SISTEMA TEMPO INVARIANTE => I coefficienti che compaiono non dipendono dal tempo

SISTEMA LINEARE => L'equazione è una combinazione lineare delle variabili e delle loro derivate

SISTEMA AUTONOMO => Sistema dove non è più presente l'ingresso

RAPPRESENTAZIONE i/o

variabili di ingresso: grandezze che agiscono sul sistema dall'esterno "CAUSE"

variabili di uscita: grandezze interne al sistema di cui vogliamo analizzare l'andamento nel tempo

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\quad\quad} \longrightarrow y(t)$$

Per i sistemi a tempo continuo ($t \in \mathbb{R}$) la rappresentazione i/o è una o più equazioni differenziali in cui compaiono gli ingressi, le uscite e le loro derivate:

$$\left[h(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(m)}(t), \underset{\text{NEL CASO TEMPO VARIANTE}}{t}) = 0 \right]$$

sistema causale: se $n \geq m$ (gli ingressi influenzano le uscite e non viceversa)

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{m} b_s u^{(s)}(t) \right] \text{FORMA COMPATTA CON COEFFICIENTI}$$

per convenzione $\underset{\text{COEFFICIENTE DELL'USCITA CON GRADO MAGGIORE}}{a_n} = 1$

RAPPRESENTAZIONE i/s/o

variabili di STATO $x(t) \in \mathbb{R}^n$: Insieme delle variabili che è necessario conoscere all'istante t per poter determinare l'evoluzione del sistema $\forall \tau \geq t$, una volta note le variabili di ingresso $u(\tau)$ $\forall \tau \geq t$.

rappresentazione iso: devo poter esprimere le derivate prime delle variabili di stato e le uscite come funzione delle variabili di stato stesse e degli ingressi.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \underset{\text{CASO SISTEMI LTI}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Sistemi in cui le variabili cambiano di valore solo ad istanti discreti $t_1, t_2, \ldots, t_k$ $k \in \mathbb{Z}$

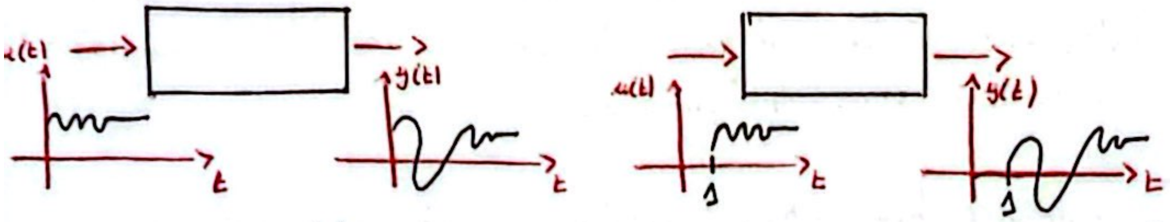
i/o => $\left[h(y(k), y(k-1), \ldots, y(k-n), u(k), u(k-1), \ldots, u(k-m), k) = 0 \right]$ EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

i/s/o => $\begin{cases} x(k+1) = F(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \underset{\text{LTI}}{\Rightarrow} \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\,u(k) \\ y(k) = Cx(k) + D\,u(k) \end{cases}$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI SISTEMI DINAMICI

CAUSALE = Un sistema si dice causale se le variabili di ingresso $u(t)$ all'istante t non influenzano il valore delle variabili di stato $x(\tau)$ e di uscita $y(\tau)$ agli istanti $\tau < t$.

TEMPO INVARIANTE = Un sistema si dice tempo-invariante se il suo comportamento è invariante rispetto a traslazioni dell'asse dei tempi.



Sia $u(t)$, $t \geq 0$ l'ingresso e $y(t)$, $t \geq 0$ la corrispondente uscita. Se il sistema è tempo-invariante e applico come ingresso il segnale $u(t-\Delta)$ $\Delta > 0$, si ottiene l'uscita $y(t-\Delta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

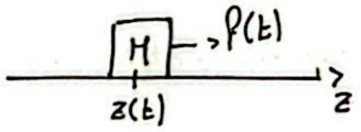
SISTEMA LINEARE = Un sistema si dice lineare se le funzioni $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ delle rappresentazioni i/s/o e i/o sono funzioni lineari dei propri argomenti x, u, y.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: Sia $u^{(a)}(t)$ l'ingresso e $y^{(a)}(t)$ la corrispondente uscita. Sia $u^{(b)}(t)$ un altro ingresso e $y^{(b)}(t)$ la corrispondente uscita. Se il sistema è lineare applicando l'ingresso $[u(t) = \alpha u^{(a)}(t) + \beta u^{(b)}(t)]$ si ottiene l'uscita $[y(t) = \alpha y^{(a)}(t) + \beta y^{(b)}(t).]$

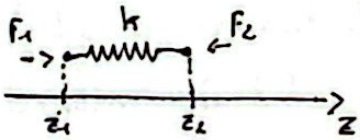
MODELLISTICA DEI SISTEMI MECCANICI

(Elementi di traslazione)

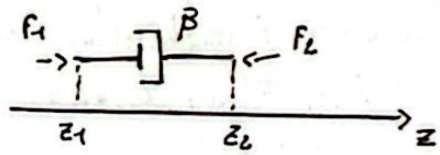
1) MASSE $M \cdot \ddot{z}(t) = f(t)$



2) ELEMENTO ELASTICO
MOLLE $F_1 = k(z_2 - z_1)$
$F_2 = -F_1 = k(z_1 - z_2)$



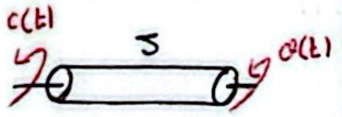
3) ELEMENTO DISSIPATIVO
SMORZATORE
$F_1 = \beta(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$
$F_2 = -F_1 = \beta(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$



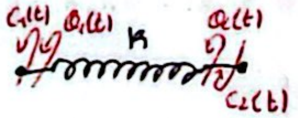
regola generale per il numero delle variabili di stato: se il nostro sistema ha una rappresentazione i/o di ordine n è sempre possibile trovare una rappresentazione i/s/o con n variabili di stato

(Elementi meccanici di rotazione)

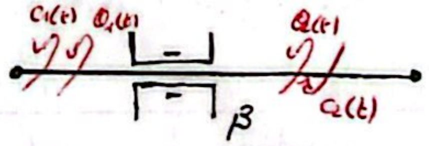
1) (MASSE IN ROTAZIONE)
$J \cdot \ddot{\theta}(t) = c(t)$



2) ELEMENTO ELASTICO
DI ROTAZIONE
$C_1 = k(\theta_2(t) - \theta_1(t))$
$C_2 = k(\theta_1(t) - \theta_2(t))$

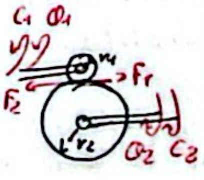


3) ELEMENTO DISSIPATIVO DI ROTAZIONE
$C_1 = \beta(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t))$
$C_2 = \beta(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t))$

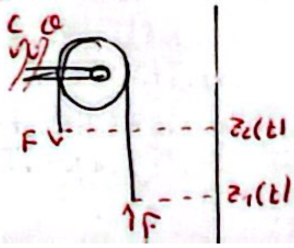


(Elementi di accoppiamento)

1) INGRANAGGI
$r_1 \theta_1(t) = r_2 \theta_2(t)$
$F_1 = F_2 = \frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2}$
$\theta_2(t) = \frac{r_1}{r_2}\theta_1(t)$ $C_2(t) = \frac{r_2}{r_1} C_1(t)$



2) PULEGGIA
$z_1 = r\theta(t)$
$z_2 = -r\theta(t)$
$F(t) = \frac{c(t)}{r}$



Altri tipi di Modellistiche:

- MODELLISTICA DEI SISTEMI IDRAULICI
- MODELLISTICA DEI SISTEMI TERMICI
- MODELLI DI TRASFERIMENTO DI RISORSE
  - Modelli in cui gli stati rappresentano la quantità di risorsa contenuta in un determinato compartimento.
- MODELLI DI TRANSIZIONE TRA STATI
  - modelli in cui gli stati rappresentano la probabilità della presenza o assenza di un determinato attributo, oppure di trovarsi in una certa condizione.

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO CONTINUO

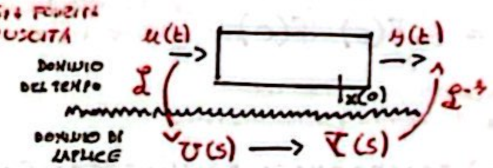
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\Big[\underbrace{x(t)}_{\text{RISPOSTA TOTALE DELLO STATO}} = \underbrace{x_\ell(t)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELLO STATO}} + \underbrace{x_F(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA DELLO STATO}}\Big]$$

RISPOSTA DOVUTA ALL'INGRESSO $u(t)$

RISPOSTA DOVUTA ALLE CONDIZIONI INIZIALI $x(0)$

$$\Big[\underbrace{y(t)}_{\text{RISPOSTA DELL'USCITA}} = \underbrace{y_\ell(t)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA}} + \underbrace{y_F(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA DELL'USCITA}}\Big]$$



TRASFORMATA DI LAPLACE

Sia $F(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

- $F(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- $\exists M > 0, t_0 \geq 0, \alpha \in \mathbb{R} : |F(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \forall t \geq t_0$

IN UN TEMPO MOLTO GRANDE, CIOÈ QUANDO $t \to +\infty$ IL VALORE ASSOLUTO DELLA FUNZIONE SIA DOMINATO DA UN ESPONENZIALE

Si definisce TRASFORMATA DI LAPLACE di $F(t)$ la funzione $F(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\left[F(s) = \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-st}\, dt\right] \quad \text{e si indica con} \quad \left[F(s) = \mathcal{L}[F(t)]\right]$$

quando converge l'integrale: $|F(t)e^{-st}| \underset{s=\sigma+j\omega}{=} |F(t)e^{-\sigma t - j\omega t}| = |F(t)\,e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}| =$

$= |F(t)| \cdot |e^{-\sigma t}| \cdot |e^{-j\omega t}| = |F(t)| \cdot e^{-\sigma t} \cdot 1 \leq M e^{\alpha t} \cdot e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha - \sigma)t}$

CONVERGE QUANDO L'ESPONENZIALE È NEGATIVO

$\Rightarrow$ L'integrale converge se: $\alpha < \sigma = Re[s]$

ASCISSA DI CONVERGENZA DI $F(s)$

(proprietà della trasformata)

1) **LINEARITÀ**: Se $F(t) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) \Rightarrow \mathcal{L}[F(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[F_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[F_2(t)]$

$\Rightarrow F(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$

2) **TRASFORMATA DEI SEGNALI CON RITARDO**: $g(t) = F(t-\Delta) \cdot 1\!\!1(t-\Delta) \quad \Delta > 0$ ①

$\overset{\mathcal{L}}{\hookrightarrow} G(s) = F(s)\, e^{-\Delta s}$ dove $F(s) = \mathcal{L}[F(t)]$

② $\tau = t - \Delta$; $t = \tau + \Delta$

Dim.

