§4　单调数列的极限及其应用

单调有界定理

定义4.1（单调数列定义）若数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n \le a_{n+1}(a_n \ge a_{n+1}),n = 1,2,3,\cdots$$

则称$\{a_n\}$单调递增(递减).

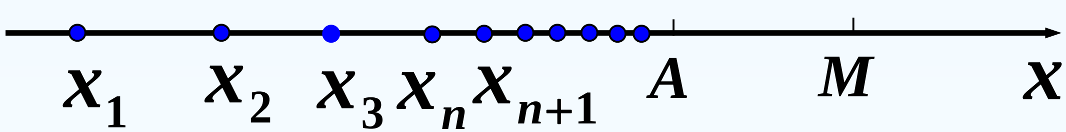
若数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n < a_{n+1}(a_n > a_{n+1}),n = 1,2,3,\cdots$$

则称$\{a_n\}$严格单调递增(严格单调递减).

定理4.1 单调有界数列必有极限.

几何解释:



证　设a_n单调递增有上界,

则由确界原理,$\{a_n\}$必存在上确界,记$\beta=\sup\{a_n\}$.

由上确界定义，$\forall\varepsilon>0,\exists N, a_N>\beta-\varepsilon$,

当$n>N$时,由单调性知,

$$a_n\ge a_N>\beta-\varepsilon,$$

又$a_n\le\beta<\beta+\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$.

单调递减有下界同样可证，结论成立！

例1 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1} > x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2 = 3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2 = 3+A$, 解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例2 求数列$\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$的极限, a为任意给定的实数.

解 令$x_n = \frac{|a|^n}{n!}$, $n \in N^*$. 则当$n \geq |a|$时,

$$x_{n+1} = x_n \frac{|a|}{n+1} \leq x_n.$$

因此$\{x_n\}$是从某一项开始递减的数列,且有下界0.

所以极限$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

在$x_{n+1} = x_n \frac{|a|}{n+1}$两边令$n \to \infty$, 得到$x = x \cdot 0 = 0$.

所以$\{x_n\}$为无穷小, 从而$\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$也是无穷小.

注：数列前面有限项的变化不会影响它的收敛性，所以我们可以将“从某一项开始为单调的数列”看作单调数列。

例3 设$x_1\in(0,1), x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

解 由数学归纳法易证,$x_n\in(0,1)$, $\forall n\in N^*$.且有

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$$

因此$\{x_n\}$单调递减有下界,从而收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限得$a=a(1-a)$,

解得$a=0$. 从而$\{\dfrac{1}{x_n}\}$单调递增趋于正无穷,由Stolz定理得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{1/x_n-1/x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}x_n}{x_{n-1}-x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2(1-x_{n-1})}{x_{n-1}-x_{n-1}(1-x_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2(1-x_{n-1})}{x_{n-1}^2}=1.$$

例4 研究下面两数列的极限

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

解 ① s_n显然单调递增，且

$$s_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k C_n^k = \left(\frac{1}{n}\right)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(2) 观察e_n和e_{n+1}易知$e_n < e_{n+1}$，即数列$\{e_n\}$递增.

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = s_n \le s\ .$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty} e_n = e$, 则 $e \le s$.

(3)　对$\forall n \ge m$,

$$e_n \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$$

固定m,令$n\to\infty$，得

$$e \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m$$

再令 $m\to\infty$ 得 $e\ge s$,　$\therefore e=s$

(4) 误差分析

$$0 < s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + (\frac{1}{n+1})^2 + \cdots + (\frac{1}{n+1})^{m-1}\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

令$m \to \infty, 0 < e - s_n \le \frac{1}{n!n}$. ---误差估计式.

取$n = 10$时, $\frac{1}{n!n} < 10^{-7}$.

$s_{10} = 2.7182818, \quad e \approx 2.7182818.$

⑸ e为无理数

证明：设$e=\dfrac{p}{q}$, $\because 2<e<3,\ \therefore q\geq 2.$

$$\because 0<e-s_q\leq\frac{1}{q!q},\quad \therefore 0<q!(e-s_q)\leq\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}.$$

但是

$$q!(e-s_q)=q!(\frac{p}{q}-s_q)=(q-1)!\,p-q!\,s_q$$

$$=(q-1)!\,p-q!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!})\ \text{为整数}$$

矛盾!

总结

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e\,;$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} e_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,.}$$

$e\approx 2.7182818$ ——自然对数之底.

例5 计算极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+n}{2+n})^n$.

