



§ 3 集合的势与可数集



定义3.1 如果集合 A 与 B 间存在一一对应,
则称 A 与 B 有相同的势, 或称集合 A 与 B 势等价,
记为 $A \sim B$. \triangle

集合势等价的性质

自反性: $A \sim A$

对称性: 如 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

传递性: 如 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.



例1 证明：自然数集 \mathbb{N} 与正整数集 \mathbb{N}^* 势等价。

证明 可以构造 \mathbb{N} 到 \mathbb{N}^* 上的一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ 为
 $f(i) = i + 1, \forall i \in \mathbb{N}$. 因此 \mathbb{N} 与 \mathbb{N}^* 势等价。

例2 证明：自然数集 \mathbb{N} 与整数集 \mathbb{Z} 势等价。

证明 可以构造 \mathbb{N} 到 \mathbb{Z} 上的一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f(n) = \begin{cases} -k, & n = 2k \\ k, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

因此 \mathbb{N} 与 \mathbb{Z} 势等价。

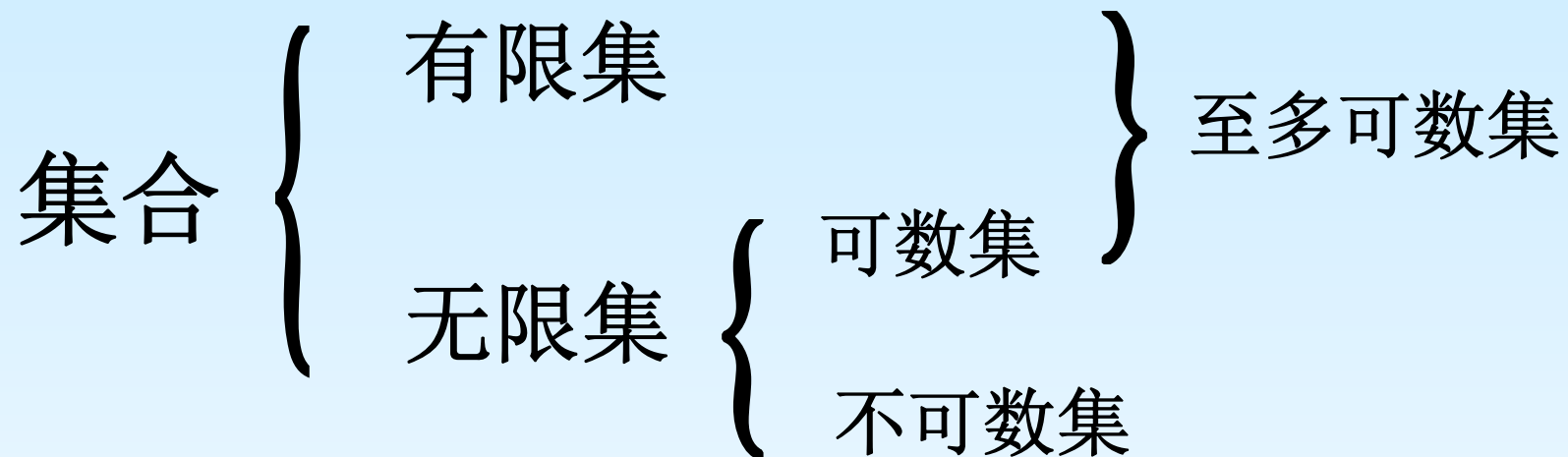


定理3.1 给定两个集合 A, B , 如果存在一个单射 $f: A \rightarrow B$, 也存在一个单射 $g: B \rightarrow A$, 则集合 A 与 B 势等价.



定义3.2 设 $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$

- 1) 若存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $A \sim J_n$, 则称 A 为有限集.
- 2) 若 A 不是有限集, 则称 A 为无限集.
- 3) 若 $A \sim \mathbb{N}^*$, 则称 A 为可数集.
- 4) 有限集和可数集统称为至多可数集.
- 5) 不是有限集和可数集的集合称为不可数集.





定理3.2 可数集的任意无限子集是可数集.

A 可数. $B \subset A$ b_1, b_2, \dots

定理3.3 $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n$ —— 至多可数集列,



每个 E_n 至多可数
则 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 至多可数.

*$E_1: e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m}, \dots$
 $E_2: e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2m}, \dots$
 \vdots
 $E_n: e_{n1}, e_{n2}, \dots, e_{nm}, \dots$*

(可数集的可列并是可数集)

例3 \mathbb{R} 中全体有理数是可数的.

证明: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$ 只要证: $[0, 1]$ 中有理数可数

例4 $[0, 1]$ 上的全体实数是不可数的.

$x \in (0, 1], x = \frac{p}{q}$

*$p=1: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
 $p=2: \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots$
 $p=3: \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \dots$
 $p=4: \frac{4}{5}, \dots$
 $p=5: \dots$*

证明将在下一章给出 *有理数不超过 $n-1$*



§ 4 确界存在定理



例1 $A = \{x \mid x \geq 0\}$ 有最小数, 无最大数
 $B = \{x \mid -1 < x \leq 0\}$ 有最大数, 无最小数
 $C = \{x \mid -1 < x < 1\}$ 无最大数, 无最小数

定义 设 S 是一个非空数集, 如果存在实数 $M(\underline{m})$, 使得对 S 中的任意元素 x , 都有 $x \leq M(x \geq \underline{m})$, 则称 S 是一个有上界(下界)的集合, $M(\underline{m})$ 称为 S 的一个上界(下界).

