Geometría de Riemann : Relación 2 de ejercicios

(1) Demuestra las siguientes propiedades del corchete de Lie

a) $[X,Y] = -[Y,X]$

b) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)\cdot Y - g(Yf)X$

c) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Dem:

a) Vamos a demostrar que $\forall f \in C^\infty(M)$ es

$$[X,Y]f = -[Y,X]f \iff$$

$$\iff [X,Y]f + [Y,X]f = 0 \iff \text{(por definición)}$$

$$\iff \cancel{XY}f - \cancel{YX}f + \cancel{YX}f - \cancel{XY}f = 0 \quad \text{OK} \checkmark$$

b) Vemos ahora que $\forall f,g \in C^\infty(M)$ se cumple la igualdad en (b)

Leibniz , todo campo es derivación, y en particular Leibniz

$$[\underbrace{fX}_{\text{campo}}, \underbrace{gY}_{\text{campo}}] := fX(gY) - gY(fX) \overset{\text{Leibniz}}{=}$$

$$= fgXY + fXgY - gfYX - gYfX$$

$$= fg(XY - YX) + fXgY - gYfX$$

$$= fg[X,Y] + fXgY - gYfX$$

c) Finalmente vamos a demostrar que:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Aplicando directamente la definición del corchete de Lie obtenemos:

$$[X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] =$$

$$= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y$$
$$+ Z(XY - YX) - (XY - YX)Z$$

$$= \cancel{XYZ} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{ZYX} +$$
$$+ \cancel{YZX} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{XZY}$$
$$+ \cancel{ZXY} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{YXZ}$$

$$= 0$$

$\square$.

Ejercicio 2: Sea M v.d, $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo de vectores, $f \in C^\infty(M)$, $V \subset M$ demuestra que $(Xf)|_V = (X|_V)(f|_V)$

Dem.:

Sabemos que la diferenciabilidad de una función $f \in C^\infty(M)$ en un punto p es una <u>propiedad local</u>: se expresa mediante un límite, que sólo envuelve los valores de la función en un entorno de dicho punto p. Este carácter local lo podemos expresar así:

- Si $V \subset M$ y $p \in V$, entonces f es diferenciable en $p \iff$ $\iff f|_V$ es diferenciable en p, escribimos

$$Df(p) = D(f|_V)(p)$$

Aplicando esta definición tenemos; $\forall (\cdot) \in V$

$$(Xf)|_V(\cdot) = \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\Big|_V (\cdot) = X^i(\cdot) \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_V (\cdot) =$$

$\boxed{\text{Carácter local de la derivada}}$

$$= X^i(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_V f|_V\right)(\cdot) = \left(X^i(\cdot) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_V\right)(f|_V)(\cdot)$$

$$= (X|_V f|_V)(\cdot)$$

$\Rightarrow$ En otras palabras

$$Xf|_V = X|_V f|_V$$

Ejercicio 3: Sea M^3 v.d. y (x,y,z) coordenadas arbitrarias en M. Considera los siguientes campos expresados en dichas coordenadas:

a) $X = y\partial z - 2xy^2\partial y$, $Y = \partial y$

b) $X = x\partial y - y\partial x$, $Y = y\partial z - z\partial y$

c) $X = x\partial y - y\partial x$, $Y = x\partial y + y\partial x$

Calcula $[X,Y]$ en cada uno de los casos.

Dem:

a) • $XYf = X\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$

Composición de la suma es la suma de la composición $\rightarrow$ $= y\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$

$$= \cancel{y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}} - \cancel{2xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

• $YXf = Y\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$

$\mathcal{C}^\infty(M)$ - lineal $\rightarrow$ $= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy^2\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Leibniz $\rightarrow$ $= \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy^2)\frac{\partial f}{\partial y} + (-2xy^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$ $\rightarrow$ $= \frac{\partial f}{\partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - 2x\cdot 2y\frac{\partial f}{\partial y} - 2xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} + \cancel{y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}} - 4xy\frac{\partial f}{\partial y} - \cancel{2xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$\Rightarrow [X,Y]f = (XY - YX)f = XYf - YXf =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial z} + 4xy\frac{\partial f}{\partial y} = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + 4xy\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$\Rightarrow \boxed{[X,Y] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + 4xy\frac{\partial}{\partial y}\right)} \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

b) • $$XYf = X\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial z}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\boxed{\text{Leibniz}}$ $$\to = x\frac{\partial f}{\partial z} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - xz\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$$

$$+ yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$\boxed{\text{Simetria, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}}$ $$= x\frac{\partial f}{\partial z} \cancel{- xz\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \cancel{+ yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}} \cancel{- y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}} \cancel{+ xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}$$

