Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 21 settembre 2020`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $realmin = 1/32$, $realmax = 31$, e $Nu = 10$, dove N è il numero degli elementi di $\mathcal{F}$ diversi da 0 e u è la pressione di macchina.
   - Siano dati $x = (1.\overline{101})_2$ e $y = (10.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{y} fl(-) \tilde{x} \in \mathcal{F}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero e tale che $\tilde{z} - 2^e realmin = 2u$ Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = F(x)$ con $F(x) = f(g(x))$.
   - Scrivi il numero di condizionamento di F in funzione di quello di f e g.
   - Siano $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^4 - 1$. Studia il condizionamento della funzione F con x che varia nel suo campo di esistenza.
   - Supponi che la funzione $\sqrt{x}$ fornisca un approssimazione il cui errore relativo è maggiorato dalla precisione di macchina u. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo che calcola la funzione F definita al punto precedente con x numero di macchina.
3. Sia $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton a α e β.
   - •• Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -3$
     (b) $x_0 = -1$
     (c) $x_0 = -2/3$
     (d) $x_0 = 3$
     (e) $x_0 = 1$
     (f) $x_0 = 2/3$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

     Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots$.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a β con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{5}$. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - ⋆ Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad β con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = -3$. Studia la convergenza locale ad α del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
4. Sia data la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 2 & 6 - \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 - \alpha & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - ⋆ Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Lx = b$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.
5. Sia $f(x) = \log_3(1 + 2x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(1))$, $P_1 = (1, f(1))$ e $P_2 = (2, f(2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (-2, f(-2))$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e P_3 nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Sia data una matrice A di dimensione n che ammette la fattorizzazione LU. Scrivi la pseudocodifica che calcola L e U mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss gestendo in maniera efficiente la memoria.