线性代数（李尚志）课后答案

注：排版上，将第 7 章的内容，放在第 8 章后面了

2020.06

第 1 章　线性方程组的解法

§ 1.1 线性方程组的同解变形

知识导航

1. 方程组的线性组合

定义 1.1.1 n 个未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的如下形式的方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

称为 n 元一次方程，也称 n **元线性方程** (linear equation in n variables), 其中一次项系数 $a_1, \ldots, a_n$ 和常数项 b 都是已知数.

如果 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是 n 个数，且将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ 代入方程 (1.1.1) 能使方程变为等式，即 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$ 成立，则这一组数 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 称为方程 (1) 的一个 **解** (solution). 数组中的第 i 个数 c_i (即 x_i 的取值) 称为解的第 i 分量.

具有同样 n 个未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的若干个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

称为 n **元线性方程组** (linear equations in n variables). 如果一组数 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 是方程组 (2) 中所有方程的公共解，也就是说：将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ 代入方程组的每一个方程，能使所有这些方程都变为等式，就称这组数 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 为这个方程组的解. □

将方程组 (2) 的各方程分别乘以已知常数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 再相加，得到的新方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

称为原方程组 (2) 的 **线性组合** (linear combination), 也称为原方程组中各方程的线性组合，其中 x_j 的系数 $a_j = \lambda_1a_{1j} + \lambda_2a_{2j} + \cdots + \lambda_ma_{mj}$ $(1 \le j \le n)$ 等于原方程组各方程的 x_j 的系数的线性组合，常数项 $b = \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 + \cdots + \lambda_mb_m$ 等于原来各方程的常数项的线性组合. 如果将第 i 个方程乘 1 、其余方程都乘 0, 得到的线性组合就是第 i 个方程. 可见，原方程组中每个方程都是整个方程组的线性组合. 如果将所有的方程都乘 0 再相加，得到的线性组合就是恒等式 $0 = 0$.

定理 1.1.1 (1) 原方程组的每组解一定原方程组的每个线性组合的解.

(2) 如果两个方程组互为线性组合，这两个方程组同解. □

如果两个方程组 (I) 与 (II) 互为线性组合，就称这两个方程组等价. 解方程组的基本方法，就是将方程组通过适当的变形化简，使每次变形前后的方程组等价，直到最后得到的方程组的解可以立即写出来.

2. 基本的同解变形

定理 1.1.2 方程组的以下三种变形是同解变形：

(1) 交换其中任意两个方程的位置，其余方程不变.

(2) 将任一个方程乘以一个非零的常数 λ, 其余方程不变.

(3) 将任一方程的常数倍加到另一方程上，其余方程不变. □

定理 1.1.2 所说的线性方程组的三类同解变形，称为线性方程组的 **初等变换** (elementary transformation). 反复利用这三种初等变换，可以将线性方程组消元，求出解来.

为叙述方便，我们用如下符号表示以上三种同解变形. 其中的箭头前后分别是变形前后方程组，箭头上方是对所采用的变形的说明.

(I) $\xrightarrow{(i,j)}$ (II). (将原方程组 (I) 的第 i 个方程与第 j 个方程互换位置.)

(I) $\xrightarrow{\lambda(i)}$ (II). (将原方程组 (I) 第 i 方程乘非零常数 λ.)

(I) $\xrightarrow{\lambda(i)+(j)}$ (II). (将原方程组 (I) 第 i 方程的 λ 倍加到第 j 方程.)

3. 数域

利用初等变换求解线性方程组，总是将原方程组各方程的系数经过加减乘除运算得到新方程组的系数，最后得出的解也由原方程组各方程的系数经过加减乘除得出. 如果原方程组的系数是有理数，经过加减乘除得出的解一定还是有理数. 类似地，系数如果都是实数，经过加减乘除得出的一定还是实数.

定义 1.1.2 设 F 是复数集合的子集，包含 0 和 1, 并且在加、减、乘、除运算下封闭 (做除法时除数不为 0), 就称 F 是 **数域** (number field). □

如果线性方程组的系数都在某个数域 F 的范围内，并且这个方程组有唯一解，则解的分量也都在 F 的范围内.

重要例 复数集合 C, 实数集合 R, 有理数集合 Q 都是数域. □

例题分析与解答

1.1.1 (1) 求 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

(2) 求 $1^5+2^5+\cdots+n^5$.

分析 对任意正整数 k, 前 n 个正整数的 k 次幂和 $S_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 满足条件 $S_n-S_{n-1}=n^k$. 反过来，如果函数 $f(n)$ 满足条件 $f(n)-f(n-1)=n^k$, 则

$$\begin{aligned}S_n&=1^k+2^k+\cdots+n^k=(f(1)-f(0))+\cdots+(f(n)-f(n-1))\\&=f(n)-f(0).\end{aligned}$$

特别地，当 $f(0)=0$ 时 $S_n=f(n)$.

当 $f(n)=a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m$ 是 m 次多项式时,

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=a_1[n-(n-1)]+\cdots+a_m[n^m-(n-1)^m]\\&=a_1+\cdots+a_m(mn^{m-1}-C_m^2n^{m-2}+\cdots)\end{aligned}$$

是 $m-1$ 次多项式. 取 $a_0=f(0)=0$, 并用待定系数法求其余各项系数 $a_1,\ldots,a_m$ 使 $f(n)-f(n-1)=n^{m-1}$, 则 $f(n)=1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+n^{m-1}$.

解 (1) 求 4 次多项式 $f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4$ 使

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=a_1[n-(n-1)]+a_2[n^2-(n-1)^2]\\&\quad+a_3[n^3-(n-1)^3]+a_4[n^4-(n-1)^4]\\&=(a_1-a_2+a_3-a_4)+(2a_2-3a_3+4a_4)n\\&\quad+(3a_3-6a_4)n^2+4a_4n^3=n^3\end{aligned}$$

各项系数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足线性方程组

$$\begin{cases}a_1-a_2+a_3-a_4=0\\ 2a_2-3a_3+4a_4=0\\ 3a_3-6a_4=0\\ 4a_4=1\end{cases}$$

由下至上依次由各个方程解出

$a_4=\dfrac{1}{4}$, $a_3=\dfrac{6}{3}a_4=\dfrac{1}{2}$, $a_2=\dfrac{1}{2}(3a_3-4a_4)=\dfrac{1}{4}$, $a_1=a_2-a_3+a_4=0$.

$S_n=f(n)=\dfrac{1}{4}n^4+\dfrac{1}{2}n^3+\dfrac{1}{4}n^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

(2) 求 6 次多项式 $f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4+a_5n^5+a_6n^6$ 满足条件 $f(n)-f(n-1)=n^5$, 即 $f(n)$ 的各系数 a_i $(1\le i\le 6)$ 满足方程组

$$\begin{cases}a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=0\\ 2a_2-3a_3+4a_4-5a_5+6a_6=0\\ 3a_3-6a_4+10a_5-15a_6=0\\ 4a_4-10a_5+20a_6=0\\ 5a_5-15a_6=0\\ 6a_6=1\end{cases}$$

解之得 $(a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{12},0,-\dfrac{1}{12},0\right)$. 从而

$$S_n = 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = f(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2. \quad \square$$

点评 利用类似的方法可以对别的正整数 k 求出 $S_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$. 例如,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\,. \quad \square$$

1.1.2 求二次函数 $y = f(x)$ 具有如下对应值

x	2	3	4
y	7	16	29

解 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其中 a, b, c 是待定常数. 则

$$\begin{cases} f(2) = c + 2b + 4a = 7 \\ f(3) = c + 3b + 9a = 16 \\ f(4) = c + 4b + 16a = 29 \end{cases} \xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)} \begin{cases} c + 2b + 4a = 7 \\ \quad b + 5a = 9 \\ \quad b + 7a = 13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-(2)+(3)} \begin{cases} c + 2b + 4a = 7 \\ \quad b + 5a = 13 \\ \quad 2a = 4 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}(3),-4(3)+(1),-5(3)+(2)} \begin{cases} c + 2b = -1 \\ \quad b = 3 \\ \quad a = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{cases} c = -7 \\ b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$f(x) = 2x^2 + 3x - 7.$ $\square$

1.1.3 用消元法解线性方程组

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}; \qquad (2) \quad \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}.$$

解 (1) 原方程组 $\xrightarrow{-2(1)+(2),-3(1)+(3)}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad -2x_2 - x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2(3)+(2)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad 15\,x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

由最后一个方程组第 2 方程解出 $x_3 = 0$, 代入第 3 方程解出 $x_2 = 0$, 再代入第 1 方程解出 $x_1 = 1$.

原方程组有唯一解 $(1,0,0)$.

(2) 原方程组 $\xrightarrow{(2)+(1),(3)+(1),(4)+(1),\frac{1}{3}(1)}$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{10}{3} \\ x_1 \quad\;\; +x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2 \quad\;\; +x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3 \quad\;\; =4 \end{cases} \xrightarrow{-(1)+(2),-(1)+(3),-(1)+(4)} \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{10}{3} \\ \quad -x_2 \qquad\quad =-\frac{4}{3} \\ \qquad\quad -x_3 \quad\;\; =-\frac{1}{3} \\ \qquad\qquad\quad -x_4=\frac{2}{3} \end{cases}$$

由最后一个方程组后三个方程分别解出 $x_2=\frac{4}{3}, x_3=\frac{1}{3}, x_4=-\frac{2}{3}$. 代入第 1 方程解出 $x_1=\frac{7}{3}$.

原方程组有唯一解 $(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$. □

1.1.4 (1) 证明：任给 3 个数 y_1,y_2,y_3, 存在函数 $f(n)=an^2+bn+c$, 使以 $a_n=f(n)$ 为通项公式的数列的前 3 项为 y_1,y_2,y_3.

(2) 在一次智力测验中，老师给了一个数列的前 3 项 $1,2,3$, 让学生填写第 4 项. 试证明：无论在第 4 项填上什么数 y, 都存在一个函数 $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 使以 $a_n=f(n)$ 为通项公式的数列的前 4 项为 $1,2,3,y$.

解 (1) $f(n)$ 的各项系数 a,b,c 满足的充分必要条件为

$$\begin{cases} f(1)=c+b+a=y_1 \\ f(2)=c+2b+4a=y_2 \\ f(3)=c+3b+9a=y_3 \end{cases}$$

经过初等变换化简，得

$$\xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)} \begin{cases} c+b+a=y_1 \\ \quad b+3a=y_2-y_1 \\ \quad b+5a=y_3-y_2 \end{cases} \xrightarrow{-(2)+(3)} \begin{cases} c+b+a=y_1 \\ \quad b+3a=y_2-y_1 \\ \qquad 2a=y_3-2y_2+y_1 \end{cases}$$

由下至上求出 $a=\frac{1}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3$, $b=-\frac{5}{2}y_1+4y_2-\frac{3}{2}y_3$, $c=3y_1-3y_2+y_3$. 从而

$$f(n)=(\tfrac{1}{2}y_1-y_2+\tfrac{1}{2}y_3)x^2+(-\tfrac{5}{2}y_1+4y_2-\tfrac{3}{2}y_3)x+(3y_1-3y_2+y_3).$$

易验证这个多项式 $f(n)$ 满足所要求的条件 $f(n)=y_1, f(2)=y_2, f(3)=y_3$.

(2) 数列 $\alpha=(1,2,3,y)$ 可以写成两个数列之和 $(1,2,3,y)=(1,2,3,4)+(0,0,0,y-4)$. 其中前一个数列 $\beta=(1,2,3,4)$ 的通项公式 $b_n=n$. 要使后一个数列 $\gamma=(0,0,0,y-4)$ 的前三项为 0, 只要取通项公式 $c_n=g(n)=\lambda(n-1)(n-2)(n-3)$ 即可，其中 λ 是待定常数. 只需再适当选择 λ 使 $c_4=g(4)=\lambda(4-1)(4-2)(4-3)=6\lambda=y-4$, 易见 $\lambda=\frac{1}{6}(y-4)$ 符合要求.

取 $f(n)=n+g(n)=n+\frac{1}{6}(y-4)(n-1)(n-2)(n-3)$, 则以 $a_n=f(n)$ 为通项公式的数列的前 4 项依此为 $1,2,3,y$, 符合要求. □

点评 很容易想到，习题 1.1.4(2) 可以通过解方程组

$$\begin{cases} f(1)=d+c+b+a=1 \\ f(2)=d+2c+4b+8a=2 \\ f(3)=d+3c+9b+27a=3 \\ f(4)=d+4c+16b+64a=y \end{cases}$$

来证明. 只要通过初等变换求出这个方程组的解，就证明了通项公式的存在性. 不过，以上的证明显然更简捷漂亮些. 不难看出，习题 1.1.4(1) 也可以通过与 (2) 类似的方法来解答. 为此，只要将数列 (y_1,y_2,y_3) 分解为两个数列之和： $(y_1,y_2,y_3)=(y_1,y_2,2y_2-y_1)+(0,0,y_1-2y_2+y_3)$. 其中前一个数列 $\beta=(y_1,y_2,2y_2-y_1)$ 是以 y_1,y_2 为前两项的等差数列，通项公式为 $b_n=y_1+(n-1)(y_2-y_1)$. 后一个数列 $\gamma=(0,0,y_1-2y_2+y_3)$ 的前两项为 0, 选通项公式 $c_n=g(n)=\lambda(n-1)(n-2)$ 可符合要求，再选 λ 使 $c_3=g(3)=2\lambda=y_1-2y_2+y_3$ 即可.

更进一步，可将数列 $\alpha=(y_1,y_2,y_3)$ 分解为三个数列之和 $\alpha=(y_1,0,0)+(0,y_2,0)+(0,0,y_3)$. 其中 $\alpha_1=(y_1,0,0)$ 的通项公式可取为 $f_1(n)=\lambda_1(n-2)(n-3)$ 使第 2,3 两项 $f_1(2)=f_1(3)=0$, 适当选取 λ_1 可使 $f_1(1)=\lambda_1(1-2)(1-3)=y_1$. 类似地可得到 $\alpha_2=(0,y_2,0)$ 的通项公式 $f_2(n)=\lambda_2(n-1)(n-3)$, 以及 $\alpha_3=(0,0,y_3)$ 的通项公式 $f_3(n)=\lambda_3(n-1)(n-2)$. 于是得到 $\alpha=(y_1,y_2,y_3)$ 的通项公式 $f(n)=f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)$. 这个方法显然也可以用来得到通项公式 $a_n=f(n)=f_1(n)+\cdots+f_k(n)$ 使数列的前 k 项等于任意指定的值 $y_1,\ldots,y_k$.

更进一步, 用这个方法可以得到多项式函数 $f(x)$ 使它在任意 k 个不同的自变量值 $x_1,\ldots,x_k$ 所取的函数值 $f(x_1),\ldots,f(x_k)$ 等于任意指定的 $y_1,\ldots,y_k$, 也就是求多项式曲线 $y=f(x)$ 经过直角坐标系中横坐标不同的任意 k 个点 (x_i,y_i). 这样得到的多项式 $f(x)$ 称为 **拉格朗日插值多项式**. □

1.1.5 方程组 U 经过初等变换 $U\xrightarrow{-(1)+(2),-(1)+(3)}U_1\xrightarrow{-3(2)+(3)}U_2\xrightarrow{-\frac{1}{8}(3)}W$ 化成

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=0 \\ \qquad y+3z=-1 \\ \qquad\qquad z=-1 \end{cases} \tag{W}$$

写出方程组 U, 并求出它的解.