• $$YXf = Y\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - xz\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \cancel{-xz\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \cancel{+ yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}} \cancel{- y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}} \cancel{+ xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}} + z\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow [X,Y]f = (XY - YX)f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

$$\Rightarrow \boxed{[X,Y] = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}}$$

c) • $XYf = X\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) - y\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + \cancel{xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - y\frac{\partial f}{\partial y} - \cancel{xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - \cancel{y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + \cancel{x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

• $YXf = Y\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - \cancel{xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \cancel{xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$= -x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - \cancel{y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + \cancel{x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$\Rightarrow [X,Y]f = (XY - YX)(f) = 2x\frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \left(2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

$$\Rightarrow \boxed{[X,Y] = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}}$$

Ejercicio 4: Sea $T : \mathfrak{X}(M)^s \longmapsto \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $C^\infty(M)$-multilineal. Demuestra que T induce un tensor $(1,s)$ sobre M.

Dem:

Automaticamente T induce un tensor $(1,s)$, dado por:

$$\tilde{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$(\omega, X_1 \dots X_s) \longmapsto \tilde{T}(\omega, X_1, \dots, X_s) := \omega(\underbrace{T(X_1, \dots, X_s)}_{\text{campo}})$$

Veamos que es $C^\infty(M)$-multilineal

- $C^\infty(M)$-lineal en primera variable.

Sean $\omega^1, \omega^2 \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$:

$$\tilde{T}(f\omega^1 + g\omega^2, X_1, \dots, X_s) = (f\omega^1 + g\omega^2)\, T(X_1, \dots, X_s) =$$

$$= f\omega^1\, T(X_1, \dots, X_s) + g\,\omega^2\, T(X_1, \dots, X_s)$$

$$= f\,\tilde{T}(\omega^1, X_1 \dots X_s) + g\,\tilde{T}(\omega^2, X_1 \dots X_s)$$

- Veamos que es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en la variable i-ésima:

De nuevo, sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\bar{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\tilde{T}(\omega, X_1, \dots fX_i + g\bar{X}_i, \dots, X_s) :=$$

$$= \omega(T(X_1, \dots fX_i + g\bar{X}_i, \dots, X_s) =$$

$\boxed{T \text{ es por hipotesis } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-multilineal}}$ $\rightarrow$

$$= \omega (\underbrace{T(X_1, \dots fX_i, \dots, X_s)}_{\text{campo}} + \underbrace{T(X_1, \dots g\bar{X}_i, \dots, X_s)}_{\text{campo}})$$

Las 1-formas son $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineales $\rightarrow$

$$= f\omega (T(X_1, \dots X_i, \dots X_s)) + g\,\omega(T(X_1 \dots \bar{X}_i, \dots X_s))$$

$$= f\,\tilde{T}(\omega, X_1 \dots X_i, \dots X_s) + g\,\tilde{T}(\omega, X_1, \dots, \bar{X}_i, \dots X_s)$$

Luego $\tilde{T}$ es $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineal y en consecuencia $\tilde{T} \in \mathcal{T}^1_s(M)$ es tensor.

$\square$.

Ejercicio 5: Sea $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$ y sean (x^i), $(\bar{x}^i)$ coordenadas. ¿cuál es la relación que hay entre las componentes de T entre ambos sistemas?

$$¿\ T^i_{jk} \longleftrightarrow \bar{T}^i_{kj}\ ?$$

Dem:

$$T^i_{jk} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definición}}}{:=} T(dx^i, \partial x_j, \partial x_k) =$$

$$= T\left(\frac{dx^i}{d\bar{x}^r} d\bar{x}^r, \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} \partial \bar{x}_s, \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_k} \partial \bar{x}_m\right)$$

Los tensores son $C^\infty(M)$-multilineales $\to$ $$= \frac{dx^i}{d\bar{x}^r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_k} T(d\bar{x}^r, \partial \bar{x}_s, \partial \bar{x}_m)$$

$\square$

Ejercicio 6: Sean M, N v.d., $F: M \to N$ aplicación diferenciable, $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$. Calcula $F^*\omega$ en cada caso:

a) $M = N = \mathbb{R}^2$

$$F(s,t) = (st, e^t)$$

$$\omega = x\,dy - y\,dx$$

Tomamos las coordenadas canónicas (x,y) en $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(s,t) = st \\ y(s,t) = e^t \end{cases}$$

Si $\omega \in \mathfrak{X}^*(N) = \mathcal{T}^0_1(N) \Rightarrow F^*\omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$