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt \overset{②}{=} \int_{-\Delta}^{+\infty} g(\tau+\Delta)\, e^{-s(\tau+\Delta)}\, d\tau = \int_{-\Delta}^{+\infty} \underbrace{F(\tau) \cdot 1\!\!1(\tau)}_{g(\tau+\Delta)} \underbrace{e^{-s\Delta}}_{\text{NON DIPENDE DA } \tau} \cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

quando $t=0$ $\tau = -\Delta$ da ②

se sostituisco in ①

$$= e^{-s\Delta} \int_{-\Delta}^{+\infty} F(\tau) \cdot \cancel{1\!\!1(\tau)}\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-s\Delta} \underbrace{\int_0^{+\infty} F(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{\text{DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI LAPLACE}}$$

$\hookrightarrow 0$ dato che moltiplica per $1\!\!1(\tau)$

3) **MOLTIPLICAZIONE PER ESPONENZIALE**: $g(t) = f(t)e^{\gamma t}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = F(s-\gamma)$

Dim:

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{\gamma t}\cdot e^{-st}dt = \left[\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-\gamma)t}dt\right]$$

DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI LAPLACE DOVE AL POSTO DI S C'È S − γ

4) **MOLTIPLICAZIONE PER t**: $g(t) = t\cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = -\dfrac{d}{ds}F(s)$

Dim:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}\right]dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}(-t)dt = -\underbrace{\int_0^{+\infty} t\cdot f(t)\,e^{-st}dt}_{\mathcal{L}[t\cdot f(t)]}$$

5) **TRASFORMATA DELLA DERIVATA**: $g(t) = \dot{f}(t)\cdot 1\!\!1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = s\cdot F(s) - f(0)$

Dim:

$$G(s) = \int_0^{+\infty}\dot{f}(t)\cdot \cancel{1\!\!1(t)}\,e^{-st}dt \overset{\text{PER PARTI}}{=} f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt = 0 - f(0)e^{-s0} - (-s)\underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}_{F(s)}$$

$$= s\cdot F(s) - f(0)$$

SE LA CONDIZIONE INIZIALE DEL SEGNALE È ≠ 0 COMPARE ANCHE QUESTO TERMINE.

DERIVARE NEL DOMINIO DEL TEMPO EQUIVALE A MOLTIPLICARE PER S

6) **TRASFORMATA DELL'INTEGRALE**: $g(t) = \int_0^t f(\nu)d\nu \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = \frac{1}{s}\cdot F(s)$

[$\lim_{t\to+\infty} f(t)$ esiste finito se $F(s)$ ha tutti i poli a $Re[p_i] < 0$ TRANNE AL PIÙ UNO SEMPLICE IN $s=0$]

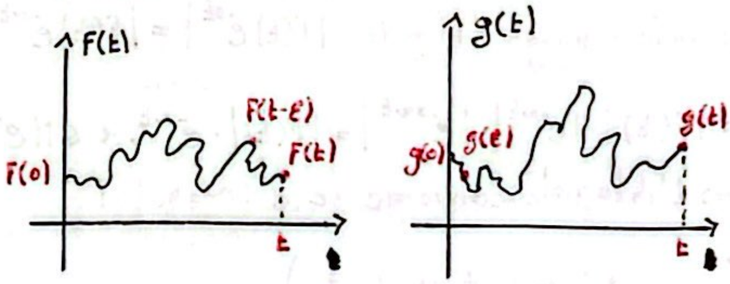
7) **TEOREMA DEL VALORE FINALE**: Se $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ esiste finito, allora $\left[\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)\right]$

8) **TRASFORMATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE**:

Dati due segnali $f(t)$ e $g(t)$ si definisce PRODOTTO DI CONVOLUZIONE il segnale

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = F(s)\cdot G(s)$$

L'IDEA È CHE HO DUE SEGNALI, FISSATA UNA LUNGHEZZA t FACCIAMO IL PRODOTTO PRENDENDO g(t) CHE VA DA ZERO A t CON I VALORI DI F PRESI PERÒ ALLA ROVESCIA E MAN MANO CHE τ CRESCE MI MUOVO NELL'ALTRA DIREZIONE.
(PRENDO IL PRIMO VALORE g(0) E LO MOLTIPLICO PER L'ULTIMO DELL'ALTRA, QUINDI f(t))



TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA RAPPRESENTAZIONE i/o

Il problema mi fornisce l'equazione del tipo:

$$\left[y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)\right]$$

$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) - y(0)$

$\mathcal{L}[y^{(n)}(t)] = s^n Y(s) - s^{(n-1)}y(0) - s^{(n-2)}\dot{y}(0) - \ldots - s\,y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$

e ho delle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$

Applicando la TRASFORMATA DI LAPLACE A TUTTO OTTENGO (e raccogliendo Y(s)):

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}U(s)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO G(S)

$s^n + a_{n-1}s + \ldots + a_1 s + a_0 \Rightarrow$ POLINOMIO CARATTERISTICO

c_i i=0,...,n−1 ⇒ COMBINAZIONI LINEARI DELLE CONDIZIONI INIZIALI

$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s)$ dove $G(s)$ è la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del sistema

Una funzione razionale fratta $\left[F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\right]$ si dice STRETTAMENTE PROPRIA se [grado(N) < grado(D)]. Si dice PROPRIA se [grado(N) = grado(D)], si dice IMPROPRIA se [grado(N) > grado(D).]

(Osservazioni nel dominio della TRASFORMATA DI LAPLACE)

* La risposta libera $Y_L(s)$ è STRETTAMENTE PROPRIA
* La risposta forzata $Y_F(s)$ è il prodotto tra la funzione di trasferimento $G(s)$ per la trasformata dell'ingresso $U(s)$.
* $G(s)$ è propria se $m = n$ o strettamente propria se $m < n$
* $Y_L(s)$ e $G(s)$ hanno lo stesso denominatore che prende il nome di POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA. Le sue radici sono dette POLI DEL SISTEMA.
* Esiste una corrispondenza biunivoca tra la rappresentazione i/o e la funzione di trasferimento $G(s)$.

TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA RAPPRESENTAZIONE i/s/o

Il problema mi fornisce equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$ CON CONDIZIONE INIZIALE $x(0)$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)] \Rightarrow s \cdot X(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\underbrace{sI}_{m \times m} \underbrace{X(s)}_{m \times 1} - \underbrace{A}_{m \times m}\underbrace{X(s)}_{m \times 1} = x(0) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

DIPENDE SOLO DALLE CONDIZIONI INIZIALI — DIPENDE SOLO DALL'INGRESSO

$$\left[X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1} x(0)}_{\text{RISPOSTA LIBERA NELLO STATO}} + \underbrace{(sI-A)^{-1} BU(s)}_{\text{RISPOSTA FORZATA NELLO STATO}}\right]$$ RISPOSTA TOTALE NELLO STATO

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$\left[Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{\text{RISPOSTA LIBERA NELL'USCITA}} + \underbrace{\overbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}^{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO}} U(s)}_{\text{RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA}}\right]$$ RISPOSTA TOTALE NELL'USCITA

La FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del sistema si ottiene dalla rappresentazione i/s/o mediante la formula $[C(sI-A)^{-1}B + D]$ IL PASSAGGIO INVERSO NON È BIUNIVOCO NON ESISTE UN'UNICA QUADRUPLA A,B,C,D MA INFINITE.

(Com'è fatta $(sI-A)^{-1}$?)

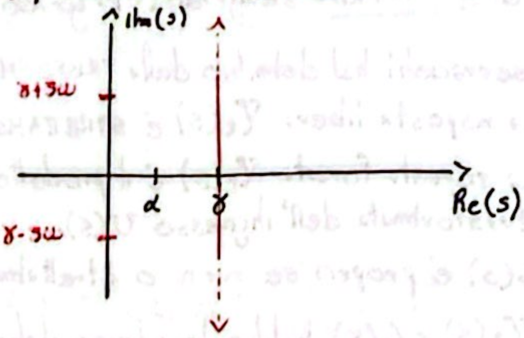
$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & s-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \cdots & s-a_{mm} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{[\text{aggiunta}(sI-A)]^T}{\det(sI-A)}$$

I POLI DEL SISTEMA SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE A

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Si dice ANTITRASFORMATA DI LAPLACE della funzione $Y(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ tale che $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, risultato teorico:



$$\left[\, y(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \to +\infty} \int_{\gamma - j\omega}^{\gamma + j\omega} Y(s) e^{st}\, ds \,\right]$$

dove $\gamma > \alpha$ (ASCISSA DI CONVERGENZA DI $Y(s)$)

ANTITRASFORMATA DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

(Funzioni strettamente proprie con poli semplici) 1

$F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ $D(s)$ ha tutte radici semplici, grado$(N(s))$ < grado$(D(s))$

posso scrivere $F(s)$ nella forma poli-zeri: $F(s) = k \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}$ $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_m$

RADICI DEL NUMERATORE

RADICI DEL DENOMINATORE

Decomposizione in fratti semplici (sviluppo di HEVISIDE):

$F(s) = \dfrac{R_1}{s-p_1} + \dfrac{R_2}{s-p_2} + \dots + \dfrac{R_m}{s-p_m}$ R_i: RESIDUO DEL POLO p_i $\left[\, R_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i)\cdot F(s) \,\right]$

(Funzione strettamente propria con poli multipli) 2

Forma poli-zeri: $F(s) = k \dfrac{(s-z_1)^{q_1}(s-z_2)^{q_2}\dots(s-z_w)^{q_w}}{(s-p_1)^{\mu_1}(s-p_2)^{\mu_2}\dots(s-p_r)^{\mu_r}}$ μ_i: MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DEL POLO p_i, $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_r = m$

Decomposizione in fratti semplici:

$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_r(s)$

$F_i(s) = \dfrac{R_{i,1}}{s-p} + \dfrac{R_{i,2}}{(s-p)^2} + \dfrac{R_{i,3}}{(s-p)^3} + \dots + \dfrac{R_{i,\mu_i}}{(s-p_i)^{\mu_i}}$ $\Rightarrow$ SFRUTTIAMO LA TRASFORMATA ELEMENTARE $\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cdot 1(t)\right] = \dfrac{1}{(s-\alpha)^{k+1}}$

e si ottiene quindi: $f_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_i(s)] = R_{i,1} e^{p_i t} + R_{i,2}\, t\, e^{p_i t} + R_{i,3} \frac{t^2}{2} e^{p_i t} + \dots + R_{i,\mu_i} \dfrac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!} e^{p_i t}$

$$\left[\, R_{i,k} = \frac{1}{(\mu_i - k)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{(\mu_i - k)}} \left[(s-p_i)^{\mu_i} \cdot F(s)\right] \,\right] \quad k = 1, \dots, \mu_i$$

(Funzione propria ma non strettamente) 3

$F(s) = \dfrac{b_m s^n + b_{m-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{m-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_m + \tilde{F}(s)$ $\tilde{F}$ è strettamente propria

$\tilde{F}(s) = \dfrac{(b_{m-1} - b_m a_{m-1}) s^n + \dots + (b_1 - b_m a_1) s + (b_0 - b_m a_0)}{s^n + a_{m-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ quando faccio il minimo comune denominatore

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = b_m \delta(t) + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)]}_{\text{vedi casi 1 e 2}}$

es: $F(s) = \dfrac{s^2+5s+3}{2s^2+6s+4} = \dfrac{\frac{1}{2}s^2 + \frac{5}{2}s + \frac{3}{2}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{2} + \dfrac{as+b}{s^2+3s+2} = \dfrac{\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1 + as + b}{s^2+3s+2}$ eguaglio i numeratori per determinare a e b

$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{2} + \dfrac{s + 1/2}{s^2+3s+2}$

ANALISI MODALE DEI SISTEMI LTI A TEMPO CONTINUO

MODI: Si dicono MODI di un sistema le funzioni del tempo che compaiono nella risposta libera del sistema. Ciascun modo corrisponde ad un polo del polinomio caratteristico del sistema.