解 求每一步初等变换的逆变换得

$$W\xrightarrow{-8(3)}\begin{cases} x+y+\ \ z=0 \\ \qquad y+3z=-1 \\ \qquad -8z=8 \end{cases} \xrightarrow{3(2)+(3)}\begin{cases} x+y+\ \ z=0 \\ \qquad y+3z=-1 \\ \quad 3y+\ \ z=5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)+(2),(1)+(3)}\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=0\\x+2y+4z=-1\\x+4y+2z=5\end{cases}\tag{U}$$

原方程组 U 与 W 同解. 将 W 继续通过初等变换化简:

$$W\xrightarrow{-(3)+(1),-3(3)+(2)}\begin{cases}x+y\qquad=1\\\qquad y\qquad=2\\\qquad\qquad z=-1\end{cases}\xrightarrow{-(2)+(1)}\begin{cases}x\qquad\qquad=-1\\\qquad y\qquad=2\\\qquad\qquad z=-1\end{cases}$$

得到原方程组的解 $(-1,2,-1)$. $\square$

1.1.6 (1) 求证：如果复数集合的子集 P 包含至少一个非零数，并且对加、减、乘、除 (除数不为 0) 封闭，则 P 包含 $0,1$, 从而是数域.

(2) 求证：所有的数域都包含有理数域.

(3) 求证：集合 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$ 是数域. (其中 Q 是有理数域.)

(4) 试求包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小的数域.

证明 (1) 设 $0\neq a\in P$, 则 $0=a-a\in P$, $1=\frac{a}{a}\in P$. 并且 P 对加减乘除封闭. 因此 P 是数域.

(2) 设 F 是任一数域. 用数学归纳法证明任意正整数 $n\in F$. 首先, $1\in F$. 设正整数 $k\in F$, 则由对加法的封闭性知 $k+1\in F$. 这就证明了所有的正整数 $n\in F$. 又由 $0\in F$ 及 F 对减法封闭得 $-n=0-n\in F$. 因此 F 包含所有的整数.

每个有理数 a 能够写成整数之商 $a=\frac{m}{n}$, 其中 m,n 是整数且 $n\neq 0$. 由 F 对除法封闭知 $a=m\div n\in F$.

这就证明了 F 包含所有的有理数，从而包含全体有理数组成的有理数域 Q.

(3) 设 F 是包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域. 则 F 包含有理数域 Q, 并且包含 $\sqrt[3]{2}$ 及其与自身的乘积 $(\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{4}$. 于是 F 包含 $1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}$ 与任意有理数 a_0,a_1,a_2 的乘积之和组成的集合

$$E=\{a_0+a_1\sqrt[3]{2}+a_2\sqrt[3]{4}\mid a_0,a_1,a_2\in Q\}$$

我们证明 E 对加减乘除封闭，就是包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域.

E 中每个数 $\alpha=a_0+a_1\sqrt[3]{2}+a_2\sqrt[3]{4}$ 是一个不超过 2 次的有理系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 将 $x=\sqrt[3]{2}$ 代入得到的值 $f(\sqrt[3]{2})$. 任意两个数 $\alpha=f(\sqrt[3]{2})$ 与 $\beta=g(\sqrt[3]{2})$ 的和、差、积 $\alpha\pm\beta$, $\alpha\beta$ 可以在相应的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ 的和、差、积 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 中将 $x=\sqrt[3]{2}$ 代入得到.

有理系数多项式 $f(x),g(x)$ 的和、差、积仍是有理系数多项式.

不超过二次的多项式 $f(x),g(x)$ 的和与差 $f(x)\pm g(x)$ 仍不超过二次，将 $x=\sqrt[3]{2}$ 代入后得到的 $\alpha\pm\beta$ 仍在 E 中.

乘积 $p(x)=f(x)g(x)$ 是不超过 4 次的有理系数多项式

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

其中 $c_i \in Q$ $(0 \le i \le 4)$. 由于 $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, $(\sqrt[3]{2})^4 = 2\sqrt[3]{2}$,

$$\begin{aligned}\alpha\beta = p(\sqrt[3]{4}) &= c_0 + c_1\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4} + 2c_3 + 2c_4\sqrt[3]{2}\\ &= (c_0 + 2c_3) + (c_1 + 2c_4)\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4} \in E.\end{aligned}$$

只要能够证明当 $\beta = b_0 + b_1\sqrt[3]{2} + b_2\sqrt[3]{4} \ne 0$ 时 $\beta^{-1} \in E$, 则 α 与 β 相除得到的商 $\alpha \div \beta = \alpha\beta^{-1} \in E$. 为此，设法选取 $\gamma \in E$ 使 $\beta\gamma = c$ 为非零有理数，则 $\beta^{-1} = c^{-1}\gamma \in E$.

当 $b_1 = b_2 = 0$ 时 $\beta = b_0 \ne 0$ 是有理数，当然 $\beta^{-1} = b_0^{-1} \in Q \subset E$.

当 $b_1 \ne 0 = b_2$ 时 $\beta = b_0 + b_1\sqrt[3]{2}$, 取 $\gamma_1 = b_0^2 - b_0b_1\sqrt[3]{2} + b_1^2\sqrt[3]{4} \in E$. 则

$$\beta\gamma_1 = c_1 = b_0^3 + (b_1\sqrt[3]{2})^3 = b_0^3 + 2b_1^3 \in Q.$$

且 $c_1 \ne 0$, 否则 $\sqrt[3]{2} = -\frac{b_0}{b_1}$ 是有理数，矛盾. 于是 $\beta^{-1} = c_1^{-1}\gamma_1 \in E$.

当 $b_1 = 0 \ne b_2$ 时 $\beta = b_0 + b_2\sqrt[3]{4}$, 取 $\gamma_2 = b_0^2 - b_0b_2\sqrt[3]{4} + b_2^2 2\sqrt[3]{2} \in E$, 则

$$\beta\gamma_2 = c_2 = b_0^3 + (b_2\sqrt[3]{4})^3 = b_0^3 + 4b_2^3 \in Q.$$

且 $c_2 \ne 0$, 否则 $\sqrt[3]{4} = -\frac{b_0}{b_2}$ 是有理数，矛盾. 于是 $\beta^{-1} = c_2^{-1}\gamma_2 \in E$.

设 $b_1b_2 \ne 0$. 取 $\gamma_3 = b_2(b_2\sqrt[3]{2} - b_1) \in E$. 则

$$\beta b_2 = (b_2\sqrt[3]{4} + b_1\sqrt[3]{2} + b_0)b_2 = (b_2\sqrt[3]{2})^2 + b_2b_1\sqrt[3]{2} + b_1^2 + (b_0b_2 - b_1^2)$$

$$\beta\gamma_3 = \beta b_2(b_2\sqrt[3]{2} - b_1) = (b_2\sqrt[3]{2})^3 - b_1^3 + (b_0b_2 - b_1^2)(b_2\sqrt[3]{2} - b_1) = c_0 + c_1\sqrt[3]{2}$$

其中 $c_0 = b_2^3 - 2b_1^3 - (b_0b_2 - b_1^2)b_1$ 与 $c_1 = (b_0b_2 - b_1^2)b_2$ 都是有理数. 且由 $\beta \ne 0$ 与 $\gamma_3 \ne 0$ 知 $\beta\gamma_3 \ne 0$. 前面已证明 $(\beta\gamma_3)^{-1} \in E$, $\beta^{-1} = \gamma_3(\beta\gamma_3)^{-1}$ 是 E 中两个数 γ_3 与 $(\beta\gamma_3)^{-1}$ 的乘积，由 E 对乘法的封闭性知 $\beta^{-1} \in E$. □

点评 本题对于 E 对乘法和求逆的封闭性的证明采用了比较“笨”的死算的方法. 更好的算法是利用多项式的带余除法. 由于 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数多项式 $m(x) = x^3 - 2$ 的根. 将两个有理系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积用 $x^3 - 2$ 除得到商 $q(x)$ 与余式 $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x$ 的系数也都是有理数. 在恒等式 $f(x)g(x) = q(x)(x_3 - 2) + r(x)$ 中将 $x = \sqrt[3]{2}$ 代入，并注意到 $(\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$, 就得到 $f(\sqrt[3]{2})g(\sqrt[3]{2}) = r(\sqrt[3]{2}) = c_0 + c_1\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4} \in E$. 这就证明了 E 对乘法的封闭性.

要证明 E 中的非零数 $\beta = b_0 + b_1\sqrt[3]{2} + b_2\sqrt[3]{4}$ 可逆，需要用到定理：对互素的有理系数多项式 $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ 与 $m(x) = x^3 - 2$ 可以做辗转相除法得到有理系数多项式 $u(x), v(x)$ 满足条件

$$u(x)g(x) + v(x)m(x) = 1$$

将 $x = \sqrt[3]{2}$ 代入，并注意到 $m(\sqrt[3]{2}) = 0$, 就得到 $u(\sqrt[3]{2})g(\sqrt[3]{2}) = 1$, $\beta^{-1} = g(\sqrt[3]{2})^{-1} = u(\sqrt[3]{2}) \in E$.

以上证法用到的关于多项式的知识参见第 5 章. 同样的证法还可以得到更一般的结论：

设复数 α 是某个非零有理系数多项式的根，则存在最低系数的有理系数多项式 $m(x) = x^d + a_{d-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 使 $m(\alpha) = 0$. 设 $m(x)$ 的次数为 d. 则

$$E = \{c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{d-1}\alpha^{d-1} \mid c_i \in Q, \forall\ 0 \le i \le d-1\}$$

是包含 α 的最小的数域. 这样的数 α 称为 **代数数**. $m(x)$ 称为 α 的 **最小多项式**. 例如， i 与 $\sqrt[3]{2}$ 都是代数数，最小多项式分别为 x^2+1 与 x^3-2. □

1.1.7 证明： (1) 线性组合的传递性：如果方程组 II 是方程组 I 的线性组合，方程组 III 是方程组 II 的线性组合，则方程组 III 是方程组 I 的线性组合.

(2) 等价的传递性：如果方程组 I 与方程组 II 等价，方程组 II 与方程组 III 等价，则方程组 I 与方程组 III 等价.

证明 设方程组 I 由方程 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 组成，方程组 II 由方程 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ 组成，方程组 III 由方程 $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p$ 组成.

(1) 方程组 II 是 I 的线性组合 $\Rightarrow$ 每个

$$\mathbf{b}_i = b_{i1}\mathbf{a}_1 + \cdots + b_{im}\mathbf{a}_m \quad (\forall\ 1 \le i \le n) \tag{1}$$

其中 $b_{i1}, \ldots, b_{im}$ 是某 m 个常数.

方程组 III 是 II 的线性组合 $\Rightarrow$ 每个

$$\mathbf{c}_k = c_{k1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{kn}\mathbf{b}_n \quad (\forall\ 1 \le k \le p) \tag{2}$$

其中 $c_{k1}, \ldots, c_{kn}$ 是某 n 个常数.

将等式 (2) 代入 (1), 得到

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_k &= c_{k1}(b_{11}\mathbf{a}_1 + \cdots + b_{1m}\mathbf{a}_m) + \cdots \\ &\quad c_{kn}(b_{n1}\mathbf{a}_1 + \cdots + b_{nm}\mathbf{a}_m) \\ &= \lambda_{k1}\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{km}\mathbf{a}_m\end{aligned}$$

其中每个 $\lambda_{kj} = c_{k1}b_{1j} + cdots + c_{kn}b_{nj}$ 是常数. 这证明了方程组 III 中每个方程 $\mathbf{c}_k$ 是方程组 I 的线性组合. 从而方程组 III 是方程组 I 的线性组合.

(2) 根据 (1) 的结论，由方程组 II 是 I 的线性组合及 III 是 II 的线性组合可得出 III 是 I 的线性组合. 反过来，由方程组 II 是 III 的线性组合及 I 是 II 的线性组合可得出 I 是 III 的线性组合. 这就证明了方程组 III 与 I 互为线性组合，相互等价. □

§ 1.2 矩阵消元法

知识导航

1．用矩阵表示线性方程组

在利用初等变换解线性方程组的过程中，实际上只对各方程中各项的系数进行了运算（加、减、乘、除运算）. 代表未知数的字母并没有参加运算，所起的作用只是用来辨认哪些是同类项系数可以合并. 为了书写的简便，更为了突出解方程组中本质的东西 — 系数的运算，我们采用分离系数法，将代表未知数的字母略去，将等号也略去，只写出系数来表示各方程.

每个线性方程 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ 由它的各系数排成一行来表示：

$$(a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_i)$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

用矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

来表示. 其中每一行表示一个方程，同一个未知数的系数上下对齐组成一列，常数项组成最后一列. 将数表用括号括起来是表示所有的数组成一个整体，表示一个方程组.

定义 1.2.1 对任意自然数 m, n, 由数域 F 中 $m \times n$ 个数排成 m 行、 n 列所得到的数表，称为 F 上的 $m \times n$ **矩阵** (matrix). 数表中的每个数称为矩阵的一个 **元素** (element), 也称为矩阵的一个 **分量** (entry), 其中排在第 i 行第 j 列的数称为矩阵的第 (i, j) 元或第 (i, j) 分量. F 上全体 $m \times n$ 矩阵的集合记作 $F^{m\times n}$. □

定义 1.2.2 由数域 F 中 n 个数 a_i $(1 \le i \le n)$ 排成的有序数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 F 上的 n **维向量** (n-dimensional vector), 也称 n 维数组向量， a_i 称为它的第 i 分量. 所有分量都为 0 的向量 $(0, \ldots, 0)$ 称为 **零向量** (zero vector), 记作 $\mathbf{0}$. (通常也将零向量记作 0, 从上下文可以知道它是表示零向量还是表示数 0, 不会混淆.) F 上全体 n 维向量组成的集合称为 F 上的 n **维向量空间** (n-dimensional vector space), 记作 F^n. 将 F^n 中每个向量写成一行的形式，就是一个 $1 \times n$ 矩阵，称为 n 维 **行向量**, F 上全体 n 维行向量组成的集合 $F^{1\times n}$ 称为 n 维 **行向量空间**. 类似地， $F^{n\times 1}$ 中每个 $n \times 1$ 矩阵也是 n 维向量，称为 n 维 **列向量**, $F^{n\times 1}$ 称为 n 维 **列向量空间**. □

按照以上定义，系数在数域 F 中的每个 n 元线性方程用 F^{n+1} 中的一个向量表示. 而 n 元线性方程组的每一组解是 F^n 中的一个向量. $F^{m\times n}$ 中每个矩阵的每一行是一个 n 维向量，每一列是一个 m 维向量. 由 m 个方程组成的 n 元线性方程组 (1) 用 (2) 中的 $m \times (n+1)$ 矩阵

M 表示，M 的前 n 列由各方程中各未知数的系数组成，这 n 列组成一个 $m \times n$ 矩阵 A, 称为方程组 (1) 的 **系数矩阵**. M 由系数矩阵 A 添加由常数组成的列向量 $\mathbf{b}$ 得到，因此 M 也称为 **增广矩阵**.

2 矩阵的初等行变换

将线性方程组用矩阵表示之后, 线性方程组的初等变换就可以通过对矩阵的初等变换来实现.

定义 1.2.3 (1) (向量的加法) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是同一个数域 F 上两个 n 维向量，将它们按分量相加得到的向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in F^n$ 称为这两个向量的和，记作 $\alpha + \beta$. 同样可以定义多个 (有限个) 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^n$ 的和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \in F^n$, 它的第 j 分量 $(1 \leq j \leq n)$ 等于各 α_i $(1 \leq i \leq m)$ 的第 j 分量之和.

