Quesionario-MD1 - 18/09/17 - Questionario No. 1

Domanda n. 1: [7pt] Quanto fa la somma *delle cifre* di tutti i numeri N per $100 \leq N \leq 999$? (ad esempio, per $202 \leq N \leq 205$ tale somma fa 22)

Sia i la cifra delle centinaia, j la cifra delle decine e k la cifra delle unità di un generico $N = ijk$, con $i = 1, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 9$ e $k = 0, \ldots, 9$. Ogni cifra i viene contata 100 volte, perchè ci sono 100 numeri che cominciano per i. Per ognuno di tali numeri, ogni cifra j viene contata 10 volte, perchè ci sono 10 numeri che cominciano per ij. Per ognuno di tali numeri, ogni cifra k viene contata una volta. Abbiamo quindi che la somma delle cifre vale

$$\sum_{i=1}^{9} 100i + \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=0}^{9} 10j + \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{9} k = 4500 + 4050 + 4050 = 12600$$

Domanda n. 2: [5pt] È data una griglia 11×7 (11 linee verticali e 7 orizzontali). Sia V l'insieme dei punti in cui due linee della griglia si incontrano. Quanti sono le possibili lettere a forma di "L" (ossia due segmenti perpendicolari originati nello stesso punto, anche ruotati rispetto al normale verso di lettura della L) che si possono individuare e che abbiano gli estremi nei punti di V?

Il vertice pi può prendere in ogni punto (11×7 modi) e poi si può partire con un segmento verticale in 10 modi e orizzontale in 6 modi. Totale

$$11 \times 7 \times 10 \times 6 = 4620$$

Domanda n. 3: [4pt] (*) Siano A e B due insiemi di 7 elementi ciascuno. Quante sono le funzioni non iniettive di A in B?

le funzioni biettive sono $n!$ per cui quelle non biettive sono $n^n - n!$. Una funzione è non biettiva se non è iniettiva or non è suriettiva. Siccome in questo caso (in cui $|A| = |B|$) una funzione è suriettiva se e solo se è anche iniettiva (piccionaia), le funzioni non invertibili sono proprio quelle non iniettive. Quindi in tutto

$$7^7 - 7! = 818503$$

Domanda n. 4: [5pt] (*) Si consideri, nel piano cartesiano, l'insieme P dei punti (x, y) tali che $x \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ e $y \in \{1, 2, \ldots, 14\}$. Quanti sono i rettangoli (compresi i quadrati) che hanno tutti e quattro i vertici appartenenti a P?

Basta prendere i due lati verticali (in $\binom{7}{2}$ modi) e quelli orizzontali (in $\binom{14}{2}$ modi) per individuare univocamente un rettangolo. Quindi

$$\frac{7 \times 6 \times 14 \times 13}{4} = 1911$$

Domanda n. 5: [6] Si consideri l'equazione a variabili intere non-negative

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

Quante sono le soluzioni in cui ogni x_i è un numero pari positivo?

Si considerino nuove variabili y_i. Ponendo $x_i = 2y_i + 2$ si ottiene

$$\sum_i x_i = 2\sum_i y_i + 10 = 30$$

da cui

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$$

che ha $\binom{10+4}{4} = 1001$ soluzioni.

Domanda n. 6: [7pt] Un cliente di una banca si reca ad effettuare un prelievo di 1860 Euro. Il cassiere ha a disposizione banconote da 100, 50 e 20 Euro. In quanti modi diversi può erogare la somma di 1860 Euro?

Siccome tutti i numeri sono multipli di 10, dividiamo tutto per 10 e riformuliamo il problema come: in quanti modi si può ottenere 186 come somma di 10, 5 e 2, ossia quante sono le triple (x, y, z) a componenti in $\mathbb{N}$ tali che $10x + 5y + 2z = 186$.

Osserviamo che, siccome 186 è pari, anche y deve essere pari, visto che $10x + 2z$ è sempre pari. Quindi, $y = 2k$ per un opportuno k. Abbiamo che $k = 0, \ldots, 18$. Fissato k, rimane da risolvere $10(x + k) + 2z = 186$. Chiaramente questa equazione ha tante soluzioni quanti sono i possibili valori di x che la soddisfano, visto che, una volta preso x, il valore z è preso univocamente di conseguenza. Si ha che $x = 0, \ldots, 18 - k$ e quindi x può assumere $19 - k$ valori. Quindi il numero totale di modi di cambiare la cifra richiesta è

$$\sum_{k=0}^{18}(19 - k) = 19^2 - \frac{19 \times 18}{2} = 190$$