第三节 曲面及其方程

1. 曲面方程的概念
2. 旋转曲面
3. 柱面
4. 二次曲面

一、曲面方程的概念

引例：求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解：设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$, 则$|AM|=|BM|$，即

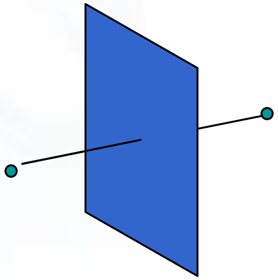
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得　$2x-6y+2z-7=0$

说明：动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.

显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.



一、曲面方程的概念

定义1 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

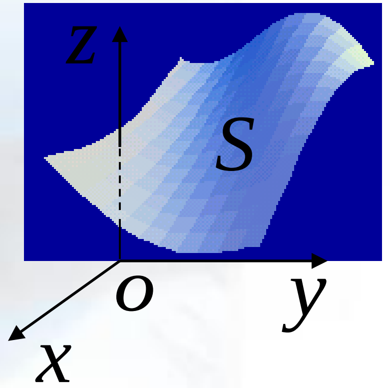
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做**方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形**.

$F(x, y, z) = 0$



两个基本问题 :

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,

求曲面方程.

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状

(必要时需作图).

一、曲面方程的概念

例1 求动点到定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程

解 设轨迹上动点为 $M(x,y,z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

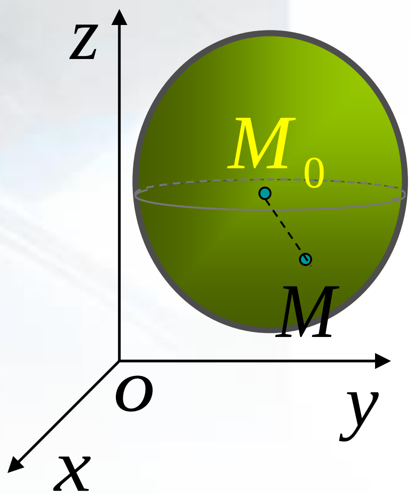
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

特别, 当M_0在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .



一、曲面方程的概念

例2　研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样曲面

解　配方得　$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示：　球心为 $M_0(1,-2,0)$，

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

说明：如下形式的三元二次方程 ($A\neq 0$)

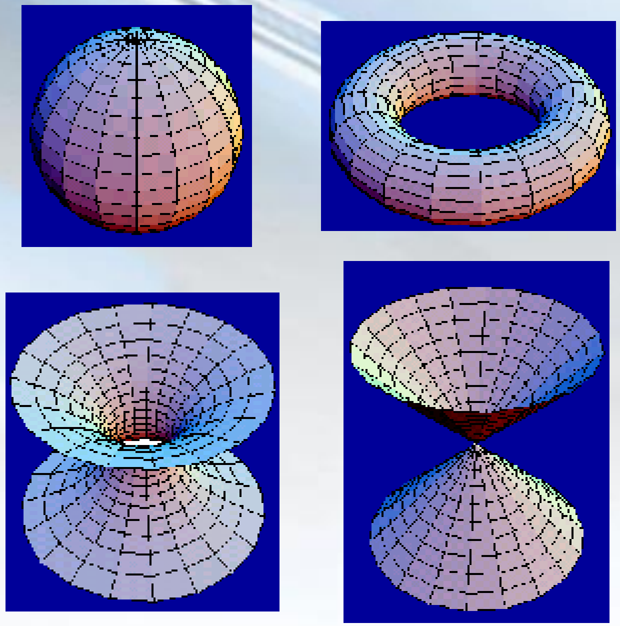
$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

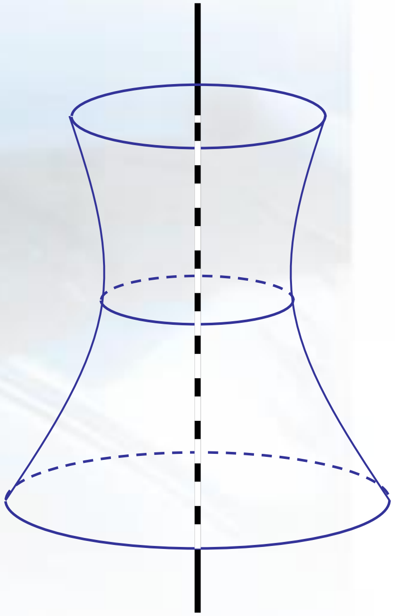
都可通过配方研究它的图形.

二、旋转曲面

定义2 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周 所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**. 该定曲线称为**母线**.

