

Esperimenti casuali: definizione, loro spazio campionario, due esempi particolari.

Con il termine esperimento casuale, o fenomeno aleatorio, si indica ogni fenomeno in riferimento al quale le conoscenze iniziali non permettono di conoscere in anticipo l'esito di tale esperimento, perciò è da ritenere possibile una pluralità di esiti. L'insieme di tutti gli esiti di un fenomeno aleatorio, chiamati eventi elementari, viene chiamato spazio fondamentale o spazio campionario, e solitamente è noto prima di osservare il fenomeno. Al termine dell'osservazione, uno ed uno solo degli eventi elementari si sarà realizzato. Esempi concreti di esperimenti casuali sono il lancio di un dado, con spazio campionario $\{1,2,3,4,5,6\}$, e il lancio di una moneta, con spazio campionario $\{\text{testa}, \text{croce}\}$.

Eventi, evento certo, operazioni logiche su eventi, evento impossibile, classe degli eventi: definizioni ed un esempio particolare.

Si dice evento ogni sottoinsieme dello spazio campionario, cioè ogni elemento dell'insieme delle parti dello spazio fondamentale. In altre parole un evento è una collezione di eventi elementari che si realizza se e solo se si realizza uno degli eventi elementari che lo definiscono. Se l'evento che si realizza coincide con lo spazio campionario allora tale evento è detto evento certo. Se invece non si realizza alcun evento, si dice che si realizza l'evento impossibile, indicato con \emptyset , ovvero l'evento contrario all'evento certo. Dati due insiemi A e B appartenenti allo spazio campionario, si definiscono tra loro alcune operazioni logiche: l'evento complementare \bar{A} , l'insieme di eventi elementari che non appartengono ad A; l'unione $A \cup B$, l'evento che si realizza se e solo se si realizza uno fra gli eventi elementari che definiscono A oppure B; l'intersezione $A \cap B$, l'evento che si realizza se e solo se si realizza uno fra gli eventi elementari che definiscono entrambi gli insiemi; l'evento $A \setminus B$, l'insieme di eventi elementari che definiscono A ma non B; l'implicazione $A \Rightarrow B$, se A è sottoinsieme di B, nel senso che la realizzazione di A implica necessariamente la realizzazione di B. Una classe degli eventi per un dato esperimento casuale con spazio campionario è l'insieme degli eventi dello spazio e di solito è una σ -algebra di parti, ovvero contiene lo spazio campionario ed è chiusa rispetto alle operazioni insiemistiche di unione e complementazione. Volendo fare un esempio concreto analizziamo il lancio di un dado: "esce un numero pari" è un evento poiché comprende gli eventi elementari "esce 2", "esce 4" ed "esce 6"; "esce un numero tra 1 e 6" è l'evento certo; "esce il numero 7" è l'evento impossibile; se A è "esce 2" e B è "esce un numero pari" si ha che $A \Rightarrow B$ perché se esce 2, si realizza A, che è un evento che contribuisce alla definizione di B, e quindi anche B stesso; la classe degli eventi è invece l'insieme delle parti dello spazio $\{1,2,3,4,5,6\}$ che ha cardinalità 26.

Eventi incompatibili e partizioni dello spazio campionario: definizioni e risultati pertinenti.

Due eventi, A e B, si dicono incompatibili se la loro intersezione, $A \cap B$, è l'insieme vuoto \emptyset , ovvero se non esistono eventi elementari che contribuiscono alla definizione di entrambi gli eventi A e B. Si dice una partizione dello spazio campionario una collezione di eventi A_i , per $i \in I$ sottoinsieme di N, tale che sia necessaria, ovvero l'unione di tutti gli A_i è lo spazio campionario, e costituita da eventi incompatibili, ovvero se per $i \neq j$ allora $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Spazio campionario, classe degli eventi, misura di probabilità: definizioni e assiomi di Kolmogorov.

L'insieme di tutti gli esiti di un esperimento casuale, chiamati eventi elementari, viene detto spazio fondamentale o spazio campionario. Una classe degli eventi per un dato esperimento casuale con spazio campionario è l'insieme degli eventi dello spazio e di solito è una σ -algebra di parti, ovvero contiene lo spazio campionario ed è chiusa rispetto alle operazioni insiemistiche di unione e complementazione. Dati uno spazio campionario S e una σ -algebra di parti dello spazio F, viene detta misura di probabilità P su F un'applicazione $P: F \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le tre proprietà seguenti, note anche con il nome di assiomi di Kolmogorov:

- 1) $P(A) \geq 0$ per ogni evento $A \in F$ (assioma di non-negatività)
- 2) $P(S) = 1$ (assioma di normalizzazione)
- 3) Se $A_i \in F$ per ogni $i \in I$ sottoinsieme di N e per ogni $i, j \in I$ con $i \neq j$ tale che $A_i \cap A_j = \emptyset$, allora $P(\text{unione di tutti gli } A_i) = \sum P(A_i)$ per $i \in I$ (assioma di σ -addizione)

Spazi campionari con cardinalità finita: la probabilità classica. Definizione e un esempio.

Tutte le volte che la cardinalità di uno spazio campionario S è finita e numerabile, allora la classe degli eventi dello spazio non è nient'altro che la misura di probabilità dello spazio stesso. Quando avviene ciò, la misura di probabilità di un evento E coincide con la definizione di probabilità classica, ovvero $P(E) = |E| / |S|$ per ogni $E \in P(S)$. Tale definizione soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov (vedi sopra) perciò è accettabile. Un esempio pratico della definizione di probabilità classica è la probabilità che esca un numero da uno a sei lanciando un dado. Ogni evento ha probabilità di accadere $1/6$, data dalla cardinalità che un evento accada diviso la cardinalità dello spazio campionario del lancio di un dado $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Si enuncino tre fra i primi teoremi elementari del Calcolo delle Probabilità e se ne dimostri uno.

