北京航空航天大学

2014－2015 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》

试卷（共6页）

班号 学号 姓名 成绩

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
| 成 绩 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 阅卷人 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 校对人 |  |  |  |  |  |  |  |  |

**2014年12月6日**

**一 、单选题（总5小题，每小题4分，共20分）**

1. 的值为（ B ）。

A. ； B. ； C.0； D.1.

2. 已知函数，则函数的连续点是（ D ）。

A.处处不连续 B. C. D.

3. 设函数满足方程，在处满足则在处（ A ）。

A. 取得极大值； B. 取得极小值；

C. 某邻域内单调递增； D. 某邻域内单调递减。

4.设可导，，若使在处可导，则必有（ A ）

A. ； B.；

C. ； D.。

5.极限的值为（ C ）

A．0； B.1; C.; D. .

**一 、单选题（B、D、A、 A、 C）**

**二、计算证明（总4小题，每小题5分，共20分）**

1. 用“”定义证明：若，且，则。

证明：任取，由，存在自然数，使得时，

。

则时，

。

因此。

1. 设，证明数列收敛，并求其极限。

解：易见，且，

假设，则， ------------有界性2分

且。 ------------单调性2分

由数学归纳法知单调上升有上界3，因此收敛。

设，则满足方程，又由知。 --------------极限值1分

因此。

3. 求函数的阶导数。

解：由Leibniz公式，

。

4. 已知，求和。

解：两边都对求导可得，

因此，

注意到时，，因此。

而，

因此=-3。

或者注意到时，，带入的相应结果。

**三、（本题10分）**

在区间（0,1）上证明下列不等式：

（1）； （2）。

证明：（1）记, 则。

又由

知在（0,1）上单调递减，因此当（时），

所以不等式成立。 -------3分

（2）记，则。而

。易见

。而

,

在（0,1）上严格单调递减，可得

。

由此可得在（0,1）上严格单调递减，因此，即得

,

因此不等式成立。 ---------------7分

**四、（本题10分）**

(1) 设在开区间可微，且在有界.证明在上一致连续。

(2) 设在开区间上可微且一致连续，试问在是否一定有界.（若肯定回答，请证明；若否定回答，请举例说明）

解：（1）设在区间上, 则任取, 可取，当时，

。

因此在上一致连续。 ----------------6分

（2）在上不一定有界，例如在（0，1）上考虑函数

，

它是一致连续且可微的函数，但在（0，1）上无界。

----------------4分

**五、（本题10分）**

设函数*f*(*x*)在区间[0,1]上二阶可导，且满足， *f*(*x*)在区间(0,1)内取到最大值。证明：。

证明：设在处取得最大值，则为极大值点，因此。在处应用拉格朗日余项的泰勒公式可得：

因此，又由的最大值在处取到，因此。

**六．（本题15分）**

（1）写出数列是柯西基本列的定义并叙述柯西收敛定理。

（2）证明数列收敛。

解：（1）都有

则称是基本列。

或

柯西基定理： -----------------------5分

（2）任取自然数，有

。

任取，可取，则当时，任取自然数，均有

。

因此为柯西基本列，因此收敛。 --------- 10分

**七（本题15分）**

设函数在上连续，在上可导，且。证明：

1. 存在，使得;
2. 对于任意实数，必存在，使得

证明：（1）令，则

, ,

由连续函数的介值性知存在，使得

。 ---------------------6分

（2）令

，

则，

因此存在，使得

。

因此

因此 ------------------------9分