COMPITO 9.9.20

1. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{max}, e_{min})$, arrotondamento

$$- \begin{cases} realmin = 1/16 \\ e_{max} = t \\ \frac{realmax}{u} = 56 \end{cases} \qquad realmin = \beta^{-e_{min}-1} = 2^{-e_{min}-1} \qquad u = \frac{\beta^{1-t}}{2} = 2^{-t} \qquad realmax = \beta^{e_{max}}(1-\beta^{-t}) = 2^t(1-2^{-t}) = 2^t - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{-e_{min}-1} = 2^{-4} \Rightarrow e_{min} = 3 \\ e_{max} = t \\ \frac{(2^t-1)}{2^{-t}} = 56 \Rightarrow (2^t-1)\cdot 2^t = 56 \Rightarrow 2^{2t} - 2^t - 56 = 0 \end{cases}$$

$y = 2^t \Rightarrow y^2 - 2y - 56 \to y_{1,2} = 8, -7$

$\Rightarrow$ prendiamo $y > 0 \to y = 8$

$2^t = 8 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow e_{max} = 3$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, 3, 3, 3)$

- $x = 1,\overline{101}_2$

$\tilde{x} = fl(x) = fl(1,\overline{101}_2) = fl(0,1\overline{101}_2 \cdot 2) = 0,111_2 \cdot 2$

$y = 10,\overline{101}_2$

$\tilde{y} = fl(y) = fl(0,10\overline{101}_2 \cdot 2^2) = 0,101_2 \cdot 2^2$

calcola $\tilde{z} = \tilde{x}\, fl(+)\, \tilde{y} = fl(\tilde{x} + \tilde{y}) = fl\begin{pmatrix} 0,0111_2 \cdot 2^2 + \\ 0,1010_2 \cdot 2^2 \\ \hline 1,0001_2 \cdot 2^2 \end{pmatrix} = fl(1,0001_2 \cdot 2^2) = fl(0,10001_2 \cdot 2^3) = 0,100_2 \cdot 2^3$

- $\tilde{x} = 0,111_2 \cdot 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$x = 1,\overline{101}_2 = \frac{1101_2 - 1_2}{111_2} = \frac{\cancel{1} + 4 + 8 - \cancel{1}}{1+2+4} = \frac{12}{7}$

- $\tilde{z} \cdot 2^e = realmin = \frac{1}{16} = 2^{-4}$

$\tilde{z} = 2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2 \Rightarrow 2^2 \cdot 2^e = 2^{-4} \Rightarrow 2 + e = -4 \Rightarrow e = -6$

$realmax - \tilde{z} = ?$

2. $y = f(x)$, $\quad f(x) = e^{g(x)} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

- $cond_f(x) = \frac{|x|\,|f'(x)|}{|f(x)|} = \frac{|x| \cdot \cancel{|e^{g(x)}|} \cdot |g'(x)|}{\cancel{|e^{g(x)}|}} = |x| \cdot |g'(x)|$ che può essere visto anche come $cond_{g(x)} \cdot |g(x)|$

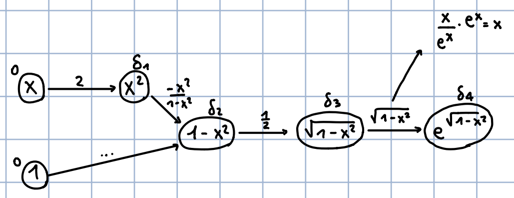
$cond_g(x) = \frac{|x|\,|g'(x)|}{|g(x)|}$

$g(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad$ Dom: $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\mathrm{cond}_g(x) = \frac{|x|}{|\sqrt{1-x^2}|} \cdot \left| \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \right| = \left| \frac{x^2}{1-x^2} \right| = \frac{x^2}{|1-x^2|}$$

$\rightarrow$ problema MAL CONDIZ. per $x \approx \pm 1$

$$\mathrm{cond}_f(x) = \frac{x^2}{|1-x^2|} \cdot |\sqrt{1-x^2}| = \frac{x^2}{|\sqrt{1-x^2}|}$$

- 

$$\varepsilon_{ALGO} = \delta_4 + \sqrt{1-x^2}\left(\delta_3 + \frac{1}{2}\left(\delta_2 - \frac{x^2}{1-x^2}\delta_1\right)\right)$$

$$|\varepsilon_{ALGO}| \leq u + \sqrt{1-x^2}\left(u + \frac{1}{2}u + \frac{x^2}{2|1-x^2|} \cdot u\right)$$

$$= u + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{3}{2}u + \frac{x^2}{2|1-x^2|} \cdot u$$

INSTABILE per $x \approx \pm 1$

- $g(x) = \sqrt{(1+x)(1-x)}$ ...

