Calcolo delle Probabilità e Statistica
Soluzioni domande di teoria

Magoga Francesco

12 febbraio 2019

Versione 1.2

Indice

Introduzione

Le soluzioni contenute in questo testo si basano sugli esami dell'A.A. 2016/2017, sull'A.A. 2017/2018 e sull'inizio dell'A.A. 2018/2019 del corso di Calcolo delle Probabilità e Statistica tenuto dal prof. Luigi Pace all'università degli studi di Udine.

Le soluzioni sono copiate dalle dispense, quindi sono corrette. In ogni caso se trovate degli errori di scrittura potete contattarmi sulla mail spes (magoga.francesco@spes.uniud.it), così che io possa correggerli e rilasciare una nuova versione della dispensa (si, la versione serve solo per capire quale dispensa è scritta più recentemente, i contenuti però non cambiano, a meno di correzioni di errori).

Sembra che il prof. abbia iniziato a riciclare le vecchie domande e che quindi le domande di teoria probabili sono un set abbastanza ristretto (attenzione: probabili, non possibili). Qui raccolgo le risposte a tale insieme di quesiti, ma per gli altri vi dovete arrangiare in qualche modo.

Cosa vuole il professore

Il prof. mi ha detto che la prima cosa che vuole nelle domande di teoria è la definizione precisa di ciò che ha richiesto (i.e. se richiede la legge normale e le sue proprietà bisogna definire prima di tutto quando una v.c. ha legge normale). In seguito si procede rispondendo alle altre eventuali richieste (nel nostro esempio le proprietà). Dimostrazioni e approfondimenti sono ben graditi dal prof. che tenderà a premiare la risposta con il punteggio massimo (a patto che sia tutto corretto ovviamente).

1 A.A. 2016/2017

1.1 Esame 01/02/2017

1.1.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Una v.c. univariata Z con supporto $S_Z = \mathbb{R}$ e f.d.p.

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

è detta con legge normale standard, in breve $Z \sim N(0,1)$. Inoltre, la legge di $X = \mu + \sigma Z$, dove $Z \sim N(0,1)$, è detta normale con parametri μ e σ^2, in breve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Le proprietà della normale standard sono:

- $p_Z(-z) = p_Z(z)$: Z ha densità simmetrica attorno all'origine, questo implica che $Z \sim -Z$
- $p_Z(|z|)$ è monotona decrescente in $|z|$

Le proprietà delle leggi normali in generale sono:

- Chiusura sotto trasformazioni affini: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $T = a + bX$ con $b \neq 0$, allora
  $$T \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$
  Dimostrazione:
  Con $Z \sim N(0,1)$, si ha $Z \sim -Z$ per la simmetria attorno all'origine di $p_Z(z)$. Inoltre, $X \sim \mu + \sigma Z$. Quindi
  $$\begin{aligned} T &= a + bX \\ &\sim a + b(\mu + \sigma Z) \\ &\sim a + b\mu + b\sigma Z \\ &\sim a + b\mu + |b|\sigma Z \\ &\sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2) \end{aligned}$$
  dove il valore assoluto è giustificato dal fatto che $Z \sim -Z$.
- Proprietà additiva delle normali indipendenti: Se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ sono indipendenti, allora
  $$S = X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left(e^{tS}\right) \\
&= E\left(e^{t(X+Y)}\right) \\
&= E\left(e^{tX}e^{tY}\right) \\
&= E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) \\
&= M_X(t)M_Y(t) \\
&= e^{t\mu_X+\frac{1}{2}t^2\sigma_X^2}e^{t\mu_Y+\frac{1}{2}t^2\sigma_Y^2} \\
&= e^{t(\mu_X+\mu_Y)+\frac{1}{2}t^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}
\end{aligned}$$

dove $E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right)$ per l'indipendenza di X e Y.

Abbiamo anche che se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, X e Y sono indipendenti, allora $T = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$ purché $(a, b) \neq (0, 0)$, quindi $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Inoltre se X_i, $i = 1, \ldots, n$ sono v.c. indipendenti con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ allora $T = \sum_{i=1}^n a_iX_i \sim N(\sum_{i=1}^d a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$ purché $a_i \neq 0$ per almeno un $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- $x_{mo} = x_{0,5} = E(X) = \mu$: il parametro μ è moda, mediana e valore atteso di X
- $Var(X) = \sigma^2$: il parametro σ^2 è la varianza di X e σ è lo scarto quadratico medio

Abbiamo anche che $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e si ottiene quindi che $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2 = \sigma^2$.

