto $\xi_k \in [x_k, \alpha]$ tale che

$$g'(\xi_k) = \frac{g(x_k) - g(\alpha)}{x_k - \alpha} \Rightarrow g(x_k) - g(\alpha) = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

Si dimostra per induzione che $|e_k| \leq \lambda^k |e_0| \leq \lambda^k r \leq r$ con $\lambda = \max_{x \in I_\alpha}\{|g'(x)|\} < 1$ e la convergenza segue $\{e_0$ r di $[\alpha - r, \alpha + r]$

Infine se per assurdo esiste $\beta = g(\beta)$ e $\beta \neq \alpha$, allora esiste ξ tale che $|\beta - \alpha| = |g(\beta) - g(\alpha)| = \underbrace{|g'(\xi)|}_{<1 \text{ per ip.}} |\beta - \alpha| < |\beta - \alpha|$. Ne segue che $\beta - \alpha$

Osservazioni:

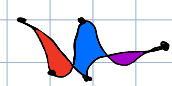
Poiché α non è noto, la richiesta che la condizione * valga in un intorno circolare I_α è piuttosto restrittiva

- Se la condizione * è verificata in un intervallo $[a,b]$ contenente α nella sua parte interna, le ipotesi sono verificate anche nel massimo intervallo circolare I_α contenuto in $[a,b]$. La convergenza è assicurata se x_0 è l'estremo più vicino ad α

- Se $g'(x) > 0$ in $[a,b]$, la successione è monotona e x_0 può essere scelto indifferentemente come uno dei due estremi. Inoltre in questo caso è sufficiente che * valga in $[a, \alpha[$ con $x_0 = a$ o in $]\alpha, b]$ con $x_0 = b$

- Se $g'(x) < 0$ in $[a,b]$ la successione è alternata e se non si può stabilire quale dei due estremi sia il più vicino ad α si può scegliere come x_0 uno dei due e vedere:
  - se $x_1 \in [a,b]$ la successione converge
  - se $x_1 \notin [a,b]$ si cambia l'estremo scelto come x_0 e la successione converge

In realtà il metodo di iterazione funzionale converge anche per condizioni diverse da quelle del Teorema



Per il Teorema del valore medio

↳ Si può assumere $\xi \neq \alpha, x$ perché non sarà mai uguale agli estremi

Inoltre si può considerare $|g'(x)| < 1, \quad 0 < |x-\alpha| < r$ → Per continuità risulta $|g'(x)| \leq 1$ per $x = \alpha, \alpha+r, \alpha-r$

Se x è vicino a α, allora anche $g'(\alpha) \simeq 1$ → le successioni generate convergono molto lentamente

Per avere informazioni sulla velocità di convergenza dobbiamo quindi guardare $g'(\alpha)$

↓

se $g'(\alpha) \simeq 1$ le successioni convergono molto lentamente

Conclusioni sulla convergenza

$e_{k+1} = g'(\xi_k)\, e_k$

$g'(\xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} g'(\alpha)$

quindi: $e_{k+1} \approx g'(\alpha)\, e_k$ per $k \gg 0$

- Se $|g'(\alpha)| < 1$, per continuità di g' $\exists\, I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$ tale che $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in I_\alpha$ → convergenza locale
  (e $g(\alpha) = \alpha$, ovvero α punto fisso)
  - Se $0 < g'(\alpha) < 1$ allora anche $0 < g'(x) < 1$ per $x \in I_\alpha$ → convergenza monotona
  - Se $-1 < g'(\alpha) < 0$ allora anche $-1 < g'(x) < 0$ per $x \in I_\alpha$
    la convergenza alternata
- Se $g'(\alpha) = 0$ si ha convergenza locale e il comportamento può non essere né monotono né alternato
- Se $|g'(\alpha)| = 1$ e $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in I_\alpha$, $x \neq \alpha$ la successione converge lentamente
- Se $|g'(\alpha)| > 1$ non c'è convergenza → punto fisso repulsivo

* Infatti: per def il coefficiente di riduzione è $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{g(x_k) - g(\alpha)}{x_k - g(\alpha)} = g'(\xi_k)$

