



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Las integrales de Borwein

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{13})}{\frac{x}{13}} dx &= \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{13})}{\frac{x}{13}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{15})}{\frac{x}{15}} dx &= \frac{\pi}{2} - 2,31 \times 10^{-11}
 \end{aligned}$$

What is this?

Autor: Lorena Escribano Huesca

Tutores: D. Luis José Alías Linares y D. Luis Oncina Deltell

2023

Declaración de originalidad

Lorena Escribano Huesca, autora del Trabajo de Fin de Grado *Las integrales de Borwein*, bajo la tutela de los profesores Luis José Alías Linares y Luis Oncina Deltell, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 23 de junio de 2023

Fdo.: Lorena Escribano Huesca

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Quiero darle las gracias a mis amigas, por su apoyo y compañía en los momentos de estrés. A mi familia, por su amor y apoyo incondicional en todo momento. Gracias por creer en mí y por motivarme a seguir adelante, incluso en los momentos más difíciles. A mi pareja, por ser una fuente constante de motivación y alegría en mi vida. Y, para terminar, una mención especial para una persona a quien aprecio mucho, mi tutor, Luis, por su seguimiento constante y por siempre insistir en ir más allá.

Índice general

Resumen	III
Abstract	VII
1. Preliminares	1
1.1. Conceptos básicos de la teoría de la medida.	1
1.2. Teoremas notables del análisis matemático	3
1.3. Convolución	4
1.4. Transformada de Fourier	7
1.5. Teorema de inversión	10
2. Las integrales de Borwein.	25
2.1. Introducción a las integrales de Borwein	25
2.2. El seno cardinal.	26
2.3. Cálculo de la integral principal.	28
3. El curioso y desconcertante comportamiento de las integrales de Borwein.	35
3.1. Función rectangular.	35
3.2. Análisis del comportamiento de las integrales de Borwein.	36
4. Visualizando la prueba	51
A. Código para generar las convoluciones y sus gráficas en MATLAB	57

Resumen

En mi trabajo, “Las integrales de Borwein“, me embarco en una exploración exhaustiva de las integrales de Borwein, una faceta intrigante y compleja del análisis matemático. Este trabajo de fin de grado sirve no sólo de guía detallada, sino también de viaje a través del intrincado laberinto de las integrales de Borwein, iluminando el camino y revelando los rincones ocultos de esta fascinante construcción matemática.

Las integrales de Borwein, llamadas así por el dúo Borwein, padre e hijo, que las introdujeron por primera vez, son una serie de integrales que exhiben propiedades desconcertantes y contraintuitivas. Procedentes del campo del análisis matemático, concretamente del estudio de las series e integrales de Fourier, estas integrales han despertado intriga debido a su inesperado comportamiento. Como se ha anticipado en la portada de este trabajo, se puede comprobar de puño y letra que las 7 primeras iteraciones de la sucesión de funciones

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{((2n+1)x)} dx,$$

dan como resultado la siguiente escalera de igualdades,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=0), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=1), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=2), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=3), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=4), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=5), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} \frac{\text{sen}(\frac{x}{13})}{\frac{x}{13}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=6). \end{aligned}$$

De modo que se obtiene el mismo resultado para estas primeras integrales. Sin embargo este patrón deja de darse a partir de la octava iteración de este proceso, donde el valor obtenido disminuye inesperadamente en $2,31 \times 10^{-11}$ unidades. Inicialmente, los Borwein atribuyeron esta anomalía a aproximaciones numéricas, pero sus investigaciones posteriores desvelaron una verdad matemática mucho más profunda. Las integrales de Borwein son un testimonio de la profundidad y riqueza del análisis matemático, y

nos recuerdan que, incluso en el ámbito de lo bien establecido, aún quedan misterios por desentrañar. Subrayan el hecho de que las verdades matemáticas son indiferentes a nuestras expectativas o deseos de resultados nítidos.

El primer capítulo de este trabajo sienta las bases introduciendo conceptos fundamentales de la teoría de la medida, entre ellos la noción de medida, los conjuntos medibles, las funciones de Borel y la integral de Lebesgue. En particular ésta última juega un papel fundamental a lo largo de todo este trabajo. Esto proporciona la base necesaria para una exploración más profunda del tema y sobre todo para comprender la gran mayoría de los enunciados de teoremas que se citan. A continuación, procedo a discutir teoremas notables del análisis matemático, proporcionando una base sólida para los capítulos siguientes. Entre ellos se enuncian el teorema Fundamental del Cálculo o el teorema de Fubini, que usaremos con frecuencia a lo largo del artículo. Este capítulo también profundiza en el concepto de convolución, una herramienta crucial en el análisis matemático, y su papel en el estudio de las integrales de Borwein. Para la demostración del teorema que explica el comportamiento de las integrales de Borwein, se hace uso de la transformada de Fourier. Es por ello que en este primer capítulo también se analiza en detalle la mencionada transformada de Fourier. Esta sección no sólo proporciona una comprensión completa de la transformada de Fourier, sino que también destaca su importancia en el estudio de las integrales de Borwein. El capítulo concluye con una exploración del teorema de inversión, un concepto crítico que sustenta la comprensión de las integrales de Borwein. En esta sección se hará uso de múltiples resultados fundamentales del análisis matemático dejando clara su importancia en el campo de las matemáticas. Además, esta exploración proporciona una comprensión detallada del teorema y sus implicaciones para el estudio de las integrales de Borwein.

En el segundo capítulo, presento las integrales de Borwein propiamente dichas. Comienzo con una visión general de estas cautivadoras construcciones matemáticas y de una breve motivación de este trabajo, en la que se explica el motivo por el que estas integrales resultan tan interesantes. Seguidamente se da una discusión en profundidad sobre la función seno cardinal, un actor clave en el mundo de las integrales de Borwein. Esta discusión proporciona una comprensión detallada de la función seno cardinal y de su papel en el cálculo de las integrales de Borwein. Además, mediante el uso de funciones trigonométricas, se demuestra geoméricamente el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

La siguiente sección esta dedicada al cálculo de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx.$$

Aplicando las técnicas aprendidas en la asignatura de *funciones de variable compleja* conseguimos resolver la integral que viene multiplicada iterativamente en las integrales de Borwein y que no tiene primitiva elemental. Por tanto esta integral no se podrá resolver aplicando técnicas habituales del cálculo de integrales. El cálculo de esta integral, que es un tema central en el estudio de las integrales de Borwein, se presenta meticulosamente. Esta presentación no sólo proporciona un cálculo paso a paso de la integral principal, sino que también destaca las técnicas matemáticas utilizadas en el proceso. En definitiva, lo más destacado de este capítulo es la exploración del curioso y desconcertante comportamiento de la integral de Borwein. A través de un cuidadoso análisis, se desvela los misterios que rodean a esta integral, arrojando luz sobre sus características únicas y proporcionando una visión fascinante de su comportamiento.

El tercer capítulo se presenta una fórmula general para las integrales de Borwein. Se discute la definición de las llamadas funciones rectangulares que jugarán un papel fundamental. En esta discusión

se proporciona también una gráfica de las mencionadas funciones para facilitar la comprensión de los cálculos que se verán posteriormente, en la prueba del teorema principal de este trabajo. En este teorema se justifica el comportamiento de la integral de Borwein, dando las condiciones que deben darse para que se de la rotura tan brusca de la armoniosa regularidad que parecían seguir estas integrales. Este enunciado proporciona una comprensión más profunda de esta compleja construcción matemática. Finalmente, el capítulo concluye con la demostración rigurosa y detallada del citado teorema, que no sólo proporciona una comprensión exhaustiva del comportamiento de la integral de Borwein, sino que también pone de relieve las técnicas matemáticas utilizadas en el proceso.

El capítulo final de este trabajo visualiza un ejemplo en el que queda reflejada la idea que se sigue en el ya mencionado teorema que explica el comportamiento de las integrales de Borwein, proporcionando una representación gráfica que ayuda a la comprensión de esta compleja materia. Creo que este enfoque visual hace que los conceptos matemáticos complejos sean más accesibles y comprensibles. Este capítulo no sólo proporciona una demostración visual del comportamiento de la integral de Borwein, sino que también analiza las técnicas matemáticas utilizadas en el proceso de visualización. Concretamente, se visualiza el efecto que tiene convolucionar iteradamente una función con la función pulso unitario, tal y como la definimos en el mencionado capítulo.

En resumen, “Las Integrales de Borwein” es una exploración exhaustiva y atractiva de las integrales de Borwein. Mediante una redacción clara y concisa, explicaciones detalladas y representaciones visuales, se pretende hacer accesible al lector esta fascinante área del análisis matemático. La metodología empleada en este trabajo es rigurosa y exhaustiva, y los resultados tienen implicaciones significativas para el campo del análisis matemático. Este trabajo no sólo contribuye al cuerpo de conocimientos existente, sino que también abre nuevas vías para futuras investigaciones en este campo. Este trabajo es un testimonio de la belleza y la complejidad del análisis matemático, y pone de relieve la importancia de la investigación rigurosa y la exploración detallada para desvelar los misterios del mundo matemático.

Para concluir, aclaramos que en este trabajo se analiza exhaustivamente la demostración del teorema enunciado en el artículo *Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals* [1] escrito por los matemáticos David Borwein y Jonathan M. Borwein, que como hemos comentado, son los que presentaron por primera vez las integrales de Borwein. La demostración detallada y argumentada que se expone en este trabajo, no habría sido posible si no nos hubiéramos basado en los célebres libros de teoría general, *Análisis Real y Complejo* [4] de Walter Rudin, *Calculus* [6] de Michael Spivak y *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* [2] de Gerald B. Folland. Aparte, se ha utilizado el libro *Fourier transforms principles and applications* de Eric W. Hansen [3], que aporta una visión de la transformada de Fourier desde el punto de vista de la ingeniería y hace más sencilla su comprensión. Por último, mencionamos que para el ejemplo visual dado en el último capítulo de este trabajo, se ha recopilado la información del artículo *Two curious integrals and a graphic proof* [5] escrito por Hanspeter Schmid, pero no se ha entrado en los detalles de los cálculos que hay detrás del código de programación.

Abstract

In my paper, “Borwein integrals“, I embark on a thorough exploration of Borwein integrals, an intriguing and complex facet of mathematical analysis. This thesis serves not only as a detailed guide, but also as a journey through the intricate labyrinth of Borwein integrals, illuminating the path and revealing the hidden corners of this fascinating mathematical construct.

Borwein integrals, named after the father and son Borwein duo who first introduced them, are a series of integrals that exhibit puzzling and counter-intuitive properties. Coming from the field of mathematical analysis, specifically the study of Fourier series and integrals, these integrals have aroused intrigue due to their unexpected behaviour. As anticipated in the title page of this work, it is possible to verify in handwriting that the first 7 iterations of the succession of functions

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)x} dx,$$

result in the following ladder of equalities,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=0), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=1), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\sin(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=2), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\sin(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\sin(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=3), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\sin(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\sin(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\sin(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=4), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\sin(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\sin(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\sin(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\sin(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=5), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \frac{\sin(\frac{x}{5})}{\frac{x}{5}} \frac{\sin(\frac{x}{7})}{\frac{x}{7}} \frac{\sin(\frac{x}{9})}{\frac{x}{9}} \frac{\sin(\frac{x}{11})}{\frac{x}{11}} \frac{\sin(\frac{x}{13})}{\frac{x}{13}} dx &= \frac{\pi}{2} & (n=6). \end{aligned}$$

So the same result is obtained for these first integrals. However, this pattern ceases to occur after the eighth iteration of this process, where the value obtained unexpectedly decreases by $2,31 \times 10^{-11}$ units. Initially, the Borweins attributed this anomaly to numerical approximations, but their later investigations uncovered a much deeper mathematical truth. The Borwein integrals are a testament to the depth and richness of mathematical analysis, and remind us that, even in the realm of the well-established, mysteries remain to be unravelled. They underline the fact that mathematical truths are indifferent to our expectations or desires for clear-cut results.

The first chapter of this paper lays the groundwork by introducing fundamental concepts of measure theory, among them the notion of measure, measurable sets, Borel functions and the Lebesgue integral. In particular the latter plays a fundamental role throughout this work. This provides the necessary basis for a deeper exploration of the subject and above all for understanding the vast majority of the statements of theorems that are cited. I then proceed to discuss notable theorems of mathematical analysis, providing a solid foundation for the following chapters. Among them are stated the Fundamental Theorem of Calculus or Fubini's theorem, which we will use frequently throughout the article. This chapter also delves into the concept of convolution, a crucial tool in mathematical analysis, and its role in the study of Borwein integrals. For the proof of the theorem that explains the behaviour of Borwein integrals, use is made of the Fourier transform. That is why in this first chapter the Fourier transform is also analysed in detail. This section not only provides a thorough understanding of the Fourier transform, but also highlights its importance in the study of Borwein integrals. The chapter concludes with an exploration of the inversion theorem, a critical concept underpinning the understanding of Borwein integrals. This section will make use of multiple fundamental results from mathematical analysis making clear their importance in the field of mathematics. Furthermore, this exploration provides a detailed understanding of the theorem and its implications for the study of Borwein integrals.

In the second chapter, I present the Borwein integrals themselves. I begin with an overview of these captivating mathematical constructions and a brief motivation for this work, explaining why these integrals are so interesting. This is followed by an in-depth discussion of the cardinal sine function, a key player in the world of Borwein integrals. This discussion provides a detailed understanding of the cardinal sine function and its role in the calculation of Borwein integrals. Furthermore, by using trigonometric functions, the value of the limit is geometrically proved

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (1)$$

The following section is devoted to the calculation of the integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \quad (2)$$

Applying the techniques learnt in the subject of complex variable functions, we manage to solve the integral which is iteratively multiplied in the Borwein integrals and which has no elementary primitive. Therefore, this integral cannot be solved by applying the usual techniques of integral calculus. The calculation of this integral, which is a central topic in the study of Borwein integrals, is meticulously presented. This presentation not only provides a step-by-step calculation of the principal integral, but also highlights the mathematical techniques used in the process. Ultimately, the highlight of this chapter is the exploration of the curious and puzzling behaviour of the Borwein integral. Through careful analysis, it unravels the mysteries surrounding this integral, shedding light on its unique characteristics and providing fascinating insights into its behaviour.

The third chapter presents a general formula for Borwein integrals. The definition of the so-called rectangular functions that will play a fundamental role is discussed. In this discussion a graph of the mentioned functions is also provided in order to facilitate the understanding of the calculations that will be seen later in the proof of the main theorem of this work. In this theorem, the behaviour of the Borwein integral is justified, giving the conditions that must be met for the sharp break in the harmonious regularity that these integrals seemed to follow. This statement provides a deeper understanding of this complex mathematical construction. Finally, the chapter concludes with the rigorous and detailed proof of the above theorem, which not only provides a thorough understanding

of the behaviour of the Borwein integral, but also highlights the mathematical techniques used in the process.

The final chapter of this work visualises an example in which the idea followed in the aforementioned theorem explaining the behaviour of Borwein integrals is reflected, providing a graphical representation that helps the understanding of this complex subject. I believe that this visual approach makes complex mathematical concepts more accessible and understandable. This chapter not only provides a visual demonstration of the behaviour of the Borwein integral, but also discusses the mathematical techniques used in the visualisation process. In particular, it visualises the effect of iteratively convolving a function with the unit pulse function, as defined in the above-mentioned chapter.

To sum up, “The Borwein Integrals” is a comprehensive and engaging exploration of Borwein integrals. Through clear and concise writing, detailed explanations and visual representations, it aims to make this fascinating area of mathematical analysis accessible to the reader. The methodology employed in this work is rigorous and thorough, and the results have significant implications for the field of mathematical analysis. This work not only contributes to the existing body of knowledge, but also opens up new avenues for future research in this field. This work is a testament to the beauty and complexity of mathematical analysis, and highlights the importance of rigorous research and detailed exploration to unlock the mysteries of the mathematical world.

