第二节 矩阵消元法

1. 矩阵的初等行变换
2. 用矩阵的初等行变换解线性方程组
3. 线性方程组解的结构
4. 线性方程组解集合的初步讨论

一、矩阵的初等行变换

1、矩阵概念的引入

例 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ① \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 & ② \\ x_1 + x_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ② - 2\times ① \\ ③ - \frac{1}{2}① \end{array} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②' \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} & ③' \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{2}r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$③' - \frac{1}{8}②' \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①'' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②'' \\ -\frac{3}{8}x_3 = \frac{9}{4} & ③'' \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{1}{8}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

一、矩阵的初等行变换

1、矩阵概念的引入

⋮

$$\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\ r_1-3r_3}]{r_3\times(-\frac{8}{3})}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 0 & 19\\ 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 9\\ x_2 = -1\\ x_3 = -6\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+r_2\\ r_1\div 2}]{r_2\times(\frac{1}{4})}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{array}\right)$$

一、矩阵的初等行变换

1、矩阵概念的引入

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

我们知道它的解取决于它的系数

$$a_{ij}(i = 1, 2, \cdots m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

以及它的常数项 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 。

一、矩阵的初等行变换

1、矩阵概念的引入

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组可由这张表唯一确定，则对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

一、矩阵的初等行变换

2、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵.

a_{ij} 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列的元素，也称为矩阵的一个分量。

一、矩阵的初等行变换

2、矩阵的定义

通常用大写字母 A, B 等表示矩阵。上面的矩阵可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，无需指明元素时，也可以记做 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 。

若$m = n$，则称A为方阵；

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

对角阵

$$\boldsymbol{E}_n=\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

单位阵

一、矩阵的初等行变换

线性方程组的系数矩阵、增广矩阵

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数矩阵与增广矩阵分别为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} & \boldsymbol{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等行变换

定义 一个矩阵若满足下列条件，称其为**阶梯形矩阵**.

(1) 矩阵若有零行（即元素全为0的行），则零行一定全在矩阵的下方.

(2) 对于矩阵的每一个非零行，从左起第1个非零元素称为此行的**主元**. 矩阵下面行的主元所在列一定在上面行的主元所在列的右端.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等行变换

定义 一个阶梯形矩阵若满足下列条件，称其为**行最简形矩阵**

(1)主元都是1.

(2)每个主元所在的列中除主元外其它的元素都是0.

单位阵

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

一、矩阵的初等行变换

4、矩阵的初等行变换

线性方程组消元法,等同于增广矩阵经过初等行变换化为行最简形矩阵.

消元法: 线性方程组三种初等变换 $\leftrightarrow$ 增广矩阵的三种初等行变换.

(1) 互换两个方程 $\leftrightarrow$ 互换矩阵两行

(2) 用非零常数乘某方程 $\leftrightarrow$ 用非零数乘某行

(3)方程若干倍加于另一方程 $\leftrightarrow$ 用行若干倍加于另一行

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

例3　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

解　对系数矩阵 A 施行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

$$\xrightarrow[r_2 \div(-3)]{r_3 - r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

由此即得
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4, \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}).$$

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

例4　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解　对增广矩阵进行初等变换，

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

故方程组无解.

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

例5　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解　对增广矩阵进行初等变换

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

二、用矩阵的初等行变换解线性方程组

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故方程组有无穷多组解.

三、线性方程组解的形式的初步探讨

例6 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

解

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

三、线性方程组解的形式的初步探讨

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{记作}}{=\!=} \boldsymbol{H}_1$$

方程组有无穷多解

同解方程组为 $\begin{cases} x_1-2x_2-\dfrac{1}{2}x_4=\dfrac{3}{2} \\ x_3-\dfrac{1}{2}x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

三、线性方程组解的形式的初步探讨

移项得
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + 2x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

令
$$\begin{cases} x_2 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$
（k_1, k_2 为任意常数）

则有
$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + 2k_1 - \frac{1}{2}k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases}}$$

三、线性方程组解的形式的初步探讨

$$H_1 = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times(-2)]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

|| 记作 H_2

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_3 \\ x_4 = 1 + 2x_3 \end{cases}$

令 $\begin{cases} x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$ （k_1, k_2 为任意常数）

则有 $\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 + 2k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \\ x_4 = 1 + 2k_2 \end{cases}}$ （k_1, k_2 为任意常数）

三、线性方程组解的形式的初步探讨

$$\boldsymbol{H}_1=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cccc:c} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\overset{\text{记作}}{=\!=}H_3$$

同解方程组为
$$\begin{cases} x_2=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{4}x_4 \\ x_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

三、线性方程组解的形式的初步探讨

令 $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$ （k_1, k_2 为任意常数）

则有 $\boxed{\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{4}k_2 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases}}$ （k_1, k_2 为任意常数）

注意：1.三组解彼此等价；

2.每组解都有且只有两个自由未知量.

主观题 10分 设置

求解齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

三、线性方程组解的形式的初步探讨

解 对系数矩阵A进行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\ x_3=2x_4\end{cases}$

四、线性方程组解集合的初步讨论

1、线性方程组求解的一般过程

一般线性方程组情形： $Ax=b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

利用初等行变换把增广矩阵化为行最简形矩阵

四、线性方程组解集合的初步讨论

1、线性方程组求解的一般过程

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{（列交换）}]{\text{行变换}} \hat{\boldsymbol{H}}=\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行最简形

四、线性方程组解集合的初步讨论

2、解的讨论

$$\hat{H}=\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} & d_r \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

(1) $d_{r+1}\neq 0 \Leftrightarrow 0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=d_{r+1}\neq 0$, 矛盾

$\Leftrightarrow$ 方程组无解

四、线性方程组解集合的初步讨论

2、解的讨论

(2) $d_{r+1}=0 \Leftrightarrow$ 方程组有解

$$r=n \Leftrightarrow \hat{H}=\left[\begin{array}{c:c} E_r & d \\ O & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$ 方程组有唯一解，

且解 $x_i=d_i,\ i=1,2\ldots,\ n$

$$r<n \Leftrightarrow \hat{H}=\left[\begin{array}{cc:c} E_r & B & d \\ O & O & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$ 方程组有无穷多组解，且解为

$$\begin{cases} x_1=d_1-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{1,n}x_n \\ x_2=d_2-b_{2,r+1}x_{r+1}-b_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{2,n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=d_r-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{r,n}x_n \end{cases}$$

称 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 为自由未知量

四、线性方程组解集合的初步讨论

2、解的讨论

或参数形式

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1 - b_{1,r+1}k_1 - b_{1,r+2}k_2 - \cdots - b_{1,n}k_{n-r} \\
x_2 = d_2 - b_{2,r+1}k_1 - b_{2,r+2}k_2 - \cdots - b_{2,n}k_{n-r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = d_r - b_{r,r+1}k_1 - b_{r,r+2}k_2 - \cdots - b_{r,n}k_{n-r} \\
x_{r+1} = 0 + 1\ k_1 - 0\ k_2 - \cdots - 0\ k_{n-r} \\
x_{r+2} = 0 + 0\ k_1 - 1\ k_2 - \cdots - 0\ k_{n-r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = 0 + 0\ k_1 - 0\ k_2 - \cdots + 1\ k_{n-r}
\end{cases}
$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

思考题

1. $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

(1) $m>n$ 时，是否一定无解？为什么？

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & 1 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

(2) $m<n$ 时，是否一定有解？为什么？

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

思考题

2. $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(1) $m>n$ 时，是否只有零解？为什么？

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $m<n$ 时，是否一定有非零解？为什么？

$\because\quad r\le m<n$ 所以一定有非零解.

四、线性方程组解集合的初步讨论

例8

证明方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$
有解的充要条件是$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.$

在有解的情况下，求出它的一切解.

证　**对增广矩阵进行初等变换，**

四、线性方程组解集合的初步讨论

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \boldsymbol{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{a}_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \boldsymbol{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{5}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}} \end{pmatrix}$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$

由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$

由此得通解：设 $x_5 = c$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + c \\ x_3 = a_3 + a_4 + c \\ x_4 = a_4 + c \\ x_5 = c \end{cases}$$

$(c$为任意实数$).$

讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - px_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = t \end{cases}$$

(1) 当p,t取何值时,方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解的情况下,求出通解.

四、线性方程组解集合的初步讨论

解

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -p & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & t \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -p-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & t-1 \end{array}\right)$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{p}+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \boldsymbol{t}+5 \end{array}\right)$$

(1) 当$p \neq 2$时,方程组有唯一解;

(2) 当$p = 2$时,有

$$\hat{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \boldsymbol{t}+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{t}-1 \end{array}\right)$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

当$t \neq 1$时，方程组无解；

当$t = 1$时，方程组有无穷多解.

且

$$\hat{A} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

四、线性方程组解集合的初步讨论

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_4 = 2, \end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 - 2k \\ x_3 = k \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad (k \in R)$$

第三节 数环与数域

1. 数环
2. 数域

一、数环

定义 设S是复数集C的一个非空子集，如果对于S中任意两个数a, b 来说，$a+b, a-b, ab$ 都在S内，那么就称S是一个数环.

例1 取定一个整数a, 令 $S=\{na \mid n\in Z\}$那么S是一个数环.

事实上，S显然不是空集.

设 $n_1a, n_2a\in S$.那么

$$n_1a\pm n_2a=(n_1\pm n_2)a\in S,$$

$$(n_1a)(n_2a)=(n_1n_2a)a\in S.$$

取$a=2$，那么S就是全体偶数组成的数环称为偶数环.

一、数环

例2 令 $S=\{a+bi \mid a,b\in Z, i^2=-1\}$.

S显然不是空集.

设 $a+bi, c+di\in S$**,那么**

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in S$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc-ad)i\in S$$

所以S是数环.

二、数域

定义1 设P是由一些复数组成的集合，其中包括0与1，如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍是P中的数，则称P为一个**数域**.

常见数域： 复数域C；实数域R；有理数域Q；

（注意：自然数集N及整数集Z都不是数域．）

二、数域

说明：

1）若数集P中任意两个数作某一运算的结果仍在P中，则说数集P对这个运算是**封闭**的.

2）数域的等价定义：如果一个包含0，1在内的数集P对于加法，减法，乘法与除法（除数不为0）是封闭的，则称集P为一个数域.

二、数域

定义2　设F是一个数环，如果

① F至少含有一个不等于零的数；

② 如果 $a,b\in F,$ 且 $b\neq 0,$ 则 $\dfrac{a}{b}\in F$

那么就称F是一个数域.

二、数域

例3 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$，**则$F$是一个数域.**

易证，F是一个数环. 并且 $1=1+0\sqrt{2}\neq 0$，**所以①成立.**

可证：如果$c+d\sqrt{2}\neq 0$，那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$，

否则（1）当$d=0$ 的情形将得出$c=0$，

这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 矛盾；

（2）在 $d\neq 0$ 的情形将得出$\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}\in Q$

这与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾.

则$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F$$

这就证明了F是一个数域.