工科高等代数

一至四章

参考答案

答案仅供参考
如有发现任何错误，欢迎邮件联系 buaashie19@163.com

士谔书院学生会学习部资料组

习题 1.1

1.（1）解：设 4 次多项式$f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4$ 使

$$f(n)-f(n-1)=(a_1-a_2+a_3-a_4)+(2a_2-3a_3+4a_4)n \\ +(3a_3-a_4)n^2+4a_4n^3=n^3$$

则各项系数满足

$$\begin{cases} a_1-a_2+a_3+a_4=0; \\ 2a_2-3a_3+4a_4=0; \\ 3a_3-6a_4=0; \\ 4a_4=1. \end{cases}$$

解得

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=\left(0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4}\right);$$

即：$S_n=f(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$

（2）解：类似于（1），可得本问方程组的解为：

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)=\left(0,\ -\tfrac{1}{12},\ 0,\ \tfrac{5}{12},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6}\right);$$

即：$S_n=f(n)=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2.$

2.解：设$f(n)=ax^2+bx+c$,

则由表格可知：

$$\begin{cases} 4a+2b+c=7; \\ 9a+3b+c=16; \\ 16a+4b+c=29. \end{cases}$$

解得

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ -1,\ 1);$$

即： $f(x)=2x^2-x+1.$

3.（1）证明：$f(n)$各项系数 a,b,c 满足的充要条件为

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=y_1; \\ f(2)=4a+2b+c=y_2; \\ f(3)=9a+3b+c=y_3. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3; \\ b=-\frac{5}{2}y_1+4y_2-\frac{3}{2}y_3; \\ c=3y_1-3y_2+y_{3.} \end{cases}$$

则原命题成立。

（2）证明：如（1）中思路，得到方程组

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c + d = 1; \\ f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 2; \\ f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 3; \\ f(4) = 64a + 16b + 4c + d = y; \end{cases}$$

通过求解得，方程组有解；

综上，原命题得证。

4．解：（1） 有唯一解 $(1,0,0)$;

（2） 有唯一解 $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

5.解：方程组(U)为

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = -1 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$$

其解为$(-1,2,-1)$。

1.2

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$

2. ϕ

3. $y = f(x) = 2x^2 - x + 1$

4. (1) $y = \dfrac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$, $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{b_2a_1 - b_1a_2}$ ，不一定为整数

(2) 当 $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$ 时，由(1)得 $y = \pm(c_1a_2 - a_1c_2)$, $x = \pm(c_1b_2 - c_2b_1)$

a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2 为整数，故 x、y 为整数

1.3.1 (题目有改动)

a, b取什么值时,下面的方程组有解,并求出其解:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+ax_3+x_4-3x_5=4 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=3 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=-3 \\ x_3+x_4+bx_5=1 \end{cases}$$

解: 设 $A=\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & a & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & a & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_3-3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & a-4 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+r_2]{r_4-5r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & a-4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_5-r_4]{r_4\times(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & a-4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right) = A'$

当 $b=0$ 时,矛盾,无解.

$\therefore b\neq 0$

$\therefore A' \xrightarrow{r_5\times\frac{1}{b}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & a-4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+3r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right) = A''$

当 $a-1=0$, 即 $a=1$ 时,矛盾,无解

$\therefore a\neq 1$

$\therefore A'' \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\times\frac{1}{a-1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & \cancel{a-4}\,1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-(2r_3+2r_4+6r_5)]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3-\frac{6}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1+5r_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\frac{5}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3-\frac{6}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right)$

综上当 $a\neq 1$, $b\neq 0$ 时方程有解,且有唯一解:

$$X=\left(3+\frac{5}{b} \quad -3-\frac{6}{b} \quad \frac{1}{a-1} \quad \frac{1}{1-a} \quad \frac{1}{b}\right)^T$$

1.3.2 讨论当λ取什么值时下面的方程组有解：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当方程组有解时求出解来，并讨论λ取什么值时方程组有唯一解，什么时候有无穷解。

解：设 $M=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+(r_2+r_3)}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda^2+\lambda+1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)$

当$\lambda=-2$时，第一组方程为$0=3$矛盾，原方程组无解。

当$\lambda\neq-2$时，

$$M\xrightarrow[\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}]{\frac{1}{\lambda+2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2}\\ 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{\lambda+2}\end{array}\right)$$

当$\lambda=1$时，方程组简化为$x_1+x_2+x_3=1$，通解为：

$$X=t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad t_1,t_2\in F.$$

当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，

$$M\xrightarrow[r_3\cdot\frac{1}{\lambda-1}]{r_2\cdot\frac{1}{\lambda-1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-(r_2+r_3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ \frac{1}{\lambda+2}\\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{pmatrix}$$

1.3.3 不解方程组，判断下面的方程组是否有非零解.

(1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=0 & ① \\ 2x+y+5z=0 & ② \\ 3x+2y+6z=0 & ③ \end{cases}$

解: (1) 观察 有未知量个数为3，方程个数为2.

$3>2$，故该方程组有非0解.

(2) 观察，有方程 ①+② 为 $3x+2y+6z=0$ 与方程 ③ 相同

故其与(1)方程组同解.

∴ 该方程组有非0解.

1. 解：

此时有： $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

化简得： $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases}$$

2. 解：

此时有： $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,3,8)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,7,26)$

依此有线性方程组： $$\begin{cases} x + 3y + 7z = 0 \\ 2x + 8y + 26z = 0 \end{cases}$$

化简得： $$\begin{cases} x = 11k \\ y = -6k \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

故该线性方程组有无穷多解，说明 A, B, C, D 四点共面.

3. 解：

〈Ⅰ〉令 $\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{OB} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{OC} = (1,4,9)$ ，则有：

$$\mathrm{x}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mathrm{y}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mathrm{z}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \mathbf{0}$$

原方程组的解为： $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

故该方程组只有零解.

〈Ⅱ〉设 $\exists \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$, 使得 $\mathrm{k}_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mathrm{k}_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mathrm{k}_3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ ，

则有： $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{k}_1 \\ \mathrm{k}_2 \\ \mathrm{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{k}_1 \\ \mathrm{k}_2 \\ \mathrm{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

（此处以“*”表示我们不关心的量）

故 $\exists \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$, 使得 $\mathrm{k}_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mathrm{k}_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mathrm{k}_3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$,

∴空间中任意一个向量 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 均可写成 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 的线性组合. 以OA, OB, OC为棱构成的平行六面体的代数体积为：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

习题 2.2

1. 判断 R^3 中的下述向量是线性相关还是线性无关：

（1）$\alpha_1 \quad (1,1,1,), \alpha_2 \quad (1,2,3,), \alpha_3 \quad (1,4,9);$

（2）$\alpha_1 \quad (1,1,1,), \alpha_2 \quad (1,2,3,), \alpha_3 \quad (1,4,9)$，$\alpha_4 \quad (1,8,27);$

解：（1）向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关⇔方程组 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \quad 0$ 有非零解（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$）。

此方程组即：$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

其系数矩阵 A 的各列就是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 写成的列向量。通过初等行变换将 A 化为阶梯形：

$A \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&5\end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)+(3)} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ 所代表的齐次线性方程组：$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad 0\\ \quad \lambda_2 + 3\lambda_3 \quad 0\\ \quad\quad 2\lambda_3 \quad 0\end{cases}$ 只有一组唯一解（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$）$\quad (0 \quad 0 \quad 0)$。说明向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

（2）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关⇔方程组 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4 \quad 0$ 有非零解。此方程即：

$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

由 3 个方程组成，含 4 个未知数。未知数个数>方程个数，样 的齐次线性方程组一定有非零解（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$）。说明这 4 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。

2. 判断 R^4 中的下述向量是线性相关还是线性无关：

（1）$\alpha_1 \quad (2,0,-1,2), \alpha_2 \quad (0,-2,1,-3), \alpha_3 \quad (3,-1,2,1), \alpha_4 \quad (-2,4,-7,5);$

（2）$\alpha_1 \quad (-1,1,0,0), \alpha_2 \quad (0,1,-1,0), \alpha_3 \quad (0,0,1,-1), \alpha_4 \quad (-1,0,0,1).$

解：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关⇔方程组 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4 \quad 0$ 有非零解。此方程即：$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}-2\\4\\-7\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$；

当（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$） $(-2,1,2,1)$ 时，方程成立，即方程有非零解。说明这 4 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

（2）1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关⇔方程组 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4 \quad 0$ 有非零解。此方程即：$\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$；

当（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$） $(-1,-1,1,1)$ 时，方程成立，即方程有非零解。说明这 4 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

3. 设在三维几何空间中建立了直角坐标系，判断如下四点是否共面：

（1）A=(1, 1, 1), B=(1, 2, 3), C=(1, 4, 9), D=(1, 8, 27)；

（2）A=(1, 1, 1), B=(1, 2, 3), C=(2, 5, 8), D=(3, 7, 15).

