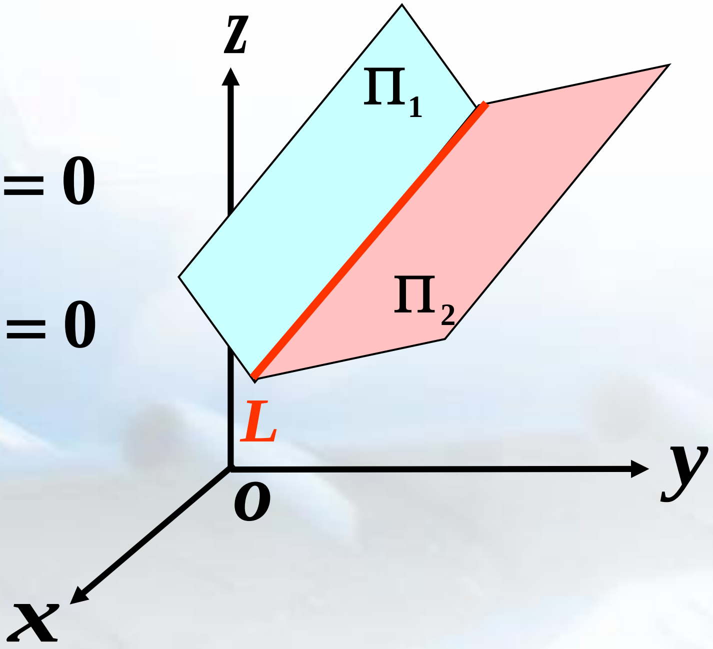
第六节空间直线方程

一、空间直线的一般方程

定义 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



直线L的方程为

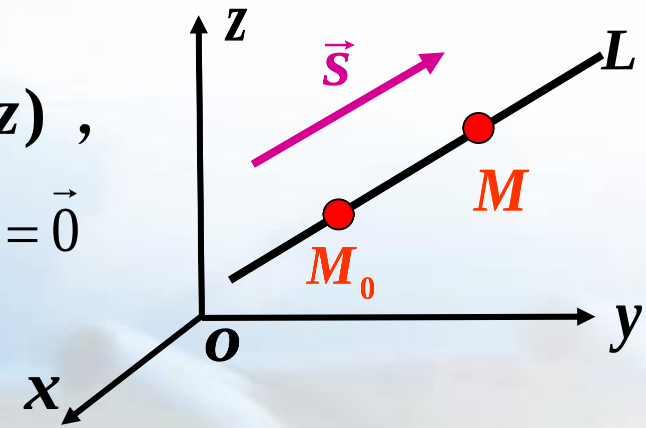
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

(A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例)

二、空间直线的对称式与参数方程

设直线L通过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，并且平行于非零向量$\vec{s}=(m, n, p)$，下面建立直线L的方程.



设直线上的任一点为 $M(x, y, z)$，

则必有 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$，从而 $\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\vec{0}$

由于 $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

因此 $$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

直线的点向式方程或对称式方程

称平行于直线的非零向量 $\vec{s}$ 为该直线的方向向量.
方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

二、空间直线的对称式与参数方程

注　在直线的点向式方程中某些分母为零时，其分子也应理解为零.

例如　$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+5}{2}$　表示 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$,

即平行于z轴的直线；

而　$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+5}{2}$　表示 $\begin{cases} \dfrac{y}{3}=\dfrac{z+5}{2} \\ x=2 \end{cases}$

即平行于yOz面（在平面$x=2$上）的直线.

二、空间直线的对称式与参数方程

已知直线的点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

可得 $$\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}}$$

直线的参数方程

$$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$$

二、空间直线的对称式与参数方程

例1 一直线过点$A(2,-3,4)$，且与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$$ 平行，求其方程.