In conclusion, it should be made clear that this paper is an exhaustive analysis of the proof of the theorem stated in the article "Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals". [1] written by the mathematicians David Borwein and Jonathan M. Borwein, who, as we have mentioned, are the ones who first presented Borwein’s integrals. The detailed and well-argued proof presented in this work would not have been possible if we had not relied on the famous general theory books, *Real and Complex Analysis* [4] by Walter Rudin, *Calculus* [6] by Michael Spivak and *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. [2] by Gerald B. Folland. In addition, we have used the book *Fourier transforms principles and applications* by Eric W. Hansen [3], which provides a view of the Fourier transform from an engineering point of view and makes it easier to understand. Finally, we mention that for the visual example given in the last chapter of this work, we have compiled information from the article *Two curious integrals and a graphic proof* [5] written by Hanspeter Schmid, but we have not gone into the details of the calculations behind the programming code.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo trata de situar al lector en el contexto adecuado para la comprensión de todo el texto. Se asume por su parte un conocimiento previo de las bases del análisis real y complejo. En el desarrollo de este capítulo nos hemos basado en los libros [2], [3], [4] y [6].

1.1. Conceptos básicos de la teoría de la medida.

Definición 1.1.1. Dado un conjunto no vacío X , una σ -álgebra \mathcal{A} sobre el conjunto X , es una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ no vacía de subconjuntos de X que verifica,

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ (contiene al vacío y al total).
- Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ (cerrada bajo complementarios).
- Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (cerrada bajo uniones numerables).

Asimismo, una *medida* es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ verificando

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ es σ -aditiva, es decir, si $\{A_n\}$ es una colección numerable disjunta de elementos de \mathcal{A} , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Estas dos definiciones dan paso al concepto de *espacio de medida*, que es una terna (X, \mathcal{A}, μ) , donde

- X es un conjunto,
- \mathcal{A} es una σ -álgebra en el conjunto X ,
- μ es una medida en (X, \mathcal{A}) .

Al par (X, \mathcal{A}) se le llama *espacio medible* y a los elementos de \mathcal{A} se les llama *conjuntos \mathcal{A} -medibles* (o simplemente conjuntos medibles). Además diremos que un conjunto en un espacio de medida *tiene medida σ -finita* si es una unión numerable de conjuntos de medida finita.

Ejemplo 1.1.2. Los números reales \mathbb{R} con la medida de Lebesgue estándar forman un espacio σ -finito pero no finito. Considérese el intervalo cerrado $[k, k+1]$ para cada número entero k ; hay una cantidad numerable de tales intervalos, cada uno tiene medida 1, y su unión es la recta real completa.

Definición 1.1.3. Formalmente, una *función* $f : X \rightarrow X'$ entre dos espacios medibles (X, \mathcal{A}) , (X', \mathcal{A}') se dice *medible* si la preimagen (también llamada imagen inversa) de cualquier conjunto medible es a su vez medible, es decir

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{A}'.$$

Definición 1.1.4. Damos también la definición de *espacio topológico*, llamado así al par ordenado (X, \mathcal{T}) formado por un conjunto X y una topología \mathcal{T} sobre X , es decir, una colección de subconjuntos de X que cumple las tres propiedades siguientes:

- El conjunto vacío y X están en \mathcal{T} : $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$
- La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

$$(O_1 \in \mathcal{T}, O_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T})$$

- La unión de cualquier subcolección de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

$$\forall S \subset \mathcal{T}, \quad \bigcup_{O \in S} O \in \mathcal{T}.$$

Dado X un espacio topológico, consideramos la σ -álgebra mínima \mathcal{B} en X tal que todo conjunto abierto de X pertenece a \mathcal{B} , es decir \mathcal{B} es la mínima σ -álgebra que contiene a la topología \mathcal{T} . Entonces los elementos de \mathcal{B} reciben el nombre de *conjuntos de Borel* de X .

Puesto que \mathcal{B} es una σ -álgebra, podemos ver ahora (X, \mathcal{B}) como un espacio de medida con los conjuntos de Borel jugando el papel de conjuntos medibles. Más concretamente, consideramos el espacio de medida (X, \mathcal{B}) . Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua de X , donde Y es cualquier espacio topológico, por definición de función continua se tiene

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{B} \quad \text{para todo conjunto abierto } V \text{ en } Y.$$

en otras palabras toda función continua de X es *Borel medible*. Una función Borel medible se puede llamar también *función medible Borel* o bien *\mathcal{B} -medible*.

En relación a la medida de Lebesgue, nombramos los *espacios* L^p que son los espacios vectoriales normados más importantes en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. Reciben también el nombre de *espacios de Lebesgue* por el matemático *Henri Lebesgue*.

Estos se definen como el espacio de las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles y tales que $|f|^p$, con $0 < p < \infty$, es integrable, esto es, se verifica

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Para referirnos a las funciones que cumplen estas dos condiciones escribiremos $f \in L^p(\mu)$ siendo (X, \mathcal{A}, μ) el espacio de medida sobre el que está definida la función f .

Para completar el cuadro de los espacios L^p , incluimos una definición dada en el libro [2]. Ésta consiste en el espacio correspondiente al valor límite $p = \infty$. Si f es una función medible sobre X , definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}, \quad (1.1)$$

con la convención de que $\inf \emptyset = \infty$. Llamaremos *supremo esencial de $|f|$* a $\|f\|_\infty$. Definimos también el espacio

$$L^\infty = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\}. \quad (1.2)$$

Cabe destacar el resultado sobre la *invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue*, que afirma que dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ se cumple

$$x + A \text{ es medible} \iff A \text{ es medible}. \quad (1.3)$$

Observación 1.1.5. Si denotamos por m la *medida de Lebesgue* en \mathbb{R}^n , entonces se suele escribir $L^p(\mathbb{R}^n)$ en lugar de $L^p(m)$, para $0 < p \leq \infty$.

1.2. Teoremas notables del análisis matemático

Durante la lectura será imprescindible tener presente los teoremas que a continuación enunciamos.

Teorema 1.2.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por*

$$F(x) := \int_a^x f \quad x \in [a, b].$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c).$$

Demostración. Véase Teorema 1, p.399 de [6]. □

Teorema 1.2.2 (Teorema de Fubini). *Sean (X, Π, μ) y (Y, Σ, λ) espacios de medida σ -finita, y sea f una función $(\Pi \times \Sigma)$ -medible sobre $X \times Y$. Si $f(x, y) \in L^1(\mu \times \lambda)$, entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ p.c.t $x \in X$ y $f_y \in L^1(\mu)$ p.c.t $y \in Y$; las funciones*

$$\varphi(x) := \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) := \int_X f_y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\lambda)$ respectivamente, y se verifica:

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi(y) d\lambda.$$

Demostración. Véase Teorema 7.3.1, p. 131 de [4]. □

Teorema 1.2.3 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea μ una medida sobre un espacio medible arbitrario X . Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles complejas sobre X , tales que existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \in X)$$

entonces $f \in L^1(\mu)$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demostración. Véase Teorema 1.9.5, p.21 de [4], □

Teorema 1.2.4. *Sea f una aplicación de X en Y , siendo X un conjunto medible e Y un espacio topológico.*

Si f es medible, Z un espacio topológico, $g : Y \rightarrow Z$ una aplicación de Borel y $h = g \circ f$, entonces $h : X \rightarrow Z$ es medible.

Demostración. Véase Teorema 1.3.1, p.8 de [4]. □

1.3. Convolución

En esta sección abordaremos el concepto de *convolución*, que juega un importante papel en las integrales de Bochner. En lo que sigue trabajaremos con la medida de Lebesgue m en \mathbb{R} .

Definición 1.3.1. Llamaremos *convolución de f y g* a la operación binaria en $L^1(\mathbb{R})$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Seguidamente mencionamos y demostramos propiedades algebraicas de la operación de convolución

Proposición 1.3.2. [*Propiedades de la convolución*] *Consideramos f, g y h funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , que sean $L^1(\mathbb{R})$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

- i) Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$*
- ii) Conmutatividad. $f * g = g * f$*
- iii) $(\alpha f) * (\beta g) = \alpha\beta (f * g)$*

Demostración. i) Una aplicación directa de la definición de convolución vista en la Definición 1.3.1 nos da,

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy * h(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y-z)g(y)h(z)dydz. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $w = y + z \rightarrow dw = dy$ sobre esta última expresión y aplicando el teorema de Fubini, visto en el Teorema 1.2.2, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-w)g(w-z)h(z)dwdz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-w) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(w-z)h(z)dz \right) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-w) (g * h)(w)dw \\ &= (f * (g * h))(x). \end{aligned}$$

ii) Para demostrar la conmutatividad de la convolución basta realizar el cambio de variable $z = x - y \rightarrow dz = -dy$ sobre la primera integral en la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(z)g(x-z)(-dz) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-z)f(z)dz \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

iii) Finalmente vemos que se da la tercera propiedad, usando la linealidad de la integral

$$(\alpha f * \beta g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x-y)\beta g(y)dy = \alpha\beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \alpha\beta (f * g)(x).$$

□

Lema 1.3.3. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que para $a, b > 0$ se cumple

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a, \\ > 0 & \text{si } |x| < a. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > b, \\ > 0 & \text{si } |x| < b. \end{cases}$$

Entonces,

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a + b, \\ > 0 & \text{si } |x| < a + b. \end{cases}$$

Demostración. Calculamos la convolución de f y g :

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-a-b}^{a+b} f(x-y)g(y)dy.$$

En la última igualdad se ha usado que:

$$\begin{cases} f(x-y) > 0 \Leftrightarrow x-y \in (-a, a) \Leftrightarrow x \in (-a+y, a+y), \\ g(y) > 0 \Leftrightarrow y \in (-b, b), \end{cases} \quad (1.4)$$

de donde se deduce que debe ser

$$f(x-y)g(y) > 0 \Leftrightarrow x \in (-a+y, a+y) \cap y \in (-b, b) \Leftrightarrow x \in (-a-b, a+b).$$

□

A continuación incluimos una demostración adaptada del Teorema 7.5.2, p.137 de [4].

Teorema 1.3.4. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy < +\infty,$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Para estos x , definamos

$$h(x) := (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (1.5)$$

Entonces $h \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Demostración. Para poder aplicar el teorema de Fubini, vemos primero que la función

$$F(x, y) := f(x-y)g(y)$$

es de Borel en \mathbb{R}^2 .

Por la teoría general, sabemos que existen funciones de Borel f_0 y g_0 tales que $f_0 = f$ y $g_0 = g$ en c.t.p. Como la integral (1.5) no cambia si reemplazamos f por f_0 y g por g_0 , ya que los puntos en los que se diferenciarían sería un conjunto de medida nula y en consecuencia no cambia el valor de la integral, podemos suponer que f y g son funciones de Borel.

Por otro lado definimos las funciones

$$\varphi(x, y) := x - y, \quad \psi(x, y) := y.$$

Entonces $f(x-y) = (f \circ \varphi)(x, y)$ y $g(y) = (g \circ \psi)(x, y)$. Por ser φ y ψ funciones medibles, por ser funciones continuas, y f, g funciones de Borel, usando el Teorema 1.2.4, las composiciones $(f \circ \varphi)(x, y)$, $(g \circ \psi)(x, y)$ son funciones de Borel y por tanto también lo es su producto. En definitiva $F(x, y)$ es función de Borel.

Por otro lado, observamos que dicha función de Borel satisface

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)| dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| dx \right) dy. \end{aligned}$$

Usando que la integral de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|dx \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \cdot \|f\|_1 dy \\ &= \|f\|_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Entonces $F(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y el teorema de Fubini implica que la integral (1.5) existe para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y que $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Finalmente veamos que la norma de h está acotada por el producto de las normas de f y g . Una aplicación del teorema de Fubini nos da

$$\|h\|_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dxdy = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (1.7)$$

donde en esta última igualdad hemos usado lo demostrado en (1.6).

Esto completa la demostración. \square

Lema 1.3.5 (Conservación de la paridad). *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ son ambas funciones pares, entonces la convolución de ambas funciones es una función par:*

$$(f * g)(-x) = (f * g)(x).$$

Demostración. Aplicando la definición de convolución tenemos

$$(f * g)(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-y)g(y)dy.$$

Haciendo el cambio de variable $-y = z \rightarrow dy = -dz$ sobre el integrando anterior y teniendo en cuenta que las funciones f y g son pares por hipótesis, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} (f * g)(-x) &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x+z)g(-z)(-dz) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+z)g(-z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z)g(z)dz \\ &= (f * g)(x). \end{aligned}$$

\square

1.4. Transformada de Fourier

Definición 1.4.1. Definimos la *transformada de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ como la función:

$$\text{FT}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dy. \quad (1.8)$$

Definimos también la *transformada de Fourier coseno* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ como la parte real de la transformada de Fourier de f , o equivalentemente,

$$\text{FCT}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(xy)dy. \quad (1.9)$$

Observación 1.4.2. Notamos que a partir de la definición de transformada de Fourier coseno de una función f se tiene

$$\text{FT}(f) = \text{FCT}(f) + i \text{FST}(f)$$

siendo $\text{FST}(f)$ la *transformada de Fourier seno* de $f \in L^1(\mathbb{R})$, es decir la parte imaginaria de la transformada de Fourier de f :

$$\text{FST}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(-xy) dy.$$

Observación 1.4.3. Observamos que si tenemos $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con transformada de Fourier $\text{FT}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ también real, $\text{FT}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces por la Observación 1.4.2

$$\text{FT}(f) = \text{FCT}(f) + i \text{FST}(f) = \text{FCT}(f),$$

es decir, la transformada de Fourier de f coincide con su transformada de Fourier coseno.

Proposición 1.4.4 (Linealidad de la transformada de Fourier). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un escalar, entonces se tiene,*

1. $\text{FT}(f + g) = \text{FT}(f) + \text{FT}(g)$
2. $\text{FT}(\lambda f) = \lambda \text{FT}(f)$

Demostración. Aplicando la definición de transformada de Fourier y usando la linealidad de la integral tenemos,

1. Para la primera afirmación

$$\begin{aligned} \text{FT}(f + g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y) + g(y)) e^{-ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y)e^{-ixy} + g(y)e^{-ixy}) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ixy} dy \\ &= \text{FT}(f)(x) + \text{FT}(g)(x). \end{aligned}$$

2. Para la segunda igualdad

$$\text{FT}(\lambda f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(y)) e^{-ixy} dy = \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy = \lambda \text{FT}(f).$$

□

En lo que sigue, para abreviar notación, usaremos \hat{f} para referirnos a la transformada de Fourier de f , es decir $\text{FT}(f)(x) = \hat{f}(x)$.

