Geometria delle Applicazioni Lineari

Una funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ è una "trasformazione" del piano, che porta i punti dalla loro posizione originaria a una nuova posizione.
Una generica trasformazione deforma le figure (può quadrare un cerchio, avvicinare alcuni punti ma allontanarne degli altri, rendere curve delle linee rette e viceversa) ma le trasformazioni lineari sono particolari.
Consieriamo trasformazioni lineari di rango 2 (l'immagine di $\mathbb{R}^2$ è tutto $\mathbb{R}^2$). Per esse vale che:

- non possono raddrizzare le curve nè rendere curve le linee rette;
- due linee rette sono parallele dopo la trasformazione se e solo se lo erano anche prima;
- una linea retta passa per l'origine dopo la trasformazione se e solo se vi passava anche prima;
- i rapporti tra le lunghezze sono conservati (se un segmento era lungo il doppio di un altro lo stesso vale per le loro immagini), ecc.

Sia allora $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Per ogni $A \in \mathbb{R}^2$ indichiamo la sua immagine con $A' \in \mathbb{R}^2$. L'applicazione lineare è completamente caratterizzata da quello che succede ai vettori della base canonica, ossia delle immagini e_1' e e_2' di $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.
La trasformazione è una deformazione dello spazio degli assi cartesiani, che dal sistema (x, y) relativo alla base canonica, porta ogni punto in un punto con le medesime coordinate ma rispetto ai nuovi assi x' e y' individuati da e_1' e e_2' .

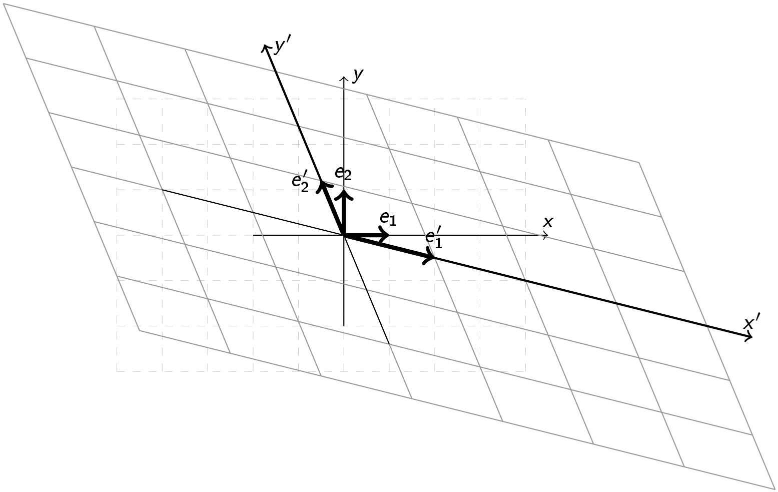
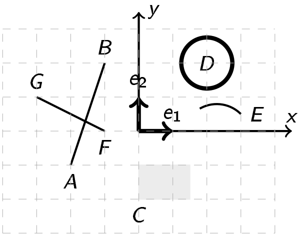
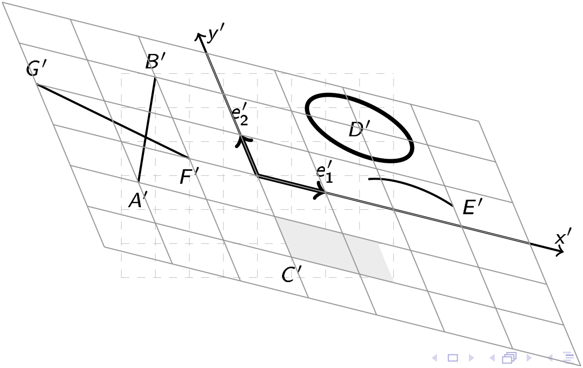


Figure: Effetto di una trasformazione lineare sul sistema di assi cartesiani. (i nuovi assi superimposti ai vecchi nel caso $e_1' = (1.5, -0.5)$ ed $e_2' = (-0.5, 1.2)$)

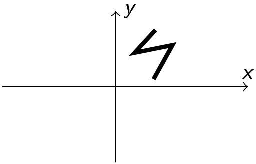
Effetto di questa trasformazione su alcune figure geometriche. Primai:



Dopo:



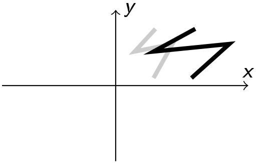
Alcune semplici applicazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ hanno un'immediata interpretazione geometrica. Consideriamo la seguente figura iniziale:



Abbiamo

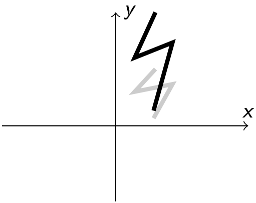
Cambiamento di scala sull'asse x

$F(x, y) = (\lambda x, y)$, con $\lambda > 0$. Qui, se $\lambda > 1$ ogni figura viene "allargata" nella sua dimensione orizzontale, mentre se $\lambda < 1$ essa viene "ristretta". Ad esempio, per $\lambda = 2$ si ottiene



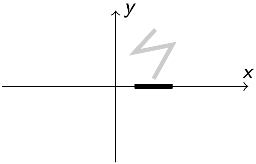
Cambiamento di scala sull'asse y

$F(x, y) = (x, \lambda y)$, con $\lambda > 0$. Qui, se $\lambda > 1$ ogni figura viene "allungata" nella sua dimensione verticale, mentre se $\lambda < 1$ essa viene "accorciata". Ad esempio, per $\lambda = 2$ si ottiene



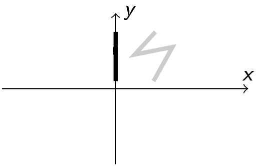
Proiezione sull'asse x

$F(x, y) = (x, 0)$. Ogni figura viene "schiacciata" verticalmente sull'asse x:



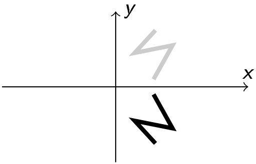
Proiezione sull'asse y

$F(x, y) = (0, y)$. Ogni figura viene "schiacciata" orizzontalmente sull'asse y:



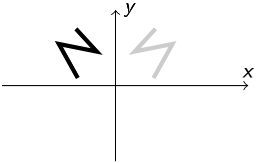
Simmetria rispetto all'asse x

$F(x, y) = (x, -y)$. Ogni figura viene “specchiata" verticalmente dalla parte opposta rispetto all'asse x:



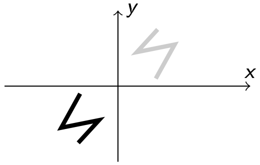
Simmetria rispetto all'asse y

$F(x, y) = (-x, y)$. Ogni figura viene “specchiata" orizzontalmente dalla parte opposta rispetto all'asse y:



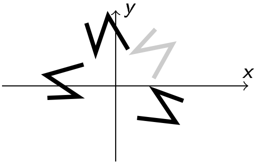
Simmetria rispetto all'origine

$F(x, y) = (-x, -y)$. Ogni figura viene "specchiata" sia orizzontalmente che verticalmente:



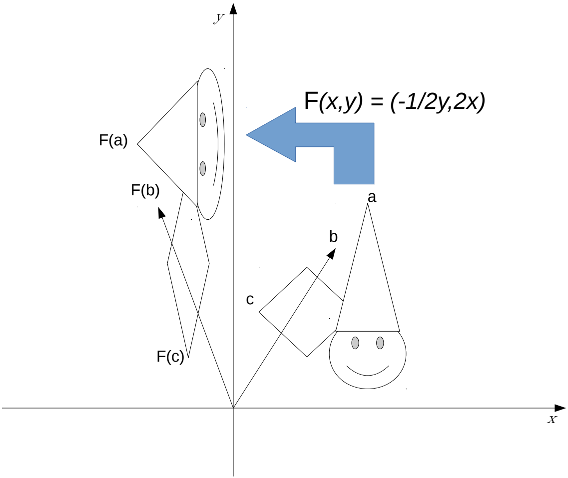
Rotazione di un angolo θ

$F_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. Ogni figura viene ruotata di un angolo di θ radianti in senso antiorario. In particolare, per $\theta = k\pi/2$ con $k = 1,2,3$ abbiamo $F_{\pi/2}(x,y) = (-y,x)$; $F_\pi(x,y) = (-x,-y)$; $F_{3\pi/2}(x,y) = (y,-x)$. Per $\theta = \pi/6, 5\pi/4, 13\pi/8$ si hanno le seguenti immagini:



Se un'applicazione lineare è composta di alcune di queste mappe elementari, l'effetto finale è ottenuto applicando in sequenza tali trasformazioni. Ad es., allarghiamo una figura in orizzontale raddoppiandone le dimensioni, poi la dimezziamo nella dimensione verticale, e infine la ruotiamo di $\pi/2$, componiamo tre mappe: $F(x, y) = (2x, y)$; $G(x, y) = (x, 1/2y)$; $H(x, y) = (-y, x)$.

$$H(G(F(x, y))) = H(G(2x, y)) = H(2x, 1/2y) = (-1/2y, 2x)$$



Considerazioni generali

Ogni applicazione lineare mappa una retta del dominio o nella singola origine o in una retta del codominio, in quanto si ha

Lemma

Sia $F : V \mapsto W$ un'applicazione lineare, e sia $v \neq \mathbf{0}_V \in V$. Supponiamo inoltre che $F(v) \neq \mathbf{0}_W$. Allora si ha

$$F(\mathcal{R}(v)) = \mathcal{R}(F(v)).$$

Proof.