$p \in \mathbb{R}$ $\mu = 1$ $\longrightarrow e^{pt} \cdot 1\!\!1(t)$ MODO APERIODICO

POLO REALE SEMPLICE

$p = \sigma \pm j\omega$ $\mu = 1$ $\longrightarrow e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ MODI PSEUDO-PERIODICI

POLI COMPLESSI CONIUGATI SEMPLICI

$p \in \mathbb{R}$ $\mu > 1$ $\longrightarrow e^{pt} \cdot 1\!\!1(t) + t e^{pt} \cdot 1\!\!1(t) + \dots + t^{\mu-1} e^{pt} \cdot 1\!\!1(t)$ MODI APERIODICI

POLO REALE MULTIPLO

$p = \sigma \pm j\omega$ $\mu > 1$

POLI COMPLESSI CONIUGATI MULTIPLI $\longrightarrow e^{\sigma t}\cos(\omega t)\cdot 1\!\!1(t), e^{\sigma t}\sin(\omega t)\cdot 1\!\!1(t), t e^{\sigma t}\cos(\omega t) 1\!\!1(t), t e^{\sigma t}\sin(\omega t)\cdot 1\!\!1(t)$
$, \dots, t^{\mu-1} e^{\sigma t}\cos(\omega t) 1\!\!1(t), t^{\mu-1}\sin(\omega t) e^{\sigma t} 1\!\!1(t)$

(CARATTERI DI CONVERGENZA DEI MODI) => Un MODO $m(t)$ si dice:

1) CONVERGENTE se $\lim_{t \to +\infty} m(t) = 0$

2) LIMITATO NON CONVERGENTE se $\exists M > 0$ t.c $|m(t)| < M \ \forall t \geq 0$

3) DIVERGENTE negli altri casi, cioè $\forall M > 0 \ \exists \bar{t} : |m(\bar{t})| \geq M$

[RISULTATO:]

1) I MODI sono CONVERGENTI se e solo se la parte reale dei poli è negativa ($Re[p] < 0$)

2) I MODI sono LIMITATI NON CONVERGENTI se e solo se corrispondono a poli semplici a parte reale nulla ($Re[p_i] = 0, \mu_i = 1$)

3) Negli altri casi si hanno MODI DIVERGENTI

RISPOSTA FORZATA A INGRESSI PARTICOLARI

(RISPOSTA IMPULSIVA)

La risposta impulsiva è la risposta forzata relativa all'ingresso $u(t) = \delta(t)$

$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$

La risposta impulsiva è l'antitrasformata di LAPLACE della funzione di trasferimento

In generale per qualunque ingresso:

$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot U(s)] = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau$

La risposta forzata è il prodotto di convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva

LA RISPOSTA IMPULSIVA è una combinazione lineare dei modi del sistema (gli stessi della risposta libera)

(RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO)

$u(t) = 1\!\!1(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$ Il $\lim_{t \to +\infty} y_F(t)$ esiste finito?

TUTTI i POLI DEVONO AVERE $Re\{p_i\} < 0$

Dal Teo del valore finale se il $\lim_{t \to +\infty} y_F(t)$ $\exists$ finito: $\lim_{t \to +\infty} y_F(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y_F(s)$

$\Rightarrow \left[\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = G(0) \right]$

Il limite esiste finito se e solo se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa, in tal caso il limite vale $G(0)$.

In generale se $u(t) = H \cdot 1\!\!1(t)$, avrò che se i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa:

$$\lim_{t \to +\infty} y_F(t) = G(0) \cdot H \cdot 1\!\!1(t)$$

$G(0)$: GUADAGNO STAZIONARIO DEL SISTEMA (guadagno in continua)

La risposta al gradino sarà: $\left[y_F(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau) \cdot \cancel{1\!\!1(\tau)} \, d\tau = \int_{0}^{t} g(t-\tau) \, d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau) \, d\tau \right]$

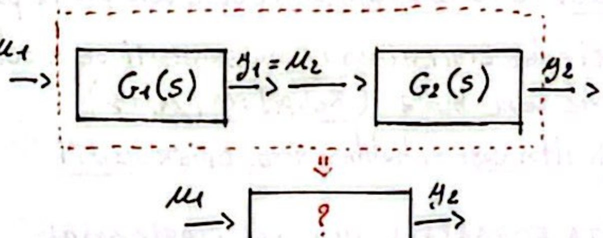
La risposta al gradino è l'integrale della risposta impulsiva

NOTA: La risposta impulsiva è combinazione lineare dei modi del sistema e contiene informazione totale su com'è fatto il sistema, la risposta al gradino è l'integrale della risposta impulsiva e il suo limite per $t \to +\infty$ esiste finito se e solo se i poli hanno tutti parte reale negativa.

SISTEMI INTERCONNESSI

I sistemi dinamici composti dalla interconnessione di sistemi elementari possono essere ricondotti a tre tipi di interconnessione:

① INTERCONNESSIONE IN SERIE

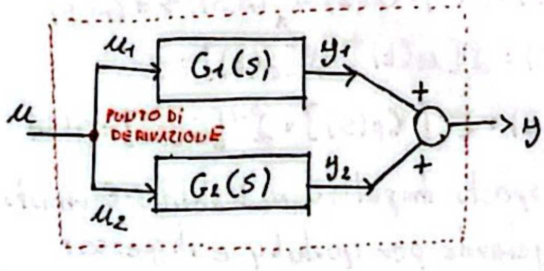


$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s) \\ Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s) \\ Y_1(s) = U_2(s) \end{cases}$$

$\Rightarrow Y_2(s) = G_2(s) \cdot Y_1(s) = G_2(s) \left[G_1(s) \cdot U_1(s) \right]$

$\Rightarrow \left[G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \right]$ IN GENERALE $\Rightarrow \left[G(s) = G_m(s) \cdot G_{m-1}(s) \cdot \ldots \cdot G_1(s) \right]$

② INTERCONNESSIONE IN PARALLELO



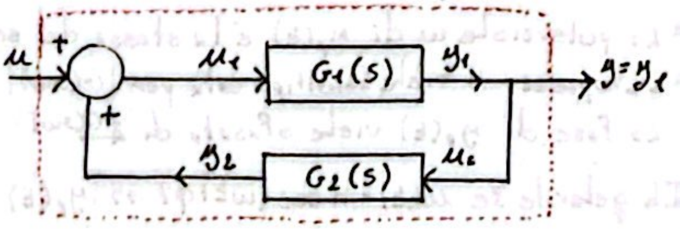
$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s) \\ Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s) \\ U_1(s) = U_2(s) = U(s) \\ Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \end{cases}$$

$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s) \cdot U(s) + G_2(s) \cdot U(s) = \left[G_1(s) + G_2(s) \right] \cdot U(s)$

$\left[G(s) = G_1(s) + G_2(s) \right]$ IN GENERALE $\Rightarrow \left[G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \ldots + G_m(s) \right]$

③ INTERCONNESSIONE IN RETROAZIONE

$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)\cdot U_1(s) \\ Y_2(s) = G_2(s)\cdot U_2(s) \\ U_1(s) = U(s) + Y_2(s) \end{cases}$$



$$Y(s) = G_1(s)\cdot[U(s)+Y_2(s)] = G_1(s)\cdot[U(s)+G_2(s)\cdot U_2(s)] =$$

$$= G_1(s)[U(s)+G_2(s)\cdot \underbrace{G_1(s)\cdot U_1(s)}_{Y_1(s)}] = G_1(s)U(s) + G_1(s)G_2(s)\cdot Y(s)$$

$$= IY(s) - G_1(s)G_2(s)\cdot Y(s) = G_1(s)\cdot U(s) \Rightarrow [I - G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)\cdot U(s)$$

$$Y(s) = \{[I - G_1(s)G_2(s)]^{-1} \cdot G_1(s)\}\cdot U(s)$$

NEL CASO DI SISTEMI SISO $\Rightarrow \left[Y(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}\cdot U(s) \right] \Rightarrow \left[G(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} \right]$

$\hookrightarrow$ + IN CASO DI RETROAZIONE NEGATIVA

CASO GENERALE $\Rightarrow$ $$G(s) = \frac{G_m(s)\cdot G_{m-1}(s)\dots G_2(s)G_1(s)}{1 \pm \underbrace{G_m(s)G_{m-1}(s)\dots G_1(s)}_{\text{CATENA DIRETTA}}\underbrace{H_m(s)\dots H_1(s)}_{\text{ANELLO}}}$$

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Poniamo in ingresso un segnale sinusoidale: $\left[u(t) = \underset{\text{AMPIEZZA}}{M}\cos(\underset{\text{PULSAZIONE}}{\omega} t)\cdot 1(t)\right]$

ipotesi: tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa (cioè i modi del sistema sono convergenti)

$$G(s) = \frac{N(s)}{\underbrace{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}_{D(s)}} \qquad Re[p_i]<0 \quad \forall i=1,\dots,m$$

SE HO POLI SEMPLICI

$$Y_F(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)\dots(s-p_m)}\, M\, \frac{s}{\underset{\text{Poli: } \pm j\omega}{s^2+\omega^2}} = \frac{R_1}{(s-p_1)} + \dots + \frac{R_m}{(s-p_m)} + \frac{R}{s-j\omega} + \frac{\bar{R}}{s+j\omega}$$

$$R = \lim_{s\to j\omega}(s-j\omega)\cdot Y_F(s) = \lim_{s\to j\omega}\cancel{(s-j\omega)}\cdot G(s)\, M\, \frac{s}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)} = \lim_{s\to j\omega} G(s)\cdot M\cdot\frac{s}{(s+j\omega)} =$$

$$= G(j\omega)\cdot M\cdot\frac{j\omega}{2j\omega} = \frac{1}{2}MG(j\omega)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{2}\cdot M\cdot\overline{G(j\omega)} = \frac{1}{2}\cdot M\cdot G(-j\omega) \qquad (*)\ G(j\omega) = |G(j\omega)|\,e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$\left[Y_F(s) = \underbrace{\frac{Q(s)}{D(s)}}_{\text{RISPOSTA A REGIME TRANSITORIO } Y_T(s)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\cdot M\cdot G(j\omega)}{s-j\omega} + \frac{\frac{1}{2}\cdot M\cdot G(-j\omega)}{s+j\omega}}_{\text{RISPOSTA A REGIME PERMANENTE } Y_P(s)} \right]$$

$$\left[y_T(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(s)}{D(s)}\right] \text{ tale che: } \lim_{t\to+\infty} y_T(t) = 0 \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot M\cdot G(j\omega)\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\cdot M\cdot G(-j\omega)\cdot\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{2}MG(j\omega)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}M\overline{G(j\omega)}\,e^{-j\omega t} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}M|G(j\omega)|\,e^{j\angle G(j\omega)}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}M|G(j\omega)|\,e^{-j\angle G(j\omega)}e^{-j\omega t} = M|G(j\omega)|\,\frac{e^{j(\omega t+\angle G(j\omega))} + e^{-j(\omega t+\angle G(j\omega))}}{2}$$

$$= M|G(j\omega)|\cos(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$\left[y_F(t) = y_T(t) + M|G(j\omega)|\cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \right] \quad \text{con } \lim_{t\to+\infty} y_T(t) = 0$$

OSSERVAZIONI:

* La pulsazione ω di $y_p(t)$ è la stessa del segnale d'ingresso
* L'ampiezza H viene moltiplicata per $|G(j\omega)|$
* La fase di $y_p(t)$ viene sfasata di $\angle G(j\omega)$

In generale se $u(t) = H\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \left[y_p(t) = H|G(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle G(j\omega))\right]$

(Se $G(s)$ ha poli a parte reale nulla semplici)

1) Se $p=0$, la risposta forzata tende ad una sinusoide a media non nulla
$[H \cdot |G(j\omega)|\cos(\omega t + \angle G(j\omega)) + c]$ dove c è il RESIDUO del polo in zero.

