

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, p_{\min}, p_{\max})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.

- Determina t, p_{\min}, p_{\max} con $p_{\max} = t$ in modo che \mathcal{F} contenga 64 elementi positivi e $realmax = 15$.
- Dopo aver definito la precisione di macchina u , determina quella di \mathcal{F} .
- Sia $x = \frac{1}{5}$. Verifica che $x \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
- Sia $y = \frac{1}{3}$. Verifica che $y \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
- Calcola $z = x + y$ e determina $\tilde{z} = fl(z) \in \mathcal{F}$.
- Calcola $\tilde{w} = \tilde{x} fl(+)\tilde{y} \in \mathcal{F}$. Che relazione c'è tra \tilde{z} e \tilde{w} ?
- Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati per \mathcal{F} ?

2. Sia data una funzione f .

- Definisci l'errore inerente ed il concetto di condizionamento nel calcolo di f .
- Definisci l'errore algoritmico ed il concetto di stabilità.

Sia $f(x) = \sqrt{h(x)}$.

- Determina l'indice di condizionamento di f e h . Quando il calcolo di f sarà ben condizionato?
- Supponendo che la radice quadrata sia calcolata con un errore relativo maggiorato da u e che ϵ_h sia l'errore algoritmico del calcolo di h , determina una maggiorazione dell'errore algoritmico ϵ_f del calcolo di f . Quando il calcolo di f sarà stabile?

Sia $h(x) = 1 - \sqrt{x+1}$.

- Determina per quali valori di x la funzione f è ben definita.
- Studia il condizionamento di f e la stabilità dell'algoritmo che calcola f .

3. Sia $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- Disegna il grafico di f . Localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$.
- Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente ad α ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
- Studia la convergenza ad β del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -\frac{1}{3}$ è convergente a β ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
- Studia la convergenza a γ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = \frac{3}{2}$ è convergente a γ ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

Sia $g(x) = \frac{x^3-1}{3}$. Verifica che α, β, γ sono punti fissi di g .

- Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots$. Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza?

4. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ \alpha & -1 & -\frac{\alpha}{2} \\ 1 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

- Calcola la fattorizzazione LU di A , determinando per quali valori di α c'è possibilità.
- Per quale scelta di α il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione?
- Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perché si applica?
- Per quali valori di α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo effettua uno scambio di righe?
- Sia $\alpha = -1$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
- Proponi un algoritmo per calcolare in generale la soluzione di $Ux = d$ con U triangolare superiore. Scrivi una pseudocodifica ed analizza il costo computazionale.

5. Sia $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(-1)), P_1 = (0, f(0)), P_2 = (1, f(1))$,

- Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
- Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione dell'errore $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$.
- Dato l'ulteriore punto $P_3 = (2, f(2))$, determina il polinomio \tilde{p} che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
- Determina il polinomio cubico h di Hermite che interpola P_0 e P_2 .
- Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti nel senso dei minimi quadrati.
- Determina il polinomio r di grado zero di miglior approssimazione dei quattro punti nel senso dei minimi quadrati.

6. Sia α tale che $f(\alpha) = 0$.

- Studia il condizionamento del problema.

Sia $x_k \rightarrow \alpha$ per $k \rightarrow +\infty$.

- Data una precisione tol , proponi ed analizza un criterio di arresto.
- Definisci il concetto di ordine di convergenza.