Por lo tanto $F^*\omega = a\,ds + b\,dt$

- Calculamos a:

$$\boxed{a(s,t)} = F^*\omega_{(s,t)}(\partial s) \underset{\text{def}}{=} \omega_{F(s,t)}\left(dF_{(r,t)}(\partial s)\right) =$$

$$= \omega_{(st,e^t)}\left(dF_{(s,t)}\partial s\right) = \omega_{(x,y)}\left(dF_{(s,t)}\partial s\right) =$$

$$\overset{(*_1)}{=} (st\,dy - e^t\,dx)(t\,\partial x) = \boxed{-te^t}$$

$\omega = x\,dy - y\,dx$

(*₁) donde

$$\boxed{dF_{(s,t)}(\partial s)} := \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = st \\ y = e^t \end{array}} \to = \frac{\partial(st)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial e^t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}$$

$$= \boxed{t\,\partial x}$$

- Calculamos b:

$$\boxed{b(s,t)} = F^* \omega_{(s,t)}(\partial t) \underset{\text{def}}{=} \omega_{F(s,t)}(dF_{(s,t)}(\partial t)) =$$

$$= \omega_{(st,\,e^t)}(dF(\partial t)) = \omega_{(x,y)}(dF_{(s,t)}(\partial t))$$

$$\overset{(*_2)}{=} (st\,dy - e^t dx)(s\,\partial x + e^t \partial y) =$$

$$= ste^t - se^t = \boxed{se^t(t-1)}$$

(*₂) donde

$$dF_{(s,t)}(\partial t) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial st}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial e^t}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= s\,\partial x + e^t \partial y$$

$$\Rightarrow \quad F^*\omega = -te^t\,ds + se^t(t-1)\,dt$$

b) $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}^3$

$F(\rho, \varphi) = ((\cos\varphi + 2)\cos\rho, (\cos\varphi + 2)\,\text{sen}\,\rho, \text{sen}\,\varphi)$

$\omega = z^2 dx$

En este caso, tomamos las coordenadas canonicas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi) = (\cos\varphi + 2)\cos\rho \\ y(\rho, \varphi) = (\cos\varphi + 2)\,\text{sen}\,\rho \\ z(\rho, \varphi) = \text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Si $\omega \in \mathcal{T}_1^0(N) \Rightarrow F^*\omega \in \mathcal{T}_1^0(N)$

Por tanto $F^*\omega = a\,d\rho + b\,d\varphi$

Calculamos a:

$$\boxed{a(\rho, \varphi)} = F^*\omega_{(\rho,\varphi)}(\partial\rho) \underset{\text{def.}}{=} \omega_{F(\rho,\varphi)}(dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\rho)) =$$

$$= \omega_{(x,y,z)}(dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\rho)) =$$

$(*_1)$

$$\boxed{\omega = z^2 dx} \rightarrow = (z^2 dx)(-(\cos\varphi + 2)\,\text{sen}\,\rho\, dx + (\cos\varphi + 2)\cos\rho\, dy)$$

$$= \boxed{-\text{sen}^2\varphi\,(\cos\varphi + 2)\,\text{sen}\,\rho}$$

$$b(\rho,\varphi) = F^{*}\omega_{(\rho,\varphi)}(\partial\varphi) \underset{\text{def}}{\overset{\uparrow}{=}} \omega_{F(\rho,\varphi)}(dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\varphi)) =$$

$$= \omega_{(x,y,z)}(dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\varphi)) =$$

$$\overset{(*_1)}{=} (\operatorname{sen}^2\varphi\, dx)(-\cos\rho \operatorname{sen}\varphi\, \partial x - \operatorname{sen}\rho \operatorname{sen}\varphi\, \partial y + \cos\varphi\, \partial z)$$

$$= -\operatorname{sen}^3\varphi \cos\rho$$

Donde en $(*_1)$ he usado que

$$dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\rho) = \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= -(\cos\varphi + 2)\operatorname{sen}\rho\, dx + (\cos\varphi + 2)\cos\rho\, dy$$

$$dF_{(\rho,\varphi)}(\partial\varphi) = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= -\cos\rho \operatorname{sen}\varphi\, \partial x - \operatorname{sen}\rho \operatorname{sen}\varphi\, \partial y + \cos\varphi\, \partial z$$

$$\Rightarrow F^{*}\omega = -\operatorname{sen}^2\varphi(\cos\varphi + 2)\operatorname{sen}\rho\, d\rho - \operatorname{sen}^3\cos\rho\, d\varphi$$

c) $M = \{(s,t) \mid s^2 + t^2 < 1\}$

$N = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$F(s,t) = (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$

$\omega = (1 - x^2 - y^2)\, dz$.