解 已知直线的方向向量为 $\vec{s}_1=(4,-1,3)$,

依题意,所求直线与已知直线平行,

故可取直线的方向向量 $\vec{s}=\vec{s}_1=(4,-1,3)$,

因此所求直线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{3}.$$

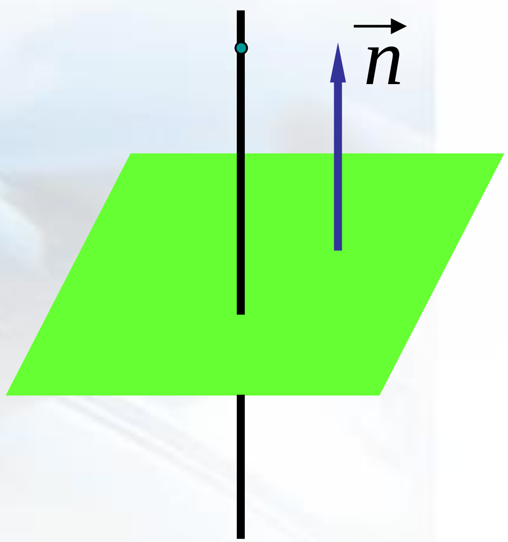
二、空间直线的对称式与参数方程

例2　求过点$(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程.

解 取已知平面的法向量

$$\vec{n}=(2,-3,1)$$

为所求直线的方向向量.



则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$$

主观题 10分

设置

例 3 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例 3 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例4 用对称式方程及参数方程表示直线:

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ y_0 - 3z_0 - 6 = 0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0, \quad z_0 = -2$

点坐标 $(1,0,-2)$,

二、空间直线的对称式与参数方程

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3},$

参数方程 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}.$

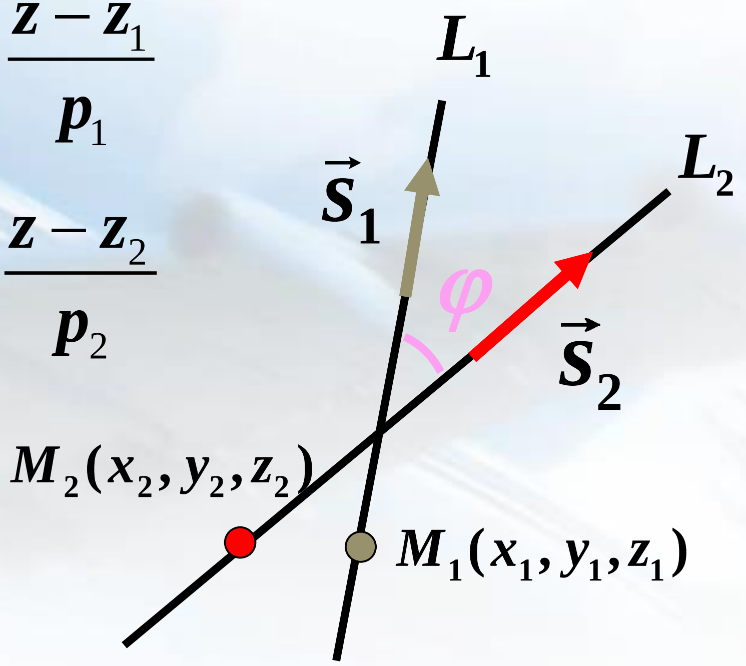
三、两直线的夹角

定义 两直线的方向向量的夹角称为两直线的夹角.

通常规定直线夹角为锐角，即 $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$

直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$



$\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$

$\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$

三、两直线的夹角

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\varphi = |\cos\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|$$

$$= \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

两直线夹角余弦公式

两条直线位置特征：

(1) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$

(2) $L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}.$

三、两直线的夹角

(3) L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$三个向量共面

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

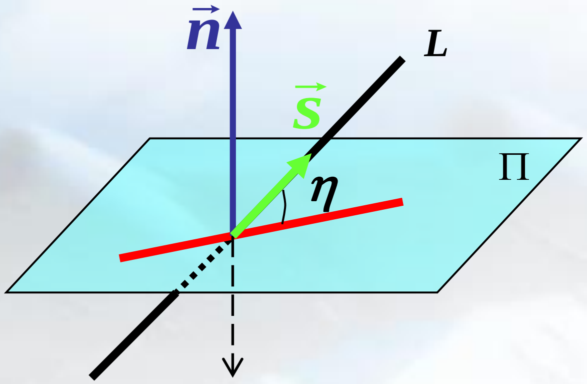
(4) L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$三个向量不共面

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

四、平面与直线的夹角

定义 直线与其在平面上的投影直线的夹角称为直线与平面的夹角.