Nota: se $Z \sim N(0, 1)$ allora $\mu_Z = 0$ e quindi anche $x_{mo} = x_{0,5} = 0$: la normale standard ha moda e mediana pari a 0.

1.1.2 Quesito 2

Domanda: *Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge $Bi(1, p)$ (binomiale elementare, detta anche di Bernoulli).*

Risposta:

Sia X una v.c. univariata con f.m.p./f.d.p. $p_X(x)$. La funzione generatrice dei momenti di X, indicata con $M_X(t)$, è una funzione reale di variabile reale definita da

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} e^{tx}p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}p_X(x)dx & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

Allora sia $X \sim Bi(1,p)$, $p \in (0,1)$, avremo che

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} (e^t)^x \binom{1}{x} p^x (1-p)^{1-x} \\ &= e^{t0} \binom{1}{0} p^0 (1-p)^{1-0} + e^{t1} \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1-p) + e^t \cdot 1 \cdot p \cdot 1 \\ &= 1 - p + pe^t \end{aligned}$$

In generale: Sia $X \sim Bi(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in (0,1)$. Si ha $S_X = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq [0,n]$, quindi X ha f.g.m. propria, con dominio di finitezza $\mathbb{R}$. È facile calcolare $M_X(t)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} (e^t)^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\ &= (1 - p + pe^t)^n \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è applicato il teorema del binomio.

1.2 Esame 10/02/2017

1.2.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni di Poisson: definizione e risultati principali.*

Risposta:

Si dice che X ha legge di Poisson con parametro λ, $\lambda > 0$, e in breve si scriverà $X \sim P(\lambda)$, se è una v.c. univariata con legge discreta che ha supporto $S_X = \mathbb{N}$ e f.m.p. per $x \in S_X$ pari a

$$p_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Si ha che

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x \, p_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$$

dove si è usato il cambiamento di indice $i = x - 1$ nell'ultimo passaggio e $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$.

Le leggi di Poisson trovano la loro origine nel fatto che è possibile approssimare in modo semplice certe probabilità binomiali. Si consideri, per $n > \lambda > 0$, la successione di v.c. $X_n \sim Bi(n, \lambda/n)$ dove la legge binomiale ha n, numero di prove indipendenti, grande, e la probabilità costante di successo nelle singole prove $p = \lambda/n$, di conseguenza, piccola. È facile vedere che X ha supporto $S_X = \lim_{x\to\infty} S_{X_n} = \cup_{n=1}^{\infty} S_{X_n} = \cup_{n=1}^{\infty}\{0, 1, \ldots, n\} = \mathbb{N}$ e inoltre

$$p_X(x) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

1.2.2 Quesito 2

Domanda: *La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.*

Risposta:
Sia X una v.c., la varianza di X è definita come

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \begin{cases} \sum_{x\in S_X} (x - E(X))^2 p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 p_X(x) dx & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases} \end{aligned}$$

mentre lo scarto quadratico medio è semplicemente

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Proprietà immediate della varianza:

1. **Non negatività:** Per ogni X con varianza finita $Var(X) \geq 0$ e $Var(X) = 0$ solo per $X \sim D(x_0)$.
   La dimostrazione della non-negatività è immediata dalla proprietà di Cauchy del valore atteso. Infatti $Var(X)$ è il valore atteso della v.c. $(X - E(X))^2$ il cui supporto è un sottoinsieme di $[0, +\infty)$.

2. **Invarianza rispetto a traslazioni:** $Var(X + b) = Var(X)$.
   Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Var(X + b) &= E((X + b - E(X + b))^2) \\ &= E((X + b - E(X) - b)^2) \\ &= E((X - E(X))^2) \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

   dove tra il primo e il secondo passaggio si è applicata la proprietà di linearità del valore atteso (i.e. $E(X + b) = E(X) + b$).

3. **Omogeneità di secondo grado:** $Var(aX) = a^2Var(X)$.
   Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Var(aX) &= E((aX - E(aX))^2) \\ &= E((aX - aE(X))^2) \\ &= E((a(X - E(X)))^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \\ &= a^2E((X - E(X))^2) \\ &= a^2Var(X) \end{aligned}$$

   dove tra il primo e il secondo passaggio e tra il quarto e il quinto passaggio si è applicata la proprietà di linearità del valore atteso (i.e. E(aX) = aE(X)).

Dalle proprietà di invarianza rispetto a traslazioni e omogeneità di secondo grado precedenti si ricava che $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

Formula per il calcolo: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 + (E(X))^2 - 2E(X)X) \\ &= E(X^2) + (E(X))^2 - 2E(X)E(X) \\ &= E(X^2) + (E(X))^2 - 2(E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

dove tra il secondo e il terzo passaggio si è applicata la proprietà di linearità del valore atteso.