Proposición 1.4.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función par, entonces su transformada de Fourier es también función par.*

Demostración. Una aplicación directa de la definición de la transformada de Fourier de f , dada en la Definición 1.4.1, nos da

$$\hat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-i(-x)y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy.$$

Realizando el cambio de variable $y = -z \rightarrow dy = -dz$ sobre el integrando anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} \hat{f}(-z) e^{-ixz} (-dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(z) e^{-ixz} dz \\ &= \hat{f}(x). \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, concluimos que la transformada de f es también par. \square

Mostramos a continuación una demostración adaptada del Teorema 9.1.2, p.168 de [4]

Teorema 1.4.6 (Teorema de convolución). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y definimos $h := f * g$, entonces la transformada de Fourier de h vale*

$$\hat{h}(x) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(x) \hat{g}(x).$$

Demostración. En virtud del Teorema 1.3.4 visto en la sección anterior, sabemos que $h := f * g \in L^1(\mathbb{R})$ por lo tanto su transformada de Fourier está bien definida. Usando la definición de convolución y el teorema de Fubini, visto en el Teorema 1.2.2, obtenemos que vale:

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(y) e^{-ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) g(z) dz \right) e^{-ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) g(z) e^{-ixy} dy dz. \end{aligned}$$

A continuación, sumamos y restamos la variable z en la exponencial de esta última integral, obteniendo así,

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) g(z) e^{-ix[y-z+z]} dy dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) g(z) e^{-ix(y-z)} e^{-ixz} dy dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) e^{-ix(y-z)} g(z) e^{-ixz} dy dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-ixz} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-z) e^{-ix(y-z)} dy \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-ixz} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) dz. \end{aligned}$$

Como mencionamos en la primera sección, la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, véase la ecuación (1.3). De aquí deducimos que la expresión anterior equivale a

$$\begin{aligned}\hat{h}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-ixz} dz \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} \hat{f}(x) \right) \left(\sqrt{2\pi} \hat{g}(x) \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(x) \hat{g}(x),\end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

1.5. Teorema de inversión

En esta sección nos apartaremos de la terminología previa y utilizaremos la letra m no para la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , sino para la medida de Lebesgue dividida por $\sqrt{2\pi}$, con el fin de simplificar la apariencia del teorema de Inversión, de manera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dm(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad (1.10)$$

donde dx se refiere a la medida de Lebesgue ordinaria. Definimos también

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dm(x) \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad (1.11)$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dm(y) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dm(y). \quad (1.12)$$

En toda esta sección, escribiremos L^p en lugar de $L^p(\mathbb{R})$, y denotaremos por \mathcal{C}_0 el espacio de todas las funciones continuas sobre \mathbb{R} que se anulan en el infinito.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la integral (1.12) está bien definida para todo x real, y notamos que coincide con la definición de *transformada de Fourier* de f dada en la fórmula (1.4.1) de la sección anterior.

Antes de dar paso al teorema que da nombre a esta sección, citaremos y demostraremos algunos resultados imprescindibles para la prueba.

Muchas de las desigualdades más comunes en análisis, entre ellas la desigualdad de Jensen que veremos en esta sección, tienen su origen en la noción de convexidad.

Definición 1.5.1. Una función real φ definida en un segmento (a, b) , donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, se llama *convexa* si se verifica la desigualdad

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y),$$

si $a < x < b$, $a < y < b$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Lema 1.5.2. Dadas dos funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tales que g es convexa y h es no decreciente y convexa, entonces la composición $\varphi = h \circ g$ es convexa.

Demostración. Sean x, y dos números reales cualesquiera y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Al ser g convexa y h no decreciente, tenemos

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) = (h \circ g)((1-\lambda)x + \lambda y) = h(g((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq h((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)).$$

Utilizando ahora que h es convexa, de la expresión anterior tenemos,

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq h((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)) \leq (1-\lambda)(h \circ g)(x) + \lambda(h \circ g)(y) = (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

Luego, φ es convexa como queríamos ver. \square

Teorema 1.5.3. (*Desigualdad de Jensen*). Sea μ una medida positiva sobre una σ -álgebra \mathcal{A} en un conjunto X , tal que $\mu(X) = 1$. Si f es una función real en $L^1(\mu)$, si $a < f(x) < b$ para todo $x \in X$, y si φ es convexa en (a, b) , entonces

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Nota: Los casos $a = -\infty$ y $b = +\infty$ están incluidos.

Demostración. Véase Teorema 3.1.3, p. 54 de [4]. \square

Definición 1.5.4. Si p y q son números reales positivos tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.13)$$

llamamos a p y q un par de *exponentes conjugados*. Es claro que (1.13) implica $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$.

Teorema 1.5.5. Sean p y q exponentes conjugados, con $1 < p < \infty$. Sea X un espacio de medida con medida μ . Sean f y g funciones medibles en X , con recorrido en $[0, +\infty]$. Entonces

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \quad (\text{Desigualdad de Hölder})$$

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \quad (\text{Desigualdad de Minkowski})$$

Demostración. Véase Teorema 3.1.5, p.55 de [4]. \square

Teorema 1.5.6. Si $1 \leq p \leq \infty$ y si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ con límite f , entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en casi todo punto a $f(x)$.

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 3.2.6, p.59 de [4]. \square

Teorema 1.5.7. Para cualquier función f sobre \mathbb{R} y todo $y \in \mathbb{R}$, sea f_y la trasladada de f definida mediante

$$f_y(x) := f(x - y) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Si $1 \leq p < \infty$ y si $f \in L^p$, la aplicación

$$y \longrightarrow f_y$$

es una aplicación uniformemente continua de \mathbb{R} en $L^p(\mathbb{R})$

Demostración. Véase Teorema 9.2.2, p. 170 de [4]. □

Teorema 1.5.8. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$.

Demostración. Véase Teorema 9.2.3, p. 171 de [4]. □

En la demostración del teorema de inversión será conveniente definir una función auxiliar cuya integral se calcule fácilmente. Entre las muchas posibilidades de elección tomaremos la siguiente función,

$$h_\lambda(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda y|} e^{ixy} dm(y) \quad \lambda > 0.$$

Con el fin de determinar el valor de la integral compleja h_λ , calcularemos por separado su parte real y su parte imaginaria, a las que denotaremos respectivamente por $\mathcal{R}_\lambda(x)$ y por $\mathcal{I}_\lambda(x)$.

Haciendo uso de la conocida fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ siendo θ un número real, deducimos que la parte real de $h_\lambda(x)$ vale

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda y|} \cos(xy) dm(y) = \int_{-\infty}^0 e^{-|\lambda y|} \cos(xy) dm(y) + \int_0^{+\infty} e^{-|\lambda y|} \cos(xy) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} \cos(xy) dm(y) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y). \end{aligned} \quad (1.15)$$

En este último paso se ha tenido en cuenta los dominios de integración de cada integral y que estamos trabajando con $\lambda > 0$.

Haciendo ahora el cambio de variable $y = -z \longrightarrow dm(y) = -dm(z)$ sobre el primer sumando de (1.15) y teniendo en cuenta que el coseno es una función par, tenemos que esta ecuación se puede expresar de esta manera

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(x) &= \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda z} \cos(-xz) (-dm(z)) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} \cos(xz) dm(z) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y). \end{aligned}$$

Finalmente realizando un cambio de notación $z = y \longrightarrow dm(z) = dm(y)$ en esta última expresión, para integrar respecto de y ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y). \end{aligned}$$

De modo que hemos probado la siguiente igualdad

$$R_\lambda(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dm(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy,$$

Así denotaremos por $A_\lambda(x) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy$ a esta última integral y determinaremos su valor. En $x = 0$ vale

$$\begin{aligned} A_\lambda(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(0 \cdot y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} dy \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-\lambda y} - e^0 \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Consideramos ahora $x \neq 0$, y aplicamos el método de integración por partes para tratar de hallar el valor de $A_\lambda(x)$. Realizamos el siguiente cambio,

$$\begin{aligned} u &= e^{-\lambda y} \longrightarrow du = -\lambda e^{-\lambda y} dy, \\ dv &= \cos(xy) dy \longrightarrow v = \frac{1}{x} \sin(xy). \end{aligned}$$

Obteniendo así

$$A_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy = \frac{1}{x} e^{-\lambda y} \sin(xy) \Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \sin(xy) dy. \quad (1.16)$$

Veamos que evaluando el primer sumando en la última igualdad de (1.16) en sus límites de integración, se anula:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} e^{-\lambda y} \sin(xy) \right| &\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x} e^{-\lambda y} \right| = 0 \quad (\lambda > 0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} e^{-\lambda y} \sin(xy) \right| &= \left| \frac{1}{x} e^{-\lambda \cdot 0} \sin(x \cdot 0) \right| = 0. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación (1.16) se queda de la siguiente manera

$$A_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \sin(xy) dy. \quad (1.17)$$

Aplicamos de nuevo integración por partes en esta última expresión,

$$\begin{aligned} u &= e^{-\lambda y} \longrightarrow du = -\lambda e^{-\lambda y} dy, \\ dv &= \sin(xy) dy \longrightarrow v = -\frac{1}{x} \cos(xy). \end{aligned}$$

Consecuentemente, la ecuación (1.17) se puede expresar

$$\begin{aligned} A_\lambda(x) &= \frac{\lambda}{x} \left[-\frac{1}{x} e^{-\lambda y} \cos(xy) \Big|_0^{+\infty} - \frac{\lambda}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy \right] \\ &= \frac{\lambda}{x} \left[-\frac{1}{x} e^{-\lambda y} \cos(xy) \Big|_0^{+\infty} - \frac{\lambda}{x} A_\lambda(x) \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde esta última igualdad se debe a que habíamos definido $A_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \cos(xy) dy$. A continuación evaluamos los términos de la igualdad (1.18) en sus límites de integración,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| -\frac{1}{x} e^{-\lambda y} \cos(xy) \right| &\leq \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| -\frac{1}{x} e^{-\lambda y} \right| = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} e^{-\lambda y} \cos(xy) \right) &= -\frac{1}{x} e^{-\lambda \cdot 0} \cos(x \cdot 0) = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Finalmente concluimos que la ecuación (1.18) se transforma en

$$A_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{x} A_\lambda(x) \right) = \frac{\lambda}{x^2} - \frac{\lambda^2}{x^2} A_\lambda(x). \quad (1.19)$$

Por último despejando $A_\lambda(x)$ de esta ecuación, deducimos

$$A_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}.$$

Por lo tanto, la parte real de la integral $h_\lambda(x)$ vale

$$\mathcal{R}_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}. \quad (1.20)$$

Determinamos ahora su parte imaginaria, a la que habíamos denotado por $\mathcal{I}_\lambda(x)$

$$\mathcal{I}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda y|} \operatorname{sen}(xy) dm(y) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y). \quad (1.21)$$

Sobre el primer término hacemos el cambio de variable $y = -z \rightarrow dm(y) = -dm(z)$ y teniendo en cuenta que la función seno es impar, llegamos a que la ecuación (1.21) se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\lambda(x) &= \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda z} \operatorname{sen}(-xz) (-dm(z)) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y) \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} \operatorname{sen}(xz) dm(z) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Hacemos ahora un cambio de notación $z = y$ para integrar la expresión anterior en función de y , de modo que la expresión en (1.22) pasa a ser

$$\mathcal{I}_\lambda(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(xy) dm(y) = 0.$$

Así la parte imaginaria de $h_\lambda(x)$ es nula y de la ecuación (1.20) tenemos finalmente

$$h_\lambda(x) = \mathcal{R}_\lambda(x) + \mathcal{I}_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}. \quad (1.23)$$

Notamos que $h_\lambda(x)$ es una función par no negativa para todo x .
Evidenciamos ahora la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) = 1 \quad (1.24)$$

En efecto por lo demostrado en (1.23) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dm(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Multiplicando y dividiendo el último integrando de la expresión (1.25) por λ^2 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{x^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Conocemos el valor de la función $\arctan(x)$ en el infinito y vale

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Así finalmente de la ecuación (1.26) tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1,$$

como queríamos ver.

La igualdad (1.24) recién demostrada nos simplificará considerablemente los cálculos de los siguientes teoremas, previos al teorema de inversión. Tendremos también en cuenta la siguiente aclaración.

Observación 1.5.9. En la Definición 1.1.1, trabajamos el concepto de medida. En esta observación veremos que la función dada por

$$\mu(a, b) := \int_a^b h_\lambda(y) dm(y), \quad (1.27)$$

con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, define una medida sobre los números reales.

- Es claro que $\mu(\emptyset) = \int_{\emptyset} h_\lambda(y) dm(y) = 0$.
- Dada $\{(a_n, b_n)\}$ una colección numerable disjunta de intervalos en \mathbb{R} . Si queremos calcular la integral de la función h_λ sobre la unión de todos estos intervalos, al ser intervalos disjuntos, la integral definida se descompone como una suma de las integrales extendidas a dichos intervalos.

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\right) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)} h_\lambda(y) dm(y) = \int_{a_1}^{b_1} h_\lambda(y) dm(y) + \int_{a_2}^{b_2} h_\lambda(y) dm(y) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} h_\lambda(y) dm(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)). \end{aligned}$$

Por tanto, μ es σ -aditiva.

Así, la función μ es una medida. Además, de la ecuación (1.24) tenemos que dicha medida sobre el total vale

$$\mu(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) dm(y) = 1.$$

Teorema 1.5.10. *Si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ y g es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

Demostración. Como vimos en la ecuación (1.24), la integral de $h_\lambda(x)$ es 1. Como consecuencia tenemos,

$$\begin{aligned} (g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) h_\lambda(y) dm(y) - g(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) h_\lambda(y) dm(y) - g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) h_\lambda(y) dm(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h_\lambda(y) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)] h_\lambda(y) dm(y). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Por otro lado, de la ecuación (1.23) que hemos demostrado previamente se deduce

$$h_\lambda(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\lambda} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Así la ecuación (1.28) se transforma en

$$(g * h_\lambda)(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)] \lambda^{-1} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm(y).$$

Por último, haciendo el cambio de variable $y = \lambda z \rightarrow dm(y) = \lambda dm(z)$ sobre esta última expresión tenemos

$$(g * h_\lambda)(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x - \lambda z) - g(x)] h_1(z) dm(z).$$

Por hipótesis $g \in L^\infty$, en particular se tiene que $\|g\|_\infty < \infty$. Por tanto el integrando en esta última expresión estaría mayorado por $2\|g\|_\infty h_1(z)$.

Así haciendo uso del teorema de la convergencia dominada, Teorema 1.2.3, sobre esta última integral, tenemos finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x - \lambda z) - g(x)] h_1(z) dm(z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} [g(x - \lambda z) - g(x)] h_1(z) dm(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

□

Teorema 1.5.11. Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p$, entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Demostración. En primer lugar queremos ver que la convolución $(f * h_\lambda)(x)$ está bien definida para todo x . Por la desigualdad de Hölder vista en el Teorema 1.5.5, tenemos

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)h_\lambda(y)dm(y) \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)^p dm(y) \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y)^q dm(y) \right)^{1/q}, \quad (1.29)$$

siendo q el exponente conjugado de p , esto es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Como hemos dicho previamente, esta relación implica $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$. En particular, al ser $p \geq 1$, entonces q siempre debe ser mayor que 1. Además, cuando $p \rightarrow 1$ obliga a que $q \rightarrow \infty$. Consecuentemente, 1 y ∞ se consideran también como un par de exponentes conjugados.

