第五节 平面及其方程

1. 平面的点法式方程
2. 平面的一般方程
3. 两平面的夹角
4. 点到平面的距离

图形及其方程

取定三维空间中的一个直角坐标系，如果空间中的几何图形 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 具有下述关系:

(1) 图形 S 上的任意点的坐标都满足此方程,

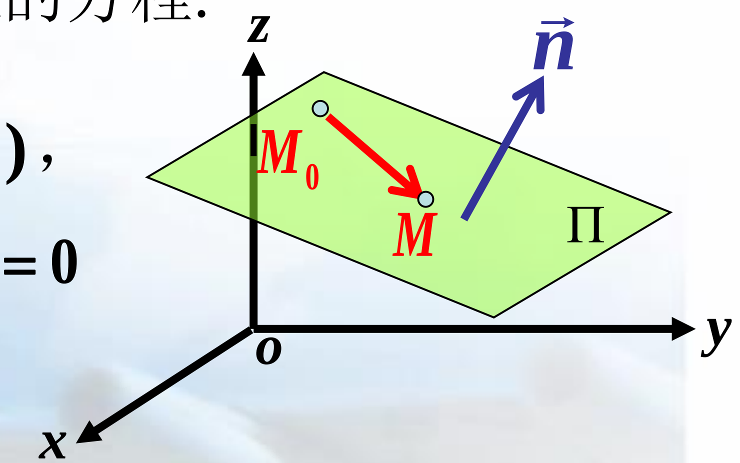
(2) 所有坐标满足此方程的点都在图形 S 上,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫作 S **的方程**,

S 叫作**方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形**.

一、平面的点法式方程

设平面Π通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，并且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$，下面建立平面Π的方程.



设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$，

则必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$，从而 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

由于 $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

因此 $$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

平面的点法式方程

称垂直于平面的非零向量 $\vec{n}$ 为该平面的法向量.

设置

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

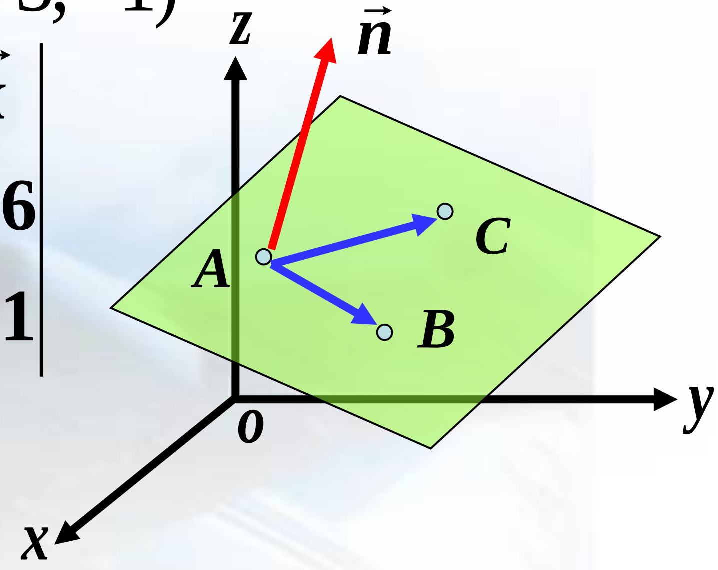
一、平面的点法式方程

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

解 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$ $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}$

$=(14,9,-1)$,



所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得 $$14x+9y-z-15=0.$$

主观题 10分

设置

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解　二平面的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1),\quad \vec{n}_2=(3,2,-12)$$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得　$2x+3y+z-6=0.$

二、平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-\underbrace{\boxed{(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

