



第一章 集合与映射

§ 1 集合



一、集合定义

定义 某些具有特定性的事物构成的全体称为**集合**, 简称**集**. 构成这些集合的其中一个事物称为该集合的一个**元素**.

通常用大写字母 A, B 或 X, Y 表示集合, 用小写字母 a, b 或 x, y 表示元素.

若 a 为集合 A 中的元素, 则称 a 属于 A , 记作 $a \in A$;

若 b 不是集合 A 中的元素, 则称 b 不属于 A , 记作 $b \notin A$.



集合的表示方法 枚举法和描述法.

例1 $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$ 枚举法

$\{x \mid \sin x = 0\}$ 描述法

定义 若集合 A 中所有元素都属于为集合 B , 则称集合 A 包含于集合 B , 或称集合 B 包含集合 A ,

记作 $A \subseteq B$; A 称为 B 的一个子集;

若既有 $A \subseteq B$ 又有 $B \subseteq A$, 则称 A 和 B 相等, 记为 $A = B$;

若 A 和 B 不相等, 记为 $A \neq B$;

若 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $A \subset B$.



本书常用集合及表示:

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ \mathbb{Z} \mathbb{R}
N---自然数集 \mathbb{Z} ---整数集 \mathbb{R} ---实数集

\mathbb{N}^* 或 \mathbb{N}^+ ---正整数集 \mathbb{Q} ---有理数集
 $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

\emptyset ---空集 (不包含任何元素的集合)

开区间 $\begin{cases} (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{cases}$



闭区间 $\begin{cases} [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \end{cases}$

半开半闭区间 $\begin{cases} [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{cases}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



二、集合运算

集合的并集: $\underline{A \cup B} = \{ \underline{x} \mid \underline{x \in A} \text{ 或 } \underline{x \in B} \}$

集合的交集: $\underline{A \cap B} = \{ \underline{x} \mid \underline{x \in A} \text{ 且 } \underline{x \in B} \}$

集合的差集: $\underline{A \setminus B} = \{ \underline{x} \mid \underline{x \in A} \text{ 但 } \underline{x \notin B} \}$

$A \setminus B$

集合的补集:

A_x^c

若 A 为 X 的子集, X 称为全集, $X \setminus A = \underline{A^c}$ 称为 A 的补集.

笛卡尔积: $A \times B = \{ (\underline{x}, \underline{y}) \mid \underline{x \in A}, \underline{y \in B} \}$

$R \quad R^2 = \underline{R} \times \underline{R}$



运算律

(1)交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

(2)结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

(3)分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

(4) $A \setminus B = A \cap B^c$

(5) *De Morgan* 律:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$



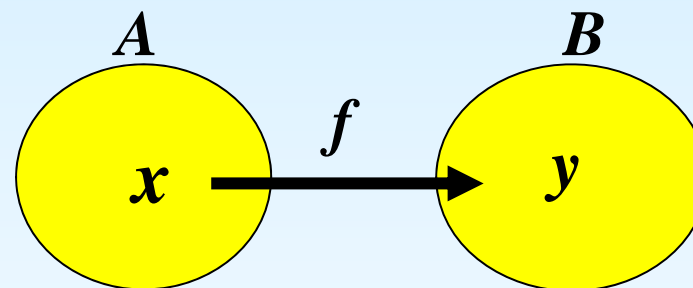
§ 2 映射与函数



一、映射定义

定义2.1 设 A, B 为两个集合, 如果 f 是一种规则,
对 $\forall x \in A$, 在 B 中有唯一元素 y 与之对应,
称 f 是 A 到 B 的映射.

$$f : A \rightarrow B$$



y 称为 x 在映射 f 下的像, $\underline{f(x) = y}$,
此时也称 x 为 y 的一个逆像或者原像.

集合 A 称为映射 f 的定义域, 记为 D_f .

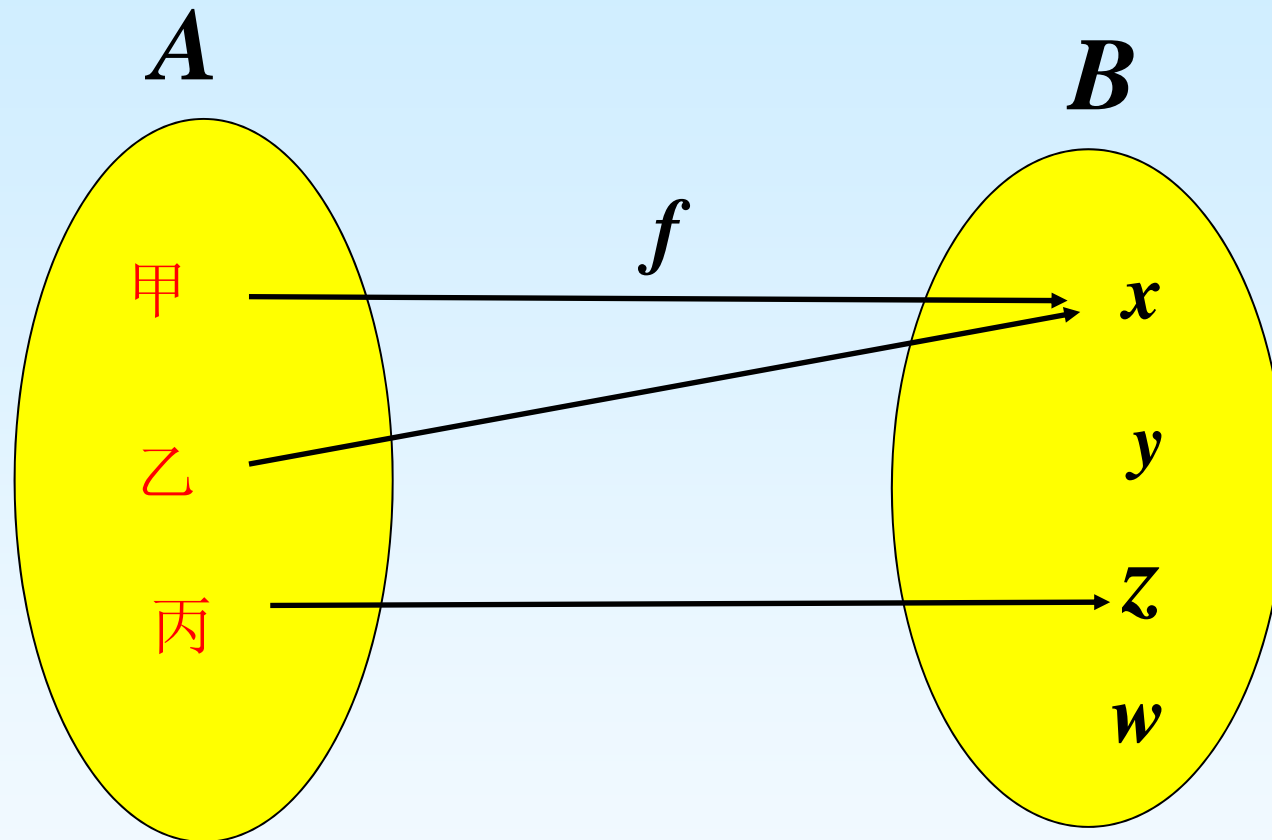
像的全体称为映射 f 的值域, 记为 R_f .