例如：

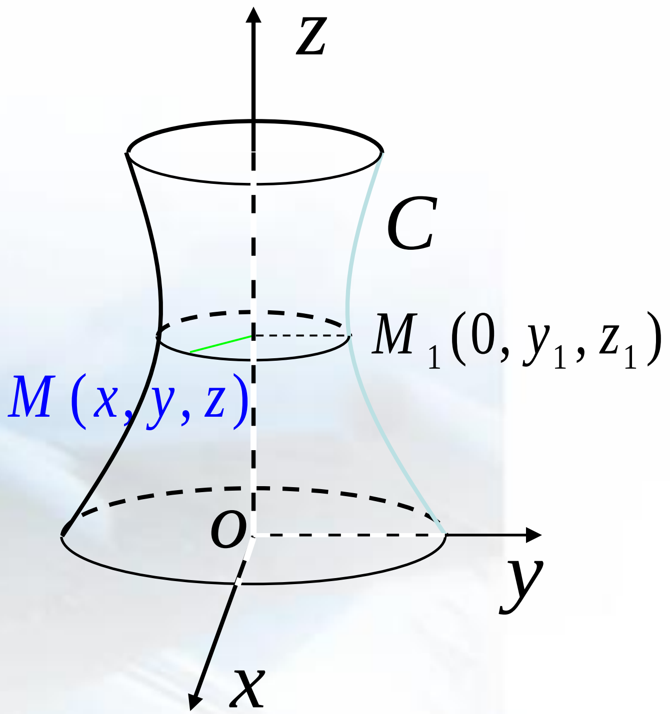




二、旋转曲面

建立yoz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$



若点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

$$f(y_1,z_1)=0$$

当绕 z 轴旋转时，该点转到

$M(x,y,z)$, 则有

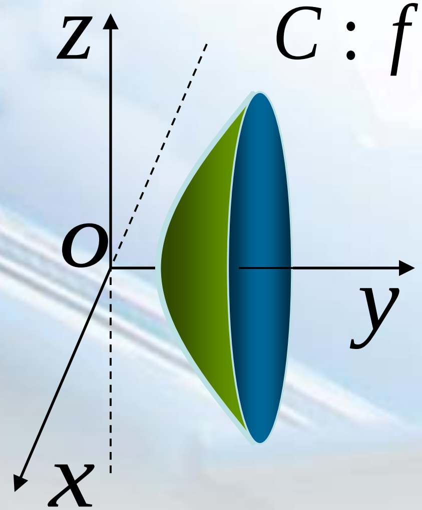
$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

二、旋转曲面

思考：当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$$C: f(y,z)=0$$

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

二、旋转曲面

例3 试建立顶点在原点，旋转轴为z轴，半顶角为α的圆锥面方程.

解：在yoz面上直线L的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

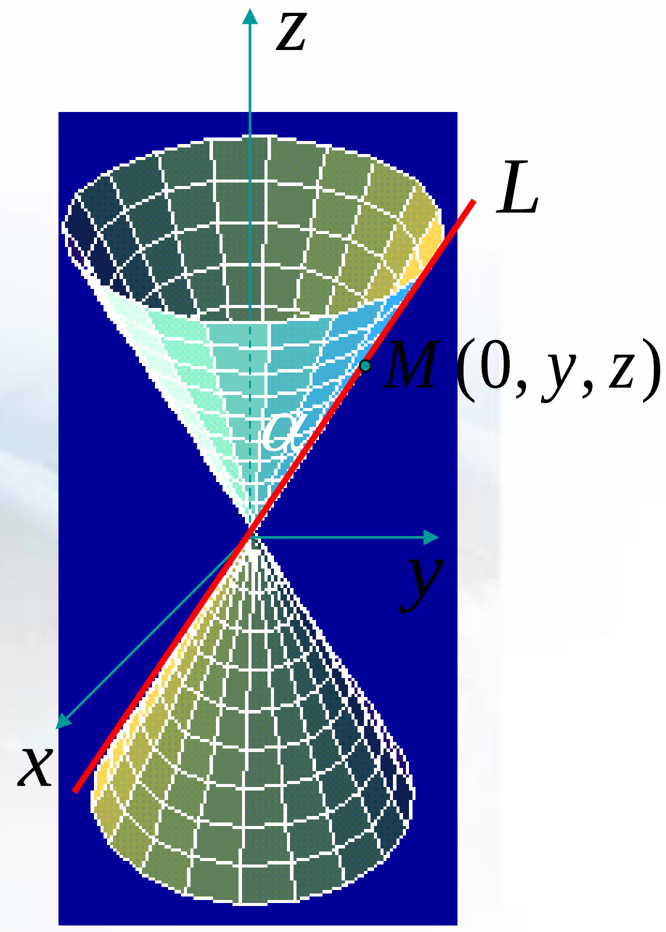
绕z轴旋转时，圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2+y^2)$$



二、旋转曲面

例4 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

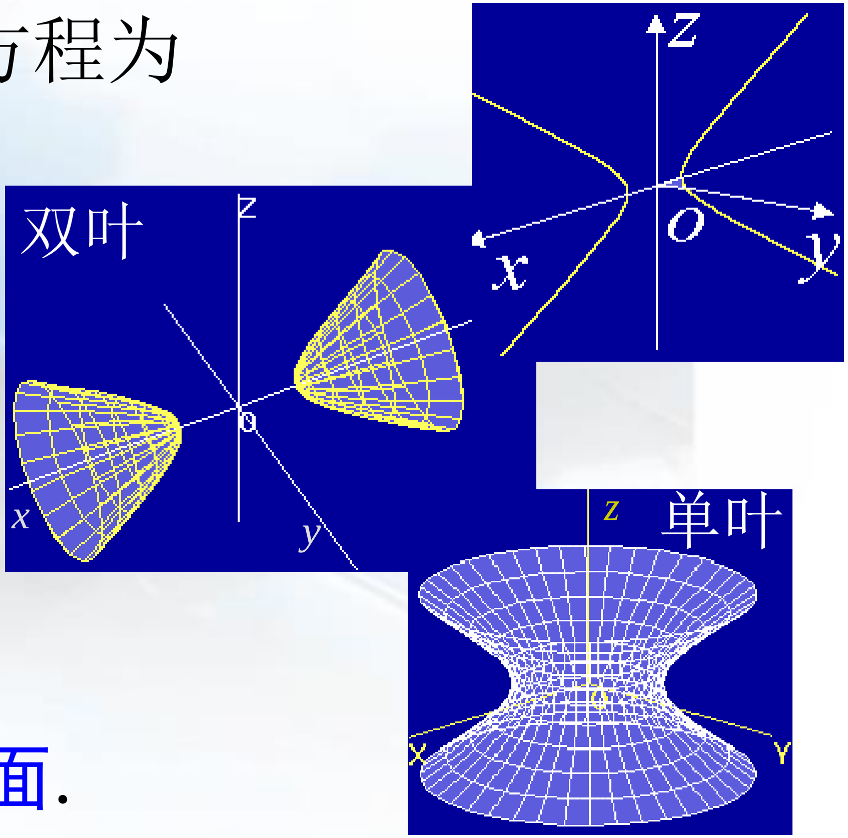
解 绕 x 轴旋转 所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

