Cálculo Numérico de 1 variable. Curso 2019-2020.
Lorena Escribano Huesca

PRÁCTICA 5: INTEGRACIÓN

Ejercicio 1. Queremos obtener una tabla de valores para la función:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

(distribución normal de media cero y desviación típica uno) para los valores de x comprendidos entre 0 y 4 con incrementos de 0.1 utilizando la regla compuesta de Simpson.

(a) Calcula en primer lugar, mediante un programa Matlab, la integral:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

con un error menor que 10^{-6}. Se puede controlar experimentalmente el error por medio de la diferencia $1/10*|S_{2n} - S_n|$. El fichero ***simpson.m*** contiene información para calcular la integral mediante la **regla compuesta de Simpson** pero no esta completo. Lo tenéis que terminar vosotros.

Solución: En primer lugar voy a mostrar el código completo de la función ***simpson.m:***

```
*Practica5.m  trapecios.m  *simpson.m  gauss_legendre2.m  diferencias_divididas.m  Prueba3.m
disp(['Funcion que se integra :  f(x) = ' f ]);
disp(['Intervalo de integracion : [' mat2str(a) ',' mat2str(b) ']']);
disp(['Numeros de subintervalos: ' mat2str(N) ]);
disp(' ');

% Calculo de la integral por el metodo de Simpson compuesto
x=a;
fa=eval(f); %evalua f en a
x=b;
fb=eval(f); %evalua f en b

h=(b-a)/N;
s1=0;
for i=1:(N/2);
    x=a+(2*i-1)*h;
   s1=s1+eval(f);
end
s2=0;
for i=1:(N/2-1);
    x=a+2*i*h;
   s2=s2+eval(f);
end
s=(h/3)*(fa+4*s1+2*s2+fb);
```

Determinamos el valor de la integral de la función dada usando las funciones ***simpson.m*** y ***trapecios.m:***

actica5.m | trapecios.m | *simpson.m | gauss_legendre2.m | diferencias_divididas.m | Prueba3.m

```
addpath('..\biblioteca')

%EJERCICIO 1
%APARTADO a)

format short

%En primer lugar definimos la funcion que se da en el enunciado y la denominamos f:
f='1/2+(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)'

%El valor de esta integral lo podemos aproximar usando el método de Simpson compuesto.
%Dividimos en intervalo de integración [0,1] en,por ejmplo, 40 subintervalos
s=simpson(f,0,1,40);


%Análogamente calculamos esta integral por el método de los trapecios compuesto.
%En este caso, dividimos el intervalo [0,1] en 10 subintervalos:
t=trapecios(f,0,1,10);
```

Dando como resultado:

Ventana de comandos

```
f = 1/2+(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)

Calculo de la integral mediante el Metodo de Simpson compuesto

Funcion que se integra :  f(x) = 1/2+(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)
Intervalo de integracion : [0,1]
Numeros de subintervalos: 40


Calculo de la integral mediante el Metodo de los trapecios compuesto

Funcion que se integra :  f(x) = 1/2+(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)
Intervalo de integracion : [0,1]
Numeros de subintervalos: 10

La integral de 1/2+(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2) entre 0 y 1 es: 0.84114303653597
>>
```

A continuación, voy a calcular la integral que aparece en el enunciado con un error menor que 10^{-6} . El código que he usado para calcular esto último ha sido:

Practica5.m | trapecios.m | simpson.m | gauss_legendre2.m | diferencias_divididas.m | Prueba3.m

```

%Hacemos ahora un bucle con n par hasta encontrar el que cumple |Sn+1-Sn|<10^-6
%Para ello calculamos la integral de la función del enunciado entre 0 y 1 para cada n.
%Lo hacemos llamando a la función simpson.m con la funcion, los limites de integración y el número de nodos

n=2;
s0=simpson(f,0,1,n);        %Sn
s1=simpson(f,0,1,2*n);      %S2n
while (abs(s1-s0) >= 10^-5) %Si la diferencia es mayor que 10^-5 vuelve a subdividir el intervalo de integración
  n=n*2;                    %Tomamos un nuevo número de subintervalos en que se divide el intervalo original.
  s0=s1;
  s1=simpson(f,0,1,n*2);    %Calculamos la integral de nuevo, pero cambiando el numero de subintervalos
endwhile

n_necesario=n               %Calcula el n para el cual el error es menor de 10^-6

disp('La integral con un error menor que 10^-6 es:' );
simpson(f,0,1,n_necesario)
```

Dando como resultado lo siguiente:

entana Ayuda Noticias

Directorio actual: :\Joreshu\Desktop\CalculoNumerico\Practica5

Ventana de comandos

```
n_necesario =  8
La integral con un error menor que 10^-6 es:
ans =  0.84135
>>
```

(b)Utiliza las ideas del apartado anterior para construir la tabla deseada.