$$D_f = A$$

$$R_f \subset B$$



例1



$f : A \rightarrow B$ 的映射



定义2.2 $f : A \rightarrow B$,

单射 $\forall x, y \in A$, 若 $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$, 则称 f 为单射.

满射 若 $f(A) = B$, 则称 f 为满射.

双射、一一对应 f 既是单射, 又是满射.

可逆映射 设 f 为双射, 则对 $\forall y \in B$, 存在唯一的 $x \in A$, 成立 $f(x) = y$, 由此确定一个从 B 到 A 的映射 g , g 称为映射 f 的逆映射, 记为 $g = f^{-1}$.



复合映射 设 $f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B,$

当 $x \in A$ 时定义映射 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
为映射 f, g 的复合映射.

恒等映射 设 $f : A \rightarrow B$ 可逆映射, $f^{-1} : B \rightarrow A,$ 则

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A. \\ f^{-1} \circ f = I_A \\ f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B. \\ f \circ f^{-1} = I_B \end{array} \right.$$

I_A, I_B 分别称为 A, B 上的恒等映射.



若 f 是某集合到自身的映射，则 f 的 n 次迭代为

$$f^n(x) = \underline{f^{n-1} \circ f} = \underline{f \circ f \circ \dots \circ f} \quad (n \text{ 个})$$

若 f 是某集合到自身的一一 映射，则 还有表示

$$\underline{f^{-n}} = (f^{-1})^n$$



二、函数

1. 定义

$f: X \rightarrow Y$ 的映射, 如果 $X, Y \subseteq \mathbf{R}$, 则称 f 为函数.

记作:

$$y = f(x)$$

因变量

自变量

当 $x_0 \in X$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的 函数值.

数集 X 叫做这个函数的定义域.

函数值全体组成的数集

$R_f = \{y \mid \underline{y = f(x)}, x \in X\}$ 称为函数的值域.



2. 函数的两要素 定义域与对应法则.

约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ $D: [-1,1]$

例如, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D: (-1,1)$



3. 函数的表示方法

(1) 公式法

例如, $y = \sqrt{1 - x^2}$

(2) 列表法

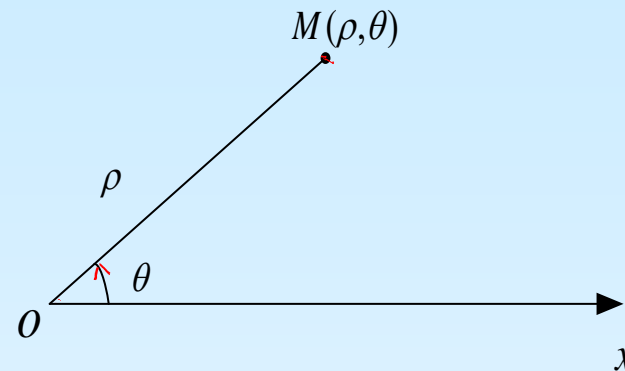
x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	y_2	y_3	y_4

(3) 隐函数 $F(x, y) = 0$

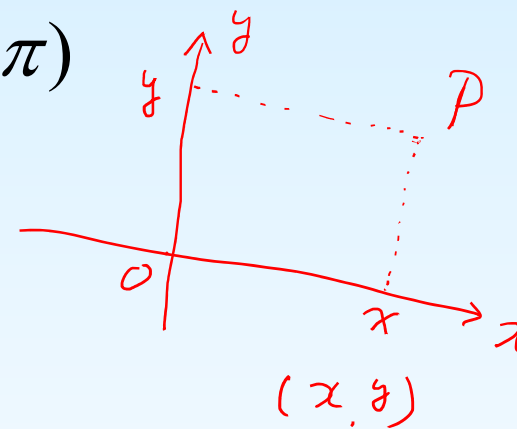
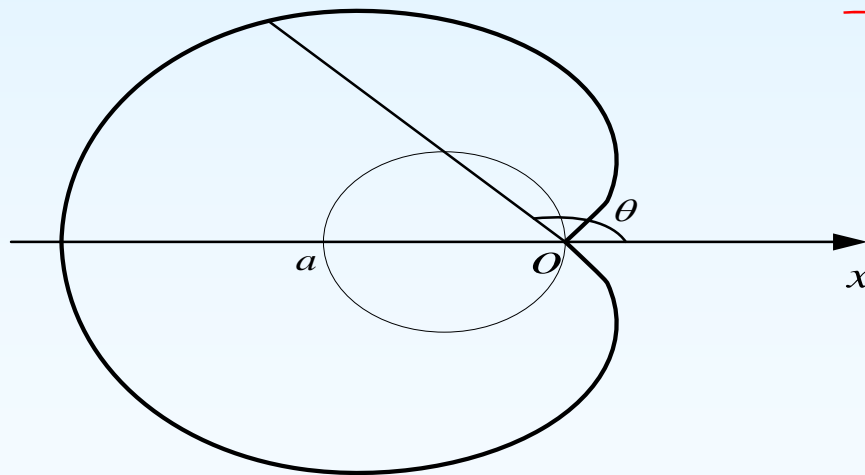
(4) 参数法1 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$