3. $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp \infty$

$f'(x) = -6x^2 + 4x + 10$ $\quad f'(x) = 0$ sse $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{-12} = \frac{-4 \pm 16}{-12} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ -1 \end{cases}$

$f'(x) > 0$ sse $-1 < x < 5/3$

$f'(x) < 0$ sse $x < -1 \lor x > 5/3$

$f(-1) = 0$ $\quad -1$ è ZERO

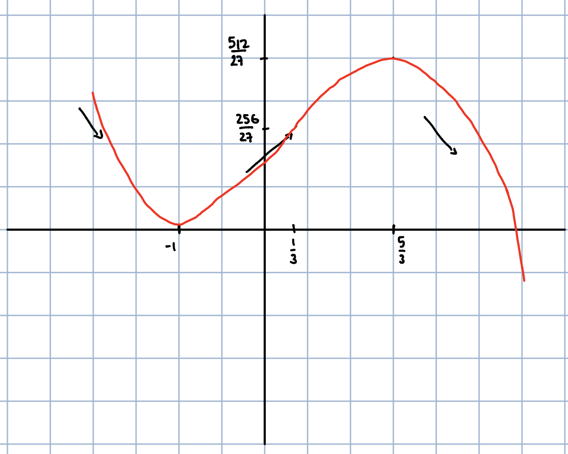
$f(5/3) = \frac{512}{27} > 0$

$f''(x) = -12x + 4$

$f''(x) = 0$ sse $x = 1/3$ $\qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{256}{27}$

> 0 se $x > 1/3$

< 0 se $x < 1/3$



$\boxed{\alpha = -1}$ $\quad \beta > 3/5$ $\quad f(2) = 18 > 0$ $\quad \beta > 2$

$f(3) = 0$ $\quad \boxed{\beta = 3}$

$x_0 \in]-\infty, \alpha[$ CONVERGENZA MONOTONA per il teorema, lineare perché α è RADICE DOPPIA

per il teorema perché $f \cdot f'' > 0$, $f' \neq 0$

$x_0 = \alpha = -1$

$x_0 \in]-1, \frac{1}{3}[$ per il TEO CONVERGENZA MONOTONA LINEARE

$x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right[$ CONVERG. LINEARE monotona a partire dalla 2° iteraz.

$x_0 = \frac{5}{3}$ metodo non si può applicare

$x_0 \in \left]3, +\infty\right[$, $f < 0$, $f'' < 0 \Rightarrow ff'' > 0$

$f' \neq 0 \Rightarrow$ per il t. convergenza monotona

$x_0 \in \left]\frac{5}{3}, 3\right[$, convergenza QUADRATICA

- $x_0 \in \{-2, 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 2, 3\}$ ...

- $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$ $\quad g(\alpha) = \alpha - \frac{\overset{0}{\overbrace{f(\alpha)}}}{m} = \alpha$, lo stesso per β

$x_k = g(x_{k-1})$

- LOCALMENTE CONVERGENTE a β in modo monotono con fattore asintotico $1/5$

$g'(\beta) = g'(3) = 1/5$ $\quad g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m} = 1 - \frac{-6x^2+4x+10}{m}$

$f'(3) = -6 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 10 = -54 + 12 + 10 = -32$

$g'(3) = \frac{1+32}{m} = \frac{1}{5} \Rightarrow m = -40$

successione con $x_0 = 2$ è convergente?

$g''(x) < 0$ sse $x > 1/3$ quindi $g'(x)$ è DECRESCENTE se $x > 1/3$

in $[2,3]$ g' è decrescente, $\max\limits_{x \in [2,3]} g'(x) = g'(2) = 1 - \frac{-24+8+10}{-40} = 1 + \frac{-6}{40} \in \left]0,1\right[$

se $x \in [2,3]$ allora $g'(x) \in \left]0,1\right[$, la successione che parte da $x_0 = 2$ è CONVERGENTE

- determina m per convergenza locale a β con ordine quadratico $g'(\beta) = g'(3) = 0 = 1 + \frac{32}{m}$. trovo m

la successione con $x_0 = 2$ converge?

- $m = 20$, studiare la convergenza locale ad $\alpha = -1$ e dire se la successione $x_0 = 0$ è converg. e con che ordine

$g'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{20} = 1$ convergenza SUBLINEARE

Studiamo g' in $[-1,0]$ $\quad g''(x) = -f''(x) = \underline{12x-4} = \underline{3x-1}$ $\qquad g'(x)$ è decrescente in $[-1,0]$

$\overline{m} \quad \overline{20} \quad \overline{5}$

$$g''(x) < 0 \text{ sse } x < 1/3$$

$g'(x)$ è decrescente in $[-1,0]$

$$g'(0) = 1 - \frac{f'(0)}{20} = 1 - \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{se } x \in]-1,0] \quad g'(x) \in [1/2, 1[$$ la succ. $x_0 = 0$ converge ad α in modo sublineare

4. $$A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & \alpha+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \alpha+1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\alpha-2} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha+1}{\alpha-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_1 A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & \alpha+1 \\ 0 & \frac{4}{\alpha-2}+1 & \frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}-2 \\ 0 & \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-2}-2 & \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha-2}+5 \end{pmatrix}$$