(2) (向量与数的乘法) 将任一 $\lambda \in F$ 遍乘任一 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$ 的各分量，所得到的向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in F^n$ 称为 α 的 λ 倍，记作 $\lambda\alpha$.

(3) (向量的线性组合) 将 F^n 中的一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 分别乘以 F 中的一组数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 再相加，得到的向量 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_m \in F^n$ 称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.
□

定义 1.2.4 设 A, B 是 $F^{m \times n}$ 中的两个矩阵. 如果 B 的每一行都是 A 的行的线性组合，A 的每一行也是 B 的行的线性组合，就称两个矩阵 **行等价** (row equivalent). □

定理 1.2.1 设 F 上的矩阵 A 经过以下变形之一变成矩阵 B, 则 A 与 B 行等价：

(1) 将某两行互换位置；

(2) 用 F 中某个非零的数乘以某行；

(3) 将某行的常数倍加到另一行上. □

定义 1.2.5 定理 1.2.1 中所说的三类变形称为矩阵的 **初等行变换** (elementary transformation of rows).

为了叙述方便，我们用矩阵 A 到 B 的箭头来表示 A 经过初等行变换变为 B, 箭头上方注明所用的是哪一个变换：

$$(1)\ A \xrightarrow{(i,j)} B\,; \quad (2)\ A \xrightarrow{\lambda(i)} B\,; \quad (3)\ A \xrightarrow{\lambda(i)+(j)} B$$

箭头上的 (i, j) 表示将第 i 行与第 j 行互换，$\lambda(i)$ 表示用非零数 λ 乘以第 i 行，$\lambda(i) + (j)$ 表示将第 i 行的 λ 倍加到第 j 行上.

例题分析与解答

1.2.1 用矩阵消元法解线性方程组

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases};\quad (2)\ \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-5x_4=2 \\ x_1+2x_2+2x_3-2x_4+x_5=-2 \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=2 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+3x_3-x_4+x_5=1 \end{cases}.$$

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2),-2(1)+(2),-(1)+(4)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(2)+(4),-3(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2(2)+(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}(3),2(3)+(4)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}(4),6(4)+(1),-7(4)+(2),4(4)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(3)+(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最后得到的矩阵代表的方程组

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

的解 $(3,-4,-1,1)$ 是原方程组的唯一解.

(2) 答案： $(-\frac{26}{3},-\frac{11}{3},\frac{5}{3},-6,-\frac{4}{3})$.（解答过程略） □

点评 在实际应用中, 通过初等行变换化简矩阵的过程可以借助于计算机软件来完成. 例如, Matlab 和 Mathematica 软件都可以完成这一任务. 以本题第 (2) 小题为例.

在 Mathematica 中输入如下语句：

```
M={{1,3,-5,-5,0,2},{1,2,2,-2,1,-2},{2,1,3,-3,0,2},{1,-4,1,1,-1,3},
     {1,0,3,-1,1,1}}; RowReduce[M]
```

其中 M= 之后是依次输入的矩阵各行的元素，每行各元素用花括号括起来. RowReduce[A] 表示对 M 进行初等行变换化到最简形式. 运行以上语句得到如下输出结果

$$\left\{\left\{1,0,0,0,0,-\frac{26}{3}\right\},\left\{0,1,0,0,0,-\frac{11}{3}\right\},\left\{0,0,1,0,0,\frac{5}{3}\right\},\{0,0,0,1,0,-6\},\left\{0,0,0,0,1,-\frac{4}{3}\right\}\right\}$$

所代表的矩阵对应的方程组的唯一解 $(-\frac{26}{3},-\frac{11}{3},\frac{5}{3},-6,-\frac{4}{3})$ 就是原方程组的唯一解.

也可用 Matlab 软件来完成同样的任务. 在 Matlab 中输入如下语句：

```
M=[1,3,-5,-5,0,2; 1,2,2,-2,1,-2; 2,1,3,-3,0,2; 1,-4,1,1,-1,3;
     1,0,3,-1,1,1]; rref(M)
```

得到输出结果

1.0000	0	0	0	0	−8.6667
0	1.0000	0	0	0	−3.6667
0	0	1.0000	0	0	1.6667
0	0	0	1.0000	0	−6.0000
0	0	0	0	1.0000	−1.3333

注意 Matlab 与 Mathematica 的以上输入语句和输出结果的区别：

(1) 输入矩阵时， Mathematica 用花括号来分隔不同的行，再用花括号将所有的行括在一起表示整个矩阵. Matlab 用分号来分隔不同的行，用方括号将所有的元素括在一起.

(2) Mathematica 用 RowReduce[M] 表示用初等行变换化简矩阵 M, Matlab 则用 rref(M).

(3) Mathematica 尽量输出准确值 (分数，根式) 等， Matlab 则输出近似值.

关于 Mathematica 与 Matlab 的更详细介绍，请参考专门的书籍和资料. □

1.2.2 在空间直角坐标系中, 求三个平面 $9x-3y+z=20$, $x+y+z=0$ 和 $-x+2y+z=-10$ 的公共点集合.

解 公共点集合就是三个线性方程组组成的方程组的解集的图象．将方程组用矩阵表示，通过初等行变换将矩阵化简得：

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2),-9(1)+(2),(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -8 & 20 \\ 0 & 3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

最后的矩阵第 3 行代表的方程 $0=-5$ 无解．原方程组无解．公共点集合是空集． □

点评 在 Mathematica 中输入语句

```
M = {{9,-3,1,20},{1,1,1,0},{-1,2,1,-10}}; RowReduce[A]
```

运行结果为

$$\left\{\left\{1,0,\frac{1}{3},0\right\},\left\{0,1,\frac{2}{3},0\right\},\{0,0,0,1\}\right\}.$$

化简得到的矩阵第 3 行代表的方程 $0=1$ 无解．原方程组无解． □

1.2.3 已知两个变量 x, y 之间有某种函数关系 $y=f(x)$, 并且有如下对应值

x	1	2	3	4
y	2	7	16	29

问 y 是否可能是 x 的二次函数？如果可能，试求出满足要求的二次函数．

解 如果 $y=f(x)$ 是二次函数，则 $y=c+bx+ax^2$, 待定常数 a,b,c 满足方程组

$$\begin{cases} c+b+a=2 \\ c+2b+4a=7 \\ c+3b+9a=16 \\ c+4b+16a=29 \end{cases}$$

对增广矩阵做初等变换化简得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(1)+(i),(\forall i=2,3,4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 3 & 15 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2(2)+(3),-3(2)+(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(3),-6(3)+(4),-3(3)+(2),-(3)+(1),-(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最后得到的矩阵所代表的方程组的唯一解 $(c,b,a)=(1,-1,2)$ 就是原方程组的唯一解.

y 可能是 x 的二次函数. 唯一满足条件的二次函数为 $y=1-x+2x^2$. $\square$

1.2.5 在实数范围内解线性方程组

$$\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+5y-3z=-1 \\ 4x+11y+z=7 \end{cases}$$

这个方程组的解集在 3 维空间中的图象 Π 是什么？

将这个方程组的常数项全部变成 0, 得到的方程组的解集在 3 维空间中的图象 Π_0 是什么？Π_0 与 Π 有什么关系？

解 将方程组用矩阵表示并且用初等行变换化简 (化简过程略去, 并且可以用 Mathematica 完成), 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & 11 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -19 & -23 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

化简后的矩阵代表的方程组

$$\begin{cases} x-19z=-23 \\ y+7z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=19z-23 \\ y=-7z+9 \end{cases}$$

解集 $S=\{(19t-23,-7t+9,t)\mid t\in R\}=\{(-23,9,0)+t(19,-7,1)\mid t\in R\}$. 它的图象 Π 由动点 P 从固定点 $P_1(-23,9,0)$ 沿与固定向量 $\mathbf{u}=(19,-7,1)$ 平行的方向移动得到的直线.

如果将方程组的常数项全部变成 0, 得到的方程组化简为

$$\begin{cases} x-19z=0 \\ y+7z=0 \end{cases}$$

解集为 $S_0=\{t(19,-7,1)\mid t\in R\}$, 图象 Π_0 是过原点 O 且与 $\mathbf{u}=(19,-7,1)$ 平行的直线. 直线 Π_0 与 Π 平行于同一个固定向量 $\mathbf{u}$ 且不重合, 因此 Π 与 Π_0 是平行直线. 将 Π_0 平行移动到经过点 $P_1(-23,9,0)$, 就得到直线 Π. $\square$

1.2.6 二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

的系数都是整数.

(1) 它的解是否一定是整数？说明你的理由.

(2) 如果 $a_1b_2-a_2b_1=\pm1$, 证明以上整系数二元一次方程组的解一定是整数.

解答 (1) 整系数二元一次方程组的解不一定是整数. 例如

$$\begin{cases} 2x \quad\ \ = 1 \\ \quad\ 3y = 1 \end{cases}$$

是整系数二元一次方程组，它的解为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 分量不是整数.

(2) 设 $\varepsilon = a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$, 则 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$. 如果原方程组有解 (x, y), 将等式

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

分别乘 b_2, b_1 再相减得到

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2 \Rightarrow x = \varepsilon(b_2c_1 - b_1c_2) \text{ 是整数.}$$

类似地，将等式 (2),(1) 分别乘 a_1, a_2 再相减得到

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \Rightarrow y = \varepsilon(a_1c_2 - a_2c_1) \text{ 是整数.}$$

反过来，将 $(x, y) = (\varepsilon(b_2c_1 - b_1c_2), \varepsilon(a_1c_2 - a_2c_1))$ 代入原方程组检验，得

$$a_1\varepsilon(b_2c_1 - b_1c_2) + b_1\varepsilon(a_1c_2 - a_2c_1) = \varepsilon(a_1b_2 - a_2b_1)c_1 = \varepsilon^2c_1 = c_1$$
$$a_2\varepsilon(b_2c_1 - b_1c_2) + b_2\varepsilon(a_1c_2 - a_2c_1) = \varepsilon(a_1b_2 - a_2b_1)c_2 = \varepsilon^2c_2 = c_2$$

可见 $(x, y) = (\varepsilon(b_2c_1 - b_1c_2), \varepsilon(a_1c_2 - a_2c_1))$ 是原方程组的唯一解，并且由整数组成. □

§ 1.3 一般线性方程组的消元解法

知识导航

1. 最简阶梯形

m 个方程组成的 n 元线性方程组可以用它的未知数系数和常数项组成的 $m \times (n+1)$ 增广矩阵 M 来表示. 再对 M 作一系列初等行变换将 M 化成尽可能简单的形状 S, 使 S 所代表的线性方程组的解可以立即得出来.

很自然要问：什么样的矩阵 S 才是符合要求的最简形状？怎样由 S 写出方程组的解？

定理 1.3.1 每个 $m \times n$ 矩阵 M 可以通过有限次初等行变换化成如下形状的最简阶梯形

$$S = (s_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} & s_{1j_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{1n} \\ & & & s_{2j_2} & \cdots & \vdots & \cdots & s_{2n} \\ & & & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & & & s_{rj_r} & \cdots & s_{rn} \\ & & & & & & & O \end{pmatrix}$$

满足如下条件：

(1) S 的非零行集中在前 r 行，最后 $m-r$ 行全为零，且前 r 行每行最左边的非零元 t_{ij_i} $(1 \le i \le r)$ 所在列的位置 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(2) 每个非零行最左边的非零元 $s_{ij_i} = 1$, 它所在的列其余元素全为 0. □

如果矩阵 $B = (b_{ij})$ 中某个非零元 $b_{kt} \ne 0$ 的左方、下方和左下方的所有的元素 b_{ij} $(i \ge k$ 且 $j \le t$ 但 $(i,j) \ne (k,t))$ 全为 0, 这个元素 b_{kt} 就称为阶梯元，所在位置 (k,t) 称为 S 的一个阶梯.

定理 1.3.1 的条件 (1) 就是说 S 的非零行集中在前 r 行并且每行都有一个阶梯. 满足此条件的矩阵称为 **阶梯形**. 如果阶梯形矩阵的每个阶梯元等于 1 并且所在列的其余元素都为 0, 满足以上条件 (2), 就称为 **最简阶梯形**.

2. 算法

(1) 将矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 化为阶梯形 T.

如果 $A = O$, 已经是最简阶梯形.

设 $A \ne O$, 从左到右第一个不为零的列是第 j_1 列. 如果 $a_{1j_1} \ne 0$, 对每个 $i \ge 2$, 将 A 的第 1 行的 $-a_{ij_1}a_{1j_1}^{-1}$ 倍加到第 i 行，可以将 a_{1j_1} 下方元素全部变成 0, a_{1j_1} 成为第一个阶梯元：

$$A \xrightarrow{-a_{ij_1}a_{1j_1}(1)+(i),\forall\ 2\le i\le m} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots \\ & & & & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 A_{22} 是 $(m-1)\times(n-j_1)$ 子矩阵.

如果 $a_{1j_1} = 0$, 但 A 的第 j_1 列有另外某个 $a_{kj_1} \ne 0$. 将 A 的第 1 行与第 k 行互换位置就可以化为 $a_{1j_1} \ne 0$ 的情形. 也可仍然用第三类初等变换，将第 k 行加到第 1 行使第 $(1, j_1)$ 元由 0 变成非零元 a_{kj_1}. 仍可将第 1 行的适当常数倍加到以下各行将第 $(1, j_1)$ 位置变成阶梯.

再对 A_1 第 2 至 m 行重复前面的过程，构造出一个又一个阶梯，直到化为阶梯形矩阵 T.

(2) 设阶梯形矩阵 $T = (t_{ij})_{m\times n}$ 的前 r 行不为零，后 $m-r$ 行全为 0. 按 k 从大到小的顺序依次将每个阶梯元 t_{kj_k} 所在的行乘 $t_{kj_k}^{-1}$ 化为 $t_{kj_k} = 1$ 的情形，再将第 k 行的 $-t_{ij_k}$ 倍加到第 i 行 $(\forall\ 1 \le i \le r)$ 将阶梯元 t_{kj_k} 上方的元素全部变成 0. 就将 T 化成了最简阶梯形 S.

3. 方程组解的讨论

定理 1.3.2 设数域 F 上 n 元线性方程组的 $m\times(n+1)$ 增广矩阵 M 经过有限次初等行变换化成最简阶梯形

$$S = (s_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} s_{1j_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{1,n+1} \\ & & s_{2j_2} & \cdots & \vdots & \cdots & s_{2,n+1} \\ & & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & & s_{rj_r} & \cdots & s_{r,n+1} \\ & & & & & & O \end{pmatrix}$$

共有 r 个阶梯元 $s_{ij_i}=1\ (1\le i\le r)$ 分别位于前 r 行的第 $j_1,j_2,\ldots,j_r$ 列. 则:

(1) 当 $j_r=n+1$ 时，方程组无解.

(2) 当 $j_r=r=n$ 时，方程组有唯一解 $(s_{1,n+1},\ldots,s_{n,n+1})$.

(3) 当 $j_r<n$ 时方程组有无穷多组解，通解 $(x_1,\ldots,x_n)$ 中的 $x_j\ (j\notin\{j_1,\ldots,j_r\})$ 可在 F 中任意取值，而

$$x_{j_i}=s_{i,n+1}-\sum_{j\notin\{j_1,\ldots,j_r,n+1\}}s_{ij}x_j\,. \qquad \square$$

4. 齐次线性方程组

常数项全为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组，至少有一个解 $(0,\ldots,0)$, 称为零解，也称为平凡解.