(5) 参数法2---极坐标表示

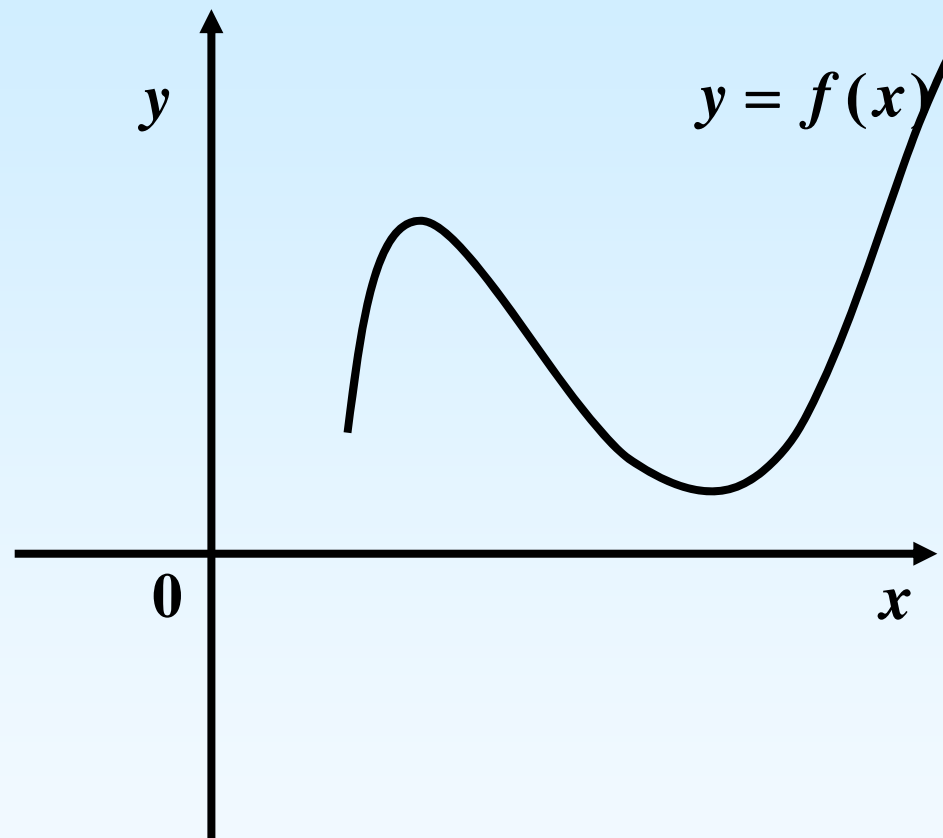


心形线 $\rho = a(1 - \cos \theta), \theta \in [0, 2\pi)$





(6) 图像法

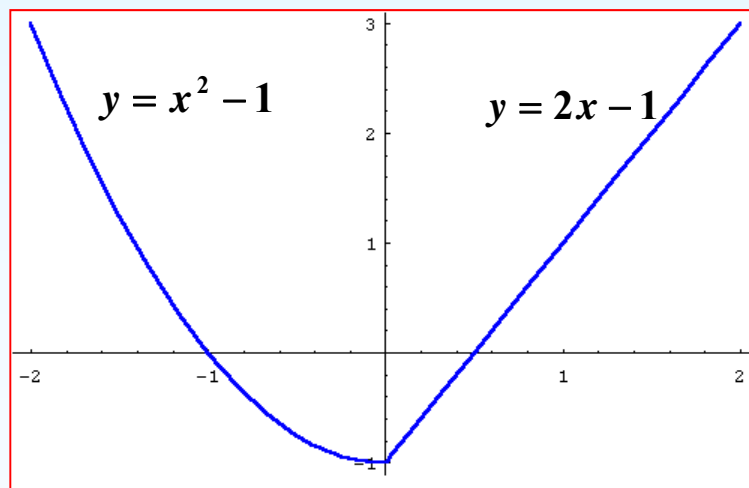




(7) 分段函数法

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$





4、函数的运算

(1) 四则运算

$$D(f) = D_f, \quad D(g) = D_g.$$

和 $f + g$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in D_f \cap D_g.$

差 $f - g$: $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in D_f \cap D_g.$

积 $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D_f \cap D_g.$

商 $\frac{f}{g}$: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0.$



(2) 复合运算

$$\text{设 } y = \sqrt{u}, u = 1 - x^2, \implies y = \sqrt{1 - x^2}$$

定义： 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f ，而函数 $u = g(x)$ 的值域为 W_g ，若 $D_f \cap W_g \neq \emptyset$ ，则称函数 $y = f[g(x)]$ 为 x 的复合函数。

$$y = f \circ g(x) = f[g(x)]$$

$x \leftarrow$ 自变量, $u \leftarrow$ 中间变量, $y \leftarrow$ 因变量,



例1 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = \underline{x}^{10}$, $h(x) = x + 3$,
求 $f \circ g \circ h$

解
$$\begin{aligned} f \circ g \circ h(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10} + 1}. \end{aligned}$$

例2 设 $f(x) = ax + b$, 求 $f^n(x)$.

