总习题

1. 已知$\triangle ABC$的顶点$A(3,2,-1),B(5,-4,7)$和$C(-1,1,2)$，求从顶点C所引中线的长度.

2. 设$\triangle ABC$的三边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为$D$、$E$、$F$，试用$\boldsymbol{a,b,c}$表示$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$，并证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

3. 用向量证明三角形两边中点连线平行于第三边，且其长度是第三边长的一半.

4. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},\ |\boldsymbol{b}|=1$，且$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 的夹角为$\pi/6$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角.

5. 设$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$的夹角.

6. 设$\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3),\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，求向量$\boldsymbol{r}$使$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{r})_c=14$.

7. 设$\boldsymbol{a,b,c}$都是单位向量，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

8. 设$\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,\ 10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求$\lambda$.

9. 设$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4,|\boldsymbol{c}|=5$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$______

10. 求通过点$A(3,0,0)$和$B(0,0,1)$且与xOy面成$\pi/3$角的平面的方程.

11. 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线的方程(可先求交点坐标).

12. 直线$L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转生成旋转面，求这个旋转面的方程.

13. 求点$(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离.

14. 求经过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z=8$ 夹成 $\pi/4$ 角的平面方程.

15. **共面定理**：若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是

存在实数 k,l 使得 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$.（由平行四边形法则可得）

16. 设数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为 0，且 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0$，则向量 $\boldsymbol{a,b,c}$ 是共面的（用**共面定理**）

17. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2),\boldsymbol{b}=(2,-3,-4),\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$. 证明向量 $\boldsymbol{a,b,c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

（提示：由混合积 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=0$ 可知 3 向量共面，也可用**共面定理**）.

18. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 互相垂直，且 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,|\vec{c}|=5$，$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

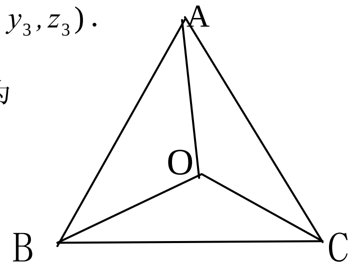
(1) 求 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度平方与长度；(2) 求向量 $\vec{s}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角余弦

19. 已知三角形的顶点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3)$.

(1) 证明三角形的重心 G（3 条中线的交点）的向径公式为

$$\overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

(2) 求三角形的重心坐标.



20. (1) 已知 $OB\perp AC$，$OC\perp AB$，用向量证明 $OA\perp BC$（如图示）.

(2) 证明三角形的 3 条高线相交于一点.

（提示：设 $\overrightarrow{OA}=\mathrm{x},\overrightarrow{OB}=\mathrm{y},\overrightarrow{OC}=\mathrm{z}$，则 $\overrightarrow{BA}=\mathrm{x}-\mathrm{y}$，$\overrightarrow{BC}=\mathrm{z}-\mathrm{y}$，$\overrightarrow{AC}=\mathrm{z}-\mathrm{x}$. 因为

$OB\perp AC,OC\perp AB$，故 $\mathrm{y}\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{x})=0$，$\mathrm{z}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})=0$，两式相加得 $\mathrm{x}\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{y})=0$，即

$OA\perp BC$）.

21. 用向量证明：(1)直径所对的圆周角是直角；(2)直角三角形的勾股定理.

22. 设 $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$. (1) 求叉积 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$；(2) 求三角形面积 S_{ABC}.

23. 设 $\boldsymbol{a}\neq 0$，证明 $\boldsymbol{a}\perp[\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}]$，且 $[\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}]^2=\boldsymbol{b}^2-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{a}^2}$.

24. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 互相垂直，且 $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，则系数 x,y,z 为

$$x=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2},\ y=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2},\ z=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^2}.$$

25. 已知四顶点 $A(1,1,1),B(7,1,7),C(5,4,1),D(3,0,4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积 V