Tomamos las coordenadas canónicas en N

$$\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = \sqrt{1-s^2-t^2} \end{cases}$$

Si $\omega \in \mathfrak{X}^*(N) = T_1^0(N) \Rightarrow F^*\omega \in T_0^1(M)$

Por tanto $F^*\omega = a\, ds + b\, dt$

Calculamos a:

$$\boxed{a(s,t)} = F^*\omega_{(s,t)}(\partial s) \underset{\text{def}}{=} \omega_{F(s,t)}(dF_{(s,t)}(\partial s)) =$$

$$= \omega_{(x,y,z)}(dF_{(s,t)}(\partial s)) =$$

$(*_1)$

$$= ((1-s^2-t^2)\, dz)\left(\partial x - \frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\, \partial z\right) =$$

$$= -(1-s^2-t^2)\frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}} = \boxed{-s\sqrt{1-s^2-t^2}}$$

Calculamos b:

$$b(s,t) = F^*\omega_{(s,t)}(\partial t) \underset{\text{def}}{=} \omega_{F(s,t)}(dF_{(s,t)}(\partial t)) =$$

$$= \omega_{(x,y,z)}(dF_{(s,t)}(\partial t))$$

$$\overset{(*_1)}{=} ((1-s^2-t^2)dz)\left(\partial y - \frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\partial z\right) =$$

$$= -(1-s^2-t^2)\frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}} = -t\sqrt{1-s^2-t^2}$$

Donde en $(*_1)$ he usado:

$$dF_{(s,t)}(\partial s) = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \partial x - \frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\partial z$$

$$dF_{(s,t)}(\partial t) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \partial y - \frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\partial z$$

$$\Rightarrow F^*\omega = -s\sqrt{1-s^2-t^2}\,ds - t\sqrt{1-s^2-t^2}\,dt =$$

$$= -\sqrt{1-s^2-t^2}\,(s\,ds + t\,dt)$$

dim = n

Ejercicio 7: Sea (M, g) variedad riemanniana y sea $T \in \mathcal{T}_2^0(M)$. Dadas las coordenadas (x^i), prueba que

$$\mathcal{C}^\infty(U) \ni g^{ij} T_{ij} \quad (*)$$

no depende de las mismas (de las coordenadas (x^i))

Por tanto, tenemos una función global en M cuya expresión en (x^i) es $(*)$.

Dicha función se denota por $C_{12} T \equiv$ contracción métrica de los índices 1 y 2 de T.

Dem:

Queremos comprobar que si $(\bar{x}^i)$ son otras coordenadas en p entonces se cumple

$$g^{-1}\left(T_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)\right) \overset{?}{=} g^{-1}\left(T_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l}\Big|_p\right)\right)$$

Siendo g^{-1} la inversa de la métrica $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$

Sabemos que g se puede representar como una matriz simétrica y con $\det \neq 0$ (por ser métrica riemanniana)

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Como $\det \neq 0$ es invertible

Denotamos (g^{ij}) la matriz inversa de g, donde los g^{ij} son los coeficientes que aparecen en el enunciado.

Sean (x^i), $(\bar{x}^i)$ dos coordenadas en p. Veamos cuál es la relación de las componentes de $\underset{\mathcal{T}_2^0}{\overset{\cap}{T}}$ en dichas coordenadas:

$$T_{ij} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T\left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k}, \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^l}\right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l}\right) = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\overline{T}_{kl}$$

A continuación comprobamos que la relación de las componentes de g^{-1} respecto a coordenadas (x^i) y $(\bar{x}^i)$ es:

$$g^{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \bar{g}^{rs}$$

Por lo que hemos demostrado en la página anterior, sabemos que:

$$g_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{g}_{kl}$$

• g^{mi}

$$\delta^m_j = g^{mi} g_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{g}_{kl}\, g^{mi}$$

• $\bar{g}^{ks}$

$$\bar{g}^{ks} \delta^m_j = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{g}_{kl}\, g^{mi} \bar{g}^{ks}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} g^{mi} \delta^s_l = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} g^{mi}$$

$$\Rightarrow \bar{g}^{ks} \delta^m_j = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} g^{mi}$$

Multiplic. por jacobiano inverso

$$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \bar{g}^{ks} \delta^m_j = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} g^{mi} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} = g^{mi} \delta^l_i$$

$$\boxed{\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s} \bar{g}^{ks} = g^{ml}}$$

Haciendo un cambio de índices, llegamos a que

$$g^{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \bar{g}^{rs}$$

Finalmente:

$$g^{ij} T_{ij} = \overbrace{\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}}_{\bar{\delta}^k_s} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}}^{\bar{\delta}^l_r} \bar{g}^{rs} \bar{T}_{kl} =$$

$$= \bar{\delta}^l_r \bar{\delta}^k_s \bar{g}^{rs} \bar{T}_{kl} = \bar{g}^{rs} \bar{T}_{sr} = \bar{g}^{sr} \bar{T}_{sr}$$

La matriz inversa de una matriz simétrica, es simétrica

Ejercicio 8: Sean ∇^1, ∇^2 conexiones afines en M.