定理 1.3.2 如果齐次线性方程组的未知数个数大于方程个数，则齐次方程组有非零解，从而有无穷多组解. $\square$

例题分析与解答

1.3.1 a,b 取什么值时，下面的方程组有解，并求出其解.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+ax_3+x_4-3x_5=4 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=3 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5=1 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=-3 \\ x_3+bx_4+x_5=1 \end{cases}.$$

解

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,3),-5(1)+(2),-3(1)+(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -12 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & a-9 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(4),-(2),(2)+(3),-\frac{1}{5}(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5(4)+(1),-7(4)+(2),-2(4)+(3),-b(4)+(5)} M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2b & 0 & 1 & 1-b \end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时，矩阵 M_1 的第 3 行代表的方程成为 $0=1$, 无解，原方程组无解.

以下设 $a\neq 1$, 继续对 M_1 做初等行变换化简：

$$M_1\xrightarrow{5(5)+(1),-6(5)+(2),\frac{1}{a-1}(3)}\begin{pmatrix}1&0&6-10b&0&0&9-5b\\0&1&-8+12b&0&0&-11+6b\\0&0&1&0&0&\frac{1}{a-1}\\0&0&2&1&0&1\\0&0&1-2b&0&1&1-b\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(10b-6)(3)+(1),(8-12b)(3)+(2),-2(3)+(4),(2b-1)(3)+(5)}$$

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{-5ab+9a+15b-15}{a-1}\\0&1&0&0&0&\frac{6ab-11a-18b+19}{a-1}\\0&0&1&0&0&\frac{1}{a-1}\\0&0&0&1&0&\frac{a-3}{a-1}\\0&0&0&0&1&\frac{-ab+a+3b-2}{a-1}\end{pmatrix}$$

最后得到的矩阵 T 所代表的方程组有唯一解

$$\left(\frac{-5ab+9a+15b-15}{a-1},\frac{6ab-11a-18b+19}{a-1},\frac{1}{a-1},\frac{a-3}{a-1},\frac{-ab+a+3b-2}{a-1}\right),$$

这就是原方程组当 $a\neq 1$ 时的唯一解. 原方程组有解的条件为： $a\neq 1$, b 可以任意取值. □

点评 如果要利用 Mathematica 求解本题，先运行如下语句：

```
M={{3,2,a,1,-3,4},{5,4,3,3,-1,3},{1,1,3,2,1,1},
    {0,1,2,2,6,-3}0,0,1,b,1,1}}; RowReduce[M]//MatrixForm
```

其中 `//MatrixForm` 是要求按矩阵形式输出. 得到

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{-15+9a+15b-5ab}{-1+a}\\0&1&0&0&0&\frac{19-11a-18b+6ab}{-1+a}\\0&0&1&0&0&\frac{1}{-1+a}\\0&0&0&1&0&\frac{-3+a}{-1+a}\\0&0&0&0&1&\frac{-2+a+3b-ab}{-1+a}\end{pmatrix}$$

这就是本题经化简得到的矩阵 T. 不同的是分子分母都按多项式字母的升幂排列而不是按降幂排列. 由于分母 $-1+a$ 当 $a=1$ 时为 0, 还需对 $a=1$ 的情况单独讨论. 再运行如下语句：

```
a=1; RowReduce[A]
```

得到

$$\left\{\left\{1,0,0,0,\frac{2(-3+5b)}{-1+2b},0\right\},\left\{0,1,0,0,\frac{4(-2+3b)}{-1+2b},0\right\},\left\{0,0,1,0,\frac{1}{1-2b},0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{0,0,0,1,\frac{2}{-1+2b},0\right\},\{0,0,0,0,0,1\}\right\}$$

化简得到的矩阵第 5 行 $(0,0,0,0,0,1)$ 所代表的方程 $0=1$ 无解. 可见当 $a=1$ 时原方程组无解. 但是，最后得到的矩阵的元素的分母 $-1+2b$ 当 $b=\frac{1}{2}$ 为 0. 这使我们怀疑当 $a\neq 1$

且 $b=\frac{1}{2}$ 时原方程组是否有解？不过，对于未知数个数与方程个数相同的线性方程组，判定是否有唯一解的最可靠方法是计算系数方阵 (由未知数系数组成的方阵，不包括常数项) 的行列式. 关于行列式的更多知识请参见第 3 章. 但利用计算机软件计算和利用行列式，却不需要很多知识，只要将系数方阵 A 按格式输入，在 Mathematica 中再运行 `Det[A]` 就可以算出行列式 $\det A$. 当 $\det A\neq 0$ 时，不论常数项取什么值，方程组一定有唯一解. 以本题为例. 在 Mathematica 中运行如下语句：

```
A={{3,2,a,1,-3},{5,4,3,3,-1},{1,1,3,2,1},
{0,1,2,2,6},{0,0,1,b,1}}; Det[A]
```

得到

$$5-5a$$

可见系数矩阵 A 的行列式 $\det A=5-5a$ 与 b 无关. 当 $a\neq 1$ 时 $\det A\neq 0$, 方程组有唯一解. 当 $a=1$ 时仅根据行列式 $\det A=0$ 不能断定方程组是否无解. 但根据对增广矩阵化简的结果可知方程组无解.

行列式 $\det A\neq 0$ 时方程组为什么一定有唯一解在任何一本《高等代数》或《线性代数》教材中都有严格的证明. 不过我们可以在此对二元或三元方程组给一个几何的解释.

二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

可以写成向量形式

$$x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\quad \text{即}\quad x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

其中 A,B,C 分别是平面直角坐标系中坐标为 $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)$ 的点. 系数矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{pmatrix}$ 的行列式 $\det G=|OA||OB|\sin\angle AOB$ 的绝对值 $|\det G|$ 就是以 OA,OB 为邻边的平行四边形的面积，正负号由 $\sin\angle AOB$ 的符号决定. $\det G\neq 0$ 就是说 OA,OB 不共线，向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 组成平面上的一组基，可以将任何一个向量 $\overrightarrow{OC}$ 唯一地表示成线性组合，这意味着方程组有唯一解 (x,y), 也就是 $\overrightarrow{OC}$ 在基 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$ 下的坐标.

三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

也可以类似地写成几何形式

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$$

其中 A,B,C,D 分别是空间直角坐标系中坐标为 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$ 的点. 系数矩阵 G 的行列式 $\det G=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})$ 是 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的混合积，其绝对值是以 OA,OB,OC 为棱的平行六面体的体积. $\det G\neq 0$ 就是说 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 不共面，组成空间的一组基，可以将空间任意向量 $\overrightarrow{OD}$ 唯一地写成这组基的线性组合，原方程组有唯一解.
□

1.3.2 讨论当 λ 取什么值时下面的方程组有解：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

当方程组有解时求出解来，并讨论 λ 取什么值时方程组有唯一解，什么时候有无穷多组解.

解

$$M=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1),(3)+(1)}M_1=\begin{pmatrix}\lambda+2&\lambda+2&\lambda+2&\lambda^2+\lambda+1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=-2$ 时 M_1 的第 1 行 $(0,0,0,3)$ 代表的方程 $0=3$ 无解，原方程组无解.

以下设 $\lambda\neq-2$. 继续用初等行变换化简 M_1:

$$M_1\xrightarrow{\frac{1}{\lambda+2}(1),-(1)+(2),-(1)+(3)}M_2=\begin{pmatrix}1&1&1&\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}\\0&\lambda-1&0&\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\\0&0&\lambda-1&\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{\lambda+2}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=1$, M_2 后两行为零，第 1 行代表的方程 $x_1+x_2+x_3=1$ 与原方程组同解，通解为

$$\{(1,0,0)+t_1(-1,1,0)+t_2(-1,0,1)\mid t_1,t_2\in F\}$$

当 $F=R$ 是实数域时,解集在空间直角坐标系中的图象为过点 $(1,0,0)$ 且与向量 $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ 都平行的平面.

当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，将 M_2 进一步化简得：

$$M_2\xrightarrow{\frac{1}{\lambda-1}(2),\frac{1}{\lambda-1}(3),-(2)+(1),-(3)+(1)}T=\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\0&1&0&\frac{1}{\lambda+2}\\0&0&1&\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{pmatrix}$$

T 代表的方程组有唯一解 $(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2})$, 也就是原方程组的唯一解.

原方程组当 $\lambda=-2$ 时无解，当 $\lambda=1$ 时有无穷多解，其余情况下都有唯一解. □

1.3.3 (1) 求下面的非齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=6,\\ x_1-x_3-2x_4-3x_5=-4.\end{cases}\tag{I}$$

(2) 将方程组 (I) 的常数项全部换成 0 得到齐次线性方程组 (II), 求方程组 (II) 的通解. 并将通解写成其中几个特解的线性组合的形式.

(3) 方程组 (I) 的通解能否写成几个特解的线性组合？

(4) 观察方程组 (I) 与 (II) 的通解之间的关系，你发现什么规律？试证明你的结论.

解 (1) 将原方程组的增广矩阵 M 通过初等行变换化成最简阶梯形，从而将方程组化简为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 5 \end{cases}$$

通解 $S = \{(t_1 + 2t_2 + 3t_3 - 4, -2t_1 - 3t_2 - 4t_3 + 5, t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in F\}$.

(2) 在方程 (I) 的通解 S 中将常数 $-4, 5$ 换成 0, 就得到齐次线性方程组 (II) 的通解

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(t_1 + 2t_2 + 3t_3, -2t_1 - 3t_2 - 4t_3, t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in F\} \\ &= t_1(1, -2, 1, 0, 0) + t_2(2, -3, 0, 1, 0) + t_3(3, -4, 0, 0, 1) \mid t_1, t_2, t_3 \in F\} \end{aligned}$$

通解由三个特解 $X_1 = (1, -2, 1, 0, 0), X_2 = (2, -3, 0, 1, 0), X_3 = (3, -4, 0, 0, 1)$ 的全部线性组合 $t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3$ 组成.

(3) 方程组 (I) 的通解可以写成 4 个向量 X_1, X_2, X_3, X_0 的线性组合的形式

$$(t_1 + 2t_2 + 3t_3 - 4, -2t_1 - 3t_2 - 4t_3 + 5, t_1, t_2, t_3) = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 + t_0X_0$$

其中 $X_1 = (1, -2, 1, 0, 0), X_2 = (2, -3, 0, 1, 0), X_3 = (3, -4, 0, 0, 1), X_0 = (-4, 5, 0, 0, 0)$. 但这 4 个向量中只有 X_0 是方程组 (I) 的特解，其余 3 个 X_1, X_2, X_3 代入方程组 (I) 的等号左边得到的是 0 而不等于右边的常数项，它们不是 (I) 的特解而是 (II) 的特解. 而且，将 (I) 的通解写成的 X_1, X_2, X_3, X_0 的线性组合式中， X_0 的系数只能等于 1 而不能取别的值. 方程组 (I) 的每个解 X 代入每个方程左边得到的值等于等号右边的常数项. 将 X 的 λ 倍 λX (也是 X 的线性组合) 代入每个方程左边得到的值就等于常数项的 λ 倍. 当常数项不为 0 且 $\lambda \neq 1$ 时 λ 就不是方程组的解. 可见方程组 (I) 的通解不能由某几个特解的全体线性组合组成.

(4) 观察发现：方程组 (I) 的通解 $t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 + X_0$ 可以由一个特解 X_0 加上方程组 (II) 的通解 $\xi = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3$ 得到. 这一结论可以证明如下：

方程组 (I),(II) 可以分别写成向量形式

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b} \tag{I}$$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{0} \tag{II}$$

其中

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

如果 $X_0 = (x_1, \dots, x_5)$ 是方程组 (I) 的一个特解， $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_5)$ 是方程组 (II) 的任一解. 则

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}, \quad xi_1\mathbf{a}_1 + \cdots + xi_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$$

将两式相加得

$$(x_1 + \xi_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (x_5 + \xi_5)\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$$

这说明 (I) 的特解 X_0 和 (II) 的任一解 ξ 之和 $X = X_0 + \xi = (x_1 + \xi_1, \dots, x_5 + \xi_5)$ 仍是 (I) 的解.

如果 $Y = (y_1, \dots, y_5)$ 是方程组 (I) 的任一解，则将等式

$$y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}, \quad x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$$

相减得

$$(y_1 - x_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (y_5 - x_5)\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$$

这说明 (I) 的两个解 Y 与 X_0 之差 $\xi = Y - X_0 = (y_1 - x_1, \dots, y_5 - x_5)$ 是方程组 (II) 的解. $Y = \xi + X_0$ 等于 (I) 的特解 X_0 与 (II) 的通解之和.

这就证明了 (I) 的通解可以由一个特解加上 (II) 的通解得到. □

1.3.4 不解方程组，判断下面的方程组是否有非零解：

$$(1)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}; \qquad (2)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}.$$

解 (1) 齐次线性方程组至少有零解. 由于未知数个数 $3 >$ 方程个数 2, 方程组有非零解.

(2) 前两个方程组成的方程组的未知数个数 $3 >$ 方程个数 2, 有非零解. 第 3 个方程是前两个方程之和. 因此前两个方程的公共非零解一定是第 3 个方程的解，因而也是整个方程组的非零解. 这说明了本小题的方程组也有非零解. □

第 2 章　线性空间

知识导航

例 1　方程组

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=b_1 \\ x+2y+4z=b_2 \\ x+3y+9z=b_3 \end{cases} \tag{1}$$

是否对任意实数 b_1,b_2,b_3 都有惟一解？

解　方程组 (1) 可以写成向量形式

$$x\mathbf{a}_1+y\mathbf{a}_2+z\mathbf{a}_3=\mathbf{b} \tag{2}$$

的形式，其中

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

在空间直角坐标系中分别以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}$ 为坐标作几何向量 $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3},\overrightarrow{OB}$. 如果 $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3}$ 不共面，则它们组成空间的一组基，每个 $\overrightarrow{OB}$ 都可以唯一地写成它们的线性组合 $x\overrightarrow{OA_1}+y\overrightarrow{OA_2}+z\overrightarrow{OA_3}$, 唯一解 (x,y,z) 就是坐标.

三个向量 $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 其中某个向量是另外两个向量的线性组合 $\Leftrightarrow$ 方程组

$$x\mathbf{a}_1+y\mathbf{a}_2+z\mathbf{a}_3=\mathbf{0} \tag{3}$$

有非零解. 方程组 (3) 即

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ x+3y+9z=0 \end{cases}$$

它可以由方程组 (1) 将常数项全部替换成 0 得到. 解之得唯一解 $(x,y,z)=(0,0,0)$, 这说明 $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3}$ 不共面，组成空间的一组基，方程组 (1) 总有唯一解.　　□

例 2　试将例 1 的结论推广到由 n 个 n 元线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1'}$$

解　将方程组 (1') 写成向量形式

$$x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b} \tag{2'}$$

其中每个列向量 $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})^T$ $(\forall\ 1 \le i \le n)$ 由方程组 (1') 中同一个未知数 x_i 在各方程中的系数组成， $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ 由常数项组成.

如果 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 与 $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ 是方程组 (1') 的任意两个解，则等式

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \quad \mu_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \mu_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

成立. 将这两个等式相减得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

这说明 $(\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_n - \mu_n)$ 是方程组

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{3'}$$

的解. 如果方程组 (3') 只有唯一解 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, 则 $(\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_n - \mu_n) = (0, \dots, 0)$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, 方程组 (1') 如果有解，一定唯一.

