

2019-2020 学年第一学期期中

考试课程 工科数学分析 (I) 任课老师

班級_____學號_____姓名_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对入									

2019 年 11 月 24 日

一. (本题 20 分, 每小题 4 分)单项选择题。

1. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 以下论断正确的是(B)

(A) 数列 $\{a_n + b_n\}$ 一定是收敛的。 (B) 数列 $\{a_n + b_n\}$ 一定是发散的。

(C) 数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 一定是收敛的。 (D) 数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 一定是发散的。

2. 已知函数 $f:[a,b] \rightarrow [c,d]$, 函数 $g:[c,d] \rightarrow [\alpha,\beta]$, 以下论断正确的是(C)

(A) 如果 $y = f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处不连续, $z = g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ 处连续, 则复合函数 $z = g(f(x))$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处必定不连续。

(B) 如果 $y = f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处不连续, $z = g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ 处不连续, 则复合函数 $z = g(f(x))$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处必定不连续。

(C) 如果 $y = f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处连续, $z = g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ 处连续, 则复合函数 $z = g(f(x))$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处必定连续。

(D) 如果 $y = f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处连续, $z = g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ 处不连续, 则复合函数 $z = g(f(x))$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处必定连续。

3. 已知连续曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \ln(1+2x)$ 在原点相切, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n+1}\right) =$ (D)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 2019$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, $f' \neq 1$,

则 $dy =$ (A)

(A) $\frac{dx}{x(1-f'(y))}$ (B) $\frac{1}{x(1-f'(y))}$ (C) $\frac{dx}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$ (D) $\frac{1}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$

5. 已知 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$, $f(1) = 3$, 则 $f(2) =$ (D)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

二. (本题 30 分, 每小题 5 分) 计算、证明题:

1. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解 因为 $1 \leq n! \leq n^n$, 故 $1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}}$, 由夹逼定理可知极限为 1

2. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

3. 已知参数方程 $\begin{cases} x = e^t - t, \\ y = e^t - \sin t, \end{cases} \quad t \in [1, +\infty),$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dx}{dt} = e^t - 1, \frac{dy}{dt} = e^t - \cos t,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t - \cos t}{e^t - 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t - \cos t}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(e^t + \sin t)(e^t - 1) - e^t(e^t - \cos t)}{(e^t - 1)^3} = \frac{(\sin t + \cos t - 1)e^t - \sin t}{(e^t - 1)^3}$$

4. 设 $y = x^2 \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

解 $y^{(10)} = (x^2 \sin 3x)^{(10)} = x^2 (\sin 3x)^{(10)} + 10 \cdot 2x \cdot (\sin 3x)^{(9)} + 45 \cdot 2 \cdot (\sin 3x)^{(8)}$

$$= x^2 \cdot 3^{10} \sin(3x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}) + 10 \cdot 2 \cdot 3^9 x \cdot \sin(3x + 9 \cdot \frac{\pi}{2}) + 45 \cdot 2 \cdot 3^8 \sin(3x + 8 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$= -3^{10} x^2 \sin 3x + 20 \cdot 3^9 x \cdot \cos 3x + 90 \cdot 3^8 \sin 3x$$

5. 计算函数 $f(x) = e^{1-\cos x}$ 的 Maclaurin 公式直到 x^4 项

解 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$f(x) = e^{1-\cos x} = 1 + (1 - \cos x) + \frac{1}{2!}(1 - \cos x)^2 + o((1 - \cos x)^2)$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{8} \right) x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

6. 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{(\tan x + \sin x)f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. 判断函数 $g(x)$

在 $x=0$ 处是否连续? 若它在 $x=0$ 处不连续, 请指出间断点的类型.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x + \sin x)f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot f'(0) = \frac{1}{2} f'(0) \neq f'(0)$

所以函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 且为第一类间断点 (可去间断点)

三. (本题 6 分) 用定义证明函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

证明: $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq \left| \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \sin \frac{1}{x_1} \right| + \left| \frac{1}{x_2} \sin \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right| + \frac{1}{x_2} \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \leq 2|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

所以, $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty), |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, 则 $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

四. (本题 10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_{n+1} = \sin x_n > 0, n = 1, 2, \dots$.

1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限值;

2) 指出 $\{x_n\}$ 的下确界, 并证之;

3) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2$.

证明: $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 且下有界为 0, 根据单调有界

定理可知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \sin A, \Rightarrow A = 0$.

2) $\inf \{x_n\} = 0$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $n > N$ 时, 有 $0 < x_n < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} 3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 - x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin x_{n-1})^2 x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 - (\sin x_{n-1})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 x^2}{x^2 - (\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = 3 \end{aligned}$$

五. (本题 8 分) 设数列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot (1+1+\cos 1!)} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot (2+1+\cos 2!)} + \cdots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1+\cos n!)}, \quad n=1, 2, \cdots$$

试证明 $\{x_n\}$ 是基本列.

$$\begin{aligned} \text{证明: } |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1) \cdot (n+1+1+\cos(n+1)!)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2) \cdot (n+2+1+\cos(n+1)!)} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1+\cos(n+1)!)} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p)} \\ &\leq \frac{1}{(n+1) \cdot n} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p-1)} \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 使 $n > N$ 时, 对任意的 $p \in N^*$, 有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ 结论得证.

六. (本题 8 分) 已知函数 $f(x) = xe^x$, 试求该函数的单调区间、极值点与极值、凹凸区间和拐点(请列表).

解 $f'(x) = (1+x)e^x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$

$f''(x) = (2+x)e^x$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = -2$

单调递减区间为 $(-\infty, -1)$; 单调递减区间为 $(-1, +\infty)$;

$x = -1$ 是极小值点, 极小值为 $f(-1) = -e^{-1}$;

凹区间为 $(-\infty, -2)$; 凸区间为 $(-2, +\infty)$; 拐点为 $(-2, -2e^{-2})$ 。

本题最好列表

七. (本题 10 分) 已知函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 它在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0$, 且

$f(\frac{1}{2}) = 1$. 试证明:

1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

2) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) + 2\xi(f(\xi) - \xi) = 1$.

证明: 1) 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x) \in C[0, 1]$, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$F(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} > 0, F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0,$$

所以存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$ 。

2) 设 $G(x) = e^{x^2}(f(x) - x)$, 则 $G(x) \in C[0, 1]$, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$G(\eta) = e^{\eta^2}(f(\eta) - \eta) = 0, \quad G(0) = f(0) - 0 = 0,$$

则有存在 $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$, 使得

$$G'(\xi) = 0, \quad \text{即 } f'(\xi) + 2\xi(f(\xi) - \xi) = 1。$$

八. (本题 8 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有三阶连续的导数, 且

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2, \quad f'(1) = 0.$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f'''(\xi) = 6$.

证明: 将函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处展开成 2 阶带拉格朗日型余项的泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(x-1)^3 \\ &= f(1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(x-1)^3 \end{aligned}$$

把 $x = 0, 2$ 分别代入上式得

$$f(0) = f(1) + \frac{f''(1)}{2} - \frac{f'''(\eta_1)}{6}, \quad f(2) = f(1) + \frac{f''(1)}{2} + \frac{f'''(\eta_2)}{6}$$

两式相减得

$$2 = \frac{f'''(\eta_1)}{6} + \frac{f'''(\eta_2)}{6} \Leftrightarrow \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 6$$

利用连续函数的介值性可知结论成立