

Las integrales de Borwein

Trabajo de Fin de Grado

Lorena Escribano Huesca

Dirigido por **Luis J. Alías Linares** y **Luis Oncina Deltell**

Universidad de Murcia

Junio de 2023



① Abstract

② Previous results

Convolution

Fourier transform

The Inversion Theorem

③ Las integrales de Borwein

Definición de la integral de Borwein

El seno cardinal

④ Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein

La función rectangular

Teorema principal

⑤ Ejemplo visual

⑥ Conclusión

Some historical context of Borwein integrals.

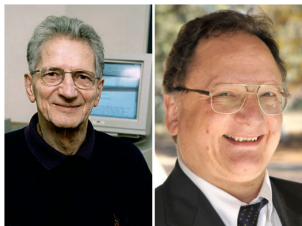


Figure: David and Jonathan M. Borwein.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi/2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx = \pi/2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx = \pi/2$$

This pattern continues up to

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/13)}{x/13} dx = \pi/2.$$

Nevertheless, at the next step the obvious pattern fails,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/15)}{x/15} dx = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000} \pi$$

Figure: A curious integral.

- ① Abstract
- ② Previous results
 - Convolution
 - Fourier transform
 - The Inversion Theorem
- ③ Borwein integrals
 - Definition of Borwein integrals
 - The cardinal sine
- ④ Study of the behaviour of Borwein integrals
 - The rectangular function
 - Main Theorem
- ⑤ Visual example
- ⑥ Conclusion

① Abstract

② Previous results

Convolution

Fourier transform

The Inversion Theorem

③ Las integrales de Borwein

Definición de la integral de Borwein

El seno cardinal

④ Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein

La función rectangular

Teorema principal

⑤ Ejemplo visual

⑥ Conclusión

Definition

A **measure space** is a triple (X, \mathcal{A}, μ) , where

- X is a set,
- \mathcal{A} is a **σ -algebra** on the set X ,
- μ is a **measure** defined on the σ -algebra of the **measurable space** (X, \mathcal{A}) .

The elements of the measurable space (X, \mathcal{A}) are called **measurable \mathcal{A} -sets** (or simply measurable sets).

Definition

A measure space (X, \mathcal{A}, μ) is called **finite** if $\mu(X)$ is a finite real number (rather than $+\infty$). A set in a measure space is said to have a **σ -finite measure** if it is a countable union of sets with finite measure.

The Fubini Theorem

Theorem

Let (X, Π, μ) and (Y, Σ, λ) be σ -finite measure spaces, and let f be an $(\Pi \times \Sigma)$ -measurable function on $X \times Y$. If $f(x, y) \in L^1(\mu \times \lambda)$, then $f_x \in L^1(\lambda)$ for almost all $x \in X$ and $f_y \in L^1(\mu)$ for almost all $y \in Y$; the functions

$$\varphi(x) := \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) := \int_X f_y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

are in $L^1(\mu)$ and $L^1(\lambda)$ respectively, and the following equality holds

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi(y) d\lambda.$$

Convolution of two functions

If we denote by μ the Lebesgue measure in \mathbb{R}^n , then we usually write $L^p(\mathbb{R}^n)$ instead of $L^p(\mu)$.

Definition

We will call **convolution of f and g** the binary operation on $L^1(\mathbb{R})$ defined by

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dy.$$

Main convolution theorem

Theorem

Suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| dy < +\infty,$$

for almost all x . For these x , define

$$h(x) := (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy.$$

Then $h \in L^1(\mathbb{R})$ and

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Definition

We define the **Fourier transform** of $f \in L^1(\mathbb{R})$ as the function:

$$\text{FT}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy.$$

We also define the **cosine Fourier transform** of $f \in L^1(\mathbb{R})$ as the real part of the Fourier transform of f , or equivalently,

$$\text{FCT}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(xy) dy. \quad (1)$$

Notation. We will use \hat{f} to refer to the Fourier transform of f , i.e. $\text{FT}(f)(x) = \hat{f}(x)$.

The convolution theorem

Theorem

Suppose $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ and define $h := f * g$, then

$$\hat{h}(x) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(x) \hat{g}(x).$$

Hence, the Fourier transform converts convolutions to pointwise products.

The Inversion Theorem

In the following, we give the statement of the inversion theorem, which will play a fundamental role in the proof of the main theorem.

Theorem

If $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, and if

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

then $g \in \mathcal{C}_0$ and $f(x) = g(x)$ almost everywhere.

