Cálculo Numérico de 1 variable. Curso 2019-2020.

PRÁCTICA 3: INTERPOLACIÓN

1. Introducción El objetivo de esta tercera práctica es trabajar la interpolación polinomial y el estudio del error cometido. En esta práctica se utilizarán las siguientes M-funciones:

- diferencias_divididas.m: Algoritmo para hallar las diferencias divididas de una función, dados $n+1$ nodos y los valores de la función en dichos nodos.
- polinomio_interpolador_Newton.m: Algoritmo para hallar el polinomio interpolador para todos los nodos en la forma de Newton. El polinomio interpolador se escribe en la forma de Horner.
- coef_polinomio_interpolador: Algoritmo que describe el polinomio interpolador en la forma normal (coeficientes de las potencias de x). $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$

2. Ejercicios

1. Lee los ficheros `diferencias_divididas.m`, `polinomio_interpolador_Newton.m` y `coef_polinomio_interpolador.m` deduce que hace cada uno de ellos. Compara con la función `polyfit(x,y,n)`.

2. Complete la siguiente tabla de diferencias divididas:

x	$f[.]$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
0.3	0.97741			
		......		
0.37	0.96557		......	
		......		-0.012790239
0.41	0.95766		......	
		......		
0.52	0.93157			

   (a) Evalúe en 0.47 el polinomio $P_3(x)$ de grado ≤ 3 que interpola a $f(x)$ en los puntos de la tabla anterior. Compare con el valor correctamente redondeado: $f(0.47) = 0.94423$.

   (b) Añada al final de la tabla del apartado (a) un nuevo punto $x = 0.47$ con el valor $f(0.47) = 0.94423$. Determine el polinomio $P_4(x)$ que interpola a $f(x)$ en esta nueva tabla ampliada mediante una sencilla modificación de $P_3(x)$. ¿Serían los cálculos tan sencillos si el nuevo dato se añadiese en el lugar que le correspondiera en la tabla?.

3. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ definida en el intervalo $[-5, 5]$.

   a) Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de $f(x)$ de grado n para puntos equiespaciados del intervalo $[-5, 5]$ incluyendo los extremos. Por medio de las diferencias dividas de Newton, encontrar $P_n(x)$ para $n = 2, 5, 15$ y 20. Dibujar, superpuestos, los gráficos de $f(x)$ y todos esos polinomios.

b) Calcular $\max_{-5\leq x\leq 5}|f(x)-P_n(x)|$, de manera aproximada, y estudiar su dependencia de n.

c) Comprobar experimentalmente que para ciertos x se tiene $\lim_{n\to\infty} P_n(x) \neq f(x)$.

d) La función $\pi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ está relacionada con esos errores. Dibujar los gráficos de las π_n's para $n = 2, 5, 15$ y 20.

Este ejemplo se conoce como *fenómeno de Runge*

4. Se consideran ahora los nodos de interpolación $x_0, x_1, \dots, x_n$ dados por

$$x_k = 5\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad \text{para} \quad k = 0, 1\dots, n$$

(los nodos de Chebychev)

a) Repetir el apartado a) del ejercicio anterior en este caso.

b) Para $n = 2, 5, 15$ y 20, comparar gráficamente el π_n que se obtiene en esta situación con el π_n para nodos equiespaciados.

5. **Ejercicio voluntario** Hacer un estudio análogo para la función $f(x) = |x|$ definida en el intervalo $[-1, 1]$.

3. Fecha de entrega y presentación de la práctica La fecha de entrega será el martes 29 de octubre en la clase de teoría. Deberá presentarse individualmente un guión (impreso) de la práctica, que incluya el código, los estudios teóricos, resultados y comentarios que se consideren oportunos.