Lezione 25

Esercizi da temi d'esame

Si allegano i testi delle prove scritte - parte esercizi - dello scorso anno accademico.
Le prove di gennaio e febbraio sono "pre-covid".
Da giugno le prove sono state somministrate in modalità a distanza, con tempi ridotti ed esercizi personalizzati in funzione del numero di matricola del candidato.

Anche le prove dei prossimi appelli saranno in modalità a distanza. La prova complessiva sarà spezzata in parti. Le soluzioni di ogni parte, fotografate/scannerizzate secondo le istruzioni del Vademecum, dovranno essere inviate in tempi stretti all'indirizzo e-mail luigi.pace@uniud.it secondo le istruzioni che saranno date oralmente.
Gli esercizi saranno sempre personalizzati in funzione del numero di matricola o della data di nascita. Andrà considerata con attenzione la regola di personalizzazione, che potrà cambiare da appello ad appello.
Per gli esercizi dell'appello di luglio si danno anche delle soluzioni. Esempi di soluzioni dettagliate dei vari tipi di esercizi sono reperibili nella Dispensa caricata sul sito e-learning.

(25. 2

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Esercizi per la prova scritta – 27 gennaio 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 25 palline nere e 75 bianche. Una terza urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una quarta urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, cinque palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 25 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e quattro bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0,1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx^2$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X. Sia infine $T = 2X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di T; si calcoli $P(T = 1)$.

3. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionali ancora binomiali $Y|X = x \sim Bi(x+1, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(\max(X, Y) = 1)$.

4. Una apparecchiatura ha tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i $(i = 1, 2, 3)$ di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale, X_1 con valore atteso pari a 8 anni, X_2 con valore atteso pari a 10 anni, X_3 con valore atteso pari a 12 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il primo quartile di T (è il quantile-p con $p = 25/100$) e la probabilità condizionale $P(6 \leq T \leq 8 | T > 4)$.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(11, 9)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(11, 9/n)$. Sia $n = 36$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{36} > 13)$ e $P(\bar{Y}_{36} < 10)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_{36}$ (è il quantile-p con $p = 90/100$).

6. Il responsabile qualità di una fabbrica vuole valutare la proporzione p di pezzi prodotti che non sono idonei alla vendita. Viene estratto dalla produzione del giorno un campione casuale di 100 pezzi e si osserva che 5 di essi non sono idonei. Si definisca un modello statistico parametrico utile per descrivere l'esperimento effettuato. Si reperisca uno stimatore per p, si determini l'associato *standard error*, e si calcolino le corrispondenti stime.

Buon lavoro!

25.3

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 17 febbraio 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 30 palline nere e 70 bianche. Una terza urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e cinque bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx(1 - x)$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e mediana di X. Sia infine $T = 1 - X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di T e si calcoli il valore atteso di T.

3. Una apparecchiatura ha solo tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i della componente i $(i = 1, 2, 3)$ ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a $3i$ anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il cinquantesimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 50/100$) e la probabilità condizionale $P(T > 4|T > 2)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = 1/(1 - 2t)$, per $t < 1/2$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(7, 1)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(7, 1/n)$. Sia $n = 16$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{16} > 7.5)$ e $P(\bar{Y}_{16} < 6)$. Si ottenga infine il novantanovesimo percentile di $\bar{Y}_{16}$ (è il quantile-p con $p = 99/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge di Poisson con valore atteso $\lambda > 0$ ignoto, si reperisca una stima di λ e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!

25.4

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Sei esercizi – 16 giugno 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

Nel seguito a, b , c sono, rispettivamente, la terza, la quarta, la quinta cifra del Tuo numero di matricola; ad esempio, matricola 142431 $\Longrightarrow$ $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

1. Un'urna contiene a palline nere e $100 - a$ bianche. Una seconda urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una terza urna urna contiene 80 palline nere e 20 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sette palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con a nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, due nere e cinque bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k|x|^b$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e mediana di X. Sia infine $T = -X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T = -0.5)$.

3. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(2, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 2$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X = Y)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = \exp(ct + t^2/2)$, dove $\exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = (Y_1 - Y_2)/\sqrt{2}$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(a+b, 9)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(a + b, 9/n)$. Sia $n = 9$. Si calcolino $P(\bar{Y}_9 > a + b + 1.65)$ e $P(\bar{Y}_9 < a + b - 1)$. Si ottenga infine il quinto percentile di $\bar{Y}_9$ (è il quantile-p con $p = 5/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge $Bi(1, p)$ di media $p \in (0, 1)$ ignota, si reperisca una stima di p, e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore considerato, calcolandone anche lo *standard error*.

Buon lavoro!

25.5

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Sei esercizi – 10 luglio 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

Nel seguito a, b , c sono, rispettivamente, la terza, la quarta, la quinta cifra del Tuo numero di matricola; ad esempio, matricola 142431 $\Longrightarrow a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

1. Un'urna contiene $20 + a$ palline nere e $80 - a$ bianche. Una seconda urna contiene 30 palline nere e 70 bianche. Una terza urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una quarta urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, otto palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 50 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, quattro nere e quattro bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k + x$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano moda e mediana di X. Sia infine $T = b + X$. Si ottengano supporto, valore atteso e funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T > b + 0.5)$.

3. Una apparecchiatura ha solo tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i $(i = 1, 2, 3)$ di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a $6 + c$ anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il novantacinquesimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 95/100$) e la probabilità condizionale $P(T = 3|T > 2)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = \exp((1+b)(e^t-1))$, dove $\exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1+Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(3, 25)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(3, 25/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 3.2)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 2.5)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 90/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge normale di media nota pari ad a e varianza $\sigma^2 > 0$ ignota, si reperisca una stima di σ^2 e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!

25.6

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Sei esercizi – 14 settembre 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

Nel seguito a, b , c sono, rispettivamente, la terza, la quarta, la quinta cifra del Tuo numero di matricola; ad esempio, matricola 142431 $\Longrightarrow a = 2,\ b = 4,\ c = 3$

1. Un'urna contiene $10 + a$ palline nere e $90 - a$ bianche. Una seconda urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una terza urna contiene 90 palline nere e 10 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 90 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, cinque nere e una bianca.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [1, b+2]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = kx$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X. Sia infine $T = X^3$. Si ottengano il supporto e la funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T = 2)$.

3. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/4)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/4$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/3)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X = Y)$.

4. Una apparecchiatura ha solo due componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i ($i = 1, 2$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a c+3 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento dell'altra. Quando almeno una delle due è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il settimo decile di T (è il quantile-p con $p = 7/10$) e la probabilità condizionale $P(T > 4|T > 2)$.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(a, 4)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(a, 4/n)$. Sia $n = 4$. Si calcolino $P(\bar{Y}_4 > a + 1)$ e $P(\bar{Y}_4 < a - 1.5)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_4$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

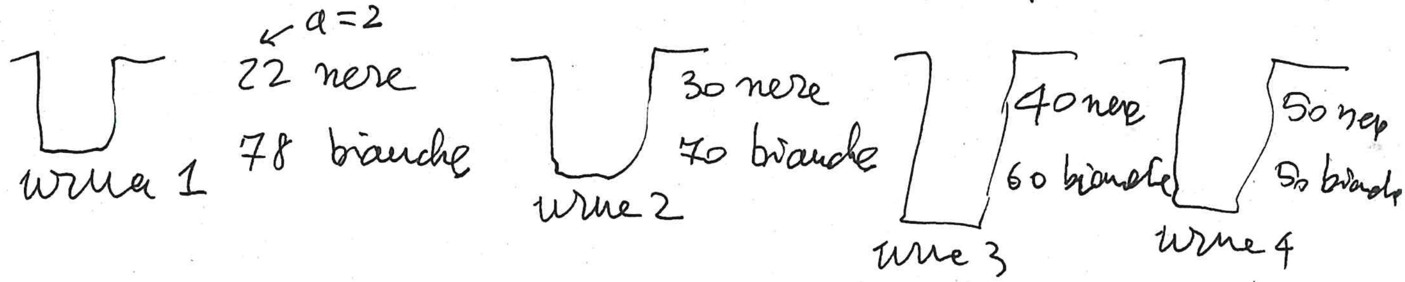
6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge di Poisson di media $\lambda > 0$ ignota, si reperisca una stima di λ e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!