解：只需判断 $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 是否线性相关。

（1）$\beta_1 \quad \overrightarrow{AB} \quad (0,1,2),\ \beta_2 \quad \overrightarrow{AC} \quad (0,3,8),\beta_3 \quad \overrightarrow{AD} \quad (0,7,26)$

方程组 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3 \quad 0$ 的系数矩阵：

$A \quad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&7\\2&8&26\end{pmatrix}$ 第一行全为 0，所代表的的方程 0=0 可以从方程组中删去，只剩下两个方程，却有三个未知数，肯定有非零解，说明向量 $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面。四点 A, B, C, D 共面。

（2）$\beta_1 \quad \overrightarrow{AB} \quad (0,1,2),\ \beta_2 \quad \overrightarrow{AC} \quad (1,4,7),\beta_3 \quad \overrightarrow{AD} \quad (2,6,14)$。经计算知，方程组 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3 \quad 0$ 只有零解。四点 A, B, C, D 不共面。

4. 设复数域上的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，λ 取什么负数值时，向量 $\alpha_1-\lambda\alpha_2$，$\alpha_2-\lambda\alpha_3$，⋯，$\alpha_{n-1}-\lambda\alpha_n$，$\alpha_n-\lambda\alpha_1$线性无关？

解：方程组 $x_1\left(\alpha_1-\lambda\alpha_2\right)+x_2\left(\alpha_2-\lambda\alpha_3\right)+\cdots+x_n\left(\alpha_n-\lambda\alpha_1\right) \quad 0$ （1）

经整理得 $\left(x_1-\lambda x_n\right)\alpha_1+\left(x_2-\lambda x_1\right)\alpha_2+\cdots+\left(x_n-\lambda x_1\right)\alpha_n \quad 0$ （2）

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，方程组（2）等价于 $x_1-\lambda x_n \quad x_2-\lambda x_1 \quad \cdots \quad x_n-\lambda x_1 \quad 0$

即 $x_1 \quad \lambda x_n, x_i \quad \lambda x_{i-1}\left(\forall 2\le i\le n\right)$ 也就是 $x_1 \quad \lambda^n x_1, x_i \quad \lambda^{i-1}x_1(\forall 2\le i\le n)$

当 $\lambda^n\ne 1$ 时，$x_1 \quad \lambda^n x_1$ 迫使 $x_1 \quad 0$，从而所有的 $x_i \quad 0$，方程组（1）只有零解，所说向量组线性无关。

当 $\lambda^n \quad 1$ 时，取 $x_1 \quad 1$ 可得到方程组（1）的非零解 $\left(1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}\right)$，所说向量组线性相关。

1.解:

(1)令 T=$(\alpha_1{}^T, \alpha_2{}^T, \alpha_3{}^T)$=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & -3 & 13\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，其不是$R^3$的基。

(2)令 T=$(\alpha_1{}^T, \alpha_2{}^T, \alpha_3{}^T)$=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 且易知$R^3$中的任意一个向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 即其是$R^3$的基。

(3)令 T=$(\alpha_1{}^T, \alpha_2{}^T, \alpha_3{}^T)$=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 且易知$R^3$中的任意一个向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 即其是$R^3$的基。

2.解:

(1)$\because \beta_3 = 4\beta_1 - 3\beta_2$

$\therefore \beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关，即其不是$R^3$的基。

(2) $\because \beta_2 = \beta_1 + 2\beta_3$

$\therefore \beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关，即其不是$R^3$的基。

(3)

令$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$=(x, y, z)

即$(k_1 + 2k_2 + 4k_3)\alpha_1$+$(k_1 - k_2 + k_3)\alpha_2$+$(k_1 + 3k_2 + 9k_3)\alpha_3$=(x, y, z)

令$\begin{cases}k_1 + 2k_2 + 4k_3 = b_1\\ k_1 - k_2 + k_3 = b_2\\ k_1 + 3k_2 + 9k_3 = b_3\end{cases}$ 因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一组基，所以必定存在一组合理的$b_1, b_2, b_3$满足题意。

由 1.(2),易知，该方程有解。

所以，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$R^3$的一组基。

3.解:

(1)该方程组系数矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & -3 & 13\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 所以对任意$b_1, b_2, b_3$该方程组均无唯一解。

(1)该方程组系数矩阵为$\begin{pmatrix}b_1 & 1 & 1\\ b_1 & 0 & 5\\ -3 & 0 & 13\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-3 & 0 & 13\\ 0 & 1 & 1 + \frac{13}{3}b_1\\ 0 & 0 & 5 + \frac{13}{3}b_2\end{pmatrix}$。

要想满足题意，只需$5 + \frac{13}{3}b_2 \neq 0$也即$b_2 \neq -\frac{15}{13}$时有唯一解。

4.解:

原方程即$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$

所以，其系数矩阵 A 为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 13\end{pmatrix}$。

5.解:

(1) b_1=Ab=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b_2=Ab_1=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b_3=Ab_2=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(2)

AX=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\0\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

即$\begin{cases}x_2=1\\x_3=0\end{cases}$ 所以，通解 X 为$\begin{pmatrix}x_1\\1\\0\end{pmatrix}$其中$x_1\in F$。

习题2.4

1、R^3中的向量$\alpha_1=(3,1,0)$ $\alpha_2=(6,3,2)$ $\alpha_3=(1,3,5)$组成向量组S.

(1) 证明S是R^3的基.

$A=\begin{pmatrix}3&6&1\\1&3&3\\0&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&1\\0&2&5\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可得 向量组S $\cancel{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 的秩$r=3$.

在R^3中，$r=n$，故S是R^3的基.

(2) 求向量$\beta=(2,-1,2)$在基S下的坐标

$A=\begin{pmatrix}3&6&1&2\\1&3&3&-1\\0&2&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\0&2&5&2\\0&0&1&-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-76\\0&1&0&41\\0&0&1&-16\end{pmatrix}$，故$\beta$在基S下的坐标$(-76,41,-16)$

(3) 求自然基向量$\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$在基S下的坐标

$A=\begin{pmatrix}3&6&1&1&0&0\\1&3&3&0&1&0\\0&2&5&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&0&1&0\\0&2&5&0&0&1\\0&0&1&-2&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-9&28&-15\\0&1&0&5&-15&8\\0&0&1&-2&6&-3\end{pmatrix}$

在基S下的坐标 $\varepsilon_1=(-9,5,-2)$ $\varepsilon_2=(28,-15,6)$ $\varepsilon_3=(-15,8,-3)$

2. $\alpha_1=(3,1,0)$ $\alpha_2=(6,3,2)$ $\alpha_3=(1,3,5)$组成R^3的一组基S

(1) 求S到R^3的自然基过渡矩阵

自然基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$

$A=\begin{pmatrix}3&6&1&1&0&0\\1&3&3&0&1&0\\0&2&5&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-9&28&-15\\0&1&0&5&-15&8\\0&0&1&-2&6&-3\end{pmatrix}$ 得过渡矩阵 $C=\begin{pmatrix}-9&28&-15\\5&-15&8\\-2&6&-3\end{pmatrix}$

(2) 写出R^3中任意向量(x,y,z)在基S下的坐标

$A=\begin{pmatrix}3&6&1&x\\1&3&3&y\\0&2&5&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-9x+28y-15z\\0&1&0&8z-15y+5x\\0&0&1&6y-2x-3z\end{pmatrix}$ 坐标为$(-9x+28y-15z,5x-15y+8z,-2x+6y-3z)$

习题2.4 3. $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&-1&1&0&0&0&1&0\\ 1&-1&-1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&-1&1&0&-1&0&1&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&-2&1&1&0\\ 0&0&-1&1&-2&1&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&-2&1&1&0\\ 0&0&0&1&-4&2&1&1 \end{array}\right)$

$\therefore$ 过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ -2&1&1&0\\ -4&2&1&1 \end{pmatrix}$

4. 自然基 $\varepsilon_1=(1,0)$ $\varepsilon_2=(0,1)$，将其分别逆时针旋转α角后得 $\varepsilon_1'=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\varepsilon_2'=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$

设 $P(x,y)$ 为 $x^2+6xy+5y^2=1$ 的图像上的一点，设P在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2'$ 下的坐标为 (x',y')

则 $\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ 代入方程得

$x'^2(5\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha)+y'^2(\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha)+x'y'(8\sin\alpha\cos\alpha-6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha)=1$

令 $8\sin\alpha\cos\alpha-6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha=0 \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{3}{2}$

选 2α 在第二象限 则 $\sin 2\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ， $\cos 2\alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}}$

则 $5\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha = 1+2\times(1-\cos 2\alpha)+3\sin 2\alpha = 3+\sqrt{13}$

$\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha = 1+2\times(1+\cos 2\alpha)-3\sin 2\alpha = 3-\sqrt{13}$

$\therefore$ 得 $(3+\sqrt{13})\cdot x'^2 + (3-\sqrt{13})y'^2=1$ $\therefore$ 图象为椭圆.