2) Se $p = \pm j\alpha$, $\alpha \neq \omega$, la risposta forzata contiene due termini sinusoidali, uno di pulsazione ω (che coincide con $y_p(t)$) e uno di pulsazione α.

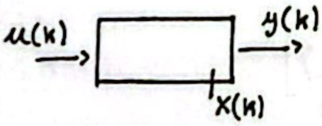
3) E se $p = \pm j\omega$ sono i poli di $G(s)$?

$$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s^2+\omega^2)} \cdot H \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$y_F(t)$ contiene i modi: $t\cos(\omega t)$, $t\sin(\omega t)$

$\Rightarrow$ FENOMENO DI RISONANZA

ANALISI DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO



$[k \in \mathbb{Z}]$

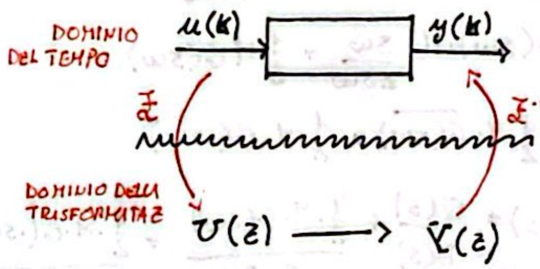
(RAPPRESENTAZIONE i/o)

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m)$$

(RAPPRESENTAZIONE i/s/o)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

TRASFORMATA Z



Sia $F(k)$ un segnale a tempo discreto t.c:

* $F(k) = 0 \quad \forall k < 0$
* $\exists H > 0$, $\rho_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c:
  $|F(k)| < H\rho_0^k \quad \forall k \geq k_0$

Allora si definisce TRASFORMATA ZETA di $F(k)$ la funzione $F(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\left[F(z) = \mathcal{Z}[F(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} F(k) \cdot z^{-k} = F(0) + F(1)z^{-1} + F(2) \cdot z^{-2} + \ldots\right]$$

RISULTATO: la serie in $F(z)$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| > \rho_0$ $\to$ RAGGIO DI CONVERGENZA

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA Z

1) **LINEARITÀ**: Dati due segnali $f(k), g(k)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Z}[\alpha \cdot f(k) + \beta \cdot g(k)] = \alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z)$$

2) **RITARDO**: $g(k) = f(k-k_0) \cdot 1\!\!1(k-k_0) \quad k_0 \in \mathbb{N}_+,\ k_0 > 0$

$$\mathcal{Z}[g(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-k_0) \cdot 1\!\!1(k-k_0)\, z^{-k} \cdot z^{k_0} \cdot z^{-k_0} =$$

$$= z^{-k_0} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-k_0) \cdot 1\!\!1(k-k_0)\, z^{-(k-k_0)} \underset{k-k_0=m}{=} z^{-k_0} \sum_{m=-k_0}^{+\infty} \underbrace{f(m) \cdot 1\!\!1(m)}_{\text{VALE 1 PER } m>0 \text{ E ZERO PER } m<0} z^{-m}$$

$z^{-1} \Rightarrow$ OPERATORE DI RITARDO

$$= z^{-k_0} \sum_{m=0}^{+\infty} f(m) z^{-m} = z^{-k_0} F(z)$$

RITARDO DI k_0 ISTANTI $\rightarrow$ MOLTIPLICARE PER z^{-k_0}

3) **MOLTIPLICAZIONE PER UN ESPONENZIALE**: $g(k) = p^k \cdot f(k) \quad p \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Z}[g(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \cdot \left(\frac{z}{p}\right)^{-k} = F(z)\Big|_{z=\frac{z}{p}} = F\left(\frac{z}{p}\right)$$

4) **MOLTIPLICAZIONE PER k**: $g(k) = k \cdot f(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[g(k)] = -z \dfrac{d}{dz} F(z)$

es (segnali canonici) : $r_m(k) = \binom{k}{m} \cdot 1\!\!1(k)$

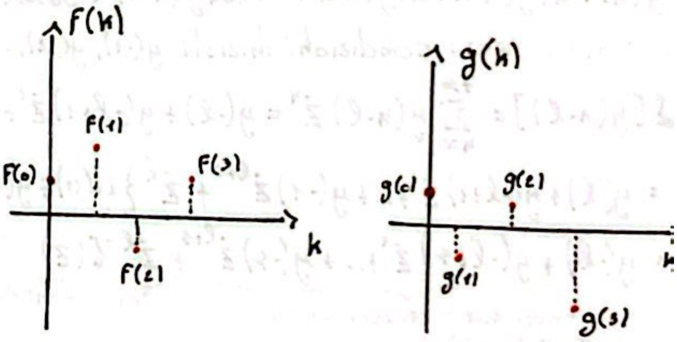
$r_1(k) = k \cdot 1\!\!1(k) \qquad R_1(z) = -z \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = -z \cdot \dfrac{z-1-z}{(z-1)^2} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

$$\left[\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m} \cdot 1\!\!1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}\right]$$

5) **PRODOTTO DI CONVOLUZIONE**:

Dati due segnali $f(k)$ e $g(k)$ si definisce prodotto di convoluzione di f e g il segnale:

$$\left[h(k) = f(k) * g(k) = \sum_{h=0}^{k} f(k-h) \cdot g(h)\right]$$



$h(0) = f(0) \cdot g(0)$

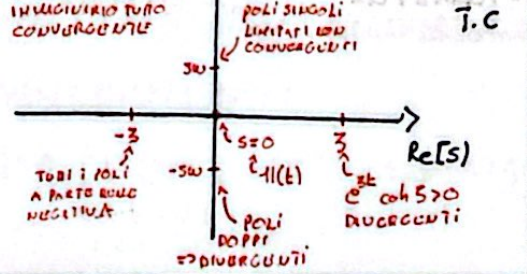
$h(1) = f(1) \cdot g(0) + f(0) \cdot g(1)$

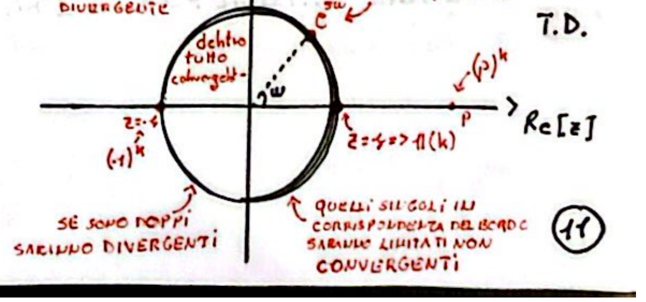
$\Rightarrow \mathcal{Z}[h(k)] = F(z) \cdot G(z)$

6) **TEOREMA DEL VALORE FINALE**:

Se $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k)$ esiste finito, allora $\left[\lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = \lim\limits_{z \to 1} (z-1) \cdot F(z)\right]$

Il $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k)$ esiste finito se e solo se $F(z)$ ha tutti poli a modulo < 1 tranne al più uno semplice in $z = 1$.





TRASFORMATA Z DELLA RAPPRESENTAZIONE I/S/U

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad x(0) \text{ noto}$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO IL PRIMO VALORE COSÌ DA FAR PARTIRE m DA ZERO

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1) z^{-k} \overset{k+1=m}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} x(m) z^{-(m-1)} = z \sum_{m=1}^{+\infty} \left[x(m) z^{-m} + x(0)\cdot z^{0} - x(0) \cdot z^{0} \right] =$$

$$= \left[z \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} x(m) z^{-m}}_{\mathcal{Z}[x(m)]} - x(0) = z X(z) - z x(0) \right]$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = A\,\mathcal{Z}[x(k)] + B\,\mathcal{Z}[u(k)] \Rightarrow zX(z) - zx(0) = AX(k) + BU(k)$$

$$= zIX(z) - AX(z) = zx(0) + BU(z) \Rightarrow (zI - A)X(z) = zx(0) + BU(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \underbrace{(zI-A)^{-1} z \cdot x(0)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA NELLO STATO} \\ X_L(z)}} + \underbrace{(zI-A)^{-1} B \cdot U(z)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA NELLO STATO} \\ X_F(z)}}}$$

$$\mathcal{Z}[y(k)] = C\,\mathcal{Z}[x(k)] + D\,\mathcal{Z}[u(k)] \Rightarrow Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(z) = \underbrace{C(zI-A)^{-1} z \cdot x(0)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA} \\ Y_L(z)}} + \underbrace{\left[C(zI-A)^{-1} B + D \right] U(z)}_{\text{RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA } Y_F(z)}}$$

$Y_F(z) = G(z) \cdot U(z)$ dove $\boxed{G(z) = C(zI-A)^{-1}B + D}$ è la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

TRASFORMATA Z DELLA RAPPRESENTAZIONE i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

RISPOSTA LIBERA: condizioni iniziali $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$

$$\mathcal{Z}[y(k-\ell)] = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k-\ell) z^{-k} = y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + y(-\ell+2) z^{-2} + \dots + y(\underset{0}{\ell-\ell}) z^{-\ell} + y(1) z^{-\ell-1} + \dots =$$

$$= y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-\ell+1} + z^{-\ell} \{ y(0) + y(1) z^{-1} + y(2) z^{-2} + \dots \} =$$

$$= \underbrace{y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-\ell+1}}_{\substack{\text{PARTE DOVUTA ALLE CONDIZIONI INIZIALI} \\ \text{PRIMA DI } k=0}} + \underbrace{z^{-\ell} Y(z)}_{\text{TRASFORMATA DEL SEGNALE RITARDATO}}$$

$$\Rightarrow Y(z) + a_1 \{ y(-1) + z^{-1} Y(z) \} + a_2 \{ y(-2) + y(-1) z^{-1} + z^{-2} Y(z) \} + \dots + a_n \{ y(-n) + \dots + y(-1) z^{-n+1} + z^{-n} Y(z) \}$$

$$\Rightarrow \{ 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \} Y(z) = - \{ a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 y(-1) z^{-1} + \dots + a_n y(-n) + \dots + a_n y(-1) z^{-n+1} \}$$

RACCOLGO $Y(z)$

PORTO GLI ALTRI TERMINI A DESTRA

$$+ \{ b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \} U(z)$$

NEGLI INGRESSI POSSO ANNULLARE GLI ISTANTI INIZIALI PRIMA DI $k=0$

COMB. LIN. COND. IN.

$$\Rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{C^n z^n + C^{n-1} z^{n-1} + \dots + C_1 z}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA}} + \underbrace{\frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}}_{\text{RISPOSTA FORZATA DELL'USCITA}}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

z: operatore di anticipo

$z \cdot y(k) = y(k+1)$

ANTITRASFORMATA Z

Data una funzione razionale fratta $F(z)$, si definisce antitrasformata zeta di $F(z)$:

$$\left[F(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)\, z^{k-1}\, dz \right]$$

