Esempi di domande a scelta multipla da esame - MD1

1 Domande facilissime

Domanda: Un circuito Euleriano attraversa tutti gli archi di un grafo una e una sola volta.

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Falso $\boxed{\text{B}}$ Vero

SOL: Vero. Segue dalla definizione di circuito euleriano

Domanda: Sia A un insieme di 9 elementi. Quante sono le funzioni biiettive di A in A?

Risp: $\boxed{\text{A}}$ 9^9 $\boxed{\text{B}}$ 9×8 $\boxed{\text{C}}$ $9!$ $\boxed{\text{D}}$ 2^9

SOL: sono 9!. A ogni elemento di A va associato uno (sempre diverso) elemento di A. La prima scelta ha 9 possibilità, la seconda 8, ecc.

Domanda: Il numero di componenti connesse di un grafo è sempre inferiore al numero di archi dello stesso grafo

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Falso $\boxed{\text{B}}$ Vero

SOL: Falso. Si pensi ad esempio a un grafo senza archi: le componenti connesse sono n ma $m = 0$. Oppure si pensi a un singolo arco. In questo caso la componente connessa è una ma anche il numero di archi è $= 1$.

Domanda: Esistono equivalenze transitive ma non riflessive.

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

SOL: Falso. Per definizione, ogni equivalenza è sia riflessiva che simmetrica che transitiva.

Domanda: Sia $A = \{1, \ldots, 100\}$. Il numero di sottoinsiemi di A è maggiore del numero di permutazioni degli elementi di A.

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

SOL: Falso. Ci sono 2^{100} sottoinsiemi e 100! permutazioni, e chiaramente $100! > 2^{100}$.

Domanda: Quanto vale $\lceil -\frac{2\pi}{3} \rceil$?

Risp: $\boxed{\text{A}}$ -3 $\boxed{\text{B}}$ -1 $\boxed{\text{C}}$ -2 $\boxed{\text{D}}$ 2

SOL: Vale -2. Abbiamo $2\pi/3 \simeq 2.09...$ da cui

$$\lceil -\frac{2\pi}{3} \rceil = \lceil -2.09... \rceil = -2$$

2 Domande facili

Domanda: Siano $A = \{1, \dots, 100\}$, $B = \{S : S \subset A, |S| \leq 32\}$ e $C = \{S : S \subset A, |S| \geq 74\}$. Quale tra le tre vale:

Risp: $\boxed{\text{A}}$ $|B| = |C|$ $\boxed{\text{B}}$ $|B| > |C|$ $\boxed{\text{C}}$ $|B| < |C|$

SOL: Vale $|B| > |C|$. Infatti, sappiamo che il numero di sottoinsiemi di cardinalità k cresce quando k si avvicina a $n/2$ e decresce quando k si allontana da $n/2$. Inoltre ci sono tanti insiemi di dimensione k che di dimensione $n - k$. Essendo $n/2 = 50$, abbiamo che tutti gli insiemi di dimensione 0...26 contenuti in B (ossia tali che $|S| \leq 26$) sono tanti quanti quelli di dimensione $n - 0, \dots, n - 26$ contenuti in C (ossia tali che $|S| \leq 74$). Però, tutti gli insiemi di cardinalità $27, \dots, 32$ che sono in B non hanno corrispondenti insiemi in C e quindi $|B| > |C|$. Più semplicemente, essendo 32 più vicino a 50 di quanto 74 sia vicino a 50, deve essere $|B| > |C|$.

Domanda: Quanti interi tra 100 e 999 hanno tutte le cifre crescenti (come, ad es., il 247) ?

Risp: $\boxed{\text{A}}$ 120 $\boxed{\text{B}}$ 42 $\boxed{\text{C}}$ 84 $\boxed{\text{D}}$ 90

SOL: Sono 84. Per creare un tale intero N, basta sceglierne le cifre, che devono essere tutte diverse in quanto crescenti (poi vengono ordinate nell'unico modo possibile per ottenere N). La cifra minima è 1 e la massima è 9, per cui le scelte sono

$$\binom{9}{3} = 84$$

Domanda: Un grafo bipartito connesso con un numero dispari di nodi non può essere euleriano.

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Falso $\boxed{\text{B}}$ Vero

SOL: Falso. Un grafo connesso è Euleriano se contiene un circuito euleriano, e condizione necessaria e sufficiente è che ogni nodo abbia grado pari. Si possono costruire infiniti esempi di grafi euleriani bipariti con un numero dispari di nodi. Per fare un esempio piccolo, si consideri un grafo bipartito con 7 nodi, di cui 4 nodi $\{1, 2, 3, 4\}$ a sinistra e 3 nodi $\{a, b, c\}$ a destra. Colleghiamo ogni nodo di sinistra a 2 nodi di destra in modo da ottenere un grafo connesso con grado pari in ogni nodo. Ad esempio, creiamo l'arco xa per ogni x e poi archi xb per $x = 1, 2$ e archi xc per $x = 3, 4$. Si vede che i nodi di sinistra hanno grado 2 e quelli di destra hanno gradi 4, 2 e 2. Quindi il grafo è euleriano.

Domanda: **[2/0]** Sia $n \geq 5$. La probabilità che una permutazione casuale degli elementi $1, \dots, n$ sia uno spiazzamento è minore di 1/3.