Prova scritta del 10/07/20 $\quad$ 25.7

XY n° matr. 142431 $\rightarrow a=2,\ b=4,\ c=3$

Esercizio 1 $\quad$ Quattro urne con composizione



$\rightarrow$ urna estratta a caso con equiprobabilità: gli eventi A_i = "estratta urna i", $i=1,2,3,4$, formano una partizione di S; $P(A_i) = \frac{1}{4}$, $i=1,2,3,4$, per l'equiprobabilità

$\rightarrow$ estratte a caso (con reinserimento) 8 palline dall'urna scelta, risulta realizzato l'evento E = "4 nere e 4 bianche"

Q.: $P(A_4|E) = ?$

Formula di Bayes: $$P(A_4|E) = \frac{P(A_4)P(E|A_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(E|A_i)}$$

Con verosimiglianze binomiali (per il reinserimento)

$$P(E|A_1) = \binom{8}{4} 0.22^4\ 0.78^4 \doteq 0.0606969 9$$
$$P(E|A_2) = \binom{8}{4} 0.30^4\ 0.70^4 \doteq 0.1361367 0$$
$$P(E|A_3) = \binom{8}{4} 0.40^4\ 0.60^4 \doteq 0.2322432 0$$
$$P(E|A_4) = \binom{8}{4} 0.50^4\ 0.50^4 \doteq 0.2734375 0$$

e probabilità iniziali $P(A_i) = \frac{1}{4}$, $i=1,2,3,4$:

$$P(A_4|E) = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\, P(E|A_4)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(P(E|A_1) + P(E|A_2) + P(E|A_3) + P(E|A_4)\right)} \doteq 0.3892269,$$

circa il 39%.

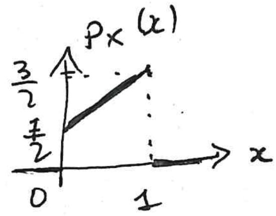
Esercizio 2 $S_X = [0,1]$, $p_X(x) = k+x$ per $x \in S_X$.

→ Q1: $k = ?$ Una f.d.p. deve essere non negativa e normalizzata

$$1 = \int_0^1 p_X(x)\,dx = \int_0^1 (k+x)\,dx = \left[kx + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= k + \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$ per cui

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}$$



→ Q2: $F_X(x) = ?$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \int_0^x \left(\frac{1}{2}+t\right)dt & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

→ Q3: moda e mediana di X

$x_{mode} = 1$ (v. grafico); $x_{0.5}$ è tale che $F_X(x_{0.5}) = \frac{1}{2}$,

quindi soluzione di $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x_{0.5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (l'altra soluzione non è ammissibile)

→ Q4: $T = X + 4$: supporto, valore atteso, funzione di ripartiz., $P(T > 4.5) = ?$

$\vec{b} = 4$

$S_T = [4,5]$; $E(T) = E(X+4) = E(X) + 4 = 4 + \int_0^1 x\,p_X(x)\,dx =$

$= 4 + \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}+x\right)dx = 4 + \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 4 + \frac{7}{12}$

$\doteq 4.58\overline{33}$; $F_T(t) = P(T \le t) = P(X+4 \le t) =$

$$= P(X \le t-4) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 4 \\ \frac{1}{2}(t-4) + \frac{1}{2}(t-4)^2 & \text{se } 4 \le t \le 5 \\ 1 & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$P(T > 4.5) = P(X+4 > 4.5) = P(X > 0.5) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$

Esercizio 3. $X_i \sim Esp(\lambda)$, $i=1,2,3$, dove (25.9)

λ è tale che $E(X_i) = 9$ e le X_i sono indipendenti

$\rightarrow$ Dunque da $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 9$ si ottiene $\lambda = \frac{1}{9}$.

