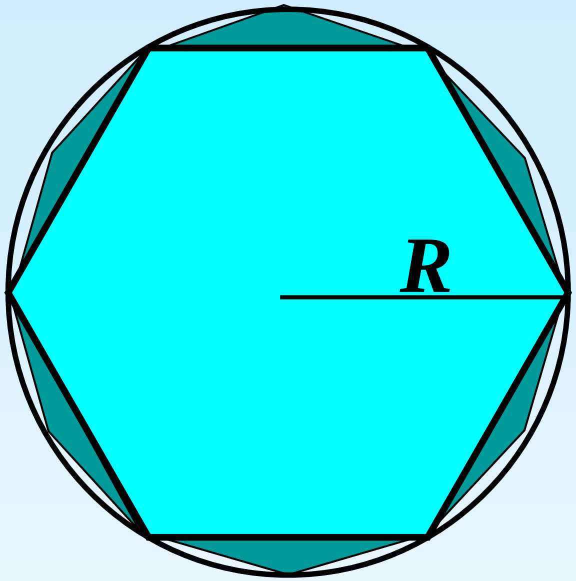
第二章 数列极限

§1 数列极限的定义

概念的引入

1、求圆的面积：



正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”——刘徽

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$$

2、截丈问题：

庄子："一尺之棰，日截其半，万世不竭"

第一天截下的杖长为$X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为$X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

数列的定义

定义：按正整数编号依次排列的一列数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为无穷数列,简称数列. 记为$\{a_n\}$, a_n称为通项.

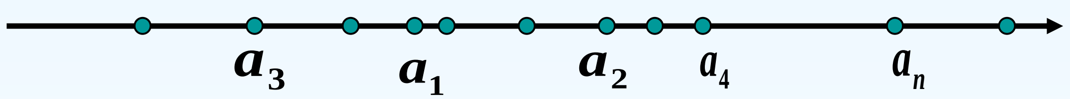
例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$ $\{\frac{1}{2^n}\}$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$$

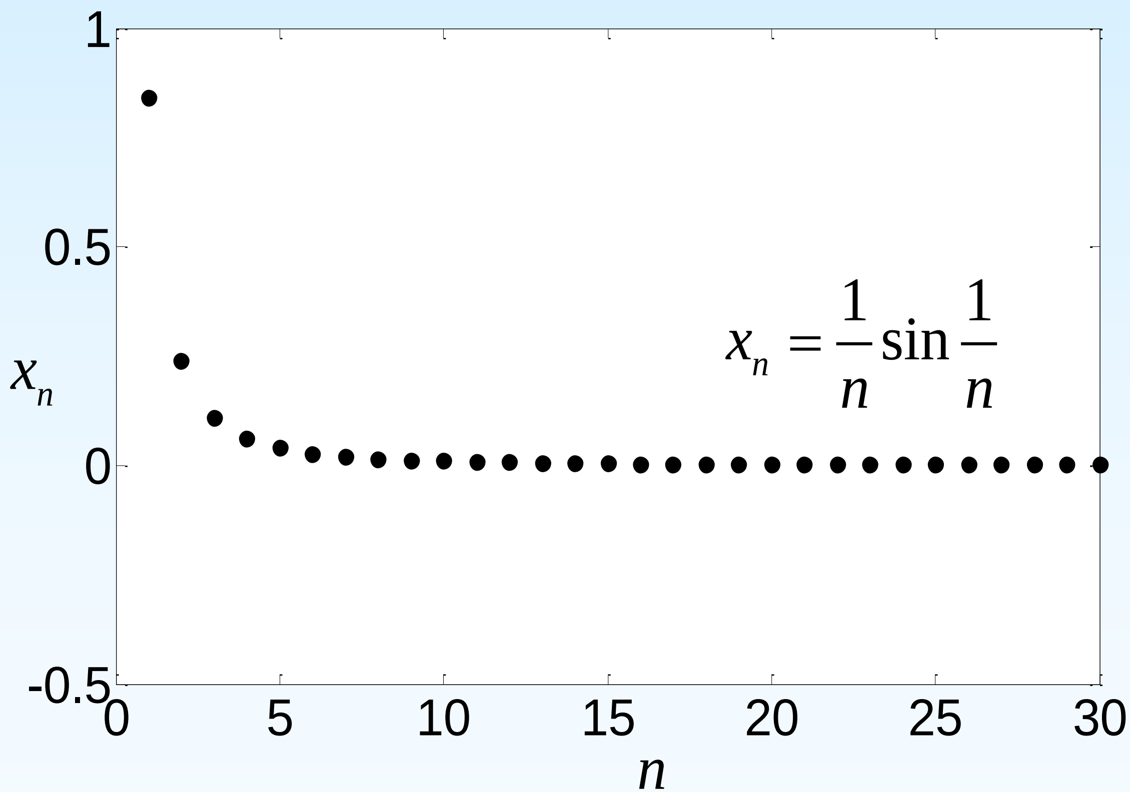
注意：数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.