Solución:El código es:

```
*Practica5.m   trapecios.m   simpson.m   gauss_legendre2.m   diferencias_divididas.m   Prueba3.m

%APARTADO b)
%Nuestro objetivo es obtener una tabla de valores de la integral de esta función:
f='(1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)'
%Dicha tabla se corresponde a la tabla de la distribución normal


%Creamos la tabla tabla deseada
for k=0:40 %Nuestra tabla va a tener 40 filas
  for j=0:9  %Y 10 columnas

    s(k+1,j+1)=simpson(f, 0, k/10 + j/100,n_necesario); %Calculamos el valor aproximado de la integral por el método Simpson,
    %siendo n el numero del subintervalos necesarios para que dicha aproximacion cometa un error menos que 10^-6

  endfor
endfor
s %Mostramos la tabla

```

Da como solución la tabla que buscábamos:
En la siguiente imagen sólo se puede observar un fracgmento de la tabla total ya que es una tabla 40x10, demasiado grande.

```
Ventana de comandos
f = (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2)
s =
```

0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.25804	0.26115	0.26424	0.26731	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
0.34135	0.34375	0.34614	0.34850	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40148
0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42786	0.42922	0.43056	0.43189
0.43319	0.43448	0.43575	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
0.46407	0.46485	0.46562	0.46637	0.46711	0.46784	0.46856	0.46926	0.46994	0.47062
0.47128	0.47193	0.47257	0.47319	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47981	0.48030	0.48077	0.48123	0.48169
0.48213	0.48257	0.48299	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48499	0.48537	0.48573
0.48609	0.48644	0.48679	0.48712	0.48745	0.48777	0.48808	0.48839	0.48869	0.48898
0.48927	0.48955	0.48982	0.49009	0.49035	0.49061	0.49086	0.49110	0.49134	0.49157
0.49180	0.49202	0.49223	0.49244	0.49265	0.49285	0.49305	0.49324	0.49342	0.49361
0.49378	0.49396	0.49412	0.49429	0.49445	0.49461	0.49476	0.49491	0.49505	0.49519
0.49533	0.49546	0.49560	0.49572	0.49585	0.49597	0.49608	0.49620	0.49631	0.49642
0.49652	0.49663	0.49673	0.49682	0.49692	0.49701	0.49710	0.49719	0.49727	0.49736
0.49744	0.49751	0.49759	0.49766	0.49774	0.49781	0.49787	0.49794	0.49800	0.49806
0.49813	0.49818	0.49824	0.49830	0.49835	0.49840	0.49845	0.49850	0.49855	0.49860
0.49864	0.49869	0.49873	0.49877	0.49881	0.49885	0.49889	0.49892	0.49896	0.49899
0.49902	0.49906	0.49909	0.49912	0.49915	0.49918	0.49920	0.49923	0.49926	0.49928

Ejercicio 2. Escribe programas en Matlab para las fórmulas de cuadratura de ***Gauss-Legendre***, ***Gauss-Chebyshev*** de tres y cuatro puntos (n=2, n=3) y utilizalos para aproximar las integrales:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_{0}^{2} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{0}^{\pi/4} x^2 \sin x dx, \quad \int_{1}^{1.5} x^2 \log x dx.$$

Compara los resultados obtenidos con los que saldrían si aplicas el método de los **trapecios** o el de **simpson.** Utliliza los comandos de Matlab/Octave ***quad***, ***quadl*** y ***trapz*** y compara los resultados. Mira en la ayuda de Matlab/Octave la información sobre estos comandos.

Solución: En primer lugar creamos las 4 funciones que se piden en el enunciado (Gauss-Legendre con n=2, Gauss-Legendre con n=3, Gauss-Chebyshev con n=2 y Gauss-Chebyshev con n=3).

Gauss-Legendre, n=2;

```
function I=gauss_lengendre2(f,a,b)
  %creamos los nodos
  z=[0 1/5*sqrt(15) -1/5*sqrt(15)];

  %creamos los coeficientes
  c=[8/9 5/9 5/9];

  %formula para -1,1:
  I=0;
  for i=1:3       %GAUSS LEGENDRE 2
        x=b-a/2 * z(i) + (a+b)/2; %cambio de variable para llevarlo al intervalo (a,b)
        I=I+c(i)*eval(f); %I=suma ci*f(xi), por la fórmula de la cuadratura de gauss

  endfor

  I=(b-a)/2 * I; %Pues I[a,b] = I[-1,1]*(b-a)/2, por el ejercicio 18 de la relación de ejercicios

endfunction
```