TE1) $P(\emptyset) = 0$ dim. $\emptyset \cap S = \emptyset$ (eventi incompatibili) \Rightarrow per Kolmogorov 3 $P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S) \Rightarrow$ ma $\emptyset \cup S = S$ dunque $P(S) = P(\emptyset) + P(S) \Rightarrow$ per Kolmogorov 2 $1 = P(\emptyset) + 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

TE2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ per ogni $A \in F$ dim. $\bar{A} \cap A = \emptyset$ (eventi incompatibili) \Rightarrow per Kolmogorov 3 $P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \Rightarrow$ ma $\bar{A} \cup A = S$ dunque $P(S) = P(\bar{A}) + P(A) \Rightarrow$ per Kolmogorov 2 $1 = P(\bar{A}) + P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

TE3) $0 \leq P(A) \leq 1$ per ogni $A \in F$ dim. per Kolmogorov 1 $P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) \geq 0$ per Kolmogorov 1 $\Rightarrow P(A) \leq 1$

TE4) se A sottoinsieme di B, allora $P(A) \leq P(B)$ per ogni $A, B \in F$

TE5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ per ogni $A, B \in F$

Probabilità condizionale: definizione e formula della probabilità composta.

Sia S uno spazio campionario, F una σ -algebra di parti dello spazio e P una misura di probabilità su F. Sia poi $A \in F$ un evento non presumibile, dunque con probabilità $P(A) > 0$ e sia $E \in F$ un altro evento. Si dice probabilità di E condizionale ad A o probabilità condizionata ad A, indicata con $P(E|A)$, il valore $P(E|A) = P(E \cap A) / P(A)$. L'evento A è detto evento condizione, mentre l'evento E viene detto evento interesse. Di solito è più facile calcolare probabilità condizionali che probabilità di intersezioni, per questo è molto interessante la formula della probabilità composta: dati $E, A \in F$ ed A non presumibile, $P(E \cap A) = P(A) * P(E|A)$.

Formula della probabilità totale: enunciato e dimostrazione.

Si assuma che $A_i \in F$, per $i \in I$ sottoinsieme di N, siano una partizione di uno spazio campionario composta da eventi non trascurabili, ovvero la loro probabilità è maggiore di 0. Allora per ogni evento $E \in F$ vale che $P(E) = \sum P(A_i) * P(E|A_i)$ per $i \in I$. In altre parole, la probabilità non condizionale o libera o totale di E è media pesata della probabilità di E condizionale agli eventi della partizione. **Dim.** per le formule di addizione e per la definizione di probabilità condizionale $P(E) = \sum P(E \cap A_i) = \sum P(A_i) * P(E|A_i)$ per $i \in I$.

Eventi indipendenti: definizioni (per coppie e per successioni di eventi) e un esempio.

Sia S uno spazio campionario, F una σ -algebra di parti dello spazio e P una misura di probabilità su F. Siano poi $A, B \in F$. A e B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. Ogni evento trascurabile risulta indipendente da ogni altro evento, così che anche \emptyset risulta essere indipendente da ogni altro evento. Generalizzando la definizione sopra ad una successione di eventi, si trova che: gli eventi $A_i \in F$, per $i \in I$ sottoinsieme di N, sono detti indipendenti se per ogni J sottoinsieme di I con $2 \leq |J| \leq +\infty$ vale che $P(\cap A_i \text{ per } i \in J) = \prod P(A_i)$ per $i \in J$.

Le combinazioni e il teorema del binomio (di Newton).

Una combinazione senza ripetizione di k oggetti da un insieme di n oggetti è una disposizione senza ripetizione in cui l'ordine non conta e si indica con $C_{n,k} = n! / ((n-k)! * k!) = \binom{n}{k}$. Questo numero, detto coefficiente binomiale, lo si trova nel teorema del binomio di Newton, il quale esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi con la formula seguente: $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$, dove i coefficienti binomiali sono gli stessi che si trovano nel noto triangolo di Tartaglia.

Estrazioni da un'urna senza e con reinserimento: le probabilità ipergeometriche e le probabilità binomiali.

Nel Calcolo delle Probabilità, la probabilità ipergeometrica è una distribuzione di probabilità discreta che descrive l'estrazione senza reinserimento di alcune palline, perdenti o vincenti, da un'urna. In altre parole, descrive, data un'urna A contenente, ad esempio, h palline bianche e n-h palline nere, il numero k di palline bianche che vengono ottenute estraendo senza reinserimento r palline. La probabilità di ottenere k è dato da $P(k) = (\binom{h}{k} * \binom{n-h}{r-k}) / \binom{n}{r}$, dove $\binom{n}{r}$, è il numero di possibili estrazioni di r elementi da A, $\binom{h}{k}$ è il numero di possibili estrazioni di k elementi tra le h palline bianche, $\binom{n-h}{r-k}$ è il numero di possibili estrazioni dei restanti r-k elementi tra le n-h palline nere. La probabilità binomiale, invece, è una distribuzione di probabilità discreta che descrive il numero di successi nell'estrazione con reinserimento di alcune palline da un'urna. In altre parole, descrive, data un'urna A il numero k di palline bianche che vengono ottenute estraendo con reinserimento n palline. La probabilità di ottenere k è dato da $P(k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$, dove n è il numero di prove effettuate e p è la probabilità di successo di ogni singola prova.