Inversion theorem's consequences

We now state two results that are obtained from the inversion theorem.

Proposition (Area Formula)

Suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ with Fourier transform $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ then

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dx = f(0).$$

Theorem (Parseval's formula)

Suppose $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ are real functions with respective Fourier transforms $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx,$$

- ① Abstract
- ② Previous results
 - Convolution
 - Fourier transform
 - The Inversion Theorem
- ③ Las integrales de Borwein
 - Definición de la integral de Borwein
 - El seno cardinal
- ④ Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein
 - La función rectangular
 - Teorema principal
- ⑤ Ejemplo visual
- ⑥ Conclusión

Definición de la integral de Borwein

Definición

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos, definimos las **integrales de Borwein** como la sucesión de integrales

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \text{senc}(a_k x) dx,$$

donde la función $\text{senc}(x)$ es la llamada función seno cardinal.

Definición del seno cardinal

Como hemos visto, las integrales de Borwein utilizan productos de senos cardinales. Estos se definen como una función definida para $x \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\text{senc}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

teniendo en $x = 0$ una singularidad evitable, la cual generalmente se redefine específicamente como igual a 1 para mantener la continuidad. En esta sección, se demuestra geométricamente que cuando $x \rightarrow 0$, el seno cardinal tiende a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{senc}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Teorema (de los residuos de Cauchy)

Sea $f \in H(\Omega \setminus A)$ siendo A el conjunto formado por todos los polos o singularidades esenciales de f en Ω , denotaremos por a a sus elementos. Sea Γ un ciclo cerrado con imagen $\Gamma^* \subseteq \Omega \setminus A$ y $\Gamma \sim 0$ (resp. Ω). Entonces,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) I(a, \Gamma).$$

Mediante el teorema de los residuos de Cauchy conseguimos calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

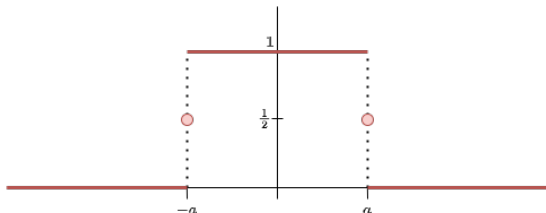
Outline

- 1 Abstract
- 2 Previous results
 - Convolution
 - Fourier transform
 - The Inversion Theorem
- 3 Las integrales de Borwein
 - Definición de la integral de Borwein
 - El seno cardinal
- 4 Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein
 - La función rectangular
 - Teorema principal
- 5 Ejemplo visual
- 6 Conclusión

La función rectangular

Para poder llevar un seguimiento de la prueba del teorema principal, será esencial conocer la definición de las siguientes funciones definidas a trozos. Dado un número real $a > 0$ se define,

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$



Enunciado del teorema principal

Teorema

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión de números positivos. Sea $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ y

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \operatorname{senc}(a_k x) dx.$$

i) Entonces

$$0 < \tau_n \leq \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2},$$

con igualdad si $n = 0$, o cuando $n \geq 1$ y $a_0 \geq s_n$.

ii) Si $a_{n+1} \leq a_0 < s_n$ con $n \geq 1$, entonces

$$0 < \tau_{n+1} \leq \tau_n < \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

A continuación damos las ideas más significativas que se siguen durante la demostración del primer apartado del teorema principal.

Distinguimos dos casos en función del valor de n .

- Para el caso $n = 0$, como hemos visto previamente, el teorema de los residuos de Cauchy, nos permite hallar el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Haciendo el cambio de variable $a_0 x = y \longrightarrow dx = \frac{1}{a_0} dy$, sobre la expresión de τ_n en $n = 0$ tenemos,

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \int_0^{+\infty} \operatorname{senc}(a_0 x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(a_0 x)}{a_0 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{1}{a_0} dy = \frac{1}{a_0} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} dy = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Y se tiene el resultado.

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

- Para el caso $n \geq 1$ se define la siguiente sucesión de funciones

$$F_0 := \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_0},$$

y si $n \geq 1$,

$$F_n := (\sqrt{2\pi})^{1-n} f_1 * f_2 * \cdots * f_n, \quad \text{donde } f_n := \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_n}.$$

Además, se demuestra la igualdad

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

Haciendo uso de los resultados vistos en el primer capítulo, se demuestra por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple

- ❶ Las funciones F_n así definidas son pares.
- ❷ Las funciones F_n verifican

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > s_n, \\ > 0 & \text{si } |x| < s_n. \end{cases}$$

- ❸ $F_n \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, las funciones F_n son integrables
- ❹ Las funciones F_n son monótonas no crecientes en el intervalo $(0, +\infty)$.