Misurare la velocità di convergenza

La velocità di convergenza è indicata dal coefficiente di riduzione dell'errore $|g'(\xi_k)|$*

(Infatti: più velocemente si riduce l'errore meno iterazioni sono richieste)

Poiché $g'(\xi_k) \to g'(\alpha)$ possiamo usare $g'(\alpha)$ come indice di velocità

Studiamo il rapporto degli errori (al limite):

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \ell$$

- Se $\ell = 1$ si ha convergenza sublineare
- Se $0 < \ell < 1$ si parla di convergenza lineare o di ordine di convergenza $p = 1$
- Se $\ell = 0$ la convergenza è superlineare (molto veloce!)

ℓ viene chiamato fattore asintotico di riduzione

Per il metodo di iterazione funzionale si ha $\ell = |g'(\alpha)|$

Una successione ha ordine di convergenza p, $p \in \mathbb{R}^+$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = L > 0$$

Se g è derivabile con continuità fino all'ordine $p \geq 2$ in un intorno del punto fisso α allora il metodo di iterazione funzionale ha ordine di convergenza p sse:

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad e \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

(ovvero la derivata p-esima è la prima derivata $\neq 0$)

e vale $L = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$

Riassunto

Se $|g'(\alpha)| < 1$ allora $\exists\, I_\alpha = [\alpha - r, \alpha + r]$ t.c. preso $x_0 \in I_\alpha$ l'iterazione funzionale converge ad α

Se $g'(\alpha) \neq 0$ la convergenza è lineare, mentre se vale la condizione sopra il metodo converge con ordine p e $L = \left|\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|$

Criterio di arresto

Assegnata una precisione Tol, si può cercare di controllare:

- l'errore assoluto con $|x_{k+1} - x_k|^* < tol \rightarrow$ si ottiene $|x_k - \alpha| = \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{g'(\xi_k) - 1}\right| < \frac{tol}{|g'(\xi_k) - 1|}$
- l'errore relativo con $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{\min\{|x_{k+1}|, |x_k|\}} < Tol$

$\rightarrow$ si ottiene $\frac{|x_k - \alpha|}{|\alpha|} = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|\alpha|\,|g'(\xi_k) - 1|} < \frac{tol \cdot \min\{|x_{k+1}|, |x_k|\}}{|\alpha|\,|g'(\xi_k) - 1|}$

* Infatti:

$$\frac{g(x_k) - g(\alpha)}{x_k - \alpha} = g'(\xi_k)$$

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = g'(\xi_k)$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k + x_k - \alpha}{x_k - \alpha} = g'(\xi_k)$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - \alpha} = g'(\xi_k) - 1$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{g'(\xi_k) - 1} = x_k - \alpha$$

In entrambi i casi si ha che l'errore commesso può essere tanto più grande della precisione tol fissata se $g'(\xi_k) \approx 1$

Con il criterio d'arresto $|f(x_k)| < tol$ si ottiene $|x_k - \alpha| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi_k)|} < \frac{Tol}{|f'(\xi_k)|}$

Può non essere soddisfacente se $f'(\xi_k) \approx 0$

Metodi di iterazione funzionale

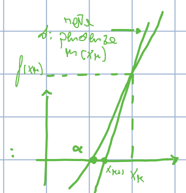
Una classe di metodi di iterazione funzionale può essere costruita definendo una funzione di punto fisso come segue:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{m(x)} \longrightarrow \text{funzione che dipende dal metodo particolare usato}$$

L'iterata $k+1$-esima è:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m(x_k)}$$

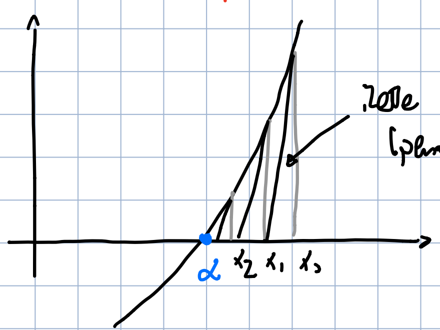
$\longrightarrow$ significato geometrico:



ed è l'intersezione con l'asse delle x della retta che passa per $(x_k, f(x_k))$ con coefficiente angolare $m(x_k)$