1.3 Esame 16/06/2017

1.3.1 Quesito 1

Domanda: *I principali indici di posizione per variabili casuali univariate.*

Risposta:
I principali indici di posizione per variabili casuali univariate sono:

1. **La moda:** Sia X una v.c. con legge discreta o continua, con f.m.p./f.d.p. $p_X(x)$. Si dice moda di X, indicata con x_{mo}, un valore del supporto di X per cui

$$p_X(x_{mo}) \geq p_X(x) \qquad \text{per ogni } x \in S_X$$

Nel caso continuo, si richiede inoltre che la densità di X sia continua almeno da destra o da sinistra in x_{mo}.

La moda non è necessariamente unica: possono esserci più mode di X.

2. **La mediana:** Sia X una v.c. univariata con f.r. $F_X(x)$. Si dice mediana di X, indicata con $x_{0.5}$, un valore reale tale che valgano simultaneamente

$$P(X \leq x_{0.5}) \geq 0.5 \qquad e \qquad P(X \geq x_{0.5}) \geq 0.5$$

La predizione del valore futuro di X insita in $x_{0.5}$ è ottenuta con il criterio di spezzare in due le possibilità, essendo le probabilità di sottostima ($X \leq x_{0.5}$) e di sovrastima ($X \geq x_{0.5}$) grosso modo bilanciate, 0.5 o più. Si osservi che nel caso discreto può essere che $P(X = x_{0.5}) > 0$, e ciò spiega le diseguaglianze nella definizione.

Anche la mediana non è necessariamente unica. Tutte le soluzioni dell'equazione $F_X(x) = 0.5$ sono mediana di X. D'altro canto, se l'equazione $F_X(x) = 0.5$ non ha soluzioni, la mediana di X è unica e risulta essere il più piccolo valore di x per cui $F_X(x) \geq 0.5$.

3. **Il quantile-p:** Sia X una v.c. univariata con f.r. $F_X(x)$. Per $p \in (0,1)$ si dice quantile-p di X, indicato con x_p, un valore reale tale che valgano simultaneamente

$$P(X \leq x_p) \geq p \qquad e \qquad P(X \geq x_p) \geq 1 - p$$

Come la mediana, anche il quantile-p non è necessariamente unico. Tutte le soluzioni dell'equazione $F_X(x) = p$ sono quantile-p di X. D'altro canto, se l'equazione $F_X(x) = p$ non ha soluzioni, il quantile-p di X è unico ed è il più piccolo valore di x per cui $F_X(x) \geq p$.

4. **Il valore atteso** Vedi Esame 17/07/2017 - Quesito 1 (escluse proprietà).

1.3.2 Quesito 2

Domanda: *Le leggi o distribuzioni di Poisson: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 1.

1.4 Esame 17/07/2017

1.4.1 Quesito 1

Domanda: *Il valore atteso: definizione e proprietà principali.*

Risposta:
Sia X una v.c. univariata con legge discreta o continua, con supporto S_X e f.m.p./f.d.p. $p_X(x)$. Si dice valore atteso di X, indicato con $E(X)$, il valore reale

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} x p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

purché la serie o l'integrale convergano assolutamente, ossia

$$\begin{cases} \sum_{x \in S_X} |x| \, p_X(x) < +\infty & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, p_X(x) dx < +\infty & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

Diversamente da moda, mediana e quantili, l'esistenza del valore atteso non è garantita. In compenso, il valore atteso di una v.c., se esiste finito, è unico.

Proprietà principali del valore atteso:

1. **Il valore atteso di trasformate:** Siano X e Y v.c. univariate con $Y = g(X)$. Allora si ha, seguendo la definizione

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{y \in S_Y} y p_Y(y) & \text{se } Y \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy & \text{se } Y \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

   ma vale anche

$$E(Y) = E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} g(x) \, p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, p_X(x) dx & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

