Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 18 giugno 2019`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max}+e_{\min} = 10$, la precisione di macchina u sia $1/16$ e $realmin \cdot realmax = 30$.
   - Siano dati $x = (1.\overline{0111})_2$ e $y = (10.\overline{0111})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero e tale che $\tilde{z} \cdot 2^e = realmin$. Qual è il risultato di $fl(\tilde{z} \cdot 2^e)$ con $e = -2$? Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Sia $f(x) = g(h(x))$, con g, h funzioni reali. Verifica che il numero di$f$ è il prodotto del condizionamento della funzione g calcolato in $h(x)$ e del condizionamento di h calcolato in x. Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}$ con x che varia nel campo di esistenza di f.
   - Sia $p(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, con $n = 3$ e $x \neq 1$, x numero di macchina. Per calcolare $p(x)$ si possono usare i seguenti algoritmi
     (a) $p(x) = (1+x)(1+x^2)$
     (b) $p(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$
     Confronta l'errore dei due algoritmi.
   - Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di Horner per $p(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, con n intero qualsiasi. Analizza la complessità computazionale e l'errore algoritmico.
3. Sia $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton ad α e β.
   - Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -2$
     (b) $x_0 = -0.5$
     (c) $x_0 = 0$
     (d) $x_0 = 1$
     (e) $x_0 = 3$
     (f) $x_0 = 0.5$
     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g, e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad α con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{4}$. La successione ottenuta con $x_0 = -0.5$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad α con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = -0.5$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = 6$. Studia la convergenza locale a β del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = 1$è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & \alpha+2 \\ 2 & 1 & -2 \\ \alpha+2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
   - Per quale scelta del parametri α il sistema $Ax = b$ ha unica soluzione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = -1/2$ Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
5. Sia $f(x) = \log_2(1 + x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(-1))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpolai tre punti e che $\tilde{p}'(0) = f'(0)$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei tre punti P_0, P_1, P_2 nel senso dei minimi quadrati.
6. $\star$ Si vogliono stimare i parametri r, I_0 della funzione $I(t) = e^{rt} I_0, t \geq 0$ che descrive la crescita del numero degli infetti nello sviluppo di un'epidemia nella fase iniziale. Siano I_k, il numero degli infetti rilevati al tempo $t_k > 0, k = 1, 2, \ldots, N$. Ponendo $I_0 = e^{\ell}$, scrivi il sistema sovradeterminato da risolvere per determinare r, ℓ. (Suggerimento: scrivi $I(t) = e^{f(t)}$.)