Ejercicio 1: Sea V un espacio vectorial real con $\dim V = n$ y su topología natural. Dadas B y B' bases de V define las cartas asociadas y calcula el cambio de coordenadas.

Dem:

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base en V, sabemos que todo $\vec{v} \in V$ se escribe como $\vec{v} = a^1 v_1 + \dots + a^n v_n$. Podemos definir la carta (U_1, φ_1) así:

$$\varphi_1 : U_1 \subset V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{v} = a^i v_i \rightsquigarrow (a^1, \dots, a^n)$$

Que envía cada vector a sus coordenadas en la base B.

Claramente es una aplicación biyectiva, continua y con inversa continua, luego es homeomorfismo y por tanto carta.

Análogamente, definimos φ_2 como la aplicación que lleva un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a sus coordenadas en la base $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$. Es decir como $\vec{v} = b^1 v_1' + \dots + b^n v_n'$

Entonces

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{v} = b^i v_i \longmapsto (b^1, \dots, b^n)$$

Calculamos el cambio de coordenadas:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1"'] & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Sea $p \in V$, dadas las parametrizaciones (U_1, φ_1), (U_2, φ_2)

con $p \in U_1 \cap U_2 = V$ ← Dominio del cambio de coordenados.

El cambio de coordenadas consiste en aplicar la matriz cambio de base de B a B' a cada vector, es decir la matriz $M_{BB'} = [p_{ij}]$ cuya columna j tiene como entradas a las coordenadas de v_j escrito en términos de la base B'. $[v_j]_{B'}$

En otras palabras, las entradas $(p_{1j}, \ldots, p_{nj})$ de la j-ésima columna de $M_{BB'}$ son los únicos elementos de $\mathbb{R}$, para los cuales

$$v_j = p_{1j} v_1' + \ldots + p_{nj} v_n'$$

$$\Rightarrow M_{BB'} = ([v_1]_{B'}, \ldots, [v_n]_{B'})$$

$\square$

Ejercicio 2: Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Dado $c \in \mathbb{R}$, sea $M = \Phi^{-1}(c)$ (si c es valor regular de Φ, y $m = 2$ entonces M es superficie de nivel).

Supongamos que $\forall a \in M$, $d\Phi_a$ es regular.
Prueba, usando el teorema de la función implícita que M es v.d. n-dim

Dem:

Recordamos el concepto de variedad diferenciable y el teorema general de la función implícita:

- El par formado por una variedad topológica M y una estructura diferenciable $\mathcal{A}$ sobre dicho conjunto se dice que es una variedad diferenciable
- Teorema de la función implícita:
  Sean $f : A \subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable y $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n}$ un vector tal que $f(a,b) = 0$

Considerando $(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ y definiendo la matriz jacobiana $DF(a,b) := [D_x f(a,b), D_y f(a,b)]$ y sobre ésta consideramos que la submatriz que define $D_y f(a,b)$ es invertible. Entonces existen los conjuntos abiertos $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $W \subset \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in V$ y $a \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x,y) \in V$ y $f(x,y) = 0$, lo que define una función $g: W \to \mathbb{R}^n$ que es continua y diferenciable y que además verifica

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in W$$

Y también:

$$Dg(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x)) \qquad x \in W$$

donde $g(a) = b$.

(Fin del enunciado del teorema de la función implícita)

Llevando el teorema de la función implícita a nuestro caso, reemplazamos:

$f \to \Phi \qquad m \to n$

$A \to u \qquad n \to 1$

Sea $M = \Phi^{-1}(c)$ donde por hipótesis c es un valor regular de Φ, es decir $d\Phi_p \neq 0$ $\forall p \in \Phi^{-1}(c) = M$

Fijamos un punto $p \in M$ (por tanto $\Phi(p) = c$) con $p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$. Como df_p es aplicación lineal sobreyectiva, ya que $df_p \neq 0$, entonces las derivadas parciales no se anulan simultáneamente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(p), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}}(p)$$

Siendo x_i la i-coordenada en $\mathbb{R}^{n+1}$

Para mayor claridad hacemos el cambio de notación $x_{n+1} \to y$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la última de ellas cumple $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(p) \neq 0$, luego es invertible.