2. **Il valore atteso del prodotto di v.c. indipendenti:** Sia $X = (X_1, \ldots, X_d)$ una v.c. con componenti indipendenti, ossia con

$$S_X = S_{X_1, X_2, \ldots, X_d} = S_{X_1} \times S_{X_2} \times \cdots \times S_{X_d}$$

   e con

$$p_X(x) = p_{X_1, \ldots, X_d}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} p_X(x_i)$$

allora

$$E(X_1 X_2 \dots X_d) = \prod_{i=1}^{d} E(X_i)$$

e, più in generale, per g_i funzioni reali misurabili, $i = 1, \dots, d$

$$E(g_1(X_1) g_2(X_2) \dots g_d(X_d)) = \prod_{i=1}^{d} E(g_i(X_i))$$

3. **La proprietà di Cauchy** Quando esiste finito, il valore atteso della v.c. univariata X può non essere un punto del supporto di X, ma è sempre intermedio fra punti del supporto:

$$inf(S_X) \leq E(X) \leq sup(S_X)$$

Ci si limita a verificare la formula per X con legge discreta e supporto finito $S_X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Supponendo, senza perdita di generalità,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k$$

si ha

$$x_1 \leq x_i \leq x_k \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

e quindi

$$x_1 p_X(x_i) \leq x_i p_X(x_i) \leq x_k p_X(x_i) \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Sommando le diseguaglianze si ottiene

$$\sum_{i=1}^{d} x_1 p_X(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} x_i p_X(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} x_k p_X(x_i)$$

porto fuori le costanti

$$x_1 \sum_{i=1}^{d} p_X(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} x_i p_X(x_i) \leq x_k \sum_{i=1}^{d} p_X(x_i)$$

da cui, poiché $\sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) = 1$ per la normalizzazione

$$x_1 \leq E(X) \leq x_k$$

Per concludere basta osservare che $inf(S_X) = min(S_X) = x_1$ e analogamente per $sup(S_X) = max(S_X) = x_k$.

4. **La proprietà di linearità:** Siano X e Y v.c. univariate con $Y = aX + b$. Allora

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

Per la dimostrazione, si supponga senza perdita di generalità che X abbia legge continua. Allora

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)p_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} axp_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} bp_X(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

dove ovviamente $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$.

5. **La proprietà di baricentro:** Si tratta di un caso particolare della proprietà di linearità, relativo alla variabile scarto $Y = X - E(X)$:

$$E(X - E(X)) = 0$$

6. **La proprietà di linearità (generalizzazione):** Se (X, Y) è una v.c. bivariata e $T = aX + bY$ è una combinazione lineare delle componenti di (X, Y) con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$E(T) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Più in generale, se $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ è una v.c. multivariata, il valore atteso della combinazione lineare è la combinazione lineare dei valori attesi, ossia per ogni $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$

$$E\left(\sum_{i=1}^{d} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{d} a_i E(X_i)$$

Si omette la dimostrazione.

7. **La proprietà dei minimi quadrati:** Se X è una v.c. univariata e i valori attesi indicati esistono, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$

$$E((X - c)^2) \geq E((X - E(X))^2)$$

dove vale l'eguaglianza solo per $c = E(X)$.

Per dimostrare la formula, si consideri lo sviluppo del quadrato del binomio

$$
\begin{aligned}
(X-c)^2 &= (X-E(X)+E(X)-c)^2 \\
&= (X-E(X))^2 + (E(X)-c)^2 + 2(E(X)-c)(X-E(X))
\end{aligned}
$$

Per la proprietà di linearità del valore atteso

$$
\begin{aligned}
E((X-c)^2) &= E((X-E(X))^2) + (E(X)-c)^2 + 2(E(X)-c)E(X-E(X)) \\
&= E((X-E(X))^2) + (E(X)-c)^2
\end{aligned}
$$

poiché $E(X-E(X)) = 0$ per la proprietà di baricentro.

La tesi si consegue osservando che $(E(X)-c)^2 \geq 0$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ con eguaglianza a 0 solo per $E(X)-c=0$ ossia solo per $c = E(X)$.

1.4.2 Quesito 2

Domanda: *La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 2.

1.5 Esame 11/09/2017

1.5.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 01/02/2017 - Quesito 1.

1.5.2 Quesito 2

Domanda: *Si enuncino tre proprietà della varianza e se ne dimostri una.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 2.

2 A.A. 2017/2018

2.1 Esame 31/01/2018

2.1.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni di Poisson: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 1.

2.1.2 Quesito 2

Domanda: *Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge $D(x_0)$ (degenere in $x_0 \in \mathbb{R}$).*

Risposta:
Sia X una v.c. univariata con f.m.p./f.d.p. $p_X(x)$. La funzione generatrice dei momenti di X, indicata con $M_X(t)$, è una funzione reale di variabile reale definita da

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} p_X(x) dx & \text{se } X \text{ ha legge continua} \end{cases}$$

Sia $X \sim D(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, per cui $S_X = \{x_0\}$ e $p_X(x_0) = 1$. Allora

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = e^{tx_0} \cdot 1 = e^{tx_0} \\ M'_X(t) &= x_0 \, e^{tx_0} \Rightarrow E(X) = M'_X(0) = x_0 \\ M''_X(t) &= x_0^2 \, e^{tx_0} \Rightarrow E(X^2) = M''_X(0) = x_0^2 \end{aligned}$$

da cui $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_0^2 - (x_0)^2 = 0$.