- Se $m(x) = m \longrightarrow$ metodo a pendenza costante
- Se $m(x) = f'(x) \longrightarrow$ metodo di Newton o delle tangenti

Metodo a pendenza costante



$$g(x) = x - \frac{f(x)}{m} \implies g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$$

Devo trovare un m tale che:

$$|g'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{m}\right| < 1 \quad \forall x \in I_\alpha$$

Questo si ha sse $\quad 0 < \frac{f'(x)}{m} < 2 \quad \forall x \in I_\alpha$

$f'(x)$ e m devono avere lo stesso segno

Quindi devo avere che $f'(x) > 0 \iff m > 0$ e $|m| > \frac{1}{2} \max |f'(x)|$

Una scelta sbagliata per m può dare origine a un metodo NON CONVERGENTE

↳ Si potrebbe porre $m = f'(x_0)$, $x_0 \in I_\alpha$, in modo che $|f'(x_0)| > \frac{1}{2} \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)| \longrightarrow$ convergenza assicurata

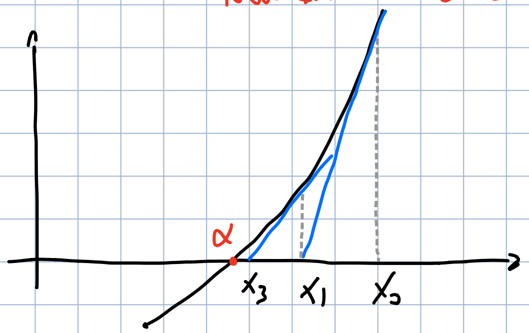
Se $f'(\alpha) \neq m$ il metodo converge linearmente, mentre ha convergenza superlineare se $f'(\alpha) = m$

Se α è una radice multipla e $|g'(x)| < 1$ con $x \neq \alpha$, si ha convergenza sublineare

$\Downarrow$

$f'(\alpha) = 0 \longrightarrow g'(\alpha) = 1$ convergenza sublineare

Metodo di Newton o delle Tangenti



Vale:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 \text{ dato} \end{cases}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)\cdot f''(x)}{f'^2(x)} = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)}$$

$g'(\alpha) = 0 \implies$ Convergenza superlineare se α è radice semplice

(ovvero non multipla) $\to f(\alpha)=0$ ma $f'(\alpha)\neq 0$

↳ Perché $g'(\alpha) = \dfrac{\overset{=0}{f(\alpha)}\, f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$

$f''(\alpha) = 0 \implies g''(\alpha) = 0 \quad p > 2$

$f''(\alpha) \neq 0 \implies g''(\alpha) \neq 0 \quad p = 2$

Inoltre da $g''(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ possiamo dedurre che il metodo converge almeno quadraticamente (e ancora più velocemente se $f''(\alpha) = 0$)

Infatti: se $f''(\alpha) \neq 0$ il metodo ha ordine $p = 2 \to$ convergenza quadratica

se $f''(\alpha) = 0$ $p \geq 3 \to$ convergenza almeno cubica

$p=2 \quad 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \dots$

$p=3 \quad 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-9}, 10^{-27}, \dots$

Attenzione: se α è radice multipla la convergenza non è più superlineare:

$$g(x) = x - \frac{\overset{=0 \text{ per } x=\alpha}{f(x)}}{\underset{=0 \text{ per } x=\alpha}{f'(x)}} = \frac{0}{0}$$

Però sappiamo che se α è una radice di molteplicità μ, allora può essere scritta come

$$f(x) = (x-\alpha)^{\mu}\, h(x)$$

$h(x)$ funzione continua t.c. $h(\alpha) \neq 0$

Si ha che $g'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mu} < 1 \to$ convergenza lineare e monotona (non più superlineare)

In particolare, per radici doppie il fattore di riduzione asintotica dell'errore è $l = \dfrac{1}{2}$, come per il metodo di bisezione

