向量空间

向量是线性代数的重点内容之一，也是难点，对逻辑推理有较高的要求.

本章从研究向量的线性关系(线性组合，线性相关、无关)出发，然后讨论向量组含最多的线性无关的向量的个数，即引出向量组的秩和极大无关组，进而扩展到向量空间的基、维数、坐标等. 最后，应用向量空间的理论研究线性方程组解的结构.

本章特点：概念多，定理多，结论多，证明多

目 录

1. n维向量的定义与运算
2. 线性相关与线性无关

一、n维向量的定义与运算

（一）3维向量

设三个坐标轴上的基本单位向量为

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1)$$

则任一三维向量可表示为

$$\vec{a}=\underbrace{(a_x,a_y,a_z)}_{\text{坐标}}=\underbrace{a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}}_{\text{用基本向量表示}}$$

运算：

(1) 加法：$(a_x,a_y,a_z)\pm(b_x,b_y,b_z)=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

(2) 数乘：$k(a_x,a_y,a_z)=(ka_x,ka_y,ka_z)$

(3) 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ -------- 向量内积与模和夹角关系

$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ -------- 可用作内积定义

一、n维向量的定义与运算

（一）3维向量

向　　量

$(n \le 3)$

解析几何

线性代数

既有大小又有方向的量

坐标系

有次序的数组成的数组

几何形象：可随意平行移动的有向线段

代数形象：向量的坐标表示式

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

一、n维向量的定义与运算

（二）n维向量的定义

定义 任意数域上的 n 个有顺序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为**n维向量**. 其中数 a_j 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 j 个分量(或坐标).

向量的分量都是实数时称为**实向量**，分量中有复数时称为**复向量**. 分量都是0的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$.

例如：

$(1,2,3,\cdots,n)$ ⟶ n维实向量

$(1+2i, 2+3i, \cdots, n+(n+1)i)$ ⟶ n维复向量

$(0,0,0,\cdots,0)$ ⟶ n维零向量

数域 F 上全体 n 维向量的集合称为n维向量空间（或数组空间），记为 $F^{1\times n}$ 或 F^n.

（三）n维向量的实际意义

例1 确定飞机的状态，需要以下6个参数：

机身的仰角 φ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

机翼的转角 ψ $(-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 θ $(0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数 $P(x,y,z)$

所以，确定飞机的状态，需用6维向量

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

$n > 3$ 时，n 维向量没有直观的几何形象.

一、n维向量的定义与运算

例2　$n-1$次代数多项式

$$f(t)=a_1+a_2t+\cdots+a_nt^{n-1}\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$ 系数向量

例3　线性方程组 $Ax=b$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

一、n维向量的定义与运算

增广矩阵 $$\hat{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$$

其中

$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},b_1)$ —— 第1个方程

$\boldsymbol{\beta}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},b_2)$ —— 第2个方程

$\vdots$

$\boldsymbol{\beta}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn},b_m)$ —— 第m个方程

未知向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 右端向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

一、n维向量的定义与运算

（四）n维向量的运算

1. 行向量、列向量、转置

行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　　列向量 $\beta=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

转置 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}$　　$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}$

注意：行、列向量在代数上表示不同的向量，在几何上表示同一个向量.

2. 两向量相等

设$F^{1\times n}$中任意2行（列）向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_k)\qquad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$$

则　$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow k=l$ 且 $a_i=b_i\quad (i=1,2,\cdots,k)$

（四）n维向量的运算

3. 向量的线性运算

1) 加法　设$F^{1\times n}$中任意2行（列）向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\qquad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$　同维同形

则　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

2) 数乘　$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

3) 负向量　$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

4) 减法　$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$

（四）n维向量的运算

5) 向量线性运算的运算规律

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是$F^{1\times n}$中行/列向量，k,l为数域F中的数

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

（四）n维向量的运算

4. 行向量与列向量的乘法

行向量与列向量可以进行如下乘法运算：

设$F^{1\times n}$中任意2个行向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \qquad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

则 $$\alpha\beta^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

（四）n维向量的运算

5. 向量的（标准）内积

定义：设有$F^{1\times n}$中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，称

$$[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha\beta^T$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的标准内积.

有的书上也记作$\langle\alpha,\beta\rangle$或$(\alpha,\beta)$.

