Prova scritta di recupero di Calcolo Scientifico

Udine, 9 aprile 2020

Ogni foglio dell'elaborato deve riportare **Nome, Cognome, Numero di matricola e Numero di pagina**.
I fogli che non riportano tali informazioni **non** saranno corretti.
Al termine della prova lo studente dovrà fotografare ogni pagina dell'elaborato con a fianco il tesserino universitario con foto (smart card) e inviare tutto a **rossana.vermiglio@uniud.it** usando la mail istituzionale (SPES) precisando nell'oggetto **Nome, Cognome, Numero di matricola e Numero di pagina** (solo in caso di invio di una pagina alla volta)

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\min} = e_{\max} - 1$, $realmin = 1/32$ e i numeri di macchina positivi siano 160.
   - Siano $x = (10.\overline{01})_2$ e $y = (1.\overline{011})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x), \tilde{y} = fl(y)$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - Qual è il minimo esponente intero e per cui $\tilde{z}2^e$ da errore di *overflow*? Giustifica la risposta.
2. Sia $g(x) = \sqrt{z - \sqrt{z^2 + x}}$ con z un numero reale maggiore di zero.
   - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = e^{g(x)}$, al variare di x nel dominio di definizione di f.
   - Assumi che z sia un numero di macchina e che la radice quadrata sia calcolata con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina. Studia la stabilità dell'algoritmo che calcola $g(x)$ con x numero di macchina positivo.
   - In caso di instabilità, proponi un'espressione di g più conveniente dal punto di vista della propagazione degli errori. Giustifica la risposta.
3. Sia $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente ad α? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Studia la convergenza a β del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a β? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.

   Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che β è un punto fisso di g.
   - Determina m in modo che il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$, sia localmente convergente a β in maniera monotona e con fattore di riduzione asintotica pari a $1/4$. Giustifica la risposta.
4. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -4 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ -4 & -\alpha & 10 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quali valori del parametro α esiste tale fattorizzazione?
   - Per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la terza riga di A? Sia $\alpha = -4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la seconda riga di A? Sia $\alpha = -5$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
5. Sia $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$. Dati i punti $P_0 = (0, f(0)), P_1 = (1, f(1)), P_2 = (\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
   - Sia p_n il polinomio interpolante f nei punti $x_0, \ldots, x_n$ nella forma di Newton. Dato un punto x proponi un algoritmo efficiente per calcolare $p_n(x)$ e analizzane la complessità computazionale.