解 由归纳法易得

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f^2(x) &= f(f(x)) = a f(x) + b \\ &= a(ax + b) + b = a^2x + (a+1)b \end{aligned}$$

$$f^n(x) = a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b.$$



注

1. 不是所有函数都可以复合;

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

定义域 $[-1, 1]$ 值域 $[2, +\infty)$

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

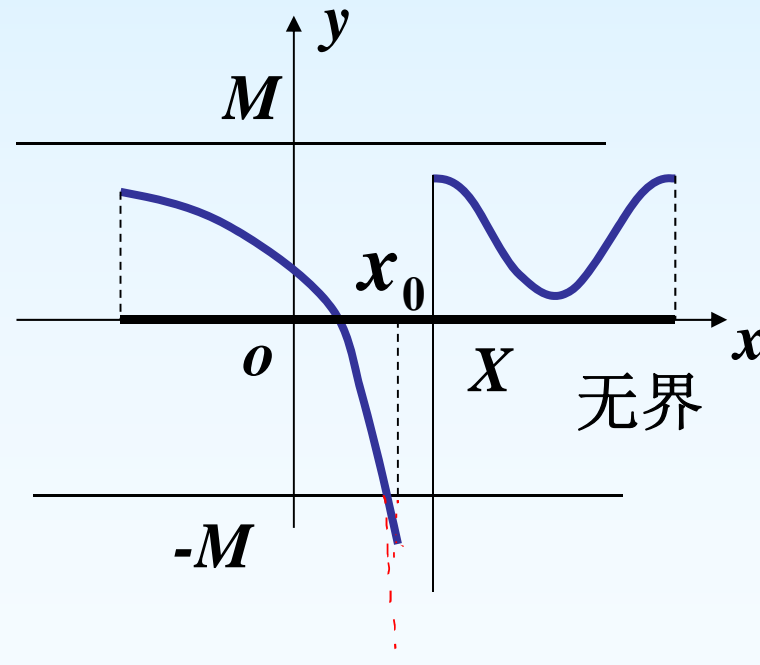
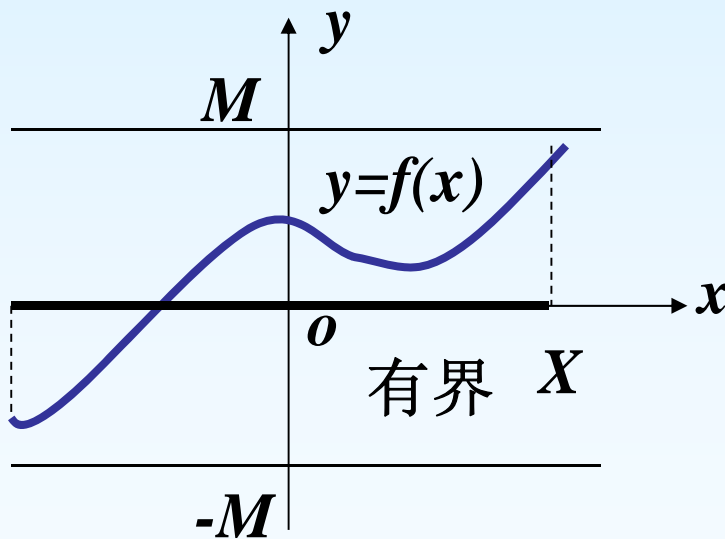
$$f \circ g(x) = f(g(x))$$



5、函数的基本特征

(1) 函数的有界性

若 $X \subseteq D, \exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,
则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称无界.

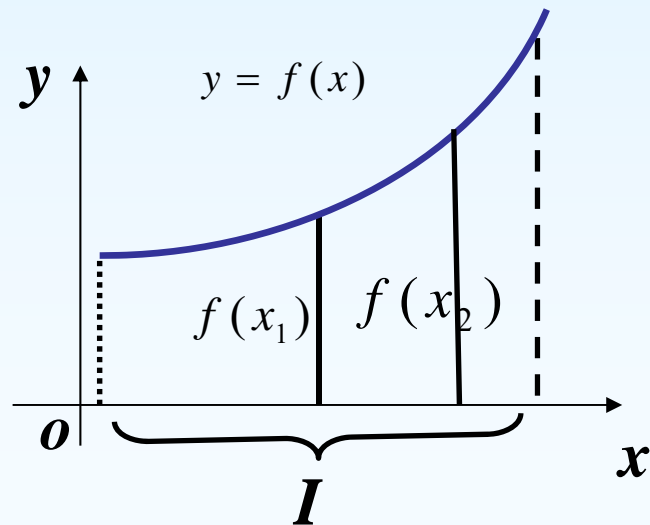




(2) 函数的单调性

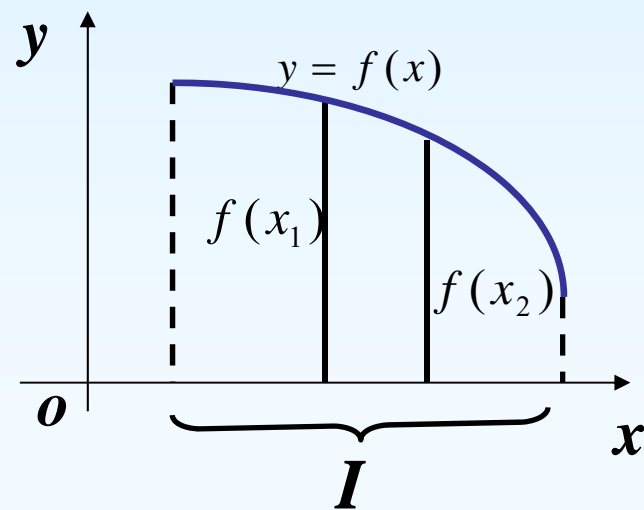
设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (1) $f(x_1) \leq f(x_2)$,

