§5 实数连续性的基本定理

闭区间套定理

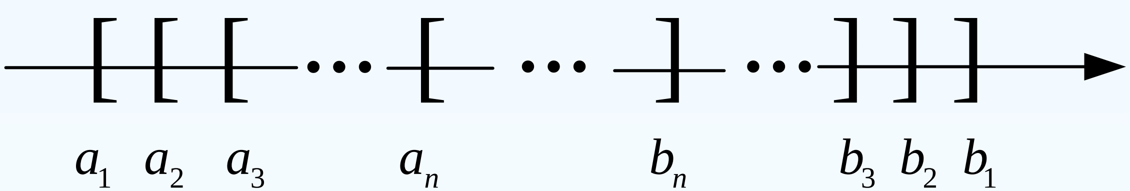
定理5.1 设$I_n=[a_n,b_n],n\in N^*$,为一列闭区间,满足

(1) $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$

(2)区间长度$|I_n|=b_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$,

则存在唯一一点ξ满足$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$,

即 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$



证　由区间的包含关系可知, 左端点组成的

数列$\{a_n\}$递增, 右端点组成的数列$\{b_n\}$递减.

并且$\{a_n\}$有上界b_1, $\{b_n\}$有下界a_1.

由单调有界定理知$\{a_n\}\{b_n\}$极限存在, 并设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

由$|I_n| = b_n - a_n \to 0 \ (n \to \infty)$可知, $a = b$.

记$a=b=\xi$，由单调数列收敛的性质，

可知$a_n \le \xi \le b_n$对$n\in \mathrm{N}^*$成立，即$\xi \in I_n (n\in \mathrm{N}^*)$.

由此得到：$a\in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.　a的唯一性易知.

注意： "闭"不可去.

例如 设区间$I_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right), n=1,2,3,\cdots$

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots,$$

$$|I_n|=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

但是交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n=\Phi.$

例1 $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2},$

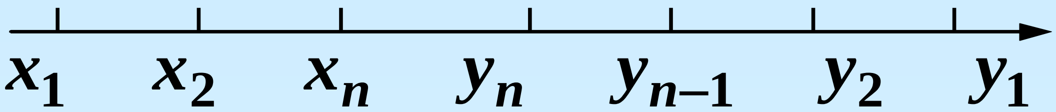
$x_1=a>0,\ y_1=b>0$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

证 (1) 首先：$x_{n+1}\le y_{n+1}$

(2) $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n y_n}-x_n\ge\sqrt{x_n^2}-x_n=0,\{x_n\}\uparrow$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n\le\frac{2y_n}{2}-y_n=0,\{y_n\}\downarrow$$



(3) $\quad y_{n+1}-x_{n+1}\le y_{n+1}-x_n$

$$=\frac{y_n-x_n}{2}=\frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{2^2}=\cdots=\frac{y_1-x_1}{2^n}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}-x_{n+1})=0,$ 即构成闭区间套

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n.$

例2 使用闭区间套定理证明[0, 1]是不可数集.

证 反证法

设[0,1]上全体实数为$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$

将[0,1]三等分,取不含x_1的区间为I_1,

再将I_1三等分，如此有$I_2, \cdots, I_n, \cdots$，并且$\{I_n\}$有性质：

"I_n不含有$x_1, x_2, \cdots, x_n$".

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x^*\}$存在唯一, $x^* \neq x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ 矛盾

注 "用Cantor三分法+闭区间套定理"

列紧性定理

定理5.2 任意有界数列都存在收敛的子列.

证明 (二分法)

设$\{x_n\}$满足$a \le x_n \le b$， 将区间$[a,b]$二等分,

选包含$\{x_n\}$的无穷多项的子区间为$[a_1,b_1]$,

$$|b_1 - a_1| = \frac{b-a}{2},$$

任取 $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$, 继续等分$[a_1,b_1]$,

记包含$\{x_n\}$的无穷多项的子区间为$[a_2,b_2]$,

则$|b_2-a_2|=\dfrac{b-a}{2^2}$， 取$x_{n_2}\in[a_2,b_2]$,且$n_2>n_1$.

……

$[a_{k-1},b_{k-1}]$二等分,记包含$\{x_n\}$的无穷多项子区间为$[a_k,b_k]$

则$|b_k-a_k|=\dfrac{b-a}{2^k}$， 取$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$,且$n_k>n_{k-1}$.

$\{[a_n,b_n],n=1,2,\cdots\}$构成闭区间套， 且$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$

由闭区间套定理和夹逼定理：

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}b_k=\xi.$$

柯西基本列

定义5.1对给定数列$\{a_n\}$, 如$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$,

s.t 当$m, n \in \mathbb{N}^*$且 $m, n > N$时，都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$,

则称$\{a_n\}$为基本列，也称Cauchy列.

或叙述为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{当} n > N \text{时}, \text{对一切} p \in \mathbb{N}^*, \text{有}$$

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

例3 求证$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$是基本列.

证明 由$0 < a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

所以对$\forall \varepsilon > 0$,取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,

则对$\forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}^*$，即有$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$.

