ABSTRACT

Buenos dias, soy Lorena Escribano Huesca y en esta presentación voy a exponer mi trabajo de fin de grado sobre las integrales de Borwein.

We will begin this presentation with a historical overview.

Borwein integrals were first presented by mathematicians David and Jonathan Borwein, father and son respectively, in two thousand and one.

The Borweins described an astonishing fact using these integrals that caught the attention of many mathematical readers.

As we can see in the picture, this series of integrals results in pai over two up to the eighth iteration, where the sequence breaks down.
As we can see, this sequence of integrals results in pai over two, and this pattern continues until the seventh iteration. At the next step the obvious pattern fails.

So, the objective of this work, is to provide a clear and rigorous proof of what changes fundamentally when the sequence breaks down, so that we can understand the behaviour of Borwein integrals.

To achieve this, we will follow this structure.
First of all, we will introduce fundamental concepts of measure theory and results of mathematical analysis. We will also study the notion of convolution and Fourier transform and we will finish this chapter by developing the inversion theorem and all the results that arise from it.

Secondly, we will give an introduction to borwein integrals and the definition of the cardinal sine function.

The third chapter is devoted to the proof of the theorem that explains the behaviour of Borwein integrals, which, as we can guess, will be the main theorem of this work.

Finally in the last chapter, we will visualise an example that reflects the idea followed in the main theorem, providing a graphical representation that helps the understanding of this complex subject.

So we start by recalling some concepts of measure theory. A measure space is a triple consisting of a set, a sigma algebra and a measure. In addition, we will say that a measure space is finite, if the set measure is a finite real number.

We will use fubini's theorem recurrently throughout the paper. this theorem assures us that given a measurable and integrable function we can interchange the integration variables of a multiple integral.

At this point we introduce also the definition of convolution of two functions, which is the binary operation on L1 defined by this expression given on the screen.

I would also like to highlight this result which ensures that if we perform the convolution of two functions that are both L1, then the value of the integral that you can see on screen is finite for almost all x.
In adittion, for these points we can define a third function as the convolution of f and g. And it turns out that this new funcion is L1 and that this inequality holds for the norms.

We also give the definitions of the Fourier transform and the cosine Fourier transform of a funcion f in L1.

And, in relation to the fourier transform, we mention the theorem shown, which is a very strong result since it states that the Fourier transform converts convolutions to pointwise products.

We also mention the inversion theorem, which allows us to find the initial function from its fourier transform.

As a consequence of this strong result, we obtain the formula of the area, which consists of evaluating the inverse fourier transform in 0, and the parseval theorem which give us this relation between two L1 functions f and g and their respective fourier transforms.

Cambiamos ahora al español, y pasamos a establecer la fórmula general de las integrales de Borwein. Para ello será necesario considerar una sucesión de números reales positivos a la denotaremos por a sub n, y a partir de ésta se definirán las integrales de Borwein como la sucesión de funciones consistente en integrar el productos de n+1 senos cardinales.

Como hemos visto, las integrales de Borwein utilizan productos de senos cardinales.
Así pues, para comprender mejor la definición de estas integrales vamos a dar la definición de la funcion seno cardinal, que se define como el seno de x dividido por x cuando x es distinto de 0 y cuando x es igual a 0, se redefine específicamente como igual a 1 para mantener la continuidad.
Es por este motivo que en esta sección demostramos geográficamente que el limite del seno cardinal cuando x tiende a 0 vale 1.

Por otro lado, durante la prueba del teorema central, será tambien necesario conocer el valor de la integral del seno cardinal en el intervalo 0 infinito. Como esta integral no tiene primitiva elemental, se hace uso del teorema de los residuos de Cauchy, para calcular su valor. Este teorema proporciona el valor de la integral de una función f sobre un ciclo cerrado gamma en función del índice del ciclo cerrado alrededor de un polo o una singularidad esencial de f y del residuo de f en dicha singularidad aislada.

Para poder llevar un seguimiento de la prueba del teorema principal, será esencial conocer y entender la definición de las funciones rectangulares. Estas se definen a partir de un numero positivo a como una función definida a trozos. Será idénticamente nula cuando el valor absoluto de x es mayor que a, vale ½ cuando el valor absoluto de x es igual a a y vale 1 cuando el valor absoluto de x es menor que a.

Llegado este punto, ya disponemos de todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema que explica el curioso comportamiento de las integrales de Borwein.

El enunciado de este teorema afirma que dada una sucesión de números reales positivos a_n, denotando por s_n a la suma de los n primeros términos de la sucesión sin incluir/contar el primer termino a_0, la integral de Borwein vale exactamente el inverso del primer termino de la sucesión a_ 0 multiplicado por pi medios cuando o bien n=0 o bien n es mayor o igual a 1 y además la suma s_n es menor o igual que a_0.
Y que la integral de Borwein es menor estricta que el inverso del primer termino de la sucesión a_ 0 multiplicado por pi medios en caso contrario.