Quando almeno una resistenza è guasta l'apparecchiatura non è più operativa. T sia il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura.

Q1 : $T = g(X_1, X_2, X_3)$: $g = ?$

$T = \min(X_1, X_2, X_3)$ perché l'apparecchiatura si guasta quando si guasta la componente più debole, quella col minimo tempo di funzionamento.

Q2 : $S_T = ?$

$S_T = [0, +\infty)$ perché il minimo di tre valori non negativi è un valore non negativo ($S_{X_i} = [0,+\infty)$).

Q3 : $F_T(t) = ?$

Per $t \leq 0$ $F_T(t) = 0$. Per $t > 0$ invece

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\min(X_1, X_2, X_3) \leq t)$$
$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, X_3) > t)$$
$$= 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t)$$

per l'indip delle X_i $\rightarrow$
$$= 1 - P(X_1 > t) P(X_2 > t) P(X_3 > t)$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{9}t} e^{-\frac{1}{9}t} e^{-\frac{1}{9}t} = 1 - e^{-\frac{3}{9}t}$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{3}t}.$$ Quindi $T \sim Esp(\frac{1}{3})$

Q4: $p_T(t) = ?$
$$p_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Q5 : 95-mo percentile di $T = ?$ E' soluz. dell'equaz. $F_T(t) = 0.95$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{1}{3}t} = 0.95 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}t} = 0.05 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}t = \log 0.05$

$\Leftrightarrow t = -3 \log 0.05 \Rightarrow t_{0.95} \doteq 8.987$ anni.

Q6 : $P(T=3 \mid T>2) = 0$.

Esercizio 4. Y v.c. univ. con f.g.m. (25.10)

$M_Y(t) = e^{5(e^t-1)}$, Y_1, Y_2 v.c. indip. distribuite come Y.
Sia poi $W = Y_1 + Y_2$.

Q1.: $M_W(t) = ?$

$$M_W(t) = E(e^{tW}) = E\left(e^{t(Y_1+Y_2)}\right)$$
$$= E(e^{tY_1} e^{tY_2})$$
Y_1 e Y_2 indip. $\rightarrow$
$$= E(e^{tY_1}) E(e^{tY_2})$$
$$= e^{5(e^t-1)} e^{5(e^t-1)} = e^{5(e^t-1)+5(e^t-1)}$$
$$= e^{10(e^t-1)}$$

Q2: $E(W) = ?$, $Var(W) = ?$

$$\frac{d}{dt} M_W(t) = 10e^t e^{10(e^t-1)}$$
$$\frac{d^2}{dt^2} M_W(t) = 10e^t e^{10(e^t-1)} + 100e^{2t} e^{10(e^t-1)}$$
$$E(W) = \frac{d}{dt} M_W(t)\Big|_{t=0} = 10e^0 e^{10(e^0-1)} = 10$$
$$E(W^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_W(t)\Big|_{t=0} = 10 + 100e^0 e^{10(e^0-1)}$$
$$= 110$$

$$Var(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = 110 - (10)^2 = 10.$$

Nota: l'esercizio è banale se si considera che $Y \sim P(\lambda)$ ha f.g.m. $M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$.

Esercizio 5. $(Y_1, \dots, Y_n)$ ha componenti i.i.d. con $Y_1 \sim N(3, 25)$.

Q1.: Mostrare che $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N\left(3, \frac{25}{n}\right)$.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Occorre quindi mostrare che $M_{\overline{Y}_n}(t) = e^{3t + \frac{1}{2}t^2\frac{25}{n}}$.

Si ha

$$M_{\overline{Y}_n}(t) = E\left(e^{t\overline{Y}_n}\right) = E\left(e^{t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right)$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{n}Y_i}\right) \overset{\text{per l'indip. delle } Y_i}{=} \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{t}{n}Y_i}\right)$$

$$= M_{Y_i}\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left(e^{\frac{t}{n}3 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}25}\right)^n$$

$$= e^{n\cdot\left(\frac{t}{n}\cdot 3 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}25\right)} = e^{3t + \frac{1}{2}t^2\frac{25}{n}}$$

$$\Rightarrow \overline{Y}_n \sim N\left(3, \frac{25}{n}\right).$$

Q2 Calcolare $P(\overline{Y}_{100} > 3.2)$, $P(\overline{Y}_{100} < 2.5)$ e reperire il 90-esimo percentile di $\overline{Y}_{100}$.