Por hipótesis, $f \in L^p$. Veamos que $h_\lambda(x) \in L^q$, para que la convolución $f * h_\lambda$ en (1.29) esté definida. A partir del valor de la función $h_\lambda(x)$ dado en (1.23) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda^q(x) dm(x) &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^q}{(\lambda^2 + y^2)^q} dm(y) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\lambda^q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{2q}}{(\lambda^2 + y^2)^q} dm(y) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\lambda^q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2\right)^q} dm(y). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{y}{\lambda} = z \rightarrow dm(y) = \lambda dm(z)$ sobre esta última expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda^q(x) dm(x) &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{\lambda}{\lambda^q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + z^2)^q} dm(z) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\lambda^{q-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + z^2)^q} dm(z). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Fijamos ahora nuestra atención en el integrando. Demostraremos a continuación que las funciones potenciales $f(z) := (1 + z^2)^r$ son tanto mayores cuanto mayor sea su grado r para $r > 1$, $r \in \mathbb{R}$. Consideremos dos valores reales r_1 y r_2 y supongamos sin pérdida de generalidad que es $r_1 < r_2$. Queremos demostrar que para cualquier z en \mathbb{R} , se cumple $f_{r_1} \leq f_{r_2}$. Dividiendo f_{r_2} por f_{r_1} se tiene

$$\frac{f_{r_2}}{f_{r_1}} = \frac{(1 + z^2)^{r_2}}{(1 + z^2)^{r_1}} = (1 + z^2)^{r_2 - r_1}.$$

Dado que $r_1 < r_2$ el exponente es positivo, y al ser $(1 + z^2) \geq 1$ entonces $(1 + z^2)^{r_2 - r_1}$ es mayor o igual que 1 para cualquier z . Por tanto hemos demostrado que

$$\frac{f_{r_2}}{f_{r_1}} \geq 1,$$

lo que implica que $f_{r_2}(z)$ es mayor que $f_{r_1}(z)$ para todo z como queríamos ver. Así tomando $r = q$ donde $q > 1$, por ser el exponente conjugado de p , tenemos

$$(1 + z^2)^q \geq (1 + z^2),$$

e invirtiendo esta desigualdad

$$\frac{1}{(1 + z^2)^q} \leq \frac{1}{(1 + z^2)}. \quad (1.31)$$

De la desigualdad (1.31) recién argumentada, se sigue la siguiente cadena de desigualdades a partir de ecuación (1.30)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x)^q dm(x) &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\lambda^{q-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + z^2)^q} dm(z) \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\lambda^{q-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + z^2)} dm(z) \\ &= \frac{1}{\lambda^{q-1}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan(z) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda^{q-1}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi < \infty. \end{aligned}$$

En estos últimos pasos hemos omitido varios cálculos pues son análogos a los realizados durante la prueba de la igualdad (1.24). Así tenemos $h_\lambda \in L^q$ y todos los términos en la desigualdad de Hölder vista al inicio de este teorema, (1.29), están bien definidos. En otras palabras, la convolución $(f * h_\lambda)(x)$ está definida para todo x .

Una vez hemos visto que la convolución de las dos funciones está bien definida, nos disponemos a demostrar el límite que se da en el enunciado. Para ello haremos uso de la igualdad (1.24):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) = 1.$$

Esta igualdad nos da

$$\begin{aligned} (f * h_\lambda)(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) h_\lambda(y) dm(y) - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) h_\lambda(y) dm(y) - f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) h_\lambda(y) dm(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h_\lambda(y) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x - y) - f(x)] h_\lambda(y) dm(y). \end{aligned}$$

Ahora tomamos el valor absoluto de la igualdad anterior y elevamos a p , obteniendo así

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x - y) - f(x)] h_\lambda(y) dm(y) \right|^p. \quad (1.32)$$

Aplicaremos la desigualdad de Jensen, Teorema 1.5.3, a la función real $f(x - y) - f(x)$. Por un lado, tomamos como función convexa $\varphi(t) = |t|^p$, que es la composición de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ dada por $g(t) = |t|$, convexa por la desigualdad triangular, y de la función $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $h(t) = t^p$, que es no decreciente al ser $p \geq 1$ y convexa, pues su segunda derivada satisface,

$$h'(t) = pt^{p-1}, \quad h''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0,$$

donde en esta última desigualdad se ha tenido en cuenta que estamos trabajando con $p \geq 1$. Así las funciones g y h verifican las condiciones del Lema 1.5.2, y por tanto la composición $\varphi = h \circ g$ es convexa.

Por otro lado, vimos en la Observación 1.5.9 que la medida dada por

$$\mu(a, b) = \int_a^b h_\lambda(y) dm(y),$$

verifica $\mu(\mathbb{R}) = 1$. De modo que estamos en las condiciones de aplicar la desigualdad de Jensen sobre la identidad (1.32), obteniendo

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x - y) - f(x)] h_\lambda(y) dm(y) \right|^p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y) - f(x)|^p h_\lambda(y) dm(y).$$

A continuación integremos esta última desigualdad respecto a x . Recordando la definición de la norma definida sobre el espacio de funciones L^p que hemos dado al comienzo de esta sección, una aplicación del teorema de Fubini, Teorema 1.2.2, nos da

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - f\|_p^p &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p dm(x) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y) - f(x)|^p h_\lambda(y) dm(y) \right) dm(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y) - f(x)|^p dm(x) \right) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) \|f_y - f\|_p^p dm(y), \end{aligned} \tag{1.33}$$

donde en ésta última desigualdad hemos aplicado la noción de trasladada de f , definida en la ecuación (1.14).

Definimos la función $g(y) := \|f_y - f\|_p^p$, así de la ecuación (1.33) tenemos que

$$\|f * h_\lambda - f\|_p^p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) g(y) dm(y). \tag{1.34}$$

Por el Teorema 1.5.7, la función $y \rightarrow f_y$ es una aplicación uniformemente continua de \mathbb{R} en $L^p(\mathbb{R})$, es decir,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ tales que } |s - t| < \delta \text{ se tiene } \|f_s - f_t\|_p < \epsilon. \tag{1.35}$$

Esto nos permite probar las siguientes afirmaciones:

- *g es acotada.* Para $p \geq 1$ y haciendo uso de la homogeneidad y de la desigualdad triangular de la norma: $\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$, tenemos

$$\|f_y - f\|_p \leq \|f_y\|_p + \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_y(x)|^p dm(x) \right)^{1/p} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dm(x) \right)^{1/p}$$

Como f es una función en el espacio L^p podemos asegurar que la suma anterior es finita. De esta manera existirá una constante estrictamente positiva M tal que $g(y) = \|f_y - f\|_p^p \leq M$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

- *g es continua.* Sea $\epsilon > 0$. Tomamos $t \in \mathbb{R}$ tan que $|t| < \delta$, siendo δ el dado en la propiedad de continuidad uniforme de f , en la ecuación 1.35, así es $\|f_{y-t} - f_y\|_p < \epsilon$. A continuación vamos a hacer uso de la desigualdad triangular inversa sobre el espacio normado L^p : $|\|f\|_p - \|g\|_p| \leq \|f - g\|_p$.

$$\left| \|f_{y-t} - f\|_p - \|f_y - f\|_p \right| \leq \|f_{y-t} - f - (f_y - f)\|_p = \|f_{y-t} - f_y\|_p < \epsilon$$

de aquí deducimos que la norma $\|f_y - f\|_p$ es continua para todo y y al ser $g(y) = \|f_y - f\|_p^p$ la composición de dos funciones continuas, deducimos que es también continua para todo y .

En consecuencia g es acotada y continua, y se tiene $g(0) = 0$. Así por el Teorema 1.5.10, el último miembro de (1.34) tiende a 0 cuando $\lambda \rightarrow 0$. En efecto, teniendo en cuenta la conmutatividad de la convolución vista en el Teorema 1.3.2 y que $h_\lambda(x)$ es una función par, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y)g(y)dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(-y)g(y)dm(y) = (h_\lambda * g)(0) = (g * h_\lambda)(0) = (g * h_\lambda)(0) - g(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

En conclusión, tomando límites en la ecuación (1.34) y aplicando esto último que acabamos de probar, tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_p^p \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y)g(y)dm(y) = 0.$$

En particular,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0,$$

como queríamos ver. □

Ahora sí, llegamos al propósito central de este capítulo.

Teorema 1.5.12 (Teorema de inversión). [4] Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, y si

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}dm(y), \quad x \in \mathbb{R}$$

entonces $g \in \mathcal{C}_0$ y $f(x) = g(x)$ en c.t.p.

Demostración. El teorema de Fubini, visto en el Teorema 1.2.2, nos proporciona la igualdad

$$\begin{aligned} (f * h_\lambda)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)h_\lambda(y)dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} e^{iyt} dm(t) \right) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{iyt} dm(y) \right) dm(t). \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $x - y = z \rightarrow dm(y) = -dm(z)$ sobre la integral que queda en el

interior,

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} \left(\int_{+\infty}^{-\infty} f(z) e^{it(x-z)} (-dm(z)) \right) dm(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} \left(e^{itx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-itz} dm(z) \right) dm(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} e^{itx} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-itz} dm(z) \right) dm(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda t|} e^{itx} \hat{f}(t) dm(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{itx} e^{-|\lambda t|} dm(t).
 \end{aligned}$$

Notamos que el integrando de esta última expresión está acotado por $|\hat{f}(t)|$, donde por hipótesis $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto, tenemos que

$$|\hat{f}(t) e^{itx} e^{-|\lambda t|}| = |\hat{f}(t) e^{-|\lambda t|}| \leq |\hat{f}(t)|.$$

A su vez, ésta última desigualdad se debe a que al ser la función exponencial creciente, se dan las siguientes desigualdades

$$0 \leq |\lambda t| \iff 0 \geq -|\lambda t| \iff 1 = e^0 \geq e^{-|\lambda t|}.$$

Fijado un número real t , claramente se verifica

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-|\lambda t|} = 1.$$

Así, aplicando el teorema de la convergencia dominada, visto en el Teorema 1.2.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * h_\lambda)(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{itx} e^{-|\lambda t|} dm(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{f}(t) e^{itx} e^{-|\lambda t|} dm(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dm(t) = g(x).
 \end{aligned}$$

Donde en el enunciado del teorema, habíamos llamado $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dm(t)$.

Así hemos probado que la función $(f * h_\lambda)(x)$ converge a $g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Por otro lado, en virtud del Teorema 1.5.11 visto en esta sección, debe ser

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales que converge a 0, y consideramos la sucesión de funciones $\{f * h_{\lambda_n}\}$. Tenemos así que $\{f * h_{\lambda_n}\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\mathbb{R})$ con límite f . El Teorema 1.5.6 nos garantiza que dicha sucesión posee una subsucesión que converge puntualmente en casi todo punto a $f(x)$, es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f * h_{\lambda_{n_k}})(x) = f(x).$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (f * h_{\lambda_n})(x) - f(x) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (f * h_{\lambda_n})(x) - (f * h_{\lambda_{n_k}})(x) + (f * h_{\lambda_{n_k}})(x) - f(x) \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (f * h_{\lambda_n})(x) - (f * h_{\lambda_{n_k}})(x) \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (f * h_{\lambda_{n_k}})(x) - f(x) \right| \\
 &= 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Esto implica que la diferencia entre $(f * h_{\lambda_n})(x)$ y $f(x)$ tiende a 0 para cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, en otras palabras la sucesión $(f * h_{\lambda_n})$ converge puntualmente a f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x) \quad \text{p.c.t } x \in \mathbb{R}$$

En consecuencia $f(x) = g(x)$ p.c.t x . Que $g \in \mathcal{C}_0$ se deduce del Teorema 1.5.8 visto en esta sección. □

Como consecuencia del teorema de inversión de Fourier, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 1.5.13 (Fórmula del Área). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ con transformada de Fourier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dm(x) = f(0).$$

En particular para f par,

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(x) dm(x) = \frac{1}{2} f(0).$$

Demostración. Por la fórmula proporcionada por el teorema de inversión, vista en el Teorema 1.5.12 se tiene

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dm(y).$$

Evaluando f en $x = 0$ tenemos

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-i \cdot 0 \cdot y} dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) dm(y).$$

De donde deducimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) dm(y) = f(0).$$

Pasamos a demostrar ahora la segunda ecuación del enunciado. Para f función par, teniendo en cuenta que \hat{f} también lo sería por la paridad de la transformada de Fourier, vista en la Proposición 1.4.5, tenemos

$$2 \int_0^{+\infty} \hat{f}(y) dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) dm(y) = f(0).$$

De aquí se deduce,

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(y) dm(y) = \frac{1}{2} f(0).$$

□

Observación 1.5.14. Como se ha comentado al inicio de esta sección, la medida dm equivale a la medida de Lebesgue dividida por $\sqrt{2\pi}$. Véase la ecuación (1.10). Así de esta proposición deducimos que para $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dx = \sqrt{2\pi} f(0).$$

Y para f par,

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(0).$$

A continuación proporcionamos una demostración de la fórmula de Parseval. Para la prueba nos hemos basado en el Teorema 5.6, p. 285 del libro [3].

Teorema 1.5.15 (Fórmula de Parseval). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ funciones reales con respectivas transformadas de Fourier $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dm(x), \quad (1.36)$$

y además,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dm(x). \quad (1.37)$$

Demostración. Demostramos en primer lugar la ecuación (1.36). Para ello haremos uso de la definición de transformada de Fourier, dada en la ecuación (1.12) al inicio de esta sección.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ixy}dm(y) \right) dm(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(y)e^{-ixy}dm(y)dm(x). \end{aligned}$$

Una aplicación directa del teorema de Fubini nos permite extraer la función $g(y)$ de la integral en función de la variable x

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(y)e^{-ixy}dm(x)dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-ixy}dm(x) \right) g(y)dm(y). \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $[z = -x, dm(z) = -dm(x)]$ sobre el integrando anterior y haciendo uso de la paridad de la transformada de Fourier, vista en la Proposición 1.4.5, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{+\infty}^{-\infty} \hat{f}(-z)e^{-i(-z)y}(-dm(z)) \right) g(y)dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(z)e^{iyz}dm(z) \right) g(y)dm(y). \end{aligned}$$

Finalmente, de la fórmula de inversión dada en el Teorema 1.5.12, deducimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dm(x).$$

En la última igualdad se ha hecho un cambio de notación $x = y$ para llegar a una expresión en función de x . De modo que hemos evidenciado la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dm(x).$$

Demostramos ahora la igualdad (1.37) del enunciado.

Por hipótesis es $f \in L^1$, veamos que esto implica que su transformada está acotada. En efecto, usando la definición de transformada de Fourier, dada en la ecuación (1.12) al comienzo de esta sección, tenemos

$$|\hat{f}(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dm(y) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)e^{-ixy}|dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dm(y) = \|f\|_1 < \infty.$$

Comprobamos también que si $\hat{f} \in L^1$ entonces $\hat{f} \in L^2$. Para ello utilizaremos la definición de norma 2 proporcionada en la ecuación (1.11), también al inicio de esta sección.

Así, llamando M a la cota superior de \hat{f} , i.e. $M = \sup \hat{f}$, obtenemos

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)| |\hat{f}(x)| dm(x) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)| dm(x) = M \|\hat{f}\|_1 < \infty.$$

Luego $\hat{f} \in L^2$.

Veamos que, al igual que \hat{f} , f pertenece también al espacio L^2 . Para ello, utilizaremos un procedimiento análogo al anterior, pero esta vez aplicando el teorema de inversión, visto en el Teorema 1.5.12

$$|f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dm(y) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y) e^{ixy}| dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| dm(y) = \|\hat{f}\|_1 < \infty.$$

Esta última desigualdad se debe a que $\hat{f} \in L^1$ por hipótesis. Así, f está acotada y llamaremos C a su cota superior, i.e. $C = \sup f$. Utilizando la definición de norma 2 obtenemos

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |f(x)| dm(x) \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dm(x) = M \|f\|_1 < \infty,$$

donde en esta última igualdad se ha tenido en cuenta que $f \in L^1$. Así tanto f como \hat{f} están en L^2 , consecuentemente ambas integrales en la ecuación (1.37) están bien definidas y reemplazando la función $g = f$ en la ecuación (1.36) tenemos la ecuación del enunciado y en particular que

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

□

Como corolario de la fórmula de Parseval, tenemos los dos siguientes resultados.

Corolario 1.5.16. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ funciones reales con respectivas transformadas de Fourier $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Si además las funciones f, g son pares, entonces

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dm(x) = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) dm(x).$$

Demostración. Para la prueba basta tener en cuenta que al ser f y g funciones pares, utilizando de la paridad de la transformada Fourier, vista en la Proposición 1.4.5, deducimos que también lo son \hat{f} y \hat{g} . Así, como estamos en las condiciones de la fórmula de Parseval, tenemos

$$2 \int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dm(x) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) g(x) dm(x).$$

En estas igualdades se ha tenido en cuenta que la multiplicación de funciones pares es una función par. Finalmente, esta igualdad implica,

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dm(x) = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) dm(x).$$

Como queríamos ver. □

Capítulo 2

Las integrales de Borwein.