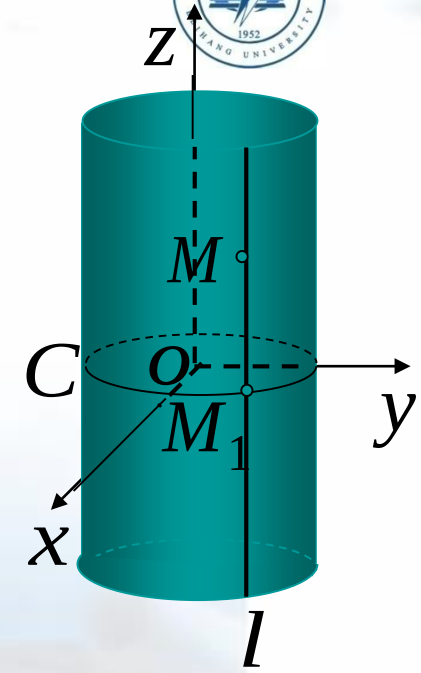
这两种曲面都叫作**旋转双曲面**.



三、柱面

引例. 分析方程 $x^2 + y^2 = R^2$

表示怎样的曲面 .



解: 在 xoy 面上, $x^2 + y^2 = R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点$M_1(x, y, 0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 l , 对任意 z , 点$M(x, y, z)$

的坐标也满足方程 $x^2 + y^2 = R^2$

沿曲线C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$x^2 + y^2 = R^2$ 表示**圆柱面**

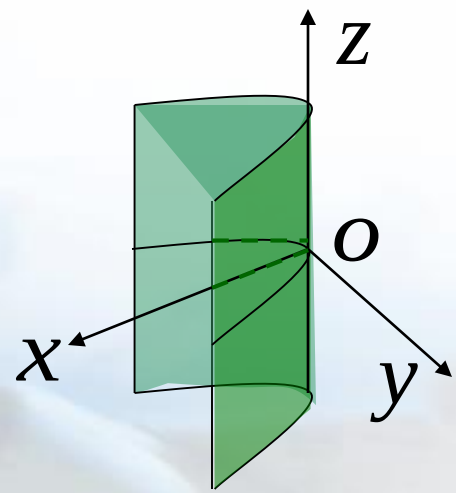
三、柱面

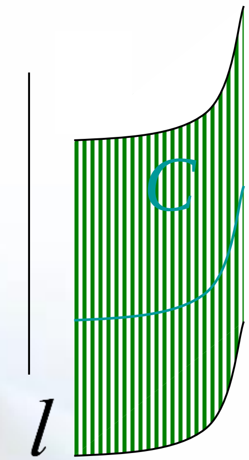
定义3 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

- $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,

  母线平行于 z 轴;

  准线为 xoy 面上的抛物线.

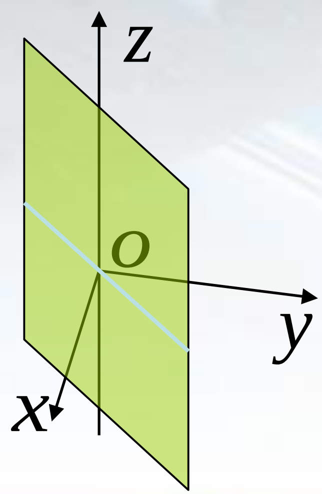


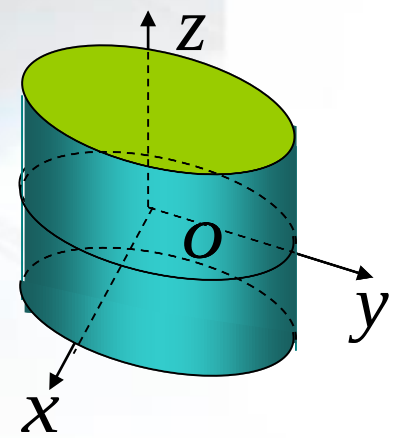


- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的**椭圆柱面**.

- $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的**平面**.

  (且 z 轴在平面上)





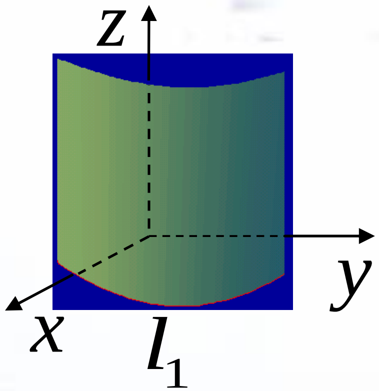
三、柱面

一般地，在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面，

母线 平行于 z 轴；

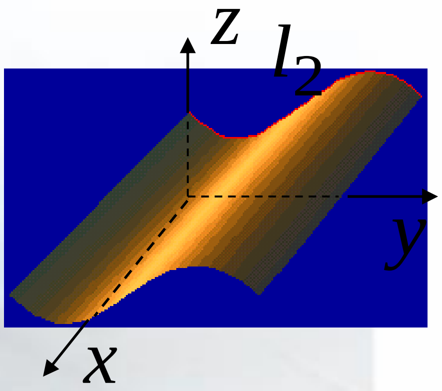
准线 xoy 面上的曲线 l_1.



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面，

母线 平行于 x 轴；

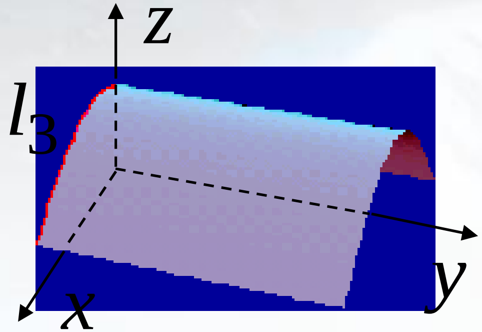
准线 yoz 面上的曲线 l_2.



方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面，

母线 平行于 y 轴；

准线 xoz 面上的曲线 l_3.