Si ha $\overline{Y}_{100} \sim N\left(3, \frac{25}{100}\right)$, $\sigma = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = 0.5 = \frac{1}{2}$.

Quindi $P(\overline{Y}_{100} > 3.2) = 1 - P(\overline{Y}_{100} \leq 3.2) = 1 - \Phi\left(\frac{3.2-3}{\frac{1}{2}}\right)$

$= 1 - \Phi(2 \times 0.2) = 1 - \Phi(0.4) \doteq 1 - 0.6554 \doteq 0.3446$;

$P(\overline{Y}_{100} < 2.5) = P(\overline{Y}_{100} \leq 2.5) = \Phi\left(\frac{2.5-3}{\frac{1}{2}}\right)$

$= \Phi(2 \times (-0.5)) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \doteq 1 - 0.8413 \doteq 0.1586$;

infine il 90-esimo percentile di $\overline{Y}_{100}$ è

$$\mu + \sigma z_{0.90} \rightarrow 3 + \frac{1}{2} \times \underset{\substack{\uparrow \\ z_{0.90} \doteq 1.28}}{1.28} \doteq 3.64.$$

Esercizio 6. $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ ha componenti (25.12)

$a=2$

$Y_i \sim N(2, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ ignota varianza.

Quesito: reperire stime di σ^2 basate sui dati $y = (y_1, \dots, y_n) \leftarrow Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ e indagare le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Stime di σ^2: metodo dei momenti:

$$\sigma^2 = E\left((Y_1 - 2)^2\right)$$

ha come analogo empirico

$$\hat{\sigma}^2_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - 2)^2.$$

Stimatore corrispondente:

$$\hat{\sigma}^2_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - 2)^2.$$

Esso è

- non distorto

$$E_{\sigma^2}(\hat{\sigma}^2_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma^2}\left[(Y_i - 2)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{\cancel{n}} = \sigma^2$$

$\forall \sigma^2 > 0$

- consistente

$$\mathrm{Var}_{\sigma^2}(\hat{\sigma}^2_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[(Y_i - 2)^2\right] = \frac{1}{n^2}\, n\, \mathrm{Var}(\sigma^2 \chi^2_1) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

che converge a 0 al divergere di n (lo stimatore è asintoticamente non distorto, si può invocare la C.S. per la convergenza in probabilità)

- asintoticamente normale

$$\hat{\sigma}^2_2 \sim \frac{\sigma^2}{n} \chi^2_n \,\dot{\sim}\, N\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}\right)$$

perché $\chi^2_n \,\dot{\sim}\, N(n, 2n)$ per n sufficientemente grande, per effetto del TCL.

Quesiti frequentemente posti

Le leggi o distribuzioni di Poisson: definizione e risultati principali.

Le leggi o distribuzioni binomiali: definizione e risultati principali.

Le leggi o distribuzioni esponenziali: definizione e risultati principali.

Le leggi o distribuzioni normali: definizione e risultati principali.

I principali indici di posizione per v.c. univariate.

Si enuncino tre proprietà del valore atteso e se ne dimostri una.

La varianza e lo scarto quadratico medio: definizioni e proprietà principali.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge $Bi(1, p)$.

Ottenimento della funzione generatrice dei momenti di una v.c. con legge $Bi(2, p)$.
La f.g.m.: definizione e risultati principali.
Stimatori non distorti di un parametro θ: definizione e un esempio.

Stimatori consistenti di un parametro θ: definizione e un esempio.

C.C.S. da una distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$: si proponga uno stimatore di μ e si descrivano le sue proprietà campionarie.

C.C.S. da una distribuzione $P(\lambda)$: si proponga uno stimatore di λ e si descrivano le sue proprietà campionarie.
Stima di θ nel C.C.S. da $Bi(1, \theta)$: proprietà campionarie dello stimatore.