习题 2.5

1. 求由以下每个小题中的向量组成的向量组的秩，并求出一个极大线性无关组

(1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$， $\alpha_2=(1,0,2,3,4)$， $\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$， $\alpha_4\ (7,1,0,-1,3)$；

(2) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$， $\alpha_2\ (0,3,1,2)$， $\alpha_3=(3,0,7,14)$， $\alpha_4=(1,-1,2,0)$， $\alpha_5\ (2,1,5,6)$；

(1) 解：将 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$通过初等行变换化成最简阶梯形矩阵Λ

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & 4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \to \Lambda \ \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 40 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 rank(A) 4，且易知$\Lambda=(b_1, b_2, b_3, b_4)$中的 b_1, b_2, b_3, b_4 组成Λ的列向量组的极大线性无关组，所以α_1，α_2，α_3，α_4组成一个极大线性无关组

(2) 解：将 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T)$通过初等行变换化成最简阶梯形矩阵Λ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \Lambda \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 rank(A)=3，且易知$\Lambda=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$中的 b_1, b_3, b_5 组成Λ的列向量组的极大线性无关组，所以α_1，α_3，α_5

组成一个极大线性无关组

2. 设 α_1 (0, 1, 2, 3)， α_2=(1, 2, 3, 4)， α_3 (3, 4, 5, 6)， α_4=(4, 3, 2, 1)，α_5=(6, 5, 4, 3). 将 α_1, α_2 扩充成$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_5\}$的一个极大线性无关组

解：将 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T)$通过初等行变换化成最简阶梯形矩阵Λ

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \Lambda \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 rank(A)=2，且易知 $\Lambda=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$中的 b_1, b_2组成Λ的列向量组的极大线性无关组，所以 α_1, α_2 组成$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_5\}$的一个极大线性无关组

3. 求下列矩阵的秩. 并求出它们的行向量组和列向量组的一个极大线性无关组.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 解：将 A 通过初等行变换化成最简阶梯型矩阵Λ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \Lambda \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 rank(A)=2，所以易知(2,-1,-1)和(0,1,-1)组成行向量组的一个极大线性无关组，(2,0,0)和(-1，-1,0)组成列向量组的一个极大线性无关组

(2) 解：将 A 通过初等行变换化成最简阶梯型矩阵Λ

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow \Lambda\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

则 rank(A) 3，所以易知(1,1,1,1,1),(0,1,2,3,4)和(0,0,0,-1,1)组成行向量组的一个极大线性无关组，(1,0,0),(1,2,0)和(1,4,1)组成列向量组的一个极大线性无关组

4. 设复数域上线性空间 V 中的向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关.对复数λ的不同值，判断向量组$S=\{\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1\}$是否线性无关，并求 S 的秩.

解:

$S=(\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$

$$其中\ P=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&\lambda\\\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&\lambda&1\end{pmatrix}$$

由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以 rank(S)=rank(P).

将矩阵按第 n 列展开易知其行列式的值$|P|=1+(-1)^{1+n}\lambda^n$

所以，当$|P|\neq 0$,即$\lambda^n\neq(-1)^n$时,rank(P)=n,此时向量组 S 线性无关，rank(S)=rank(P)=n.

当$|P|=0$,即$\lambda^n=(-1)^n$时,rank(P)<n,又因为易知 det(P)中含有非零的 n-1 阶子式，所以 rank(P) $\geqslant$n-1.故 rank(P) n-1.

此时向量组 S 线性无关,rank(S)=rank(P)=n-1

习题 2.6

1、 求由以下每个小题中的向量生成的子空间的维数，并求出一组基

(1) $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2), \alpha_2 = (1, 0, 2, 3, 4), \alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22), \alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3)$;

解：记矩阵 $A = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T]$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & 4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{6(4)+(1) \\ 3(5)-(1)}]{\substack{3(2)-2(1) \\ \frac{1}{2}[6(3)-(1)]}} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 11 & -55 & -7 \\ 0 & 19 & -95 & 1 \\ 0 & 11 & 65 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(3)+11(2) \\ (4)+19(2) \\ (5)+11(2)}} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -73 \\ 0 & 0 & 0 & 113 \\ 0 & 0 & 120 & -64 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-(2) \\ \frac{1}{8}(5)}} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易得，$rank(A) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是其极大线性无关组。

因此，$dim(W) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是该子空间的一组基。

(2) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$.

解：记矩阵 $A = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+(1) \\ (3)-2(1) \\ (4)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}[(2)-(3)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易得，$rank(A) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是其极大线性无关组。

因此，$dim(W) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是该子空间的一组基。

2、 列方程的 解集合 W 是否是 R^4的子空间：

（1） $x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 4x_4$;

解：任取 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$,

则有 $a_1 + 2a_2 = 3a_3 + 4a_4$， $b_1 + 2b_2 = 3b_3 + 4b_4$,

讨论 A + B, $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$，显然 $a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2) = 3(a_3 + b_3) + 4(a_4 + b_4)$，即 $A + B \in W$;

讨论λA ($\lambda \in R$)，$\lambda a_1 + 2\lambda a_2 = 3\lambda a_3 + 4\lambda a_4$，即$\lambda A \in W$.

综上所述，W 对加法和数乘运算封闭，是 R^4的子空间.

（2） $x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 4 - x_4$;

解：任取 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$,

则有 $a_1 + 2a_2 = 3a_3 + 4 - a_4$， $b_1 + 2b_2 = 3b_3 + 4 - b_4$,

讨论 A + B, $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$，得 $a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2) = 3(a_3 + b_3) + 8 - (a_4 + b_4)$，即 $A + B \notin W$;

W 对加法运算不封闭，不是 R4 的子空间.

（3） $(x_1 + 2x_2)^2 = (3x_3 + 4x_4)^2$;

解：任取 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$,

则有 $(a_1 + 2a_2)^2 = (3a_3 + 4a_4)^2$，$(b_1 + 2b_2)^2 = (3b_3 + 4b_4)^2$,

利用平方差公式得 $(a_1 + 2a_2 - 3a_3 - 4a_4)(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) = 0$,

$(b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 4b_4)(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4) = 0$;

讨论 A + B, $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$,

$(a_1 + b_1 + 2a_2 + 2b_2)^2 - (3a_3 + 3b_3 + 4a_4 + 4b_4)^2$

$= (a_1 + b_1 + 2a_2 + 2b_2 + 3a_3 + 3b_3 + 4a_4 + 4b_4)(a_1 + b_1 + 2a_2 + 2b_2 - 3a_3 - 3b_3 - 4a_4 - 4b_4)$

$= [(a_1 + 2a_2 - 3a_3 - 4a_4) + (b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 4b_4)][(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + (b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4)]$

$= (a_1 + 2a_2 - 3a_3 - 4a_4)(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + (a_1 + 2a_2 - 3a_3 - 4a_4)(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4) + (b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 4b_4)(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + (b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 4b_4)(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4)$

$= 0 + (a_1 + 2a_2 - 3a_3 - 4a_4)(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4) + (b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 4b_4)(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + 0$

$\neq 0$,

即 $(a_1 + b_1 + 2a_2 + 2b_2)^2 \neq (3a_3 + 3b_3 + 4a_4 + 4b_4)^2$,

W 对加法运算不封闭，不是 R4 的子空间.

