Equazioni Ricorsive

Formula:

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{1}{8}n\right) + T\left(\frac{3}{4}n\right) + \Theta(n^2), & n > 1 \\ \Theta(1), & n = 1 \end{cases}$$

Sostituzioni:

La formula così com'è non può ancora essere utilizzata per il calcolo, pertanto si devono operare alcune sostituzioni. Si devono, infatti, eliminare le notazioni asintotiche e per comodità sostituire i coefficienti delle chiamate ricorsive con delle lettere per rendere più agevole il calcolo. La formula quindi diventa:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} T(\mathrm{a}n) + T(\mathrm{bn}) + cn^2, & \mathrm{n} > 1 \\ d, & \mathrm{n} = 1 \end{cases}$$

Con: $a = {}^{1}\!/_{8}$, $b = {}^{3}\!/_{4}$ e c, d costanti generiche.

Albero delle chiamate ricorsive:

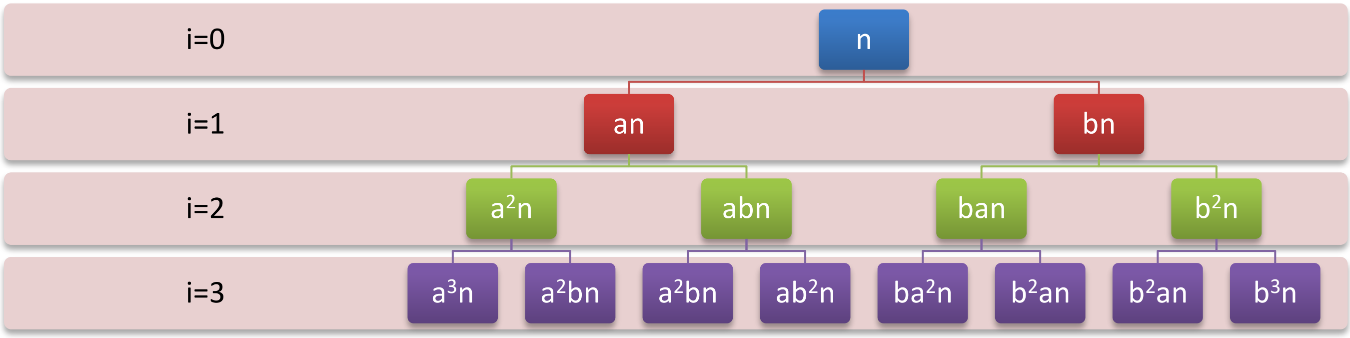
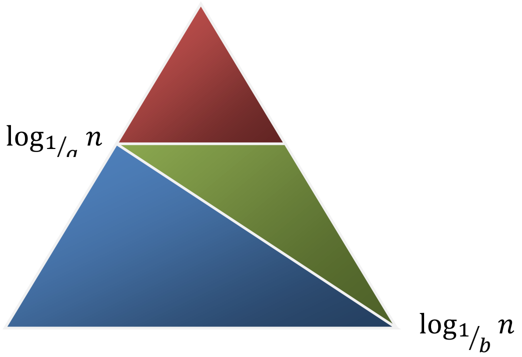


Tabella:

I	N°	Dimensioni	Costo Unitario	Costo Totale	C.T.
0	2^0	n	cn^2	$c(a^2+b^2)^0n^2$	$c(a^2+b^2)^0n^2$
1	2^1	an, bn	ca^2n^2, cb^2n^2	$c(a^2+b^2)^1n^2$	$c(a^2+b^2)^1n^2$
2	2^2	a^2n, b^2n abn, abn	ca^4n^2, cb^4n^2 $ca^2b^2n^2, ca^2b^2n^2$	$c(a^4+2a^2b^2+b^4)n^2$	$c(a^2+b^2)^2n^2$
3	2^3	a^3n, b^3n a^2bn, a^2bn, a^2bn ab^2n, ab^2n, ab^2n	ca^6n^2, cb^6n^2 $ca^4b^2n^2, ca^4b^2n^2, ca^4b^2n^2$ $ca^2b^4n^2, ca^2b^4n^2, ca^2b^4n^2$	$c(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)n^2$	$c(a^2+b^2)^3n^2$
…	…	…	…	…	…
i	2^i	…	…	…	$c(a^2+b^2)^in^2$
…	…	…	…	…	…
x	2^x	$a^xn, \dots, b^xn$	d	2^xd	2^xd

Configurazione dell'albero:

L'albero che si delinea dalla formula risulta essere sbilanciato ed ha una forma simile a quella riportata di seguito:



La forma reale dell'albero e data dalla somma tra il triangolo equilatero rosso e il triangolo verde. Il percorso più lungo è dato dal lato obliquo sx del triangolo rosso mentre il cammino più lungo è dato dalla somma tra il lato obliquo dx del triangolo rosso e il lato obliquo dx del triangolo verde.