以下证明当方程组 (3') 只有唯一解 $\mathbf{0}$ 时方程组 (1') 必有解. 齐次线性方程组

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n + x_0\mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{4'}$$

有 $n+1$ 个未知数 $x_1, \dots, x_n, x_0$, n 个方程，必有非零解 $(x_1, \dots, x_n, x_0) \ne (0, \dots, 0)$. 如果其中 $x_0 = 0$, 则 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, $(x_1, \dots, x_n) \ne (0, \dots, 0)$ 是方程组 (3') 的非零解，与原假定 (方程组 (3') 只有唯一解 $\mathbf{0}$ 矛盾. 可见在 (4') 的非零解 $(x_1, \dots, x_n, x_0)$ 中 $x_0 \ne 0$, 由等式 (4') 得到

$$-\frac{x_1}{x_0}\mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{x_n}{x_0}\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

这说明 $\left(-\dfrac{x_1}{x_0}, \dots, -\dfrac{x_n}{x_0}\right)$ 是方程组 (2') 的解，从而是 (1') 的解.

这证明了：如果方程组 (3') 只有唯一解 $(0, \dots, 0)$, 则方程组 (1') 有唯一解. $\square$

一般地，如果方程组 (3') 只有唯一解 $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, 则称向量组 $S = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ **线性无关**. 此时每个 n 维数组向量 $\mathbf{b}$ 可以唯一地写成 S 的线性组合. 特别地，当 $n = 3$ 且 $\mathbf{a}_i$ 是 3 维实数组时， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关就是说它们所代表的几何向量不共面.

§ 2.1 线性相关与线性无关

知识导航

1. 线性相关与线性无关的定义

定义 2.1.1 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是数域 F 上的 n 维向量, 如果存在不全为 0 的 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ 使

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0$$

就称向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ **线性相关** (linearly dependent).

反过来，如果对于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$,

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

就称向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ **线性无关** (linearly independent). $\square$

算法 将数组向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 写成列向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, 求解以 $x_1, \ldots, x_m$ 的方程组

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

当方程组有非零解 $(x_1, \ldots, x_m) \neq (0, \ldots, 0)$ 时， $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关；当方程组只有唯一解 $(x_1, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)$ 时， $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关.

2. 相关定理

定理 2.1.1 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中某个向量 $\mathbf{a}_i$ 可以写成其余向量 $\mathbf{a}_j$ $(j \neq i)$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ 其中某个向量 $\mathbf{a}_i$ 可以写成它前面的向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ 的线性组合.

推论 2.2.1 如果向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ 中 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, 且每一个向量 $\mathbf{a}_i$ $(2 \leq i \leq k)$ 都不是它前面的向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ 的线性组合，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ 线性无关. $\square$

定理 2.1.2 如果向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 包含一个子集 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\}$ 线性相关，那么整个向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线性相关. 如果向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线性无关，那么它的每个子集都线性无关.

定理 2.1.3 设 F^n 中的向量 $u_1, \ldots, u_m$ 线性无关. 如果在每个 $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ $(1 \leq j \leq m)$ 上再任意添加一个分量成为 F^{n+1} 中的一个向量 $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}, a_{n+1,j})$, 那么所得到的向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 线性无关.

3. n 数组空间中线性无关向量的最大个数

n 数组空间 F^n 中线性无关向量最多有 n 个.

F^n 中任意 n 个线性无关向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 组成一组基 S, 可以将每个向量 $\alpha \in F^n$ 写成它们的线性组合 $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$, 系数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 由 α 唯一决定，称为 α 在这组基下的坐标.

以 n 阶方阵 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ (即 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$) 如果只有唯一解 $X = \mathbf{0}$, A 的各列 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 就组成 F^n 的一组基.

例如，不论常数项 $b_1, \ldots, b_n$ 取何值，方程组

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

显然只有唯一解 $(x_1, \cdots, x_n) = (b_1, \ldots, b_n)$, 特别地，当 $(b_1, \ldots, b_n) = (0, \ldots, 0)$ 时只有唯一解 $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. 此方程组的系数矩阵 $I = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 的各列 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 组成 F^n 的一组基 E, 其中每个 $\mathbf{e}_i$ 的第 i 分量为 1 、其余分量都为 0. E 称为 F^n 的 **自然基**.

例题分析与解答

2.1.1 已知平面直角坐标系中的三点 $A(2,3), B(3,4), C(10,5)$. 将几何向量 $\overrightarrow{OC}$ 表示成 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的线性组合 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 求系数 x, y.

解 在等式 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ 中将向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 分别替换成它们的坐标 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, 得到

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

比较向量等式 (1) 两边的两个对应分量，得到两个方程组成方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \tag{2}$$

解之得 $(x, y) = (-25, 20)$. $\square$

点评 将向量等式 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ 替换成坐标等式 (1) 时，不将坐标写成行向量的形式而写成列向量的形式，可以让各坐标的分量的对应关系更清楚：各个列向量的第 1 行就是各坐标的第 1 分量，是方程组 (2) 第一个方程的各系数，第 2 行 (各坐标的第 2 分量) 是方程组 (2) 第 2 个方程的各系数. 事实上，将三个列向量从左到右排成矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

就是线性方程组 (2) 的增广矩阵. 反过来，线性方程组 (2) 也可以写成向量形式 (1). 更进一步，任意一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2'}$$

都可以写成向量形式

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1'}$$

看成 m 维列向量空间中的 $n+1$ 个向量

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad (1 \le j \le n), \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

的线性关系. 特别地，当 $m = 2, 3$ 且 a_{ij}, b_i 都是实数时，各个 $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}$ 可以看成平面或几何空间中的几何向量，方程组 (2') 就可以看成将几何向量 $\mathbf{b}$ 表示成各 $\mathbf{a}_j$ 的线性组合，求系数 x_j. 当

$m=n=3$ 时，就可知道方程组 (2') 有唯一解的充分必要条件是向量方程 (1') 左边的三个几何向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 不共面，组成几何空间的一组基．判定 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是否共面的另一个方法是计算以它们为棱组成的平行六面体的有向体积 Δ, 也就是以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为三列组成的行列式． $\Delta\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 不共面，组成一组基．而这些几何性质都可以通过代数运算推广到 n 维空间． □

2.1.2 判定 R^3 中的下述向量是线性相关还是线性无关：

(1) $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(1,4,9)$;

(2) $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(1,4,9)$, $\alpha_4=(1,8,27)$.

解 (1) 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\mathbf{0}$. 此方程组即

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

其系数矩阵 A 的各列就是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 写成的列向量．通过初等行变换将 A 化为阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{-(2)+(3)}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

所代表的齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \qquad\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \qquad\qquad 2\lambda_3=0\end{cases}$$

只有唯一解 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$. 这说明向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) $\alpha_1,\dots,\alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_4\alpha_4=\mathbf{0}$. 即

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

此方程组由 3 个方程组成，含 4 个未知数．未知数个数 $>$ 方程个数，这样的齐次线性方程组一定有非零解 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$. 这说明了 4 个向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_4$ 线性相关. □

点评 向量组 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 线性无关的定义是：以 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 为未知数的齐次线性方程组

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0}\tag{1}$$

有非零解．反过来，方程组 (1) 只有唯一解 $(0,\dots,0)$, 则向量组 S 线性无关.

如果 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 是数组向量，不论是行向量还是列向量，在方程组 (1) 中通通将它们写成列向量的形式，以这些列向量为各列排成的矩阵 A 就是齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵．通过一系列初等行变换将 A 化成阶梯形，就可以知道方程组 (1) 是否有非零解，向量组是否线性相关.

这样，数组向量是否线性相关的问题就可转化为齐次线性方程组是否有非零解的问题，通过求解方程组来判定. 当未知数个数大于方程个数时，不需求解也可以判定方程组有非零解.

2.1.3 已知空间直角坐标系中的三点 $A(1,1,1), B(1,2,4), C(1,3,9)$, 是否能将空间任意一个向量 $\overrightarrow{OD}$ 写成 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的线性组合？以 OA, OB, OC 为棱的平行六面体的体积是否等于 0 ?

解 线性方程组 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 即

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

只有唯一解 $(0,0,0)$, 这说明 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面，组成三维几何向量空间中的一组基，空间任意一个向量 $\overrightarrow{OD}$ 可以写成 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的线性组合. 以 OA, OB, OC 为棱的平行六面体的体积不等于 0. □

点评 以 OA, OB, OC 为棱的平行六面体积的体积 V 等于以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的坐标为各列排成的方阵

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

的行列式 $\det M$ 的绝对值. 行列式的定义、性质和计算是第 3 章的主要内容. 不过，即使不知道行列式的定义和计算方法，也可以利用计算机软件计算 $\det M$, 并且根据 $\det M$ 是否等于 0 来判定 M 的各列是否共面 (是否线性相关), 就好比不需要知道三角函数 $\sin x, \cos x$ 怎样计算也可以通过查表或用计算器计算三角函数并用来解决理论和应用问题. 例如，在 Mathematica 中运行如下语句

```
M={{1,1,1},{1,2,3},{1,4,9}}; Det[M]
```

就得到输出结果

2

这说明 $\det M=2$. 所求体积 $V=2$. $\det M=2$ 是正数表示 OA, OB, OC 组成右手系. 如果将 M 的前两列互换位置得到方阵 M_1, 以 OB, OA, OC 为三条棱的平行六面体的体积仍是 2, 但 OB, OA, OC 是左手系，因此应有 $\det M_1=-2$. □

2.1.4 判定 R^4 中的下述向量是线性相关还是线性无关？

(1) $\alpha_1=(2,0,-1,2)$, $\alpha_2=(0,-2,1,-3)$, $\alpha_3=(3,-1,2,1)$, $\alpha_4=(-2,4,-7,5)$;

(2) $\alpha_1=(1,-1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,-1,0)$, $\alpha_3=(0,0,1,-1)$, $\alpha_4=(-1,0,0,1)$.

答案 (1) 线性相关. (2) 线性相关.

2.1.5 设 3 维几何空间中建立了直角坐标系．判定如下 4 点是否共面：

(1) $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(1,4,9)$, $D(1,8,27)$;

(2) $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(2,5,8)$, $D(3,7,15)$.

解 只需判定 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 是否线性相关.

(1) $\beta_1=\overrightarrow{AB}=(0,1,2),\beta_2=\overrightarrow{AC}=(0,3,8),\beta_3=\overrightarrow{AD}=(0,7,26)$.

方程组 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&7\\2&8&26\end{pmatrix}$$

第 1 行全为 0, 所代表的方程 $0=0$ 可以从方程组中删去，只剩下两个方程，却有 3 个未知数，肯定有非零解．这说明向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面．四点 A,B,C,D 共面.

(2) $\beta_1=\overrightarrow{AB}=(0,1,2),\beta_2=\overrightarrow{AC}=(1,4,7),\beta_3=\overrightarrow{AD}=(2,6,14)$. 经计算知道方程组 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=\mathbf{0}$ 只有零解．四点 A,B,C,D 不共面. □

2.1.6 举例说明若干两两线性无关的向量，其全体不一定线性无关.

解 平面上三个向量 $\alpha_1=(0,1),\alpha_2=(1,1),\alpha_3=(1,2)$ 两两不共线，两两线性无关．但 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$. 三个向量线性相关. □

2.1.7 求方程 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的实数解.

解 令 $u=\sqrt{x^2+x+1},v=\sqrt{2x^2+x+5},w=\sqrt{x^2-3x+13}$. 则原方程成为

$$u+v=w \tag{1}$$

设法求常数 λ_1,λ_2 使

$$\lambda_1(x^2+x+1)+\lambda_2(2x^2+x+5)=x^2-3x+13.$$

也就是

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=1\\\lambda_1+\lambda_2=-3\\\lambda_1+5\lambda_2=13\end{cases}$$

解此方程组，得 $\lambda_1=-7,\lambda_2=4$. 可见

$$-7(x^2+x+1)+4(2x^2+x+5)=x^2-3x+13$$

即：

$$-7u^2+4v^2=w^2 \tag{2}$$

将 (1) 代入 (2) 得 $\qquad -7u^2+4v^2=(u+v)^2.$

整理得 $\qquad 3v^2-2uv-8u^2=0.$

左边因式分解得

$$(v-2u)(3v+4u)=0 \tag{3}$$

易见当 x 为实数时， $x^2+x+1, 2x^2+x+5$ 都是正实数，而 u,v 分别是它们的算术平方根，恒为正，因此 $3v+4u>0$. 等式 (3) 成立仅当 $v-2u=0$, 即 $v=2u$, 也就是

$$\sqrt{2x^2+x+5}=2\sqrt{x^2+x+1}$$

两边平方，整理得

$$2x^2+3x-1=0, \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

经检验， $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ 确实是原方程的解，因此就是原方程的全部实数解. □

点评 本题如果直接将无理方程两边平方来消去根号，经过繁琐的计算将得到 x 的 4 次方程，很难求解. 本题的上述解答成功的关键是多项式 $x^2+x+1, 2x^2+x+5, x^2-3x+13$ 线性相关，利用了它们之间的线性关系式 (2) 求得了方程的解. 本题解答中用到的算法其实都是中学数学学过的，主要的困难是中学生没有线性相关的概念. 但只要他们能够想到这三个多项式中有可能某一个是其余两个的常数倍之和，就可以通过解方程组求得这两个常数，以后的过程就没有实质上的困难了. □

2.1.8 设 k,p 是任意正整数. 证明：

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+p}$ 线性相关；

(2) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{k+p}$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关.

证明 (1) $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 线性相关 $\Rightarrow$ 存在不全为 0 的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=\mathbf{0}$ $\Rightarrow \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k+0\alpha_{k+1}+\cdots+0\alpha_{k+p}=\mathbf{0}$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,0,\ldots,0$ 不全为 0. 这说明了 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+p}$ 线性相关.

(2) 如果 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 线性相关，则由 (1) 所证知 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+p}$ 线性相关，与本题假设矛盾. 这证明了 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 必然线性无关. □

点评 本题的结论是：含有线性相关子集的集合一定线性相关. 线性无关集合的子集一定线性无关.

或者用一句“土话”来说：越多越相关，越少越无关. “土话”比“官腔”(严格的数学语言)更容易懂，普通人更喜欢听，但可能有漏洞，有反例. 如果按集合的包含关系来衡量“多”与“少”，将“被包含”的子集称为“少”，这句“土话”就是严格的，没有漏洞. 但如果只是根据向量的个数来衡量多与少，这句话就有漏洞. 比如：在 3 维空间中， 4 个或者更多的向量肯定线性相关，这说明“越多越相关”有道理. 但在这个空间中， 3 个向量可以线性无关，两个向量甚至一个向量反而有可能线性相关，这说明“越多越相关”有漏洞. 但是由这两个或者一个线性相关向量添加得到的三个向量肯定线性相关. □

2.1.9 设 k,n,m 是任意正整数， F 是任意数域. 回答下面的问题并说明理由.

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in F^n$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 分别添加 m 维分量构成的 $n+m$ 维向量组 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_k\in R^{n+m}$ 是否一定线性无关？

(2) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in F^n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 分别添加 m 维分量构成的 $n+m$ 维向量组 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_k\in R^{n+m}$ 是否一定线性相关？

解 (1) 一定线性无关.

向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 线性无关 $\Rightarrow$ 方程组

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=\mathbf{0} \tag{1}$$

只有唯一解 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=(0,\ldots,0)$. 设每个向量 $\alpha_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})$ 的第 i 分量为 a_{ij}. 则方程组 (1) 由 n 个方程

$$a_{i1}\lambda_1+\cdots+a_{ik}\lambda_k=\mathbf{0}\quad(1\le i\le n) \tag{2}$$

组成，这 n 个方程的公共解只能为 $(0,\ldots,0)$.

将各个 α_j 分别添加 m 个分量构成 $\tilde{\alpha}_j$. 则方程组

$$\lambda_1\tilde{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\tilde{\alpha}_k=\mathbf{0} \tag{3}$$

由方程组 (2) 再添加 m 个方程组成. 方程组 (3) 的解必须也是 (2) 中的全部方程的公共解，只能为 $(0,\ldots,0)$ 而没有非零解. 这说明 $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_k$ 一定线性无关.