Γ: qualunque percorso chiuso che contiene i poli di $F(z)$

ANALISI MODALE DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

$p \in \mathbb{R} \quad \mu = 1 \longrightarrow p^k \cdot 1(k)$

$p_{1/2} = \rho e^{\pm j\varphi} \longrightarrow \rho^k \cos(\varphi k),\ \rho^k \sin(\varphi k)$ (φ: FASE, ρ: MODULO)

$p \in \mathbb{R} \quad \mu > 1 \longrightarrow p^k \cdot 1(k),\ k p^k \cdot 1(k), \dots, k^{\mu-1} p^k \cdot 1(k)$

$p_{1/2} = \rho e^{\pm j\varphi} \quad \mu > 1 \longrightarrow \rho^k \cos(\varphi k), \rho^k \sin(\varphi k), k\rho^k \cos(\varphi k), k\rho^k \sin(\varphi k), \dots$
$k^{\mu-1}\rho^k \cos(\varphi k),\ k^{\mu-1}\rho^k \sin(\varphi k)$

$p = 0 \longrightarrow \delta(k)$

CONVERGENZA DEI MODI

1) I modi sono convergenti se e solo se i poli hanno modulo minore di 1 ($|p_i| < 1$) — INTERNI AL CERCHIO UNITARIO
2) I modi sono limitati non convergenti se e solo se i poli hanno modulo uguale a 1 e sono semplici ($|p_i| = 1 \quad \mu_i = 1$)
3) Negli altri casi si hanno modi divergenti

RISPOSTE NEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

1) RISPOSTA IMPULSIVA: $u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow U(z) = 1$

$Y_F(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$

$y_{imp}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$

Si definisce risposta impulsiva l'antitrasformata della funzione di trasferimento

2) RISPOSTA FORZATA AD UN GENERICO INGRESSO $u(k)$:

$$Y_F(z) = G(z) \cdot U(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y_F(k) = g(k) * u(k) = \sum_{i=0}^{k} g(k-i)\, u(i)$$

La risposta forzata è il prodotto di convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva

3) SISTEMI INTERCONNESSI: Analogo rispetto al caso a tempo continuo

4) RISPOSTA IN FREQUENZA: $u(k) = M\cos(\omega k + \varphi)$ [ipotesi: ha tutti i poli a modulo minore di 1 ⇒ MODI CONVERGENTI]

Allora $y_F(k) = y_T(k) + y_P(k)$

$\lim_{k \to +\infty} y_T(k) = 0$, $\left[y_P(k) = M|G(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \varphi + \underbrace{\angle G(e^{j\omega})}_{\text{FASE}}) \right]$ $\quad \left[G(e^{j\omega}) = G(z)|_{z = e^{j\omega}} \right]$

y_T: RISPOSTA DI REGIME TRANSITORIO; y_P: RISPOSTA DI REGIME PERMANENTE; $M|G(e^{j\omega})|$: AMPIEZZA; ω: STESSA PULSAZIONE DEL SEGNALE D'INGRESSO

5) RISPOSTA AL GRADINO: $u(k) = 1\!\!1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$\lim_{k \to +\infty} y_F(k)$ esiste finito? => TEO DEL VALORE FINALE => $Y_F(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

=> il limite esiste finito se e solo se $G(z)$ ha tutti i poli a modulo minore di 1

e in tal caso vale: $\left[\lim_{k \to +\infty} y_F(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) Y_F(z) = \cancel{(z-1)} \cdot G(z) \frac{z}{\cancel{(z-1)}} = G(1) \cdot 1 = G(1) \right]$

GUADAGNO STAZIONARIO DEL SISTEMA

guadagno perché se io metto dentro un gradino che vale 7, se aspetto un tempo sufficientemente lungo asintoticamente la mia risposta al gradino tenderà a $G(1) \cdot 7$

FATTORE DI GUADAGNO TRA IL VALORE COSTANTE DELL'INGRESSO E IL VALORE COSTANTE A CUI TENDE L'USCITA

(STUDIO DELLE RADICI DI UN POLINOMIO)

1) CRITERIO DI JURI

2) $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

$z = \frac{1+s}{1-s} \rightarrow \bar{P}(s) = P\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ TRASFORMAZIONE CHE MAPPA IL CERCHIO UNITARIO IN Z NELL'ASSE IMMAGINARIO IN S

RISULTATO: $p(z)$ ha tutte le radici a modulo < 1 se $\bar{p}(s)$ ha tutte le radici a $Re[p_i] < 0$

=> APPLICARE ROUTH-HORWITZ A $\bar{P}(s)$

ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI (sistemi LTI a tempo continuo)

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0)$ CASO AUTONOMO: $u(t) = 0 \ \forall t$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0)$

$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$

$x_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1} x(0)] = \mathcal{L}^{-1}[\underbrace{(sI-A)^{-1}}_{\text{MODI DEL SISTEMA}}]^{n \times n} \cdot x(0)^{n \times 1}$

scegliamo alcune condizioni iniziali "speciali": $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ posizione i-esima

$x(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \varphi_1(t)$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = A\varphi_1(t) \\ \varphi_1(0) = e_1 \end{cases}$$

$x(0) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x(t) = \varphi_2(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_2(t) = A\varphi_2(t) \\ \varphi_2(0) = e_2 \end{cases}$

$\vdots$

$x(0) = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x(t) = \varphi_n(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_n(t) = A\varphi_n(t) \\ \varphi_n(0) = e_n \end{cases}$

$x(0) = x_1(0) e_1 + x_2(0) e_2 + \ldots + x_n(0) e_n = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$

$x_\ell(t) = x_1(0) \cdot \varphi_1(t) + x_2(0) \cdot \varphi_2(t) + \ldots + x_n(0) \varphi_n(t) = \left[\varphi_1(t) \mid \varphi_2(t) \mid \ldots \mid \varphi_n(t) \right] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\Phi(t)}_{= \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]} \cdot x(0)$

$\Phi(t)$ soddisfa le relazioni:

① $\dot{\Phi}(t) = [\dot{\varphi}_1(t)\ \dot{\varphi}_2(t) \dots \dot{\varphi}_m(t)] = [A\varphi_1(t)\ A\varphi_2(t) \dots A\varphi_m(t)] = A[\varphi_1(t) \dots \varphi_m(t)] = A\Phi(t)$

② $\Phi(0) = I_{m \times m}$

RISULTATO: L'unica matrice $\Phi(t)$ che soddisfa ① e ② è: $\left[\Phi(t) = I + A\cdot t + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \frac{t^i}{i!}\right]$

② => è verificata per sostituzione ($t=0$)

① => $\dot{\Phi}(t) = A + A^2\frac{2t}{2!} + A^3\frac{3t^2}{3!} + \dots + A^i i\frac{t^{i-1}}{i!} = A\left\{I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t}{2!} + \dots + A^{i-1}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right\} = A\Phi(t)$

$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$ PER ANALOGIA SI INDICA $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i\frac{t^i}{i!} = e^{At}$ MATRICE ESPONENZIALE

=> $\left[x_\ell(t) = e^{At}x(0)\right]$ $\left[y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)\right]$

$X_F(s) = (sI-A)^{-1}B\cdot U(s)$ $\left[x_F(t) = \int_0^{+\infty} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right]$

$\left[y_F(t) = C\cdot\int_0^{+\infty} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\right]$

(proprietà di e^{At})

1) $e^{A0} = I$ 2) $e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$ se e solo se $AB = BA$ SE A e B SONO DIAGONALI O SE B È LA MATRICE IDENTITÀ

3) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$ 4) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

5) Sia ho $v \in \mathbb{C}^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $A\cdot v = \lambda\cdot v$, Allora $e^{At}\cdot v = e^{\lambda t}\cdot v$

=> e^{At} ha gli stessi autovettori di A e come autovalori $e^{\lambda_i t}$, dove λ_i sono autovalori di A.

6) Sia $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\det T \neq 0$ e $A = T\bar{A}T^{-1}$, allora $e^{At} = Te^{\bar{A}t}T^{-1}$

NON SINGOLARE INVERTIBILE

[CASO 1] A DIAGONALIZZABILE:

$\exists T: A = T\Lambda T^{-1}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & & \lambda_m \end{bmatrix}$ $T = [v_1 \vdots v_2 \vdots \dots \vdots v_m]$

$AT = T\Lambda$ => $Av_i = \lambda_i v_i$

SOLO PER MATRICI DIAGONALI

$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}T^{-1}$

LA RISPOSTA LIBERA È COMBINAZIONE LINEARE DEI MODI, I MODI SI MANIFESTANO LUNGO GLI AUTOVETTORI.

$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = T\cdot e^{\Lambda t}\cdot \underbrace{T^{-1}\cdot x(0)}_{\alpha} = [v_1 \vdots \dots \vdots v_m]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} =$

$= \alpha_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}v_2 + \dots + \alpha_m e^{\lambda_m t}v_m =$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$ MODI -> se $m.a(\lambda_i) = m.g(\lambda_i) = \dim(\ker(\lambda I - A))$

Il modo $e^{\lambda_i t}$ si sviluppa lungo la direzione dell'autovettore v_i associato a λ_i:

$\alpha = T^{-1}x(0)$ => $T\alpha = x(0)$ $[v_1 \vdots \dots \vdots v_m]\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = x(0)$

$x(0) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

SE PRENDO COME CONDIZIONE INIZIALE UN AUTOVETTORE HO COME RISPOSTA LIBERA IL SOLO MODO LEGATO A QUELL'AUTOVETTORE LUNGO LA DIREZIONE DI QUELL'AUTOVETTORE

[CASO 2] A NON DIAGONALIZZABILE:

$(\exists \lambda_J : m.a(\lambda_J) > m.g(\lambda_J))$

$\exists T : \det T \neq 0$ tale che $A = TJT^{-1}$ $\quad J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & J_m \end{bmatrix}$ $\quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{J_m t} \end{bmatrix} \qquad e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

MATRICI DI TOEPLITZ

$x_L(t) = Te^{Jt}\underbrace{T^{-1}\cdot x(0)}_{\alpha}$

Ogni blocco di Jordan $J_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ genera i modi $e^{\lambda_i t}, \underbrace{te^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_i t}}$

MODI AGGIUNTIVI CHE SI GENERANO QUANDO $m.g(\lambda_i) < m.a(\lambda_i)$

CONVERGENZA DEI MODI NELLO SPAZIO DEGLI STATI:

$[Re[\lambda_i] < 0 \Rightarrow$ MODI CONVERGENTI$]$

$[Re[\lambda_i] = 0$ e $m.a(\lambda_i) = m.g(\lambda_i) \Rightarrow$ MODI LIMITATI NON CONVERGENTI$]$

$\left.\begin{array}{l} Re[\lambda_i] = 0 + m.a(\lambda_i) > m.g(\lambda_i) \\ Re[\lambda_i] > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ MODI DIVERGENTI

ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI (sistemi LTI a tempo discreto)

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$X(z) = (zI-A)^{-1}z\cdot x(0) + (zI-A)^{-1}B\cdot U(z)$

$x_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z\cdot x(0)] = \mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z]\cdot x(0)$