Se hará uso de esta última afirmación en la prueba del segundo apartado del teorema principal.

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

A continuación se define la sucesión de funciones

$$\sigma_n(x) := \prod_{k=1}^n \text{senc}(a_k x),$$

Nos disponemos a demostrar por inducción la relación

$$\hat{F}_n = \sigma_n.$$

Así para $n = 1$ se argumenta la igualdad

$$\hat{F}_1(x) = \text{senc}(a_1 x).$$

Seguidamente se toma como hipótesis de inducción

$$\hat{F}_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \text{senc}(a_k x) = \sigma_{n-1}(x) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

Haciendo uso de la igualdad $F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n$ argumentada al inicio de la demostración y del teorema de convolución se da la igualdad

$$\hat{F}_n(x) = \sigma_n(x).$$

Demostramos también la relación inversa, es decir,

$$\hat{\sigma}_n(x) = F_n(x).$$

Para ello basta con aplicar el teorema de inversión y tener en cuenta la relación $\hat{F}_n(x) = \sigma_n(x)$ recién demostrada, obtenemos así,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}_n(y) e^{ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n(y) e^{ixy} dy \\ &= \hat{\sigma}_n(x). \end{aligned}$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

Así pues hemos conseguido demostrar que $\hat{F}_n = \sigma_n$, y recíprocamente, $\hat{\sigma}_n = F_n$.

Por último, como tanto las funciones F_n como las funciones σ_n son reales, se da la misma relación para la transformada de Fourier coseno,

$$F_n \text{ es la FCT de } \sigma_n(x), \quad \text{y} \quad \sigma_n \text{ es la FCT de } F_n,$$

Llegado este punto, para demostrar la afirmación que se da en el enunciado, basta tener en cuenta que como consecuencia del [teorema de parseval](#) se da la igualdad

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(s_n, a_0)} F_n(x) dx.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

Y finalmente se estudian dos casos en función de cuál es el mínimo.

- Si $a_0 \geq s_n$. Utilizando que las funciones F_n son idénticamente nulas para $|x| > s_n$ y la identidad $F_n(x) = \hat{\sigma}_n(x)$ recién argumentada tenemos

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{s_n} F_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} F_n(x) dx \\ &= \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}_n(x) dx.\end{aligned}$$

Finalmente haciendo uso de la fórmula del área concluimos

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_n(0) = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2},$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

- Si $a_0 < s_n$. En este caso, se tiene

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_n(x) dx < \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{s_n} F_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

Con menor estricto al ser $F_n(x)$ positiva y continua en $x \in (0, s_n)$.

Para concluir, utilizaremos este primer apartado para explicar la rotura tan brusca que sufre la escalera de integrales que da portada a este trabajo.

Rotura de la armonía

En efecto si aplicamos este primer apartado a la sucesión de números positivos $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} = \left\{ \frac{1}{(2n+1)} \right\}_{n=0}^{+\infty}$ tenemos

$$a_0 = 1,$$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\vdots$$

$$s_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} < 1 = a_0.$$

Y sin embargo, cuando añadimos el término $\frac{1}{15}$

$$s_7 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > 1 = a_0.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del primer apartado

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=0), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=1), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=2), \\ &\vdots \\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \dots \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=6), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \dots \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{15}\right)}{\frac{x}{15}} dx &= \frac{\pi}{2} - 2.31 \times 10^{-11} & (n=7).\end{aligned}$$

Teorema principal: ideas de la prueba del segundo apartado

A lo largo de la prueba de este segundo apartado, se usará la notación

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b dx \int_{x=c}^d f(x, y) dy,$$

para evitar confusiones con los límites de integración y respectivas diferenciales de las variables de la función que se integra.

Mediante una serie de cálculos, se llega a una expresión para la integral de F_{n+1} ,

$$\int_0^t F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) + \int_0^t F_n(u) du,$$

donde hemos denotado por

$$I_1 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_{-y}^0 F_n(u) du, \text{ y } I_2 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u) du.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del segundo apartado

Para el cálculo de la integral I_1 , se define la función

$$g(y) := \int_{-y}^0 F_n(u) du,$$

y se argumenta que es una función impar.

Como consecuencia se tiene que el valor de I_1 es

$$I_1 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} g(y) dy = 0.$$

En lo que sigue, se trabaja con $t \geq a_{n+1}$.

