MD1 APPELLO SEP 20, 2016

(NB: esistono varie versioni diverse –ma equivalenti– degli esercizi. Viene data la soluzione ad una di esse. Chi avesse ricevuto una versione diversa non dovrebbe aver difficoltà ad apportare le modifiche necessarie e ricostruire la soluzione per la propria versione)

Esercizi

(1) Sapendo che per ogni $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
si calcolino
$$A = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+51}$$
e
$$B = \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1}$$
(NB. Si riportino i vari passaggi intermedi e non solo la soluzione finale)

(2) Si calcoli
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 198^2 + 199^2$$

1. Soluzioni

(1) Abbiamo
$$A = \sum_{k=2}^{51} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i} \right) = \sum_{k=2}^{51} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=2}^{51} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left(\sum_{k=2}^{51} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{52} \frac{1}{k} \right) =$$
$$= 2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{52} \frac{1}{k} - \frac{1}{52} - \sum_{k=3}^{52} \frac{1}{k} \right) = 2 \left(\frac{26-1}{52} \right) = \frac{25}{26}$$
Abbiamo inoltre
$$B = \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1} = \frac{3^2-1+2}{3^2-1} + \frac{5^2-1+2}{5^2-1} + \cdots + \frac{99^2-1+2}{99^2-1} =$$
$$= 1 + \frac{2}{3^2-1} + 1 + \frac{2}{5^2-1} + \cdots + 1 + \frac{2}{99^2-1} = 49 + 2 \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{(2k+1)^2 - 1} =$$
$$49 + 2 \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{(2k+1+1)(2k+1-1)} = 49 + 2 \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{(2k+2)2k} = 49 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{k(k+1)} =$$
$$= 49 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 49 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{50} \frac{1}{k} \right) = 49 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{4949}{100}$$
Si noti che si può dimostrare per induzione che, se la somma contiene n termini, si ha
$$B = \frac{n(2n+3)}{2n+2}$$

(2) Si ha

$$\sum_{k=0}^{99}(2k+1)^2 - \sum_{k=1}^{99}(2k)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{99}((2k)^2 + 1 + 4k - (2k)^2) =$$

$$= 1 + 99 + 4\sum_{k=1}^{99} k = 100 + 4 \times \frac{100 \times 99}{2} = 19900$$