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 ;





设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (2) $f(x_1) \geq f(x_2)$,
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的;

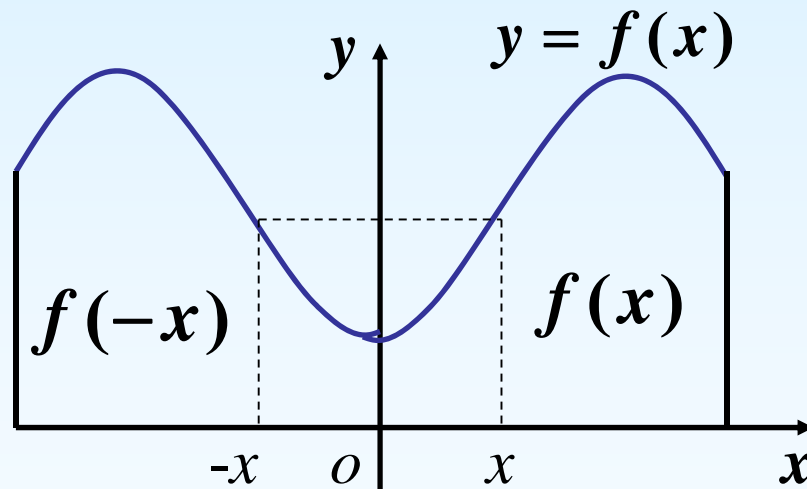




(3) 函数的奇偶性

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有

$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为偶函数;

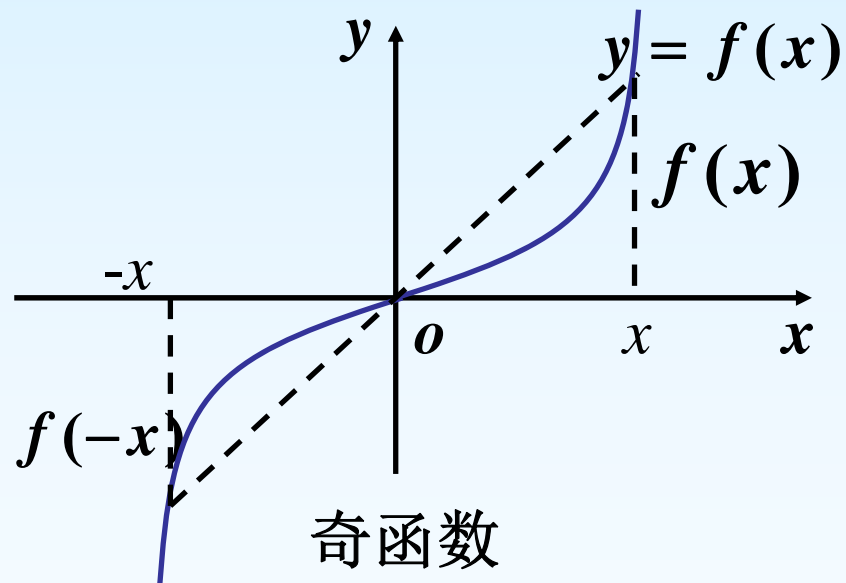


偶函数



设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$ ，有

$f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为奇函数；

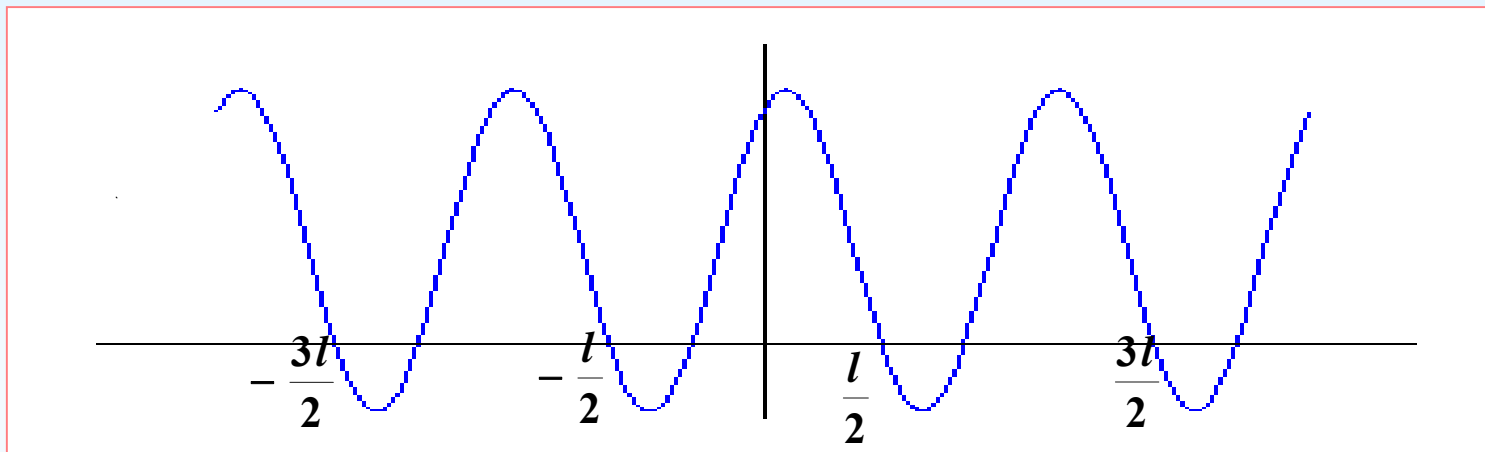




(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,如果存在一个不为零的数 l ,使得对于任一 $x \in D, (x \pm l) \in D$ 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

(通常说周期函数的周期是指其最小正周期).





