Udine, 19 dicembre 2016

- 1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2,5,p,q)$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
 - Definisci in generale la precisione di macchina u e determina quella di \mathcal{F} .
 - Determina p, q in modo che \mathcal{F} contenga 257 elementi e realmin = 1/32.
 - Sia $x = \frac{1}{10}$. Verifica che $x \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$.
 - Sia $y = \frac{2}{3}$. Verifica che $y \notin \mathcal{F}$ e determina $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$.
 - Calcola $z = \tilde{x}fl(+)\tilde{y} \in \mathcal{F}$.
 - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a \mathcal{F} ?
- 2. Si vuole calcolare la funzione y = f(x).
 - Definisci l'errore inerente ed il concetto di condizionamento.
 - Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \frac{(1+x^2)}{(2-x)}$ per $x \approx \pm 1, 2$.
 - Definisci l'errore algoritmico ed il concetto di stabilità.
 - Studia la stabilità dell' algoritmo che valuta f(x) in un punto x.
- 3. Sia $f(x) = 4x^3 3x^2 6x + 1$.
 - Disegna il grafico di f. Localizza le tre radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$
 - Studia la convergenza ad α del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente ad α ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
 - Studia la convergenza a γ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a γ ? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

Sia $g(x)=rac{4x^3-3x^2+1}{6}$. Verifica che $lpha,eta,\gamma$ sono punti fissi di g .

- Studia la convergenza ad α, β, γ del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$ Quando convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta. è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
- Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.
- La funzione f è un polinomio. Proponi un algoritmo efficiente per calcolare un generico polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ in un punto x assegnato ed analizza la sua complessità computazionale.
- 4. Sia data la matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- \bullet Calcola la fattorizzazione LU di A.
- Per quale scelta dei parametri α, β il sistema Ax = b ha unica soluzione?
- Nota la fattorizzazione LU di A come risolvi in generale il sistema lineare Ax = b?
- Illustra in generale la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
- Per quali valori del parametro β il metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo scambia la prima con la terza riga di A?
- Fissato un valore di β come al punto precedente, per quali valori del parametro α il metodo di Gauss con il pivot parziale al secondo passo passo scambia la seconda con la terza riga?
- Sia $\alpha=2$ e $\beta=4$ Calcola la fattorizzazione PA=LU con la tecnica del pivot parziale.
- Nota la fattorizzazione PA = LU come risolvi in generale il sistema lineare Ax = b?
- Proponi un algoritmo efficiente per calcolare in generale la soluzione di Ux = d con U triangolare superiore ed analizza il costo computazionale.
- 5. Sia $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Dati i punti $P_0 = (0, f(0)), P_1 = (1, f(1)), P_2 = (2, f(2))$.
 - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
 - Scrivi la formula dell'errore f(x) p(x) e determina una limitazione dell'errore $\max_{x \in [0,2]} |f(x) p(x)|$.
 - Dato l' ulteriore punto $P_3 = (3, f(3))$, determina in maniera efficiente il polinomio \tilde{p} che interpola i quattro punti nella forma di Newton.
 - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
 - \bullet Determina il polinomio r di grado zero di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati.
- 6. Scrivi la definizione di polinomio cubico di Hermite a tratti.
 - Scrivi la definizione di Spline cubica.
 - In cosa differiscono le due funzioni?