$x_L(1) = A\cdot x(0)$

$x_L(2) = Ax_L(1) = A\cdot A\cdot x(0) = A^2\cdot x(0)$

$\vdots$

$x_L(k) = A^k\cdot x(0)]$ $\quad \Rightarrow [\mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z] = A^k]$ $\quad$ CASO SCALARE $A \in \mathbb{R}$: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-A}\right] = A^k$

(PROPRIETÀ DI A^k)

1) Se $Av = \lambda v \Rightarrow A^k v = \lambda^k v$

A e A^k hanno gli stessi autovettori e se λ è autovalore di A, λ^k lo è di A^k

2) Se $\exists T : \det T \neq 0$ tale che $A = T\bar{A}T^{-1}$ allora $A^k = T\bar{A}^k T^{-1}$

[CASO 1] A DIAGONALIZZABILE:

$T = [v_1 \vdots \ldots \vdots v_m]$ $\quad A = T\Lambda T^{-1}$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_m \end{bmatrix}$

$x_L(k) = A^k\cdot x(0) = T\cdot\Lambda^k\underbrace{T^{-1}\cdot x(0)}_{\alpha} = \alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2\lambda_2^k v_2 + \ldots + \alpha_m\lambda_m^k v_m$

In particolare: se $[x(0) = v_i \Rightarrow x_L(k) = \lambda_i^k v_i]$

[CASO 2] A NON DIAGONALIZZABILE:

$\exists T: A = T \cdot J \cdot T^{-1}$ $\quad J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & J_m \end{bmatrix}$ $\quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

$A^k = T \cdot J^k \cdot T^{-1} = T \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & J_m^k \end{bmatrix}$ dove $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda_i^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$

$\forall$ autovalore λ:

* Se $m.a(\lambda_i) = m.g(\lambda_i)$, si genera il modo λ^k lungo i μ autovettori linearmente indipendenti associati a λ
* Se $m.a(\lambda) > m.g(\lambda)$ allora oltre al modo λ^k si generano anche modi del tipo $\underbrace{k\lambda^k}_{\text{c'è di sicuro}}, \ldots, k^{q-1}\lambda^k$

(CONVERGENZA DEI MODI NELLO SPAZIO DEGLI STATI)

* convergenti se ($|\lambda| < 1$)
* limitati non convergenti se ($|\lambda| = 1$ e $m.a(\lambda) = m.g(\lambda)$)
* divergenti negli altri casi.

RIASSUMENDO: Le risposte nel dominio del tempo dei sistemi LTI a tempo discreto sono:

$$\left[x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{x_L(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)}_{x_F(k)}\right] \quad \left[y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{y_L(k)} + \underbrace{C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) + D u(k)}_{y_F(k)}\right]$$

DIAGRAMMI DI BODE : RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $G(j\omega)$

MOTIVAZIONI:

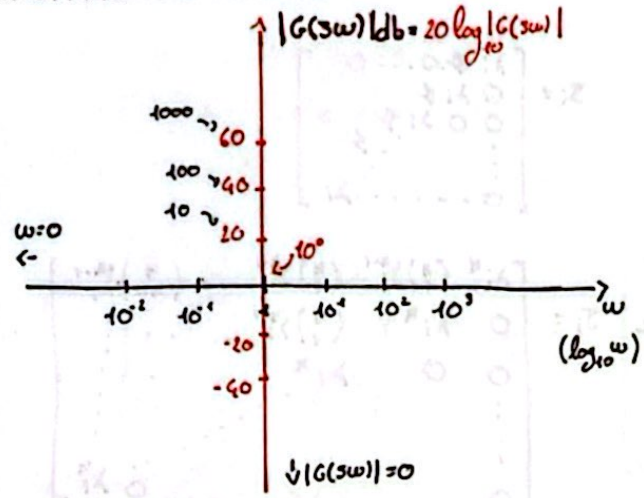
1) Risposta di regime permanente nei sistemi LTI a tempo continuo
2) Per un generico segnale $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, sotto opportune ipotesi $\exists F(j\omega)$ tale che $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ TRASFORMATA DI FOURIER
3) Se $G(s)$ è una funzione razionale fratta, conoscere $G(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ equivale a conoscere $G(s)$ $\forall s \in \mathbb{C}$.

Due diagrammi: $\underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{MODULO}}$ e $\underbrace{\measuredangle G(j\omega)}_{\text{FASE}}$ in funzione di $\omega \in \mathbb{R}$

$|G(-j\omega)| = |\overline{G(j\omega)}| = |G(j\omega)|$ → FUNZIONE PARI $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$\measuredangle G(-j\omega) = \measuredangle \overline{G(j\omega)} = -\measuredangle G(j\omega)$ → FUNZIONE DISPARI $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

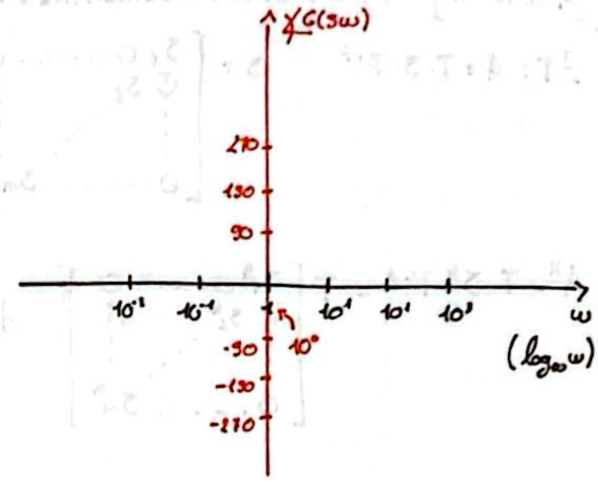
DIAGRAMMA DEL MODULO:



ascissa: $\log_{10}\omega$

ordinata: $|G(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$

DIAGRAMMA DELLA FASE



ascissa: $\log_{10}\omega$

ordinata: gradi

FUNZIONE RAZIONALE FRATTA IN FORMA DI BODE

GUADAGNO DI BODE

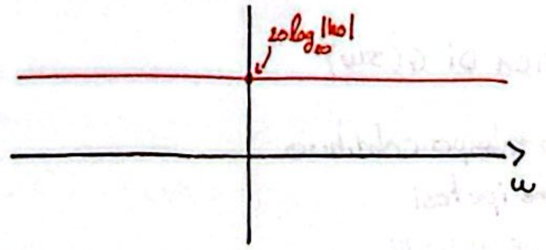
$$G(s) = \frac{k_B}{s^g} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r_z}(1+\hat{\tau}_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_z}\left(1+2\frac{\hat{\xi}_i}{\hat{\omega}_i}s+\frac{1}{\hat{\omega}_i^2}s^2\right)}{\prod_{i=1}^{r_p}(1+\tau_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_p}\left(1+2\frac{\xi_i}{\omega_i}s+\frac{1}{\omega_i^2}s^2\right)}$$

QUALUNQUE FUNZIONE RAZIONALE FRATTA PUÒ ESSERE SCRITTA COSÌ.

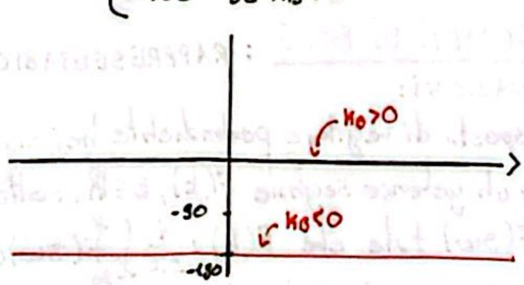
TERMINE MONOMIO — TERMINE BINOMIO — TERMINE TRINOMIO

①: GUADAGNO DI BODE $k_B \in \mathbb{R}$:

MODULO: $20\log_{10}|k_B|$



FASE: $\begin{cases} 0 & \text{se } k_B > 0 \\ -180° & \text{se } k_B < 0 \end{cases}$



②: TERMINE MONOMIO $\frac{1}{s^g}$

MODULO: $20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^g}\right|$

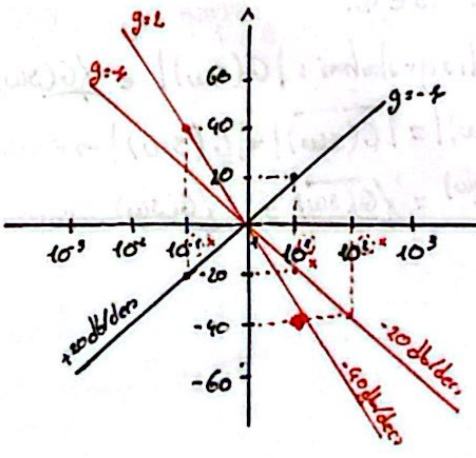
$\omega > 0$

$\Rightarrow 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^g}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{|j\omega|^g} = 20\log_{10}\frac{1}{\omega^g} =$

$= -20\log_{10}\omega^g = -20g\underbrace{\log_{10}\omega}_{x} \Rightarrow y = -20gx$

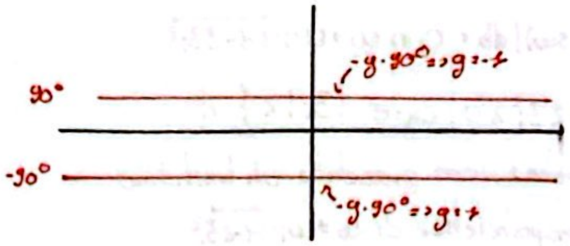
VEDO LA X COME ESPONENTE DI 10

RETTA DI PENDENZA $[-20g \text{ db/dec}]$



FASE:

$$\measuredangle \frac{1}{(j\omega)^g} = -\measuredangle (j\omega)^g = -g \measuredangle j\omega = \left[-g \cdot 90^\circ\right]$$



③: TERMINE BINOMIO:

MODULO:

$$|T(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}|1+j\omega\tau| = 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

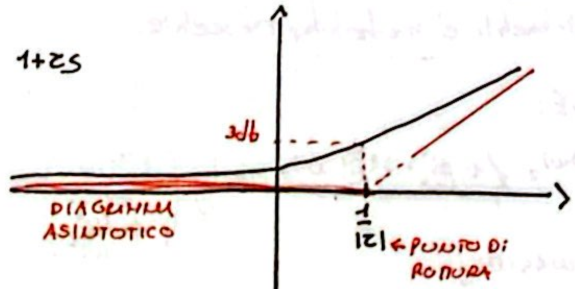
$[\text{se } \omega^2\tau^2 \ll 1]$ cioè $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$

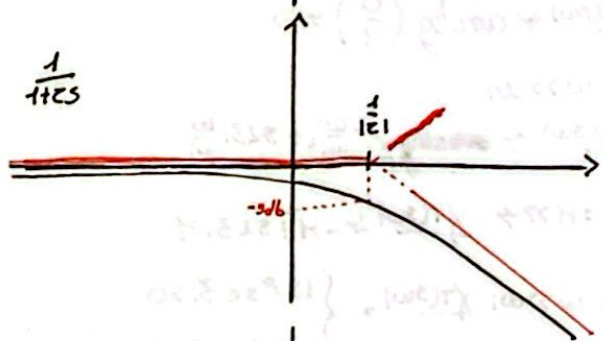
$$\Rightarrow |T(j\omega)|_{db} \simeq 20\log_{10}\sqrt{1} = 0\,db$$