四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为**二次曲面**. 其基本类型有:

椭球面、**抛物面**、**双曲面**、**锥面**

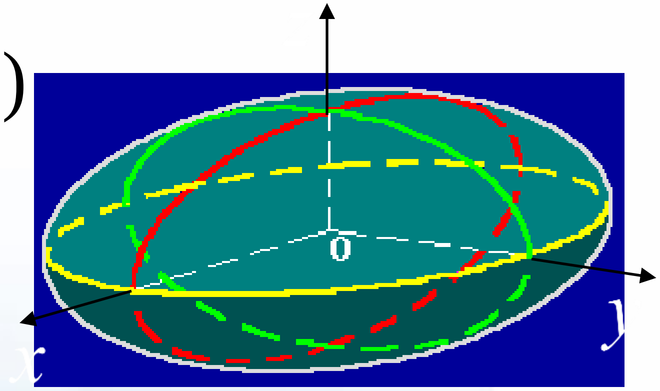
适当选取直角坐标系可得它们的标准方程, 下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

四、二次曲面

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1)范围：

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

(2)与坐标面的交线：椭圆

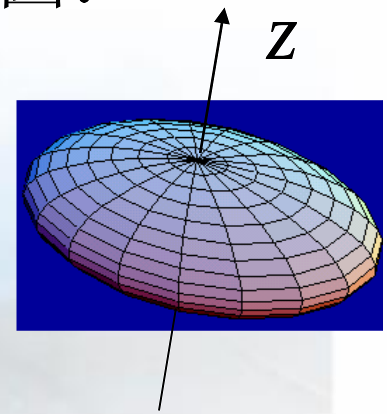
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

四、二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕:与 $z = z_1$ ($|z_1| < c$)的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1{}^2)} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1{}^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样 $y = y_1$ ($|y_1| \le b$) 及 $x = x_1$ ($|x_1| \le a$)的截痕

也为椭圆.

(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$时为球面.

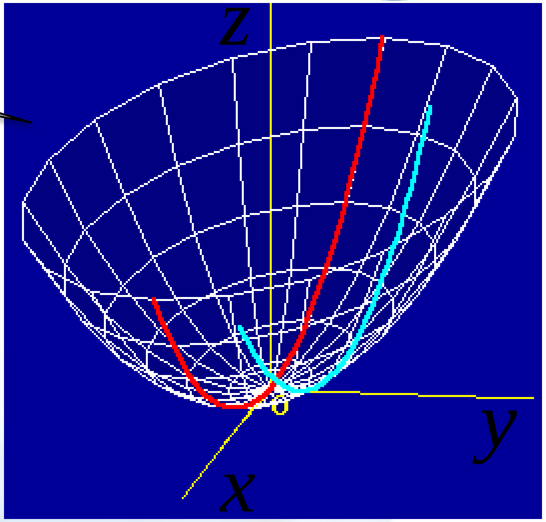
四、二次曲面

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 同号})$$

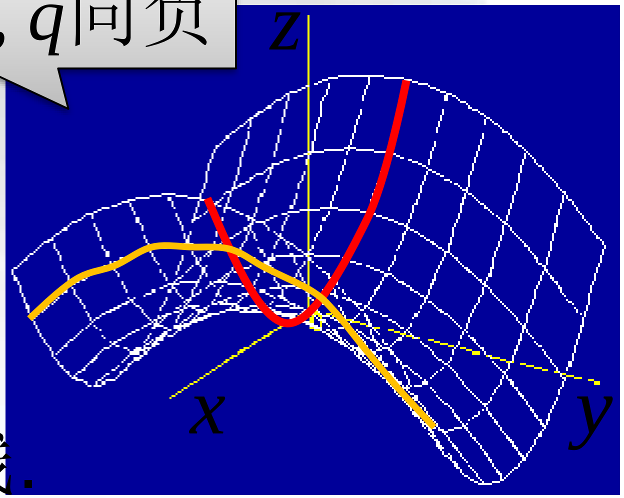
p, q同正



特别，当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

p, q同负



$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 同号})$$

平面 $x=t$ 上的截痕是抛物线

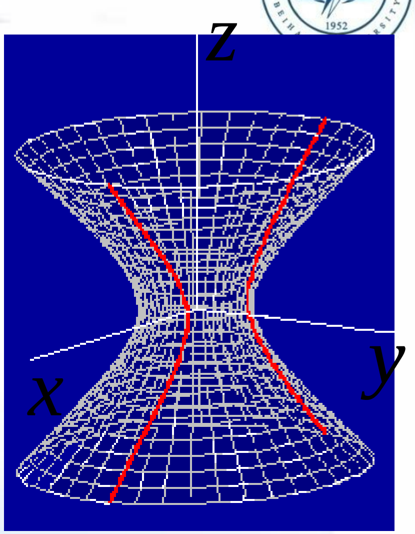
所有抛物线的顶点也组成一条抛物线.

四、二次曲面

3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c \text{ 为正数})$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为 椭圆.

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

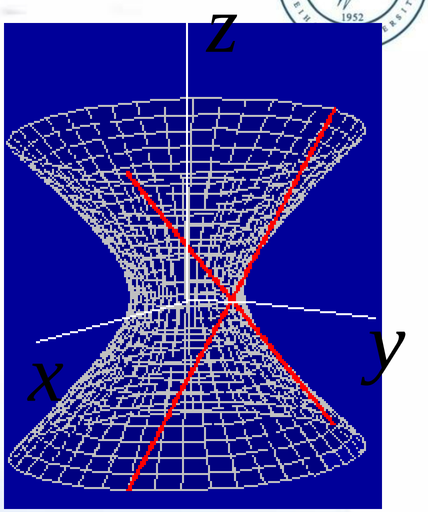
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2} \\ y=y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于x 轴;
虚轴平行于z 轴)

四、二次曲面

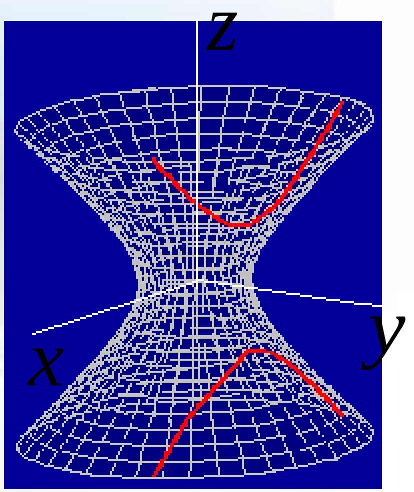
2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为相交直线:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\ (\text{或} -b) \end{cases}$$