La formula di Bayes: enunciato e dimostrazione

Si assuma che $A_i \in F$, per $i \in I$ sottoinsieme di N, siano una partizione di uno spazio campionario composta da eventi non trascurabili. Sia poi E un ulteriore evento non trascurabile. Allora $P(A_i|E) = (P(A_i) * P(E|A_i)) / (\sum P(A_j) * P(E|A_j))$ per $j \in I$.

Dim. $P(A_i|E) = P(A_i \cap E) / P(E) = (P(A_i) * P(E|A_i)) / (\sum P(A_j) * P(E|A_j))$ per $j \in I$, dove dal passaggio 2 al passaggio 3 si utilizzano la formula della probabilità composta per il numeratore e la formula della probabilità totale per il denominatore.

Le variabili casuali: definizione.

Volendo definire una variabile casuale, si possono distinguere due definizioni, una euristica, l'altra matematica. Secondo la prima visione una variabile casuale è una successione finita di numeri reali che saranno determinati dal caso; in simboli: $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d$ con $x_i \in R$ determinato dal caso e $i=1, 2, \dots, d$. Secondo la visione matematica invece, una variabile casuale, dato uno spazio probabilizzato (S, F, P) e uno spazio probabilizzabile (R, B_R) , dove B_R è una σ -algebra di Borel associata a R, è una funzione $X: S \rightarrow R$ tale che per ogni $B \in B_R$ si ha che $X^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\} \in F$.

La legge di probabilità di una variabile casuale: definizione e proprietà (è una misura di probabilità).

Sia X una variabile casuale, definita sullo spazio probabilizzato (S, F, P) . Si dice legge di probabilità di X, e si indica con P_X , l'applicazione $P_X: B_R \rightarrow [0, 1]$ definita da $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ per ogni $B \in B_R$. La legge di probabilità di una

variabile casuale ha la proprietà di essere una misura di probabilità sullo spazio probabilizzabile (R, B_R) .

Variabili casuali univariate e loro legge di probabilità: definizioni e un esempio.

La definizione di variabile casuale univariata e la relativa legge di probabilità corrispondono alle definizioni date nei due quesiti sopra. Esempio: Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta regolare e si supponga di essere interessati al numero totale degli esiti testa. Si può pensare di definire una funzione X , con dominio lo spazio campionario S , che ad ogni evento elementare $s \in S$ associa il corrispondente numero di esiti testa. Tale funzione assume valori in $\{0,1,2,3\}$ e tali valori corrispondono a veri e propri eventi elementari in un nuovo spazio fondamentale numerico sul quale è possibile definire una nuova misura di probabilità, con riferimento alla associata σ -algebra $P(\{0,1,2,3\})$.

Variabili casuali bivariate e loro legge di probabilità: definizioni e un esempio.

Una variabile casuale bivariata (X,Y) , dato uno spazio probabilizzato (S,F,P) e uno spazio probabilizzabile (R^2, B_{R^2}) , è una funzione $(X,Y): S \rightarrow R^2$ tale che per ogni $B \in B_{R^2}$ si ha che $(X,Y)^{-1}(B) = \{s \in S : (X,Y)(s) \in B\}$ e ha come legge di probabilità $P_{(X,Y)}$ una misura di probabilità $P_{(X,Y)} = P((X,Y) \in B) = P((X,Y)^{-1}(B))$ per ogni $B \in B_{R^2}$.

Variabili casuali multivariate e loro legge di probabilità: definizioni e un esempio.

Una variabile casuale multivariata (X,Y) , dato uno spazio probabilizzato (S,F,P) e uno spazio probabilizzabile (R^n, B_{R^n}) , è una funzione $X = () : S \rightarrow R^n$ tale che per ogni $B \in B_{R^n}$ si ha che $(X)^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\}$ e ha come legge di probabilità P_X una misura di probabilità $P_X = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$ per ogni $B \in B_{R^n}$.

Variabili casuali identicamente distribuite: definizione e un esempio.

Due variabili casuali X e Y si dicono identicamente distribuite e si indicano con $X \sim Y$ se la loro legge di probabilità è identica, ovvero se $P_X = P_Y$, cioè se per ogni $B \in B_{R^n}$ vale che $P_X(B) = P_Y(B)$. Due variabili casuali così definite sono considerate indistinguibili.

Il supporto di una variabile casuale: definizione generale ed alcuni esempi.

Il supporto di una variabile casuale X , indicato con la notazione S_X , è l'insieme dei punti $x \in R^n$ i cui intorno sono eventi di probabilità strettamente positiva per P_X (non trascurabili rispetto a P_X). In particolare $S_X = \{x \in R^n : \text{per ogni } \varepsilon > 0, P(x - \varepsilon < X < x + \varepsilon) > 0\}$.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale univariata: definizione, proprietà, un esempio.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale univariata è l'applicazione $F_X: R \rightarrow [0,1]$ definita come $F_X(x) = P(X \leq x)$ per $x \in R$. Questa funzione ha tre proprietà principali: (1) è monotona decrescente; (2) è continua da destra; (3) è tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale bivariata: definizione e un esempio.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale bivariata è la funzione $F_{X,Y}: R^2 \rightarrow [0,1]$ definita come $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ per $(x,y) \in R^2$.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale multivariata: definizione e un esempio.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale multivariata $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ è la funzione $F_X: R^n \rightarrow [0,1]$ definita come $F_X(x) = F_{X_1, X_2, \dots, X_d}(x_1, x_2, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_d \leq x_d)$ per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^n$.