一、n维向量的定义与运算

（四）n维向量的运算

6. 向量范数（模，长度）

定义：任意n维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的范数定义为

$$\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

7. 夹角 设α与β是n维非零向量，则其夹角定义为

$$\varphi=\arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$$

$$=\arccos\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$$

$$(0\le\varphi\le\pi)$$

一、n维向量的定义与运算

（四）n维向量的运算

8. 正交

若$[\alpha,\beta]=0$，则称向量α与β正交，记作$\alpha\perp\beta$

$$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow[\alpha,\beta]=0\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

9. 非零向量单位化　　α是单位向量$\Leftrightarrow\|\alpha\|=1$

设$\alpha\neq\boldsymbol{0}$，单位化向量　$\alpha'=\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$

则有$\|\alpha'\|=1$且α'与α同向.

一、n维向量的定义与运算

（五）n维向量的线性组合

1. 线性组合、线性表示

定义 设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 $F^{1\times n}$ 中的**n**维向量，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称 α 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合. 称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为组合系数. 又称 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

例如

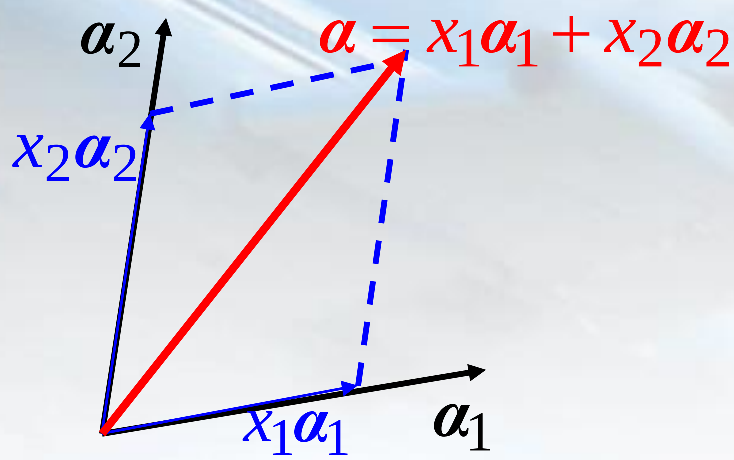
(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,1),\ \boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 线性表示为 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

（五）n维向量的线性组合

(2) 向量组$\alpha_1=(1,2,-1), \alpha_2=(2,-3,1), \alpha_3=(4,1,-1)$，则有

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$$

因此，α_3 是α_1和 α_2 的线性组合.



(五) n维向量的线性组合

2. 线性表示的矩阵形式，与线性方程组的关系

例4 设向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

(1) 试判断 β_4 是否可由 β_1,β_2,β_3 线性表示？

(2) 如果可以的话，求出一个线性表示式.

作答

（五）n维向量的线性组合

解 β_4 可由 β_1,β_2,β_3线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在一组数 k_1,k_2,k_3 使得

$$\beta_4 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 3k_3 = 5 \\ \quad\ \ k_2 + \ k_3 = 3 \\ -k_1 + k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

有解

一、n维向量的定义与运算

(五) n维向量的线性组合

而

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

取特解 $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 0$

所以，β_4可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示为

$$\beta_4 = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 0\beta_3$$

一、n维向量的定义与运算

（五）n维向量的线性组合

判断数组向量 α 是否可由另一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示的问题

可以转化为判定非齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \alpha$$

是否有解：若有解，则可以；若无解，则不可以.

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

定义　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 F^n 中的n维向量，

(1) 若有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关;

(2) 否则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

“否则” $\Leftrightarrow$ 没有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$， 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\Leftrightarrow$ 对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$， 都有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

$\Leftrightarrow$ 只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 的时候，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\Leftrightarrow$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，只有

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

特别地：(1) 对单个向量 α 组成的向量组

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{线性相关} \\ \alpha \neq 0 & \text{线性无关} \end{cases}$$

(2) 一组同维向量，若包含零向量，则必定线性相关.

注意：**对任意一组向量，不是线性相关就是线性无关.**

主观题 10分

设置

例5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是两两正交的非零向量组，证明：该向量组线性无关.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

例5　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是两两正交的非零向量组，证明：该向量组线性无关.

