**Prova scritta di Calcolo Scientifico**

`Udine, 8 febbraio 2021`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $realmin = 1/64$, $realmax = 15$, e $Nu = 5$, dove $N$ è il numero degli elementi di $\mathcal{F}$ maggiori di 0 e $u$ è la precisione di macchina.
   - Siano dati $x = (10.\overline{101})_2$ e $y = (11.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = 2\tilde{x} fl(-) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - ⋆ Scrivi $x, y$ e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero minimo $e$ tale che $\tilde{z}2^e \in \mathcal{F}$. Giustifica la risposta.

2. Siano dati una funzione $f(x)$ e un intero $n > 1$.
   - Scrivi il numero di condizionamento di $F(x) = f(x)^n$ e quello di $G(x) = f(x^n)$ in funzione di quello di $f$ e $n$.
   - Considera $f(x) = e^x$. Per quali valori di $x$ risulta $\mathtt{cond}_F(x) > \mathtt{cond}_G(x)$? Giustifica la risposta.
   - Supponi che $f(x)$ sia approssimata con un errore relativo maggiorato da $u$. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo ricorsivo che calcola $F$ con $x$ numero di macchina. Quando $n = 50$, quante cifre decimali potresti avere in meno rispetto a quelle garantite da $u$.
   - Considera $f(x) = e^x$ e supponi sia approssimata con un errore relativo è maggiorato da $u$. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo che calcola $G$ con $x$ numero di macchina.

3. Sia $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) - 4x + 6$.
   - Disegna il grafico di $f$. Determina le radici $\alpha, \beta$, con $\alpha < \beta$.
   - ●● Studia la convergenza del metodo di Newton a $\alpha$ e $\beta$. Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali

     (a) $x_0 = -2$
     (b) $x_0 = -4$
     (c) $x_0 = -4/3$
     (d) $x_0 = 3$
     (e) $x_0 = 1$
     (f) $x_0 = 1/3$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad $\alpha$ o a $\beta$? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

     Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che $\alpha, \beta$ sono punti fissi di $g$ e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots$.
   - Determina $m$ in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a $\alpha$ con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{6}$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - ⋆ Determina $m$ in modo che il metodo sia localmente convergente ad $\alpha$ con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = -7$. Studia la convergenza locale a $\beta$ del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 3 & 4 \\ -4 & -9 & 4 \\ 2\alpha & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione $LU$ di $A$. Per quale scelta del parametri $\alpha$ esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di $\alpha$ il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - ⋆ Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Ux = b$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.

5. Sia dati i punti $P_0 = (-1, 18)$, $P_1 = (0, 12)$ e $P_2 = (2, 0)$.
   - Determina il polinomio $p$ che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $\tilde{p}'(0) = -8$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $q$ di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti $P_0, P_1, P_2$ e $P_3 = (3, 6)$ nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Sia data una matrice $A$ di dimensione $n$ che ammette la fattorizzazione $LU$. Scrivi la pseudocodifica che calcola $L$ e $U$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss gestendo in maniera efficiente la memoria.