平面的一般方程

（三元一次方程）

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

二、平面的一般方程

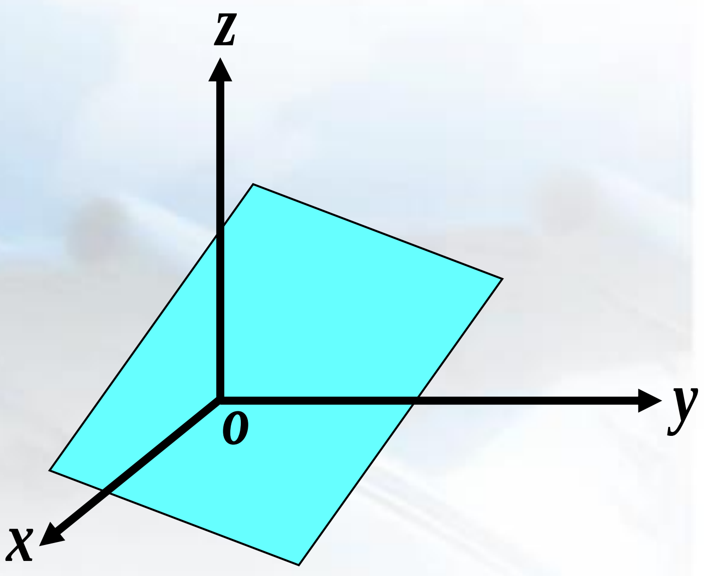
平面一般方程的几种特殊情况：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(1) $D = 0,$

$$Ax + By + Cz = 0$$

平面通过坐标原点.

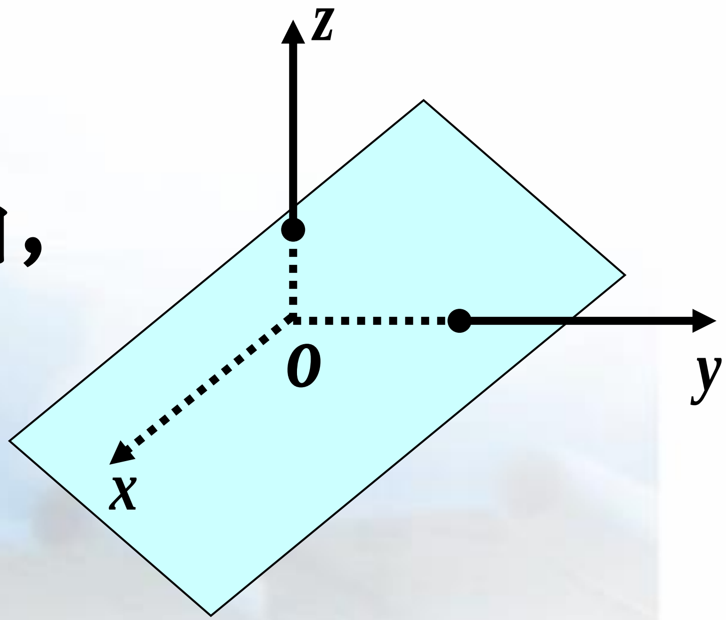


(2) $A=0$,

$$By+Cz+D=0$$

$\vec{n}=(0,B,C)$ 垂直于x轴,

$$\begin{cases} D=0, & \text{平面通过}x\text{轴;} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴.} \end{cases}$$



类似地可讨论:

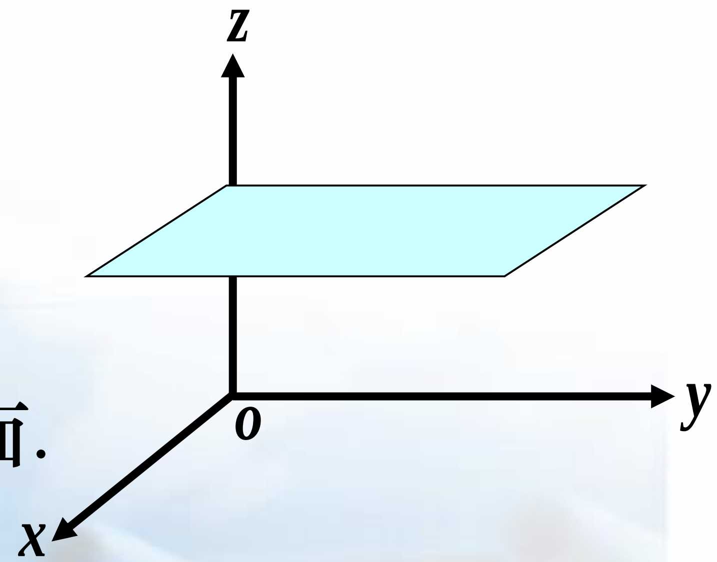
$B=0$, $Ax+Cz+D=0$, 平面平行于或通过y轴;

$C=0$, $Ax+By+D=0$, 平面平行于或通过z轴.

(3) $A = B = 0$,

即$z = -\dfrac{D}{C}$（常数）

平面平行于xOy坐标平面.



