§2　数列收敛的性质和运算

收敛数列的基本性质

定理2.1 (极限唯一性) 若数列收敛, 则其极限唯一.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$,

由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in N^*$, 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$; 当 $n > N_2$ 时恒有 $|a_n - b| < \varepsilon$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|a-b| = |(a_n - b) - (a_n - a)| \le |a_n - b| + |a_n - a| < 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故极限唯一.

定义2.1（数列有界的定义） 对数列$\{a_n\}$,
若存在一个实数M，对数列所有的项都满足

$$a_n < M, n = 1,2,3,\cdots$$

则称M是$\{a_n\}$的上界.

相应的，可以给出有界和有下界的定义.
一个数列即有上界又有下界，则称为有界数列.

例如， 数列$\{\frac{n}{n+1}\}$; 有界 数列$\{2^n\}$. 无界

定理2.2 (有界性) 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时恒有 $|a_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < a_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数 n, 皆有 $|a_n| \le M$.

推论 无界数列必定发散.

定理2.3 (保序性)

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,若$a > b$,则存在$N \in N^*$,

当$n > N$时,有$a_n > b_n$;

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,若$\exists \mathrm{N} \in N^*$,当$n > N$时,

有$a_n \geq b_n$,则有$a \geq b$.

证 只需证明(1). 令$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$,则由数列收敛的定义

$\exists N_1$,当$n > N_1$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,即$a_n > a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$.

$\exists N_2$,当$n > N_2$时,$|b_n - b| < \varepsilon$,即$b_n < b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$.

取$N = \max\{N_1, N_2\}$,当$n > N$,由以上得$a_n > b_n$.

注 (2)中即使是$a_n > b_n$,也可能得到$a = b$.

例如$a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{1}{n+1}$,显然$a_n > b_n$, 但是$a = b = 0$.

推论 (保号性)

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0(< 0)$，则存在$N \in N^*$，当$n > N$时，有$a_n > 0(< 0)$；

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，若$\exists \mathrm{N} \in N^*$，当$n > N$时，$a_n \geq 0(\leq 0)_n$，则$a \geq 0(\leq 0)$.

子列极限

定义2.2 在数列$\{a_n\}$中按照先后次序任意抽取无限多项，这样得到的一个数列$\{a_{n_k}\}$称为原数列的子数列，简称子列.

注 (1)a_{n_k}在子列中是第k项，在原数列中是第n_k项.

(2)$\forall k, n_k \geq k$;　$\forall l \geq k, n_l \geq n_k$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K$,当$k > K$时，恒有$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

定理2.4 如果数列 $\{a_n\}$收敛于 a ，那么它的任一子数列也收敛于 a .

证 设 $\{a_{n_k}\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的任一子列,

由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$可知, $\forall\varepsilon > 0, \exists N,$当$n > N$时， 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

取 $K = N$, 则当$k > K$时, $n_k > n_K = n_N \geq N.$

于是 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon,$从而可得$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a.$

注 (1)若$\{a_n\}$有一个子列发散或两个子列不收敛于同一极限，则$\{a_n\}$发散.

例如 数列$\{(-1)^n\}$发散，

因为奇数项子列收敛于-1，偶数项子列收敛于1;

数列$\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$发散，

因为奇数项组成的数列$\{\sin\frac{2k-1}{2}\pi\}$即$\{(-1)^{k-1}\}$发散.

(2)一般情况下若两个子列极限相等，无法断定原数列收敛，但是若$\{a_{2k}\},\{a_{2k+1}\}$收敛且极限相同则$\{a_n\}$收敛.

极限的四则运算

定理2.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n \pm b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n \cdot b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},$ 其中$b \neq 0.$

证 (1)由绝对值的三角不等式可得;

$$(2)\,|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|$$

$$\le|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|.$$

由b_n收敛可得b_n有界，即存在M,使得$|b_n|<M$,

因为a_n，b_n收敛，由收敛的定义可得

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_1,n>N_1,|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\exists N_2,n>N_2,|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2|a|},$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$,得$|a_nb_n-ab|<\varepsilon$.

(3) 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$

对于$\varepsilon_0=\frac{|b|}{2}>0,\exists N_1, s.t$ 当$n>N_1$时, $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$,

此时$|b_n|>\frac{|b|}{2}>0$.所以当$n>N_1$时,有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_n b|}\le\frac{2}{b^2}|b_n-b|.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 可知对$\forall\varepsilon>0,\exists N_2$,当$n>\mathrm{N}_2$时,

$$|b_n-b|<\frac{b^2}{2}\varepsilon.$$

因此当$n > \max\{N_1, N_2\}$时，便有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \le \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \varepsilon.$$

即证得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 再由(2)易见结论成立.

例1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}$.

解 $$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}$$

例2 设 $|q|<1$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$$

$$=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n \quad =\frac{1}{1-q}.$$

夹逼定理

定理2.6 若数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足：

① $a_n \le b_n \le c_n, n = 1,2,3,\cdots,$

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a,$

则数列$\{b_n\}$的极限也存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

注 满足条件 ① 可以从某项开始，不必从a_1开始.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$,则

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0,\ N_2 > 0,$ 使得

当$n > N_1$时恒有$|a_n - a| < \varepsilon$,

当$n > N_2$时恒有$|c_n - a| < \varepsilon$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n > N$时，上面两式同时成立,

即$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,　　$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$,

则当$n > N$时，成立

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon,$$

即$|b_n - a| < \varepsilon$，$\therefore \lim_{n \to \infty} b_n = a.$

例3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$

解 因为

$$0<(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}\le\frac{4}{\sqrt{n+3}}<\frac{4}{\sqrt{n}}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，由夹逼定理，

可得$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0.$

例4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例5 设$a>0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$

证 先设$a\geq 1$，当$n>a$时，有

$$1\leq a^{\frac{1}{n}}\leq n^{\frac{1}{n}}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼定理知

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$对$a\geq 1$成立.

再设$a\in(0,1)$，这时$a^{-1}>1$，于是

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1.$$

例6　设$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k$$

证明　由不等式

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k a_k^n} \to a_k$$

由夹逼定理，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k$$

小结

1、收敛数列的性质:

唯一性、有界性、不等式性质

2、子列极限

3、极限的四则运算

4、夹逼准则（两边夹法则）

作业

习题2.2

1, 3, 5, 6(1)(3)(4)(5)(8)(10)(12),

7, 8(2)(3)(5)(6),