Il cammino più corto termina quando:

$$a^x n = 1 \Rightarrow n = \left(\frac{1}{a}\right)^x \Rightarrow x = \log_{1/a} n = \log_8 n$$

Il cammino più lungo termina quando:

$$b^x n = 1 \Rightarrow n = \left(\frac{1}{b}\right)^x \Rightarrow x = \log_{1/b} n = \log_{4/3} n$$

Complessità:

La complessità dell'algoritmo è quindi compresa tra la quella che si otterrebbe se ci si fermasse al livello massimo del cammino più corto e quella che si otterrebbe se ci si fermasse al livello massimo del cammino più lungo. Quindi si ha che:

$$cn^2 \sum_{i=0}^{\log_{1/a} n-1} (a^2+b^2)^i + d2^{\log_{1/a} n} \leq T(n) \leq\ cn^2 \sum_{i=0}^{\log_{1/b} n-1} (a^2+b^2)^i + d2^{\log_{1/b} n}$$

Sostituendo i valori reali si ottiene:

$$cn^2 \sum_{i=0}^{\log_8 n-1} \left[\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^i + d2^{\log_8 n} \leq T(n) \leq\ cn^2 \sum_{i=0}^{\log_{4/3} n-1} \left[\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^i + d2^{\log_{4/3} n}$$

$$cn^2 \sum_{i=0}^{\log_8 n-1} \left(\frac{37}{64}\right)^i + d2^{\log_8 n} \leq T(n) \leq\ cn^2 \sum_{i=0}^{\log_{4/3} n-1} \left(\frac{37}{64}\right)^i + d2^{\log_{4/3} n}$$

$$cn^2 \frac{\left(\frac{37}{64}\right)^{\log_8 n} - 1}{\frac{37}{64}-1} + d2^{\log_8 n} \leq T(n) \leq\ cn^2 \frac{\left(\frac{37}{64}\right)^{\log_{4/3} n} - 1}{\frac{37}{64}-1} + d2^{\log_{4/3} n}$$

$$-\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{37^{\log_8 n}}{64^{\log_8 n}} - 1\right] + d2^{\log_8 n} \leq T(n) \leq\ -\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{37^{\log_{4/3} n}}{64^{\log_{4/3} n}} - 1\right] + d2^{\log_{3/4} n}$$

$$-\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{\log_8 37}}{n^2} - 1\right] + dn^{\log_8 2} \leq T(n) \leq\ -\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{\log_{4/3} 37}}{n^{\log_{4/3} 64}} - 1\right] + dn^{\log_{3/4} 2}$$

Applicando la formula del cambiamento di base dei logaritmi si ottiene:

$$-\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{\frac{\ln 37}{\ln 8}}}{n^2} - 1\right] + d\sqrt[3]{n} \leq T(n) \leq\ -\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{\frac{\ln 37}{\ln 4-\ln 3}}}{n^{\frac{\ln 64}{\ln 4-\ln 3}}} - 1\right] + dn^{\frac{\ln 2}{\ln 4-\ln 3}}$$

$$-\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{1.74}}{n^2}-1\right]+dn^{0.33}\leq T(n)\leq\ -\frac{27}{64}cn^2\left[\frac{n^{12.45}}{n^{14.34}}-1\right]+dn^{2.38}$$

$$\frac{27}{64}cn^2-\frac{27}{64}cn^{1.74}+dn^{0.33}\leq T(n)\leq\ dn^{2.38}+\frac{27}{64}cn^2-\frac{27}{64}cn^{0.11}$$

$$\Theta(n^2)\leq T(n)\leq\ \Theta(n^{2.38})$$