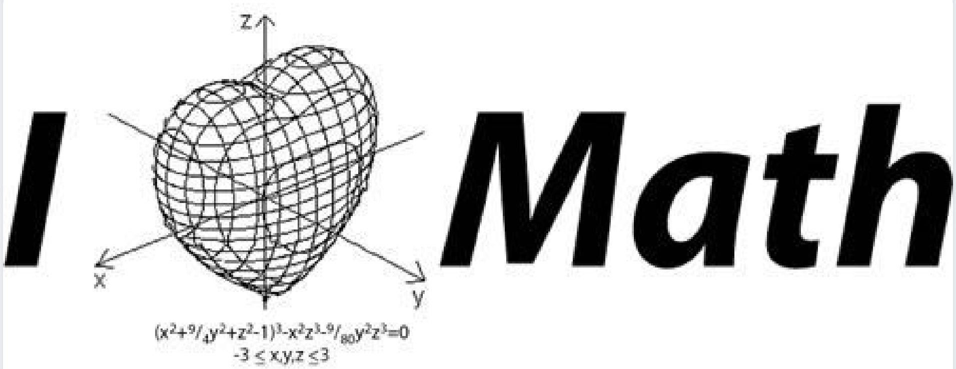
# *El curioso caso de las integrales de Borwein*

Publicado por ^DiAmOnD^ | 21 septiembre, 2015 | Cálculo, Curiosidades | 7 |




En matemáticas, muchas veces intentamos encontrar reglas generales a partir de ciertos valores que poseemos o de ciertos resultados que obtenemos. En unas ocasiones «acertamos», refrendando nuestro «acierto» con una demostración (recordad: una creencia no es una demostración), pero en otras fallamos estrepitosamente (recordad: la intuición puede jugarnos una mala pasada). La cuestión que nos ocupa podría encuadrarse en este último caso: se trata de **las integrales de Borwein**.

Vamos a ver de qué va todo esto. En lo que sigue vamos a tratar con la función $\frac{sen(x)}{x}$, para $x \neq 0$, definiéndola como $1$ para $x = 0$ si fuera necesario. Lo primero que queremos hacer es calcular la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \, dx$$

Se trata, como veis, de una integral impropia. Podéis intentar resolverla con las técnicas habituales de cálculo de integrales, **pero no podréis**. Y la razón es muy sencilla: **la función con la que estamos tratando no tiene primitiva elemental**. El caso es que con análisis complejo sí que se puede calcular su valor. En este caso obtendríamos que

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Multipliquemos la función por $\frac{sen(x/3)}{x/3}$ y calculemos su integral. Aquí os voy a dar directamente el resultado. Es:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Mismo resultado que la anterior, curioso. ¿Y si multiplicamos la anterior por $\frac{sen(x/5)}{x/5}$? Pues obtenemos esto:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \frac{sen(x/5)}{x/5} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

De nuevo el mismo resultado. ¿Y a que no imagináis qué ocurrirá si multiplicamos la función anterior por $\frac{sen(x/7)}{x/7}$ y calculamos la integral? Pues aquí lo tenéis:

7



## SUSCRÍBETE POR MAIL

Si quieres recibir los artículos de Gaussianos en tu mail haz click en la imagen.

## FOROGAUSS

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \frac{sen(x/5)}{x/5} \cdot \frac{sen(x/7)}{x/7} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

También $\pi/2$, inquietante...

¿Qué pasaría si metemos la función correspondiente al 9? Lo esperado:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(x/9)}{x/9} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

¿Y si metemos la del 11? Ahí va:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(x/11)}{x/11} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

¿Y añadiendo la del 13? Exacto:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(x/13)}{x/13} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

¿E incluyendo la del 15? Pues...

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(x/13)}{x/13} \cdot \frac{sen(x/15)}{x/15} \, dx = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi$$

valor que es algo menor que $\pi/2$ (aproximadamente $2 \cdot 10^{-11}$).

Esto...¿?¿?¿?¿?¿? ¿Qué ha ocurrido? **¿De dónde viene esta rotura tan brusca de la armoniosa regularidad que parecían seguir estas integrales?**

Como es evidente, éstas son las conocidas como **integrales de Borwein**. En 2001, **David** y **Jonathan Borwein** (padre e hijo respectivamente) publicaron **Some remarkable properties of sinc and related integrals** en *The Ramanujan Journal*. En dicho trabajo estudiaban estas integrales y, entre otras cosas, descubrían esta curiosa propiedad. Concretamente **demostraban que las citadas integrales tenían como resultado $\pi/2$ mientras la suma de los valores que**

7

Si tienes alguna duda, pregunta o sugerencia visita **ForoGauss**, nuestro foro (click en la imagen). Seguro que alguien te podrá ayudar

FORO GAUSS

## ÚLTIMAS ENTRADAS

(Lo que yo considero) Lo mejor de 2022 en Gaussianos

¡¡Felices Fiestas y Feliz Año Harshad 2023!!