如果 S 既有上界又有下界, 则称 S 是有界集.



$$\overline{M} \quad X = \max\{|M|, |m|\}$$

$$\forall x \in S \quad m \leq x \leq M \Rightarrow -X \leq x \leq X$$

定理4.1 S 是有界集当且仅当存在一个正数 X ,使得
 $|x| \leq X$ 对所有 $x \in S$ 成立.

$$-X \leq x \leq X$$

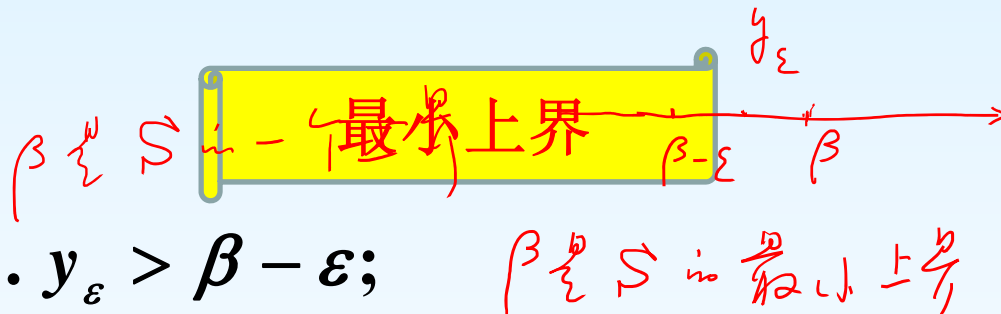
本书常用符号: \forall 任取, \exists 存在, s.t. 使得

定义4.1 设 S 是一个非空有上界集合,如果存在一个实数 β , 满足:

(1) $\forall x \in S, x \leq \beta$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in S, s.t. y_\varepsilon > \beta - \varepsilon$;

则称 β 为集合 S 的上确界, 记为 $\beta = \underline{\sup} S$.





定义4.2 设 S 是一个非空有下界集合,如果存在一个实数 α , 满足:

(1) $\forall x \in S, x \geq \alpha$;

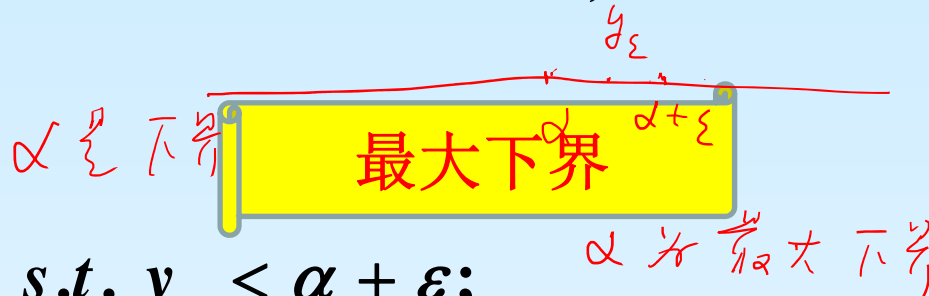
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in S, s.t. y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$;

则称 α 为集合 S 的下确界, 记为 $\alpha = \inf S$.

注 若 S 有最大数 $\max S$, 则 $\max S = \sup S$;

若 S 有最小数 $\min S$, 则 $\min S = \inf S$.

若 S 没有最大数 $\max S$ (或最小数 $\min S$), 也有可能上 (下) 确界.





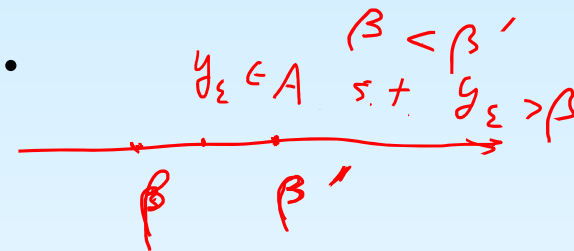
例2 求 $A = \{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \dots\}$ 和 $B = (0, 1)$ 的上下确界.

$$\sup A = 1 \quad \inf A = 0$$

$$\sup B = 1 \quad \inf B = 0$$

例3 设集合 A, B 是非空有界数集. 记 $A+B = \{x+y | x \in A, y \in B\}$. 证明: $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

证明: 设 $\beta_1 = \sup A$ $\beta_2 = \sup B$



定理4.1.2 $\forall x \in A$ 有 $x \leq \beta_1$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$ s.t. $x_\varepsilon > \beta_1 - \varepsilon/2$

非空有上界的集合上确界(下确界)如果存在, 则必唯一.

证明 我们只对上确界的情形进行证明

设 β 和 β' 是集合 S 的两个上确界. 由上确界定义. 任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $\beta' > \beta - \varepsilon$ 成立, 因此 $\beta' \geq \beta$. 类似可以得到 $\beta \geq \beta'$, 所以 $\beta = \beta'$. 这就证明了上确界是唯一的.



定理4.3（确界存在定理——实数连续性定理）

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

注 若集合 A 没有上界，则记为 $\sup A = +\infty$ ；
若集合 A 没有下界，则记为 $\inf A = -\infty$ 。

作 业

习题1.3

1.(2) , (4)

习题1.4

2, 3, 5,