类似地可讨论:

$A = C = 0$, 即$y = -\dfrac{D}{B}$, 平面平行于zOx坐标面;

$B = C = 0$, 即$x = -\dfrac{D}{A}$, 平面平行于yOz坐标面.

二、平面的一般方程

(4) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$

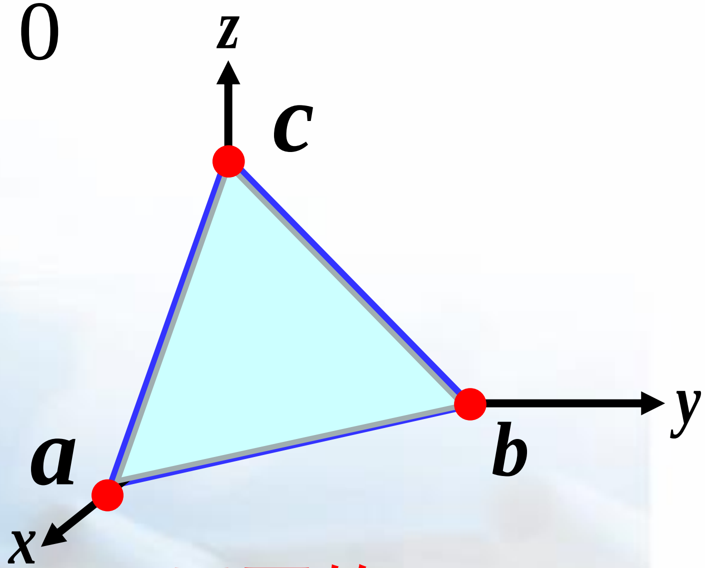
令 $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}, c = -\dfrac{D}{C},$

代入 $Ax + By + Cz + D = 0$

可得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距



平面的
截距式方程

二、平面的一般方程

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ 是空间中不在同一直线上的三点，则可以建立过这三点的平面方程：

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$，

则向量 $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 共面，从而混合积

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$$

即
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

平面的
三点式方程

主观题 10分

设置

设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

二、平面的一般方程

例3 **设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.**

解 设此平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0,$

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

由平面过原点知$D=0$.

因平面过点$(6,-3,2)$，故有 $6A-3B+2C=0$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2),\quad \therefore 4A-B+2C=0$

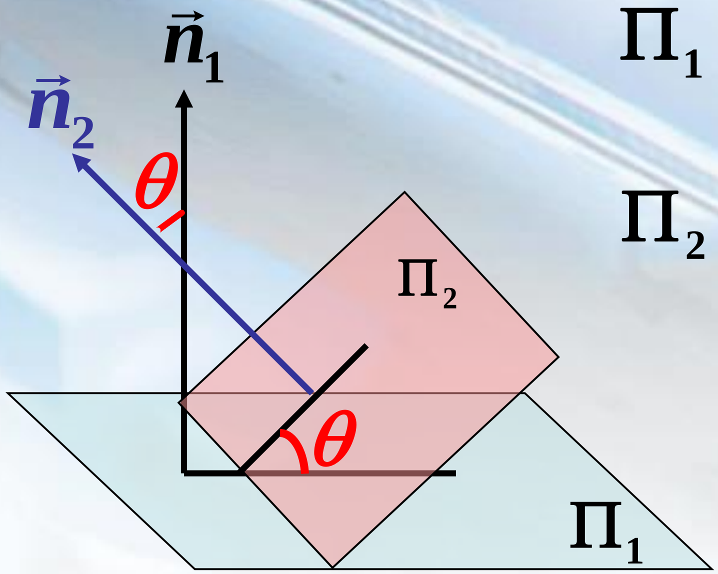
$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$

故所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

三、两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

通常规定平面夹角为锐角，即 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

三、两平面的夹角

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = |\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|$$

$$= \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0.$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}.$

(3) $\Pi_1\Pi_2$重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}.$

例4 求两平面 $-x+2y-z+1=0$ 和 $y+3z-1=0$ 的夹角.

解 $\vec{n}_1=(-1,2,-1),\vec{n}_2=(0,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{60}}$$

故夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

三、两平面的夹角

例5　一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面$x+y+z=0$，求它的方程.