(2) 不一定线性相关. 例如， 1 维向量 $\alpha_1=1,\alpha_2=1$ 线性相关，添加成 2 维向量 $\tilde{\alpha}_1=(1,1),\tilde{\alpha}_2=(0,1)$ 线性无关. 这是因为：方程组 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\mathbf{0}$ 即 $\lambda_1+\lambda_2=0$ 有非零解，而 $\lambda_1\tilde{\alpha}_1+\lambda_2\tilde{\alpha}_2=\mathbf{0}$ 即

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases}$$

增加了一个方程，只有零解 $(0,0)$. □

点评 本题结论也可以用“土话”总结为：“越长越相关，越短越无关.”这不是说长的一定无关，短的一定无关. 但如果长的是由短的添加而成，这句话就一定对. □

2.1.10 (1) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，问 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 是否一定线性无关？为什么？

(2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，问 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 是否一定线性相关？为什么？

解 记 $\beta_i=\alpha_i+\alpha_{i+1}$ $(1\le i\le n-1)$, $\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$. 则 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 线性无关的充分必要条件为：方程组 $\lambda_1(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+\lambda_n(\alpha_n+\alpha_1)=\mathbf{0}$ 只有零解. 将方程组左边整理为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的线性组合，得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_1+(\lambda_2+\lambda_3)\alpha_2+\cdots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\alpha_{n-1}+(\lambda_n+\lambda_1)\alpha_n=\mathbf{0} \tag{1}$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关，(1) 成立的充分必要条件是：

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \\ \lambda_n + \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

即

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = (-1)^i \lambda_{i+1} = \cdots = (-1)^{n-1}\lambda_n = (-1)^n \lambda_1$$

当 n 为偶数时,取 $\lambda_1 = 1$ 得到非零解 $\lambda_i = (-1)^{i-1}$ 即 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1)$. 这说明 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性相关.

当 n 为奇数时，$\lambda_1 = (-1)^n \lambda_1 = -\lambda_1$ 迫使 $\lambda_1 = 0$, 所有的 $\lambda_i = (-1)^{i-1}\lambda_1 = 0$. 方程组 (2) 只有零解，$\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性无关.

结论是：当 n 为奇数时一定线性无关. 当 n 是偶数时一定线性相关.

(2) 一定线性相关.

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相关，则其中某个 α_j 可以写成其余 $n-1$ 个向量 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ 的线性组合. 代入方程 (1) 左边，整理成 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ 的线性组合. 方程 (1) 变成

$$\mu_1 \alpha_{i_1} + \cdots + \mu_{n-1}\alpha_{i_{n-1}} = \mathbf{0} \tag{3}$$

其中各个 μ_i 都是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的线性组合. $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$ 是由 n 个未知数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的 $n-1$ 个方程组成的齐次线性方程组，一定有非零解 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 这样的非零解是方程组 (3) 和 (1) 的解，这说明 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性相关. □

2.1.11 设复数域上的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关. λ 取什么复数值时, 向量 $\alpha_1 - \lambda\alpha_2, \alpha_2 - \lambda\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} - \lambda\alpha_n, \alpha_n - \lambda\alpha_1$ 线性无关？

解 方程组

$$x_1(\alpha_1 - \lambda\alpha_2) + x_2(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) + \cdots + x_n(\alpha_n - \lambda\alpha_1) = \mathbf{0} \tag{1}$$

经整理得

$$(x_1 - \lambda x_n)\alpha_1 + (x_2 - \lambda x_1)\alpha_2 + \cdots + (x_n - \lambda x_{n-1})\alpha_n = \mathbf{0} \tag{2}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关，方程组 (2) 等价于

$$x_1 - \lambda x_n = x_2 - \lambda x_1 = \cdots = x_n - \lambda x_{n-1} = 0$$

即 $x_1 = \lambda x_n$, $x_i = \lambda x_{i-1}$ $(\forall 2 \le i \le n)$.

也就是：$x_1 = \lambda^n x_1$, $x_i = \lambda^{i-1} x_1$ $(\forall\, 2 \le i \le n)$.

当 $\lambda^n \neq 1$ 时，$x_1 = \lambda^n x_1$ 迫使 $x_1 = 0$, 从而所有的 $x_i = 0$. 方程组 (1) 只有零解. 所说向量组线性无关.

当 $\lambda^n = 1$ 时，取 $x_1 = 1$ 可得到方程组 (1) 的非零解 $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$, 所说向量组线性相关. $\square$

2.1.12 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维数组向量，已知标准基向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 可被它们线性表出，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

证明 如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相关，则其中某个 α_j 可以被其余 $n-1$ 个向量 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ 线性表出：$\alpha_j = x_1\alpha_{i_1} + \cdots + x_{n-1}\alpha_{i_{n-1}}$. 代入每个 e_i 被 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出的等式 $e_i = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n$, 经整理后得到 e_i 由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ 线性表出的等式. 这样，$e_1, \dots, e_n$ 都可以由 $n-1$ 个向量 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ 线性表出. $n > n-1$ 迫使 $e_1, \dots, e_n$ 线性相关. 与 $e_1, \dots, e_n$ 是标准基矛盾. 这就证明了 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 不可能线性相关，只能线性无关. $\square$

§ 2.2 向量组的秩

知识导航

例 不解方程组，判断下面的方程组是否有非零解：

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}.$$

解 方程组有 3 个方程. 但第 3 个方程是前两个方程之和，可以将它删去而不改变方程组的解. 剩下的方程组只有两个方程，未知数个数 $3 >$ 方程个数 2, 方程组有非零解. $\square$

只要某个方程是其余两个方程的线性组合，就说明这个方程是多余的，可以删去，原方程组中实质上没有 3 个方程而只有两个. 如果剩下的两个方程中还有一个是另一个的线性组合，再删去，说明原方程组实质上只有一个方程.

一般地，由 m 个方程组成的方程组如果线性相关，就有某个方程是其余方程的线性组合，这个方程就是多余的，可以删去. 这说明原方程的个数 m “有假”, 删去多余的方程就是 “打假”. 将打假进行到底，知道最后剩下的 r 个方程线性无关，“一个也不能少”, 并且删去的方程都可以由它们重新线性组合出来. 这 r 个方程称为原方程的极大线性无关组，r 才是原方程组中方程的 “真正个数”, 称为方程组的秩.

1. 极大线性无关组

定义 设 V 是数域 F 上的向量空间，S 是 V 中的向量组成的向量组. 如果 S 的子集 $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关, 并且将 S 任一向量 α 添加在 M 上所得的向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha\}$

线性相关，就称 M 是 S 的 **极大线性无关组** (maximal linearly independent system), M 所含向量个数 r 称为 S 的 **秩** (rank), 记作 $\operatorname{rank} S$. □

极大线性无关组的判定 设 M 是 S 的线性无关子集. 则 M 是 S 的极大线性无关组 $\Leftrightarrow$ S 是 M 的线性组合.

算法 将 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 中各向量 α_i 写成列向量形式 $\mathbf{a}_i$, 排成矩阵 $A=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)$. 通过一系列初等行变换将 A 变成阶梯形 $U=(u_{ij})_{n\times m}$, 设 U 的各“阶梯”所在列分别为第 $j_1,\dots,j_r$ 列，则 $r=\operatorname{rank} S$, S 的第 $j_1,\dots,j_r$ 个向量 $\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_r}$ 组成 S 的一个极大线性无关组， $r=\operatorname{rank} S$.

算法原理 当 A 经过一系列初等行变换变成 U, A 的各列 $\mathbf{a}_i$ 经过同样的行变换分别变成 U 的各列 $\mathbf{u}_i$, 由 A 的任意若干列组成的子矩阵 $A_1=(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_k})$ 经过同样的行变换变成 U 的对应列组成的矩阵 $U_1=(\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k})$, 齐次线性方程组 $A_1X=\mathbf{0}$ 与 $U_1X=\mathbf{0}$ 同解， $A_1X=\mathbf{0}$ 有 (无) 非零解当且仅当 $U_1X=\mathbf{0}$ 有 (无) 非零解， A_1 的各列线性相关 (无关) 当且仅当 U_1 的各列线性相关 (无关). 易见 U 的各阶梯元所在列 $\mathbf{u}_{j_1},\dots,\mathbf{u}_{j_r}$ 组成 U 的列向量组的极大线性无关组，可知 A 的相应的列 $\mathbf{a}_{j_1},\dots,\mathbf{a}_{j_r}$ 组成 A 的列向量组的极大线性无关组. （阶梯形矩阵 U 的阶梯元，是指每个非零行从左到右的第 1 个非零元 u_{kt}, 它的左方、下方、左下方所有的元素 $u_{ij}=0$ ($\forall\, i\ge k$ 且 $j\le t$). ）

$S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 的任意线性无关子集 $M_0=\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$ 可以扩充为 S 的极大线性无关组，算法为：将 S 中所有向量添加在 M_0 后面得到 $M_0\cup S=\{\beta_1,\dots,\beta_k,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, 按上述算法求 $M_0\cup S$ 的极大线性无关组 $M_1=\{\beta_1,\dots,\beta_k,\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{r-k}}\}$.

2. 秩的唯一性

问题 同一个向量组 S 可以有不同的极大线性无关组 $M=\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}\}$ 与 $M_1=\{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_s}\}$, 如果所包含的向量个数 $r\ne s$, 哪一个作为 $\operatorname{rank} S$?

关键命题 如果向量组 $S_1=\{\beta_1,\dots,\beta_s\}$ 是 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 的线性组合，则当 $s>r$ 时 S_1 线性相关.

证明要点 将 S 的每个线性组合 $x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r$ 写成“行向量” $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ 与列向量 $X=(x_1,\dots,x_r)^T$ 乘积的形式

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=AX$$

则

$$\begin{aligned}AX+AY&=(x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r)+(y_1\alpha_1+\cdots+y_r\alpha_r)\\&=(x_1+y_1)\alpha_1+\cdots+(x_r+y_r)\alpha_r=A(X+Y)\\\lambda(AX)&=\lambda(x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r)\\&=(\lambda x_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda x_r)\alpha_r=A(\lambda X)\end{aligned}$$

对任意 $X,Y\in F^{r\times 1}$ 及 $\lambda\in F$ 成立.

于是 S_1 中每个向量 β_j 可写成 $\beta_j=AB_j$ 的形式， $B_j\in F^{r\times 1}$. 对任意 $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$ 有

$$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_s\beta_s=\lambda_1(AB_1)+\cdots+\lambda_s(AB_s)=A(\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_sB_s)$$

$B_1,\dots,B_s$ 是 r 维空间 $F^{r\times 1}$ 中 s 个向量，当 $r>s$ 时线性相关，存在不全为 0 的 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 使 $\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_sB_s=\mathbf{0}$ 从而 $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_s\beta_s=\mathbf{0}$, S_1 线性相关.

向量组的等价 如果向量组 S 与 T 互为线性组合，则称 S 与 T **等价** (equivalent).

向量组 S 与它的每个极大线性无关组等价.

线性组合的传递性 向量组 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 的线性组合 $AB_1,\dots,AB_s$ 的线性组合 $\lambda_1(AB_1)+\cdots+\lambda_r(AB_s)=A(\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_sB_s)$ 仍是 S 的线性组合.

等价的传递性 如果向量组 S_1 与 S 等价，且 S_2 与 S_1 等价，则 S_2 与 S 等价.

秩的唯一性 S 的任意两个极大线性无关组 $M=\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}\}$ 与 $M_1=\{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_s}\}$ 都与 S 等价，因而相互等价. 如果 $s>r$, 则由 M_1 是 M 的线性组合知 M_1 线性相关. 如果 $r>s$, 则 M 线性相关. 既然 M,M_1 都线性无关，只能 $r=s$.

3. 矩阵的秩 矩阵 A 的行向量组的秩称为行秩，列向量组的秩称为列秩. 初等行变换和初等列变换都不改变 A 的行秩和列秩.

矩阵 A 可以经过一系列初等行变换变成阶梯形 U. U 的行秩与列秩都等于 U 中非零行的个数.

任意矩阵 A 的行秩与列秩相等，记为 $\operatorname{rank}A$.

例题分析与解答

2.2.1. 求由下列向量组成的向量组的一个极大线性无关组与秩:

(1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,4)$, $\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$, $\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;

(2) $\alpha_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)$, $\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)$, $\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)$, $\alpha_4=(1,\ -1,\ 2,\ 0)$, $\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,\ 6)$.

解 (1) 答案：秩为 4, 极大线性无关组由全部 4 个向量组成. (解法略去，参照本题第 (2) 小题).

(2) 各向量 α_i 写成列向量，从左到右排成矩阵 A, 经过一系列初等行变换化成阶梯形 T:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2),-2(1)+(3),-4(1)+(4)}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3(3)+(2),-2(3)+(4)}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(2,3),(3,4)}T=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T 有三个非零行，各行第 1 个非零元分别位于第 1,2,4 列. 向量组 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_5\}$ 秩为 3, 其中第 1,2,4 个向量组成极大线性无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$. □

点评 一般地，求向量组 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 的原理和方法为：将各 α_i 写成列向量 $\mathbf{a}_i$ 排成矩阵 $A=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)$, 将 A 经过一系列初等行变换变成 $B=\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m)$, 则 A 的各列 $\mathbf{a}_i$ 经过同样的行变换变成 B 的各列， B 的任一部分列向量组成的子集 $M_2=\{\mathbf{b}_{j_1},\dots,\mathbf{b}_{j_k}\}$ 线性无关 (或相关) 当且仅当 A 的对应的列向量组成的子集 $M_1=\{\mathbf{a}_{j_1},\dots,\mathbf{a}_{j_k}\}$ 线性无关 (或相关). 特别地，如果 B 是阶梯形矩阵，则各非零行第 1 元素所在列组成的子集 M_2 是 B 的列向量组的极大线性无关组，相应地可知 M_1 是 A 的列向量组的极大线性无关组.

矩阵 A 可以经过一系列初等行变换化成最简阶梯形 T, 在 Mathematica 中完成此任务的语句为 `RowReduce[A]`. 在此之前，应先逐行输入 A 的各元素来输入矩阵 A. 要将本题两小题 (1),(2) 中的矩阵化成阶梯形，可用如下 Mathematica 语句：

```
A1={{6,1,1,7},{4,0,4,1},{1,2,-9,0},{-1,3,-16,-1},{2,4,22,3}};
A2={{1,0,3,1,2},{-1,3,0,-1,1},{2,1,7,2,5},{4,2,14,0,6}};
T1=RowReduce[A1]//MatrixForm; T2=RowReduce[A2]//MatrixForm;
{T1,T2}
```

其中 `//MatrixForm` 要求将得到的阶梯形矩阵写成矩阵形式以便于观察. 最后一句 `{T1,T2}` 是将得到的两个阶梯形矩阵 `T1,T2` 显示出来.

运行结果为

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

□

2.2.2. 设 $\alpha_1=(0,1,2,3),\alpha_2=(1,2,3,4),\alpha_3=(3,4,5,6),\alpha_4=(4,3,2,1),\alpha_5=(6,5,4,3)$.

(1) 证明： α_1,α_2 线性无关;

(2) 把 α_1,α_2 扩充成 $\{\alpha_1,...,\alpha_5\}$ 的极大线性无关组.

