§6 上极限与下极限的概念及性质

定义6.1 对有界数列$\{a_n\}$，定义

$$\overline{a_n}=\sup_{k\geq n}\{a_k\}=\sup\left\{a_n,a_{n+1},\cdots\right\},$$

$$\underline{a_n}=\inf_{k\geq n}\{a_k\}=\inf\left\{a_n,a_{n+1},\cdots\right\},$$

$\{\overline{a_n}\},\{\underline{a_n}\}$分别称为$\{a_n\}$的上数列和下数列.

注 (1) $\{\overline{a_n}\},\{\underline{a_n}\}$未必是$\{a_n\}$的子列,$\underline{a_n}\leq a_n\leq\overline{a_n}$;

(2) $\{\overline{a_n}\}$单调递减,$\{\underline{a_n}\}$单调递增.

定义6.2 设$\{a_n\}$是有界数列，则

称$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n$为$\{a_n\}$的上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$；

称$\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n$为$\{a_n\}$的下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

注(1) 由$\underline{a}_n \le a_n \le \overline{a}_n$，立得$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

(2) 只要$\{a_n\}$有上界，就可以定义上数列$\{\overline{a}_n\}$，

上极限仍可以定义为$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n$(可能是$-\infty$).

若$\{a_n\}$没有上界，补充定义$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=+\infty$.

下极限也可以定义到一般的数列上.

例1 求数列$a_n=(-1)^n$的上下极限.

解 $\overline{a}_n=\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}=1,\ \underline{a}_n=\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\}=-1, n=1,2,\cdots$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-1.$$

例2 求数列$a_n=\cos\dfrac{2n\pi}{5}$的上下极限.

解 $\overline{a}_n=\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}=1, \underline{a}_n=\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\}=-\cos\dfrac{\pi}{5}, n=1,2,\cdots$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\cos\frac{\pi}{5}.$$

另一种形式定义 设$\{a_n\}$是一个数列，$R_\infty = R \cup \{+\infty, -\infty\}$

E为$\{a_n\}$中所有子列极限构成的集合：

$$E = \{l \in R_\infty : \exists a_{n_k}, a_{n_k} \to l (k \to \infty)\}$$

称E的上下确界$a^* = \sup E, a_* = \inf E$，为$\{a_n\}$的上、下极限，记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a^*; \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a_*$

注：上下极限总是存在的（包括$\pm\infty$）

定理6.1 设$\{a_n\}$是有界数列，则$\{a_n\}$收敛的充要条件为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

证 $\Rightarrow$(必要性) 设$\{a_n\}$收敛, 其极限为a,

则对$\forall\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时, $|a_n-a|<\varepsilon.$

从而$n>N$时, $a-\varepsilon\le\overline{a}_n\le\underline{a}_n\le a+\varepsilon$,

因此$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a.$

$\Leftarrow$(充分性) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$, 则由$\overline{a}_n\le a_n\le\underline{a}_n$

及夹逼定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n.$

定理6.2 设$\{a_n\},\{b_n\}$为有界数列，若$\exists N\in\mathbb{N}^*$，当$n>N$时，$a_n\le b_n$，则$\overline{a_n}\le\overline{b_n}$，$\underline{a_n}\le\underline{b_n}$.

推论1 设$\{a_n\},\{b_n\}$为有界数列，若$\exists N\in\mathbb{N}^*$，当$n>N$时，$a_n\le b_n$，则$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\le\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

推论2 设$\{a_n\},\{b_n\}$为有界数列，若$\exists m,M$及$N\in\mathbb{N}^*$，使得当$n>N$时，$m\le a_n\le M$，则

$$m\le\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\le M.$$

定理6.3 设$\{a_n\}$为有界数列，则

(1)若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n < M$, 则存在$N \in \mathbb{N}^*$,当$n > N$时, $a_n < M$;

(2)若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n > m$,则存在$N \in \mathbb{N}^*$,当$n > N$时, $a_n > m$.

上、下极限不满足四则运算法则，但是有稍弱的关系

定理6.5 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$为两个有界数列,则

$$(1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n;$$

$$(2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$