解　设所求平面为：$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

其法线向量为：$\vec{n}=(A,B,C)$,

$\because \overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$在平面上，有$\overrightarrow{M_1M_2}\perp\vec{n}$,

$\therefore \quad -A-2C=0$

又因，已知平面$x+y+z=0$，其$\vec{n}_1=(1,1,1)$,

由已知两平面垂直，则其法线向量亦垂直，

$\therefore \quad \vec{n}_1\perp\vec{n}$

例5 一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面$x+y+z=0$，求它的方程.

由$\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{n}$，有$-A-2C=0$

又由 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}$，即 $A+B+C=0$，

$$\therefore \begin{cases} -A-2C=0 \\ A+B+C=0 \end{cases}$$ 解得$A=-2C, B=C$，

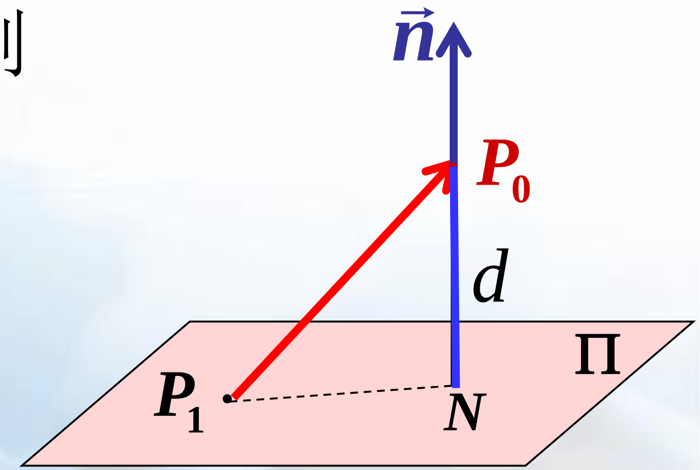
代入$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$解之得：

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$$

化简得 $2x-y-z=0$ 为所求平面.

四、点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面Π：$Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，点P_0到平面Π的距离为d，则



$$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$$

$$d = |\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n}\rangle|$$

$$\because \cos\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n}\rangle = \frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{P_1P_0}||\vec{n}|}$$

$$\therefore d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= |\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}| \qquad \because \overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|\,\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}$$

四、点到平面的距离

由 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$ $\quad \vec{n}=(A,B,C)$

可得 $d=\dfrac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0\underline{-(Ax_1+By_1+Cz_1)}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ \boxed{=D}$$

$\because\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \quad (P_1\in\Pi)$

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

点到平面距离
公式

五、小结

1.平面的方程 $\begin{cases} \text{点法式方程.} \\ \text{一般方程.} \\ \text{截距式方程.} \\ \text{三点式方程.} \end{cases}$

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

2.两平面的夹角.（注意两平面的位置特征）

3.点到平面的距离公式.

思考题

1.问平面$\Pi_1: 2x-y-z+1=0$与平面$\Pi_2: -4x+2y+2z-2=0$的位置关系?

解 $\because \dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{2},$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\in\Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

2. 若平面 $x+ky-2z=0$ 与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $k=?$

解 $\cos\frac{\pi}{4}=\dfrac{1\times 2+k\times(-3)-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-3k}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}, \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

主观题 10分

设置

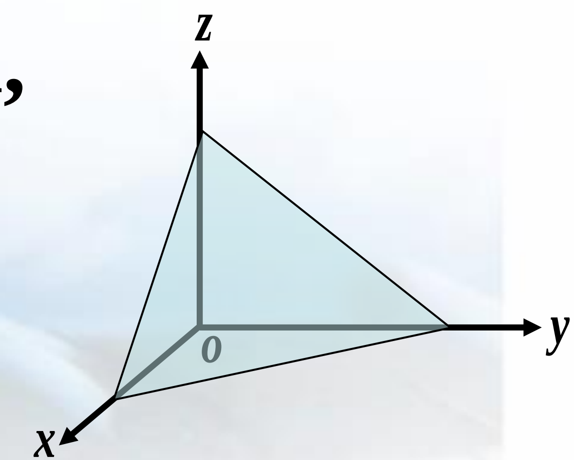
3. 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

3. 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$\because V=1,\quad \therefore\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|abc|=1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件）$\dfrac{1/a}{6}=\dfrac{1/b}{1}=\dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$, 令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right| \Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=6$ 或

$6x+y+6z=-6$