Demuestra que

$$\nabla^1 - \nabla^2 : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y$$

Es ① $C^\infty(M)$-bilineal y que ② induce un tensor $D \in T^1_2(M)$

(El tensor diferencia)

Dem:

1. Demostramos que es $C^\infty(M)$-lineal tanto en la primera como en la segunda variable.

1ª variable

$$(\nabla^1 - \nabla^2)(fX, Y) := \nabla^1_{fX} Y - \nabla^2_{fX} Y \overset{?}{=} f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y)$$
$$=: f(\nabla^1 - \nabla^2)(X, Y)$$

Sea $a \in M$

$$(\nabla^1 - \nabla^2)(fX, Y)(a) := (\nabla^1_{fX} Y - \nabla^2_{fX} Y)(a) =$$

$$= \nabla^1_{(fX)(a)} Y - \nabla^2_{(fX)(a)} Y = \nabla^1_{f(a) X_a} Y - \nabla^2_{f(a) X_a} Y$$

$$= f(a) \nabla^1_{X_a} Y - f(a) \nabla^2_{X_a} Y = f(a)(\nabla^1_{X_a} Y - \nabla^2_{X_a} Y) =$$

Por definición, las conexiones afines en M son aplicaciones $C^\infty(M)$-lineales en 1er argumento

$$= f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y)(a) = f(\nabla^1 - \nabla^2)(X,Y)(a)$$

En definitiva:

$$(\nabla^1 - \nabla^2)(fX, Y) = f(\nabla^1 - \nabla^2)(X,Y)$$

2ª variable:

?

$$(\nabla_1 - \nabla_2)(X, fY) := \nabla^1_X(fY) - \nabla^2_X(fY) = f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y) =$$
$$= f(\nabla^1 - \nabla^2)(X,Y)$$

Por definición de conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M, ∇ satisface la regla de Leibniz en el segundo argumento. Siendo ∇^1, ∇^2 conexiones afines tenemos:

$$\nabla^1_X(fY) - \nabla^2_X(fY) \overset{\text{leibniz}}{=} \cancel{X(f)Y} + f\nabla^1_X Y - (\cancel{X(f)Y} + f\nabla^2_X Y)$$
$$= f\nabla^1_X Y - f\nabla^2_X Y = f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y)$$

$\Rightarrow$ $\nabla^1 - \nabla^2$ también es $C^\infty(M)$-lineal en la segunda variable.

Por tanto, $\nabla^1 - \nabla^2$ es $C^\infty(M)$-bilineal

Que induce un tensor $D \in \mathcal{T}_2^1(M)$ es un caso particular del ejercicio 4 con $s=2$.

Ejercicio 9: Demuestra que una conexión ∇ es simétrica si y solo si $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para todo sistema de referencia

Dem:

Vimos en la lección de la conexión de Levi Civita que la conexión ∇ es simétrica si

$$(*_1) \qquad [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

donde, dados los campos X e Y, el corchete de Lie se escribe así (siendo (x^i) coordenadas arbitrarias)

$$(*_2) \qquad [X,Y] = (X(Y^k) - Y(X^k))\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Para demostrar el si y solo si, voy a utilizar la expresión de la conexión afín en coordenadas.

Calculando directamente la resta $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ obtenemos:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (X(Y^k) + Y^j X^i \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x_k} -$$

$$(Y(X^k) + X^j Y^i \Gamma_{ij}^k)\frac{\partial}{\partial x_k} =$$

$$= X(Y^k)\frac{\partial}{\partial x_k} + \cancel{Y^j X^i \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}} - Y(X^k)\frac{\partial}{\partial x^k} - \cancel{Y^j X^i \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}}$$

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$$

$$\sum_{i,j} Y^j X^i = \sum_{i,j} X^j Y^i$$

- El producto es conmutativo
- Son n^2 sumandos a ambos lados de la igualdad

$$= \left(X(Y^k) - Y(X^k)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= [X, Y]$$

$(*_2)$

Recíprocamente, si ∇ es simetrica la expresión $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ equivale a que los símbolos de la conexión sean simétricos

$\square$.

Ejercicio 10: Sea M v.d. y ∇ conexión afín.

Dado $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ definimos:

$$\begin{aligned} \nabla\omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

Demuestra que $\nabla\omega \in \mathcal{T}^0_2(M)$ y calcula sus componentes en una carta (x^i) en función de las componentes de ω, X e Y.