Desafíos Matemáticos en El País – Desafío Extraordinario de Navidad 2022 – ¿Se queda su décimo o me lo cambia?

¿Cuántos pentágonos tiene un balón de fútbol?

¿Cuándo coinciden el área

**multiplican a $x$ (exceptuando el primero, 1) fuera inferior a 1**. Efectivamente, se tiene que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}=0.95513375\ldots<1$$

pero

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}=1.02180042\ldots>1$$

Por eso al añadir la fracción correspondiente al 15 la integral deja de valer $\pi/2$.

Decía hace un momento que en su trabajo los Borwein descubrieron esa propiedad *entre otras cosas*. Con *otras cosas* me refería al descubrimiento de una propiedad del estilo para unas integrales del estilo a las anteriores. Concretamente para las integrales que se obtienen de las comentadas anteriormente al multiplicar las funciones por $cos(x)$. Se tiene lo siguiente:

$$\int_0^\infty cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x/3)}{x/3}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x/3)}{x/3}\cdot\frac{sen(x/5)}{x/5}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

Y así sucesivamente hasta

$$\int_0^\infty cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x/3)}{x/3}\cdot\ldots\cdot\frac{sen(x/111)}{x/111}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

Peeeeeeero

$$\int_0^\infty cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x/3)}{x/3}\cdot\ldots\cdot\frac{sen(x/113)}{x/113}\,dx<\frac{\pi}{4}$$

**Lo que demostraron en este caso es que las integrales daban como resultado $\pi/4$ mientras**

7

y el perímetro de un triángulo?

## ÚLTIMOS COMENTARIOS

ElNúmeroPi en ¡¡Felices Fiestas y Feliz Año Harshad 2023!!

Javier en Demostración topológica de la infinitud de los números primos

Robín García en Desafíos Matemáticos en El País – Desafío Extraordinario de Navidad 2022 – ¿Se queda su décimo o me lo cambia?

Robín García en Desafíos Matemáticos en El País – Desafío Extraordinario de Navidad 2022 – ¿Se queda su décimo o me lo cambia?

Jesús en ¿Cuál es la raíz cuadrada de 16?

## GAUSSIANOS EN FACEBOOK

**los valores que multiplican a x (también exceptuando el 1, como antes) sumen menos de 2**. Y tenemos que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{111}=1.99443750\ldots<2$$

pero

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{111}+\frac{1}{113}=2.00328705\ldots>2$$

En realidad, en el paper de los Borwein enlazado antes no aparece este segundo problema en la forma descrita aquí, pero sí en una forma parecida. En dicho paper tenéis demostraciones de ambos resultados. La manera en la que aquí se describe el caso del segundo tipo de integrales está sacado del trabajo **Two curious integrals and a graphic proof**, de **Hanspeter Schmid**, donde también podréis encontrar demostraciones de los dos resultados comentados aquí.

---

Por cosas como éstas, y por muchas otras, es por lo que amo a las matemáticas. Por eso la imagen que encabeza este post, y por eso también artículos cómo éste.

---

Escribir un artículo sobre las integrales de Borwein estaba *en cartera* hace tiempo, pero me lo recordó esta publicación en *The Math Kid*. Si os ha interesado el tema, podéis echarle un ojo a otros papers que he encontrado cuya temática está relacionada con todo esto:

- **Fun with very large numbers**, de *Robert Baillie*.
- **Surprising sinc sums and integrals**, de *Robert Baillie, David Borwein* y *Jonathan Borwein*.

- **More remarkable sinc integrals and sums**, de *Gert Almkvist* y *Jan Gustavsson*.

---

Esta entrada participa en la Edición 6.6: números vampiro del Carnaval de Matemáticas, cuyo anfitrión es el blog Scire Science.



< ANTERIOR

[Vídeo] Diez de las más grandes «cagadas matemáticas» en series y películas

SIGUIENTE >

Un jugador con la misma altura

7

SOBRE EL AUTOR

Rafailillo
El último verso de Fermat
God Plays Dice
Guirnalda Matemática
John D. Cook
Juegos Topológicos
Los matemáticos no son gente seria
Matemáticas Cercanas
Matemáticas y sus fronteras
Mathblogging
Microsiervos
RSME
Sobre todo, Matemáticas
Soy Matemáticas
Tanya Khovanova's Math Blog
Tío Petros
Tito Eliatron Dixit
Topología I

***^DiAmOnD^***

Miguel Ángel Morales Medina. Licenciado en Matemáticas y autor de Gaussianos y de El Aleph. Puedes seguirme en Twitter o indicar que te gusta mi página de Facebook. También tengo un blog dedicado a las "escape rooms", por si te apetece pasarte: XRooMers.