En este capítulo introduciremos las integrales de Borwein expuestas en el artículo [1]. Además, haremos uso del libro de análisis real y complejo [4], para analizar las integrales complejas que aparecen en este capítulo.

2.1. Introducción a las integrales de Borwein

Las integrales de Borwein, presentadas por primera vez por los matemáticos David y Jonathan Borwein (padre e hijo respectivamente) en 2001, son unas integrales con unas propiedades muy peculiares. Para establecer la fórmula general de estas integrales consideramos una sucesión $\{a_n\}$ de números reales positivos, definiendo así las integrales

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \text{senc}(a_k x) dx, \quad (2.1)$$

donde la función $\text{senc}(x)$ es la llamada función seno cardinal. Las expresiones dadas por la ecuación (2.1) se conocen como las *integrales de Borwein*.

Los Borwein describieron un hecho sorprendente utilizando las mencionadas funciones $\text{senc}(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ &\vdots \\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{7}\right)}{\frac{x}{7}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{9}\right)}{\frac{x}{9}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{11}\right)}{\frac{x}{11}} \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}} dx &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

mientras que incluyendo el término correspondiente a la fracción $\frac{x}{15}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} \cdot \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \cdot \dots \cdot \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}} \cdot \frac{\text{senc}\left(\frac{x}{15}\right)}{\frac{x}{15}} dx \approx \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 10^{-11} < \frac{\pi}{2}.$$

Se dice que, cuando este hecho fue comprobado por un investigador que utilizaba un paquete de código de álgebra computacional, llegó a la conclusión de que debía de haber un “bug” en el software. Sin embargo no era un error, esta serie de integrales sólo da $\frac{\pi}{2}$ hasta un cierto punto, y luego se rompe. Como cabía esperar, esto asombró a la gran mayoría de los lectores matemáticos, ya que sobre todo esos lectores extrapolan mentalmente la secuencia mostrada en y tienden a pensar que algo fundamental debía cambiar cuando se introduce el factor $\text{senc}(\frac{x}{15})$ en la integral. La demostración de este hecho es intelectualmente atractiva, aunque resulta difícil de entender realmente. En el Capítulo 3 ofrecemos una prueba de los Borwein detallada y fácil de seguir, que nos permitirá comprender qué es lo que cambia fundamentalmente cuando la secuencia se rompe.

Tras una breve motivación de este proyecto, estudiaremos la función que viene multiplicada iterativamente en las integrales de Borwein.

2.2. El seno cardinal.

Como hemos visto, las integrales de Borwein utilizan productos de senos cardinales. Estos se definen como una función definida para $x \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

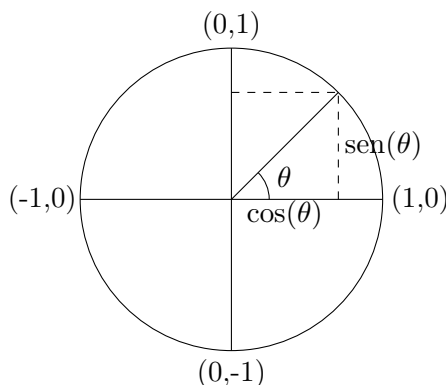
$$\text{senc}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

teniendo en $x = 0$ una singularidad evitable, la cual generalmente se redefine específicamente como igual a 1 para mantener la continuidad. Estudiemos esta última afirmación.

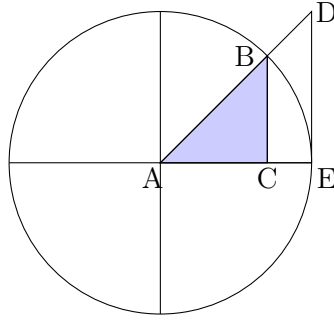
Nos disponemos a demostrar geométricamente el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Para construir la prueba, haremos uso de la trigonometría. Trabajaremos sobre el círculo unitario. Para llevar a cabo operaciones trigonométricas sobre dicho círculo, lo dividiremos en 4 secciones iguales, que se corresponderán a sus 4 cuadrantes.



Construiremos la prueba sobre el primer cuadrante. Para empezar, consideramos dos triángulos similares, ABC y ADE , y coloreamos el pequeño, ABC , de azul para distinguirlo. Notamos que ambas hipotenusas están en la misma línea.



Al estar trabajando sobre el círculo unitario, la hipotenusa AB del triángulo pequeño es 1. El lado BC , por definición se corresponde a

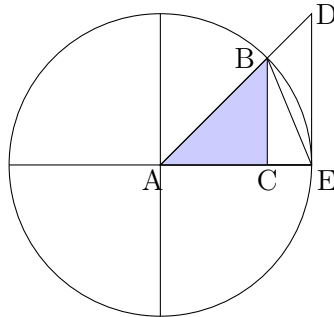
$$\text{sen}(\theta) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1},$$

luego $BC = \text{sen}(\theta)$. Usaremos también una función trigonométrica para definir el lado DE del triángulo ADE . Como el lado AE del triángulo ADE es igual al radio del círculo unidad, tiene sentido usar la función tangente

$$\tan(\theta) = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{1} = DE,$$

luego $DE = \tan(\theta)$.

Conectamos ahora los vértices B y E con una línea, y llamemos a este triángulo ABE .



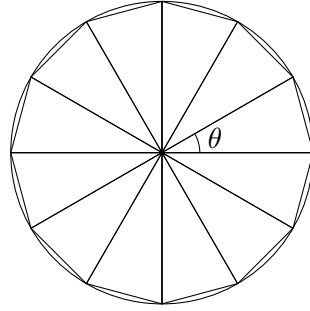
Dicho triángulo tiene base $AE = 1$ y altura $BC = |\text{sen}(\theta)|$, donde podemos tomar valor absoluto ya que la altura es una medida positiva al estar trabajando en el primer cuadrante. Luego, el área del triángulo ABE es igual a

$$A_{ABE} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{|\text{sen}(\theta)|}{2}.$$

Análogamente el área del triángulo grande ADE con base $AE = 1$ y altura $DE = |\tan(\theta)|$ será

$$A_{ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{|\tan(\theta)|}{2}.$$

Buscamos ahora el área de la sección circular ABE . Trabajando en radianes, un círculo unitario tiene 2π radianes de perímetro y área π . Dividimos el círculo en porciones de ángulo θ . El número de secciones circulares que aparecerán será $\frac{2\pi}{\theta}$. Para ver esto último, basta extender el perímetro del círculo sobre una línea recta de longitud 2π , y fragmentarla en segmentos de longitud θ , obteniendo el número de segmentos de longitud θ que aparecen.



Así el área total del círculo debe coincidir con el número de veces que aparece la sección circular de ángulo θ multiplicado por el área de la sección, que es nuestra incógnita.

$$\frac{2\pi}{\theta} \cdot A_{\text{sección}} = \pi$$

$$A_{\text{sección}} = \frac{\theta}{2\pi} \pi = \frac{|\theta|}{2},$$

como el área debe ser no negativa, usamos de nuevo el valor absoluto. Comparando estas tres áreas, la del triángulo pequeño ABE , la del triángulo grande ADE y la de la sección circular, podemos observar que el área del triángulo ABE es menor o igual que el área de la sección circular ABE , y a su vez dicha sección ABE es menor o igual que el área del triángulo grande ADE . Por tanto tenemos las siguientes desigualdades,

$$\frac{|\text{sen}(\theta)|}{2} \leq \frac{|\theta|}{2} \leq \frac{|\tan(\theta)|}{2}.$$

Multiplicando por 2 tenemos

$$|\text{sen}(\theta)| \leq |\theta| \leq |\tan(\theta)| = \frac{|\text{sen}(\theta)|}{|\cos(\theta)|}$$

Dividiendo todos los términos entre el valor absoluto de $\text{sen}(\theta)$

$$1 \leq \frac{|\theta|}{|\text{sen}(\theta)|} \leq \frac{1}{|\cos(\theta)|}$$

Invirtiendo la desigualdad

$$1 \geq \frac{|\text{sen}(\theta)|}{|\theta|} \geq |\cos(\theta)|$$

Por el teorema del emparedado, como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} |\cos(\theta)| = 1$$

podemos concluir que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|\text{sen}(\theta)|}{|\theta|} = 1.$$

2.3. Cálculo de la integral principal.

Como hemos anticipado al comienzo de este capítulo, la integral de Borwein gira entorno al cálculo de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx.$$

Es por ello que esta sección la dedicaremos a determinar el valor de la mencionada integral. Para ello, haremos uso de un teorema fundamental del análisis complejo: el Teorema de los residuos de Cauchy.

Para comprender dicho teorema, citaremos algunas definiciones y resultados vistos en la asignatura de *Funciones de variable compleja*.

En lo que sigue trabajaremos con un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y con una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Definición 2.3.1. Diremos que f es *holomorfa* en $z_0 \in \Omega$ (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Diremos que la función f es holomorfa en Ω , y lo denotaremos por $f \in H(\Omega)$, si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$.

Definición 2.3.2. Diremos que $a \in \Omega$ es una *singularidad aislada* de f si existe $R > 0$ tal que

$$f \in H(D_R(a) \setminus \{a\}),$$

siendo $D_R(a) \setminus \{a\}$ el disco centrado en el punto a y agujereado en a . Concretamente, diremos que

- a es una *singularidad evitable* si existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \in \mathbb{C}$.
- a es un *polo* si existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
- a es una *singularidad esencial* si no existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Damos ahora una definición más concisa del concepto de polo.

Definición 2.3.3. Sea $a \in \Omega$ una singularidad aislada de f . Si existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$, y un número $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, de manera que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n},$$

para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$, entonces decimos que a es un *polo* de f .

Si el número n se escoge tan pequeño como sea posible, entonces n se le denomina *orden del polo*. Es decir,

$$o(a, f) = \min \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}, \quad g(a) \neq 0 \right\}.$$

Dada $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ una curva cerrada, denotaremos por γ^* a su imagen sobre Ω .

Definición 2.3.4. Intuitivamente, se define el *índice* de una curva cerrada γ en el plano alrededor de un punto a que no se encuentre en la curva, como el entero que representa el número total de vueltas que la curva describe alrededor del punto a . Lo denotaremos por $I(\gamma, a)$.

Definición 2.3.5. Un *ciclo cerrado* Γ es un conjunto de curvas cerradas,

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}.$$

La *integral sobre un ciclo cerrado* Γ se define como

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

El *índice de un ciclo cerrado* Γ alrededor de un punto $a \notin \Gamma^*$ se define como

$$I(\Gamma, a) := \sum_{i=1}^N I(\gamma_i, a).$$

Definición 2.3.6. Sea Γ un ciclo cerrado con $\Gamma^* \subset \Omega$. Decimos que Γ es *homólogo a 0 respecto de Ω* , escribiremos $\Gamma \sim 0$ (resp. Ω), si

$$I(\Gamma, z) = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Definición 2.3.7. Llamamos *serie de Laurent* con coeficientes $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y centro $a \in \mathbb{C}$ a la serie formal

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n.$$

A continuación citamos un teorema que dará paso al concepto de *residuo*. Antes del teorema, aclaramos que representaremos la corona de radio menor R_1 y radio mayor R_2 centrada en a , por el conjunto,

$$D(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}.$$

Teorema 2.3.8. (*Teorema de Laurent*) Sea $f \in H(D(a, R_1, R_2))$ con $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Entonces existe una única sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n,$$

con convergencia uniforme y absoluta en compactos de $D(a, R_1, R_2)$. Además los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y } r \in (R_1, R_2).$$

Definición 2.3.9. Si a es una singularidad aislada de f , se llama *residuo de f en a* , y se representa por $\text{Res}(f, a)$, al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f con centro en a y convergente en un entorno reducido de a .

Teorema 2.3.10. (*Teorema de los residuos de Cauchy*) Sea $f \in H(\Omega \setminus A)$ siendo A el conjunto formado por todos los polos o singularidades esenciales de f en Ω , denotaremos por a a sus elementos. Sea Γ un ciclo cerrado con imagen $\Gamma^* \subseteq \Omega \setminus A$ y $\Gamma \sim 0$ (resp. Ω). Entonces,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) I(a, \Gamma).$$

Lema 2.3.11. Sea $f \in H(D_R(a) \setminus \{a\})$ siendo a un polo de orden 1. Sea $c_\epsilon = \{a + \epsilon e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c_\epsilon} f(x) dx = \pi i \text{Res}(f, a)$$

Lema 2.3.12. Si $a \in P_f$ de orden $O(a, f) = N$, entonces

$$\text{Res}(f, a) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{((z-a)^N f(z))^{(N-1)}}{(N-1)!}$$

Para el cálculo de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

recurriremos al análisis complejo, ya que la función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ no tiene primitiva elemental, luego no podremos resolverla aplicando técnicas habituales del cálculo de integrales.

Para su cálculo, determinamos el valor la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx + i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx,$$

y consideraremos su parte imaginaria, que se corresponderá al valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$.

Definimos una función f que sea holomorfa en las condiciones del teorema de los residuos de Cauchy:

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

siendo $x = 0$ un polo simple de f (singularidad aislada).

A continuación definimos el contorno

$$\Gamma_{\epsilon,R} = [-R, -\epsilon] \cup C_{\epsilon}^{-} \cup [\epsilon, R] \cup C_R^{+}.$$

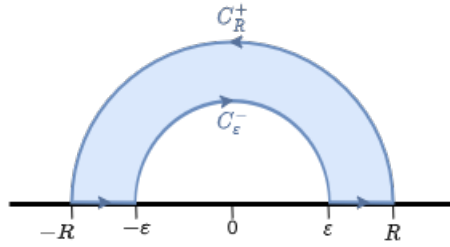


Figura 2.1: Contorno.

El tramo C_{ϵ}^{-} consistiría en la curva $c_{\epsilon} = \{a + \epsilon e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ recorrida en sentido horario, mientras que C_R^{+} es la curva $c_R = \{a + R e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ recorrida en sentido antihorario. Por el teorema de los residuos de Cauchy, Teorema 2.3.10, tenemos

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ix}}{x}, 0\right) \cdot I(\Gamma_{\epsilon,R}, 0) = 0,$$

donde $I(\Gamma_{\epsilon,R}, 0)$ representa el índice de la curva cerrada $\Gamma_{\epsilon,R}$ en el plano alrededor del 0, es decir, es el entero que indica el número total de vueltas que la curva describe alrededor del punto, que en este caso es 0, ya que la curva no rodea al punto.

Teniendo en cuenta esto último, vamos a calcular las siguientes integrales:

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(x) dx = \int_{[-R, -\epsilon]} f(x) dx + \int_{C_{\epsilon}^{-}} f(x) dx + \int_{[\epsilon, R]} f(x) dx + \int_{C_R^{+}} f(x) dx. \quad (2.2)$$

Denotamos respectivamente dichas integrales por I_1, I_2, I_3, I_4 , las calculamos una a una, haciendo uso de los resultados previos a esta sección y determinamos los límites cuando $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$.

- Calculamos la primera integral

$$I_1 = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-iz}}{-z} (-dz) = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-iz}}{z} dz = - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-iz}}{z} dz = - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

- Determinamos ahora el valor de la segunda integral. Por un lado invirtiendo el sentido en el que se integra la función f , tenemos

$$I_2 = \int_{C_\epsilon^-} f(x)dx = - \int_{C_\epsilon^+} f(x)dx.$$

Notamos que la función $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$ tiene en $x = 0$ un polo de orden 1.