解 将各 α_i 写成列向量 $\mathbf{a}_i$ 排成矩阵 $A=(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_5)$, 将 A 经过一系列初等行变换化成阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&3&4&6\\1&2&4&3&5\\2&3&5&2&4\\3&4&6&1&3\end{pmatrix}\to T=\begin{pmatrix}1&0&-2&-5&-7\\0&1&3&4&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1) T 的前两列线性无关 $\Rightarrow$ A 的前两列线性无关 $\Rightarrow$ α_1,α_2 线性无关.

(2) T 的前两列组成 T 的列向量组的极大线性无关组 $\Rightarrow$ $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 是 $\{\alpha_1,...,\alpha_5\}$ 的极大线性无关组，也就是由 α_1,α_2 扩充成的极大线性无关组. □

2.2.3. 求下列矩阵的秩. 并求出它们的行向量组和列向量组的一个极大线性无关组.

$$(1)\quad\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix};\qquad(2)\quad\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}.$$

答案 (1) 秩为 2. 任何两行组成行向量组的极大线性无关组. 任何两列组成列向量组的极大线性无关组.

(2) 秩为 3. 全部 3 行组成行向量组的极大线性无关组. 第 1,2,4 列组成列向量组的极大线性无关组. □

2.2.4. 证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

证法 1 如果 β 不能由 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表出，则向量组 $S=\{\alpha_1,...,\alpha_n,\beta\}$ 中每个向量都不能由前面的向量线性表出， S 线性无关. 与已知条件“S 线性相关”矛盾. 这证明了 β 能由 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表出.

证法 2 由 $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta$ 线性相关知存在不全为 0 的 $\lambda_1,...,\lambda_n,\lambda$ 满足

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda\alpha=\mathbf{0}\qquad(1)$$

如果 $\lambda=0$, 则 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 不全为 0 且 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\mathbf{0}$, 与已知条件“$\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性无关”矛盾.

因此 $\lambda\neq0$. 由等式 (1) 得

$$\beta=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha_1-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\alpha_n\qquad□$$

2.2.5. 证明：如果 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，则 β 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的极大线性无关组线性表出.

证明 记 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 的极大线性无关组为 $M = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r\}$. 则每个 α_i 可由 M 线性表出： $\alpha_i = x_{i1}\tilde{\alpha}_1 + \cdots + x_{ir}\tilde{\alpha}_r$. 于是

$$\begin{aligned}\beta &= \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \\ &= \lambda_1(x_{11}\tilde{\alpha}_1 + x_{1r}\tilde{\alpha}_r) + \cdots + \lambda_n(x_{n1}\tilde{\alpha}_1 + \cdots + x_{nr}\tilde{\alpha}_r) \\ &= y_1\tilde{\alpha}_1 + \cdots + y_r\tilde{\alpha}_r\end{aligned}$$

其中 $y_j = \lambda_1 x_{1j} + \cdots + \lambda_n x_{nj}$. □

点评 将向量组 $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ 的任何一个线性组合 $x_1\tilde{\alpha}_1 + \cdots + x_r\tilde{\alpha}_r$ 写成由向量 $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ 排成的一行 $A = (\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r)$ 与系数 $x_1, \ldots, x_r$ 排成的一列 X 的乘积的形式. 易验证：$AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2), \lambda(AX) = A(\lambda X)$.

按照这样的写法，每个 $\alpha_i = AX_i$, 其中 $X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ir})^T$. 于是

$$\begin{aligned}\beta &= \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = \lambda_1(AX_1) + \cdots + \lambda_n(AX_n) \\ &= A(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = y_1\tilde{\alpha}_1 + \cdots + y_r\tilde{\alpha}_r\end{aligned}$$

其中 $(y_1, \ldots, y_r)^T = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$. □

2.2.6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩是 r. 求证：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任意 r 个线性无关向量都是极大线性无关组.

(2) 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 能被其中某 r 个向量 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性表出，则 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性无关.

证明 (1) 如果 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 中某 r 个线性无关向量 $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ 组成的集合 $\tilde{S}$ 不是 S 的极大线性无关组, 再添加某个 $\tilde{\alpha}_{r+1} \in S$ 得到的 $r+1$ 个向量仍然线性无关. 但由 $\operatorname{rank} S = r$ 知 S 中线性无关向量最多只能 r 个，不能 $r+1$ 个. 这证明了 $\tilde{S}$ 是 S 的极大线性无关组.

(2) $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 能够被 $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 线性表出. B 可以被它的极大线性无关组 $\tilde{B}$ 线性表出. 由线性组合的传递性知 S 能够被 $\tilde{B}$ 线性表出. $\tilde{B}$ 也是 S 的极大线性无关组，$\tilde{B}$ 中的元素个数等于 $r = \operatorname{rank} S$. 这说明 $\tilde{B}$ 由 B 中全部 r 个向量组成，$B = \tilde{B}$ 线性无关. □

2.2.7. 证明：若向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出，则 (I) 的秩不超过 (II) 的秩.

证明 向量组 (II) 可以由它的极大线性无关组 $M_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 表出，s 是向量组 (II) 的秩. 若向量组 (I) 被 (II) 线性表出，则 (I) 可被 B 线性表出，(I) 的极大线性无关组 $M_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 也能被 M_2 线性表出，M_1 的向量个数 $r \le s$, 而 r 就是向量组 (I) 的秩. 这证明了 (I) 的秩 r 不超过 (II) 的秩 s. □

§ 2.3 子空间

知识导航

1. 齐次线性方程组的解集

将齐次线性方程组写成向量形式 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. 方程左边的线性组合式写成矩阵 AX, 其中 $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. A 由各个列向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 排成一行得到，就是以各 $\mathbf{a}_i$ 为各列排成的矩阵，也就是方程组的系数矩阵. 方程组写成矩阵形式

$$AX = \mathbf{0}$$

记 $V_A = \{X \in F^{n\times 1} \mid AX = \mathbf{0}\}$ 为方程组的解集. 则：

(1) 对任意 $X_1, X_2 \in V_A$, 有 $A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; X_1+X_2 \in V_A$.

(2) 对任意 $X \in V_A$ 和 $\lambda \in F$, 有 $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda X \in V_A$.

这两条性质称为 V_A **对加法与数乘封闭**. 满足这两条性质的子集称为 $F^{n\times 1}$ 的子空间. 因此方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解集 V_A 是子空间，称为方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的 **解空间**.

2. 子空间的定义和性质

定义 2.3.1 向量空间 F^n 的非空子集 W 如果满足以下两个条件：

(1) $u, v \in W \quad\Rightarrow\quad u + v \in W$,

(2) $u \in W, \lambda \in F \quad\Rightarrow\quad \lambda u \in W$,

就称 W 是 F^n 的 **子空间** (subspace). 如果 F^n 的子空间 W_1 是子空间 W_2 的子集，则称 W_1 是 W_2 的子空间. □

子空间 W 必然包含其中任何一个向量 α 的零倍 $0\alpha = \mathbf{0}$, 也就是说包含零向量；并且包含每个向量 α 的负向量 $(-1)\alpha = -\alpha$.

由子空间 W 对加法和数乘封闭可以得出 W 对线性组合封闭： W 中任意向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的任意线性组合 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \in W$.

3. 维数、基与坐标

$V = F^{n\times 1}$ 的子空间 W 的任何一组极大线性无关组 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 所含向量个数称为 W 的 **维数** (dimension), 记作 $\dim W$, 也就是向量集合 W 的秩 $\operatorname{rank} W$. 每个向量 $\alpha \in W$ 可以唯一地写成 S 的线性组合

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r$$

S 称为 W 的一组 **基** (basis), $(x_1, \ldots, x_r) \in F^r$ 称为 α 在基 S 下的 **坐标** (coordinates).

坐标的算法 各向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha$ 都是列向量，等式 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r = \alpha$ 是一个非齐次线性方程组 $AX = \alpha$, 其中 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 是由列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 排成的 $n \times r$ 系数矩阵， $X = (x_1, \ldots, x_r)^T$. 求解此方程组即可得到 α 的坐标 X.

4. 齐次线性方程组的解空间

维数 n 元齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间 V_A 的维数

$$\dim V_A = n - \operatorname{rank} A = \text{未知数个数} - \text{方程的真正个数}$$

基础解系 齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间的基称为此方程组的 **基础解系** (system of fundamental solutions).

将系数矩阵 A 通过一系列初等行变换化成最简阶梯形 Λ 之后，方程组化为 $\Lambda X=\mathbf{0}$, 其中有 r 个未知数 $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$ 可以写成其余 $n-r$ 个可以独立取值的未知数 $x_{i_{r+1}},\dots,x_{i_n}$ 的线性组合. 这 $n-r$ 个独立未知数所取的值 $t_1,\dots,t_{n-r}$ 组成每个解 X 的坐标，坐标 $(t_1,\dots,t_{n-r})$ 为自然基向量 $e_1,\dots,e_{n-r}$ 的那些解 $X_1,\dots,X_{n-r}$ 就组成一个基础解系.

5. 子集生成的子空间

$V=F^{n\times 1}$ 的任意子集 S 的全体线性组合组成的集合 $V(S)$ 是一个子空间，就是包含 S 的最小的子空间，称为 S **生成的子空间** (subspace generated by S). S 的每个极大线性无关组 S_0 就是 $V(S)$ 的一组基， $\operatorname{rank} S$ 就是 $V(S)$ 的维数.

V 的向量组 S_1,S_2 等价 $\Leftrightarrow V(S_1)=V(S_2)$. S_1 是 S_2 的线性组合 $\Leftrightarrow S_1\subseteq V(S_2)$.

例题分析与解答

2.3.1 求由以下每个小题中的向量生成的子空间的维数，并求出一组基.

(1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,4)$, $\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$,
$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;

(2) $\alpha_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)$, $\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)$, $\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)$,
$\alpha_4=(1,\ -1,\ 2,\ 0)$, $\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,\ 6)$.

分析 利用 2.2 的算法求出每小题中的向量组 S 的秩 r, 并求出一个极大线性无关组 M. 则 S 生成的子空间 W 的维数等于 r, M 就是 W 的一组基.

答案 (1) 所生成的子空间维数等于 4, 全部 4 个向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_4$ 组成一组基.

(2) 所生成的子空间维数等于 3, $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 组成一组基.

(具体算法参照例题 2.2.1). □

2.3.2 下列方程的解集合 W 是否 R^4 的子空间：

(1) $x_1+2x_2=3x_3+4x_4$;

(2) $x_1+2x_2=3x_3+4-x_4$;

(3) $(x_1+2x_2)^2=(3x_3+4x_4)^2$;

(4) $(x_1+2x_2)^2+(3x_3+4x_4)^2=0$.

解 (1) 方程是齐次线性方程，解集 W 是 R^4 的子空间.

(2) 零向量 $(0,0,0,0)$ 不是方程的解，解集合 W 不包含零向量，不是 R^4 d 的子空间.

(3) $(1,-1,1,-1)$ 与 $(1,-1,-1,1)$ 都是方程的解，含于 W, 但它们的和 $(2,-2,0,0)$ 不是方程的解，不含于 W. 可见 W 对加法不封闭，不是 R^4 的子空间.

(4) 方程与齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 3x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

同解，解集合 W 是 R^4 的子空间. $\square$

点评 要说明集合 W 不是子空间，只要举出一个例子说明 W 不符合子空间的某一条性质就够了，例如，W 对于加法或数不封闭，或不包含零向量. 注意，不包含零向量也就对数乘不封闭. 这是因为，如果 W 对于数乘封闭，必然包含其中任何一个向量 α 的 0 倍 $0\alpha=\mathbf{0}$，也就是必须包含零向量. 本题第 (2) 小题是非齐次线性方程组，解集合必然不包含零向量，一定不是子空间. 第 (3) 小题的解集合 W 是两个齐次线性方程组 $x_1+2x_2=3x_3+4x_4$ 与 $x_1+2x_2=-(3x_3+4x_4)$ 的解集合 W_1,W_2 的并集 $W_1\cup W_2$，而 W_1,W_2 是两个子空间并且相互不包含，并集一定对加法不封闭，不是子空间. 具体叙述时只要找出一个尽量简单的例子说明 W 对加法不封闭就够了，不必讲别的道理，以上的道理是用来指引你去找出例子，只要找到了例子就不必讲理由了.

反过来，要说明集合 W 是子空间，必须证明 W 中任意向量 α 的任意常数倍 $\lambda\alpha$ 含于 W，并且 W 中任意两个向量之和仍然含于 W. 还可以利用定理：齐次线性方程组的解集合是子空间. 本题 (1),(4) 小题就是这样做的. $\square$

2.3.3 以向量 $\alpha_1=(3,1,0),\alpha_2=(6,3,2),\alpha_3=(1,3,5)$ 为基，求向量 $\beta=(2,-1,2)$ 的坐标.

解 β 的坐标 (x,y,z) 是方程组 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\beta$ 即 $AX=\beta$ 的解. 其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解之得 $(x,y,z)=(-76,41,-16)$. $\square$

点评 求方程组 $AX=\beta$ 的解可以通过将 (A,β) 经过一系列初等行变换化成最简阶梯形 $(I,\mathbf{c})$ 得 $X=\mathbf{c}$. 也可以在 Mathematica 中运行如下语句：

```
A={{3,6,1},{1,3,3},{0,2,5}};b={2,-1,2}; Inverse[A].b
```

得到

$\{-76,41,-16\}$

就是说方程组 $AX=\beta$ 的解为 $(-76,41,-16)$. $\square$

2.3.4 设向量 $\alpha_1=(1,0,1,0),\alpha_2=(0,1,0,1)$，将 α_1,α_2 扩充成 R^4 的一组基.

解 将 α_1,α_2 写成列向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 作为前两列,再将 4 维列向量空间的自然基向量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 依次作为后 4 列，排成 4×6 矩阵 A, 经过行变换化成阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-(1)+(3),-(2)+(4)}T=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

T 的前 4 列组成列向量组的极大线性无关组，这说明 A 也是如此， A 的前 4 列所代表的向量 $\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2$ 组成 R^4 的基， α_1,α_2 添加自然基向量 e_1,e_2 扩充得到 R^4 的基. □

2.3.5 设向量 $\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(0,1,-1,-1),\alpha_3=(0,0,1,-1),\alpha_4=(0,0,0,1)$, 试将标准基向量 e_1,e_2,e_3,e_4 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

解 将 $\alpha_1,\dots,\alpha_4,e_1,\dots,e_4$ 写成列向量，依次作为各列组成 4×8 矩阵 A, 经过一系列初等行变换化成最简阶梯形 T:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&-1&1&0&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-2&1&1&0\\0&0&0&1&-4&2&1&1\end{pmatrix}$$

T 的前 4 列依次是 R^4 的自然基向量，后 4 列 $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_4$ 中的每一个 $\mathbf{b}_j$ 写成前 4 列的线性组合式

$$\mathbf{b}_j=b_{1j}\mathbf{e}_1+b_{2j}\mathbf{e}_2+b_{3j}\mathbf{e}_3+b_{4j}\mathbf{e}_4 \tag{1}$$

中的系数 $b_{1j},\dots,b_{4j}$ 依次是 $\mathbf{b}_j$ 的各分量. A 的后 4 列 $\mathbf{e}_j$ $(1\le j\le 4)$ 写成前 4 列的线性组合也有与 (1) 中同样的系数：

$$\mathbf{e}_j=b_{1j}\mathbf{a}_1+b_{2j}\mathbf{a}_2+b_{3j}\mathbf{a}_3+b_{4j}\mathbf{a}_4 \tag{2}$$

将矩阵 T 的后 4 列各分量 b_{ij} 的具体数值代入 (2) 可得

$$e_1=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3-4\alpha_4,\quad e_2=\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\quad e_3=\alpha_3+\alpha_4,\quad e_4=\alpha_4\,. \qquad □$$

2.3.6 求下列每个齐次线性方程组的一个基础解系．并用它表出全部解.

$$(1)\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0\\x_1-x_3-2x_4-3x_5=0\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0\\x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0\\-x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0\\x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0\end{cases}$$

解 (1) 将系数矩阵 A 经过一系列初等行变换化成最简阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&0&-1&-2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组经过同解变形化为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $X_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $X_2 = (2, -3, 0, 1, 0)$, $X_3 = (3, -4, 0, 0, 1)$.