解 (1) 设 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=e$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(1+\dfrac{1}{2n})^{2n}}=\sqrt{e}$.

$$(2)\lim_{n\to\infty}(\frac{1+n}{2+n})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\dfrac{2+n}{1+n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{1+n}}{(1+\dfrac{1}{1+n})^{n+1}}=\frac{1}{e}.$$

例6　设$k \in \mathbf{N}^*$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$.

证　设 $a_n = (1+\dfrac{k}{n})^n$,

(1)　$n = mk$时, $a_{mk} = (1+\dfrac{1}{m})^{mk}$.

考虑子列 $\{a_{mk}\}$, 可见

$$\lim_{m\to\infty} a_{mk} = \left[\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m\right]^k = e^k.$$

有子列$\to e^k$.

$$(2)\quad a_n = 1\cdot(1+\frac{k}{n})\cdots(1+\frac{k}{n}) \le \left[\frac{1+n(1+\frac{k}{n})}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$=(1+\frac{k}{n+1})^{n+1} = a_{n+1},\qquad \{a_n\}\text{是单增.}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{mk} = e^k.$$

——单调数列有子列收敛则收敛，

有子列发散则发散.

例7 设k为常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{k}{n})^n$.

证 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{n-k}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\dfrac{n}{n-k})^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{k}{n-k})^n}$$

令 $a_n=(1+\dfrac{k}{n-k})^n$, $m=n-k$,

取子列$\{a_m\}$, $a_m=(1+\dfrac{k}{m})^{m+k}$,

$$\lim_{m\to\infty}a_m=\lim_{m\to\infty}(1+\frac{k}{m})^{m+k}=\lim_{m\to\infty}(1+\frac{k}{m})^k\cdot\lim_{m\to\infty}(1+\frac{k}{m})^m=e^k$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=e^{-k}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}\right]^k=\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}\right]^k=e^k;$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{k}{n})^{-\frac{n}{k}}\right]^{-k}=\left[\lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^{-\frac{n}{k}}\right]^{-k}=e^{-k}.$$

推广： $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\Delta})^{\Delta}=e$，$\Delta\to\infty$视为整体.

凑

例8 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n^2})^{n^2+5}$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^5\cdot\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{n^2}{2}}\right]^2=e^2.$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+2n}{3+2n})^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{2n})^n}{(1+\frac{3}{2n})^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n\cdot\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n})^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2}}}=e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=e^{-1}.$$

例9　利用不等式$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$证明：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$$存在.

证　令$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n,$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0,$$　　单调递减

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$> \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0$$

所以$\{a_n\}$单调递减有下界，从而收敛.

注 $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma.$$

$\gamma = 0.5772156649$ 称为欧拉常数

说明 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\uparrow,\quad y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}\downarrow,$

$$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

取对数即可得 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

定理4.2

(1) 若单调数列的一个子列收敛，则这个数列收敛；

(2) 若单调数列的一个子列趋向 $\pm\infty$，则此数列趋向于 $\pm\infty$；

(3) 一个单调数列要么极限存在，要么趋向 $\pm\infty$；

(4) 单调数列收敛的充分必要条件是数列有界.

(1)若单调数列的一个子列收敛,则这个数列收敛；

证明 不妨设a_n单增，且有$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K, 有\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$$

$$取N = n_{K+1}, 对\forall n > N, 由单调性知，\exists n_k$$

$$a_{n_{K+1}} < a_n < a_{n_k}$$

$$即 -\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a < a_n - a < a_{n_k} - a < \varepsilon$$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

例10 (1)设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $n\in N^*$,求证$\{a_n\}$发散.

(2)设$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$, $n\in N^*$, $\alpha>1$,求证$\{a_n\}$收敛.

证明 (1) 数列若有无界子列则发散.

事实上，对$k\in N^*$,有

$$a_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}}_{k\text{个}}=1+\frac{k}{2},\ (k=0,1,\cdots)$$

可见$\{a_n\}$无界, 进而得$\{a_n\}$发散.

(2)$\{a_n\}$严格递增, 只须证有收敛子列即可由于

$$a_{2^k-1}=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\cdots+\frac{1}{15^\alpha}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)$$

$$\leq 1+\frac{2}{2^{\alpha}}+\frac{4}{4^{\alpha}}+\frac{8}{8^{\alpha}}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^{\alpha}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

表明$\{a_n\}$的子列$\{a_{2^k-1}\}$是有上界的,而由$\{a_n\}$递增,可知$\{a_{n_k}\}$也有上界.从而……

作业

习题 2.4

1, 3 , 4, 5, 7, 8(2)(3), 9(2), 10, 11