3) $|y_1| > b$时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y_1^2}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases} \qquad \underline{\phantom{1-\dfrac{y_1^2}{b^2}}} < 0$$



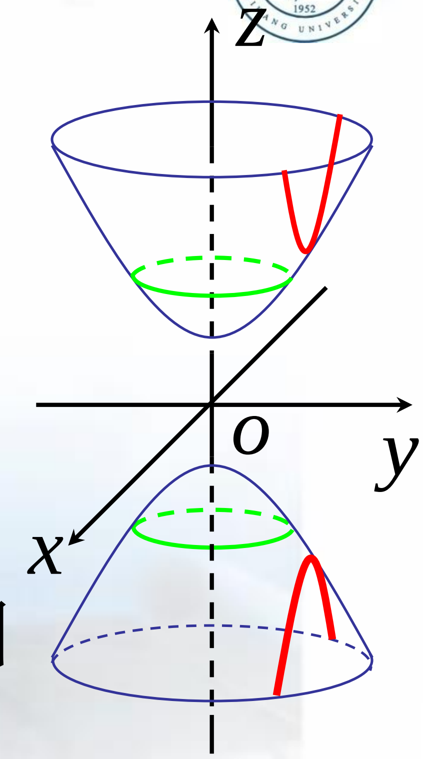
(实轴平行于z 轴;

虚轴平行于x 轴)

四、二次曲面

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

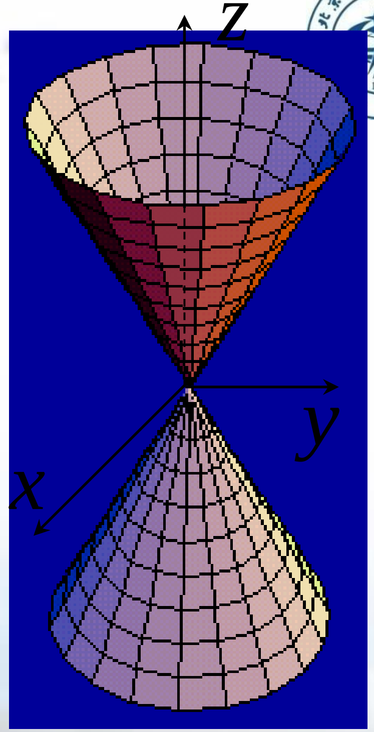
平面 $z=z_1$ $(|z_1|>c)$上的截痕为 椭圆

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1 & \text{单叶双曲面}\\ -1 & \text{双叶双曲面}\end{cases}$$

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a,b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ \ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

五、内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- 旋转曲面

  如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

  $$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\ , z) = 0$$

- 柱面

  如,曲面 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

  又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

五、内容小结

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: 椭圆抛物面 双曲抛物面

  (p,q 同号)

  $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

- 双曲面: 单叶双曲面 双叶双曲面

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

六、思考

1. 指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

第四节空间曲线及其方程

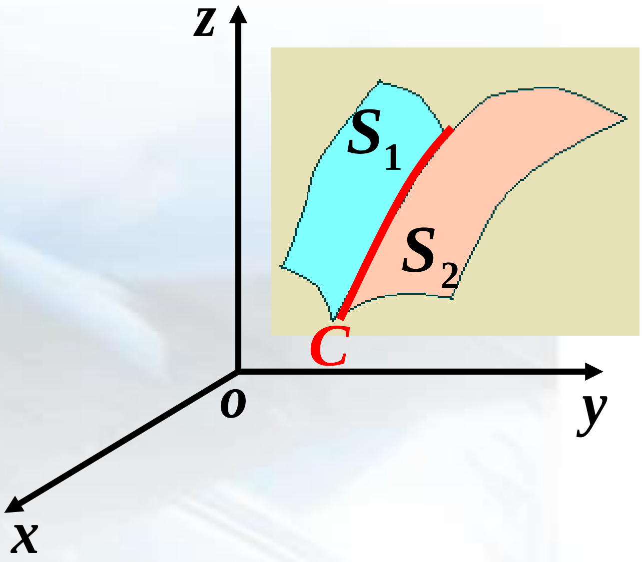
1. 空间曲线的一般方程
2. 空间曲线的参数方程
3. 空间曲线在坐标面上的投影

一、空间曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程



特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

一、空间曲线的一般方程

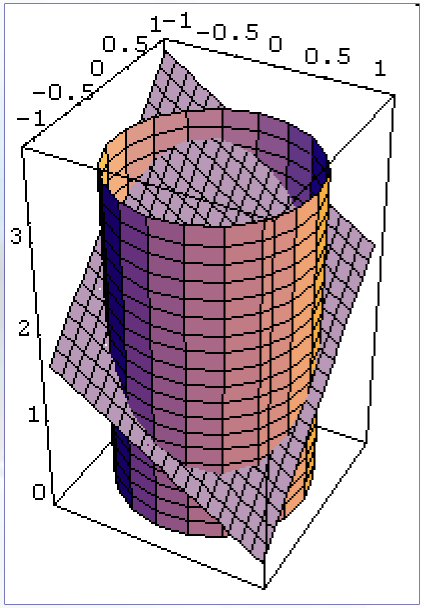
例1　方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解　$x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面，

$2x + 3y + 3z = 6$ 表示平面，

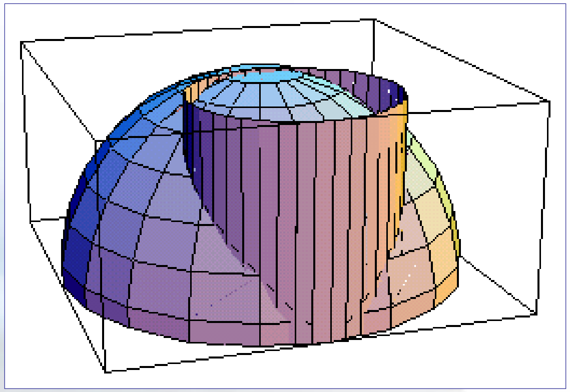
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

交线为椭圆.