Para el cálculo de la integral I_2 , mediante una serie de cambios de variable, se llega a una nueva expresión de I_2 dada por,

$$I_2 = \int_0^{a_{n+1}} dy \left[\int_{t-y}^t (F_n(u+y) - F_n(u)) du \right].$$

Teorema principal: ideas de la prueba del segundo apartado

En este punto utilizamos que la sucesión de funciones $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es monótona no creciente en el intervalo positivo $(0, +\infty)$.

Recordamos que estamos trabajando con $t \geq a_{n+1}$.

Además, la variable y se encuentra en el intervalo positivo $(0, a_{n+1})$.

Por tanto, en la expresión de I_2 , estamos integrado $F_n(u+y) - F_n(u)$ sobre el intervalo positivo $(t-y, t)$.

Consecuentemente se verifica,

$$I_2 = \int_0^{a_{n+1}} dy \left[\int_{t-y}^t (F_n(u+y) - F_n(u)) du \right] \leq 0.$$

Así, retomando la expresión de la integral de F_{n+1} , llegamos a que

$$\int_0^t F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) + \int_0^t F_n(u) du \leq \int_0^t F_n(x) dx.$$

Teorema principal: ideas de la prueba del segundo apartado

En el enunciado del teorema tomamos como hipótesis $a_{n+1} \leq a_0 < s_n$.

En virtud de la igualdad

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(s_n, a_0)} F_n(x) dx,$$

demostrada en la primera parte del teorema, tenemos finalmente que

$$0 < \tau_{n+1} = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_{n+1}(x) dx \leq \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_n(x) dx = \tau_n < \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

Concretamente, hemos demostrado la cadena de desigualdades deseada,

$$0 < \tau_{n+1} \leq \tau_n < \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

Outline

- 1 Abstract
- 2 Previous results
 - Convolution
 - Fourier transform
 - The Inversion Theorem
- 3 Las integrales de Borwein
 - Definición de la integral de Borwein
 - El seno cardinal
- 4 Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein
 - La función rectangular
 - Teorema principal
- 5 Ejemplo visual
- 6 Conclusión

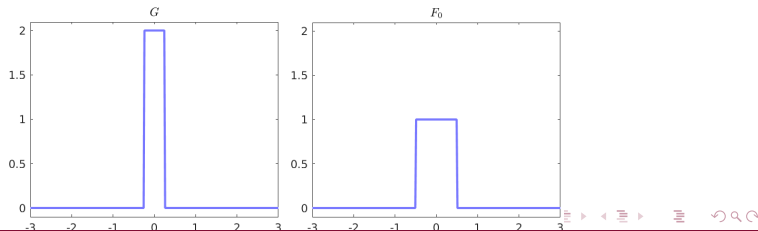
Análisis gráfico de la convolución

En esta última sección queremos mostrar gráficamente, sin entrar en los detalles, un ejemplo en el que queda reflejada la idea que se sigue en el teorema principal.

Reproduciendo el artículo *Two curious integrals and a graphic proof* de Hanspeter Schmid, vamos a ver el efecto que tiene convolucionar iteradamente una función rectangular, que denotaremos por F_0 , con otra la función rectangular a la que llamaremos G .

Así pues, definimos las funciones

$$G(x) = 2\text{rect}(2x) = 2\chi_{\frac{1}{4}}(x) \quad \text{y} \quad F_0(x) = \text{rect}(x) = \chi_{\frac{1}{2}}(x).$$



Análisis gráfico de la convolución

F_0 será el primer término de nuestra sucesión, que será formada convolucionando iterativamente con G :

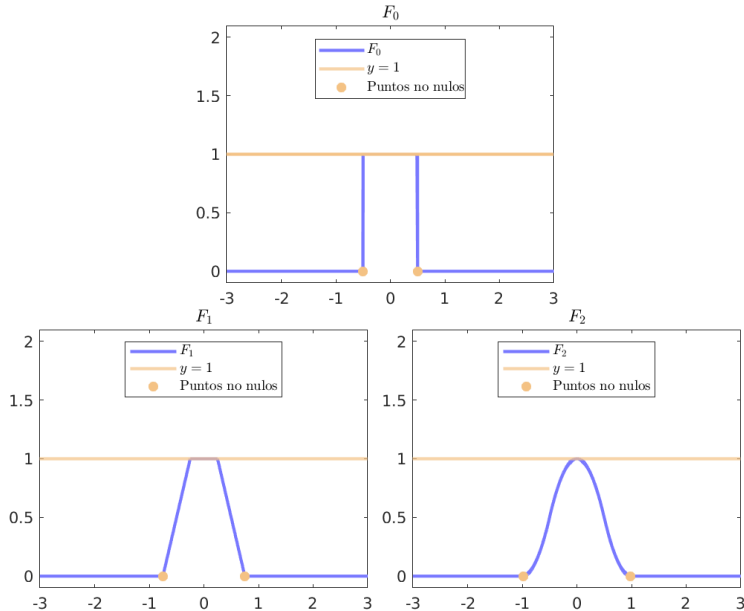
$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_{n-1}(x) * G(x) = F_0(x) * G(x) * \cdots * G(x) \\ &= \chi_{\frac{1}{2}}(x) * 2\chi_{\frac{1}{4}}(x) * \cdots * 2\chi_{\frac{1}{4}}(x). \end{aligned}$$

