Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 25 gennaio 2017`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, 5, p, q)$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Determina p, q in modo che $\mathcal{F}$ contenga 257 elementi e $realmin = 1/32$.
   - Sia $x = \frac{1}{10}$. Verifica che $x \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
   - Sia $y = \frac{2}{3}$. Verifica che $y \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Calcola $z = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a $\mathcal{F}$?
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente ed il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \frac{(1+x^2)}{(2-x)}$ per $x \approx \pm 1, 2$.
   - Definisci l'errore algoritmico ed il concetto di stabilità.
   - Studia la stabilità dell' algoritmo che valuta $f(x)$ in un punto x.
3. Sia $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.
   - Disegna il grafico di f. Localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza a γ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a γ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

   Sia $g(x) = \frac{4x^3-3x^2+1}{6}$. Verifica che α, β, γ sono punti fissi di g.
   - Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta. è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.
   - La funzione f è un polinomio. Proponi un algoritmo efficiente per calcolare un generico polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato ed analizza la sua complessità computazionale.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Per quale scelta dei parametri α, β il sistema $Ax = b$ ha unica soluzione?
   - Nota la fattorizzazione LU di A come risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$?
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro β il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la terza riga di A?
   - Fissato un valore di β come al punto precedente, per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al secondo passo passo scambia la seconda con la terza riga?
   - Sia $\alpha = 2$ e $\beta = 4$Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Nota la fattorizzazione $PA = LU$ come risolvi in generale il sistema lineare $Ax = b$?
   - Proponi un algoritmo efficiente per calcolare in generale la soluzione di $Ux = d$ con U triangolare superiore ed analizza il costo computazionale.
5. Sia $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Dati i punti $P_0 = (0, f(0))$, $P_1 = (1, f(1))$, $P_2 = (2, f(2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione dell'errore $\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l' ulteriore punto $P_3 = (3, f(3))$, determina in maniera efficiente il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di grado zero di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
6. - Scrivi la definizione di polinomio cubico di Hermite a tratti.
   - Scrivi la definizione di Spline cubica.
   - In cosa differiscono le due funzioni?