一、空间曲线的一般方程

例2 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

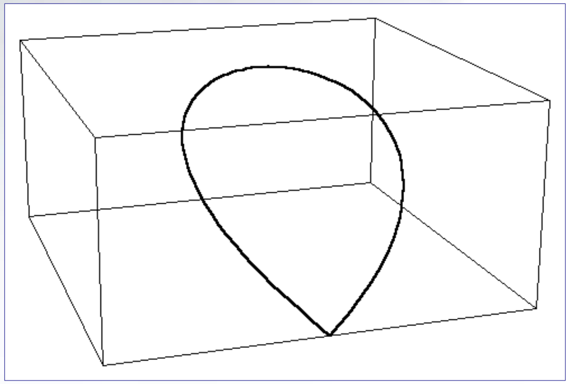


解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

上半球面,

$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



二、空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

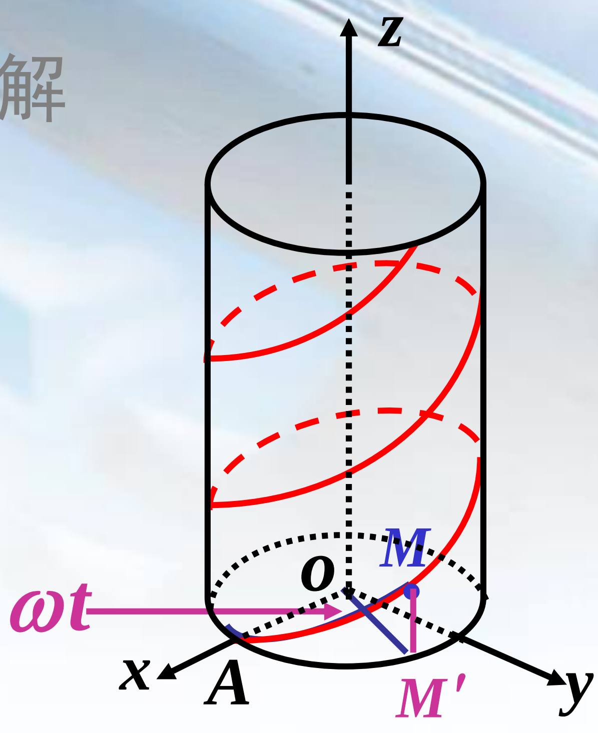
空间曲线的参数方程

当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

二、空间曲线的参数方程

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**. 试建立其参数方程.

解



取时间 t 为参数， 动点从 A 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点

M 在 xoy 面的投影 $M'(x,y,0)$

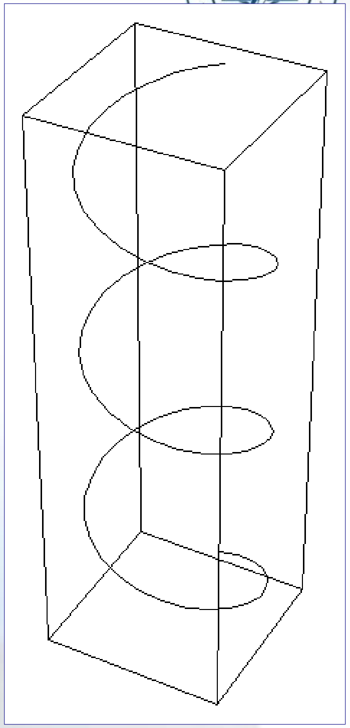
$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \\ z &= vt \end{aligned}}$$

螺旋线的参数方程

二、空间曲线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad (\theta = \omega t,\quad b = \frac{v}{\omega})$$



螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比.

即 $\theta:\quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha,\qquad z:\quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

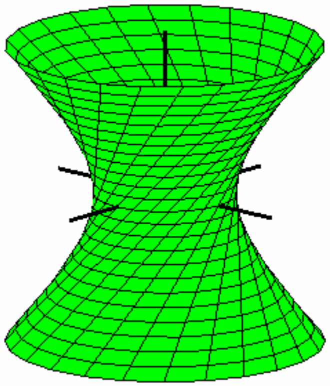
补：空间曲面的参数方程

例：直线 Γ：$x=1,\ y=t,\ z=2t$ 绕 z 轴旋转所得曲面方程为

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{1+t^2}\cos\theta,\\
y &= \sqrt{1+t^2}\sin\theta,\\
z &= 2t.
\end{aligned}
$$

θ属于$[0,2\pi]$

单叶双曲面



$$
\begin{cases}
x = x(t),\\
y = y(t),\\
z = z(t).
\end{cases}
\xrightarrow{\text{绕 } z \text{ 轴旋转}}
\begin{cases}
x = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\cos\theta,\\
y = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\sin\theta,\\
z = z(t).
\end{cases}
$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