***ARTÍCULOS RELACIONADOS***

***Curvatura de una función de una variable***
21/05/2007

***Los reyes de la prueba de números de «Cifras y Letras»***
06/05/2013

***El amor y las Matemáticas***
16/08/2006

***El final de la historia sobre la naturaleza de M67***
31/03/2011

Puedes utilizar código LaTeX para insertar fórmulas en los comentarios.
Sólo tienes que escribir
[latex]código-latex-que-quieras-insertar[/latex]
o
$latex código-latex-que-quieras-insertar$.

Si tienes alguna duda sobre cómo escribir algún símbolo puede ayudarte la Wikipedia.

Y si los símbolos < y > te dan problemas al escribir en LaTeX, te recomiendo que uses los códigos html **& lt;** y **& gt;** (sin los espacios)

***YO CONSTRUÍ EL POLIEDRO DE CSÁSZÁR***

Únete a la iniciativa **Yo construí el poliedro de Császár**. Haz click en la imagen para conocer todo los detalles.


Y visita este set de Flickr para ver las construcciones de los lectores de Gaussianos.

***XROOMERS***

Visita XRooMers, nuestro nuevo blog sobre *escape rooms*.


En él encontrarás

respectivamente.

reseñas e información sobre los juegos de escape que hemos realizado y podrás dar tu opinión sobre ellos y tus propias sugerencias.

Y no te pierdas nuestra clasificación: The XRanking.

Suscríbete

Únete a la conversación

Notify me of followup comments via e-mail

Este sitio usa Akismet para reducir el spam. Aprende cómo se procesan los datos de tus comentarios.

7 COMMENTS más antiguo

Bitacoras.com

21/09/2015 12:10

**Información Bitacoras.com**

Valora en Bitacoras.com: En matemáticas, muchas veces intentamos encontrar reglas generales a partir de ciertos valores que poseemos o de ciertos resultados que obtenemos. En unas ocasiones "acertamos", refrendando nuestro "acierto" con una ...

0 Responde

Jesus

21/09/2015 14:00

Muy curioso !!

Supongo que :

$$\int_0^\infty cos(x) \cdot \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(x/113)}{x/113} dx < \frac{\pi}{4}$$

Muchas gracias por tu labor de divulgación y por traernos entradas tan interesantes !

7

0 Responde

gaussianos Admin

Reply to *Jesus* 21/09/2015 17:42

Cierto **Jesús**, ya está arreglado.

Y gracias a ti por tu comentario :).

+ 0 – Responde

Alfonso FR

Reply to *gaussianos* 24/09/2015 19:50

Según el artículo de Borwein & Borwein, el ejemplo de ruptura de la regularidad no se refiere a la función «seno», tal como aparece representado, sino a la función «seno cardinal» (sinc), es decir, asumiendo que está desnormalizada: sinc(c)=sin(x)/x. Viene a ser lo mismo, pero la nomenclatura me ha parecido interesante. Más detalles en:
http://mathworld.wolfram.com/SincFunction.html
https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_sinc

+ 0 – Responde

Gonzalo

21/09/2015 20:44

Además de curioso, un buen trabajo. Leeré la bibliografía en cuanto pueda.

+ 0 – Responde

gaussianos Admin

Reply to *Gonzalo* 24/09/2015 02:50

Hazlo, es muy interesante :).

+ 0 – Responde

7

Juan

21/09/2015 20:52

Es en serio genial. Hay varias cosas que me gustan de esta historia. Lo primero es, evidentemente, lo interesante que resulta este comportamiento. Me sorprende que se haya podido establecer la regularidad necesaria considerando que la integral no tiene primitiva. Brillante. Lo segundo es lo admirable que es el trabajo padre e hijo por el bien de la ciencia. Soy padre de un bebé y sería un sueño dedicarnos juntos al desarrollo de la matemática. Es la primera vez que opino en este portal pero sigo vuestro trabajo desde hace tiempo. Agradezco que haya gente como ustedes que promueve una… Lee más »

+ 0 − Responde

GOB

23/09/2015 18:18

Qué genial, no conocía esta curiosidad y me parece fascinante!

+ 0 − Responde

## DEBATES RECIENTES

Ayuda para resolverlo, por favor por José Manuel

TERPERCAYA ☏ WA 0811 232 180 Biaya Plafon Pvc Masjid Gunungkaler, Kab. T por Biaya Plafon Pvc Masjid, Harga Plafon Grc Board 2022 2023 2024, Biaya Plafon Gypsum Minimalis Ruang Tamu, Biaya Plafon Gypsum Per Meter, Menghitung Biaya Plafon GRC, Harga Plafon Rumah Dari Terpal Plastik

¿Puede una transformada de Legendre equivaler a una evaluación retardada? por JM3

ALCANCE DE LAS DERIVADAS PARCIALES por JM3

7

Probabilidad porcentaje por Alejandro

## ENLACES

Aviso Legal

Política de privacidad

Política de cookies

Licencia CC-BY-NC-SA 3.0 ES

Logo y favicon creados por Alejandro Polanco

## PREMIOS CARNAMAT







## PUBLICIDAD