此夹角也为锐角，即 $0 \le \eta \le \dfrac{\pi}{2}$.



$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\vec{s} = (m, n, p) \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

由图知 $\eta = \left| \dfrac{\pi}{2} - \langle \vec{n}, \vec{s} \rangle \right| \Longrightarrow \sin\eta = \left| \cos\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle \right|$

四、平面与直线的夹角

按照两向量夹角余弦公式有

$$\sin\eta = \left|\cos\langle\vec{n},\vec{s}\rangle\right|$$

$$= \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置特征：

(1) $L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n}\times\vec{s}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$

(2) $L \,//\, \Pi \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{s}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$

四、平面与直线的夹角

例 5 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=(1,-1,2)$, $\vec{s}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

主观题 10分

设置

例 6 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

四、平面与直线的夹角

例 6 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

四、平面与直线的夹角

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$，交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

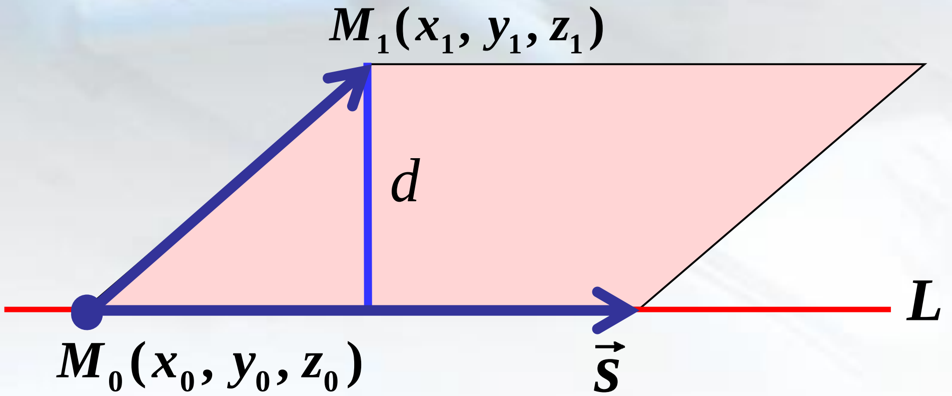
五、点到直线的距离

设 L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 是过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一条直线，直线L外一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线L的距离为d，则

$$d=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}|}$$

$$S_{\square}=d\cdot|\vec{s}|$$

$$=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|$$



六、异面直线间的距离

设有两条异面直线

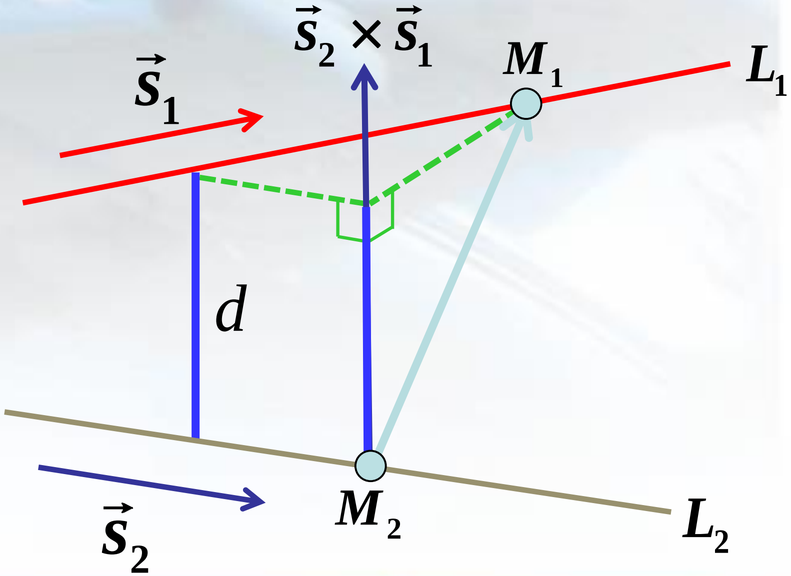
$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{和} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad M_2(x_2, y_2, z_2)$ $\quad L_1 \quad L_2$

$\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$ 和 $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$ 分别是 L_1 和 L_2 的方向向量，则 L_1 和 L_2 之间的距离

$$d=|\operatorname{Prj}_{\vec{s}_2\times\vec{s}_1}\overrightarrow{M_2M_1}|$$

$$=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot(\vec{s}_2\times\vec{s}_1)|}{|\vec{s}_2\times\vec{s}_1|}$$



七、平面束方程

定义　通过给定直线的所有平面的全体称为平面束.