Le funzioni di ripartizione delle variabili casuali univariate: definizione e il teorema di caratterizzazione.

Variabili casuali univariate con legge di probabilità di tipo discreto: definizione e un esempio.

Una variabile casuale univariata X , con supporto $S_X = \{x_i, i \in I\}$ e funzione di ripartizione $F_X(x)$, è detta discreta se esiste una successione di numeri reali $\{x_i\}_{i \in I}$, I sottoinsieme di N^+ , tali che $P(X = x_i) > 0$ e $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

La funzione di massa di probabilità di una variabile casuale univariata: definizione, proprietà caratterizzanti, un esempio.

La funzione di massa di probabilità di una variabile casuale univariata X è una funzione reale di variabile reale $f_X(x) = \{ P(X = x) = p_i \text{ se } x=x_i \text{ per ogni } i \in I; 0 \text{ altrimenti, dove } p_i \text{ è la probabilità dell'evento a cui } x_i \text{ è associato. Questa funzione ha due proprietà fondamentali: (1) } 0 \leq f_X(x_i) \leq 1 \text{ (2) } \sum f_X(x_i) = 1 \text{ per } i \text{ da } 1 \text{ a } d.$

Variabili casuali univariate con legge di probabilità di tipo continuo: definizione e un esempio.

Una variabile casuale univariata X è detta continua se la sua funzione di ripartizione $F_X(x)$ è assolutamente continua, ovvero se esiste una funzione reale $f_X(x)$, definita su R , tale che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ da $-\infty$ a x per ogni $x \in R$.

La funzione di densità di probabilità di una variabile casuale univariata: definizione, proprietà caratterizzanti, un esempio.

In CPS, la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale univariata continua X , è un'applicazione $f_X(x)$ non negativa, integrabile e reale di variabile reale tale che $f_X(x) = d/dx F_X(x)$, dove d/dx indica la derivata prima e $F_X(x)$ è la funzione di ripartizione di X . La funzione di densità di probabilità gode di due proprietà fondamentali: (1) $f_X(x) \geq 0$ per ogni $x \in R$ (2) $\int_R f_X(x) dx = 1$.

Le distribuzioni marginali di una variabile casuale bivariata con legge discreta.

Data una variabile casuale bivariata con legge discreta (X,Y) con supporto congiunto $S_{X,Y} = \{(x_i, y_i), i \in I \text{ sottoinsieme di } N\}$ e funzione di massa di probabilità congiunta $p_{X,Y} = P(X = x, Y = y)$ tale che $p_{X,Y} > 0$ per ogni $x,y \in S_{X,Y}$ e $\sum_{x,y \in S_{X,Y}} p_{X,Y}(x,y) = 1$, le distribuzioni marginali sono X e Y . Queste due leggi hanno supporto marginale rispettivamente $S_X = \{x \in R : (x,y) \in S_{X,Y} \text{ per qualche } y \in R\}$ e $S_Y = \{y \in R : (x,y) \in S_{X,Y} \text{ per qualche } x \in R\}$ e funzioni di massa di probabilità rispettivamente $p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in S_{Y|X=x}} P(X = x, Y = y)$ per $y \in S_{Y|X=x}$ e $p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in S_{X|Y=y}} P(X = x, Y = y)$ per $x \in S_{X|Y=y}$, dove $X|Y$ e $Y|X$ sono le distribuzioni condizionate di (X,Y) .

Le distribuzioni condizionate di una variabile casuale bivariata con legge discreta.

Data una variabile casuale bivariata con legge discreta (X,Y) con supporto congiunto $S_{X,Y} = \{(x_i, y_i), i \in I \text{ sottoinsieme di } N\}$ e funzione di massa di probabilità congiunta $p_{X,Y} = P(X = x, Y = y)$ tale che $p_{X,Y} > 0$ per ogni $x,y \in S_{X,Y}$ e $\sum_{x,y \in S_{X,Y}} p_{X,Y}(x,y) = 1$, la distribuzione condizionata $X|Y$ è la probabilità di X quando è conosciuto il valore assunto da Y e la distribuzione condizionata $Y|X$ è la probabilità di Y quando è conosciuto il valore assunto da X . Queste due leggi hanno supporto marginale rispettivamente $S_{X|Y=y} = \{x \in R : (x,y) \in S_{X,Y} \text{ per qualche } y \in R\}$ e $S_{Y|X=x} = \{y \in R : (x,y) \in S_{X,Y} \text{ per qualche } x \in R\}$ e funzioni di massa di probabilità rispettivamente $p_{X|Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y) / P_Y(y)$ e $p_{Y|X=x}(y) = P_{X,Y}(x,y) / P_X(x)$.

Trasformazioni di variabili casuali con legge discreta.**Trasformazioni monotone e derivabili di variabili casuali univariate con legge continua: la densità della v. c. trasformata.****Variabili casuali bivariate con componenti indipendenti: definizione e un esempio.**

Data una variabile casuale bivariata (X,Y) , le sue componenti marginali X e Y si dicono indipendenti se e solo se, per ogni $(x,y) \in R^2$, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) * F_Y(y)$; in altre parole se la funzione di ripartizione congiunta è il prodotto delle due funzioni di ripartizione marginali. Se invece esiste un punto $(x,y) \in R^2$ tale che $F_{X,Y}(x,y) \neq F_X(x) * F_Y(y)$, allora le componenti X e Y sono dette dipendenti.

Variabili casuali multivariate con componenti indipendenti: definizione e un esempio.