全部解为 $X = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 = (t_1 + 2t_2 + 3t_3, -2t_1 - 3t_2 - 4t_3, t_1, t_2, t_3)$.

(2) 与 (1) 类似地将系数矩阵通过初等行变换化成最简标准形 (具体过程略去). 得：

基础解系为 $X_1 = (-1, -1, 1, 1, 0)$, $X_2 = (2, 2, 0, 0, 1)$.

全部解为 $X = t_1X_1 + t_2X_2 = (-t_1 + 2t_2, -t_1 + 2t_2, t_1, t_1, t_2)$. □

2.3.7 已知 F^5 中的向量

$$X_1 = (1, 2, 3, 4, 5), \quad X_2 = (1, -1, 1, -1, 1), \quad X_3 = (1, 2, 4, 8, 16).$$

求一个齐次线性方程组，使 X_1, X_2, X_3 组成这个方程组的基础解系.

解 X_1, X_2, X_3 是所求方程组每个方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ 的解，即

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + 16a_5 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

这是关于 $a_1, \ldots, a_5$ 的齐次线性方程组，解之得基础解系

$$\alpha_1 = (6, 1, -4, 1, 0), \quad \alpha_2 = (16, 6, -11, 0, 1)$$

以 α_1, α_2 中的各分量为系数构造齐次线性方程组成方程组

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 16x_1 + 6x_2 - 11x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

则 X_1, X_2, X_3 是方程组 (2) 的线性无关解. 方程组 (2) 的系数矩阵 A 的两行 α_1, α_2 线性无关， $\operatorname{rank} A = 2$, 方程组 (2) 即 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间 V_A 维数为 $5 - \operatorname{rank} A = 5 - 2 = 3$. V_A 中 3 个线性无关向量 X_1, X_2, X_3 组成 V_A 的基，也就是方程组 (2) 的基础解系. □

2.3.8 设 S, T 是向量组. 求证： S 与 T 等价 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T$.

证明 设 S_0, T_0 分别是 S, T 的极大线性无关组,则 S_0, T_0 所含向量个数 $r = |S_0| = \operatorname{rank} S$, $s = |T_0| = \operatorname{rank} T$.

如果 S 与 T 等价，则 T 是 S 的线性组合，而 S 是 S_0 的线性组合，因此 T 也是 S_0 的线性组合. S 与 T 都是 S_0 的线性组合，因此 $S \cup T$ 是 S_0 的线性组合， S_0 是 $S \cup T$ 的极大线性无关组， $\operatorname{rank}(S \cup T) = |S_0| = \operatorname{rank} S$. 同理 $\operatorname{rank}(S \cup T) = |T_0| = \operatorname{rank} T$.

反过来，设 $\operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} S = r = |S_0|$, 则 $S \cup T$ 中由 r 个元素组成的线性无关子集 S_0 是 $S \cup T$ 的极大线性无关组， T 是 S_0 的线性组合从而是 S 的线性组合. 同理，由 $\operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T$ 可推出 S 是 T 的线性组合. 因此， $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T \ \Rightarrow\ S$ 与 T 互为线性组合 $\Rightarrow S$ 与 T 等价. $\square$

2.3.9. 求证：两个齐次线性方程组 (I),(II) 同解的充分必要条件是它们互为线性组合.

证明 如果方程组 (I) 是 (II) 的线性组合，则 (II) 的解都是 (I) 的解. 如果方程组 (I) 与 (II) 互为线性组合，则 (I) 与 (II) 中每个方程组的解都是另一个方程组的解，两个方程组同解.

反过来, 设 (I) 与 (II) 同解, 则将两个方程组合并得到的方程组 (III) 也与 (I),(II) 同解. 设方程组 (I),(II) 的系数矩阵的行向量组分别为 S 与 T, 则将 (I),(II) 合并得到的方程组 (III) 的系数矩阵的行向量组为 $S \cup T$. 方程组 (I),(II),(III) 既然同解, 它们的未知数个数 n 当然相同, 解空间维数 $n - \operatorname{rank} S, n - \operatorname{rank} T, n - \operatorname{rank}(S \cup T)$ 也相同, 因此 $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T$, 由第 6 题的结论知 S 与 T 等价，也就是 (I) 与 (II) 互为线性组合. $\square$

§ 2.4 非齐次线性方程组

知识导航

1. 有解条件

方程组 $AX = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A, \mathbf{b}) = \operatorname{rank} A$.

2. 解集结构

设 X_0 是 $AX = \mathbf{b}$ 的一个解. 则 $AX = \mathbf{b} \Leftrightarrow A(X - X_0) = AX - AX_0 = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in V_A$. 其中 V_A 是齐次线性方程组的解空间.

设 $X_1, \dots, X_{n-r}$ 是 $AX = \mathbf{0}$ 的一个基础解系，则 $AX = \mathbf{b}$ 的解集为

$$X_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{n-r} X_{n-r},\ (\forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in F)$$

例题分析与解答

2.4.1 已知 5 元线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 且以下向量是它的解

$$X_1 = (1,1,1,1,1),\quad X_2 = (1,2,3,4,5),\quad X_3 = (1,0,-3,-2,-3).$$

(1) 求方程组的通解.

(2) $X_1+X_2+X_3$ 是否方程组的解？

(3) $\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是否方程组的解？

解 (1) 设方程组为 $AX=\beta$, 其中 A 为系数矩阵，β 为常数项组成的列向量. 则齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间维数 V_A 为 $5-\operatorname{rank}A=5-3=2$. $\eta_1=X_2-X_1=(0,1,2,3,4)$ 与 $\eta_2=X_3-X_1=(0,-1,-4,-3,-4)$ 都含于 V_A 且线性无关，组成 V_A 的一组基. $V_A=\{t_1\eta_1+t_2\eta_2=(0,t_1-t_2,2t_1-4t_2,3t_1-3t_2,4t_1-4t_2)\mid t_1,t_2\in F\}$ 不包含 X_1, 可见 $\beta=AX_1\neq\mathbf{0}$, $AX=\beta$ 是非齐次线性方程组，通解为

$$X_1+t_1\eta_1+t_2\eta_2=(0,t_1-t_2,2t_1-4t_2,3t_1-3t_2,4t_1-4t_2)$$

其中 t_1,t_2 可取遍包括 A,β 的所有元素的任意数域 F.

(2) 由 $\beta\neq\mathbf{0}$ 知 $A(X_1+X_2+X_3)=AX_1+AX_2+AX_3=\beta+\beta+\beta=3\beta\neq\beta$, 可见 $X_1+X_2+X_3$ 不是方程组的解.

(3) $A(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3))=\frac{1}{3}(AX_1+AX_2+A_3)=\frac{1}{3}(3\beta)=\beta$. 可见 $\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是方程组的解. □

点评 本题第 (2),(3) 小题的结论可做如下推广：对任意常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 及 $X_0=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3$, 有

$$AX_0=\lambda_1AX_1+\lambda_2AX_2+\lambda_3AX_3=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\beta$$

可见 $AX_0=\beta\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. 因此， $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3$ 是 $AX=\beta$ 的解的充分必要条件是 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. □

2.4.2 回答下列问题，并说明理由.

(1) 非齐次线性方程组 (I),(II) 同解的充分必要条件是否 (I),(II) 等价 (即互为线性组合)?

(2) 如果非齐次线性方程组 (I),(II) 有解，它们同解的充分必要条件是否 (I),(II) 等价？

解 (1) 方程组 (I),(II) 等价是同解的充分条件，但不是必要条件. 例如，方程组

$$\begin{cases}x+y=0\\ x+y-1=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x+2y=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$$

的解集都是空集合，因此同解，但每一个方程组都不是另一个的线性组合.

(2) 如果非齐次线性方程组 (I),(II) 有解，则它们同解的充分必要条件是 (I),(II) 等价.

条件的充分性显然. 只需证明必要性. 设非齐次线性方程组

$$\text{(I)}\ \ x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_0\quad\text{与}\quad\text{(II)}\ \ x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_n\mathbf{b}_n=\mathbf{b}_0$$

同解. 以这两个方程组的增广矩阵 $A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\mathbf{a}_0)$ 与 $B=(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n,\mathbf{b}_0)$ 为系数矩阵构造齐次线性方程组

$$\text{(III)}\ \ x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n+x_0\mathbf{a}_0=\mathbf{0}\quad\text{与}\quad\text{(IV)}\ \ x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_n\mathbf{b}_n+x_0\mathbf{b}_0=\mathbf{0}$$

只要能证明 (III),(IV) 同解，则 A 与 B 等价，方程组 (I),(II) 等价.

对每个 $\xi=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, 记 $(\xi,x_0)=(x_1,\ldots,x_n,x_0)\in R^{n+1}$. 则： $(\xi,-1)$ 是 (III) 的解 $\Leftrightarrow$ ξ 是 (I) 的解 $\Leftrightarrow$ ξ 是 (II) 的解 $\Leftrightarrow$ $(\xi,-1)$ 是 (IV) 的解.

(I) 存在一个解 $\xi_0 \Rightarrow \xi_0$ 是 (I),(II) 的公共解 $\Rightarrow X_0=(\xi_0,-1)$ 是 (III),(IV) 的公共解.

设 $X=(x_1,\ldots,x_n,x_0)=(\xi,x_0)$ 是 (I) 的解. 而 X_0 也是 (III) 的解. 因此 X 与 X_0 的线性组合

$$Y=X+(x_0+1)X_0=(\xi+(x_0+1)\xi_0,x_0+(x_0+1)(-1))=(\xi+(x_0+1)\xi_0,-1)$$

是齐次线性方程组 (III) 的解. 且 Y 的第 $n+1$ 分量为 -1, 因此 Y 也是 (IV) 的解. 再由 X_0 是 (IV) 的解知 Y 与 X_0 的线性组合 $X=Y-(x_0+1)X_0$ 也是 (IV) 的解. 这就证明了 (III) 的所有的解都是 (IV) 的解.

同理，(IV) 的所有的解都是 (III) 的解. 因此 (III) 与 (IV) 同解，它们的系数矩阵 A,B 等价，方程组 (I),(II) 等价. □

2.4.3 已知 $X_1,\ldots,X_k$ 是数域 F 上某个非齐次线性方程组的解， $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$. 求 $\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_kX_k$ 是方程组的解的充分必要条件.

解 $Y=\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_kX_k$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解 $\Leftrightarrow A(Y-X_1)=\mathbf{0}$.
由于 $X_2-X_1,\ldots,X_k-X_1$ 都是 $AX=\mathbf{0}$ 的解， $A(Y-X_1)=0\Leftrightarrow A\xi=\mathbf{0}$, 其中
$\xi=(Y-X_1)-\lambda_2(X_2-X_1)-\cdots-\lambda_k(X_k-X_1)=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k-1)X_1$.
但 $AX_1=\beta\neq 0$, 因此 $A\xi=(\lambda_1+\cdots+\lambda_k-1)\beta=\mathbf{0}\Leftrightarrow\lambda_1+\cdots+\lambda_k-1=0$.
所求充分必要条件为： $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$. □

2.4.4 已知数域 F 上 n 元非齐次线性方程组的解生成 F^n, 求方程组的系数矩阵的秩.

解 取非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的一组解 $X_1,\ldots,X_n$ 组成 F^n 的一组基.

$n-1$ 个向量 $X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1$ 都是齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解. 设

$$\lambda_2(X_2-X_1)+\cdots+\lambda_n(X_n-X_1)=\mathbf{0}$$

则 $-(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_nX_n=\mathbf{0}$. 由 $X_1,\ldots,X_n$ 线性无关知 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, $X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1$ 线性无关. 这说明齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间维数 $n-\operatorname{rank}A\geq n-1$, $\operatorname{rank}A\leq n-(n-1)=1$.

如果 $\operatorname{rank}A=0$, $A=O$, 则非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 无解. 因此 $\operatorname{rank}A=1$. □

§ 2.5 一般的线性空间

知识导航

1. 线性空间的思想

向量本来是有大小、方向的几何向量，按平行四边形法则或三角形法则定义加法，按有向线段的伸缩或反向定义向量与实数的乘法．但是，选取了基、建立了坐标之后，每个向量就用数组表示．本章 §2.1-§2.4 的全部概念和定理都是通过数组向量的加法与数乘得出来的，不需要用到几何性质．虽然我们也通过对二维和三维向量的几何性质的讨论来得出代数性质，但那是为了借助于直观帮助理解并学会应用，在进行推理的时候其实并没有用到几何．

用平行四边形法则定义的几何向量的加法比较复杂，数组向量按分量做加法显然简单得多．为什么可以用简单的数组运算代替复杂的几何向量运算？是因为它们满足同样的运算律．其实，在本章前几节的很多推理中，既没有用到几何向量的几何性质，也没有将数组向量的分量写出来进行运算，只用到运算律就得出了所需的结论．例如，证明较少的向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性组合出的较多的向量 $\beta_1,\dots,\beta_s$ $(s>r)$ 线性相关，既没有写出各 α_i 也没有写出各 β_j 的各分量，而是将每个 β_j 写成各 α_i 的线性组合的形式 AB_j 的形式，通过运算律将各 β_j 的线性组合 $\lambda_1(AB_1)+\cdots+\lambda_s(AB_s)=A(\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_sB_s)$ 将 β_j 线性相关的问题转化为方程组 $\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_sB_s=\mathbf{0}$ 非零解的问题，也就是数组向量 $B_1,\dots,B_s$ 的线性相关问题，迎刃而解了．注意，在这里根本就不必管 α_i 与 β_j 是什么，是几何向量还是数组向量，是函数还是多项式还是矩阵，只要他们能做加法能与数相乘，以上推理及结论就都能成立．

因此，不论是什么元素组成的非空集合 V, 只要能够定义 V 中元素之间的加法，以及 V 中元素与数的乘法，不论这种加法与乘法怎样进行，只要满足我们熟悉的一些简单的运算律，就都可以将 V 称为向量，V 称为向量空间，我们对向量所得到的结论 (关于线性相关与无关、维数、基、坐标、极大线性无关组、秩等) 都适用于这样的向量空间，而且可以建立坐标将其中的向量用数组的来代表，用数组运算来代替向量运算．

2. 线性空间的定义

定义 2.5.1 设 V 是一个非空集合， F 是一个数域．如果满足了以下两个条件，则 V 称为 F 上的 **线性空间** (linear space), 也称为 **向量空间** (vector space), V 中的元素称为 **向量** (vector), F 中的数称为 **纯量** (scalar). 有时候，为了强调 V 是 F 上的线性空间，也将 V 记为 $V(F)$.

1. 在 V 中按照某种方式定义了加法，使得可以将 V 中任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$ 相加，得到唯一一个 $\alpha+\beta\in V$.

在 F 中的数与 V 中元素之间按照某种方式定义了乘法，使得可以由任意 $\lambda\in F$ 和任意 $\alpha\in V$ 相乘得到唯一一个 $\lambda\alpha\in V$. F 与 V 的元素之间的这种乘法也称为向量的数乘.

2. V 中定义的以上加法与数乘两种运算满足如下的运算律: