§3　集合的势与可数集

定义3. 1　　如果集合 A 与 B 间存在一一对应，则称 A 与 B 有相同的势，或称集合 A 与 B 势等价，记为 $A \sim B$. △

集合势等价的性质

自反性：　$A \sim A$

对称性：　如 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

传递性：　如 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

例1 证明：自然数集$\mathbb{N}$与正整数集$\mathbb{N}^*$势等价.

证明 可以构造$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}^*$上的一一对应$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$为

$f(i)=i+1,\ \forall i\in\mathbb{N}$. 因此$\mathbb{N}$与$\mathbb{N}^*$势等价.

例2 证明：自然数集$\mathbb{N}$与整数集$\mathbb{Z}$势等价.

证明 可以构造$\mathbb{N}$到$\mathbb{Z}$上的一一对应$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$为

$$f(n)=\begin{cases}-k, & n=2k\\ k, & n=2k-1\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

因此$\mathbb{N}$与$\mathbb{Z}$势等价.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

定理3.1　给定两个集合A,B,如果存在一个单射$f:A\to B$，也存在一个单射$g:B\to A$，则集合A与B势等价.

定义3.2 设$J_n=\{1,2,\ldots n\}$

1) 若存在$n\in \overset{N^*}{\mathbb{Z}^*}$, 使得 $A\sim J_n$, 则称 A 为有限集.

2) 若A不是有限集，则称 A 为无限集.

3) 若$A\sim \overset{N^*}{\mathbb{N}^*}$,则称 A 为可数集.

4) 有限集和可数集统称为至多可数集.

5) 不是有限集和可数集的集合称为不可数集.

集合

有限集

无限集

可数集

不可数集

至多可数集

定理3.2 可数集的任意无限子集是可数集.

A 可数. $B \subset A$ 无限 b_1 b_2 ....

定理3.3 $\forall n\in\mathbb{N}^*, E_n$ ——至多可数集列,

每个 E_n 至多可列

则 $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 至多可数.

(可数集的可列并是可数集)

-1 0 1 2

E_1 : e_{11} e_{12} $\cdots$ e_{1m} $\cdots$

E_2 : e_{21} e_{22} $\cdots$ e_{2m} $\cdots$

$\vdots$

E_n : e_{n1} e_{n2} $\cdots$ e_{nm} $\cdots$

例3 $\mathbb{R}$中全体有理数是可数的.

证明: $R=(-\infty,+\infty)=\bigcup_{n\in Z}(n,n+1]$ 只要证 $(0,1]$ 中有理数可数

例4 $[0, 1]$上的全体实数是不可数的.

$x\in(0,1]$ $x=\frac{q}{p}$

$p=1$: $\frac{1}{1}$ $q=1$

$p=2$: $\frac{1}{2}$ $q=1$

$p=3$: $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

$p=4$: $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

$p=5$: $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

证明将在第七章给出

有理数 不超过 $n-1$

§4 确界存在定理

例1 $A=\{x \mid x \ge 0\}$ 有最小数，无最大数

$B=\{x \mid -1 < x \le 0\}$ 有最大数，无最小数

$C=\{x \mid -1 < x < 1\}$ 无最大数，无最小数

定义 设S是一个非空数集，如果存在实数$M\,(m)$，使得对S中的任意元素x，都有$x \le M\,(x \ge m)$，则称S是一个有上界(下界)的集合，$M\,(m)$称为S的一个上界(下界).

如果S既有上界又有下界，则称S是有界集.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

取 $X=\max\{|M|,|m|\}$

$\forall x\in S\quad m\le x\le M \Rightarrow -X\le x\le X$

定理4.1 S是有界集当且仅当存在一个正数X,使得$|x|\le X$对所有$x\in S$成立.

$-X\le x\le X$

本书常用符号：$\forall$ 任取，$\exists$ 存在，$s.t.$ 使得

定义4.1 设S是一个非空有上界集合,如果存在一个实数β，满足：

(1) $\forall x\in S, x\le\beta$;

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists y_\varepsilon\in S, s.t.\ y_\varepsilon>\beta-\varepsilon$;

则称β为集合S的上确界，记为$\beta=\sup S$.

最小上界

β是S的上界

β是S的最小上界

y_ε $\beta-\varepsilon$ β

定义4.2 设S是一个非空有下界集合,如果存在一个实数α，满足：

y_ε

α 是下界　　最大下界　　$\alpha+\varepsilon$

$$(1)\forall x \in S, x \geq \alpha;$$

α 为最大下界

$$(2)\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in S, s.t.\ y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon;$$

则称α为集合S的下确界，记为$\alpha = \inf S$.

注 若S有最大数$\max S$,则$\max S = \sup S$;

若S有最小数$\min S$,则$\min S = \inf S$.

若S没有最大数$\max S$（或最小数$\min S$）,也有可能有上（下）确界.

例2 求$A=\{\frac{1}{n}|n=1,2,\cdots\}$和$B=(0,1)$的上下确界.

sup $A=1$ inf $A=0$ sup $B=1$ inf $B=0$

例3 设集合A,B是非空有界数集.记$A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$.证明：$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

$\beta<\beta'$

$y_\varepsilon \in A$ s.t. $y_\varepsilon>\beta$

β β'

证明: 设 $\beta_1=\sup A$ $\beta_2=\sup B$

$\forall x\in A$ 有 $x\le\beta_1$

且 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, x_\varepsilon\in A$ s.t. $x_\varepsilon>\beta_1-\varepsilon/2$

$\forall y\in B$ 有 $y\le\beta_2$

且 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, y_\varepsilon$ $y_\varepsilon>\beta_2-\varepsilon/2$

$\forall x\in A, y\in B$ 有 $x+y\le\beta_1+\beta_2$

且 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, x_\varepsilon+y_\varepsilon\in A+B$ s.t. $x_\varepsilon+y_\varepsilon>\beta_1+\beta_2-\varepsilon$

$\sup(A+B)=\beta_1+\beta_2=\sup A+\sup B$.

定理4.2

非空有上界的集合上确界(下确界)如果存在，则必唯一.

证明 我们只对上确界的情形进行证明

设β和β'是集合S的两个上确界. 由上确界定义. 任意$\varepsilon>0$, 都有$\beta'>\beta-\varepsilon$成立，因此$\beta'\ge\beta$. 类似可以得到$\beta\ge\beta'$，所以$\beta=\beta'$.这就证明了上确界是唯一的.

定理4.3（确界存在定理---实数连续性定理）

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

注 若集合A没有上界，则记为$\sup A=+\infty$;
若集合A没有下界，则记为$\inf A=-\infty$.

作 业

习题1.3
1.（2），（4）

习题1.4
2，3，5,