La función $F_n(x)$ tiene una anchura dada por

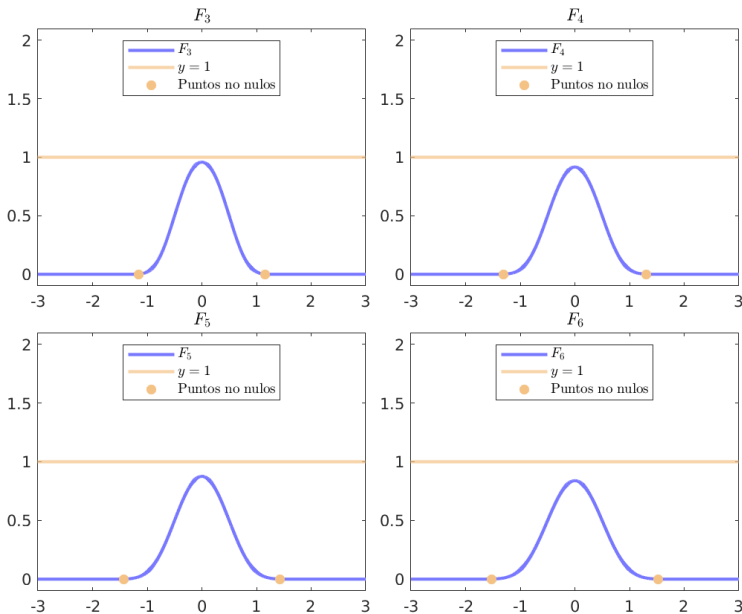
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{4}.$$

y la meseta se erosiona cuando esta suma llega a ser mayor que la propia anchura de F_0 , que es 1.

Gráficos del proceso de convolución



Gráficos del proceso de convolución



Outline

① Abstract

② Previous results

Convolution

Fourier transform

The Inversion Theorem

③ Las integrales de Borwein

Definición de la integral de Borwein

El seno cardinal

④ Estudio del comportamiento de las integrales de Borwein

La función rectangular

Teorema principal

⑤ Ejemplo visual

⑥ Conclusión

- Hemos dado una explicación clara y coherente del inesperado comportamiento de las integrales de Borwein.
- Hemos conseguido demostrar el teorema de mayor envergadura de dichas integrales.
- Lo hemos conseguido utilizando resultados vistos en asignaturas de análisis durante el grado y apoyándonos en pocos resultados externos. Además, estos resultados no son extremadamente complejos.
- Por tanto, creo que hemos logrado satisfactoriamente el objetivo de hacer accesible el tema de la integral de Borwein a lectores matemáticos.

- [1] David Borwein and Jonathan M. Borwein. “Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals”. In: *The Ramanujan Journal* 5.1 (2001), pp. 73–89. DOI: 10.1023/a:1011497229317.
- [2] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. Wiley Interscience, 1999. ISBN: 0471317160.
- [3] Eric W. Hansen. *Fourier transforms principles and applications. Principles and applications*. Wiley, 2014, p. 755. ISBN: 9781118479148.
- [4] Walter Rudin. *Análisis Real y Complejo*. Trans. by A. Casal Piga. Editorial Alhambra, 1985. ISBN: 8420506516.
- [5] Hanspeter Schmid. “Two Curious Integrals and a Graphic Proof”. In: *Elemente der Mathematik* 69.2 (2014), pp. 71–74. DOI: 10.4171/EM/239.

- [6] Michael Spivak. *Calculus*. Trans. by Bartolomé Frontera Marques. 2nd ed. Editorial Reverté, 1988. ISBN: 8429151362.