Dem:

Para demostrar que $\nabla\omega \in \mathcal{T}^0_2(M)$ falta probar que es una aplicación $C^\infty(M)$-bilineal, es decir se cumple que $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ es:

(1) $\nabla\omega(fX + gY, Z) = f\,\nabla\omega(X, Z) + g\,\nabla\omega(Y, Z)$

y

(2) $\nabla\omega(X, fY + gZ) = f\,\nabla\omega(X, Y) + g\,\nabla\omega(X, Z)$

(1) <u>$\mathcal{C}^\infty(M)$ - linealidad en la primera variable</u>

$$\nabla\omega(fX+gY, Z) := (fX+gY)(\omega(Z)) - \omega(\nabla_{fX+gY} Z)$$

Conexión afín es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en 1º argumento $\rightarrow$

$$= fX(\omega(Z)) + gY(\omega(Z)) - \omega(f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z) =$$

Las 1-formas son $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineales $\rightarrow$

$$= fX(\omega(Z)) + gY(\omega(Z)) - f\omega(\nabla_X Z) - g\omega(\nabla_Y Z)$$

$$= f(X(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X Z)) + g(Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_Y Z))$$

$$= f\,\nabla\omega(X,Z) + g\,\nabla\omega(Y,Z)$$

(2) <u>$\mathcal{C}^\infty(M)$ - linealidad en la 2ª variable</u>

$$\nabla\omega(X, fY+gZ) := X(\omega(fY+gZ)) - \omega(\nabla_X(fY+gZ))$$

1-formas son $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineales $\rightarrow$

$$= X(f\omega(Y) + g\omega(Z)) - \omega(\nabla_X(fY) + \nabla_X(gZ))$$

∇_X es Leibniz en 2ª coord. $\rightarrow$

$$= X(f\omega(Y)) + X(g\omega(Z)) - \omega(X(f)Y + f\nabla_X Y + X(g)Z + g\nabla_X Z)$$

X es leibniz, ω " " $\rightarrow$

$$= \cancel{X(f)\omega(Y)} + fX(\omega(Y)) + \cancel{X(g)\omega(Z)} + gX(\omega(Z)) - \cancel{X(f)\omega(Y)} - f\omega(\nabla_X Y) - \cancel{X(g)\omega(Z)} - g\omega(\nabla_X Z)$$

$$= f(X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)) + g(X(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X Z))$$

$$= f\, \nabla\omega(X, Y) + g\, \nabla\omega(X, Z))$$

Calculamos las componentes de $\nabla\omega$ en una carta (x^i)

en función componentes de ω, X, Y.

$$\omega = \omega^m dx_m \qquad X = X^i \partial x_i \qquad Y = Y^j \partial x_j$$

$$(\nabla\omega)_{ij} := \nabla\omega(\partial x_i, \partial x_j) = \partial x_i(\omega(\partial x_j)) - \omega(\nabla_{\partial x_i} \partial x_j)$$

$$= \partial x_i (\omega(\partial x_j)) - \omega(\Gamma^k_{ji} \partial x_k) =$$

Conexión afín en coordenadas

$$\nabla_{\partial x_i} \partial x_j = \Gamma^k_{ji} \partial x_k$$

$$= \partial x_i (\omega^m dx^m (\partial x_j)) - (\omega^m dx^m)(\Gamma^k_{ji} \partial x_k)$$

$$= \partial x_i (\omega^m \delta^m_j) - (\omega^m \Gamma^k_{ji} \delta^m_k)$$

$$= \partial x_i (\omega^j) - \omega^j \Gamma^k_{ji}$$

$\square$

Ejercicio 11: Definimos $\mathbb{R}^3_2$ como el espacio $\mathbb{R}^3$ con la métrica $g = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ en canónicas. Sea M la superficie dada por

$$M = \{(x^1, x^2, x^3) \mid x_2^2 + x_3^2 = 1 + x_1^2\}$$

a) Demuestra que M es v.d. 2-dim y encuentra una carta para M.

b) Dada $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, expresa $i^*(g)$ en dichas coordenadas. ¿Es una métrica? En caso afirmativo ¿cuál es su índice?

Dem:

Demostramos (a):

La ecuación del hiperboloide de una hoja es precisamente:

$$y^2 + z^2 - x^2 = 1 \quad , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$ (si se gira entorno al eje X)

Luego M corresponde al hiperboloide de una hoja que es una variedad diferenciable 2-dimensional

Damos una carta para M, teniendo en cuenta que la ecuación fundamental del cosh y senh es:

$$\cosh^2 \theta = 1 + \operatorname{senh}^2 \theta$$

Ponemos

$$x_2^2 + x_3^2 = \cosh^2 u \iff \begin{cases} x_2 = \cos v \cosh u \\ x_3 = \operatorname{sen} v \cosh u \end{cases}$$

$$x_1^2 = \operatorname{senh}^2 u \implies x_1 = \operatorname{senh} u$$

Por tanto una parametrización de M sería

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times (0,2\pi) &\longrightarrow M \\ (u,v) &\longmapsto (\operatorname{senh} u, \cos v \cosh u, \operatorname{sen} v \cosh u) \end{aligned}$$

Y $\varphi = X^{-1}$ sería una carta para M

Demostramos (b):