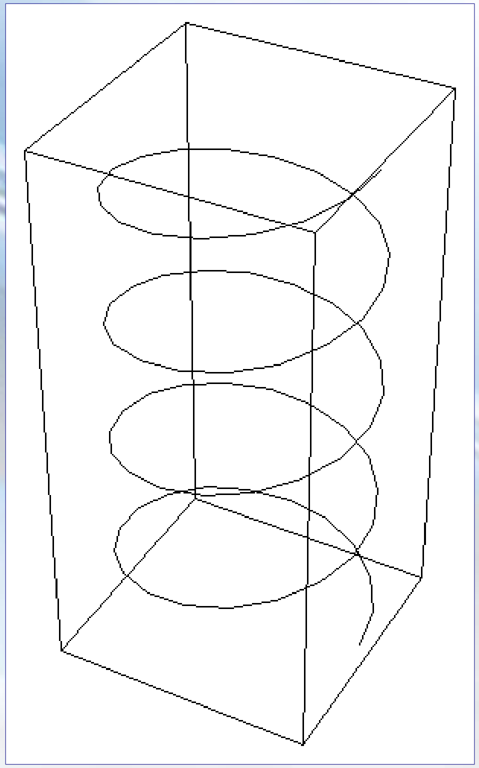
消去变量z后得: $\underline{H(x,y)=0}$

曲线关于xoy 的投影柱面

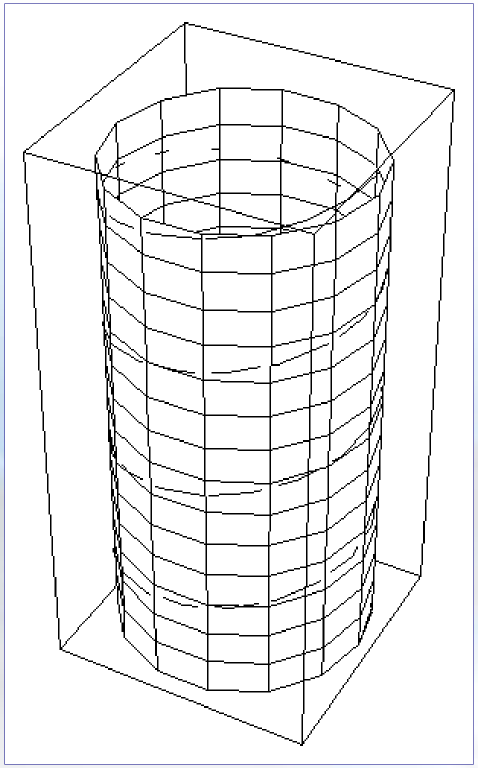
投影柱面的特征:

以此空间曲线为准线，垂直于所投影坐标面的直线为母线.

三、空间曲线在坐标面上的投影



空间曲线



投影柱面

三、空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线在xoy 面上的**投影曲线**或简称**投影**

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

yoz 面上的**投影曲线,**

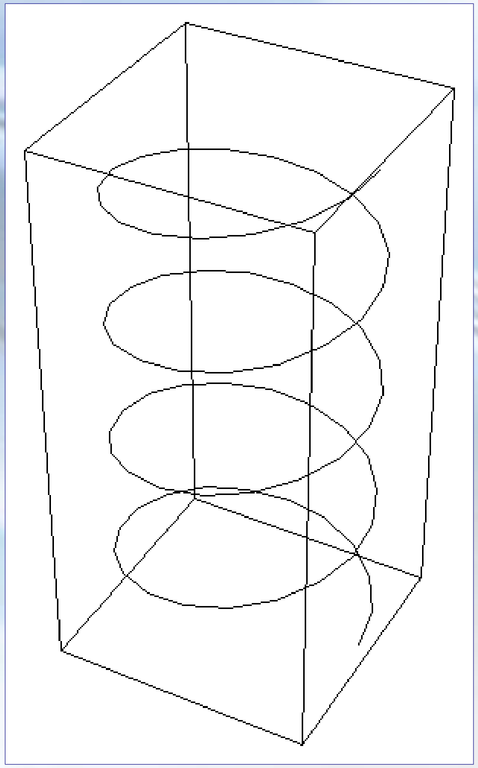
$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

xoz面上的**投影曲线,**

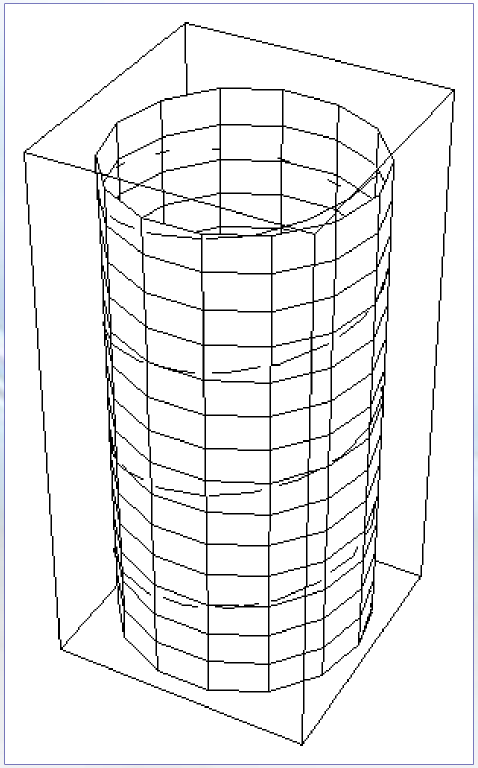
$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

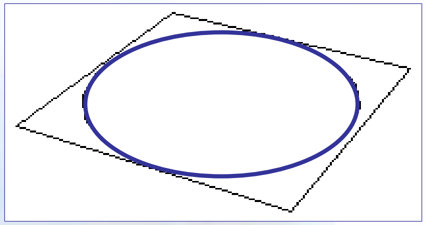
如图:投影曲线的研究过程.



空间曲线



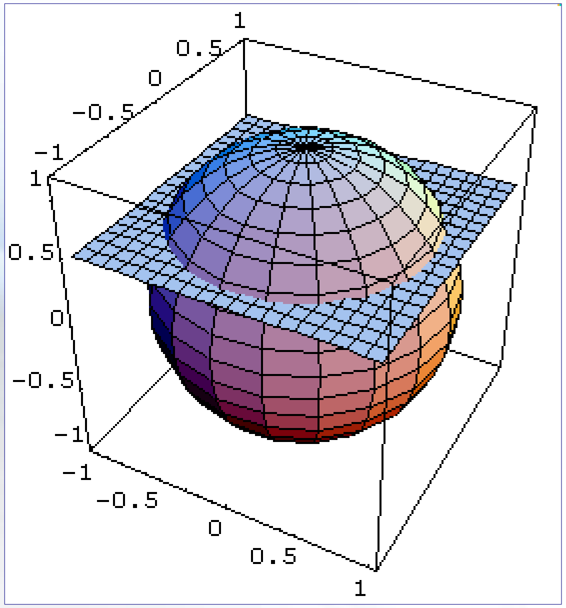
投影柱面



投影曲线

三、空间曲线在坐标面上的投影

例4 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.