（4） $(x_1 + 2x_2)^2 + (3x_3 + 4x_4)^2 = 0$;

解：任取 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$,

则有 $(a_1 + 2a_2)^2 + (3a_3 + 4a_4)^2 = 0$，$(b_1 + 2b_2)^2 + (3b_3 + 4b_4)^2 = 0$,

讨论 A + B, $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$，显然 $a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2) = 3(a_3 + b_3) + 4(a_4 + b_4)$，即 $A + B \in W$;

讨论λA ($\lambda \in R$), $(\lambda a_1 + 2\lambda a_2)^2 + (3\lambda a_3 + 4\lambda a_4)^2$

$= \lambda^2(a_1 + 2a_2)^2 + \lambda^2(3a_3 + 4a_4)^2 = 0$，即$\lambda A \in W$.

综上所述，W 对加法和数乘运算封闭，是 R^4的子空间.

3、 求下列每个齐次线性方程组的一个基础解系，并用它表出全部解.

$$(1)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$$

解：化为系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$ （t_1，t_2，$t_3 \in R$）

即 基础解系$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2)$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0,\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0,\\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0,\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0, \end{cases}$

解：化为系数矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\1&-2&3&-4&2\\-1&3&-5&7&-4\\1&2&-1&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\0&3&-2&5&-6\\0&4&-4&8&-8\\0&1&-2&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\0&1&-1&2&-2\\0&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\0&1&-1&2&-2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}t_2$ （t_1，$t_2\in R$）

即 基础解系$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

4、已知 F^5中向量

$x_1=(1, 2, 3, 4, 5)$, $x_2=(1, -1, 1, -1, 1)$, $x_3=(1, 2, 4, 8, 16)$

求一个齐次线性方程组，使x_1, x_2，x_3组成这个方 组的基 础解系.

解：对于所求方程组，其系数矩阵的秩为 rank A = dim – rank $\{x_1, x_2, x_3\}$ = 2.

设系数矩阵 A = {a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}，其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5是二维列向量。

将x_1, x_2，x_3代入，得：

$\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0,\\ a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0,\\ a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0; \end{cases}$

化为系数矩阵，得：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&-1&1&-1&1\\1&2&4&8&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&3&2&5&4\\0&3&3&9&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&1&3&5\\0&0&1&4&11\end{pmatrix}$$

得到一组基础解系(6, 1, -4, 1, 0), (16, 6, -11, 0, 1)

另上述基础解系为系数矩阵 A 的两个行向量，得到一组符合题意的方程组：

$\begin{cases} 6x_1+x_2-4x_3+x_4=0,\\ 16x_1+6x_2-11x_3+x_5=0 \end{cases}$.

5、已知 5 元线性方程组的系数矩阵秩为 3，且以下向量是它的解

x_1 = (1, 1, 1, 1, 1), x_2 = (1, 2, 3, 4, 5), x_3 = (1, 0, -3, -2, -3)

（1）求方程组的通解.

解：先分析给出的三组解向量：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & -3 & -2 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

秩为 3，所以该方程组是非齐次线性方程组.

得到两组齐次通解$x_2 - x_1$= (0, 1, 2, 3, 4), $x_1 - x_3$ = (0, 1, 4, 3, 4)，一组非齐次特解(1, 1, 1, 1, 1);

得到方程组通解$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 4\\ 3\\ 4\end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ （t_1，t_2 $\in R$）

（2）$x_1 + x_2 + x_3$是否是方 组的 解？

不是。

记方程为 AX = b 形式，其中 A 为系数矩阵，b 为五维列向量。将${x_1}^T, {x_2}^T, {x_3}^T$代入，得 $A{x_1}^T$= b, $A{x_2}^T$= b, $A{x_3}^T$= b，三式相加得 $A({x_1}^T + {x_2}^T + {x_3}^T)$ = 3b，当且仅当 b = $\boldsymbol{0}$ 时，$A({x_1}^T + {x_2}^T + {x_3}^T)$ = b 成立，因此$x_1 + x_2 + x_3$不是原方程组得解.

（3）$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$是否是方 组的 解？

$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ = (1, 1, $\frac{1}{3}$, 1, 1)，令 t_1 = $\frac{1}{3}$，t_1 = -$\frac{1}{3}$，发现其符合（1）中所求通解形式。所以$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$是方程组的解.

习题 2.7

1\. 1) $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&+1&+1&+1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

前3列组成列向量组的极大线性无关组

$\therefore \dim(W_1+W_2)=3$ ~~(1,1,0,0)~~ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 组成 W_1+W_2 的基

2) $W_1\cap W_2=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2 \mid x_1,x_2,y_1,y_2\in F\}$

解线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1+x_4\beta_2=0$，将系数矩阵A通过初等行变换化简,得:

$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&2&1\end{pmatrix}$ 对应的方程组为 $\begin{cases}2x_1-x_4=0\\2x_2+x_4=0\\2x_3+x_4=0\end{cases}$

$\therefore$ 通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,-1,2)\cdot t$

因此 $W_1\cap W_2=\{t(\alpha_1-\alpha_2)=t(\beta_1-2\beta_2)\mid t\in F\}$

$\alpha_0=\alpha_1-\alpha_2=(1,0,-1,0)$ 组成 $W_1\cap W_2$ 的基, $\dim(W_1\cap W_2)=1$

2\. 解: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot t_2$ $\therefore W_1$的基 $\alpha_1=(1,-2,1,0)$, $\alpha_2=(1,-1,0,1)$

$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0\\x_2+4x_3+3x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\1\\0\end{pmatrix}\cdot t_1+\begin{pmatrix}4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\cdot t_2$ $\therefore W_2$的基 $\{\beta_1,\beta_2\}$

$\beta_1=(4,-4,1,0)$ $\beta_2=(4,-3,0,1)$

$\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-2&-1&-4&-3\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&4&5\\0&-1&-3&-4\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&4&5\\0&0&1&1\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&4&5\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 前三列组成列向量组的极大线性无关组

$\therefore$ W_1+W_2 的维数为3. $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 W_1+W_2 的一组基.

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1+x_4\beta_2=0$

$\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-2&-1&-4&-3\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&4&5\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ $\therefore\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$ 通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,-1,1)\cdot t$

$\therefore W_1\cap W_2=\{t\cdot(\alpha_1-\alpha_2)=t(\beta_1-\beta_2)\mid t\in F\}$ $\alpha_0=\alpha_1-\alpha_2=(0,-1,1,-1)$ 组成 $W_1\cap W_2$ 的基

$\dim(W_1\cap W_2)=1$

分

1. $\vec{AB}=(1,7)$

$\vec{AC}=(-5,3)$

$S=\frac{1}{2}\vec{AB}\times\vec{AC}$

$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 7\\ -5 & 3\end{vmatrix}$

$=19.$

2. 解: $\vec{AB}=(1,1,1)$

$\vec{AC}=(-1,-4,-9)$

$\vec{AD}=(1,2,3)$

(1) $V=|\vec{AB}\times\vec{AC}\times\vec{AD}|$

$=\left|\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 1 & -9 & 3\end{vmatrix}\right|$

$=|-12+18-2+3-9+4|$

$=2.$

(2) 由(1)得 $\vec{AB}\times\vec{AC}\times\vec{AD}=2>0$

故AB, AC, AD成右手系.

(3) $\vec{AP}=(x-1,\ y+1,\ z+3)$

$\vec{AP}\times\vec{AB}\times\vec{AC}=0$

即 $5(x-1)-8(y+1)+3(z+3)=0$

即 $P(x,y,z)$ 位于A.B.C所确定的平面上.

3.

(1) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & b_2 & c_2\\ 0 & 0 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3$

(2) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & b_2 & c_2\\ 0 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$.

$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2.$

(3) $\begin{vmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a+2b & b & b\\ a+2b & a & b\\ a+2b & b & a\end{vmatrix}$

$=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & b & b\\ 1 & a & b\\ 1 & b & a\end{vmatrix}$

$=(a+2b)(a^2+b^2-2ab)$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix}$

$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$

$= 2(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$= -2x^3-2y^3.$

(5) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix}$

$= 4 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix}$

$= 4 \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$

$= 4[ab(a-b)+ac(c-a)+bc(b-c)]$

4. 解:

$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & y^2-x^2 \\ 1 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & 0 \\ 1 & z-x & (z-x)(x-y) \end{vmatrix}$

$= (y-x)(z-x)(x-y)$

且 x, y, z 两两不相等

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$ 得证.

