

1. Sia  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, p_{max}, p_{min})$  l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
  - Determina gli interi  $t, p_{max}, p_{min}$  in modo che  $t = p_{max}$ ,  $realmin = 1/32$  e  $realmax = 63$ . Calcola gli elementi positivi di  $\mathcal{F}$ .
  - Definisci in generale la precisione di macchina *ue* determina quella di  $\mathcal{F}$ .
  - Sia  $x = (0.\overline{10})_2$ . Determina  $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$ .
  - Sia  $y = (10.\overline{10})_2$ . Determina  $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ .
  - Scrivi  $x, y$  e  $\tilde{x}, \tilde{y}$  come frazioni di numeri interi in base 10 e calcola gli errori relativi.
  - Calcola  $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+)\tilde{y} \in \mathcal{F}$ .
  - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a  $\mathcal{F}$ ?

2. Si vuole calcolare la funzione  $y = f(x)$ .
  - Definisci l'errore inerente ed il concetto di condizionamento.
  - Studia il condizionamento della funzione  $f(x) = (1 + x^2)(1 - x)$  al variare di  $x$ .
  - Definisci l'errore algoritmico ed il concetto di stabilità.
  - Studia la stabilità degli algoritmi ottenuti dall'identità  $(1 + x^2)(1 - x) = 1 - x + x^2 - x^3$ .

3. Sia  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ .
  - Disegna il grafico di  $f$ . Localizza le tre radici  $\alpha, \beta, \gamma$  con  $\alpha < \beta < \gamma$
  - Studia la convergenza ad  $\alpha$  del metodo di Newton. La successione ottenuta con  $x_0 = -0.5$  è convergente ad  $\alpha$ ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
  - La successione ottenuta con  $x_0 = 1$  è convergente a  $\beta$ ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
  - Studia la convergenza a  $\gamma$  del metodo di Newton. La successione ottenuta con  $x_0 = 3$  è convergente a  $\gamma$ ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

Sia  $g(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ . Verifica che  $\alpha, \beta, \gamma$  sono punti fissi di  $g$ .

- Studia la convergenza ad  $\alpha, \beta, \gamma$  del metodo iterativo  $x_{k+1} = g(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
- Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione  $x_k \rightarrow \alpha$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

4. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 3 & 4 \\ \alpha & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Disegna il grafico della funzione  $\alpha \rightarrow \|A\|_\infty$ .
- Calcola la fattorizzazione  $LU$  di  $A$ .
- Per quale scelta del parametri  $\alpha$  il sistema  $Ax = b$  ha unica soluzione?
- Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perché si applica?
- Per quali valori del parametro  $\alpha$  il metodo di Gauss con il pivot parziale al secondo passo scambia la seconda con la terza riga di  $A$ ?
- Sia  $\alpha = 2$ . Calcola la fattorizzazione  $PA = LU$  con la tecnica del pivot parziale.
- Nota la fattorizzazione  $PA = LU$  come risolvi in generale il sistema lineare  $Ax = b$ ?
- Proponi un algoritmo per calcolare in generale la soluzione di  $Ux = d$  con  $U$  triangolare superiore, scrivi la pseudocodifica e analizza il costo computazionale.

5. Sia  $f(x) = \log_2(x)$ . Dati i punti  $P_0 = (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ ,  $P_1 = (1, f(1))$ ,  $P_2 = (2, f(2))$ .

- Determina il polinomio  $p$  che interpola i tre punti nella forma di Newton.
- Scrivi la formula dell'errore  $f(x) - p(x)$  e determina una limitazione di  $\max_{x \in [0.5, 2]} |f(x) - p(x)|$ .
- Dato l'ulteriore punto  $P_3 = (4, f(4))$ , determina il polinomio  $\tilde{p}$  che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
- Determina il polinomio  $q$  di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti  $P_0, P_1, P_2$  nel senso dei minimi quadrati.
- Determina il polinomio  $r$  di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti  $P_1, P_2, P_3$  nel senso dei minimi quadrati.

6.
  - Scrivi la definizione di polinomio cubico di Hermite a tratti.
  - Scrivi la definizione di Spline cubica.
  - In cosa differiscono le due funzioni?