Práctica computacional (30/11/2022):

Lorena Escribano Huesca

4 de Diciembre del 2022

- **Convección de Rayleigh-Bénard.**

  Es un tipo de convección natural que ocurre en un plano horizontal de fluido cuando se calienta por debajo y desarrolla un patrón de celdas de convección denominadas celdas de Bérnard. **Flotabilidad**, y por lo tanto **gravedad**, son los responsables de estas celdas de convección. El movimiento inicial se debe a la subida de fluido de menor densidad desde el fondo debido a su mayor temperatura. Esta subida se organiza de forma espontanea en estos patrones. La cantidad adimensional que caracteriza el fenómeno se denomina **número de Rayleigh** y se representa por **Ra**. A partir de un valor crítico de Ra, conforme aumenta Ra se generán la celdas de convección, ver entrada en Wikipedia para mayor información por ejemplo.

- **Datos concretos adimensionales.**

  Suponemos un fluido 2d confinado en un rectángulo de dimensiones [0,5] $\times$ [0,1], que es calentado en el segmento base [0,5] $\times$ $\{y = 0\}$ a una temperatura constante T = 1 mientras que en el segmento superior [0,5] $\times$ $\{y = 1\}$ se mantiene a una temperatura T = 0, en las paredes verticales ∂_nT = 0. La velocidad se mantiene constante (u,v) = (0,0) en toda la frontera del rectángulo.

- **Ecuaciones**.

  El modelo que vamos a estudiar contiene las ecuaciones de Navier-Stokes para la velocidad **u** = (u,v)'((u,v)' es traspuesta) acopladas con la ecuación del transporte para la temperatura en la habitación

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + u \cdot \nabla \mathbf{u} - v \triangle \mathbf{u} + \nabla p = (0, -RaT)' \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - v \triangle T = 0, \\ +C.C \end{aligned}$$

  donde vamos a tomar v = 1 y con datos iniciales **u** = (0,0)' y T^0 = 0. Además de la velocidad y de la presión vamos a calcular las **líneas de corriente** que vienen dadas por la función Ψ que cumple $\overrightarrow{rot}$ = **u** o bien

$$\triangle \Psi = \mathbf{rot} \times \mathbf{u}$$

  con Ψ = 0 en todo el contorno, ver el manual de FreeFem++.

- **Cálculo:** Usar un valor de $h = 1/8$, esto es, 8 puntos cada unidad de longitud y paso de tiempo $dt = 0.01$ y con estos datos calcular hasta el tiempo T= 1.

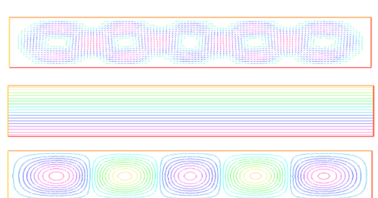

Figura 1: Campo de velocidades, temperatura y función de corriente para Ra crítico

Entregar el código y responder por escrito en este folio a las siguientes preguntas cortas:

1. Determinar una aproximación al valor crítico de Ra a partir del que se forma la convección en tiempo $T = 1$. Usa valores de la forma Ra = 500,600,... hasta que obtengas los patrones que muestra la Figura 1.

   Con $Ra \approx 2200$ ya se observa la formación de 2 celdas convectivas

   Con $Ra \approx 2900$ obtenemos los patrones que muestra la Figura 1.

2. Para Ra = 3600 se forman 6 celdas convectivas y para Ra = 14400 se forman $\approx$ 7 celdas convectivas.

Revisando el manual de FreeFem++ responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la dimensión de los espacios lineales que estas usando?

   Estamos tomando las soluciones sobre el espacio $fespace\ Vh(Th, P2)$ que define V_h como el espacio de las funciones continuas que son cuadráticamente afines a (x, y) en cada triángulo de la triangulación Th. Puesto que V_h es un espacio lineal de dimensión finita, podemos encontrar una base. La base canónica se construye a partir de las llamadas *funciones sombrero* ϕ_i, que son continuas a trozos e igual a 1 en un vértice y 0 en el resto.

   Por tanto si u es una función de elementos finitos, y $u[]$ proporciona el array de valores asociados ($u[] = (u_i)_{i=0,\dots,M-1}$) tenemos que:

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{M-1} u[][i]\phi_i(x,y)$$

   donde ϕ_i $i = 0, ..., M-1$ son las *funciones sombrero*, que como hemos dicho antes, forman una base de V_h y M es el grado de libertad, es decir, la dimensión del espacio V_h. Con el comando $V_h.ndop$ podemos obtener la dimensión del espacio lineal sobre el que estamos trabajando: 1485

2. ¿Cuál es la talla de los sistemas lineales que estas resolviendo en cada paso?

   Planteamos el problema variacional sobre el espacio de elementos finitos obtenido de la partición del dominio. Esto da lugar a un sistema con un número de ecuaciones finito, aunque en general con un número elevado de ecuaciones incógnitas. El número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido y, en general, cuanto mayor sea dicha dimensión tanto mejor será la aproximación numérica obtenida. Por lo tanto la talla de los sistemas lineales que estamos resolviendo es de nuevo 1485.

3. ¿Qué resolutor lineal estás usando?

   UMFPACK, es un método directo que permite manejar cualquier tipo de matriz mediante una factorización.

4. ¿Cómo puedes conseguir una visualización de las gráficas cada 10 iteraciones?

   Dentro del bucle final del código, para visualizar las gráficas cada 10 iteraciones, podemos hacer un if de manera que únicamente cuando $i \in (0, Tmax)$ sea múltiplo de 10, que en el código se escribiría $(i\,\%10 == 0)$ se hace un plot de las funciones.

5. ¿Qué significado tiene la función corriente?

   Las lineas de corriente vienen dadas por la función ψ que cumple $\vec{rot}(\psi) = u$, o bien $\triangle\Psi = \mathbf{rot} \times \mathbf{u}$ que son las ecuaciones que se plantean en el programa. Las corrientes de convección son el resultado de un calentamiento por gradientes de temperatura. Los materiales cálidos son más ligeros, por lo que suben, mientras que los materiales fríos son más pesados (más densos) y por lo tanto se hunden, provocando la formación de las llamadas celdas de Bénard.