Utilizando el teorema de la función implícita, podemos asegurar la existencia de entornos $W(\vec{x}_0) \subset \mathbb{R}^2$, $I(y) \subset \mathbb{R}$ y de una función diferenciable $g : W \to I \subset \mathbb{R}$, tales que

i) $g(\vec{x}) = y \in I$

ii) Para todo $\vec{x} \in W$, $\Phi(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\vec{x}}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{g(\vec{x})}}) - C = 0$

iii) $(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{W}} \times \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}}) \cap \Phi^{-1}(c) = \{ (u, g(u)) : u \in W \}$.

Definimos entonces la parametrización $\varphi(u) = (u, g(u))$ con $u \in W$

Se tiene entonces por (iii) que $\varphi(W) = (W \times I) \cap M = V$ que es abierto en M.

Además $\varphi : W \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una parametrización de M, por ser el grafo de una función diferenciable g.

$\Rightarrow$ $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable n-dimensional

Siendo $\mathcal{A} = \{ (W_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \}$ atlas maximal sobre M.

Contiene cualquier atlas compatible con él.

$\square$

Ejercicio 3: (Subvariedad abierta)

M^n v.d., $U \subset M$ abierto. Prueba que U también es v.d. n-dimensional

Dem:

Por hipótesis M es variedad diferenciable n-dimensional. Sea $A = \{(V_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \lambda \in \Delta\}$ atlas maximal sobre M. Por definición de atlas maximal, todas las cartas en el atlas A son compatibles y si una carta es compatible con todas las cartas de A, ya está contenida en A.

Por otro lado, cada punto $p \in U$ está contenido en el dominio de alguna carta $(V, \varphi) \in A$

Por tanto $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$ es una carta cuyo dominio contiene p y está contenido en U. Así pues U es una variedad topológica n-dimensional.

Veamos que U es v.d. n-dimensional:

En efecto, las cartas cubren $\mathcal{U}$, por tanto forman un atlas sobre $\mathcal{U}$

Definimos el atlas

$$\mathcal{A}_{\mathcal{U}} := \{ (\mathcal{U} \cap V, \ \varphi|_{\mathcal{U} \cap V}) \mid V \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \}$$

$$= \{ (W_\lambda \ , \ \Phi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \}$$

Todas las cartas del atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ son compatibles, entre sí por ser un subconjunto del atlas maximal sobre M.

Concluimos que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ es un atlas maximal sobre $\mathcal{U}$, luego $(\mathcal{U}, \mathcal{A}_{\mathcal{U}})$ es variedad diferenciable n-dimensional

$\square$.

Ejercicio 4: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, sea $I_{a,b,c} \subset \mathbb{R}$ el conjunto

$$I_{a,b,c} = \{ (c, y) : a < y < b \} = \{c\} \times (a, b)$$

Sea $\mathcal{B} = \{ I_{abc} : a, b, c \in \mathbb{R}, I_{abc} \neq \emptyset \}$

Demuestra que:

i) La colección $\mathcal{B}$ es una base para la topología en $\mathbb{R}^2$ que denotaremos por $\mathcal{T}$

ii) Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es localmente euclídea.

iii) Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no es variedad

(i) Sabemos que si $X = \mathbb{R}^2$ es un espacio topológico, y $\mathcal{B}$ es una colección de abiertos de X tal que para cada abierto U de X y cada $x \in U$, existe un elemento $I_{a,b,c} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

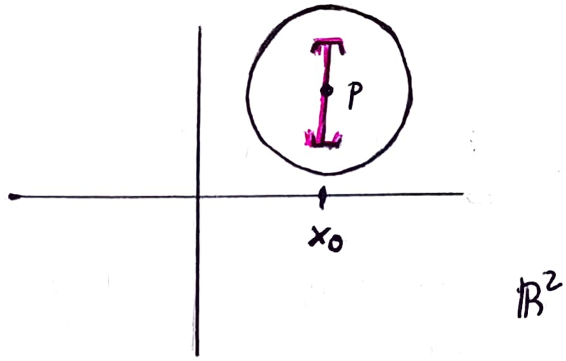
Consideramos el abierto de $\mathbb{R}^2$, $U = B(p, r)$ bola abierta de centro $p = (x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$

Claramente $\mathcal{B}$ es una colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$

Además, tomando $I = \{x_0\} \times (y_0 - \frac{r}{2}, y_0 + \frac{r}{2})$

con $r > 0 \Rightarrow I \neq \emptyset$, hemos encontrado un elemento de $\mathcal{B}$

verificando $p \in I \subset U$



ii) Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es localmente euclídea

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es localmente euclídea si para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, existe un abierto $U \in \mathcal{T}$, entorno de x, homeomorfo mediante $\Phi : U \to V$ a un abierto V de $\mathbb{R}^2$.