Gauss-Legendre, n=3;

```
function II=gauss_lengendre3(f,a,b)
  %creamos los nodos
  z=[sqrt((3-2*sqrt(6/5))/7) -sqrt((3-2*sqrt(6/5))/7) sqrt((3+2*sqrt(6/5))) -sqrt((3+2*sqrt(6/5)))];

  %creamos los coeficientes
  c=[(18+sqrt(30))/36 (18+sqrt(30))/36 (18-sqrt(30))/36 (18-sqrt(30))/36];

  %formula para -1,1:
  I=0;
  for i=1:4       %GAUSS LEGENDRE 3
        x=b-a/2 * z(i) + (a+b)/2; %cambio de variable para llevarlo al intervalo (a,b)
        I=I+c(i)*eval(f); %I=suma ci*f(xi), por la fórmula de la curvatura de Gauss

  endfor

  I=(b-a)/2 * I; %Pues I[a,b]=I[-1,1] * (b-a)/2

endfunction
```

Gauss-Chebyshev, n=2;

```
function III=gauss_Chebyshev2(f,a,b)
  %creamos los nodos
  z=[0 sqrt(3)/2 -sqrt(3)/2];

  %creamos los coeficientes
  c=[pi/3 pi/3 pi/3];

  %formula para -1,1:
  I=0;
  for i=1:3       %GAUSS CHEBYSHEV 2
        x=b-a/2 * z(i) + (a+b)/2; %cambio de variable para llevarlo al intervalo (a,b)
        I=I+c(i)*eval(f); %I=suma ci*f(xi), por la fórmula de la cuadratura de gauss

  endfor

  I=(b-a)/2 * I;

endfunction
```

Gauss-Chebyshev, n=3;

```
function IIII=gauss_Chebyshev3(f,a,b)
  %creamos los nodos
  z=[1/2*sqrt(2-sqrt(2)) -1/2*sqrt(2-sqrt(2)) 1/2*sqrt(2+sqrt(2)) -1/2*sqrt(2+sqrt(2))];

  %creamos los coeficientes
  c=[pi/4 pi/4 pi/4 pi/4];

  %formula para -1,1:
  I=0;
  for i=1:4       %GAUSS CHEBYSHEV 3
        x=b-a/2 * z(i) + (a+b)/2; %cambio de variable para llevarlo al intervalo (a,b)
        I=I+c(i)*eval(f); %I=suma ci*f(xi), por la fórmula de la curvatura de Gauss

  endfor

  I=(b-a)/2 * I; %pues I[a,b]=I[-1,1] * (b-a)/2

endfunction
```

Vamos a usar estas funciones para aproximar las integrales que se dan en el enunciado:
En la imagen siguiente se calculan dichas aproximaciones de la función f(x)=sen(x)/x.

```
%EJERCICIO 2
%Ya hemos contruido las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev de tres y cuatro puntos (n=2, n=3)
%Los usamos para aproximar las siguientes integrales
%Definimos la primera integral
f='sin(x)/x'

%Y calculamos su integral aproximada mediante las 4 funciones creadas:
GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)
```

Ahora calculamos el resto de integrales del enunciado, usando los 4 métodos que hemos creado

```
%hacemos lo mismo con las siguientes funcines:
f='exp(x)/sqrt(1-x^2)'
GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)


f='1/1+x^2'
GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)


f='x^2*sin(x)'
GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)

f='x^2*log(x)'
GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)
```

Finalmente el ejercicio nos pide que comparemos estos últimos valores con las funciones ***quad***, ***quadl*** y ***trapz*** ya implementadas en octave. Previamente vamos a hacer una breve descripción de estas funciones:

quad(f,a,b): es una ***"quadrature function"*** aproxima la integral de una función **f** que recibe como parámetro desde a hasta b cometiendo un error menor que 10^{-6} usando la cuadratura de Simpson. Los límites de integración a, b deben ser finitos.

quadl(f,a,b): es también una ***"quadrature function"*** aproxima la integral de la función f que recibe como parámetro desde a hasta b, cometiendo un error menor que 10-6usando la cuadratura de Lobatto. Los límites de integración a, b que recibe como parámetros deben ser finitos.

trapz(Y): aproxima la integral de Y usando el método de los trapecios. Recibe como parámetro un vector Y.

Por ejemplo comparamos los resultados obtenidos de aproximar la integral de la función ***$1/1+x^2$***:
El código es:

```
%Nos piden ahora que comparemos los resultados con el metodo de simpson usando los comandos quad y quadl
%Por ejemplo vamos a comparar los resultados de la funcion f='1/1+x^2'
f='1/1+x^2'
%definimos también la función f de esta forma para poder usar el método quad
F=@(x)1./(1+x.^2);

GL2=gauss_legendre2(f,-1,1)
GL3=gauss_legendre3(f,-1,1)

GC2=gauss_chebyshev2(f,-1,1)
GC3=gauss_chebyshev3(f,-1,1)

q=quad(F,-1,1)
ql=quadl(F,-1,1)
```

Dando como resultado:

```
Ventana de comandos
f = 1/1+x^2
GL2 =  2.6667
GL3 =  5.7621
GC2 =  4.7124
GC3 =  4.7124
q =  1.5708
ql =  1.5708
>>
```