Data una variabile casuale multivariata $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, le sue componenti marginali X_i , $i=1, \dots, n$, si dicono indipendenti se e solo se, per ogni $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) * \dots * F_{X_n}(x_n)$; in altre parole se la funzione di ripartizione congiunta è il prodotto delle funzioni di ripartizione marginali. Se invece esiste un punto $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ tale che $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq F_{X_1}(x_1) * \dots * F_{X_n}(x_n)$, allora le componenti sono dette dipendenti.

Variabili casuali bivariate con componenti indipendenti: la legge del massimo e del minimo.

Sia (X,Y) una variabile casuale bivariata, con componenti indipendenti e funzioni di ripartizione marginali univariate $F_X(x)$ e $F_Y(y)$. La legge del massimo afferma che esiste una variabile casuale massimo $\max\{X,Y\}$ che ha funzione di ripartizione $F_{\max\{X,Y\}}(x,y) = F_X(x) * F_Y(y)$ per $(x,y) \in R^2$. La legge del minimo invece afferma che esiste una variabile casuale minimo $\min\{X,Y\}$ che ha funzione di ripartizione $F_{\min\{X,Y\}}(x,y) = 1 - ((1 - F_X(x)) * (1 - F_Y(y)))$ per $(x,y) \in R^2$.

Variabili casuali multivariate con componenti indipendenti: la legge del massimo e del minimo.

Sia (X_1, X_2, \dots, X_n) una variabile casuale multivariata, con componenti indipendenti e funzioni di ripartizione marginali univariate $F_{X_i}(x)$, $i=1, \dots, n$. La legge del massimo afferma che esiste una variabile casuale massimo $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ che ha funzione di ripartizione $F_{X_{(n)}}(x) = \prod F_{X_i}(x)$ per i da 1 a n e per $x \in R$. La legge del minimo invece afferma che esiste una variabile casuale minimo $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ che ha funzione di ripartizione $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod (1 - F_{X_i}(x))$ per i da 1 a n e per $x \in R$.

I principali indici di posizione per variabili casuali univariate.

I principali indici di posizione per variabili casuali univariate sono la moda, la mediana, il quantile- p e il valore atteso. Questi sono degli indicatori sintetici di posizione e di variabilità dei valori assumibili da una variabile casuale univariata. Le definizioni nelle prossime domande.

Moda e mediana: definizioni e un esempio.

Data una variabile casuale univariata X , si chiama moda della distribuzione di probabilità di X , o più semplicemente moda di X , e si indica con x_{mo} , il valore reale per cui è massima la funzione di densità di probabilità, cioè tale che $f_X(x_{mo}) \geq f_X(x)$, per ogni $x \in R$.

Data una variabile casuale univariata X , si chiama mediana della distribuzione di probabilità di X , o più semplicemente mediana di X , e si indica con $x_{0,5}$, il valore reale $x_{0,5} \in R$ tale che $P(X \leq x_{0,5}) \geq 1/2$ e $P(X \geq x_{0,5}) \geq 1/2$.

Il quantile- p di una v. c. univariata: definizione e due esempi di calcolo, uno con legge discreta, l'altro con legge continua.

Data una variabile casuale univariata X , si chiama quantile- p della distribuzione di probabilità di X , o più semplicemente quantile- p di X , e si indica con x_p , dove $p \in (0,1)$, il valore reale $x_p \in R$ tale che $P(X \leq x_p) \geq p$ e $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$. Se X ha legge continua x_p sarà soluzione dell'equazione $F_X(x_p) = p$. Se X ha legge discreta x_p sarà tale che

$F_X(x - \varepsilon) < p$, per $\varepsilon > 0$ piccolissimo, e $F_X(x_p) \geq p$.

Il valore atteso: definizione e proprietà principali.

Si chiama valore atteso di una variabile casuale univariata X , con supporto S_X e funzione di densità di probabilità $f_X(x)$, la media dei suoi possibili valori ponderati con le relative probabilità (la relativa funzione di densità di probabilità), ovvero $E(X) = \sum_{x \in S_X} x * f_X(x) = \sum_{x \in S_X} x * P(X = x)$ se X ha legge discreta, oppure $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x) * dx$ se X ha legge continua, purché la serie o l'integrale siano assolutamente convergenti. Il valore atteso ha le seguenti proprietà: (1) proprietà di Cauchy: $\inf\{x \in S_X\} \leq E(X) \leq \sup\{x \in S_X\}$ (2) proprietà di linearità: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ se $Y = a * X + b$ allora $E(Y) = a * E(X) + b$ (3) proprietà di baricentro: $E(X - E(X)) = 0$ (4) proprietà dei minimi quadrati: per ogni $c \in \mathbb{R}$, $E((X - c)^2) \geq E((X - E(X))^2)$, se tutti i valori attesi esistono, e quindi l'unico caso di uguaglianza si ha per $c = E(X)$.

Il valore atteso del prodotto di variabili casuali indipendenti.

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variabile casuale le cui componenti sono indipendenti con supporto $S_X = S_{X_1, \dots, X_n} = S_{X_1} * \dots * S_{X_n}$ e funzione di densità di probabilità $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod f_{X_i}(x_i)$ per i da 1 a n . Il valore atteso del prodotto di variabili casuali indipendenti $E(X_1 * \dots * X_n) = \prod E(X_i)$ per i da 1 a n . Dunque il valore atteso del prodotto è il prodotto di ogni singolo valore atteso.

Si enuncino tre proprietà del valore atteso e se ne dimostri una.