设直线L的方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

则通过直线L的平面束方程为

$$\boxed{\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

(λ_1,λ_2不全为 0)

当$\lambda_1=1$ 时，即

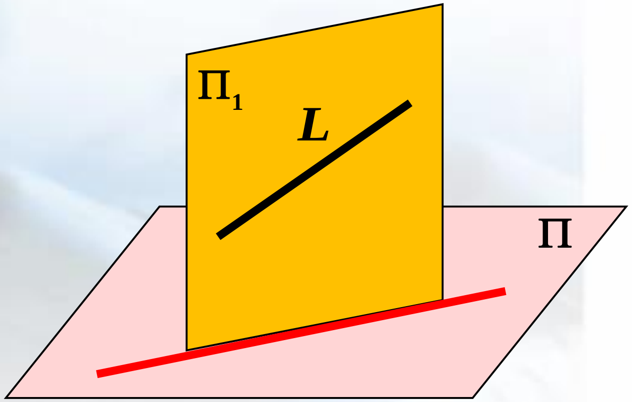
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

表示除了平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之外的平面束中的任一平面.

例7 已知直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$

求L在平面$\Pi: x+y+z=0$上的投影方程.

解 直线L在平面Π 上的投影即是过L且垂直于Π的平面Π_1与Π 的交线.



设通过直线L的平面束方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

整理得

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

其中λ是待定系数. 要使$\Pi_1 \perp \Pi$，即

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

解得 $\lambda=-1$.

七、平面束方程

即当 $\lambda = -1$ 时，平面束方程表示平面 Π_1，

代入平面束方程得 $2y - 2z - 2 = 0$，即

$$\Pi_1 : y - z - 1 = 0$$

所以直线 L 在平面 $\Pi : x + y + z = 0$ 上的投影方程为

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

八、小结

一、空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ $(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

二、线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 // L_2 \iff \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0 \iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

五、小结

三、面与线间的关系

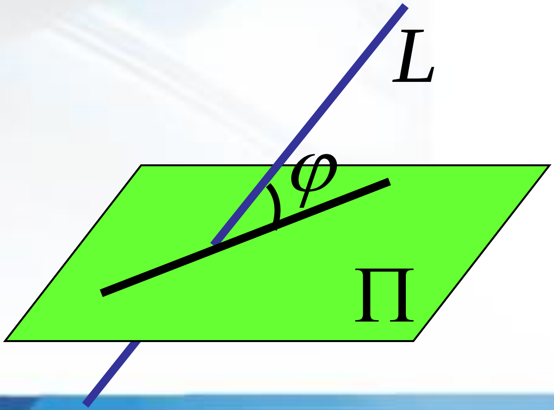
平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{n}=(A,B,C)$

直线 $L: \dfrac{x-x}{m}=\dfrac{y-y}{n}=\dfrac{z-z}{p},\ \vec{s}=(m,n,p)$

$$L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$L\,//\,\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$$

夹角公式: $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$



思考题

在直线方程$\dfrac{x-4}{2m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-2}{6+p}$中，$m$、$n$、$p$各怎样取值时，直线与坐标面$xoy$、$yoz$都平行.

思考题解答

$\vec{s}=(2m,n,6+p)$, 且有 $\vec{s}\neq\vec{0}$.

$\because \vec{s}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{s}\cdot\vec{i}=0,$

$$\Rightarrow\begin{cases}6+p=0\\2m=0\end{cases}\quad \therefore p=-6,\quad m=0,$$

$\because \vec{s}\neq\vec{0},\ \therefore n\neq 0,$

故当 $m=0, n\neq 0, p=-6$ 时结论成立.