Tenemos que

$$\mathbb{R} \times (0,2\pi) \xrightarrow{\varphi^{-1}} M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto (\operatorname{senh} u, \cos v \cosh u, \operatorname{sen} v \cosh u) \longmapsto (\quad '' \quad)$$

Consideramos las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1(u,v) = \operatorname{senh} u \\ x_2(u,v) = \cos v \cosh u \\ x_3(u,v) = \operatorname{sen} v \cosh u \end{cases}$$

Sabemos que el pull-back de una métrica (en $\mathbb{R}^3$) es una métrica en M, luego i^*g es métrica en M

siendo $g = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$

En consecuencia $i^*g \in \mathcal{T}_2^0(M)$

$\Rightarrow i^*g = a\,du^2 + 2ab\,du\,dv + b^2 dv^2$

Sabiendo que

$$di_{(u,v)}(\partial u) = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= \frac{\partial(\operatorname{senh} u)}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(\cos v \cosh u)}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(\operatorname{sen} v \cosh u)}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= \cosh u \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos v \operatorname{senh} u \frac{\partial}{\partial x_2} + \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$di_{(u,v)}(\partial v) = -\operatorname{sen} v \cosh u \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos v \cosh u \frac{\partial}{\partial x^3}$$

$\uparrow$

razonamiento análogo al anterior

Calculamos los coeficientes a, b, c.

$$a(u,v) = i^* g_{(u,v)}(\partial u, \partial u) := g_{i(u,v)}\left(di_{(u,v)}(\partial u), di_{(u,v)}(\partial u)\right)$$

$$= \cancel{\left((dx)^2 - (dx)^2 - (dx)^2\right)\left(\cosh u\, \partial x_1 - \cos v \operatorname{senh} u\, \partial x_2 - \operatorname{sen} v\right.}$$

$$= \left((dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right)\left(\cosh u\, \partial x_1 + \cos v \operatorname{sen} h u\, \partial x_2 + \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u\, \partial x_3, \, ''\right)$$

$$= (\cosh u)^2 - (\cos v \operatorname{senh} u)^2 - (\operatorname{sen} v \operatorname{senh} u)^2$$

$$= \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1.$$

$$b(u,v) = i^* g_{(u,v)}(\partial u, \partial v) := g_{i(u,v)}\left(di_{(u,v)}(\partial u), di_{(u,v)}(\partial v)\right) =$$

$$= \left((dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right)\left(\cosh u\, \partial x_1 + \cos v \operatorname{senh} u\, \partial x_2 + \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u\, \partial x_3, - \operatorname{sen} v \cosh u\, \partial x_2 + \cos v \cosh u\, \partial x_3\right)$$

$$= \cos v \cdot \operatorname{sen} v \cdot \cosh u \operatorname{senh} u - \cos v \operatorname{sen} v \cosh u \operatorname{senh} u = 0$$

$$c(u,v) = i^* g_{(u,v)}(\partial v, \partial v) := g_{(u,v)}\left(di_{(u,v)}(\partial v), di_{(u,v)}(\partial v)\right) =$$

$$= \left((dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right)\left(- \operatorname{sen} v \cosh u\, \partial x_2 + \cos v \cosh u\, \partial x_3, \, ''\right)$$

$$= -(\operatorname{sen} v \cosh u)^2 - (\cos v \cosh u)^2 =$$

$$= -\cosh^2 u.$$

$$\Rightarrow \quad i^* g = d \quad - \cosh^2 u \, dv$$

La matriz asociada a esta métrica es:

$$i^* g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2 u \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ind}\,(i^* g) = 1$ por tanto es métrica Lorentziana

$\square$.

Ejercicio 12: Sea M v.d. y (x^i) coordenadas en $\mathcal{U} \subset M$. Es claro que $dx^i \otimes \partial x_i \in \mathcal{T}^1_1(\mathcal{U})$

Demuestra que es una definición coordinate free, es decir, si $(\bar{x}^i)$ son otras coordenadas, entonces

$$dx^i \otimes \partial x^i = d\bar{x}^j \otimes \partial \bar{x}^j \quad \text{en } \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}$$

¿Sabrías expresar el tensor ϵ como una aplicación

$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$?

Dem:

Sean (x^i), $(\bar{x}^i)$ dos cartas con intersección no vacía $(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}} \neq \emptyset)$

Nos preguntamos si

$$dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{?}{=} d\bar{x}^j \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \quad \text{en } \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}$$

Calculamos

$$\boxed{d\bar{x}^j \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}} = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k \right) \otimes \left(\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \right)}_{\delta^\ell_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 1 & \text{si } k = \ell \end{cases}} dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell} = dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} \underset{k \mapsto i}{=} \boxed{dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

Ejercicio 13: Sea ∇ una conexión afín en M y sea T la aplicación dada por:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

① Demuestra que T induce un tensor $(1,2)$ sobre M (el tensor torsión)

② Demuestra que dos conexiones ∇^1, ∇^2 determinan el mismo tensor torsión si y solo si, el tensor diferencia (g: δ) es simétrico

Dem:

Demostramos ② (Suponiendo que hemos demostrado ①, que lo demuestro luego.)