6、反函数

(1) $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应

$$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y), x \in X, y \in Y.$$

$$\left. \begin{array}{l} f \circ f^{-1}(y) = y, y \in Y \\ f^{-1} \circ f(x) = x, x \in X \end{array} \right\} \text{所以 } f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f \text{ 是恒等映射.}$$

(2) 反函数定理（见第三章）

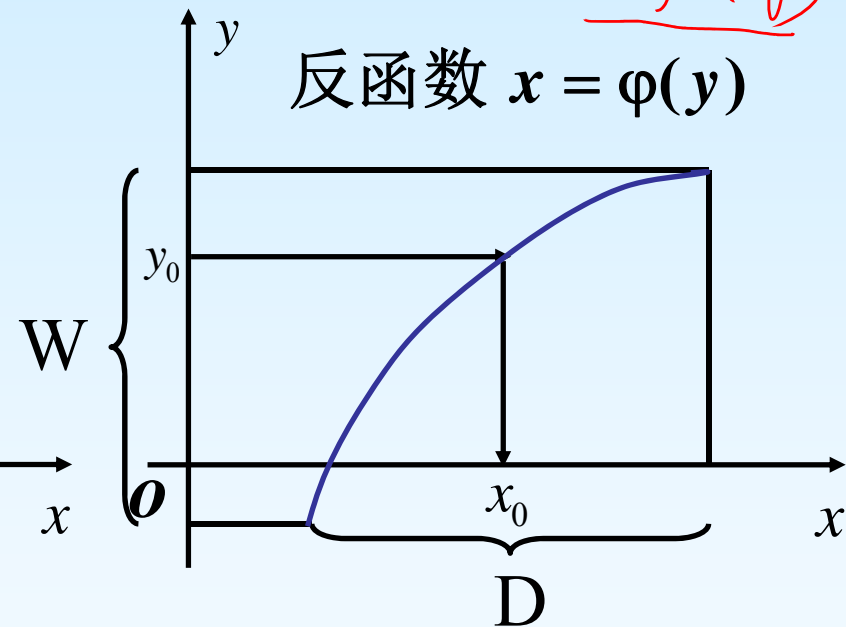
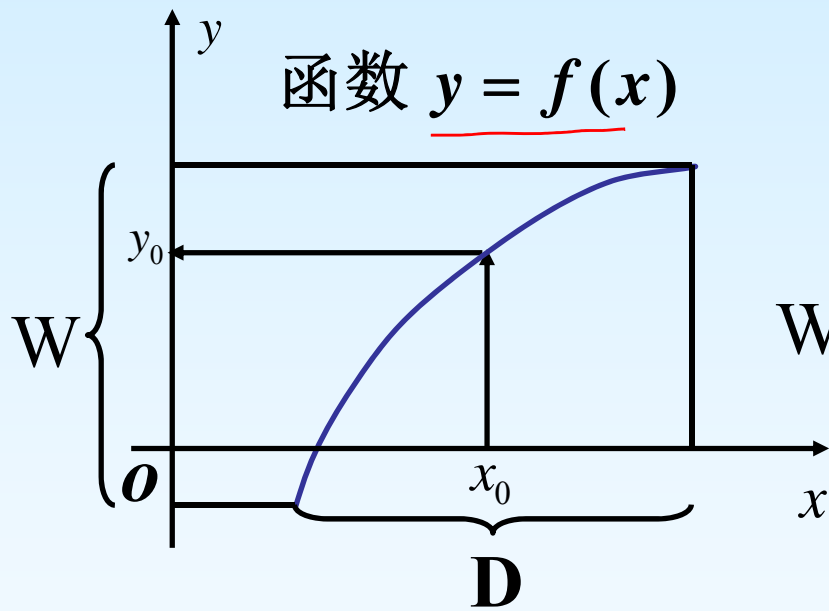
f 在定义域 X 上严格单调增（减），则必存在反函数 f^{-1}

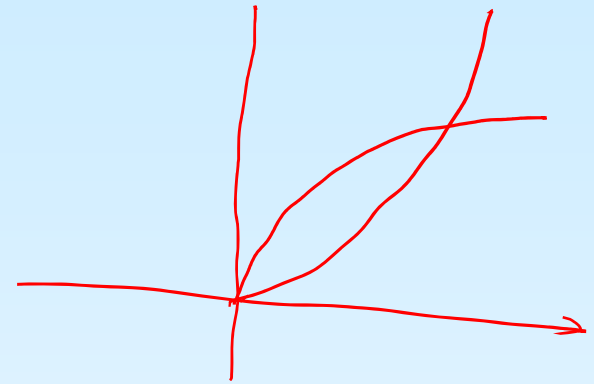
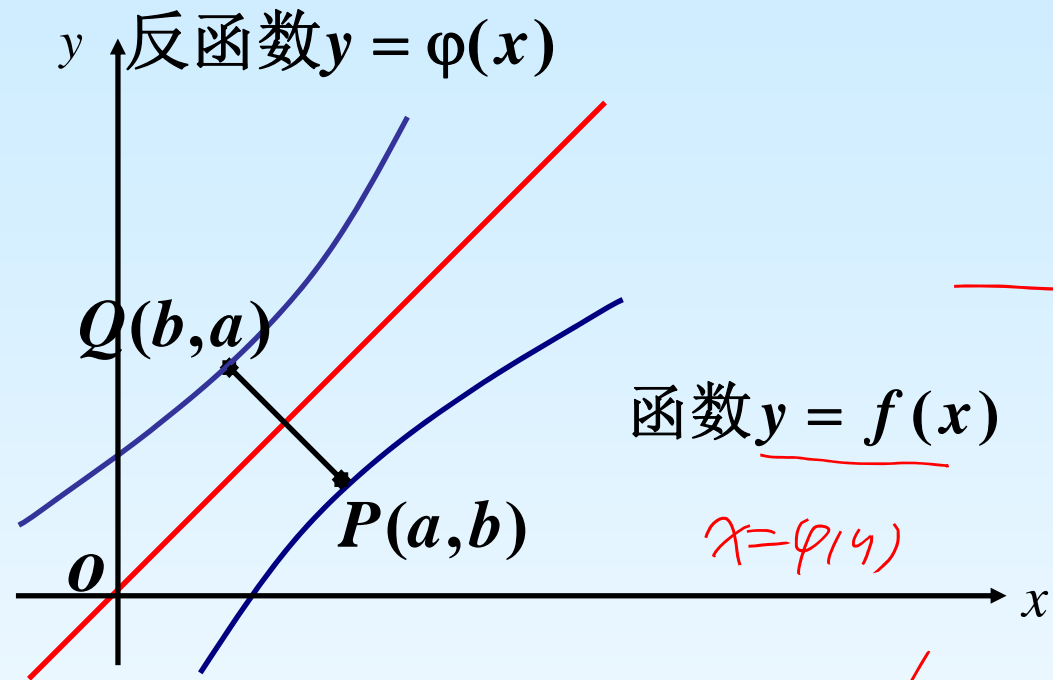
f^{-1} 定义域为 $f(X)$ ，且 f^{-1} 也单调增（减）。