证　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

把上式两端同时与 α_i 作内积，有

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

$$k_1[\alpha_1,\alpha_i]+k_2[\alpha_2,\alpha_i]+\cdots+k_i[\alpha_i,\alpha_i]+\cdots+k_m[\alpha_m,\alpha_i]=0$$

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，所以

$$[\alpha_i,\alpha_j]=0 \quad (i\neq j)$$

所以 $$k_i[\alpha_i,\alpha_i]=0$$

又因为 $$[\alpha_i,\alpha_i]>0 \qquad (\because \alpha_i\neq 0)$$

所以一定有 $$k_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证毕

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

例6　判断n维向量组

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ 的线性相关性.

解　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$$

二、线性相关与线性无关

（一）线性相关与线性无关的定义

即 $$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0$$

所以只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时上式才成立，
所以此向量组线性无关.

一般地，称向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为单位坐标向量组.

例7 判断向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

的线性相关性.

作答

二、线性相关与线性无关

（二）通过线性方程组的解判断线性相关性

例7　判断向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

的线性相关性.

解法一　由例4知 $\beta_4=2\beta_1+3\beta_2+0\beta_3$

即有　$2\beta_1+3\beta_2+0\beta_3-1\cdot\beta_4=0$

而 $k_1=2,k_2=3,k_3=0,k_4=-1$ 不全为零，

所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

解法二　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_4$，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$$

（二）通过线性方程组的解判断线性相关性

即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=0$$

比较上式两端向量的对应分量，得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+3k_3+5k_4=0\\ \quad\ \ k_2+\ k_3+3k_4=0\\ -k_1+k_2-k_3+k_4=0\end{cases}$$

可得一组非零解 $k_1=2,k_2=3,k_3=0,k_4=-1$，

所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

二、线性相关与线性无关

（二）通过线性方程组的解判断线性相关性

判断数字向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关性的方法：齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

有非零解 $\leftarrow\rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；
只有零解 $\leftarrow\rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

主观题 10分

设置

例8 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，判断向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 的线性相关性.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

二、线性相关与线性无关

（二）通过线性方程组的解判断线性相关

例8　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，判断向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 的线性相关性.

解　设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+(k_3+k_1)\alpha_3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 \qquad +k_3=0 \\ k_1+k_2 \qquad =0 \\ \qquad k_2+k_3=0 \end{cases} \quad \text{（因为 } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \text{ 线性无关）}$$

二、线性相关与线性无关

（二）通过线性方程组的解判断线性相关

此方程组只有零解，即

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

二、线性相关与线性无关

（三）三维向量线性相关性的几何背景

线性相关

- 若两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线， 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1$

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2， 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$

线性无关

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线， 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq l\boldsymbol{\alpha}_1 \ (\forall l \in \boldsymbol{R})$

$\Leftrightarrow$ 只有当 k_1, k_2 全为0时， 才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$

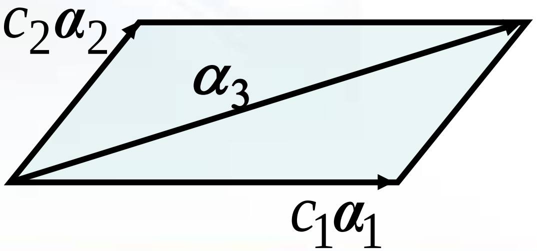
线性相关

- 若三个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面， 则其中至少有一个向量可由另外两个向量线性表示

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3， 使

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$



二、线性相关与线性无关

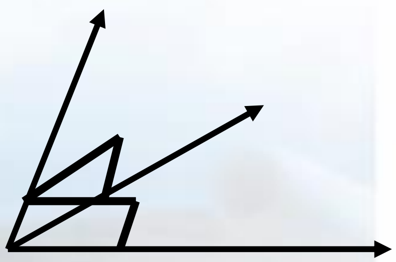
（三）三维向量线性相关性的几何背景

线性无关

➢ 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不共面，则任一个向量都不能由另外两个向量线性表示

$\Leftrightarrow$ 只有当k_1,k_2,k_3全为0时，才有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$



二、线性相关与线性无关

（四）线性相关性判定定理

定理1 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（$m\geq 2$）线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中某个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证：必要性.设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关. 由定义, $\exists$不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$