解 （1）消去变量z后得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

（2）因为曲线在平面 $z=\frac{1}{2}$ 上，

所以在 xoz 面上的投影为线段.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x| \le \frac{\sqrt{3}}{2};$$

（3）同理在 yoz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \quad |y| \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

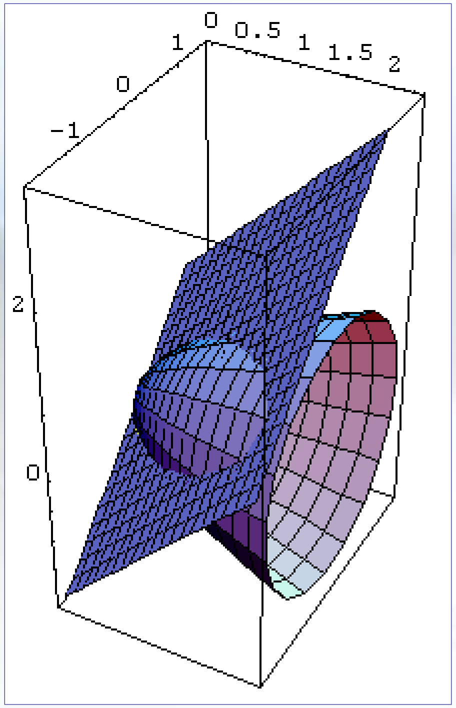
三、空间曲线在坐标面上的投影

例5 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 截线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

如图,



三、空间曲线在坐标面上的投影

（1）消去z得投影 $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$,

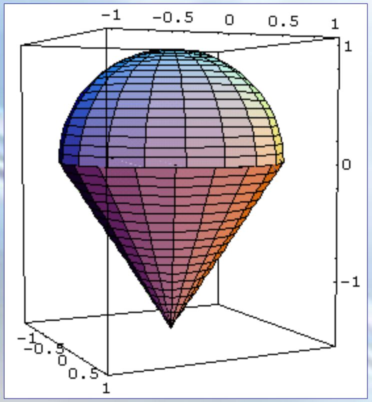
（2）消去y得投影 $\begin{cases} x^2 + 5z^2 - 2xz - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$,

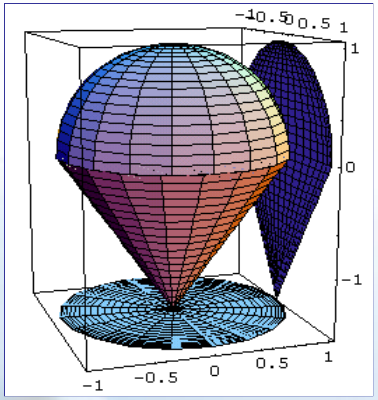
（3）消去x得投影 $\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

三、空间曲线在坐标面上的投影

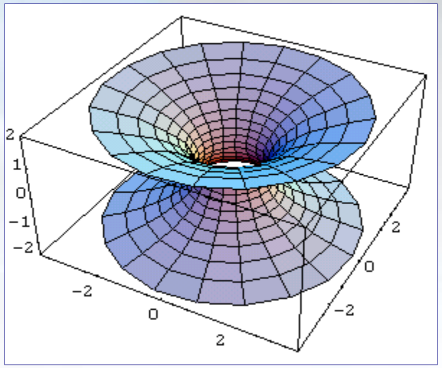
补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.

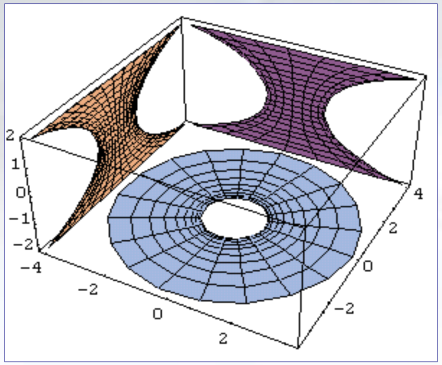
空间立体





曲面





例6 设一个立体,由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$,

三、空间曲线在坐标面上的投影

则交线 C 在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$ 一个圆,

$\therefore$ 所求立体在 xoy 面上的投影为

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

四、小结

空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影.

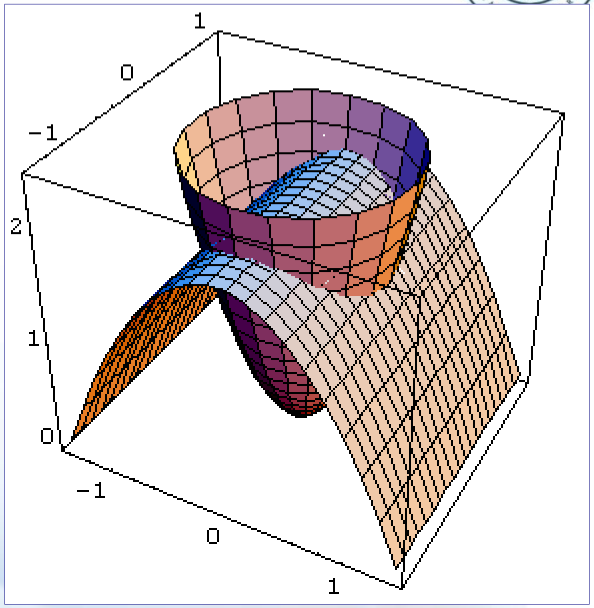
$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

思考题

求椭圆抛物面$2y^2+x^2=z$与抛物柱面$2-x^2=z$的交线关于xoy面的投影柱面和在xoy面上的投影曲线方程.

思考题解答

交线方程为 $\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases}$,



消去z得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.