Este teorema afirma también que el n+1 esimo termino de las integrales de Borwein es menor que el n esimo termino cuando a_0 es menor que s_n.

A continuación vamos a dar las ideas más significativas que se siguen durante la demostración del primer apartado del teorema principal.
En primer lugar se estudia el caso en que n vale 0. Como hemos visto previamente, el teorema de los residuos nos permite calcular el valor de la integral del seno cardinal, dando como resultado pi medios.
Teniendo en cuenta este hecho, vemos que haciendo un cambio de variable lineal sobre la expresión de tau _0 se obtiene el resultado.

En el caso de que n sea mayor o igual que 1, se define la siguiente sucesión de funciones.
Se define F_0 como el inverso de a_ 0 por la raíz cuadrada de pi medios por la función rectangular en función de a $_0$, mientras que el termino general de la sucesión vendrá dado por la raíz cuadrada de 2 pi elevado a 1 menos n por la convolución de las n primeras funciones f_ n minusculas que definimos a la derecha de esta linea.
Me gustaria remarcar que a lo largo de la presentación me referiré a las funciones definidas a la derecha por f _n minúsculas y a las funciones definidas a la izquierda las llamaré simplemente Fn.

A continuación se prueba el termino F_ n viene dado por el inverso de la raiz cuadrada de 2 pi por F_n-1 convolucion con f_n minuscula. Esta identidad la usaremos con frecuencia durante la demostración.

Haciendo uso de los resultados vistos en los primeros capítulos del trabajo, se demuestra por inducción las siguientes premisas para todo n ≥ 1
1. Las funciones Fn son pares.
2. Las funciones Fn son idénticamente nulas fuera del intervalo (-s_n, s_n) y son estrictamente positivas en caso contrario.
3. Las funciones Fn son integrables
4. Y por último se demuestra que las funciones Fn son monónas no crecientes en el intervalo
(0, +∞).
Donde esta última afirmación se usará en la prueba del segundo apartado del teorema principal.

A continuación, se define la sucesión de funciones sigma_n como el producto de n senos cardinales. Nos disponemos a demostrar, por inducción, que la transformada de Fourier de las funciones F_n vienen dadas precisamente por las funciones recién definidas sigma_n.
Así para n = 1 se argumenta que la transformada de Fourier de F _1 viene dada por el seno cardinal evaluado en a _1 x que equivale precisamente al primer termino de la sucesión sigma _n.
Seguidamente se toma como hipótesis de inducción que la transformada de fourier de F_ n-1 es sigma _ n-1.

De esta manera, teniendo en cuenta la identidad demostrada al inicio que el termino F_ n viene dado por 1 entre la raiz cuadrada de 2 pi por F_n-1 convolucion con f_n minuscula y utilizando el teorema de convolución se llega a la igualdad deseada.

Demostramos tambien la relación inversa, es decir veamos que la transformada de Fourier de las funciones sigma _ n vienen dadas por las funciones F_ n. Para ello basta con aplicar el teorema de inversión y tener en cuenta la relación de transformadas que acabamos de probar, es decir, que la transformada de Fourier de las funciones F_n vienen dadas por las funciones sigma_ n,
Obteniendo así esta cadena de igualdades, donde en la última igualdad se ha tenido que realizar un cambio de variable lineal para llegar a la transformada de Fourier de sigma _n.

Así hemos conseguido demostrar que la transformada de Fourier de las funciones F_n vienen dadas por las funciones sigma_ n, y recíprocamente, que la transformada de Fourier de las funciones sigma_n vienen dadas por las funciones F_ n.
A continuación aclaramos que al ser tanto las F_n como las sigma_n funciones reales, esta relación también se cumple para la transformada de fourier coseno.
Llegado este punto, haciendo uso de la formula de Parseval, se llega a la identidad que vemos en pantalla.

Finalmente, para concluir con la prueba de este primer apartado, vamos a distinguir dos casos en función de si el mínimo es a_ 0 o si es s_n.

En el caso de que a0 sea mayor o igual que sn. Se tiene la siguiente cadena de igualdades, donde en la segunda identidad se utiliza que las funciones Fn se anulan a partir de s_ n y seguidamente que las F_n son la transformada de fourier de las sigma_n. Por último, haciendo uso de la fómula del area podemos concluir que se tiene el resultado deseado.

En el caso de que no se den las condiciones del enunciado, y sea a0 < sn, al ser las funciones F_n estrictamente positivas en el intervalo (-s_n, s_n) deducimos que la integral de borwein es estrictamente menor que el inverso de a_0 por pi medios como queríamos probar.