Teorema (Condizioni sufficienti per la convergenza del metodo di Newton)

Sia $J_\alpha = [\alpha, \alpha + r]$ (o $[\alpha - r, \alpha]$), $r > 0$ e $f \in C^2(J_\alpha)$

Se
$$f(x) \cdot f''(x) > 0, \quad f'(x) \neq 0, \quad x \in J_\alpha, \quad x \neq \alpha$$

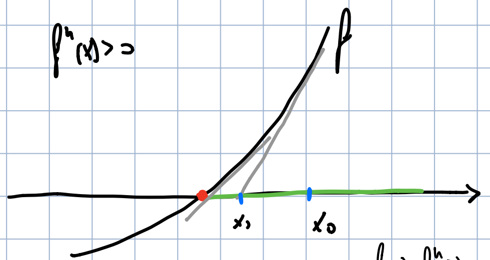
Allora, preso $x_0 \in J_\alpha$, la successione definita dal metodo di Newton è convergente in maniera monotona

Spiegazione: supponiamo $f'(\alpha) \neq 0$; abbiamo due possibilità: $f'(\alpha) < 0$, $f'(\alpha) > 0$

In ogni caso $f'(x)$ mantiene lo stesso segno di $f'(\alpha)$ per x "vicini" ad α

CASO $f'(\alpha) > 0$

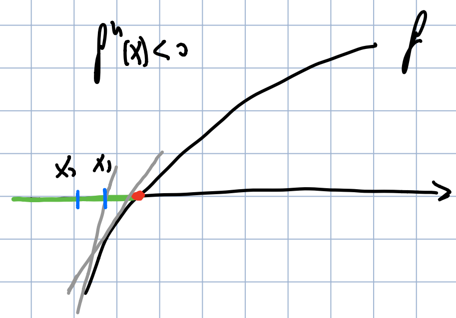
$f''(x) > 0$



Considero dove $f(x) \cdot f''(x) > 0$

In questo intervallo la successione converge in maniera monotona

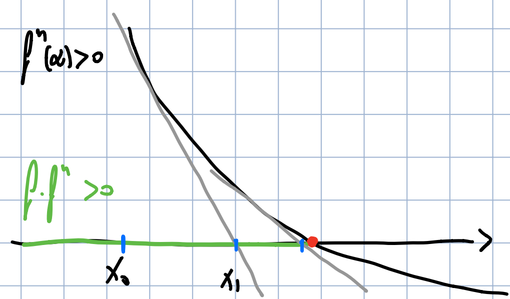
$f''(x) < 0$



CASO $f'(\alpha) < 0$

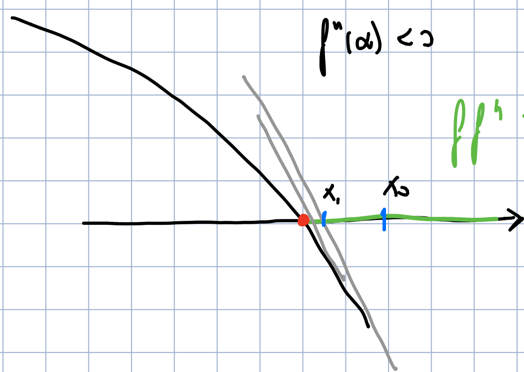
$f''(\alpha) > 0$

$f \cdot f'' > 0$



$f''(\alpha) < 0$

$f f'' > 0$



Queste sono condizioni sufficienti → Potrebbero esserci punti che non rispettano le condizioni ma generano comunque convergenza locale
(es: x_0 scelto fuori dall'intervallo verde ma poi x_1 cade dentro all'intervallo, quindi da x_1 in poi valgono le condizioni)

Dim: Divisa in due parti: intorno destro e intorno sinistro (simmetriche)

Intorno destro: supponiamo che la funzione C abbia le derivate prima e seconda continue e che la derivata prima sia $\neq 0$ in tutti i punti dell'intorno.
Preso x_0 vogliamo dimostrare che la successione converge a α in maniera monotona

$$f'(x) > 0 \text{ in questo intorno} \Rightarrow f(x) > 0 \text{ per } x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$$