数列可以看成**整标函数**：$a_n = f(n)$

数列的极限

观察数列 $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}$ 的变化趋势



由于$\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$， 当 $n > 2$， 有 $\left|a_n - 0\right| < \varepsilon$;

取 $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$， 当 $n > 2^2$， 有 $\left|a_n - 0\right| < \varepsilon$;

由此可得规律

取 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$， 当 $n > 2^k$， 有 $\left|a_n - 0\right| < \varepsilon$;

问题: 如何描述这种变化?

定义1.1（数列极限的定义）给定数列$\{a_n\}$，a 为定数, 若数列满足：

对任意给定的 $\varepsilon > 0$,都存在 $N \in N^*$, 对于任意的 $n > N$, 都有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a ,或收敛到 a ,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

注意:

1. $\forall \varepsilon > 0$, 强调任意性,而且是任意小的一面;

2. 不等式$|a_n - a| < \varepsilon$刻划了a_n与a的无限接近;

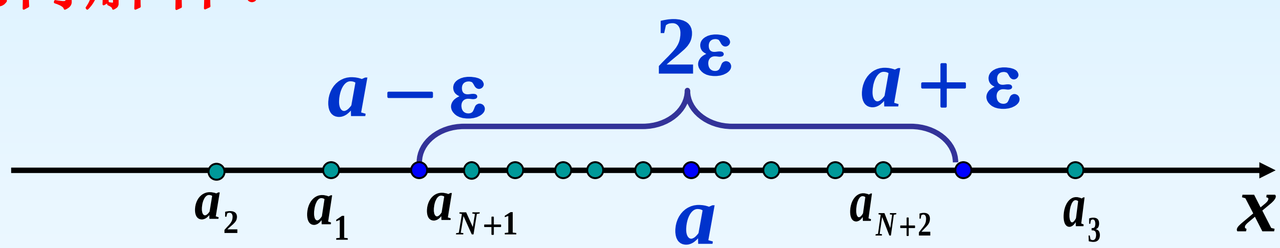
3. N与任意给定的正数ε有关,只强调存在性

$\varepsilon - N$定义：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - a| < \varepsilon.$

其中　$\forall$：任意的；$\exists$：存在.

几何解释：



当 $n > N$ 时，所有的点 a_n 都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内.

只有有限个(至多只有 N 个)落在其外.

注意： 使用定义求极限的过程就是求解不等式.

例1 设$a_n=\dfrac{1}{n}$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

验证定义；关键求出N

方法：解不等式$|a_n-a|<\varepsilon$，求出n

$$\forall\varepsilon>0,\text{为使}\left|a_n-0\right|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只需$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$即可, [ ]表示取整.

证 $\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$

任给$\varepsilon > 0$,要使$\left|a_n - 0\right| < \varepsilon$, 只需$\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即$n > \frac{1}{\varepsilon}$,

所以取$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当$n > N$时,

就有$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, 由极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

类似可证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$, 其中$\alpha > 0$,任意实数.

例2 设$a_n \equiv C$(C为常数), 证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 对于一切自然数n,

$|a_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$.

说明：常数列的极限等于同一常数.

例3 证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$;

若 $0 < |q| < 1$, 为使 $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$,

只需 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$, 即 $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

取 $N = [\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$,

由极限定义知 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

例4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n-4}{2n^2-3}=\dfrac{5}{2}.$

放大不等式简化求解

证 $\left|\dfrac{5n^2+n-4}{2n^2-3}-\dfrac{5}{2}\right|=\left|\dfrac{2n+7}{2(2n^2-3)}\right|$

$\forall\varepsilon>0$, 当$n>7$时, $n^2-3>0$, 要使

$$\left|\frac{2n+7}{2(2n^2-3)}\right|<\frac{2n+n}{2(n^2+n^2-3)}<\frac{3n}{2n^2}=\frac{3}{2n}<\varepsilon,$$

只需 $n>\dfrac{3}{2\varepsilon}.$

取 $N=\max\{7,[\frac{3}{2\varepsilon}]\}$,

当$n>N$时，有$\left|\frac{5n^2+n-4}{2n^2-3}-\frac{5}{2}\right|<\frac{3}{2n}<\varepsilon,$

由极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{2n^2-3}=\frac{5}{2}.$

注 用定义证明极限的关键是找到N, 而不必找到最小的N.