Sea $\underset{\substack{\| \\ (x_0, y_0)}}{p} \in \mathbb{R}^2$, como $\mathcal{B}$ es una base para la topología en $\mathbb{R}^2$, entonces $\exists I \in \mathcal{B}$ tq $p \in I = \{(x_0, y) \mid a < y < b\} =$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. $= \{x_0\} \times (a, b)$

Considero el homeomorfismo <u>proyección en la 2ª coordenada</u>

$$\Phi_p : U \in (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow V \in \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \subset \mathbb{R}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \{x_0\} \times (a,b)}}{I} \longmapsto (a,b)$$

Siendo (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ abierto en $\mathbb{R}^2$.

Por tanto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es localmente euclídea.

iii) Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no es variedad.

Vemos que no cumple el segundo axioma de numerabilidad (2AN) y por lo tanto no es variedad

Consideramos el abierto $(0,1) \times (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. $\forall (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, el abierto $I_{a,b,x}$ cubre la franja vertical $\{x\} \times (a,b)$, sin embargo para recubrir el cuadrado entero, se necesitaría una unión de abiertos $I_{a,b,x}$ con $x \in (0,1)$

Puesto que hay una cantidad no numerable de puntos en $(0,1)$ no puede ser 2AN

□.

Ejercicio 5: Sea M^n v.d., $U \subset M$ abierto. Considera U como v.d. n-dimensional. Dado $p \in U$, demuestra que: $T_p U \cong T_p M$. Considera la inclusión $i : U \to M$. Calcula $di_p : T_p U \to T_{i(p)} M$

Dem:

Hay que demostrar que existe un homeomorfismo entre $T_p U$ y $T_p M$, siendo un homeomorfismo una función de $T_p U$ a $T_p M$ biyectiva, continua y con inversa continua.

Veamos que en efecto di_p es un isomorfismo, que en la categoría de espacios topológicos corresponde a un homeomorfismo.

Sea φ coordenadas en M. Por lo explicado en el ejercicio 3, sabemos que las coordenadas en U son $\varphi|_U$, luego para $(u^1 \dots u^n) \in \varphi(U)$, la aplicación i en coordenadas es:

$$\varphi \circ i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)} (u^1 \dots u^n) = \varphi(i(\varphi^{-1}|_{\varphi(U)} (u^1 \dots u^n))) =$$

$$\varphi^{-1}\big|_{\varphi(u)}(u^1 \dots u^n) \in U$$

$$= \varphi\left(\varphi^{-1}\big|_{\varphi(u)}(u^1 \dots u_n)\right) = (u^1 \dots u^n)$$

Por tanto es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^n$.

Luego la matriz de la diferencial $di_p : T_pU \to T_pM$ es:

$$di_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

que obviamente es un isomorfismo, pues es inVertible y biyectiva.

Además, para cada $\vec{v} \in T_pM$ se tiene la identidad

$$\vec{v} = \sum_i \vec{v}(u^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_i \vec{v}^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

Donde los vectores $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p\right\}$ constituyen una base de T_pM por ser un sistema linealmente independiente de n vectores en un espacio vectorial de dimensión n, ya que:

Como $\vec{v} = \sum_i v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$

$$\Rightarrow \vec{v}(u^j) = \sum_i v^i \left(\frac{\partial u^j}{\partial u^i}\right) = v^j \quad \forall j.$$

Luego ambos planos tienen la misma base y por tanto son equivalentes.

$\square$

Ejercicio 6: Sean M^n, N^n variedades diferenciables. Considerando $p \in M$, $q \in N$. Prueba que

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \oplus T_qN$$

Dem:

Recordamos que la suma directa de dos espacios V, W vendría dado por:

$$V \oplus W = \{ (v,w) \mid v \in V, w \in W \}$$

Consideramos las proyecciones canónicas π_M, π_N de $M \times N$ a M e N respectivamente.

Sea $(p,q) \in M \times N$, consideramos la aplicación

$$f : T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_pM \times T_qN$$

$$T_{(p,q)}(M\times N)$$
$$\overset{\Psi}{v}$$

Que envía un vector v a $\left(d(\pi_M)_{(p,q)}(v), d(\pi_N)_{(p,q)}(v)\right)$

Esta aplicación es lineal por serlo $d(\pi_M)_{(p,q)}$ y $d(\pi_N)_{(p,q)}$

Por otra parte, definimos

$$g: T_pM \oplus T_qN \longrightarrow T_{(p,q)}(M\times N)$$

Que envía un par de vectores $(v,w) \in T_pM \oplus T_qN$ a $d(i_M)_p(v) + d(i_N)_q(w)$, donde

$i_M : M \longrightarrow M\times N$ envía M a $M\times\{q\}$, y analogamente para la aplicación $i_N : N \longrightarrow M\times N$ envía N a $\{p\}\times N$.

Usando que

$$\pi_M \circ i_M = id_M \quad y \quad \pi_N \circ i_N = id_N$$

Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$(f \circ g)(v,w) = f\left(d(i_M)_p(v) + d(i_N)_q(w) \right) =$$

$$= \left(d(\pi_M)_{(p,q)} \left(d(i_M)_p(v) + d(i_N)_q(w)\right), \right.$$
$$\left. d(\pi_N)_{(p,q)} \left(d(i_M)_p(v) + d(i_N)_q(w)\right) \right)$$

$$= \left(d(\pi_M \circ i_M)_p(v) + d(\pi_M \circ i_N)_q(w), \right.$$
$$\left. d(\pi_N \circ i_M)_p(v) + d(\pi_N \circ i_N)_q(w) \right)$$

$$= (v,w)$$

Por tanto f admite un inverso, y antes hemos visto que es lineal.

Además, puesto que la dimensión del plano tangente de una variedad coincide con la dimensión de la variedad y

$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim(T_pM \oplus T_qN) = \dim(T_pM) + \dim(T_qN) =$$
$$= \dim(M) + \dim(N) = m + n$$

Por otro lado la dimensión de un producto de espacios vectoriales es: $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$

Por tanto en nuestro caso $\dim(T_{(p,q)}(M \times N)) = \dim(M \times N) =$

$$= \dim(M) + \dim(N) = m+n$$

Concluimos que $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_p M \oplus T_q N$ tienen misma dimensión $m+n$ y por tanto φ es un isomorfismo lineal entre estos dos espacios, es decir

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p(M) \oplus T_q(N)$$

Ejercicio 7: Es conocido que $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ con la topología usual no es variedad diferenciable. ¿Puedes dotar a M con una topología de modo que sí lo sea?

Dem:

La topología usual sobre $\mathbb{R}^2$ es la topología generada por la base

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2 \,,\, y_1 < y_2\}$$

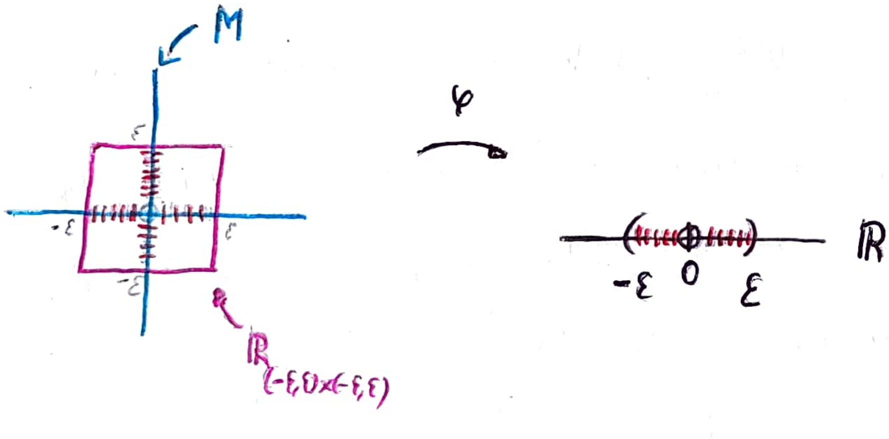
El conjunto M no es variedad topológica con la topología inducida del plano ya que el origen $(0,0)$ no admite un entorno que sea homeomorfo a un abierto de la recta real.

En efecto, el entorno del origen U abierto en $\mathcal{T}|_M$ = Topología inducida

$U = R_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)} \cap M$ donde $R_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)} \in \mathcal{B}$ abierto,

debería ser homeomorfo a un intervalo abierto (a,b) en $\mathbb{R}$.

Pero si quitamos el punto $(0,0)$ de U y $\varphi(0,0)$ de (a,b), tenemos que $U - \{(0,0)\}$ tiene 4 componentes conexas, mientras que $(a,b) - \{\varphi(0,0)\}$ tiene solo 2 componentes conexas, luego no son homeomorfos pues la conexión es una propiedad topológica (y por definición, invariante por homeomorfismos)



He demostrado que M no es variedad topológica con la topología usual.

Comprobemos que M con la topología de base

$$\mathcal{B} = \{\{0\} \times (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup$$
$$\{(a,b) \times \{0\} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$$

si es variedad diferenciable

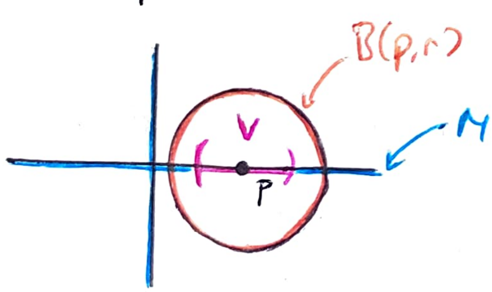
1) Vemos que $\mathcal{B}$ es base de abiertos. Sea $p=(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

Usando el resultado que he utilizado en el ejercicio 4, si $p \in M \cap B(p,r) = U$ $(r>0)$, abierto en la topología inducida por M, tengo que demostrar que existe un elemento $V \in \mathcal{B}$ tal que $p \in V \subset U$. Distinguimos dos casos:

- Si p está en el eje horizontal: $p \in M \cap B(p,r)$

  Tomando $V = (x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}) \times \{0\} \in \mathcal{B}$

  Verifica que $p \in V \subset U$



- Análogamente en el caso de que p pertenezca al eje vertical.

2) Demostramos que M es una variedad diferenciable con la topología $\mathcal{T}$ de base $\mathcal{B}$

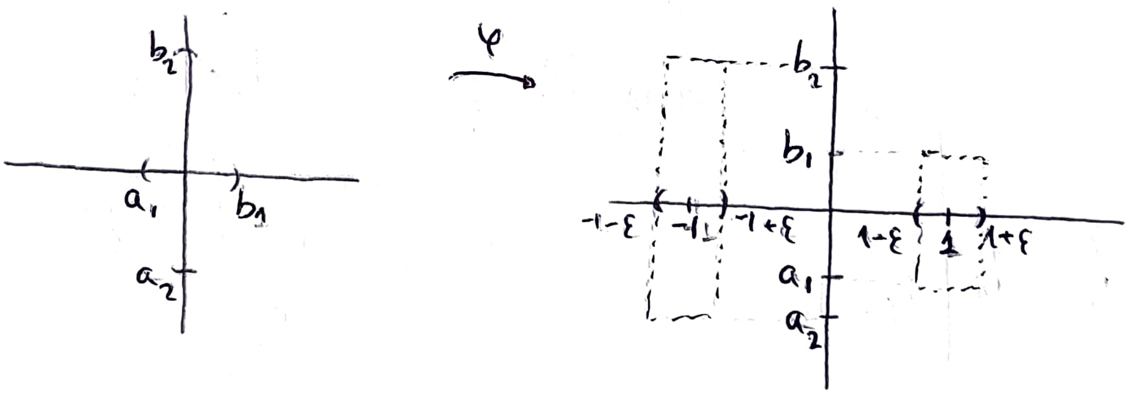
Usamos el lema 1.35 del libro "Introduction to smooth Manifolds" de John M. Lee para demostrar que M es v.d. n-dim.

Consideramos las aplicaciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ actuando la colección $\{U_\alpha\}$ de abiertos en $\mathcal{T}$, que son en particular subconjuntos de M, y veamos que satisfacen las 5 propiedades del lema

I) $\forall \alpha$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T} &\longrightarrow \varphi(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \{0\} \times (a,b) &\longmapsto (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \times (a,b) \\ (a,b) \times \{0\} &\longmapsto (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (a,b) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número muy pequeño fijado.



Es una biyección por ser suprayectiva, ya que todo $\varphi(U_{a,b})$ tiene antiimagen y es inyectiva.