Per le tre proprietà vedi sopra. **Dim.** (4) Poiché $E((X - c)^2) = E([(X - E(X)) + (E(X) - c)]^2)$, sviluppando il quadrato del binomio e applicando la proprietà di linearità, si ottiene che $E((X - c)^2) = E((X - E(X))^2) + (E(X) - c)^2 \geq E((X - E(X))^2)$.

La disuguaglianza di Markov: enunciato e dimostrazione.

Sia X una variabile casuale non negativa, cioè tale che $P(X \geq 0) = 1$, con valor medio $\mu = E(X) > 0$ finito. Per ogni costante reale $c > 0$, vale che $P(X \geq c * \mu) \leq 1/c$. **Dim.** Se $c \in (0, 1]$, allora $1/c \geq 1$ e la relazione è banalmente verificata. Se $c > 1$, essendo X una variabile casuale non negativa, si ha che, per il caso continuo, $\mu = \int_0^{+\infty} x * f_X(x) * dx \geq \int_{c\mu}^{+\infty} x * f_X(x) * dx \geq \int_{c\mu}^{+\infty} c\mu * f_X(x) * dx = c\mu * P(X \geq c\mu)$, da cui si ottiene la tesi. Per il caso discreto, la dimostrazione è analoga.

Il valore atteso e la proprietà dei minimi quadrati.

Per ogni $c \in \mathbb{R}$, $E((X - c)^2) \geq E((X - E(X))^2)$, se tutti i valori attesi esistono, e quindi l'unico caso di uguaglianza si ha per $c = E(X)$. **Dim.** Poiché $E((X - c)^2) = E([(X - E(X)) + (E(X) - c)]^2)$, sviluppando il quadrato del binomio e applicando la proprietà di linearità, si ottiene che $E((X - c)^2) = E((X - E(X))^2) + (E(X) - c)^2 \geq E((X - E(X))^2)$.

Indici di variabilità per variabili casuali univariate.

Il principale indice di variabilità per variabili casuali univariate è la varianza, indicata con $V(X)$ o $\text{Var}(X)$ o σ^2_X , la cui definizione è $\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$. Altri indici di variabilità sono il range $R_X = \max\{S_X\} - \min\{S_X\}$, lo scarto interquartile $IR_X = x_{0.75} - x_{0.25}$ e lo scarto quadratico medio $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.

Data una variabile casuale X con legge discreta o continua con valore atteso $E(X)$ finito, si chiama varianza di X , e la si indica con $V(X)$ o $\text{Var}(X)$, la quantità $V(X) = E((X - E(X))^2)$, se esiste finita, ovvero $V(X) = \sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 f_X(x) = \sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 P(X = x)$ se X ha legge discreta o $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$ se X ha legge continua, purché la serie o l'integrale siano convergenti. La varianza di una variabile casuale X dispone delle seguenti proprietà: (1) formula per il calcolo: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (2) omogeneità di secondo grado: $V(aX) = a^2 V(X)$ (3) invarianza per traslazione: $V(X + a) = V(X)$.

Lo scarto quadratico medio, indicato con σ_X , è la radice quadratica non negativa della varianza, ovvero $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Si enuncino tre proprietà della varianza e se ne dimostri una.

Dim. (1) $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 + (E(X))^2 - 2E(X)X) = E(X^2) + E((E(X))^2) - 2E(X)E(X) = E(X^2) + E((E(X))^2) - 2(E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$, da cui la tesi.

Indici di posizione e variabilità: il vettore dei valori attesi e la matrice di varianze e covarianze.

La disuguaglianza di Chebyshev: enunciato e dimostrazione.

Sia X una variabile casuale con valor medio $\mu = E(X)$ e varianza $\sigma^2 > 0$ finita, per ogni costante reale $k > 0$, vale che $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. **Dim.** Dalla disuguaglianza di Markov applicata alla variabile casuale non negativa $(X - \mu)^2$, con $c = k^2$, si ha che $P((X - \mu)^2 \geq k^2 E((X - \mu)^2)) = P((X - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2) \leq 1/k^2$, che equivale alla tesi $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.

Momenti di una variabile casuale univariata: definizione e calcolo della varianza dai primi due momenti.

Sia X una variabile casuale con valor medio μ finito e sia $r \in \mathbb{N}^+$. Si chiama momento non centrato di X di ordine r la

quantità $\mu_r = E(X^r)$, ossia il valore atteso, se esiste finito, della variabile casuale trasformata $g(X) = X^r$. Si chiama momento centrale di X di ordine r la quantità $\bar{\mu}_r = E((X - \mu)^r)$, ossia il valore atteso, se esiste finito, della variabile casuale trasformata $g(X) = (X - \mu)^r$.

La funzione generatrice dei momenti: definizione e proprietà principali.

Sia X una variabile casuale con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$. Si chiama funzione generatrice dei momenti di X , e si indica con $M_X(x)$, la funzione nella variabile reale t definita come $M_X(x) = E(e^{tx})$, ossia come il valore atteso della variabile casuale trasformata $g(X) = e^{tx}$. In particolare, $M_X(x) = \sum_{x \in S_X} s_X e^{tx} f_X(x)$ se X ha legge discreta, $M_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$ se X ha legge continua. Qualunque sia la distribuzione di probabilità di X si ha che $M_X(0) = 1$. Per $t \neq 0$, se S_X è illimitato, il valore di $M_X(t)$ può non essere finito. Se $M_X(t) < \infty$ per ogni t appartenente ad un intorno dell'origine, ossia per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, si dice che X ha funzione generatrice dei momenti propria. $M_X(t)$ non esiste necessariamente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Tuttavia se esiste ed è propria, essa è unica e determina in modo univoco la corrispondente distribuzione di probabilità di X .