Para concluir, utilizaremos este primer apartado para explicar la rotura tan brusca que sufre la escalera de integrales que da portada a este trabajo.

Para ello aplicamos este primer apartado a la sucesión de los inversos de los números impares.
De este modo, evaluando dicha sucesión en n igual a 0, obtenemos que el primer termino vale 1
Seguidamente se calculan las sumas de los primeros inversos de numeros impares sin incluir /contar el termino a_ 0, obteniendo que la suma de los 6 primeros términos de la sucesion es menor que 1, pero a partir de ésta, el resto de las sumas de los primeros terminos de la sucesion siempre van a ser estrictamente mayor que 1.
En efecto, observamos que al añadir el termino un quinceavo, la suma pasa a valer mas de 1.
Este hecho es esencialmente el motivo de la rotura tan brusca de la armoniosa regularidad que parecían seguir estas integrales de Borwein.

Como podemos ver, las 7 primeras iteraciones dan como resultado pi medios mientras que en la octava iteración de esta sucesion de integrales se rompe esta armonía.

Pasamos ahora a demostrar la segunda parte del teorema. Antes de comenzar las ideas fundamentales que se han seguido durante este apartado, me gustaría aclarar que se utilizara la siguiente notación para integrales con el objetivo de evitar confusiones con los límites de integración.
Mediante una serie de cálculos, se llega a una expresión para la integral de F_n+1, dada por el inverso de dos veces a _n+1 multiplicado por la suma de dos integrales dobles a las que hemos denotado por I_1 e I_2 mas la integral de F_n
Para el calculo de la integral I_1, se define la función g (y) y se argumenta que es una función impar. Luego, como consecuencia se tiene la integral I_1 es nula.
En lo que sigue, A partir de este momento se considera que la variable t es mayor o igual que a_ n+1.

Por otro lado, para el cálculo de la integral I_2, se realiza una serie de cambios de variable, llegando a la nueva expresión para I_2 que vemos en pantalla.

Es en este punto cuando utilizamos que la sucesion de funciones F_n es monotona no creciente en el intervalo positivo 0 infinito. Como estamos trabajando con t mayor que a_n+1 y la variable y se mueve en el intervalo 0, a_ n+1 deducimos que estamos integrando la funcion F _n evaluada en u

+y - la funcion F_n evaluada en u, sobre un intervalo positivo, por lo tanto este valor es negativo y de aquí deducimos que la integral I_2 es negativa.

En definitiva, hemos demostrado que la integral de F_ n+1 es menor o igual que la de F_ n.

Y finalmente, teniendo en cuenta que estamos tomando como hipótesis que a_ 0 es menor que s_ n de la identidad demostrada en el primer apartado se deduce trivialmente que el termino n+1-esimo de las integrales de Borwein es menor o igual que el termino n-esimo y a su vez este es menor que el inverso de a_ 0 multiplicado por pi medios, como consecuencia del primer apartadopor estar tomando a_ 0 menor que s_n.
De modo que hemos conseguido argumentar la cadena de desigualdades que queríamos probar en un inicio.

En esta última seccion queremos mostrar gráficamente, sin entrar en los detalles, un ejemplo en el que queda reflejada la idea que se sigue en el teorema principal.
Para ello hemos reproducido el artículo Two curious integrals and a graphic proof para ver el efecto que tiene convolucionar iteradamente una función rectangular, que denotaremos por F0, con otra función rectangular a la que llamaremos G.
Definimos la función G como la función rectangular de base ½ y altura 2 y la funcion retangular F_0 de base 1 y altura 1. En los dibujos podemos apreciar que la funcion G es el doble de alta que la F_ 0 pero ambas tienen area unitaria.

La funcion F_ 0 sera el primer termino de nuestra sucesion, que sera formada convolucionando iterativamente con G. De este manera, el termino general de la sucesion vendrá dado por la convolucion de F_ 0 con n veces G.
 Utilizando un razonamiento analogo al utilizado durante la prueba, podemos asegurar que la funcion F_ n tiene una anchura de ½ mas n veces ¼, y la meseta de la funcion F_n se erosiona cuando esta suma llega a ser mayor que la anchura de F0, que es 1.

Como puede verse, la convolución iterada con la funcion G es un 'proceso erosivo', en el que cada iteración reduce la anchura de la meseta a la altura de 1, hasta hacerla un único punto en tan solo dos iteraciones, pues como podemos observar, en F_2 ya no hay una meseta con una parte plana superior, sino que pasa a ser una montaña).

Además notamos que a partir de F_3, la función ya ni siquiera alcanza esta altura.

Hacemos ahora una recapitulación de lo que se ha conseguido en este trabajo, por un lado […]

Finalmente mostramos la bibliografía utilizada para realizar este trabajo y con esto habríamos llegado al final de esta presentación. Muchas gracias por su atención.