- Por definición, el tensor diferencia $D \in \mathcal{T}_2^1(M)$ es simétrico respecto a los índices covariante o contravariante cuando sus componentes respectivas son iguales tras un intercambio de índices, es decir:

$$D^k_{ij} = D^k_{ji}$$

- Por otro lado dos conexiones ∇^1 y ∇^2 determinan el mismo tensor torsión si

$$\nabla^1_X Y - \nabla^1_Y X - \cancel{[X,Y]} = \nabla^2_X Y - \nabla^2_Y X - \cancel{[X,Y]}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overset{1}{\nabla}_X Y - \overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{1}{\nabla}_Y X - \overset{2}{\nabla}_Y X$$

$\Longleftrightarrow$ La aplicación $C^\infty(M)$-bilineal del ejercicio 8 es simétrica.

Vimos que esta aplicación induce un tensor $D \in T^1_2(M)$ que viene dado por

$$\begin{aligned} D: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \omega \qquad X \qquad Y &\longrightarrow D(\omega, X, Y) \end{aligned}$$

donde $D(\omega, X, Y) = \omega((\nabla^1 - \nabla^2)(X,Y)) = \omega(\underbrace{\overset{1}{\nabla}_X Y - \overset{2}{\nabla}_X Y}_{\text{campo}})$

Este es el tensor diferencia.

Después de esta introducción demostramos que

$$D^k_{ij} = D^k_{ji} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^1 - \nabla^2 (X,Y) = \nabla^1 - \nabla^2 (Y,X)$$

Teniendo en cuenta la siguiente cadena de igualdades:

$$D^k_{ij} = D(dx^k, \partial x_i, \partial x_j) = dx^k(\overset{1}{\nabla}_{\partial x_i} \partial x^j - \overset{2}{\nabla}_{\partial x_i} \partial x^j)$$

$$D^k_{ji} = D(dx^k, \partial x_j, \partial x_i) = dx_k(\overset{1}{\nabla}_{\partial x_j} \partial x^i - \overset{2}{\nabla}_{\partial x_j} \partial x^i)$$

Luego para una 1-forma y dos campos arbitrarios

$$\omega = \omega^k dx^k \;,\quad X = X^i \partial x_i \;,\quad Y = Y^j \partial x_j$$

Al ser D una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineal por ser tensor:

$$\omega(\nabla^1-\nabla^2(X,Y)) = D(\omega, X, Y) = \omega^k X^i Y^j \, D(dx^k, \partial x_i, \partial x_j) = \omega^k X^i Y^j D^k_{ij}$$

$\boxed{\text{Hipótesis}: D^k_{ij} = D^k_{ji}}$ $\rightarrow$

$$= \omega^k X^j Y^i D^k_{ji} = \omega^k Y^i X^j D(dx^k, \partial x_j, \partial x_i)$$

$$= D(\omega, Y, X) = \omega(\nabla^1 - \nabla^2(Y,X))$$

De esta cadena de igualdades deducimos que

$$\nabla^1 - \nabla^2(X,Y) = \nabla^1 - \nabla^2(Y,X) \iff D^k_{ij} = D^k_{ji}$$

Demostramos ①

La aplicación $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ viene dada por $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

Si demostramos que es una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilineal aplicando el ejercicio 4, para $s=2$, tendremos que esta induce un tensor $(1,2)$ como queremos demostrar.

$\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en la primera variable

$$T(fX,Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX,Y] =$$

$$= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - fX(Y) + Y(fX)$$

- La conexión afín es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en el primer argumento
- La conexión afín satisface Leibniz en el segundo argumento

$$= f\nabla_X Y - \cancel{Y(f)}X - f\nabla_Y X - fX(Y) + \cancel{Y(f)}X + fYX$$

- Los campos satisfacen Leibniz

$$= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - fXY + fYX$$

$$= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) = fT(X,Y) \quad \text{OK}$$

Usando argumentos análogos a los anteriores pruebo que es

$\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en segunda variable

$$T(X,fY) = \nabla^1_X fY - \nabla^2_{fY} X - [X,fY] =$$

$$= X(f)Y + f\nabla^1_X Y - f\nabla^2_Y X - X(fY) + fY(X)$$

$$= \cancel{X(f)}Y + f\nabla^1_X Y - f\nabla^2_Y X - \cancel{X(f)}Y - fXY + fYX$$

$$= f\nabla^1_X Y - f\nabla^2_Y X - f[X,Y]$$

$$= f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_Y X - [X,Y]) = fT(X,Y) \quad \text{OK}$$