MD1 APPELLO GEN 26, 2017

(NB: esistono varie versioni diverse –ma equivalenti– degli esercizi. Viene data la soluzione ad una di esse. Chi avesse ricevuto una versione diversa non dovrebbe aver difficoltà ad apportare le modifiche necessarie e ricostruire la soluzione per la propria versione)

Esercizi

(1) Mario deve telefonare a un amico, ma ha perso il numero che si era annotato su un foglio. Riesce però a ricordare che
   (a) il numero comincia per "3", e ha 10 cifre di cui esattamente quattro sono il "3"
   (b) nel numero non compare nè il "2" nè il "9"
   (c) c'è almeno un "5", forse due, ma i "5" sono sicuramente meno di tre
   (d) c'è un solo "6" e un solo "7"
   (e) il "6" è seguito immediatamente dal "7"

   Quanti sono in tutto i numeri di telefono potenzialmente compatibili con le condizioni che Mario ricorda?

   Soluz: Sapendo che la prima cifra è un "3" restano da riempire 9 spazi. La coppia "67" deve comparire da qualche parte e ci sono 8 possibilità. Una volta piazzata la coppia, restano 7 spazi di cui 3 contengono la cifra "3", per cui ci sono $\binom{7}{3} = 35$ modi di piazzare i "3". Una volta piazzati i "3", restano 4 spazi di cui uno o due contengono il "5", e gli altri una cifra in $\{"0", "1", "4", "8"\}$. Se c'è un solo "5" gli spazi possono essere riempiti in

$$4 \times 4^3 = 256$$

   modi. Se i "5" sono due, gli spazi possono essere riempiti in

$$\binom{4}{2} \times 4^2 = 96$$

   modi. In tutto, quindi, i numeri compatibili con le condizioni sono

$$8 \times 35 \times (256 + 96) = 98560$$

(2) Diciamo che un numero intero, le cui cifre sono $c_1, c_2, \ldots, c_n$, è *calante* se esiste (almeno) una coppia di cifre consecutive c_i e c_{i+1} tali che $c_i = 1 + c_{i+1}$. Ad esempio sono calanti i numeri $2871, 32154, 86522, 143$ ecc. Quanti sono i numeri calanti compresi tra 1111 e 9999 che non contengono la cifra "0"?

   Soluz: Il numero si compone di 4 cifre, la prima in posizione 1 e la quarta in posizione 4. Chiamiamo P_i la proprietà di avere una coppia di cifre calanti che comincia in posizione i (per $i = 1, 2, 3$). Usiamo il principio di inclusione-esclusione.

   Fissato i, i numeri che possiedono la proprietà P_i sono

$$8 \times 9^2 = 648$$

   in quanto ci sono 8 scelte per la coppia calante (da "21" a "98") e 9^2 modi di scegliere le due cifre restanti. Siccome le possibili P_i sono 3 abbiamo

$$3 \times 648 = 1944$$

   numeri che hanno una proprietà P_i.

I numeri che possiedono sia P_i che P_j sono

$$2 \times 7 \times 9 + 8 \times 8 = 190$$

in quanto (a) se i e j sono consecutivi, i può essere scelto in 2 modi, la sequenza calante in 7 modi (da "321" a "987") e la cifra restante in 9 modi; (b) se i e j non sono consecutivi allora possono essere scelti in un solo modo (la prima e terza cifra del numero) ed in ognuno di essi può cominciare una sequenza calante presa tra 8.

I numeri che possiedono sia P_i che P_j che P_k sono 6 in quanto deve essere $i = 1, j = 2, k = 3$ e il numero deve essere uno tra "4321", "5432", ..., "9876".

In base al principio di inclusione-esclusione i numeri cercati sono in tutto

$$1944 - 190 + 6 = 1760$$