Abbiamo che $p \in \mathcal{R}(F(v))$ se e solo se esiste λ tale che $p = \lambda F(v)$ e quindi se e solo se $p = F(\lambda v)$, i.e., $p \in F(\mathcal{R}(v))$. □

DEF:(**Piano**) Sia V uno spazio vettoriale e siano $v, w \in V$ vettori linearmente indipendenti. L'insieme

$$\mathcal{P}(v, w) = \{u \in V : u = \lambda v + \mu w, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

è detto un *piano* di V.

Si noti che $\mathbf{0} \in \mathcal{P}(v, w)$. Alle volte, per sottolineare questo fatto, parliamo di *piano passante per l'origine*. Possiamo anche definire il concetto di piani paralleli e piani non passanti per l'origine. In particolare, sommando un vettore $y \neq \mathbf{0}$ a tutti i punti di un piano $\mathcal{P}(v, w)$ otteniamo un piano non passante per l'origine e parallelo a $\mathcal{P}(v, w)$. Tutti i piani ottenuti in questo modo sono paralleli tra loro.

Ogni applicazione lineare mappa un piano del dominio o nella singola origine, o in una retta del codominio, o in un piano del codominio. Quest'ultimo caso si ha quando $F(v)$ e $F(w)$ sono linearmente indipendenti.

Lemma

Sia $F : V \mapsto W$ un'applicazione lineare, e siano $v, w \in V$, linearmente indipendenti. Supponiamo inoltre che $F(v), F(w)$ siano linearmente indipendenti in W. Allora si ha

$$F(\mathcal{P}(v,w)) = \mathcal{P}(F(v), F(w)).$$

La dimostrazione è lasciata al lettore.

DEF:(**Segmento**) Sia V uno spazio vettoriale e siano $v, w \in V$. Chiamiamo *segmento* di estremi v e w l'insieme

$$\mathcal{S}(v, w) = \{p : p = \lambda v + (1 - \lambda) w, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Un segmento si dice *degenere* se $v = w$, in quanto in questo caso il segmento degenera in un singolo punto. Ogni applicazione lineare mappa segmenti in segmenti, in quanto si ha

Lemma

Sia $F : V \mapsto W$ un'applicazione lineare, e siano $v, w \in V$. Allora si ha

$$F(\mathcal{S}(v, w)) = \mathcal{S}(F(v), F(w)).$$

Proof.

Abbiamo che $p \in \mathcal{S}(F(v), F(w))$ se e solo se esiste $\lambda \in [0, 1]$ tale che $p = \lambda F(v) + (1 - \lambda) F(w)$ e quindi se e solo se $p = F(\lambda v + (1 - \lambda) w)$, i.e., $p \in F(\mathcal{S}(v, w))$. $\square$

DEF:(**Triangolo.**) Sia V uno spazio vettoriale e siano $u, v, w \in V$. L'insieme

$$\mathcal{T}(u, v, w) = \cup_{p \in \mathcal{S}(u,v)} \mathcal{S}(p, w)$$

è detto *triangolo* di vertici u, v, w.

Se nessuno dei tre vertici è combinazione convessa degli altri due, allora il triangolo si dice *non degenere*. Se esattamente uno dei tre è combinazione convessa degli altri due, il triangolo degenera in un segmento. Se ognuno è combinazione convessa degli altri due, i tre vertici coincidono e il triangolo degenera in un punto.
Ogni applicazione lineare mappa triangoli del dominio in triangoli del codominio. Infatti vale il

Lemma

Sia $F : V \mapsto W$ un'applicazione lineare, e siano $u, v, w \in V$. Allora

$$F(\mathcal{T}(u, v, w)) = \mathcal{T}(F(u), F(v), F(w)).$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

DEF:(**Insieme convesso.**) Sia V uno spazio vettoriale e sia $A \subseteq V$. Si dice che A è un insieme *convesso* se per ogni $u, v \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ si ha $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$.

Si può facilmente dimostrare che ogni applicazione lineare mappa insiemi convessi del dominio in insiemi convessi del codominio.