2.2 Esame 12/02/2018

2.2.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 01/02/2017 - Quesito 1.

2.2.2 Quesito 2

Domanda: *La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 2.

2.3 Esame 18/06/2018

2.3.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni binomiali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Si dice che la v.c. univariata X ha legge binomiale con indice $n \in \mathbb{N}^+$ e parametro $p \in (0,1)$, e si scrive $X \sim Bi(n,p)$, se per ogni $B \in \mathcal{B}_1$ vale

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in \{0,1,\ldots,n\} \cap B} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Quando $n = 1$, le leggi binomiali sono dette di Bernoulli o binomiali elementari. Un esempio semplice è $X \sim Bi(1, 0.5)$ per cui $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = 0.5$ ossia $P(X = 0) = P(X = 1) = 0.5$ e per tutti gli altri valori si ha $P(X \notin \{0,1\}) = 0$, ossia non si osservano.

Se $p = 0.5$ allora $p_X(x)$ è simmetrica rispetto alla metà del supporto: se $S_X = \{0,\ldots,n\}$ allora $p_X(0) = p_X(n)$, $p_X(1) = p_X(n-1)$, $p_X(2) = p_X(n-2)$, ...

2.3.2 Quesito 2

Domanda: *I principali indici di posizione per variabili casuali univariate.*

Risposta:
Vedi Esame 16/06/2017 - Quesito 2.

2.4 Esame 23/07/2018

2.4.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni esponenziali: definizione e risultati principali.*

Risposta:

Si dice che X ha legge esponenziale con parametro $\lambda > 0$, e si scrive in breve $X \sim Esp(\lambda)$, se la f.d.p. di X è

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il supporto di X è quindi $S_X = [0, +\infty[$.

Si verifica facilmente che $p_X(x)$ è una f.d.p.. La condizione di non negatività è soddisfatta perché $\lambda > 0$ e $e^{-\lambda x} > 0$. Per verificare la normalizzazione, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = \int_0^{+\infty} p_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} - (-e^0) = 1$$

Esponiamo adesso alcuni calcoli notevoli.

Funzione di sopravvivenza:

$$P(X > 0) = \int_x^{+\infty} p_X(t)dt = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_x^{+\infty} = e^{-\lambda x}$$

Funzione di ripartizione:

$$P(X \leq 0) = 1 - P(X > 0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Essendo una legge continua

$$P(X = x) = 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Il valore atteso di $X \sim Esp(\lambda)$ è $E(X) = 1/\lambda$. Infatti

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dt = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}d(\lambda x)$$

dove l'ultimo integrale vale 1. Infatti il cambiamento di variabile $\lambda x = t$ porta a un integrale facilmente calcolabile per parti

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 0 + 1 = 1$$

Quindi riassumendo

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \iff \lambda = \frac{1}{E(X)}$$

2.4.2 Quesito 2

Domanda: *I principali indici di posizione per variabili casuali univariate.*

Risposta:
Vedi Esame 16/06/2017 - Quesito 2.

2.5 Esame 11/09/2010

2.5.1 Quesito 1

Domanda: *Il valore atteso: definizione e proprietà principali.*

Risposta:
Vedi Esame 17/07/2017 - Quesito 1.

2.5.2 Quesito 2

Domanda: *Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge* $Bi(1, p)$*, binomiale elementare o di Bernoulli.*

Risposta:
Vedi Esame 01/02/2017 - Quesito 2.

3 A.A. 2018/2019

3.1 Esame 31/01/2019

3.1.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 01/02/2017 - Quesito 1.

3.1.2 Quesito 2

Domanda: *Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge $Bi(1,p)$ (binomiale elementare, detta anche di Bernoulli).*

Risposta:
Vedi Esame 01/02/2017 - Quesito 2.

3.2 Esame 12/02/2019

3.2.1 Quesito 1

Domanda: *Le leggi o distribuzioni binomiali: definizione e risultati principali.*

Risposta:
Vedi Esame 16/08/2018 - Quesito 1.

3.2.2 Quesito 2

Domanda: *La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.*

Risposta:
Vedi Esame 10/02/2017 - Quesito 2.