3.2 1.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (-1)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)$

$= -8$

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

$= b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & b \\ 1 & 1 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2$

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$

$= a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix}$

$= a^4$

、三次：λ^3

2 次：$-20\lambda^2$

一次：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -9 \\ -1 & 4 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$

$= -70$

3, x^4：1

x^3：$(-1)+(-3)=-4$

4、(1) $\tau(n(n-1)\cdots 21) = \frac{\cancel{(n-1+(n-2)}\,(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 当 $n(n-1)$ 是4的倍数即 n 或 $n-1$ 是4倍数时：偶排列

否则奇排列

(2) $\tau(678354921)$：奇

$\tau(87654321)$！偶

5、证：$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & \cancel{a+b} & a \\ q+r & r+p & \cancel{p+q} & p \\ y+z & z+x & \cancel{x+y} & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a+c & b \\ q+r & r+p & q \\ y+z & z+x & y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b+c & c & a \\ q+r & r & p \\ y+z & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ q+r & p & p \\ y+z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a+c & b \\ q & r+p & q \\ y & z+x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a+c & b \\ r & r+p & q \\ z & z+x & y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(2) $= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b-a & b^2-a^2+bc-ac \\ 0 & c-a & c^2-a^2+bc-ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+c \end{vmatrix} = 0$

6、(1) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & \cdots & a_2-b_n \\ & \vdots & \\ a_n-b_1 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{②-① \\ ③-① \\ \vdots}]{①\times(-1)} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ & \vdots & \\ a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = (a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_2-a_1)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ 1 & \cdots & 1 \\ & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$= 0$

(2) 原式 $= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n \\ 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot n!$

(3) ~~原式 =~~

原式 $= \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 & & & -a_n-\lambda a_{n-1} \\ -1 & \lambda & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & -a_2 \\ & & & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n-\lambda a_{n-1}-\lambda^2 a_{n-2}\cdots-\lambda^n a_1+\lambda^{n+1} \\ -1 & \lambda & & & -a_{n-1} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & -a_2 \\ & & & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n-\cdots-\lambda^n a_1+\lambda^{n+1} \\ -1 & & & & -a_{n-1}-\cdots-\lambda^{n-1} a_1+\lambda^n \\ \vdots & -1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & -1 \quad \lambda & -a_1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -a_n-\cdots-\lambda^n a_1+\lambda^{n+1} & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n-1}(-a_n-\cdots-\lambda^n a_1+\lambda^{n+1})$

7. $|A| = |A^T|$

$|A^T| = |-A| = (-1)^n |A|$

n为奇数 $|A| = -|A|$

n为偶数 $|A| = 0$

证毕

习题3.3

1. 令系数矩阵为D

解得$|D|=27\neq 0$则方程组有唯一解

再分别将常数列代入D的第i列中，得，

$D_1=45$，$D_2=-142$，$D_3=-19$，$D_4=-65$

$\therefore x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{5}{3}$，$x_2=-\frac{142}{27}$，$x_3=-\frac{19}{27}$，$x_4=-\frac{65}{27}$

2、(1) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$，由题意有

$|D|=4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$

(2) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，由题意有

$|D|=\lambda^3-2\lambda\neq 0$

$\Rightarrow \lambda\neq 0$且$\lambda\neq\pm\sqrt{2}$

(3) 设矩阵$B=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$，由题有

有非零解$\Leftrightarrow \Delta=0$

即$|B|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow \lambda=-1$或2

3、(1) $|A|=\lambda^3-2\lambda$

① 当$A\neq$，即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq\pm\sqrt{2}$时，$\mathrm{rank}A=r=3$，子式为其本身

② 当$\lambda=0$或$\lambda=\pm\sqrt{2}$时，代入可知：$\mathrm{rank}A=r=2$，2阶非零子式可取$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

(2) $|A|=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$

① 当$A\neq 0$时，即$\lambda\neq 1$或$\lambda\neq\pm i$时，$\mathrm{rank}A=r=4$，非零子式为其本身

② 当$A=0$时，即$\lambda=1$或$\lambda=\pm i$时，$\mathrm{rank}A=r=3$，代入可得，3阶非零子式可取$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

1. 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \cdot b_{11}b_{22}b_{33}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$

① $n=2$ 时 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3$ $A_2=3$

② $n=1$ 时 $|2|=2$ $A_1=2$

③ $n\geq 3$ 设原式为 A_n 则由第一行的展开定理知

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

$\Rightarrow A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2} = A_{n-2} - A_{n-3} = \cdots = A_2 - A_1 = 1$

$\therefore A_n = A_{n-1}+1 = A_1 + n-1 = n+1$

2. 求行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值 并求出 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = -160$

$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$ 的值即为把 Δ 的第1列换为1的值

$$\therefore \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

3.4

3. 求如下列式Δ展开式中的二次项系数

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&4&9&x^2\\1&8&27&x^3\end{vmatrix}$$

按第3行展开知 $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\8&27&x^3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&x\\1&27&x^3\end{vmatrix}+9\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&x\\1&8&\cancel{27}x^3\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1&1&\\1&2&3\\1&8&2\end{vmatrix}$

∴ 二次项系数为 $-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&8&27\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&7&26\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&12\end{vmatrix}=-12$

4. 求行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^3&x_2^3&x_3^3\end{vmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\0&x_2(x_2^2-x_1^2)&x_3(x_3^2-x_1^2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1\\0&x_2(x_2^2-x_1^2)&x_3(x_3^2-x_1^2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1\\x_2(x_2^2-x_1^2)&x_3(x_3^2-x_1^2)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix}1&1\\x_2(x_1+x_2)&x_3(x_1+x_3)\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_1x_3+x_3^2-x_2^2-x_1x_2)$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1+x_2+x_3)$$

3.5 答案

1. (1)*将第一行* $*-1$ *加到其他行* $=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & \cdots & 0 \\ -2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & 0 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$

第 i(i>=2)行乘以 1/(i+1)加到第一行 $=\begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}-\cdots-\frac{2}{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \cdots & 0 \\ -2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & 0 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$

Det A=$(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}-\cdots-\frac{2}{n+1})*(3+\cdots+(n+1))$

(2)将第一行乘以$-\frac{ai}{a1}$加到第 i 行=$\begin{vmatrix} \lambda1+a1b1 & a1b2 & \dots & a1bn \\ -\frac{a2\lambda1}{a1} & \lambda2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{an\lambda1}{a1} & 0 & \cdots & \lambda n \end{vmatrix}$

箭形行列式=$\begin{vmatrix} \lambda1+a1b1+\frac{a2b2\lambda1}{\lambda2}+\cdots+\frac{anbn\lambda1}{\lambda n} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a2\lambda1}{a1} & \lambda2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{an\lambda1}{a1} & 0 & \cdots & \lambda n \end{vmatrix}$

Det A=$\left(1+\frac{a2b2}{\lambda1}+\frac{a2b2}{\lambda2}+\cdots+\frac{anbn}{\lambda n}\right)*(\lambda1+\cdots+\lambda n)$

2. 第一行乘以-1 加到第 i 行=$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

将第 n 列乘以-2 加到第 2 到第 n-1 列

将第 n-1 列乘以-2 加到第 2 到第 n-2 列

以此类推=$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots 0 & -1 & \vdots \\ -1 & 0 & \dots 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

再将第 i 行乘以-1^{i+1}加到第一行$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots 0 & -1 & \vdots \\ -1 & 0 & \dots 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Det A=-1

3.是偶数阶反对称矩阵,则 A=$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a1n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

每个数都加 k 的行列式 记为|A(k)| =$\begin{bmatrix} k & \cdots & a1n+k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a1n+k & \cdots & k \end{bmatrix}$

加边|A(k)| =$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ 0 & k & \cdots & a1n+k \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a1n+k & \cdots & k \end{vmatrix}$

所有行减第 1 行|A(k)| = $\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ -1 & 0 & \cdots & a1n \\ -1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a1n & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

按第一行拆分成两个行列式|A(k)|= $\begin{vmatrix} 0 & k & k & k \\ -1 & 0 & \cdots & a1n \\ -1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a1n & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & a1n \\ -1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a1n & \cdots & 0 \end{vmatrix} +$

将 k 从第一行提出，则第 1 个行列式是一个奇数阶的反对称行列式,等于 0

第 2 个行列式按第 1 行展开就等于原行列式.