Risp: $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

SOL: Falso. Sappiamo dalla teoria che il numero di spiazzamenti è circa $1/e$ del totale delle permutazioni, e siccome $e \simeq 2.718...$ si ha $1/e > 1/3$.

Domanda: Sia $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Quanti sottoinsiemi di A contengono 1 ma non 2?

Risp: $\boxed{\text{A}}$ 2^5 $\boxed{\text{B}}$ $10!/2$ $\boxed{\text{C}}$ $2^{10} - 2^9$ $\boxed{\text{D}}$ 2^8

SOL: Si considerino tutti i sottoinsiemi di $\{3, \dots, 10\}$, che sono 2^8. Ad ognuno di essi basta aggiungere l'elemento "1" per tutti gli insiemi che contengono "1" ma non contengono "2".

Domanda: [1.5/0/0/0] Quanto vale il resto nella divisione intera fra $\lceil -14.5 \rceil$ e $\lceil 3.9 \rceil$?

Risp: $\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 0 $\boxed{\text{D}}$ -1

SOL: Abbiamo $\lceil -14.5 \rceil = -14$ e $\lceil 3.9 \rceil = 4$. Ricordando che il resto in una divisione intera *deve essere* ≥ 0, si ha

$$-14 = -4 \times 4 + 2$$

e quindi il resto è 2.

3 Domande medie

Domanda: Sia V l'insieme di tutte le parole formate con le lettere A, B, C tali che *ogni parola ha esattemente 5 lettere e contiene al massimo una lettera A*. Sia $G = (V, E)$ il grafo in cui c'è un arco fra ogni coppia di parole $x, y \in V$ tali che x può essere ottenuta da y sostituendo esattamente una lettera (ad es. $x =$ ABCCB e $y =$ BBCCB). Detti

1. $n =$ numero di nodi di G
2. $m =$ numero di archi di G
3. se G connesso $a = 1$ altrimenti $a = 2$
4. se G è bipartito $b = 3$ altrimenti $b = 5$

quanto vale

$$n + m + ab?$$

Risp: $\boxed{\text{A}}$ 517 $\boxed{\text{B}}$ 520 $\boxed{\text{C}}$ 518 $\boxed{\text{D}}$ 1024 $\boxed{\text{E}}$ 442

SOL: Le parole senza "A" sono $2^5 = 32$ quelle con una A sono $5 \times 2^4 = 80$ per cui

$$n = 32 + 80 = 112$$

Il grado di ogni nodo di G senza A è $2 \times 5 = 10$ in quanto posso prendere una qualsiasi lettera e cambiarla come voglio. Il grado di ogni nodo con la A è $4 + 2 = 6$ in quanto possiamo cambiare la A in due modi e le restanti lettere in un modo solo. Quindi la somma dei gradi è

$$32 \times 10 + 80 \times 6 = 320 + 480 = 800$$

per cui il numero di archi è $m = 800/2 = 400$. Il grafo è connesso. Infatti presi due qualsiasi nodi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ possiamo cambiare x_i con y_i, uno alla volta, in modo da ottenere y da x, ossia avere un cammino in G tra x e y. Quindi $a = 1$ Il grafo non è bipartito per cui $b = 5$, Ad esempio c'è il triangolo $ABBBB - BBBBB - CBBBB - ABBBB$. In conclusione

$$n + m + ab = 112 + 400 + 5 = 517$$

4 Domande difficili

Domanda: Si consideri la somma

$$S_n := 1 - 2 + 3 - 4 - 5 + 6 - 7 - 8 - 9 + 10 - 11 - 12 - 13 - 14 + 15 \cdots$$

il cui tra il k-mo addendo con segno "+" e il successivo ci sono k addendi con il segno "-" e l'ultimo termine è "$+n$" o "$-n$" a seconda dei casi. Ad esempio

$$\begin{aligned} S_6 &= 1-2+3-4-5+6 \\ S_{12} &= 1-2+3-4-5+6-7-8-9+10-11-12 \\ S_{21} &= 1-2+3-4-5+6-7-8-9+10-11-12-13-14+15-16-17-18-19-20+21 \end{aligned}$$

Si calcoli il valore di S_n per $n = 435$.

Risp: A -87323 B -84560 C -121215 D -64323 E -85840

SOL: Il valore del k-mo addendo positivo è

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

e questo segue da come gli addendi positivi sono spaziati fra loro. L'addendo positivo più alto si ha in corrispondenza al massimo k (intero positivo) tale che $k(k+1)/2 \leq n$ ossia $k^2 + k - 2n \leq 0$. Si ottiene

$$a := \lfloor \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \rfloor$$

Quindi la somma degli addendi positivi è

$$P = \sum_{k=1}^{a} \frac{k(k+1)}{2}$$

La somma S_n può essere vista come la somma dei numeri da 1 a n, negati, più due volte P, ossia

$$\begin{aligned} S_n &= -\sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{k=1}^{a} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{a} k^2 + \sum_{k=1}^{a} k \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{a(a+1)(2a+1)}{6} + \frac{a(a+1)}{2} \end{aligned}$$

Nel nostro caso $n = 435$ da cui $a = 29$. Otteniamo

$$-\frac{n(n+1)}{2} + \frac{a(a+1)(2a+1)}{6} + \frac{a(a+1)}{2} = -94830 + \frac{29 \times 30 \times 59}{6} + 29 \times 15 = -85840$$