例5　证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$

分析: 要使 $\left|\frac{n}{3^n}-0\right|=\frac{n}{3^n}<\varepsilon$

因为 $(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>C_n^1=n$

所以 $2^n>n$

$$\frac{n}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}=(\frac{2}{3})^n<\varepsilon,\quad n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg(2/3)}\quad(0<\varepsilon<1)$$

证 $\forall \varepsilon > 0 \quad$ (不妨设$\varepsilon < 1$),

$$\exists N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{2}{3}} \right] + 1,$$

当$n > N$时,有 $\left| \dfrac{n}{3^n} \right| = \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{2^n}{3^n} < \varepsilon.$

例6 已知$a>1$为给定的常数，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$

证 设$a=1+h$,则$h>0$, 注意到

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

则$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}.$

$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon$,只需$\frac{2}{(n-1)h^2}<\varepsilon$,即$n>1+\frac{2}{\varepsilon h^2}$,

取 $N=[\frac{2}{\varepsilon h^2}]+1$,当$n>N$时，有$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon$,

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1).$

例7 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

分析:

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{\left|x_n - a\right|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{\left|x_n - a\right|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

则,$\left|x_n - a\right| < \sqrt{a}\varepsilon$,

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

证　任给$\varepsilon>0$，取$\varepsilon_1=\sqrt{a}\,\varepsilon$，$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，

$\therefore \exists N\in \mathrm{N}^*$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1$，

从而有$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|=\dfrac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}<\dfrac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}}=\varepsilon$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

例8　求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

预备知识：几何平均≤算术平均，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_i \ge 0)$$

证 $\because n^{\frac{1}{n}} = (1\cdots 1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \dfrac{2(\sqrt{n}-1)}{n}$

$$\therefore \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = n^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,\quad n > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1$，当 $n > N$，有 $\left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

证明2　设$n^{\frac{1}{n}}=1+h_n$，则有$n=(1+h_n)^n$

$$\therefore n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^{\ 2}+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}h_n^{\ 2}$$

约去n，得　$1>\frac{n-1}{2}h_n^{\ 2}$，　$\therefore h_n^{\ 2}<\frac{2}{n-1}$

$$\left|n^{\frac{1}{n}}-1\right|=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon,\quad n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1,$$

$$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]+1=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$，$n>N$时，$\left|n^{\frac{1}{n}}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的表述

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^*$，当一切$n > N$时，成立$|a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon$都成立$\xrightarrow{\text{否}}$$\exists \varepsilon_0$不成立 （否定所有找一个）

$\exists N$成立$\xrightarrow{\text{否}}$$\forall N$都不成立 （否定一个找所有）

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对一切$N \in N^*$，$\exists n_0 > N$，使得$|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon$

例9 证明数列$\{(-1)^n\}$发散.

证 只需证明，任意常数a都不是数列$\{(-1)^n\}$的极限.

取$\varepsilon_0 = 1$,

(1)若$a \geq 0$，则对任意正整数N，n_0取为大于N的奇数，此时

$$\left|(-1)^{n_0} - a\right| = \left|-1 - a\right| = 1 + a \geq \varepsilon_0$$

(2)若$a < 0$，则对任意正整数N，n_0取为大于N的偶数，此时

$$\left|(-1)^{n_0} - a\right| = \left|1 - a\right| = 1 - a \geq \varepsilon_0$$

所以任意常数a都不是$\{(-1)^n\}$的极限，数列发散

应记住的结果：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ （仿例8）—当 $a>1$时和$a<1$时思考

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\\&\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\\&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\end{aligned}\right\}\qquad a^n<<n!<<n^n(n\to\infty)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ $\quad |q|<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$ $\quad (\alpha>0)$

作业

习题2.1

1, 2 (1)(3)(5)(7)(8), 3, 5, 6