若$k_l\neq 0$ $(1\leq l\leq m)$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}_l=\left(-\frac{k_1}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\left(-\frac{k_{l-1}}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_{l-1}+\left(-\frac{k_{l+1}}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_{l+1}+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_m$$

充分性. 设$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leq i\leq m)$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,

则有一组数$k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$,使

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

即有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$

其中$k_i=-1$,可见$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为零, $\therefore\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

证毕

二、线性相关与线性无关

（四）线性相关性判定定理

(1) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,
则α_1 可用 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. ……………………………(×)

例: $\alpha_1=(1,0,0),\ \ \alpha_2=(1,1,0),\ \ \alpha_3=(-1,-1,0),$

α_1 不能用 α_2,α_3 线性表示,

但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关:

$$0\alpha_1+1\alpha_2+1\alpha_3=\boldsymbol{0}.$$

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,
则其中任一个可用其余m-1个线性表示. …………………(×)

(3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,
则其中有一个可用其余m-1个线性表示. …………………(√)

(4) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中,有一个不能用其余m-1个线性表示,
则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. …………(×)

二、线性相关与线性无关

（四）线性相关性判定定理

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中,任一个都不能用其余 m-1个线性表示,
则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. ....(√)
说明: 此命题为定理1的逆否命题.

(6) 若$\boldsymbol{0}$可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,
则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. ....(×)

(7) 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是A的列向量组,
齐次线性方程组 $Ax=0$, 则

- $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关. ....(√)
- $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关. ....(√)

说明: $Ax=0 \Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$

二、线性相关与线性无关

（四）线性相关性判定定理

定理 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 且表示形式唯一(系数唯一).

证明 $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关, $\therefore\exists$一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 不全为零, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=\mathbf{0}$$

可设 $k\neq 0$. 若不然, 假设 $k=0$, 则由上式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 得$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,

与 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 不全为零矛盾.

$\therefore k\neq 0$. 故 β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示为

$$\beta=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m$$

(唯一性) 设 β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的两种线性表示:

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\qquad \beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow (k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=\mathbf{0}$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_m=l_m$ 证毕

二、线性相关与线性无关

（四）线性相关性判定定理

定理3 向量组的部分向量线性相关⇒此向量组线性相关.

证：不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中，部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ $(r\le m)$ 线性相关,

$\therefore \exists$不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$$

$\therefore$ 可令$k_{r+1}=\cdots=k_m=0$, 使下式成立

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

证毕

推论1 含零向量的向量组一定线性相关.

推论2 (定理3的逆否命题)

向量组线性无关 ⇒ 任一部分向量组线性无关.

二、线性相关与线性无关

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,
则其中至少有m-1个向量线性相关. ………………………(×)

例: $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(1,1,0)$,

线性相关: $\alpha_1+\alpha_2+(-1)\alpha_3=0$

但 α_1与α_2,

α_2与α_3,

α_3与α_1,

每二个都线性无关.

(9) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意m-1个向量都线性无关,
则此组向量线性无关. ………………………(×)

见(8)之例.此命题为命题(8)的逆否命题，故也错.

(10) 若向量组线性相关,
则它必有一部分向量线性相关. …………………(×)

定理3的逆命题, 不成立.

二、线性相关与线性无关

向量个数：少相关，则多相关；
多无关，则少无关。

向量维数：短无关，则长无关；
长相关，则短相关。

注：逆命题都不成立。

例9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\ (m\geq 3)$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，试讨论：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示？

二、线性相关与线性无关

例9　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}\ (m\geq 3)$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，试讨论：

(1)　α_1 能否由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示？

(2)　α_m 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示？

解　(1) 因为 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以其部分组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 也线性无关。

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性相关，则由定理2知，α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示。

(2)（反证）假设 α_m 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示

即存在一组数 $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_{m\text{-}1}$，使得

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} \qquad (1)$$

二、线性相关与线性无关

由第一问结论可知 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示

即存在一组数 $l_2,l_3,\cdots,l_{m-1}$，使得

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + \cdots + l_{m-1}\alpha_{m-1}$$

代入(1)式得：

$$\alpha_m = (k_1 l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1 l_3 + k_3)\alpha_3 + \ldots + (k_1 l_{m-1} + k_{m-1})\alpha_{m-1}$$

即 α_m 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，

这与已知 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾。

所以假设不成立，即

α_m 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示。