$[\text{se } \omega^2\tau^2 \gg 1]$, cioè $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$

$$|T(j\omega)|_{db} \simeq 20\log_{10}\sqrt{\omega^2\tau^2} = 20\log_{10}\omega|\tau| =$$

$$= \left[\underbrace{20\log_{10}\omega}_{x} + 20\log_{10}|\tau|\right]$$



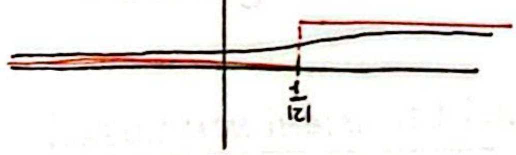


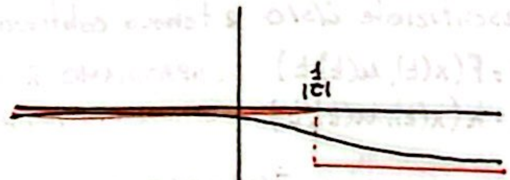
FASE:

$$\measuredangle T(j\omega) = \text{arctg}(\omega\tau)$$

$\left[\omega \ll \frac{1}{|\tau|}\right]$, $\measuredangle T(j\omega) \simeq 0$

$$\left[\text{se } \omega \gg \frac{1}{|\tau|}\right] \measuredangle T(j\omega) = \begin{cases} 90^\circ \text{ se } \tau > 0 \\ -90^\circ \text{ se } \tau < 0 \end{cases}$$





④: TERMINE TRINOMIO:

$$T(s) = 1 + 2\frac{\zeta_i s}{\omega_i} + \frac{1}{\omega_i^2}s^2$$

$\omega_i \to$ PULSAZIONE NATURALE

$\zeta_i \to$ SMORZAMENTO

MODULO:

$$T(j\omega) = 1 + 2\frac{\zeta_i}{\omega_i}j\omega + \frac{1}{\omega_i^2}(j\omega)^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j2\frac{\zeta_i}{\omega_i}\omega$$

$$|T(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \left(j2\frac{\zeta_i}{\omega_i}\omega\right)^2}$$

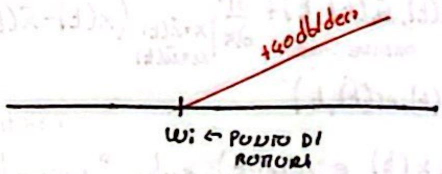
$[\text{se } \omega \ll \omega_i]$

$$|T(j\omega)|_{db} \simeq 20\log_{10}\sqrt{1+0} = 0$$

$[\text{se } \omega \gg \omega_i]$

$$|T(j\omega)|_{db} \simeq 20\log_{10}\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_i^4}} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2 = 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) =$$

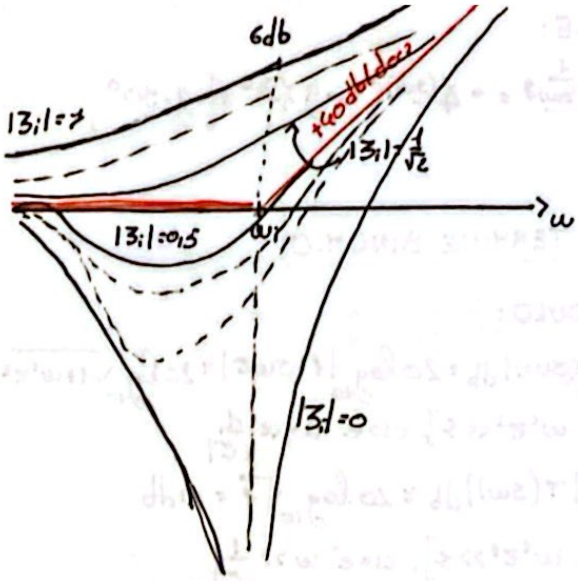
$$= \left[40\underbrace{\log_{10}\omega}_{x} - 40\log_{10}\omega_i\right] \Rightarrow y = 40x + k$$



SE IL TERMINE TRINOMIO STA AL DENOMINATORE SI RIBALTA E VIENE UNA RETTA DI PENDENZA -40 db/dec.

$\frac{d}{d\omega}|T(j\omega)|_{db} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_i\sqrt{1-2\zeta_i^2}$

se $1-2\zeta_i^2 \geq 0$, cioè $|\zeta_i| < \frac{1}{2}$ il diagramma vero presenta un minimo in corrispondenza di $\omega = \omega_i\sqrt{1-2\zeta_i^2}$ (altrimenti è monotono crescente.



FASE:

$$\angle T(j\omega) = \angle 1-\frac{\omega^2}{\omega_i^2}+j2\frac{\zeta_i}{\omega_i}\omega = arctg\left(\frac{\frac{2\zeta_i\omega}{\omega_i}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_i^2}}\right)$$

[se $\omega \ll \omega_i$]

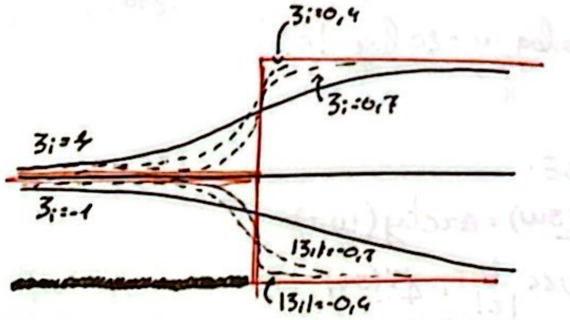
$$\angle T(j\omega) \simeq arctg\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

se $\omega \gg \omega_i$

$$\angle T(j\omega) \simeq \cancel{arctg}\ \angle -\frac{\omega^2}{\omega_i^2}+j2\zeta_i\frac{\omega}{\omega_i}$$

$$\frac{\omega}{\omega_i} = M \gg 1 \quad \angle T(j\omega) \simeq -M^2 + j2\zeta_i M$$

se $\omega \gg \omega_i$ $\angle T(j\omega) = \begin{cases} 180° \text{ se } \zeta_i>0 \\ -180° \text{ se } \zeta_i<0 \end{cases}$



QUANDO LO SMORZAMENTO È NULLO IL DIAGRAMMA COINCIDE CON QUELLO ASINTOTICO

ANALISI DEI SISTEMI NON LINEARI

(Rappresentazione i/s/o a tempo continuo)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

SUPPONIAMO $\bar{x}(0), \bar{u}(t)$ NOTI E SIANO $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ PER $t \geq 0$ LE RISPOSTE TOTALI NELLO STATO E NELL'USCITA CORRISPONDENTI

questo significa che: $\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$
$\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$

DEFINIAMO LE VARIABILI DI "SCOSTAMENTO": $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$
$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$
$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$

RAPPRESENTAZIONE i/s/o CON INGRESSO Δu, USCITA Δy e stato Δx:

$$\Delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = F(x(t), u(t), t) - F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) =$$ SVILUPPO F NELL'INTORNO DI $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$

$$= \underbrace{\cancel{F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}}_{\text{ORDINE ZERO}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}}(x(t)-\bar{x}(t)) + \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}}(u(t)-\bar{u}(t))}_{\text{TERMINI DEL PRIMO ORDINE}} + O\left(\left\|\begin{matrix}x(t)-\bar{x}(t)\\u(t)-\bar{u}(t)\end{matrix}\right\|^2\right)$$

$$- \cancel{F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}$$

se $\Delta x(t)$ e $\Delta u(t)$ sono "piccoli"

$$\Delta\dot{x}(t) \underset{\substack{\text{TRASCURO}\\O(\|\cdot\|^2)}}{\cong} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}}}_{A(t)} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\substack{u=\bar{u}(t)\\x=\bar{x}(t)}}}_{B(t)} \Delta u(t)$$

Sistema linearizzato nell'intorno di $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$

$$\left[\Delta\dot{x}(t) = A(t)\cdot\Delta x(t) + B(t)\cdot\Delta u(t)\right] \text{ LTV}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}} = A(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t) = h(x(t),u(t),t) - h(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t) =$$

$$= \ldots = \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}}}_{C(t)} \Delta x(t) + \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}}}_{D(t)} \Delta u(t)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\u=\bar{u}(t)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$\left[\Delta y(t) \cong C(t)\cdot\Delta x(t) + D(t)\cdot\Delta u(t)\right]$$

EQUAZIONE D'USCITA DEL SISTEMA LINEARIZZATO NELL'INTORNO $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$

Per i sistemi a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k),u(k),k) \\ y(k) = h(x(k),u(k),k) \end{cases}$$

SI OTTIENE ANALOGAMENTE, RISPETTO AD UNA SOLUZIONE $\bar{x}(k), \bar{u}(k)$

$$\left[\Delta x(k+1) \cong A(k)\Delta x(k) + B(k)\Delta u(k)\right]$$

$$\left[\Delta y(k) \cong C(k)\Delta x(k) + D(k)\Delta u(k)\right]$$

CON LE STESSE ESPRESSIONI PER $A(k), B(k), C(k), D(k)$

UNA PARTICOLARE SOLUZIONE: GLI STATI DI EQUILIBRIO

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice stato di equilibrio per un sistema dinamico se:

$$\left[x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq 0\right]$$

SE AD UN CERTO ISTANTE MI TROVO IN $\bar{x}$ DEVO RIMANERE IN $\bar{x}$ ANCHE AGLI ISTANTI SUCCESSIVI

(Calcolo degli stati di equilibrio)

SISTEMA TEMPO INVARIANTE A TEMPO CONTINUO:

$\dot{x}(t) = F(x(t),u(t))$, sia $u(t) = \bar{u} \;\forall t \Rightarrow \left[\dot{\bar{x}}(t) = 0 = F(\bar{u},\bar{x})\right]$

Gli stati di equilibrio $\bar{x}$, relativi all'ingresso $\bar{u}$ sono tutte e sole le soluzioni di $\left[F(\bar{x},\bar{u}) = 0\right]$

SISTEMA TEMPO INVARIANTE A TEMPO DISCRETO:

$x(k+1) = F(x(k),u(k))$, $u(k) = \bar{u} \;\forall k$, $x(k) = \bar{x} \;\forall k \geq 0 \Rightarrow \left[\bar{x} = F(\bar{x},\bar{u})\right]$

Gli stati di equilibrio $\bar{x}$ relativi all'ingresso $\bar{u}$ sono tutte e sole le soluzioni di $\left[F(\bar{x},\bar{u}) - \bar{x} = 0\right]$

OSS: i sistemi linearizzati nell'intorno degli stati di equilibrio sono tempo-invarianti.

STABILITÀ

$\bar{x}$: stato di equilibrio t.c: $\dot{x}(t) = F(x(t),u(t))$ $\quad u(t) = \bar{u} \;\forall t$

$$\dot{x}(t) = \tilde{F}(x(t),\bar{u}) = \tilde{F}(x(t))$$

$\Rightarrow \bar{x}: \left[\tilde{F}(\bar{x}) = 0\right] \Rightarrow x(t) = \bar{x} \;\forall t$

STATO DI EQUILIBRIO STABILE: Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice STABILE se:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0: \text{ se } \left[\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \;\forall t \geq 0\right]$$

STATO DI EQUILIBRIO CONVERGENTE: Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice CONVERGENTE se:

$$\exists \delta > 0 : \text{ se } \left[\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \text{ allora } \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \right]$$

Se uno stato di equilibrio $\bar{x}$ è sia STABILE che CONVERGENTE si dice $\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE.