Así, tomando límites sobre I_2 cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y aplicando el Lema 2.3.11 mencionado al inicio de esta sección, tenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{C_\epsilon^+} f(x)dx = -\pi i \operatorname{Res}(f, 0). \quad (2.3)$$

Sabemos que $x = 0$ es un polo de orden 1. Así aplicando ahora el Lema 2.3.12, también enunciado al principio de esta sección, tenemos que el valor de $\operatorname{Res}(f, 0)$ es

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{e^{ix}}{x} = 1$$

De este modo podemos concluir que la ecuación (2.3) se transforma en

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\pi i$$

- La tercera integral es

$$I_3 = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

- Para determinar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de la cuarta integral tendremos en cuenta la desigualdad $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

$$I_4 = \int_{C_R^+} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^\pi ie^{iRe^{it}} dt,$$

donde en la segunda igualdad se ha hecho el cambio de variable $[x = Re^{it}, dx = iRe^{it} dt]$.

Tomando módulos

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_0^\pi |ie^{iRe^{it}}| |dt| = \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}| |dt| = \int_0^\pi |e^{iR(\cos t + i \sin t)}| |dt| \\ &= \int_0^\pi |e^{iR \cos t}| |e^{-R \sin t}| |dt| = \int_0^\pi |e^{-R \sin t}| |dt|. \end{aligned}$$

Tomando límites sobre esta última expresión cuando $R \rightarrow \infty$ y haciendo uso del teorema de la convergencia dominada, visto en el Teorema 1.2.3, obtenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_4| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi |e^{-R \sin t}| |dt| = \int_0^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-R \sin t}| |dt| = 0.$$

siendo el límite igual a 0 dado que al ser $R > 0$ y $\sin t > 0$ en el intervalo $(0, \pi)$, tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \sin t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} \right)^{R \sin t} = 0,$$

por ser una potencia de base $\frac{1}{e} < 1$, por tanto su gráfica es decreciente.

Notamos además que los puntos $t = 0$ y $t = \pi$ suponen un problema en el cálculo del límite anterior, ya que en dichos puntos es

$$e^{-R \operatorname{sen} t} = e^0 = 1 \not\rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

Sin embargo al ser $\{0, \pi\}$ un conjunto de medida nula, no influye en el cálculo de la integral del límite.

Concluimos entonces que se da

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

A continuación tomando límites cuando $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ en la expresión (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) + (-i\pi) + \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + 0 \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx - i\pi \\ &= 2i \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{1}{x} dx - i\pi \\ &= 2i \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx - i\pi. \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos

$$0 = 2i \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx - i\pi = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx - i\pi,$$

luego el valor de la integral es

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{1}{2i} i\pi = \frac{\pi}{2}.$$

En la siguiente sección explicaremos el comportamiento de estas curiosas integrales aportando argumentos fehacientes basados en todos los resultados que se han visto hasta ahora.

Capítulo 3

El curioso y desconcertante comportamiento de las integrales de Borwein.

Llegamos ahora al propósito central de este trabajo. Basándonos en el artículo [1] hemos demostrado rigurosamente el teorema de mayor envergadura de las integrales de Borwein, aquel que desvela el motivo de la rotura tan brusca de la armoniosa regularidad que parecían seguir estas integrales.

3.1. Función rectangular.

Para poder llevar un seguimiento de la prueba del teorema recién mencionado, será esencial conocer la definición de las *funciones rectangulares* también conocidas como *funciones ventana unitaria* o *pulso unitario*:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

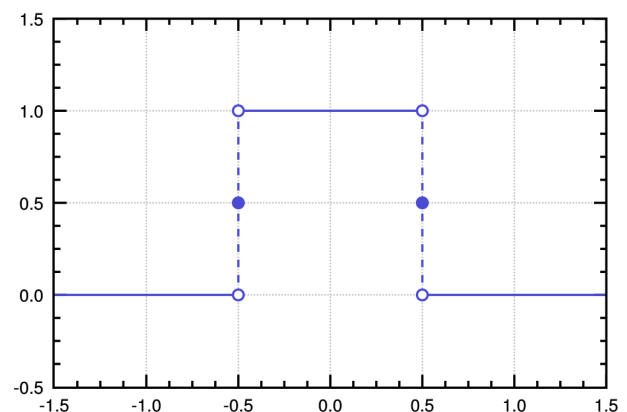


Figura 3.1: Función rectangular.

Definimos también las funciones,

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases} \quad (3.1)$$

Notamos que existe una clara relación entre las funciones rectangulares y las funciones $\chi_a(x)$, recién definidas. En efecto, para cualquier $a > 0$ las funciones rectángulo verifican,

$$\text{rect}(ax) = \begin{cases} 1 & \text{si } |ax| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |ax| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |ax| > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2a}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2a}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2a}. \end{cases}$$

De esta manera, podemos expresar las funciones rectangulares como sigue,

$$\text{rect}(ax) = \chi_{\frac{1}{2a}}(x).$$

Así podremos usar indistintamente ambas funciones. Sin embargo, durante la prueba del siguiente teorema, denotaremos las funciones rectangulares por $\chi_a(x)$ para mayor claridad.

3.2. Análisis del comportamiento de las integrales de Borwein.

Todos los conceptos y resultados vistos hasta ahora nos permiten demostrar finalmente el teorema que explica el comportamiento de las integrales de Borwein.

Teorema 3.2.1. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión de números positivos. Sea $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ y

$$\tau_n := \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \text{senc}(a_k x) dx.$$

i) Entonces

$$0 < \tau_n \leq \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2},$$

con igualdad si $n = 0$, o si $a_0 \geq s_n$ cuando $n \geq 1$.

ii) Si $a_{n+1} \leq a_0 < s_n$ con $n \geq 1$, entonces

$$0 < \tau_{n+1} \leq \tau_n < \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

i) *Demostración.* Si $n = 0$, como hemos visto en el Capítulo 2, resolviendo la integral impropia mediante el teorema de los residuos de Cauchy, que enunciamos en el Teorema 2.3.10, hemos obtenido

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{senc}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si sobre esta última integral, hacemos el cambio de variable $y = a_0x \rightarrow dy = a_0dx$, el valor de τ_n en $n = 0$ sería,

$$\tau_0 = \int_0^{+\infty} \text{senc}(a_0x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(a_0x)}{a_0x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} \frac{1}{a_0} dy = \frac{1}{a_0} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2},$$

y se tiene el resultado.

Asumimos por tanto que $n \geq 1$ y definimos la sucesión de funciones F_n de la siguiente manera,

$$F_0 := \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_0}, \quad (3.2)$$

y si $n \geq 1$,

$$F_n := (\sqrt{2\pi})^{1-n} f_1 * f_2 * \dots * f_n, \quad \text{donde } f_n := \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_n}. \quad (3.3)$$

Observamos que de la definición de las funciones F_n tenemos la identidad

$$\begin{aligned} F_n &= (\sqrt{2\pi})^{1-n} f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n \\ &= (\sqrt{2\pi})^{1-n+1-1} f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n \\ &= (\sqrt{2\pi})^{1-(n-1)-1} f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n \\ &= (\sqrt{2\pi})^{-1} \left((\sqrt{2\pi})^{1-(n-1)} f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} \right) * f_n \\ &= (\sqrt{2\pi})^{-1} F_{n-1} * f_n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Durante la prueba se hará uso frecuente de esta identidad.

A continuación demostraremos por inducción tres propiedades que verifican las funciones F_n así definidas, para todo $n \geq 1$.

- F_n es función par.

Es claro que la función F_0 definida en (3.2) es par, pues es la multiplicación de una constante por una función par. Del mismo modo se tiene que las funciones f_n definidas en (3.3) son pares. Consecuentemente, para F_1 se verifica,

$$F_1 = \sqrt{2\pi}^{1-1} f_1 = f_1.$$

Luego F_0 y F_1 son pares.

Para $n = 2$, en el Lema 1.3.5 vimos que la convolución de dos funciones pares es par. Al ser f_1 y f_2 funciones pares tenemos,

$$F_2 = \sqrt{2\pi}^{1-2} f_1 * f_2 = \sqrt{2\pi}^{-1} f_1 * f_2.$$

Por tanto, F_2 es también función par.

Aplicamos pues la hipótesis de inducción, para $n \geq 3$ y supongamos F_{n-1} par. De la identidad (3.4), tenemos

$$F_n = (\sqrt{2\pi})^{-1} F_{n-1} * f_n.$$

De modo que, al estar tomando como hipótesis de inducción que F_{n-1} es una función par y por lo razonado previamente, f_n también lo es, de nuevo haciendo uso del Lema 1.3.5, podemos concluir que F_n es par.

- A continuación, veamos que F_n es idénticamente nula en $(-\infty, -s_n) \cup (s_n, +\infty)$ y es positiva en $(-s_n, s_n)$. Equivalentemente,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > s_n, \\ > 0 & \text{si } |x| < s_n. \end{cases}$$

Demostraremos esta afirmación por inducción. Para $n = 1$, de la definición de las funciones $\chi_a(x)$ vista en la ecuación (3.1), tenemos

$$F_1(x) = f_1(x) = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a_1 = s_1, \\ > 0 & \text{si } |x| < a_1 = s_1. \end{cases}$$

Para $n = 2$, utilizando la igualdad (3.4) probada en el punto anterior, tenemos

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1 * f_2(x).$$

Recordando el Lema 1.3.3, visto en la Sección de Convolución 1.3 del Capítulo 1, aplicado a las funciones F_1 y f_2 , donde hemos visto que F_1 se anula en $|x| > s_1$ y f_2 se anula en $|x| > a_2$, por su definición dada en la fórmula (3.3), tenemos,

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1 * f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > s_1 + a_2 = s_2, \\ > 0 & \text{si } |x| < s_1 + a_2 = s_2. \end{cases}$$

Así pues, aplicaremos inducción para $n \geq 3$ y supondremos el resultado cierto para $n - 1$. Haciendo uso de la ecuación (3.4) sabemos que se da la igualdad,

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n(x).$$

Aplicando de nuevo el Lema 1.3.3, esta vez a las funciones F_{n-1} y f_n , donde F_{n-1} estamos suponiendo como hipótesis de inducción que se anula en $|x| > s_{n-1}$ y f_n se anula en $|x| > a_n$, por su definición dada en la fórmula (3.3), tenemos,

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > s_{n-1} + a_n = s_n, \\ > 0 & \text{si } |x| < s_{n-1} + a_n = s_n, \end{cases}$$

Como queríamos demostrar.

- Veamos también aplicando el método de inducción que la función F_n es integrable.

Para $n = 1$ es,

$$F_1(x) = f_1(x) = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_1}(x).$$

que es claramente integrable.

Supongamos que la hipótesis es cierta para $n - 1$ con $n \geq 2$ y veamos que se cumple para n . En la igualdad (3.4) se ha demostrado que para todo $n \geq 1$ se verifica,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n.$$

Como f_n es integrable por como está definida y F_{n-1} estamos asumiendo por hipótesis de inducción que también lo es, haciendo uso del Teorema 1.3.4 concluimos que su convolución $F_{n-1} * f_n$, y por tanto F_n , es integrable.

Seguidamente demostraremos que para $n \geq 1$ las funciones F_{n+1} son continuas. Para ello, tendremos en cuenta de nuevo la igualdad (3.4) y la noción de convolución de dos funciones, dada en la Definición 1.3.1, obteniendo así,

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(F_n * f_{n+1})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y)f_{n+1}(y)dy.$$

De la definición de las funciones f_n , dada en la fórmula (3.3), deducimos

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y)f_{n+1}(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y) \left(\frac{1}{a_{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_{n+1}}(y) \right) dy \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} F_n(x-y)dy. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $x-y=u \rightarrow dy = (-du)$ sobre el último integrando,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{x+a_{n+1}}^{x-a_{n+1}} F_n(u)(-du) \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} F_n(u)du. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Así pues, $F_{n+1}(x)$ es absolutamente continua en $(-\infty, +\infty)$, luego es derivable en casi todo $x \in (-\infty, +\infty)$ y en particular es continua en dicho intervalo.

A continuación nos disponemos a demostrar que las funciones F_n son monótonas no crecientes. Para ello consideraremos $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n \leq \min\{-s_n, x - a_{n+1}\}$. De esta última expresión (3.5) deducimos que podemos descomponer la integral definida como la resta de las integrales extendidas a los intervalos $[\alpha_n, x + a_{n+1}]$ y $[\alpha_n, x - a_{n+1}]$.

$$2a_{n+1}F_{n+1}(x) = \int_{\alpha_n}^{x+a_{n+1}} F_n(u)du - \int_{\alpha_n}^{x-a_{n+1}} F_n(u)du. \tag{3.6}$$

Definiendo la función $G_n(x) := \int_{\alpha_n}^x F_n(u)du$, la expresión (3.6) se transforma en

$$2a_{n+1}F_{n+1}(x) = G_n(x + a_{n+1}) - G_n(x - a_{n+1}). \tag{3.7}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, mencionado en el Teorema 1.2.1, al ser $F_n(u)$ integrable y continua para todo $u \in (-s_n, s_n)$, se tiene $G'_n(x) = F_n(x)$. Por tanto derivando la ecuación (3.7) respecto a x ,

$$2a_{n+1}F'_{n+1}(x) = G'_n(x + a_{n+1}) - G'_n(x - a_{n+1}) = F_n(x + a_{n+1}) - F_n(x - a_{n+1}). \tag{3.8}$$

A partir de esta igualdad, podremos comprobar fácilmente que las funciones F_n son monótonas no crecientes. Podemos intuir que la manera más sencilla de argumentarlo es utilizando el método de inducción.

Para $n = 1$ observamos que la función,

$$F_1(x) = f_1(x) = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_1}(x),$$

es monótona no creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Aplicamos ahora inducción y suponemos el resultado cierto para $n \geq 1$.

Para $x > 0$ se tiene $(x + a_{n+1}) \geq \max\{(x - a_{n+1}), (a_{n+1} - x)\}$. De manera que si tomamos como hipótesis de inducción que $F_n(x)$ es monótona no creciente en $(0, \infty)$, el término de la derecha en la igualdad (3.8) sería negativo y en consecuencia se tendría que $F'_{n+1}(x) \leq 0$ para casi todo $x \in (0, \infty)$. De este modo podemos concluir que $F_{n+1}(x)$ es monótona no creciente en $(0, \infty)$.

Una vez demostradas todas estas propiedades de las funciones F_n , vamos a argumentar la siguiente afirmación.

$$F_n \text{ es la FCT de } \sigma_n(x) := \prod_{k=1}^n \text{senc}(a_k x), \quad \text{y} \quad \sigma_n \text{ es la FCT de } F_n, \quad (3.9)$$

donde definíamos la transformada de Fourier coseno, FCT, de una función f en la Definición 1.4.1 del Capítulo 1. En primer lugar, veremos por inducción que esta afirmación se cumple para la transformada de Fourier, y posteriormente comprobaremos que también se verifica también para la transformada de Fourier coseno.

Así, comenzamos probando la segunda afirmación de (3.9) para la transformada de Fourier. De manera general, la transformada de Fourier de una función rectangular $\chi_a(x)$ para $a > 0$, viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_a(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_a(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iyx}}{-ix} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iax} - e^{iax}}{-ix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a e^{iax} - e^{-iax}}{ix} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ax} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{ax} \text{sen}(ax) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen}(ax)}{ax} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{senc}(ax). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esto nos permite intuir que las funciones rectangulares están estrechamente relacionadas con las funciones senos cardinales a través de la transformada de Fourier. Aplicando la igualdad anterior (3.10) al término a_1 , tenemos

$$\hat{\chi}_{a_1}(x) = a_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{senc}(a_1 x).$$

Vimos en la Proposición 1.4.4 que la transformada de Fourier es un operador lineal. Así, haciendo uso de este resultado y de la última igualdad, tenemos que la transformada de Fourier de la función F_1 , que definíamos en la fórmula (3.3), vale

$$\hat{F}_1(x) = \text{FT} \left(\frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_1}(x) \right) = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\chi}_{a_1}(x) = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(a_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{senc}(a_1 x) \right) = \text{senc}(a_1 x).$$

Suponemos ahora que el resultado es cierto para $n - 1$ con $n \geq 2$. Es decir, estamos tomando como hipótesis de inducción

$$\hat{F}_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \text{senc}(a_k x) = \sigma_{n-1}(x) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Por otro lado, la expresión (3.4) nos da la igualdad

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n.$$

De modo que si aplicamos la linealidad de la transformada de Fourier, vista en la Proposición 1.4.4, sobre la siguiente expresión, tenemos

$$\hat{F}_n(x) = \text{FT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{n-1} * f_n \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{FT}(F_{n-1} * f_n)(x). \quad (3.11)$$

Para ver que σ_n es la transformada de Fourier de F_n , tendremos en cuenta el Teorema 1.3.4, en el que vimos que si $f, g \in L^1$, entonces su convolución $(f * g)(x) \in L^1$.