II) Notación: llamamos a los abiertos con coordenada y nula: $U_x = (a,b) \times \{0\}$

Y a los de la forma $U_y = \{0\} \times (a,b)$

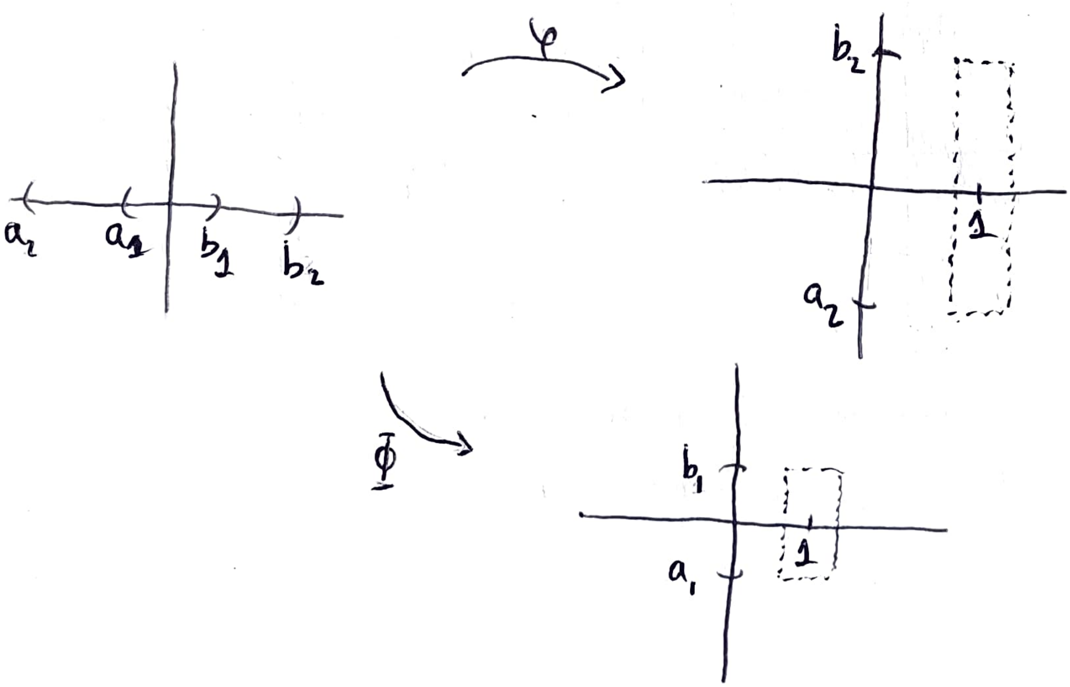
Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ por ser $\mathcal{T}$ una topología sobre M, la intersección finita de abiertos es un abierto, luego

$U_\alpha \cap U_\beta = U_x$ o bien $U_\alpha \cap U_\beta = U_y$.

Por cómo hemos definido la aplicación φ, $\varphi(U_x)$ $(\varphi(U_y))$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

(III) Sean (U_x, φ), (V_x, Φ) dos cartas que se intersecan $U_x \cap V_x \neq \emptyset$

En el caso en que fueren (U_y, φ), (V_y, Φ) las cartas intersecadas, se procedería de manera análoga.



$\nearrow \varphi \circ \Phi^{-1}$

Veamos que el cambio de coordenadas es diferenciable y tiene dominio $U_x \cap V_y = (a_1, b_1) \times \{0\} \cap (a_2, b_2) \times \{0\} = (a_3, b_3) \times \{0\}$ siendo $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$ y $b_3 = \min\{b_1, b_2\}$

$$\varphi \circ \Phi^{-1}\Big|_{\Phi(U_x \cap V_x)} \Big((1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (a_3, b_3)\Big) =$$

$$= \varphi\big((a_3 \times b_3) \times \{0\}\big) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (a_3, b_3)$$

$\Rightarrow$ $\varphi \circ \Phi^{-1}$ es la identidad sobre $U_x \cap V_x$ y por tanto diferenciable.

(IV) Veamos que existe un número contable de abiertos cubriendo M. Tomando los abiertos del conjunto:

$$\{(a,b) \times \{0\} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\} \cup$$

$$\{\{0\} \times (a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

Obtenemos un número contable de abiertos cubriendo M.

v) Finalmente vemos que si $p, q \in M$ son puntos de M con $p \neq q$ entonces podemos encontrar abiertos U_p y V_q disjuntos tales que $p \in U_p$ y $q \in V_q$, es decir se verifica H2.

Si p, q pertenecen a la misma recta (horizontal o vertical) puesto que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ siendo $\mathcal{T}_u$ la topología usual es Hausdorff, ya estaría ✓

Si p, q pertenecen a rectas distintas, siempre podemos encontrar entornos suficientemente pequeños que no intersequen

Lema 1.35

$\Rightarrow (M, \varphi_\alpha)$ es variedad diferenciable 2-dim. $\square$