所以:|A(K)| = |A|.

4.

证明 先证解的存在性. 构造$n+1$阶行列式

$$\tilde{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ \\ \\ r_{i+1} \\ \\ (n+1) \end{array} = 0$$

第一行中元素a_{ij} 的代数余子式

$$\tilde{A}_{1,j+1} = (-1)^{1+(j+1)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+2}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -D^{(j)}$$

将 $\tilde{D}$ 按第1行展开得,

$$b_i D + a_{i1}(-D^{(1)}) + \cdots + a_{in}(-D^{(n)}) = 0$$

又因为 $D \neq 0$,

$$a_{i1}\frac{D^{(1)}}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D^{(n)}}{D} = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1)有解

$$x_1 = \frac{D^{(1)}}{D}, x_2 = \frac{D^{(2)}}{D}, x_3 = \frac{D^{(3)}}{D}, \cdots, x_n = \frac{D^{(n)}}{D}$$

下面证方程组解的唯一性。设方程组还有一组解 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，则有

$$x_j^* D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j}x_j^* & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j}x_j^* & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj}x_j^* & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[l=1,\cdots,n(l \neq j)]{c_j + x_l^* c_l}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{11}x_1^* + \cdots + a_{1j}x_j^* + \cdots + a_{1n}x_n^* & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{21}x_1^* + \cdots + a_{2j}x_j^* + \cdots + a_{2n}x_n^* & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n1}x_1^* + \cdots + a_{nj}x_j^* + \cdots + a_{nn}x_n^* & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^{(j)}$$

所以有 $x_j^* D = D^{(j)}$

又 $x_j D = D^{(j)}$

所以 $x_j^* = x_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$ 证毕

4.1

1. 解： $AB=\begin{pmatrix}2&2&5\\2&9&-1\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}3&10&14\\2&-7&2\\3&3&-5\end{pmatrix}$ $AC=\begin{pmatrix}3&3\\7&3\end{pmatrix}$

$CA=\begin{pmatrix}0&4&6\\-1&0&-1\\3&2&6\end{pmatrix}$ $B^TA^T=\begin{pmatrix}2&2\\2&9\\5&-1\end{pmatrix}$

其中$AC\neq CA$，而$(AB)^T=B^TA^T$

2. 解： （1）$AB=\begin{pmatrix}-17&-34&-51\\-17&-34&-51\\17&34&51\end{pmatrix}$ $BA=O$，显然$AB\neq BA$

（2）$AB=\begin{pmatrix}a&b&c\\\lambda c&\lambda a&\lambda b\\0&0&0\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}a&\lambda b&0\\c&\lambda a&0\\b&\lambda c&0\end{pmatrix}$，显然$AB\neq BA$

3. 解： （1）$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}-a&0\\0&-a\end{pmatrix}$ （3）O

（4）$\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ （5）$\begin{pmatrix}\cos 9\theta&\sin 9\theta\\-\sin 9\theta&\cos 9\theta\end{pmatrix}$ （6）$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$

（7）$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ （8）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\4&4&-4\end{pmatrix}$

4. 解： （1）O （2）$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ （3）$\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

5. 解： 不存在，理由如下：

反证法，假如存在多项式使得对任意 n 阶矩阵有：$N=a_0I+\sum_{i=1}^{m}a_iA^i$，那么有$NA=\sum_{i=1}^{m+1}a_{i-1}A^m=AN$. 如果存在 A 对任意 N 都满足左边的关系，必定有 A 为对角矩阵。那么显然的，对角方阵的任意正整数次方仍然是对角矩阵，求和后仍然是对角矩阵，不能表示任意方阵，产生矛盾。故而不存在。

6. 解： （1）$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ （3）$\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$

7. 解：（1）$\begin{pmatrix}1 & 10 & 95\\ 0 & 1 & 20\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}\lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2\\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5\end{pmatrix}$

4.2

1. 计算矩阵乘积，并指出代表什么变换

(1)
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{2010} = \begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{6} & -\sin -\frac{\pi}{6} \\ \sin -\frac{\pi}{6} & \cos -\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^{2010} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1005\pi}{3} & \sin \frac{1005\pi}{3} \\ -\sin \frac{1005\pi}{3} & \cos \frac{1005\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 旋转 180°

(2)
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$ 逆时针旋转 $\alpha-\beta$ 角度

(3)
$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix}$$

逆时针旋转 $\beta-\alpha$ 角度

4.2.

2. $p_1 = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot p$

$p_2 = \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot p$

$\therefore\ p_2 = \begin{pmatrix}\cos(\beta-\alpha), & -\sin(\beta-\alpha)\\ \sin(\beta-\alpha), & \cos(\beta-\alpha)\end{pmatrix}\cdot p$

映射 σ 表示逆时针旋转$(\beta-\alpha)$。

3. $$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

4. (1). 表示绕z轴转$(-\alpha)$

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix}\cos 19\alpha & \sin 19\alpha & 0\\ -\sin 19\alpha & \cos 19\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2). 表示关于面 $z = \frac{\pi}{8}y$ 对称

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

(3). 表示绕 Oz 轴转 $90°$.

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

§4.3

1 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-2&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&-2&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \qquad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2. (1) $\because (I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$
$$=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k$$
$$=I-A^k=I$$
$\therefore I-A$ 可逆，$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

(2) $\because (I+A)[I-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}]$
$$=I-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}+A-A^2+A^3-\cdots-(-1)^{k-1}A^{k-1}+(-1)^kA^k$$
$$=I+O=I$$
$\therefore I+A$ 可逆，$(I+A)^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iA^i$

(3) $\because \left[I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}\right]\left[I-A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{6}A^3+\frac{1}{24}A^4-\frac{1}{120}A^5+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}\right]=I$.

$\therefore I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}$ 可逆

$$\left[I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}\right]^{-1}=I-A+\frac{A^2}{2!}-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}-\frac{A^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}$$

3. (1) $X=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&5\\3&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}7&3&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}14&6&2&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&2&-7\\2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&2&-7\\2&0&2&-6\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&-2&7\end{pmatrix}$$

$\therefore X=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\13&-3\end{pmatrix}$

(2) $X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-3&1\\3&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&3\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&-3&3&-2&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&-6&6&-4&2&0\\0&6&3&0&0&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&-6&6&-4&2&0\\0&0&9&-4&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&-9&9&-6&3&0\\0&0&9&-4&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&-9&0&-2&1&-3\\0&0&9&-4&2&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}9&-18&0&9&0&0\\0&18&0&4&-2&6\\0&0&9&-4&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}9&0&0&13&-2&6\\0&18&0&4&-2&6\\0&0&9&-4&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{13}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-3&1\\3&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{13}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\-\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{3}\\\frac{16}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{3}\\3&0&1\end{pmatrix}$$

4.证. 假设$A+I$可逆，则存在一个n阶方阵M，使得$(A+I)M=I$.

$\therefore A(A+I)M=A$

$\therefore (A^2+A)M=A$

又$\because A^2=I$ $\quad\therefore (I+A)M=A$ $\quad$ 又已得$(A+I)M=I$

$\therefore A=I$ $\quad$ 这与已知条件$A\neq I$矛盾

$\therefore A+I$不是可逆矩阵

(1) $\cancel{A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=(}$

$$\therefore A\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&5&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&5&-2\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\quad a$$

$$\therefore \cancel{A=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&-9\\31&-14\end{pmatrix}}\quad A=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

(2) 假设A存在.

$$A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&-2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\quad \therefore$$ A不存在.

(3) 假设A存在

$$A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\3&7\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2&7\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&-2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&7\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \therefore$$ A不存在.