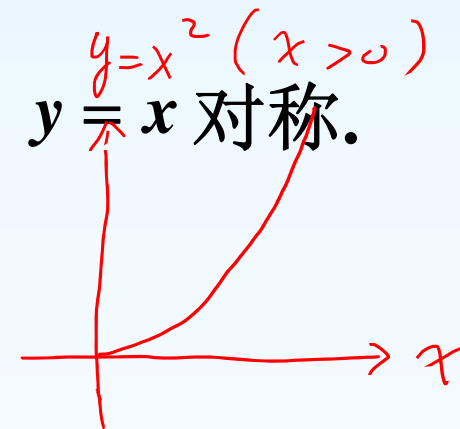
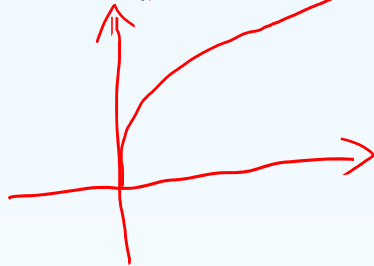
$y = f^{-1}(x)$ 反函数

$x = f^{-1}(y)$





函数 $y = \sqrt{x}$ 与其反函数 $x = y^2 (y > 0)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.





7、初等函数

(1) 基本初等函数

常值函数 $y = C$

幂函数 $y = x^\alpha \leftrightarrow y = x^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha \neq 0)$

指数函数 $y = a^x \leftrightarrow y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

$$y = e^x \leftrightarrow y = \ln x$$

对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x \leftrightarrow y = \arcsin x$

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arctan x$ 等



(2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

$$y = \frac{1 + 2^x \sin x}{\arccos \sqrt{x}},$$

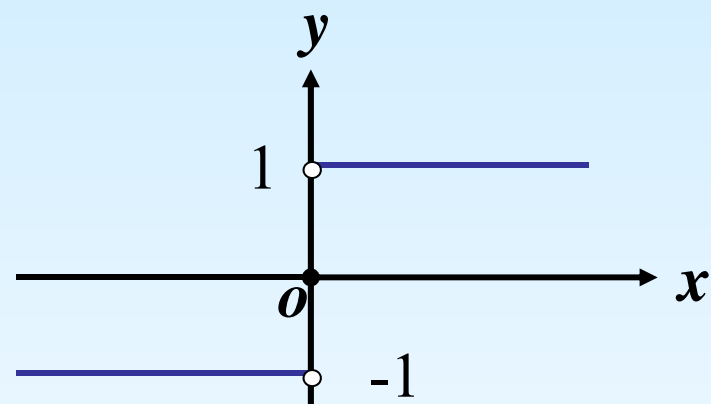
$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$



