Lorena Escribano Huesca

Ejercicio 40: Tenemos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u = 0 & , \ \Omega \\ u = 0 & , \ \Gamma_{in} \\ u = 1 & , \ \Gamma_{cyl} \\ -\varepsilon \cdot \partial_n u = 0 & , \ \Gamma_{out} \\ -\varepsilon \cdot \partial_n u = 0 & , \ \Gamma_{wall} \end{cases}$$

Siendo $\vec{b} = (b_1, b_2)^t$ la velocidad del fluido con

$$b_1 = U_\infty \left(1 - \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right) \qquad b_2 = -2U_\infty \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

y $\varepsilon = 0.01, \ 0.1, \ 1$.

Realizar la formulación variacional del problema, comprobar que está bien planteado y resolverlo para distintos valores de $\varepsilon > 0$.

Dem:

Nos encontramos ante un problema mixto Dirichlet - Neumann pues se dan condiciones iniciales de u en Γ_D y en Γ_N

Para todo $v \in H^1_{\Gamma_D} = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0 \}$ se cumple:

$$-\varepsilon \int_\Omega \Delta u \cdot v + \int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla u) \cdot v = 0$$

Integrando por partes, la ecuación anterior se transforma en:

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v - \int_{\Omega} u \cdot (\vec{b} \cdot \nabla v) = 0$$

Donde

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v = \underbrace{\cancel{\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v}}_{0 \text{ pues } v \in H^1_{\Gamma_D}} + \underbrace{\cancel{\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v}}_{0 \text{ ya que por hipotesis } \frac{\partial u}{\partial n} = 0}$$

La formulación variacional del problema es:

(Var) Buscar $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ tal que

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} u \cdot (\vec{b} \cdot \nabla v) = 0$$

$\forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$

Comprobamos que el problema está bien planteado, es decir que Lax-Milgram se aplica bien

Tomando la función bilineal continua

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v - u\,(\vec{b} \cdot \nabla v)$$

y la función lineal continua idénticamente nula

$$\ell(v) \equiv 0$$

Por Lax-Milgram existe un único $u \in V_h$ ≡ espacio de las funciones continuas, lineales a trozos, tal que

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H^1_{\Gamma_D}$$

Usando Freefem he obtenido la solución de la formulación variacional del problema.

$\square$.