La funzione generatrice dei momenti della somma di variabili casuali indipendenti.

Sia $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ con componenti X_i ($i=1, 2, \dots, n$) indipendenti. Sia poi $S = \sum_{i=1}^n X_i$, ovvero S è la somma delle componenti X_i . Allora $M_S(t) = E(e^{tS}) = E(e^{t \sum X_i}) = E(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$.

Le leggi o distribuzioni degeneri: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione degenera in un punto $c \in \mathbb{R}$ e si scrive simbolicamente $X \sim D(c)$, se $P(X = c) = 1$. In questo caso $S_X = \{c\}$ e la funzione di ripartizione è $F_X(x) = 0$ se $x < c$ oppure 1 se $x \geq c$. Per una variabile casuale degenera la varianza è nulla.

Le leggi o distribuzioni uniforme discreta: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione uniforme discreta con possibili valori $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, essendo $n \in \mathbb{N}^+$ fissato, e si scrive simbolicamente $X \sim Ud(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se ha supporto $S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e funzione di probabilità $f_X(x; x_1, x_2, \dots, x_n) = 1/n$ se $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ oppure 0 altrimenti. Per una variabile casuale uniforme discreta si ha che $E(X) = 1/n * \sum_{i=1}^n x_i$; $Var(X) = 1/n * \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2$; $M_X(t) = 1/n * \sum_{i=1}^n e^{tx_i}$, $t \in \mathbb{R}$.

Le leggi o distribuzioni binomiali elementari (dette anche di Bernoulli): definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione bernoulliana o binomiale elementare con parametro $p \in (0, 1)$ e si scrive simbolicamente $X \sim Ber(p)$ se essa è una variabile casuale con legge binomiale $Bi(1, p)$ con $n = 1$ eventi e probabilità di successo p che vale 0 in caso di insuccesso o 1 in caso di successo dell'evento. Se le variabili casuali $X_i \sim Ber(p)$, $i=1, \dots, n$, descrivono n esperimenti bernoulliani indipendenti con la stessa probabilità di successo p , si può concludere che la variabile casuale $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ha distribuzione binomiale $Bi(n, p)$.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale elementare.

Le leggi o distribuzioni binomiali con indice n e parametro p : definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X con supporto $S_X = \{0, \dots, n\}$ e funzione di probabilità $f_X(x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, dove $q = 1 - p$ e k è il numero di successi, ha distribuzione binomiale con parametri n e p , in simboli $X \sim Bi(n, p)$, dove $n \in \mathbb{N}^+$ e $p \in (0, 1)$.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale con indice n e parametro p .

Le leggi o distribuzioni ipergeometriche: definizione.

Una variabile casuale univariata X con supporto $S_X = \{x \in \mathbb{N} : \max\{0, n - (N - M)\} \leq x \leq \min\{n, M\}\}$ e funzione di densità di probabilità $f_X(x) = (\binom{n}{x} \binom{N-n}{r-x}) / \binom{N}{r}$ ha distribuzione di probabilità ipergeometrica di parametri n, N, M , con $n \in \mathbb{N}^+$, $M \leq N$ e $n \leq N$; in simboli, $X \sim Ig(M, N, n)$. Per una variabile casuale ipergeometrica vale $E(X) = nM/N$; $V(X) = (nM/N)((N - M)/N)((N - n)/(N - 1))$.

Le leggi o distribuzioni geometriche: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X con supporto $S_X = \mathbb{N}^+$ e funzione di probabilità $f_X(x; p) = p(1 - p)^{x-1}$ se $x \in S_X$ oppure 0 altrimenti, con $p \in (0, 1)$, ha distribuzione di probabilità geometrica con parametro p ; in simboli $X \sim Ge(p)$. Per una variabile casuale geometrica vale che, per $t < -\log(1 - p)$, $M_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p(1 - p)^{x-1} = pe^t \sum_{x=1}^{\infty} [e^t(1 - p)]^{x-1} = pe^t / (1 - e^t(1 - p))$. Da ciò segue che $E(X) = d/dt M_X(t)|_{t=0} = 1/p$ e $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = d^2/dt^2 M_X(t)|_{t=0} - (E(X))^2 = (2 - p)/p^2 - (1/p)^2 = (1 - p)/p^2$.

La proprietà di assenza di memoria delle variabili casuali con legge geometrica.

Se $X \sim Ge(p)$, $p \in (0, 1)$, allora, per ogni $s, t \in S_X$, $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$.

Le leggi o distribuzioni di Poisson. Definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X con supporto $S_X = \mathbb{N}$ e funzione di probabilità $f_X(x; \lambda) = (\lambda^x)(e^{-\lambda}) / x!$ se $x \in S_X$ oppure 0

altrimenti, con $\lambda > 0$, ha distribuzione di probabilità di Poisson con parametro λ ; in simboli $X \sim P(\lambda)$. Per calcolare il valore atteso e la varianza conviene determinare la funzione generatrice dei momenti (domanda seguente). Da essa segue che $E(X) = d/dt M_X(t)|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}|_{t=0} = \lambda$, e $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = d^2/dt^2 M_X(t)|_{t=0} - \lambda^2 = [e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda e^t)]|_{t=0} - \lambda^2 = \lambda$.

Il teorema di Poisson.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge di Poisson.