(3) 非初等函数举例

(a) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

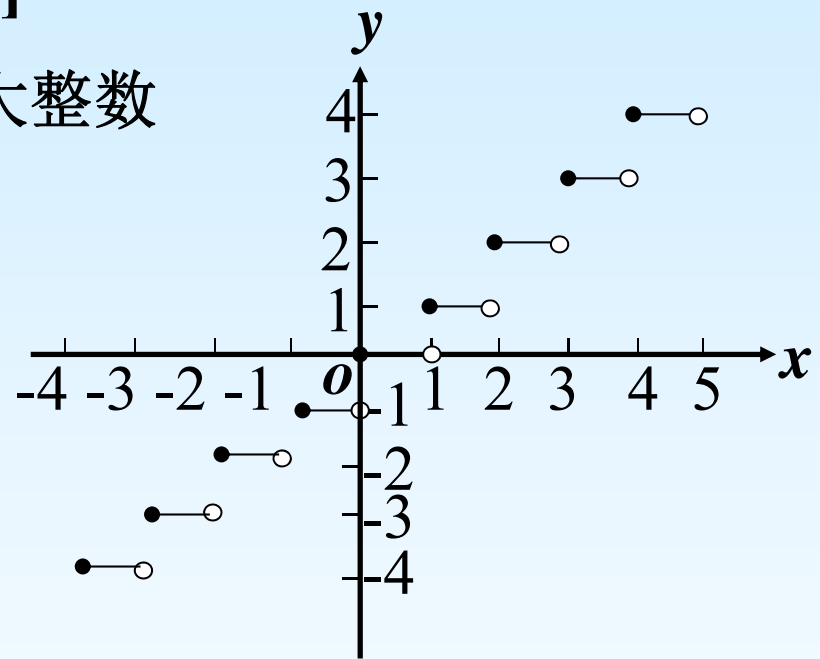


$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$



(b) 取整函数 $y=[x]$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

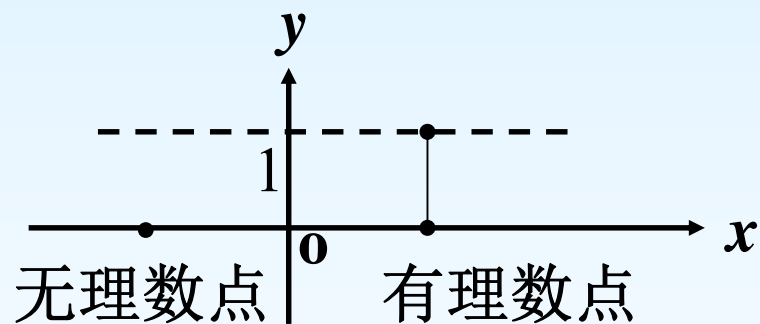


阶梯曲线



(c) 狄利克雷函数

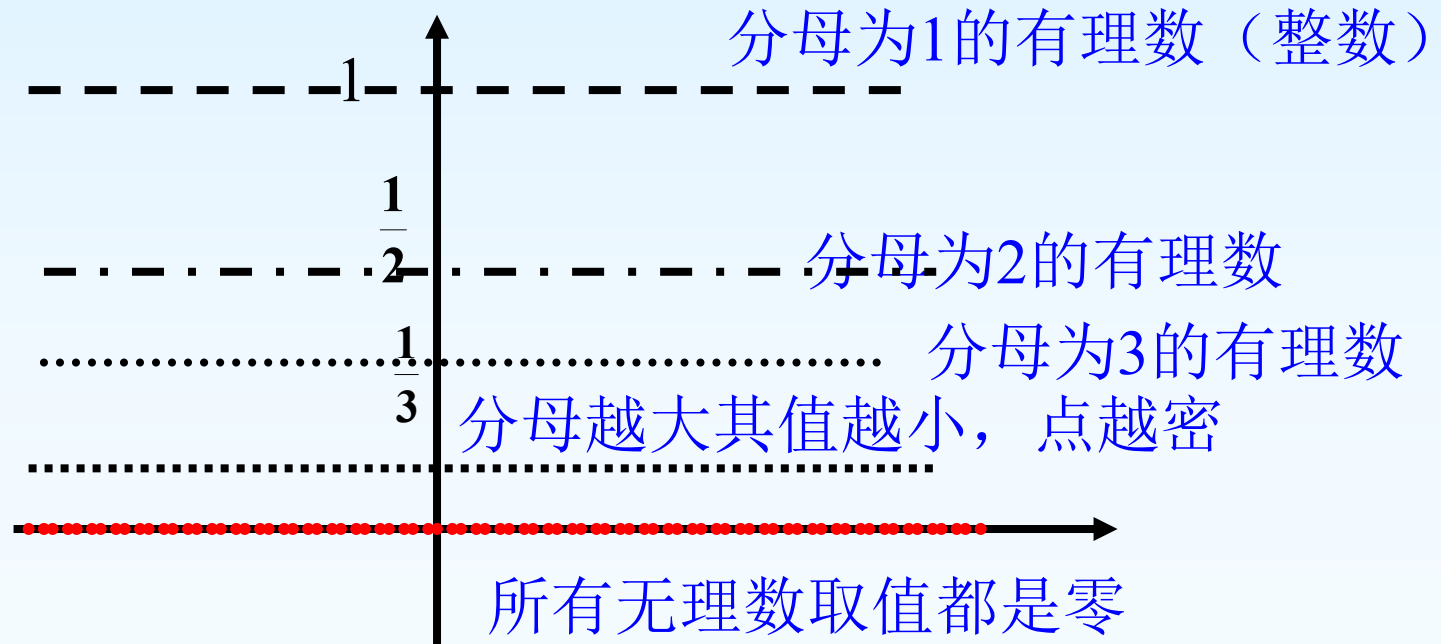
$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$





(d) Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (q > 0, p, q \text{ 互素}), \\ 0, & x \text{ 无理数}. \end{cases}$$





(4) 双曲函数和反双曲函数

双曲正弦

反双曲正弦

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leftrightarrow \operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbb{R}$$

双曲余弦

反双曲余弦

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \leftrightarrow \operatorname{arcch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \in [1, +\infty)$$

双曲正切

反双曲正切

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leftrightarrow \operatorname{arcth} x = \frac{1}{e} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad x \in (-1, 1)$$



补例1

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

求 $f[\varphi(x)]$. $f \circ \varphi(x)$

解
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

1⁰ 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 < 1$, $\longrightarrow x < -1$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$, $\longrightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$;



2⁰ 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\longrightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\longrightarrow x \geq \sqrt{2}$;

综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$



补例2: 假设 $f : R \rightarrow R$, 满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R,$$

证明对一切有理数成立: $f(x) = xf(1)$.

证明: 由于

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

因此 f 是奇函数. 又

$$\begin{aligned} f(n) &= f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1) = f(n-2+1) + f(1) \\ &= f(n-2) + 2f(1) = \cdots = nf(1) \end{aligned}$$



假设 $x = \frac{n}{m}$, $mx = n$, 有 $f(mx) = mf(x)$.

$$\text{所以有 } f(x) = \frac{1}{m} f(n) = \frac{n}{m} f(1) \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} f(1)$$

又由于 f 是奇数函数, 因此 $f\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m} f(1)$.

结论得证!