Además, en virtud del teorema de convolución, visto en el Teorema 1.4.6, tenemos la igualdad

$$\text{FT}(f * g)(x) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(x) \hat{g}(x),$$

donde recordamos que tanto $\text{FT}(f)$ como \hat{f} representan la transformada de Fourier de una función f .

Partiendo de la igualdad (3.11), estos dos resultados nos permite construir la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{FT}(F_{n-1} * f_n)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} \hat{F}_{n-1}(x) \cdot \hat{f}_n(x) \right) \\ &= \hat{F}_{n-1}(x) \cdot \hat{f}_n(x). \end{aligned}$$

Usando ahora la hipótesis de inducción y la definición de la función f_n , dada en la fórmula (3.3), la expresión anterior se transforma en,

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x) &= \hat{F}_{n-1}(x) \cdot \hat{f}_n(x) \\ &= \sigma_{n-1}(x) \cdot \hat{f}_n(x) \\ &= \sigma_{n-1}(x) \cdot \text{FT} \left(\frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_n}(x) \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{n-1}(x) \cdot (\hat{\chi}_{a_n})(x). \end{aligned}$$

Como ya demostramos en (3.10), sabemos que la transformada de Fourier de una función rectangular viene dada en función del seno cardinal. De esta manera, de la expresión anterior tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x) &= \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{n-1}(x) \cdot (\hat{\chi}_{a_n})(x) \\ &= \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{n-1}(x) \left(a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{senc}(a_n x) \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sigma_{n-1}(x) \text{senc}(a_n x)) \\ &= \sigma_{n-1}(x) \text{senc}(a_n x) \\ &= \sigma_n(x). \end{aligned}$$

En definitiva hemos demostrado

$$\hat{F}_n(x) = \sigma_n(x). \quad (3.12)$$

Recíprocamente, demostraremos que F_n es la transformada de Fourier de σ_n por inducción.

Para $n = 1$ sabemos por lo que acabamos de demostrar que $\hat{F}_1(x) = \sigma_1(x)$. Aplicando la fórmula de inversión, vista en el Teorema 1.5.12, a F_1 , se tiene

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}_1(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(y) e^{ixy} dy. \quad (3.13)$$

Así pues, nos preguntamos si se da la igualdad

$$F_1(x) \stackrel{?}{=} \hat{\sigma}_1(x).$$

En primer lugar, veamos que la función seno cardinal $\text{senc}(a)$ se trata de una función par para todo $a > 0$. En efecto, al ser $\text{sen}(x)$ una función impar, se tiene la siguiente cadena de igualdades,

$$\text{senc}(-ax) = \frac{\text{sen}(-ax)}{-ax} = \frac{-\text{sen}(ax)}{-ax} = \frac{\text{sen}(ax)}{ax} = \text{senc}(ax) = \sigma_1(x) \quad (3.14)$$

Luego σ_1 es par.

De esta forma, haciendo el cambio de variable $y = -z \rightarrow dy = -dz$ sobre la definición de la transformada de Fourier de $\sigma_1(x)$, véase la Definición 1.4.1, tenemos así que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} \sigma_1(-z) e^{ixz} (-dz) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(z) e^{ixz} dz = F_1(x), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la expresión (3.13) recién observada.

Por lo tanto, el resultado se cumple para $n = 1$.

Suponemos el resultado cierto para $n - 1$ y consideramos $n \geq 2$. Para probar el resultado, será importante tener en cuenta la igualdad demostrada en (3.12), en la que se ha visto que para todo $n \geq 1$ se da

$$\hat{F}_n(x) = \sigma_n(x).$$

Aplicamos ahora la fórmula de inversión, vista en el Teorema 1.5.12 a F_n , obteniendo así

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}_n(y) e^{ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n(y) e^{ixy} dy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Previamente hemos evidenciado en la fórmula (3.14), que $\text{senc}(a_k x)$ es función par para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto también lo será el producto

$$\sigma_n(x) = \prod_{k=1}^n \text{senc}(a_k x),$$

pues el producto de funciones pares, es una función par. De esta manera, realizando el cambio de variable $y = -z \rightarrow dy = -dz$ en el integrando de la ecuación (3.15), dicha identidad se puede

expresar del siguiente modo,

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n(y) e^{ixy} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} \sigma_n(-z) e^{-ixz} (-dz) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n(z) e^{-ixz} dz \\
 &= \hat{\sigma}_n(x),
 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad, hemos utilizado la definición de transformada de Fourier de σ_n . En definitiva hemos visto que,

$$\hat{\sigma}_n(x) = F_n(x), \quad (3.16)$$

como queríamos ver.

De las identidades (3.12) y (3.16) tenemos respectivamente, que la transformada de Fourier de $F_n(x)$ es $\sigma_n(x)$ y que la transformada de Fourier de $\sigma_n(x)$ es $F_n(x)$.

Recordando la definición de transformada de Fourier coseno, incluida en la Definición 1.4.1, vimos en la Observación 1.4.3, que para toda función real f con transformada de Fourier \hat{f} también real, su transformada de Fourier y su transformada de Fourier coseno coinciden: $\text{FT}(f) = \text{FCT}(f)$. Para todo $n \geq 1$, tanto las funciones F_n como sus transformadas de Fourier $\hat{F}_n = \sigma_n$ son reales. En consecuencia se verifica,

$$\text{FCT}(F_n(x)) = \text{FT}(F_n(x)) = \sigma_n(x).$$

Recíprocamente, para todo $n \geq 1$, tanto las funciones σ_n como sus transformadas de Fourier $\hat{\sigma}_n = F_n$ son reales. Luego se verifica,

$$\text{FCT}(\sigma_n(x)) = \text{FT}(\sigma_n(x)) = F_n(x).$$

En definitiva, conseguido demostrar la afirmación (3.9).

Pasamos ahora a demostrar el enunciado del teorema. En la Sección del teorema de inversión 1.5 del Capítulo 1, estudiamos la fórmula de Parseval en el Teorema 1.5.15. Como consecuencia de dicho teorema, se obtuvo el Corolario 1.5.16. Aplicando el mencionado corolario a las funciones pares F_n y σ_n , tenemos que la función τ_n definida en el enunciado de este teorema se transforma en,

$$\begin{aligned}
 \tau_n &= \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \text{senc}(a_k x) dx = \int_0^{+\infty} \text{senc}(a_0 x) \cdot \prod_{k=1}^n \text{senc}(a_k x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \sigma_0(x) \cdot \sigma_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \hat{F}_0(x) \cdot \hat{F}_n(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} F_0(x) \cdot F_n(x) dx.
 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la definición de la función F_0 dada en la fórmula (3.2), vista al inicio de la demostración, obtenemos

$$\begin{aligned}\tau_n &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_0(x) \right) \cdot F_n(x) dx \\ &= \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \chi_0(x) \cdot F_n(x) dx \\ &= \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(s_n, a_0)} F_n(x) dx.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Esta última expresión se debe a que la función χ_0 se anula en $|x| > a_0$ y F_n , vimos al comienzo, que se anula en $|x| > s_n$.

Estudiamos dos casos en función de cuál es el mínimo en cada caso.

- Si $a_0 > s_n$. En la ecuación (3.16) se ha evidenciado la identidad $\hat{\sigma}_n(x) = F_n(x)$. Además, demostramos que $F_n(x)$ se anula en los intervalos $(-\infty, -s_n) \cup (s_n, +\infty)$ y por tanto $\hat{\sigma}_n(x)$ también se anula en dichos intervalos. Finalmente, teniendo en cuenta la Observación 1.5.14, que surgía a partir de la fórmula del área, Proposición 1.5.13, el término final en la ecuación (3.17) es igual a

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{s_n} F_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{s_n} \hat{\sigma}_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_n(0) \\ &= \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ya que $\sigma_n(x)$ es continua en todo \mathbb{R} y en $x = 0$ vale 1.

- Si $a_0 < s_n$. En este caso, el último término de la igualdad (3.17) verifica

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_n(x) dx < \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{s_n} F_n(x) dx = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}.$$

Con menor estricto al ser $F_n(x)$ positiva y continua en $x \in (0, s_n)$.

□

Antes de comenzar con la demostración de la segunda parte del teorema, tendremos en cuenta las siguientes observaciones:

Observación 3.2.2. A lo largo de este apartado, se usará la notación

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b dx \int_{y=c}^d f(x, y) dy,$$

para evitar confusiones con los límites de integración y respectivas diferenciales de las variables de la función que se integra.

Tendremos también en cuenta la siguiente descomposición:

Observación 3.2.3. Notemos que para toda función f medible y para todo par de números $u, v \in \mathbb{R}$ con $v > 0$, la siguiente integral se puede descomponer así

$$\int_{-u}^{v-u} f(x) dx = \int_{-u}^0 f(x) dx + \int_0^v f(x) dx + \int_v^{v-u} f(x) dx$$

Estudiamos los diferentes casos en función del valor de u, v .

- Si $u \in [0, a]$ entonces al ser u no negativo, $u \geq 0$, se tiene $v - u \leq v$ y puede ocurrir

- a) $-u \leq 0 \leq v - u \leq v$. Gráficamente estaríamos en la situación



En este caso sería

$$\begin{aligned} \int_{-u}^{v-u} f(x)dx &= \int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^{v-u} f(x)dx - \int_{v-u}^v f(x)dx \\ &= \int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx. \end{aligned}$$

- b) O bien puede ocurrir que sea $-u < v - u < 0 < v$, donde la primera desigualdad estricta se debe a que por hipótesis es $v > 0$. En este caso se tendría



y en consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-u}^{v-u} f(x)dx &= \int_{-u}^v f(x)dx - \int_{v-u}^v f(x)dx \\ &= \left(\int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^v f(x)dx \right) - \int_{v-u}^v f(x)dx \\ &= \int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx. \end{aligned}$$

- Si $u \in [-a, 0)$, entonces u es negativo $u < 0$ y tenemos de nuevo dos opciones:

- c) O bien $0 < -u \leq v < v - u$, que en este caso se tendría



y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{-u}^{v-u} f(x)dx &= \int_0^{v-u} f(x)dx - \int_0^{-u} f(x)dx \\ &= \left(\int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx \right) + \int_{-u}^0 f(x)dx \\ &= \int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx. \end{aligned}$$

- d) O bien puede ser $0 < v < -u < v - u$,



en cuyo caso

$$\begin{aligned}
 \int_{-u}^{v-u} f(x)dx &= \int_0^{v-u} f(x)dx - \int_0^{-u} f(x)dx \\
 &= \left(\int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx \right) + \int_{-u}^0 f(x)dx \\
 &= \int_{-u}^0 f(x)dx + \int_0^v f(x)dx + \int_v^{v-u} f(x)dx.
 \end{aligned}$$

Ahora sí, demostramos el segundo apartado del teorema principal.

ii) *Demostración.* Para demostrar esta segunda parte del teorema, haremos uso de la igualdad (3.4) demostrada en el primer apartado:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_n * f_{n+1}$$

Consideramos ahora $t > 0$. Teniendo en cuenta la mencionada identidad y la definición de convolución de dos funciones, dada en la Definición 1.3.1, un cálculo directo nos da

$$\begin{aligned}
 \int_0^t F_{n+1}(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (F_n * f_{n+1})(x)dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y) f_{n+1}(y)dy \right).
 \end{aligned}$$

Recordando la definición de las funciones $f_n(x) = \frac{1}{a_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{a_n}(x)$, dada en la fórmula (3.3), la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
 \int_0^t F_{n+1}(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^t dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y) \chi_{a_{n+1}}(y)dy \right) \\
 &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_0^t dx \left(\int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} F_n(x-y)dy \right) \\
 &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_0^t F_n(x-y)dx,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde en este último paso se ha usado el teorema de Fubini, visto en el Teorema 1.2.2.

Realizando ahora el cambio de variable $x - y = u \rightarrow dx = du$ sobre la expresión anterior y teniendo en cuenta la descomposición de la integral $\int_{-u}^{v-u} f(x)dx$, vista en la Observación 3.2.3, llegamos a que la ecuación (3.18) queda

$$\begin{aligned}
 \int_0^t F_{n+1}(x)dx &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_{-y}^{t-y} F_n(u)du \\
 &= \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \left[\int_{-y}^0 F_n(u)du + \int_0^t F_n(u)du + \int_t^{t-y} F_n(u)du \right] \\
 &= \frac{1}{2a_{n+1}} \left(\int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_{-y}^0 F_n(u)du + \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_0^t F_n(u)du + \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u)du \right) \\
 &= \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) + \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_0^t F_n(u)du,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde hemos denotado $I_1 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_{-y}^0 F_n(u) du$ y $I_2 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u) du$.

Por otra parte, podemos simplificar el último término en (3.19) aplicando el teorema de Fubini como sigue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a_{n+1}} \left(\int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_0^t F_n(u) du \right) &= \frac{1}{2a_{n+1}} \left(\int_0^t F_n(u) du \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \right) \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} \left(\int_0^t F_n(u) du \right) \left(\int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \right) \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} \left(\int_0^t F_n(u) du \right) (2a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} \left(2a_{n+1} \int_0^t F_n(u) du \right) = \int_0^t F_n(u) du. \end{aligned}$$

De esta manera, conseguimos que la ecuación (3.19) se transforme en la expresión simplificada

$$\begin{aligned} \int_0^t F_{n+1}(x) dx &= \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) + \frac{1}{2a_{n+1}} \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_0^t F_n(u) du, \\ &= \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) \int_0^t F_n(u) du. \end{aligned}$$

Aclarado esto, por un lado vamos a ver que $I_1 = 0$. Denotando por $g(y) := \int_{-y}^0 F_n(u) du$, tenemos una nueva expresión para I_1 , que viene dada por

$$I_1 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} g(y) dy.$$

Veamos que $g(y)$ así definida es una función impar. En la demostración del primer apartado vimos que F_n una función par. Como consecuencia de este hecho, se obtiene la siguiente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned} g(-y) &= \int_y^0 F_n(u) du = - \int_0^y F_n(u) du = - \int_0^{-y} F_n(-z) (-dz) = \int_0^{-y} F_n(z) dz \\ &= - \int_{-y}^0 F_n(z) dz = -g(y). \end{aligned}$$

En definitiva, $g(y)$ es una función impar.

Como la integral de una función impar en el intervalo simétrico $[-a_{n+1}, a_{n+1}]$ es cero, concluimos que

$$I_1 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} g(y) dy = 0.$$

En lo que sigue, trabajaremos con $t \geq a_{n+1}$.

Recordamos que la expresión de la integral I_2 viene dada por

$$I_2 = \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u) du.$$

Descomponiendo esta integral en dos sumandos tenemos

$$I_2 = \int_{-a_{n+1}}^0 dy \int_t^{t-y} F_n(u) du + \int_0^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u) du.$$

Haciendo el cambio de variable $y = -v \rightarrow dy = -dv$ sobre el primer sumando de I_2 obtenemos,

$$I_2 = \int_{a_{n+1}}^0 (-dv) \int_t^{t+v} F_n(u) du + \int_0^{a_{n+1}} dy \int_t^{t-y} F_n(u) du. \quad (3.20)$$

Intercambiando los límites de integración de la expresión (3.20), tenemos que es equivalente a

$$\begin{aligned} I_2 &= (-)(-) \int_0^{a_{n+1}} dv \int_t^{t+v} F_n(u) du - \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(u) du \\ &= \int_0^{a_{n+1}} dy \int_t^{t+y} F_n(u) du - \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(u) du. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Obsérvese que en este último paso se ha cambiado la notación $v \rightarrow y$, para que todo quede en función de y .