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (e^t)^x (e^{-\lambda}) (\lambda^x) / x! = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} ((\lambda e^t)^x) / x! = (e^{-\lambda}) (e^{\lambda(e^t-1)}) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Le leggi o distribuzioni uniformi continue: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione uniforme continua con supporto $S_X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, in simboli $X \sim U(a, b)$, se ha funzione di densità di probabilità $f_X(x; a, b) = 1/(b - a)$ se $a \leq x \leq b$ oppure 0 altrimenti. L'associata funzione di ripartizione è $F_X(x; a, b) = 0$ se $x < a$ oppure $(x - a)/(b - a)$ se $a \leq x < b$ oppure 1 se $x \geq b$. Inoltre $E(X) = \int_a^b x(1/(b - a))dx = ((b^2 - a^2)/2)(1/(b - a)) = (b + a)/2$, $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b x^2(1/(b - a))dx - ((b + a)/2)^2 = ((b^3 - a^3)/3(b - a)) - ((b + a)/2)^2 = (b - a)^2/12$ ed $M_X(t) = \int_a^b e^{tx}(1/(b - a))dx = (e^{bt} - e^{at})/(t(b - a))$ per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Le leggi o distribuzioni esponenziali: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione di probabilità esponenziale di parametro $\lambda > 0$, in simboli $X \sim \text{Esp}(\lambda)$, se ha supporto $S_X = [0, +\infty)$ e funzione di densità di probabilità $f_X(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ se $x \in S_X$ oppure 0 altrimenti. L'associata funzione di ripartizione è $F_X(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$ se $x \in S_X$ oppure 0 altrimenti. Inoltre $M_X(t) = (1 - t/\lambda)^{-1} = \lambda/(\lambda - t)$ per $t < \lambda$, $E(X) = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$.

La proprietà di assenza di memoria delle variabili casuali con legge esponenziale.

Se $X \sim \text{Esp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, allora, per ogni $s, t \in S_X$, $P(X > s+t | X > t) = P(X > s)$.

La funzione tasso di guasto e le leggi di Weibull.

Sia X una variabile casuale continua, non negativa, cioè tale che $P(X \geq 0) = 1$, con supporto S_X . La funzione reale di variabile reale $r_X(x) = f_X(x)/(1 - F_X(x))$ per $x \in S_X$, è chiamata funzione di tasso di guasto.

Una variabile casuale X ha distribuzione di probabilità di Weibull con parametri $\beta, \gamma > 0$, in simboli $X \sim \text{We}(\beta, \gamma)$, se $S_X = [0, +\infty)$ e $f_X(x; \beta, \gamma) = \beta \gamma x^{\gamma-1} \exp(-\beta x^\gamma)$ se $x \in S_X$ oppure 0 altrimenti. L'associata funzione di ripartizione è $F_X(x) = 1 - \exp(-\beta x^\gamma)$ se $x \geq 0$, e nulla altrove, mentre la funzione di tasso di guasto corrisponde a $r_X(x) = \beta \gamma x^{\gamma-1}$ per $x > 0$.

Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.

Una variabile casuale X ha distribuzione normale o gaussiana con parametro di posizione $\mu \in \mathbb{R}$ e parametro di scala $\sigma > 0$, in simboli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se $S_X = \mathbb{R}$ e la funzione di densità di probabilità è, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x; \mu, \sigma) = (1/((\sqrt{2\pi})\sigma)) \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2)$. L'associata funzione di ripartizione è $F_X(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x f_X(u; \mu, \sigma) du$. Inoltre $E(X) = d/dt M_X(t)|_{t=0} = \mu$ e $Var(X) = d^2/dt^2 M_X(t)|_{t=0} - (E(X))^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$, dove $M_X(t)$ è la funzione generatrice dei momenti.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge normale.

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si vuole calcolare la funzione generatrice dei momenti di X definita come $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} (1/((\sqrt{2\pi})\sigma)) e^{-(1/2)((x - \mu)/\sigma)^2} dx$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Posto $z = (x - \mu)/\sigma$, si ottiene che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\mu + \sigma z)} (1/(\sqrt{2\pi})) e^{-(1/2)z^2} dz = e^{t\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sqrt{2\pi})) e^{(t\sigma z) - (1/2)z^2} dz = e^{t\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sqrt{2\pi})) e^{(-1/2)((z - \sigma t)^2) + (1/2)(\sigma^2)(t^2)} dz = e^{t\mu + (1/2)(\sigma^2)(t^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sqrt{2\pi})) e^{(-1/2)((z - \sigma t)^2)} dz = e^{t\mu + (1/2)(\sigma^2)(t^2)}$.

La proprietà additiva delle variabili casuali binomiali indipendenti con lo stesso p.

Si considerino le variabili casuali binomiali indipendenti $X_i \sim \text{Bi}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, n$, con lo stesso parametro p . Si ha allora che $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(N, p)$, con $N = \sum_{i=1}^n n_i$, ed è una $\text{Bi}(n, p)$.

La proprietà additiva delle variabili casuali di Poisson indipendenti.

Si considerino le variabili casuali di Poisson indipendenti $X_i \sim \text{Bi}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$. Si ha allora che $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(\lambda)$, con $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

La proprietà additiva delle variabili casuali normali indipendenti.

Si considerino le variabili casuali normali indipendenti $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$. Si ha allora che la variabile casuale $\sum_{i=1}^n c_i X_i$, con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, ottenuta come combinazione lineare delle X_i , $i = 1, \dots, n$, ha distribuzione $N(\mu_c, \sigma_c^2)$, con $\mu_c = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$ e $\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$.

La distribuzione della media campionaria di normali indipendenti e identicamente distribuite.