1. (1) 初等行变换：$(-\frac{1}{2})(2)+(1) \to 6(1)+(2) \to -2(1) \to \frac{1}{4}(2)$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=E$

(3) $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

2. (1) 初等行变换 $\lambda^{-1}(1)+(2) \to (1-\lambda)(2)+(1) \to (-1)(1)+(2)$

2. (2) $A=\cancel{(\ )}\begin{pmatrix}1&0\\-\lambda^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{\lambda-1}{\lambda}\\0&1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$

$\det(BA)=\det B\cdot\det A=\det A\cdot\det B=\det(AB)$

5. $A^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\\vdots&\vdots\\n&n+1\end{pmatrix}$ $\det AA^T=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{(1+n)(n+2)(2n+3)}{6}-1\end{vmatrix}=\cancel{\ \ }\ \frac{n^4-n^2}{12}$

当$n=2$时 $\det A^TA=1$

$\det A^TA=\begin{vmatrix}5&8&\cdots&3n+2\\8&13&\cdots&5n+3\\\vdots&\vdots&&\\3n+2&\cdots&\cdots&2n^2+2n+1\end{vmatrix}\xrightarrow{-(i)+(i+1)}\begin{vmatrix}5&8&\cdots&3n+2\\3&5&\cdots&2n+1\\\vdots&\vdots&&\\3&5&\cdots&2n+1\end{vmatrix}=0$ (当$n>2$时)

6. 证明：$\because R(A)=r$ 经一系列初等行变换 A可化为最简阶梯矩阵B 存在可逆矩阵P. $PA=B$: B中有r行含非零元素. $B=C_1+C_2+\cdots+C_r$ $C_K(1\le k\le r)$ 为B中第K行，其余行全为0. $\therefore R(C_K)=1$ $\therefore A=B\cdot P^{-1}$ $R(P^{-1}C_K)=1$ $\therefore$ 得证

7. (1) $\because R(A)=1$ $\therefore$ 极大线性无关组由一个非零行向量$\beta=(b_1,\cdots b_n)$组成，A的每一行α_i均为β常数倍 $\alpha_i=a_i\beta$ $\therefore A=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta\\\vdots\\\alpha_n\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\beta=\alpha\beta=\begin{pmatrix}a_1b_1&\cdots&a_1b_n\\\vdots&&\vdots\\a_nb_1&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$

$A^2=\alpha\beta\alpha\beta=\alpha(\beta\alpha)\beta=\alpha\lambda\beta=\lambda\alpha\beta=\lambda A$

(2) ~~I+A=~~ $A=(a_1,a_2\cdots a_n)$ $A+I=(a_1+e_1,a_2+e_2,\cdots a_n+e_n)$

$\det(I+A)=\det(a_1,a_2+e_2,\cdots a_n+e_n)+\det(e_1,a_2+e_2,\cdots a_n+e_n)$

类似拆分 $\cdots=\det(a_1,e_2\cdots e_n)+\det(e_1,a_2\cdots e_n)+\cdots+\det(e_1,e_2\cdots a_n)$

$+\det(I)=\lambda+1$

(3) $A\to(a_1,x_2a_1,x_3a_1\cdots x_na_1)$

$A+I=(a_1+e_1,x_2a_1+e_2\cdots x_na_1+e_n)$

$\xrightarrow{-x_i(1)+(i)}(a_1+e_1,e_2-x_2e_1\cdots e_n-x_ne_1)$

$\begin{pmatrix}1+a_{11}&-x_2&\cdots&-x_n\\a_{21}&1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\&\cdots&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-a_{i1}(i)+(1)]{(1)+x_i(i)}\begin{pmatrix}1+a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_na_{n1}&0&\cdots&0\\0&1&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&1\end{pmatrix}=$ ~~1+a11+x2a21+…+xna~~

$\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\0&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix}$

1.(1)记 N= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{(n)}$ ，那么显然 $N^{n-1}=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & O & \\ & & \end{pmatrix}_{(n)}$,$N^n=0$,

故 A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n)}$ $=I+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$，又$(I+N+N^2+\cdots+N^{n-1})(I-N)=I^n-N^n=I$，

所以 $A=I+N+N^2+\cdots+N^{n-1}=(I-N)^{-1}$，所以 $A^{10}=(I-N)^{-10}$

两种方法求解：

法①：泰勒展开。f(x)= $(1-x)^{-10}$ 的泰勒展开式（Maclaurin 公式）为：

f(x)= $(1-x)^{-10}=1+10x+\dfrac{-10(-10-1)}{2!}x^2+\cdots$

所以$(1-N)^{-10}=I+10N+\dfrac{-10(-10-1)}{2!}N^2+\cdots+\dfrac{-10(-10-1)\cdots(-10-(n-2))}{(n-1)!}N^{n-1}$

$=I-C_{-10}^{1}N+C_{-10}^{2}N^2+\cdots+(-1)^{n-1}C_{-10}^{n-1}N^{n-1}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -C_{-10}^{1} & C_{-10}^{2} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{-10}^{n-1} \\ & 1 & -C_{-10}^{1} & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & C_{-10}^{2} \\ & & & \ddots & -C_{-10}^{1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

观察到$(1-N)^{-10}=I+10N+\dfrac{-10(-10-1)}{2!}N^2+\cdots+\dfrac{-10(-10-1)\cdots(-10-(n-2))}{(n-1)!}N^{n-1}$

$=I+10N+\dfrac{10(10+1)}{2!}N^2+\cdots+\dfrac{10(10+1)\cdots(10+(n-2))}{(n-1)!}N^{n-1}$

$=I+C_{10}^{1}N+C_{11}^{2}N^2+\cdots+C_{n+8}^{n-1}N^{n-1}$，因此答案也可以写成：

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{10}^{1} & C_{11}^{2} & \cdots & C_{n+8}^{n-1} \\ & 1 & C_{10}^{1} & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & C_{11}^{2} \\ & & & \ddots & C_{10}^{1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

法②：牛顿二项式定理。提示：$(1-N)^{-10}=I-C_{-10}^{1}N+C_{-10}^{2}N^2+\cdots+(-1)^{n-1}C_{-10}^{n-1}N^{n-1}$。

(2)$B^{10}=A$ 即 $B=A^{\frac{1}{10}}=(I-N)^{-\frac{1}{10}}$，求解方法同(1)——泰勒展开、牛顿二项式定理

f(x)= $\left(1-x\right)^{-\frac{1}{10}}$ 的泰勒展开式（Maclaurin 公式）为：

f(x)= $\left(1-x\right)^{-\frac{1}{10}}$ =1+ $\frac{1}{10}x+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)}{2!}x^2+\cdots$

不妨先验证 B= $\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ 为 3 阶的情况：

此时 $N^3=0$，因此 B= $\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ =I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)}{2!}\mathrm{N}^2$ =I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{11}{200}\mathrm{N}^2$

因此 B^{10}=(I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{11}{200}\mathrm{N}^2$)^{10}=I+ $C_{10}^1(\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{11}{200}\mathrm{N}^2)$+ $C_{10}^2(\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{11}{200}\mathrm{N}^2)^2$

=I+N+ $\frac{11}{20}\mathrm{N}^2+\frac{9}{20}\mathrm{N}^2$ =I+N+N^2=A，因此当 $\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ 为三阶时，满足 B^{10}=A，

不失一般性，当 B 为 n 阶时也可以通过泰勒展开求解（这也验证了第一问用泰勒展开的合理性），因此 B= $\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ =I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)}{2!}\mathrm{N}^2+\cdots+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)\cdots(-\frac{1}{10}-(n-2))}{(\mathrm{n}-1)!}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$

=I- $\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^1\mathrm{N}+\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^2\mathrm{N}^2+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -C_{-\frac{1}{10}}^1 & C_{-\frac{1}{10}}^2 & \cdots & (-1)^{\mathrm{n}-1}C_{-\frac{1}{10}}^{\mathrm{n-1}} \\ & 1 & -C_{-\frac{1}{10}}^1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & C_{-\frac{1}{10}}^2 \\ & & & \ddots & -C_{-\frac{1}{10}}^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

观察到 B= $\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ =I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)}{2!}\mathrm{N}^2+\cdots+\frac{-\frac{1}{10}(-\frac{1}{10}-1)\cdots(-\frac{1}{10}-(n-2))}{(\mathrm{n}-1)!}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$

=I+ $\frac{1}{10}\mathrm{N}+\frac{\frac{1}{10}(\frac{1}{10}+1)}{2!}\mathrm{N}^2+\cdots+\frac{\frac{1}{10}(\frac{1}{10}+1)\cdots(\frac{1}{10}+(n-2))}{(\mathrm{n}-1)!}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$

=I+ $\mathrm{C}_{\frac{1}{10}}^1\mathrm{N}+\mathrm{C}_{\frac{1}{10}+1}^2\mathrm{N}^2+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{1}{10}+\mathrm{n-2}}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$，因此答案也可以写成：

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{\frac{1}{10}}^1 & C_{\frac{1}{10}+1}^2 & \cdots & C_{\frac{1}{10}+\mathrm{n-2}}^{\mathrm{n-1}} \\ & 1 & C_{\frac{1}{10}}^1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & C_{\frac{1}{10}+1}^2 \\ & & & \ddots & C_{\frac{1}{10}}^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