$f'(\alpha) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ per $x \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$

Da questo deduciamo che $\frac{f(x)}{f'(x)} > 0 \quad \forall x \in J_\alpha$

Quando vado a considerare $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \quad \forall x_k \in J_\alpha$

Quindi se $x_0 \in J_\alpha \setminus \{\alpha\}$ allora anche tutti gli altri $x_k \in J_\alpha$

Questo viene dimostrato per induzione al solito modo:

$$x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha) = \frac{f(\xi_k) f''(\xi_k)(x_k - \alpha)}{[f'(\xi_k)]^2} \quad > 0 \text{ e } < 1$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - \alpha = \underset{0<\ \ <1}{\lambda}(x_k - \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha < x_{k+1} < x_k \ldots$$

La dimostrazione per l'intorno sinistro è simmetrica

In realtà il teorema vale anche se $f'(\alpha) = 0$ (α radice multipla) ma la convergenza diventa lineare

Il metodo di Newton richiede il calcolo della derivata $f'(x_k)$ ad ogni iterazione

↳ Quando il calcolo della derivata è costoso o la derivata non è esprimibile mediante una formula matematica, si possono definire dei metodi che approssimano $f'(x_k)$

↓

Metodi Quasi-Newton

- Metodo delle secanti: $f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

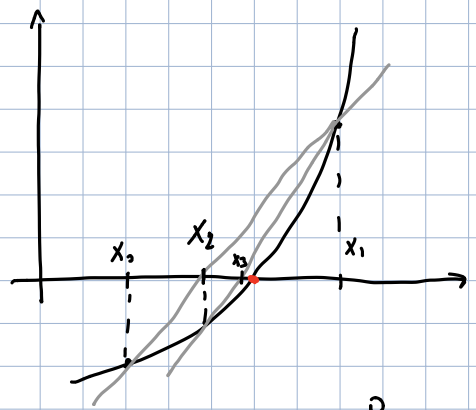
- Metodo di Steffensen: $f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$

Metodo delle secanti

Questo metodo approssima la derivata $f'(x)$ con il rapporto incrementale costruito con i valori delle due iterate precedenti:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ x_0,\ x_1 \text{ dati} \end{cases}$$

Non è più un metodo di iterazione funzionale perché richiede 2 parametri, ma valgono le stesse considerazioni



Vale $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k||e_{k-1}|} = c > 0$

$\downarrow$

convergenza locale superlineare ma non quadratica

Da $|e_{k+1}| \approx L|e_k|^p$ si ottiene $|e_{k+1}| \approx c|e_k||e_{k-1}| \approx \underbrace{c L^{-\frac{1}{p}} |e_k|^{1+\frac{1}{p}}}$

$|e_k| \approx L|e_{k-1}|^p$

$|e_{k-1}| \approx \underbrace{\left(\frac{1}{L}|e_k|\right)^{\frac{1}{p}}}$

Quindi: $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.1618 \qquad L = c^{\frac{1}{p}}$

Voglio $p = 1 + \frac{1}{p} \to p = \varphi$

Metodo "regula falsi"

È una variante del metodo di bisezione; invece del punto medio si considera l'intersezione con l'asse x della retta che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Come per la bisezione converge sempre per funzioni continue

Es: approssimare la radice quadrata di un numero

$\alpha = \sqrt{a}$ → Possiamo risolvere il problema $f(x) = x^2 - a = 0$

$\alpha = \sqrt{a}$ è radice semplice; proviamo a calcolare $\sqrt{2}$

Metodo di bisezione

k	x_k	ϵ_k
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.250000000000000	1.16e-01
3	1.375000000000000	2.77e-02
4	1.437500000000000	1.65e-02
5	1.406250000000000	5.63e-03
6	1.421875000000000	5.42e-03
7	1.414062500000000	1.07e-04
⋮	⋮	⋮
33	1.414213562267832	7.44e-11
34	1.414213562326040	3.33e-11
35	1.414213562355144	1.27e-11
36	1.414213562369696	2.40e-12
37	1.414213562376972	2.74e-12
⋮	⋮	⋮
46	1.414213562373092	2.04e-15
47	1.414213562373099	2.98e-15
48	1.414213562373096	4.71e-16

