Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 24 settembre 2018

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, p_{max}, p_{min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi t, p_{max}, p_{min} in modo che $p_{max} = p_{min}$, $realmin = 1/32$ e gli elementi siano 145. Calcola $realmax$.
   - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di $\mathcal{F}$.
   - Siano $x = (0.\overline{1011})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
   - Sia $y = (11.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Calcola $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.

2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = e^{\frac{1+2x}{1-x^2}}$ al variare di x.
   - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
   - Supponendo che l'esponenziale sia calcolato un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina, studia la stabilità dell'algoritmo che valuta la funzione f.

3. Sia $f(x) = e^{2x^3-3x^2+1} - 1$.
   - Determina una funzione F la cui valutazione non utilizza la funzione esponenziale in modo che $F(x) = 0$ sia equivalente al problema $f(x) = 0$. Disegna il grafico di F e determina le due radici reali α, β con $\alpha < \beta$.
   - Determina il massimo intervallo di convergenza ad α del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Determina il massimo intervallo di convergenza a β del metodo di Newton per F. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Applica il metodo a pendenza costante m per la funzione F.
   - Studia la convergenza del metodo ad α. Proponi un valore di m e un valore x_0 per cui il metodo sia convergente in maniera monotona. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza del metodo a β. Proponi un valore di m e un valore x_0 per cui il metodo sia convergente in maniera monotona. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_\infty$.
   - Per quali valori di α non esiste la fattorizzazione LU di A? Giustifica la risposta.
   - Determina $\alpha > 0$ tale che $||A||_\infty = 2$ e calcola la fattorizzazione LU di A.
   - Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori di α si applica la strategia del pivot parziale al primo passo?
   - Determina $\alpha < 0$ tale che $||A||_\infty = 5$ e calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo che calcola la soluzione x di $Ax = b$ con A triangolare inferiore di dimensione n e analizza il costo computazionale.

5. Sia $f(x) = \log_2(x)$. Dati i punti $P_0 = (\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$,$P_1 = (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x \in [\frac{1}{4}, 4]} |f(x) - p(x)|$.
   - Dato l'ulteriore punto $P_3 = (2, f(2))$., determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Determina il polinomio r di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_1, P_2, P_3 nel senso dei minimi quadrati.

6.
   - Sia data una successione convergente. Definisci il concetto di ordine di convergenza.
   - Siano date le seguenti stime dell'errore relative a due successioni convergenti:
     (a) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, ...$
     (b) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, ...$

     Quale successione converge linearmente? Determina una stima del fattore asintotico di convergenza.
   - Dato un metodo di iterazione funzionale per il problema $f(x) = 0$. Proponi un criterio d'arresto e deriva la stima dell'errore.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo efficiente per calcolare il valore del polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in un punto x assegnato e analizza la complessità computazionale.
   - Scrivi la pseudocodifica per il metodo di bisezione e proponi un criterio di arresto.
   - Scrivi la pseudocodifica di un algoritmo che calcola i coefficienti del polinomio $p_n(x)$ che interpola i punti $x_i, y_i, i = 0, ..., n$ nella forma di Newton.