牛顿二项式定理做法提示：$\left(\mathrm{I}-\mathrm{N}\right)^{-\frac{1}{10}}$ =I- $\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^1\mathrm{N}+\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^2\mathrm{N}^2+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_{-\frac{1}{10}}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{N}^{\mathrm{n-1}}$

2.rankA+rankB=rank$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$

由矩阵的分块乘法及初等矩阵性质知：$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$

设 rank(A,B)=d，则(A,B)的最大非零子式为 d 阶，这个 d 阶非零子式也是$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$的非零子式，因此 rank$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$≥d=rank(A,B)。

又初等变换不改变矩阵的秩，所以 rankA+rankB≥rank(A,B)

3.det(A-$\beta^{T}\beta$)=det$\left\{\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right\}$

=det$\left\{\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}\right\}$

=det$\begin{pmatrix} a_1-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & a_2-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & a_n-a_n^2 \end{pmatrix}=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_1-1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}$

（从倒数第二行开始，每一行加上负的下一行）

$=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{i\ 1}^{n} a_i - 1 \end{vmatrix}$$

$$=-a_1 a_2 \cdots a_n (\sum_{i\ 1}^{n} a_i - 1) = -\prod_{i\ 1}^{n} a_i (\sum_{i\ 1}^{n} a_i - 1)$$

4.要证：$\lambda^m \left|\lambda I_{(n)} - AB\right| \quad \lambda^n \left|\lambda I_{(m)} - BA\right|$

只需证：$\lambda^{m+n} \left|I_{(n)} - \frac{1}{\lambda} AB\right| \quad \lambda^{m+n} \left|I_{(m)} - \frac{1}{\lambda} BA\right|$

只需证：$\left|I_{(n)} - \frac{1}{\lambda} AB\right| \quad \left|I_{(m)} - \frac{1}{\lambda} BA\right|$

不妨设$\frac{1}{\lambda} B \quad C$，则只需证：$\left|I_{(n)} - AC\right| \quad \left|I_{(m)} - CA\right|$

对于矩阵$\begin{pmatrix} I_{(m)} & C \\ 0 & I_{(n)} - AC \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_{(m)} & 0 \\ -A & I_{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(m)} - CA & C \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(m)} & 0 \\ A & I_{(n)} \end{pmatrix}$

等式两边同时取行列式得：$\left|I_{(n)} - AC\right| \quad \left|I_{(m)} - CA\right|$

因此$\lambda^m \left|\lambda I_{(n)} - AB\right| \quad \lambda^n \left|\lambda I_{(m)} - BA\right|$得证。

5.由 Sylvester 不等式可得：rank(A-I)+rank(A+I)-n≤rank(A-I)(A+I)=rank(A^2-I^2)=rank0=0
所以 rank(A-I)+rank(A+I)≤n……①

对于矩阵$\begin{pmatrix} A+I & 0 \\ 0 & A-I \end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix} 2I & A-I \\ I-A & A-I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+I & A-I \\ 0 & A-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+I & 0 \\ 0 & A-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$$

由于子矩阵的秩小于等于该矩阵的秩，所以 rank$\begin{pmatrix} 2I & A-I \\ I-A & A-I \end{pmatrix}$≥rank(2I)=n

又矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，

所以 rank(A-I)+rank(A+I)=rank$\begin{pmatrix} A+I & 0 \\ 0 & A-I \end{pmatrix}$=rank$\begin{pmatrix} 2I & A-I \\ I-A & A-I \end{pmatrix}$≥n……②

综合①②可知：rank(A-I)+rank(A+I)=n

6.对于任意 $k\in N^*$，记 V_k 为齐次线性方程组 $A^kX=0$ 的解空间。
则，要证：$rankA^m=rankA^{m+k}$，只需证：$dimV_m=dimV_{m+k}$
对于任意 $X\in V_m$，都有：$A^mX=0$，所以 $A^{m+k}X=A^k(A^mX)=0$
所以对于任意 $X\in V_m$，都有：$X\in V_{m+k}$，所以 $V_m\subseteq V_{m+k}$
对于 k=1 时，因为 $rankA^m=rankA^{m+1}$，所以 $dimV_m=dimV_{m+1}$
又因为 $V_m\subseteq V_{m+1}$，所以 $V_m=V_{m+1}$
因为对于任意 $X\in V_{m+k}$，都有：$A^{m+k}X=0$
所以 $A^{m+1}(A^{k-1}X)=A^{m+k}X=0$，所以 $A^{k-1}X\in V_{m+1}$
又因为 $V_m=V_{m+1}$，所以 $A^{k-1}X\in V_m$
所以 $A^{m+k-1}X=A^m(A^{k-1}X)=0$，所以 $X\in V_{m+k-1}$
综上所述，任意 $k\in N^*$，都有：任意 $X\in V_{m+k}$，$X\in V_{m+k-1}$
所以 $V_{m+k}\subseteq V_{m+k-1}$
又对于任意 $X\in V_{m+k-1}$，有：$A^{m+k-1}X=0$，且 $A^{m+k}X=A(A^{m+k-1}X)=0$
所以 $X\in V_{m+k}$，所以 $V_{m+k-1}\subseteq V_{m+k}$，所以 $V_{m+k-1}=V_{m+k}$
所以 $V_{m+k}=V_{m+k-1}=V_{m+k-2}=\cdots=V_{m+1}=V_m$
所以 $dimV_m=dimV_{m+k}$，所以 $rankA^m=rankA^{m+k}$ 得证。

7.证明：首先证明(3)
①先证：$rankA<n-1\Rightarrow rankA^*=0$
因为 $rankA<n-1$，所以 A 的最大非零子式的阶数小于 n-1，所以 A 所有 n-1 阶的子式均为 0，又 A^*中每个元素为 A 中对应位置元的代数余子式（n-1 阶），所以 A^*中每个元素均为 0，
所以 $rankA^*=0$。
②再证：$rankA^*=0\Rightarrow rankA<n-1$
假设 $rankA\geqslant n-1$，所以 A 一定有 n-1 阶的非零子式，
又因为 A 中每一个 n-1 阶子式和全部的代数余子式一一对应，即任意 n-1 阶子式一定是 A 的余子式，所以 A 一定有非零的代数余子式，所以 $rankA^*\geqslant 1$，这与 $rankA^*=0$ 矛盾，
所以 $rankA<n-1$。
然后证明(1)
①先证：$rankA=n\Rightarrow rankA^*=n$
因为 rankA=n，所以$|A|\neq 0$，
假设 $rankA^*\neq n$，则$|A^*|=0$，
则由 $AA^*=|A|I$ 知：$detAA^*=det|A|I$，左边$=detAA^*=|A||A^*|=0$，右边$=|A|=0$，这与$|A|\neq 0$ 矛盾，因此 $rankA^*=n$。
②再证：$rankA^*=n\Rightarrow rankA=n$
因为 $rankA^*=n\neq 0$，所以由(3)知：$rankA\geqslant n-1$，
则 rankA=n-1 或 rankA=n。
假设 rankA=n-1，则$|A|=0$，$AA^*=|A|I=0$，

$A=P\begin{pmatrix} I_{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，则 $AA^*=P\begin{pmatrix} I_{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QA^*=P\begin{pmatrix} I_{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$

（其中 Q_1 为 QA^*的前 n-1 行，Q_2 为 QA^*的第 n 行）
则 $rankQ_2\leqslant 1$

所以 $AA^*=P\begin{pmatrix} I_{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$

因为 P 为初等矩阵，所以 $P^{-1}P\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}=P^{-1}0=0$，所以$\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$，所以 $Q_1=0$，

所以 $QA^*=\begin{pmatrix} 0_{((n-1)\times n)} \\ Q_2 \end{pmatrix}$，所以 rankA*=rankQA*≤1，这与 rankA*=n 矛盾，因此 rankA≠n-1，

所以 rankA=n。

最后证明(2)

①先证：rankA=n-1⟹rankA*=1

由(1)的证明过程可知：当 rankA=n-1 时，rankA*≤1，

而由(3)知：rankA=n-1 时，rankA*≠0，

所以 rankA*=1。

②再证：rankA*=1⟹rankA=n-1

由(1)知：rankA*≠n⟹rankA≠n，

由(3)知：rankA*≠0⟹rankA≥n-1，

所以 rankA=n-1 得证。