Hacemos ahora el cambio de variable $u = w + y \rightarrow du = dw$ en el primer sumando en la última línea de (3.21)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(w+y) dw - \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(u) du \\ &= \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(u+y) du - \int_0^{a_{n+1}} dy \int_{t-y}^t F_n(u) du \\ &= \int_0^{a_{n+1}} dy \left[\int_{t-y}^t (F_n(u+y) - F_n(u)) du \right]. \end{aligned}$$

Notamos que en la segunda igualdad se ha hecho un cambio de notación $w \rightarrow u$ para que toda la expresión quede únicamente en función de las variables u e y .

En la prueba del primer apartado del teorema, argumentamos por inducción que $F_n(u)$ es una sucesión de funciones monótona no creciente en el intervalo positivo $u \in (0, +\infty)$ para $n \geq 1$.

Si nos fijamos en los límites de integración de la expresión anterior, tenemos que la variable y se encuentra en el intervalo $y \in (0, a_{n+1})$. Además, estamos considerando $t \geq a_{n+1}$, por tanto estamos integrando sobre el intervalo positivo $u \in (t-y, t)$. Entonces el integrando

$F_n(u+y) - F_n(u) \leq 0$ por ser una sucesión monótona no creciente y en consecuencia,

$$I_2 = \int_0^{a_{n+1}} dy \left[\int_{t-y}^t (F_n(u+y) - F_n(u)) du \right] \leq 0.$$

Así al ser I_2 no positivo, de la ecuación (3.19) deducimos que para $a_{n+1} \leq t < s_n$ se tiene

$$\int_0^t F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{2a_{n+1}} (I_1 + I_2) + \int_0^t F_n(u) du \leq \int_0^t F_n(x) dx. \quad (3.22)$$

La condición $t < s_n$ se debe a que $F_n(x)$ se anula en $|x| > s_n$ y en consecuencia no tendría porqué darse la desigualdad anterior.

En el enunciado del teorema, estamos tomando como hipótesis que $a_{n+1} \leq a_0 < s_n$, por tanto en este caso, el mínimo sería $\min\{a_0, s_n\} = a_0$. De este modo, retomando la prueba de la primera parte del teorema, en la que evidenciamos la identidad (3.17), deducimos que se tiene

$$\tau_n = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_n(x) dx.$$

De la desigualdad (3.22) que hemos probado en este apartado, aplicada a $t = a_0 < s_n$ tenemos finalmente que

$$0 < \tau_{n+1} = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_{n+1}(x) dx \leq \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a_0} F_n(x) dx = \tau_n < \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{2}$$

donde la primera desigualdad se debe a que la función F_{n+1} es estrictamente positiva en el intervalo $(-s_{n+1}, s_{n+1})$ y en particular, lo es en el intervalo $(0, a_0) \subset (-s_{n+1}, s_{n+1})$, donde esta inclusión se debe a que $a_0 < s_n < s_{n+1}$. Y la última desigualdad es consecuencia de la primera parte del teorema, por ser $a_0 < s_n$.

□

Capítulo 4

Visualizando la prueba

En el Capítulo 3, hemos demostrado el teorema que estudia las integrales que dan nombre a este Trabajo de Fin de Grado. En este último capítulo queremos mostrar gráficamente un ejemplo en el que queda reflejada la idea que se sigue en el Teorema 3.2.1, aquel que explica el comportamiento de las integrales de Borwein. Reproduciendo el razonamiento de Hanspeter Schmid en [5], vamos a ver, más concretamente, el efecto que tiene convolucionar iteradamente una función rectangular con otra la función rectangular, tal y como la definimos en el mencionado capítulo. Vamos a tomar

$$G(x) := 2\text{rect}(2x),$$

el rectángulo de área unitaria y anchura $\frac{1}{2}$, y

$$F_0(x) := \text{rect}(x),$$

el rectángulo unitario de anchura 1. F_0 será el primer término de nuestra sucesión, que será formada convolucionando iterativamente con G :

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) * G(x) = F_0(x) * G(x) * \cdots^{(n)} * G(x).$$

En esta última igualdad se ha desarrollado el término general de la sucesión de funciones. En la Figura 4.1 podemos ver la forma de ambas funciones. El código utilizado para generarlas puede consultarse en el Apéndice A, donde se desarrollan estas funciones y la generación de la sucesión F_n , para $n = 1, \dots, 6$.

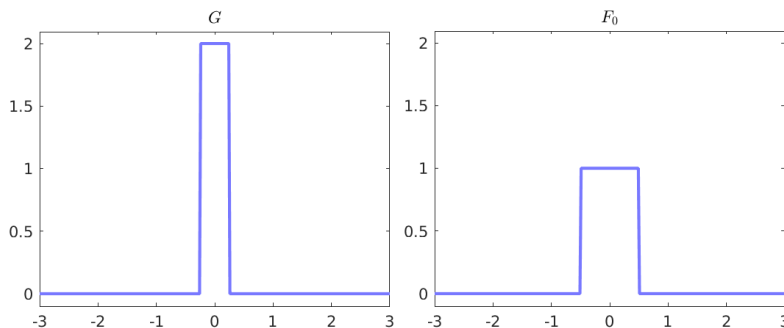


Figura 4.1: Funciones $G(x)$ y $F_0(x)$.

Convolucionar una función f con G corresponde a tomar una media móvil alrededor del punto de convolución, donde la ventana tomada para tomar la media tiene anchura $\frac{1}{2}$, tal y como el rectángulo

que forma G . Al ser una media móvil, esto implica que

$$\min f \leq f * G \leq \max f.$$

Particularmente, si la función que utilizamos es F_0 , entonces se cumple que

$$0 \leq F_0 * G \leq 1 = F(0).$$

Más aún, estas desigualdades son estrictas siempre que en la ventana la función no sea constante. Vamos ahora a crear la mencionada sucesión, que puede verse en la Figura 4.2. En cada una de las gráficas se muestra la función, así como la recta $y = 1$ y los puntos en los que la función deja de ser nula.

Como puede verse, la convolución iterada con G es un 'proceso erosivo', en el que cada iteración reduce la anchura de la meseta en $y = 1$, hasta hacerla un único punto en tan solo dos iteraciones (en F_2 ya no hay una meseta con una parte plana superior, sino que pasa a ser una montaña). A partir de F_3 , la función ya ni siquiera alcanza esta altura, siendo $F_k(0) < 1$, para $k \geq 3$. Podemos relacionar este hecho con el teorema principal demostrado en el Capítulo 3 de este trabajo. Utilizando las funciones $\chi_a(x)$ para definir las funciones $G(x)$ y $F_0(x)$ tenemos

$$G(x) = 2\text{rect}(2x) = 2\chi_{\frac{1}{4}}(x) \quad \text{y} \quad F_0(x) = \text{rect}(x) = \chi_{\frac{1}{2}}(x).$$

Tenemos entonces que el término general de nuestra sucesión vendrá dado por

$$F_n(x) = \chi_{\frac{1}{2}}(x) * 2\chi_{\frac{1}{4}}(x) * \cdots^{(n)} * 2\chi_{\frac{1}{4}}(x).$$

Utilizando un argumento similar al explicado durante la demostración del teorema central, deducimos que la función $F_k(x)$ tiene una anchura dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{4}.$$

y la meseta se erosiona cuando esta suma, que equivale a la suma de las anchuras de los rectángulos convolucionados con F_0 , llega a ser mayor que la propia anchura de F_0 , que es 1.

Además, puede observarse cómo los puntos en los que la función deja de ser nula se van expandiendo ligeramente. De este modo, observamos intuitivamente que el proceso de convolución iterado mediante G , va achatando la función inicial. En el límite en el infinito, la función quedaría reducida a ser idénticamente nula.

De esta forma, observamos que la intuición tras la demostración, que es larga y compleja, radica en el hecho de que la convolución iterada de funciones rectangulares una cantidad suficiente de veces, consigue disminuir la cantidad central de la función original.

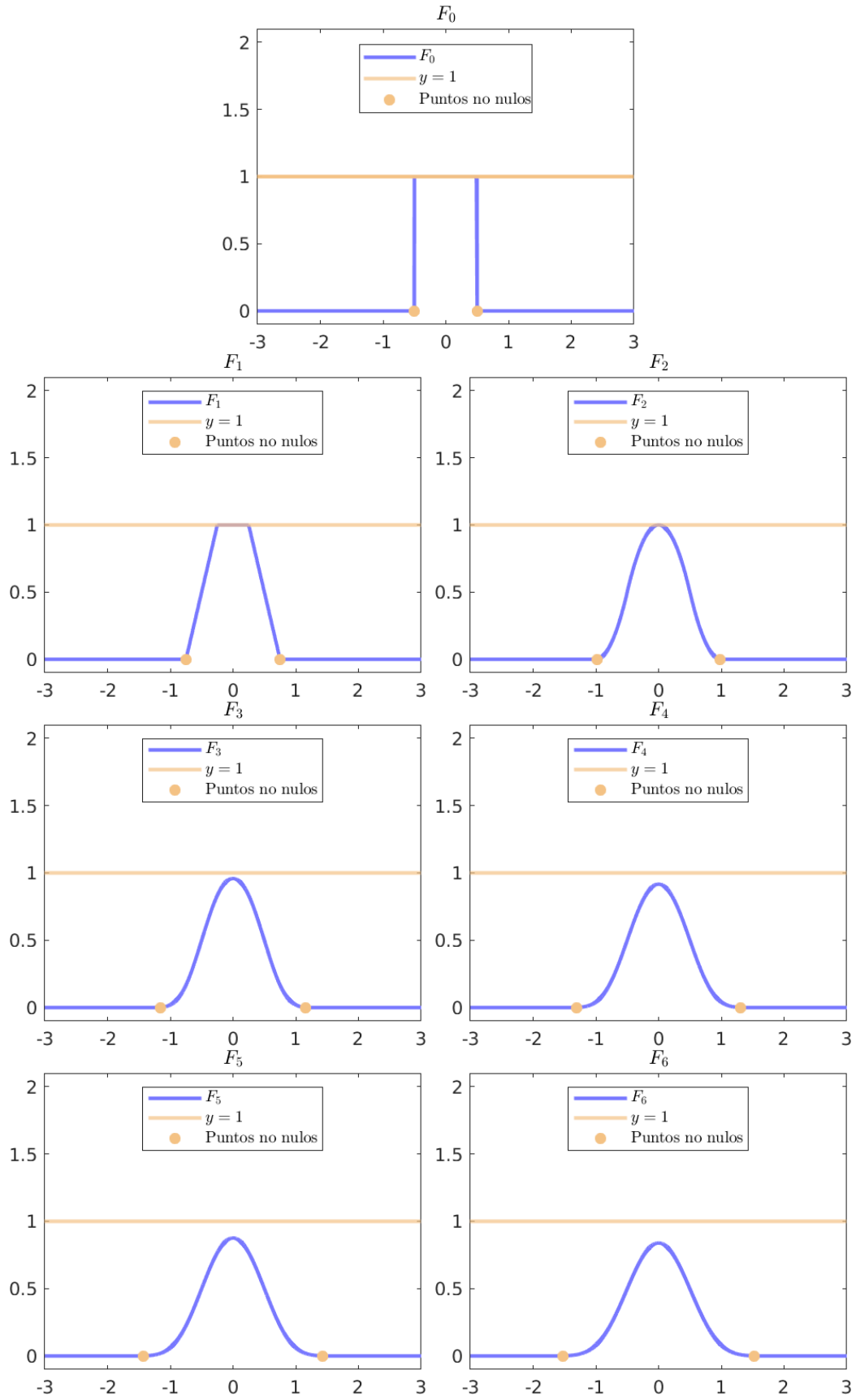


Figura 4.2: Sucesión F_n , para $n = 1, \dots, 6$. Generada con el código del Apéndice A.

Bibliografía

- [1] David Borwein y Jonathan M. Borwein. «Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals». En: *The Ramanujan Journal* 5.1 (2001), págs. 73-89. DOI: [10.1023/a:1011497229317](https://doi.org/10.1023/a:1011497229317).
- [2] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2.^a ed. Wiley Interscience, 1999. ISBN: 0471317160.
- [3] Eric W. Hansen. *Fourier transforms principles and applications. Principles and applications*. Wiley, 2014, pág. 755. ISBN: 9781118479148.
- [4] Walter Rudin. *Análisis Real y Complejo*. Trad. por A. Casal Piga. Editorial Alhambra, 1985. ISBN: 8420506516.
- [5] Hanspeter Schmid. «Two Curious Integrals and a Graphic Proof». En: *Elemente der Mathematik* 69.2 (2014), págs. 71-74. DOI: [10.4171/EM/239](https://doi.org/10.4171/EM/239).
- [6] Michael Spivak. *Calculus*. Trad. por Bartolomé Frontera Marques. 2.^a ed. Editorial Reverté, 1988. ISBN: 8429151362.

Apéndice A

Código para generar las convoluciones y sus gráficas en MATLAB

```
1 % Definir el intervalo de definicion
2 dt = 1e-3;
3 t = -3:dt:3;
4
5 % Definir la funcion rectangulo
6 rect = @(t) double(abs(t) < 0.5) + 0.5*double(abs(t)==0.5);
7
8 % Definir F0 y G
9 F = rect(t);
10 G = 2 * rect(2*t);
11
12 figure(1)
13 plot(t, F, 'LineWidth',2, 'Color',[120,120,255]/255);
14 xlim([-3,3])
15 ylim([-0.1,2.1])
16 title('$F_0$', 'Interpreter','latex');
17
18 figure(2)
19 plot(t, G, 'LineWidth',2, 'Color',[120,120,255]/255);
20 xlim([-3,3])
21 ylim([-0.1,2.1])
22 title('$G$', 'Interpreter','latex');
23
24 % Inicializar un array para almacenar las funciones F0...F6
25 F_array = cell(1, 7);
26 F_array{1} = F;
27
28 % Calcular la sucesion
29 for k = 2:7
30     F_array{k} = conv(F_array{k-1}, G, 'same');
31     F_array{k} = F_array{k} / trapz(t, F_array{k}); % Normalizar el resultado
32 end
33
34 % Plotear las funciones
35 for k = 1:7
36     figure(k+2)
37     plot(t, F_array{k}, 'LineWidth',2, 'Color',[120,120,255]/255);
38     hold on
39     xlim([-3,3])
40     ylim([-0.1,2.1])
```

```

41 title(['$F_{', num2str(k-1), '$'], 'Interpreter', 'latex');
42 yline(1, 'LineWidth', 2, 'Color', [244, 194, 132]/255);
43
44 % Encontrar los indices en los que la funcion deja de ser cero,
45 % por la izquierda y por la derecha
46 threshold = 1e-3;
47 indices = find(F_array{k} > threshold);
48 first_index = indices(1);
49 last_index = indices(end);
50
51 % Marcar estos puntos en la grafica
52 plot([t(first_index), t(last_index)], [0, 0], 'o', 'Color', [244, 194, 132]/255, '
MarkerFaceColor', [244, 194, 132]/255);
53
54 threshold = 0.001;
55
56 % Marcar los puntos en la grafica
57 legend(['$F_{', num2str(k-1), '$'], '$y=1$', 'Puntos no nulos', 'Interpreter', 'latex',
'Location', 'north')
58 hold off
59 end

```