北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

§3 无穷小和无穷大

无穷小

定义3.1 如果收敛数列$\{a_n\}$的极限为0,那么这个数列称为无穷小列, 简称无穷小.

例如

$$\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}(\alpha>0),\ \{q^n\}(|q|<1),\ \left\{\frac{n}{a^n}\right\}(a>1)\text{为无穷小.}$$

注意

无穷小描述的是一个变量的变化趋势，不能看成一个很小的数.

定理3.1

(1) $\{a_n\}$为无穷小的充要条件是$\{|a_n|\}$为无穷小;

(2) 两个无穷小之和(或差)仍是无穷小;

(3) 设$\{a_n\}$为无穷小,$\{c_n\}$为有界数列, 那么$\{c_n a_n\}$为无穷小;

(4) 设$0 \le a_n \le b_n, n \in N^*$,如果$\{b_n\}$为无穷小, 那么$\{a_n\}$也是无穷小;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小.

例1 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$

证 只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n} = 0.$

不妨假设$a=0$,则由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$可知,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,\text{当}n>N\text{时},|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\right|$$

$$\le \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} + \frac{|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|}{n}$$

$$\le \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

由于$\frac{1}{n}$是无穷小，所以$\exists N' > N$,当$n > N'$时，

$$\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

所以当$n > N'$时，

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

由极限定义$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0.$ 结论得证！

无穷大

定义3.2 若数列$\{a_n\}$满足：对$\forall\ M > 0$, 都$\exists N \in N^*$,

使得当$n > N$时, 有$|a_n| > M$, 则称$\{a_n\}$为无穷大.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

如果该数列从某一项开始都是正的(负的), 则称数列为正无穷大(负无穷大). 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

注意

∞只是记号，是一种变化趋势，不能认为是很大的数.

例2 设$a_n = n^2 - 3n - 5, n = 1,2,3,\cdots,$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

证 $a_n = n^2 - 3n - 5 > n^2 - 3n - 5n = n(n-8)$

当$n \geq 9$时， $a_n \geq n,$

故对任何正数M,取$N = \max\{9,[M]\},$

只要$n > N$,就有$a_n \geq n \geq [M]+1 > M.$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

性质3.1

(1) 如果$\{a_n\}$是无穷大, 那么$\{a_n\}$无界.

无界不一定是无穷大, 例如 $1,0,2,0,3,0,\cdots,n,0,\cdots$

(2) 任意无界数列都有无穷大的子列.

(3) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\,(-\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\,(-\infty)$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty\,(-\infty),\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty.$$

证 (2) 假设数列$\{a_n\}$无界，则对任意的整数M,

必存在无穷多个a_n满足$|a_n| > M$,否则与无界矛盾

令$M_1 = 1$,则存在n_1,使得$|a_{n_1}| > 1$;

令$M_2 = 2$,则存在$n_2 > n_1$，使得$|a_{n_2}| > 2$;

……

继续下去，就可以找到一数列$\{a_{n_k}\}$,满足$|a_{n_k}| > k$,

$\{a_{n_k}\}$即为$\{a_n\}$的无穷大子列.

性质3.2

已知$a_n \neq 0(n=1,2,\cdots)$,则$\{a_n\}$是无穷大的充要条件是$\{\frac{1}{a_n}\}$为无穷小.

例3 求下列极限：

（1） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

（2） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^8+3n^5+2}{n^9+10n^8+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^9}}{1+\frac{10}{n}+\frac{3}{n^8}}=0$$

（3） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+4n^4+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}}=\infty$$

规律： $$a_n=\frac{P_l(n)}{Q_m(n)}=\frac{a_l n^l+a_{l-1}n^{l-1}\cdots+a_0}{b_m n^m+b_{m-1}n^{m-1}\cdots+b_0}$$

无穷大量看高阶

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_l n^l}{b_m n^m}=\begin{cases}\dfrac{a_l}{b_m} & l=m\\ 0 & l<m\\ \infty & l>m\end{cases}$$

Stolz定理

定理3.2 (Stolz定理 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

设$\{b_n\}$严格递增，趋近于$+\infty$,

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A.$

（A可以为有限数，也可以是$+\infty$或$-\infty$）

证明 分三种情况进行讨论：

(1) 设 A 为有限数

$\forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当 $n > N$ 时，有 $A - \varepsilon < \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon,$

故

$$A - \varepsilon < \frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}} < A + \varepsilon,$$

……

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon.$$

从而有

$$A-\varepsilon \le \frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N+1}-a_N)}{(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_{N+1}-b_N)}$$

$$\le A+\varepsilon$$

则 $$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|=\left|\frac{a_n-a_N}{b_n}-A+\frac{a_N}{b_n}\right|=\left|\frac{b_n-b_N}{b_n}\cdot\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A+\frac{a_N}{b_n}\right|$$

$$=\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A-\frac{b_N}{b_n}\cdot\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}+\frac{a_N}{b_n}\right|$$

$$\le\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A\right|+\left|\frac{b_N}{b_n}\right|\cdot\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}\right|+\left|\frac{a_N}{b_n}\right|$$

$$< \varepsilon + \frac{|b_N|(|A|+1)+|a_N|}{|b_n|}$$

又b_n为正无穷大，存在正整数$N' > N$，$n > N'$时

$$\frac{|b_N|(|A|+1)+|a_N|}{|b_n|} < \varepsilon,$$

所以$n > N'$时

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

由极限定义即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A.$

(2) 设$A=+\infty$，则从某项起$\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>1,$

$$a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0$$

易知$\{a_n\}$严格增,也为正无穷大,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0,\ \text{从而}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

(3) 设$A=-\infty$，令$c_n=-a_n$，$\dfrac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\to+\infty$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=+\infty,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=-\infty.$$

注 逆命题不成立：

$$b_n = n, \quad a_n = \begin{cases} 2k, & n = 2k \\ 2k, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$n = 2k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k - 2k}{1} = 0,$$

$$n = 2k+1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1) - 2k}{1} = 2.$$

例4 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$

证 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\quad y_n = n,$

因为 $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \dfrac{a_n}{1} = a_n,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a.$

例5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\quad k\in N^*$

解 设 $x_n=1^k+2^k+\cdots+n^k,\quad y_n=n^{k+1},$

因为 $n^{k+1}-(n-1)^{k+1}$

$$=[n^k+n^{k-1}(n-1)+\cdots+n(n-1)^{k-1}+(n-1)^k]$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k+n^{k-1}(n-1)+\cdots+n(n-1)^{k-1}+(n-1)^k}=\frac{1}{k+1}.$$

例5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}\quad(a>1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{a^n-a^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)-(2n-3)}{a^{n-1}-a^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}(a-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(a-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}}=0$$

任意$k\in N^+,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$

定理3.3 $\frac{0}{0}$ 型Stolz定理

设$a_n \to 0,\ b_n \to 0\ (n \to \infty)$，且$\{b_n\}$严格单调，

若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A.$

证明：不妨设$\{b_n\}\downarrow 0.$

$\forall \varepsilon>0, \exists N \in N^+$, s. t. 则 $A-\varepsilon<\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}< A+\varepsilon.$

$\therefore (A-\varepsilon)(b_n - b_{n-1})>a_n - a_{n-1} > (A+\varepsilon)(b_n - b_{n-1}).$

$\forall m > n > N$，有$(A-\varepsilon)(b_m - b_n)>a_m - a_n > (A+\varepsilon)(b_m - b_n).$

则 $A-\varepsilon<\frac{a_m - a_n}{b_m - b_n}< A+\varepsilon.$ 固定n，令$m \to \infty$，

则 $A-\varepsilon \le \frac{0 - a_n}{0 - b_n} \le A+\varepsilon$，即$A-\varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le A+\varepsilon.$

作业

习题 2.3

2, 3(1) , 4, 7, 8, 10, 11(3), 12