例4 证明当$\alpha\le 1$时，

$$a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\text{不是基本列.}$$

证明 $\because a_{n+p}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}$

$$\ge\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\ge\frac{p}{n+p}$$

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对$\forall N\in\mathrm{N}^*,\exists n_0>N,\ p_0=n_0,$

使$\left|a_{n_0+p_0}-a_{n_0}\right|>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$ 所以不是基本列

柯西收敛准则

定理5.3 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$是基本列.

证明 $\Rightarrow$(必要性) 设$\{a_n\}$收敛于a, 则对

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathrm{N}^*,\ n > N, 有 |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

当$m,n > N$时,

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n|$$

$$\le |a_m - a| + |a_n - a|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore \{a_n\}$是基本列.

$\Leftarrow$（充分性） 设$\{a_n\}$是基本列,

（1）先证$\{a_n\}$有界

取$\varepsilon_0 = 1, \exists N \in \mathrm{N}^*, n > N$时,

$$|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon_0 = 1,$$

$$|a_n| \le |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}|$$

$$\le |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

取$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$,

则对$\forall n$,有$|a_n| \le M$.

(2) 由列紧性定理知$\{a_n\}$存在收敛子列$\{a_{n_k}\}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$,则$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathrm{N}^*$，当$k > N_1$时,

$$\left|a_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由$\{a_n\}$是基本列,$\exists N \in \mathrm{N}^*, m, n > N_2$时,

$$\left|a_m - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

取$k_0 > N = \max\left\{N_1, N_2\right\}$，则$n_{k_0} > N$, 当$n > N$时,

$$\left|a_n - a\right| = \left|a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - a\right| \le \left|a_n - a_{n_{k_0}}\right| + \left|a_{n_{k_0}} - a\right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

注：Cauchy收敛准则是判断数列收敛的重要方法

由例3：$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$收敛.

由例4：$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$当$\alpha \le 1$发散.

例5 设数列$\{a_n\}$满足：存在常数$c>0, 0<q<1$，使得

$$|a_{n+1}-a_n|\le cq^n (n=1,2,\cdots)$$

证明$\{a_n\}$为$Cauchy$列，从而该数列收敛.

证明

$$|a_{n+p}-a_n|\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$

$$\le cq^{n+p-1}+cq^{n+p-2}+\cdots+cq^n$$

$$\le cq^n(q^{p-1}+q^{p-2}+\cdots+1)=\frac{cq^n(1-q^p)}{1-q}\le\frac{cq^n}{1-q}$$

由$0<q<1$,可知$q^n\to 0(n\to\infty)$,从而对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$,

$$\text{s.t.}\forall n>N,\quad \frac{cq^n}{1-q}<\varepsilon.$$

所以当$n > N$时，对任意的$p > 0$，有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon,$$

这就证明了$\{a_n\}$为Cauchy列，从而收敛.

例6 证明数列$\{x_n\}$收敛，其中

$$x_n=\frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)},n\in\mathbb{N}^*,x\in\mathbb{R}$$

证明 $$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1)x)}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)(n+2+\sin(n+2)x)}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)}\right|$$

$$\leq\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

所以对$\forall \varepsilon > 0$,取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,

则对$\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^*$, 即有$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

所以$\{x_n\}$为*Cauchy*基本列，从而收敛.

有限覆盖定理

定义5.2 给定集合A,若有一族开区间$\{I_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$,

使$A\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$, 称这一族开区间覆盖了$A$.

或称开区间族$\{I_\lambda\}$是A的一个开覆盖.

$\{I_\lambda\}$是A的覆盖 $\Leftrightarrow\forall x\in A$, 总有一个开区间

$I_{\lambda_0}\in\{I_\lambda\}$, 使$x\in I_{\lambda_0}$.

如:$(0,\frac{2}{3}),(\frac{1}{2},\frac{3}{4}),(\frac{2}{3},\frac{4}{5}),\cdots,(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})$ 覆盖了$(0,1)$,

覆盖了$[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

定理5.4　(*Heine — Borel*定理)

若有限闭区间$[a,b]$被一族开区间$\{I_\lambda\}$覆盖，

则必可从中选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

证明　反证法

设$[a,b]$不能被$\{I_\lambda\}$中有限个开区间覆盖,

将$[a,b]$二等分，必有一个区间$[a_1,b_1]$不能

被有限覆盖.

$[a_1,b_1]$二等分,必有一个闭区间$[a_2,b_2]$不能被有限覆盖.

如此下去,得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$, 且其中每一个区间都不能被有限覆盖.

由闭区间套定理, 知 $\exists | \eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,

且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \eta$.

$\because \eta \in [a,b]$,

$\therefore$ 在$\{I_\lambda\}$中至少有一个(α,β)盖住η, $\alpha < \eta < \beta$.

由极限性质，$\exists N$，如$n > N$，必有

$$\alpha < a_n < \eta < b_n < \beta,$$

$[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$ 矛盾！

注意：区间的有限性、闭性不可少！

$\{(0, n)\}, n = 1, 2, \cdots$ 是 $(1, +\infty)$ 的开覆盖，

无有限覆盖.

$\{(\frac{1}{n}, 1)\}, n = 2, 3, \cdots$ 是 $(0, 1)$ 的开覆盖，

无有限覆盖.

小结

1、闭区间套定理

2、柯西基本列

3、列紧性定理

4、柯西基本定理

5、有限覆盖定理

作业

习题2.5

3, 4, 5, 7, 9