$[a, b] = [1, 2]$

Metodo a pendenza costante $(m = 2)$

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.375000000000000	2.77e-02
3	1.429687500000000	1.09e-02
4	1.407684326171875	4.62e-03
5	1.416896745096892	1.90e-03
6	1.413098551963808	7.88e-04
7	1.414674793182702	3.26e-04
8	1.414022407949441	1.35e-04
9	1.414292722857873	5.60e-05
⋮	⋮	⋮
26	1.414213562348472	1.74e-11
27	1.414213562383294	7.21e-12
28	1.414213562368870	2.99e-12
29	1.414213562374845	1.24e-12
30	1.414213562372370	5.13e-13

$$\ell = |1 - \sqrt{2}| \approx |-0.4142|$$

$f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x > 0$ in $[1, 2]$

$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$

$g'(2) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

convergenza alternata

Metodo a pendenza costante, $m = 3$

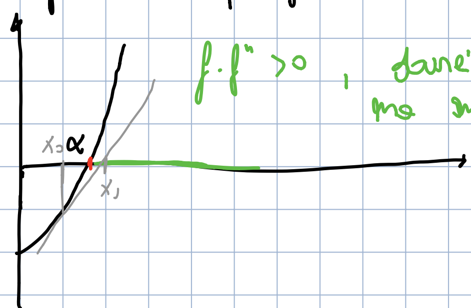
k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.333333333333333	5.72e-02
2	1.407407407407407	4.81e-03
3	1.413808870598994	2.86e-04
4	1.414190363070860	1.64e-05
5	1.414212235403363	9.38e-07
6	1.414213486481837	5.37e-08
7	1.414213558032799	3.07e-09
8	1.414213562124869	1.75e-10
9	1.414213562358899	1.00e-11
10	1.414213562372283	5.74e-13
11	1.414213562373049	3.30e-14
12	1.414213562373092	1.88e-15
13	1.414213562373095	1.57e-16

$$\ell = |1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}| \approx 0.0572$$

Metodo di Newton

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	1.500000000000000	6.07e-02
2	1.416666666666667	1.74e-03
3	1.414215686274510	1.50e-06
4	1.414213562374690	1.13e-12
5	1.414213562373095	1.57e-16

$f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$



$f \cdot f'' > 0$, dovrei prendere x_0 qua, ma anche se lo prendo a sx va bene

Metodo delle secanti:

k	x_k	ϵ_k
0	1.000000000000000	2.93e-01
1	2.000000000000000	4.14e-01
2	1.333333333333333	5.72e-02
3	1.400000000000000	1.00e-02
4	1.414634146341463	2.97e-04
5	1.414211438474870	1.50e-06
6	1.414213562057320	2.23e-10
7	1.414213562373095	1.57e-16

Metodo regula falsi:

k	x_k	ϵ_k
1	1.333333333333333	5.72e-02
2	1.400000000000000	1.00e-02
3	1.411764705882353	1.73e-03
4	1.413793103448276	2.97e-04
5	1.414141414141414	5.10e-05
6	1.414201183431953	8.75e-06
7	1.414211438474870	1.50e-06
8	1.414213197969543	2.58e-07
9	1.414213499851323	4.42e-08
⋮	⋮	⋮
13	1.414213562318917	3.83e-11
14	1.414213562363800	6.57e-12
15	1.414213562371500	1.13e-12
16	1.414213562372822	1.93e-13
17	1.414213562373048	3.34e-14
18	1.414213562373087	5.65e-15
19	1.414213562373094	9.42e-16
20	1.414213562373095	1.57e-16

Curiosità: l'algoritmo dei babilonesi

Il metodo usato dai babilonesi per approssimare la radice quadrata è:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$ detto anche metodo di Erone

Questa funziona perché $\sqrt{a} = \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}}$ per $x \neq 0$ $\Rightarrow$ si approssima $\sqrt{nm}$ con $\frac{n+m}{2}$