OSSERVAZIONI:

* Se $\bar{x}$ non è stabile, si dice INSTABILE
* Se $\bar{x}$ è stabile ma non convergente si dice MARGINALMENTE STABILE
* esistono stati di equilibrio convergenti, ma instabili

Uno stato di equilibrio si dice GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE (GAS) se:

$$\left[\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \ \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \right]$$

CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio del sistema: $\dot{x}(t) = F(x(t))$ e sia $A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

RISULTATO:

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A

1) Se $\left[\mathrm{Re}[\lambda_i] < 0 \ \forall i = 1, \dots, n \right]$ allora $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE per il sistema non lineare di partenza $\dot{x}(t) = F(x(t))$

2) Se $\exists \lambda_s$ tale che $\left[\mathrm{Re}[\lambda_s] > 0 \right]$, allora $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio INSTABILE per il sistema non lineare di partenza $\dot{x}(t) = F(x(t))$

NEGLI ALTRI CASI NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA.

PER I SISTEMI A TEMPO DISCRETO:

* Sia $A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$ ($\bar{x}$ stato di equilibrio per il sistema $x(k+1) = F(x(k))$)

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A

1) $\bar{x}$ è stato di equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE se $|\lambda_i| < 1 \ \forall i = 1, \dots, n$

2) $\bar{x}$ è stato di equilibrio INSTABILE se $\exists \lambda_s$ tale che $|\lambda_s| > 1$

STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI

SISTEMA AUTONOMO A TEMPO CONTINUO:

$\dot{x}(t) = \underbrace{A \cdot x(t)}_{F(x(t))}$

stati di equilibrio: $\bar{x}$ t.c $\left[A\bar{x} = 0 \right]$

* Se $\det A \neq 0$ $\bar{x} = 0$ è l'unico stato di equilibrio
* Se $\det A = 0$ $\exists$ infiniti stati di equilibrio $\bar{x} \in \ker(A)$

$\uparrow$ SOTTOSPAZIO

SISTEMA AUTONOMO A TEMPO DISCRETO:

$x(k+1) = \underbrace{A\,x(k)}_{F(x(k))}$

stati di equilibrio: $\bar{x}$ t.c $\left[A\bar{x} = \bar{x} \right]$

$\Rightarrow I\bar{x} - A\bar{x} = 0 \Rightarrow \left[(I - A)\bar{x} = 0 \right]$

* Se $\det(I - A) \neq 0$, $\bar{x} = 0$ è l'unico stato di equilibrio
* Se $\det(I - A) = 0$ $\exists$ infiniti stati di equilibrio $\bar{x} \in \ker(I - A)$

$\uparrow$ SOTTOSPAZIO

(studio della stabilità)

T.C: $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$

T.D: $x(k) = A^k \cdot x(0)$

COMBINAZIONE LINEARE DEI MODI

$\| e^{At} \cdot x(0) \| < \varepsilon$

STABILITÀ: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c $\|x(0) - 0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - 0\| < \varepsilon$

* Se tutti i modi sono convergenti, $\bar{x} = 0$ è ASINTOTICAMENTE STABILE
* Se i modi sono convergenti oppure limitati non convergenti $\bar{x} = 0$ è MARGINALMENTE STABILE
* Se è presente un modo divergente, $\bar{x} = 0$ è INSTABILE
* Se ci sono infiniti stati di equilibrio, essi non possono essere tutti asintoticamente stabili. Saranno marginalmente stabili o instabili, allo stesso modo di $\bar{x} = 0$

[IN TERMINI DI AUTOVALORI]

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ autovalori di A:

PER SISTEMI A TEMPO CONTINUO:

* ASINTOTICAMENTE STABILE se $Re[\lambda_i] < 0 \; \forall i = 1, \dots, m$
* MARGINALMENTE STABILE se $Re[\lambda_i] \leq 0 \; \forall i = 1, \dots, m$ e se $Re[\lambda_i] = 0$ allora $m.a(\lambda_i) = m.g(\lambda_i)$
* INSTABILE NEGLI ALTRI CASI

SISTEMI A TEMPO DISCRETO:

* ASINTOTICAMENTE STABILE se $|\lambda_i| < 1 \; \forall i = 1, \dots, m$
* MARGINALMENTE STABILE se $|\lambda_i| \leq 1 \; \forall i = 1, \dots, m$ e se $|\lambda_i| = 1$ allora $m.a(\lambda_i) = m.g(\lambda_i)$
* INSTABILE NEGLI ALTRI CASI

(PROPRIETÀ DEI SISTEMI LINEARI)

* Nei sistemi autonomi $\bar{x} = 0$ è sempre stato di equilibrio
* Il sistema può essere ASINTOTICAMENTE STABILE solo se $\bar{x} = 0$ è l'unico stato di equilibrio
* se $\bar{x} = 0$ è stato di equilibrio convergente, allora è anche stabile e quindi ASINTOTICAMENTE STABILE

SISTEMI NON AUTONOMI

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad u(t) = \bar{u} \; \forall t$

stati di equilibrio: $\bar{x}$ t.c $[A\bar{x} + B\bar{u} = 0] \Rightarrow A\bar{x} = -B\bar{u}$

* Se $\det(A) \neq 0$, $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ è l'unico stato di equilibrio
* Se $\det(A) = 0$ → [$\exists$ infinite soluzioni se $-B\bar{u} \in Im(A)$] → [nessuna soluzione se $-B\bar{u} \notin Im(A)$]

STABILITÀ ILUL (ingresso limitato uscita limitata)

STABILITÀ INTERNA → i/s/o

STABILITÀ ESTERNA → i/o

Un sistema dinamico è stabile in senso ILUL se:

$[\forall \upsilon > 0 \; \exists \gamma > 0 : \text{se } \|u(t)\| \leq \upsilon \; \forall t \geq 0 \Rightarrow \|y(t)\| \leq \gamma \; \forall t \geq 0]$

[Un sistema LTI a tempo continuo (discreto) è ILUL stabile se e solo se $G(s)$ ha tutti i poli a (parte reale negativa) → (modulo < 1)]

MOTIVO: Se $G(s)$ ha poli a parte reale nulla scegliendo $u(t)$ uguale al modo corrispondente si ottiene una risposta illimitata (RISONANZA)

[ASINTOTICA STABILITÀ INTERNA $\Rightarrow$ ILUL STABILITÀ] ($\not\Leftarrow$)

PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI

(RAGGIUNGIBILITÀ)

SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

Problema: siano $x(0) = x_{in}$ e $x(T) = x_{fin}$ dati, esiste una sequenza di ingressi $u(0), \dots, u(T-1)$ in grado di portare lo stato del sistema da x_{in} a x_{fin} in T passi?

DALLA RISPOSTA TOTALE NELLO STATO: $x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{x_L(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(k)}_{x_F(k)}$

$x(T) = x_{fin} = A^T x_{in} + \sum_{i=0}^{T-1} A^{T-1-i} Bu(i) = x_{fin} - A^T x_{in} = \sum_{i=0}^{T-1} A^{T-1-i} Bu(i) =$

SEQUENZA DI INGRESSO

$= A^{T-1}Bu(0) + A^{T-2}Bu(1) + \dots + Bu(T-1) \Rightarrow \left[x_{fin} - A^T x_{in} = \underbrace{[B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{T-1}B]}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \right]$

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ IN k PASSI

IL PROBLEMA DEL CONTROLLO AMMETTE SOLUZIONE se e solo se: $\left[x_{fin} - A^T x_{in} \in Im(\mathcal{R}) \right]$

L'insieme degli stati raggiungibili è il sottospazio $\left[X_k^{\mathcal{R}} = Im(\mathcal{R}) \right]$

SOTTOSPAZIO RAGGIUNGIBILE IN k PASSI

STATO RAGGIUNGIBILE: Uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ si dice RAGGIUNGIBILE in k passi (dallo stato zero) se esiste una sequenza $u(0), \dots, u(T-1)$ tale che $x(k) = \bar{x}$ partendo da $x(0) = 0$

Se $\left[\exists \bar{k} : X_{\bar{k}}^{\mathcal{R}} = \mathbb{R}^m \right]$ il sistema si dice COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE in k passi.

TEOREMA DI CALEY-HAMILTON

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e sia $P(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico $= \det(\lambda I - A)$

$\Rightarrow \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \alpha_{m-2}\lambda^{m-2} + \dots + \alpha_0 \Rightarrow A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \alpha_{m-2}A^{m-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ allora:

A è radice del suo stesso polinomio caratteristico

$A^m B + \alpha_{m-1}A^{m-1}B + \dots + \alpha_0 B = 0$

$A^m B = -\alpha_{m-1}A^{m-1}B - \dots - \alpha_0 B$

$\mathcal{R}_m = [B \; AB \dots A^{m-1}B]$

$\mathcal{R}_{m+1} = [B \; AB \dots A^{m-1}B \; \underbrace{A^m B}_{\mathcal{L}(B\,AB\dots A^{m-1}B)}]$ è COMBINAZIONE LINEARE

$\Rightarrow Im(\mathcal{R}_{m+1}) = Im(\mathcal{R}_m) \Rightarrow X_{m+1}^{\mathcal{R}} = X_m^{\mathcal{R}}$

Se il sistema non è ~~raggiungibile~~ completamente raggiungibile in m passi non lo sarà nemmeno in n+h passi $\forall h > 0$.

$\Rightarrow$ Un sistema è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE se e solo se $\left(Im(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^m \right)$ cioè $\left(\text{rank}(\mathcal{R}) = m \right)$

$r = \dim(Im(\mathcal{R})) \Rightarrow$ INDICE DI RAGGIUNGIBILITÀ DEL SISTEMA

se $x(0) \neq 0$? $\Rightarrow$ possiamo arrivare in $\bar{x}$ in k passi se $\left[\bar{x} - A^k x(0) \in Im(\mathcal{R}_k) \right]$

$\left[\bar{x} \in A^k x(0) + Im(\mathcal{R}_k) \right]$ SOTTOSPAZIO AFFINE

SE IL SISTEMA È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE VADO DAPPERTUTTO LO STESSO DA QUALSIASI POSIZIONE INIZIALE, SE IL SISTEMA NON È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE VADO IN UN SOTTOSPAZIO AFFINE CHE DIPENDE DAL NUMERO DEI PASSI

CALCOLO DELLA SEQUENZA DI INGRESSO

$$\Big[\underbrace{\mathcal{R}_T}_{m \times mT}\underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{mT \times 1} = \underbrace{x_{fin} - A^T x_{in}}_{v \in \mathbb{R}^n}\Big] \quad \nwarrow u_T$$

[CASO PARTICOLARE]: $m=1, T=n \to \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

se $\text{rank}(\mathcal{R}) = n \to [\mathcal{R}\, u_n = v]$ ammette unica soluzione $[u = \mathcal{R}^{-1} v]$

[CASO GENERALE]: $mT > n$

$\mathcal{R}_T u_T = v$ — n equazioni, mT incognite — IPOTESI: $\text{rank}(\mathcal{R}_T) = n$ → SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$\Rightarrow [\infty^{mT-n}$ SOLUZIONI$]$

$[u_T = \bar{u} + u_{om}]$ dove $\bar{u}$ è una soluzione particolare $(\mathcal{R}_T \bar{u} = v)$

u_{om} è una soluzione del sistema omogeneo $(\mathcal{R}_T u_{om} = 0)$ — $\in \ker(\mathcal{R}_T)$

Scegliamo una soluzione particolare che abbia forma:

$\bar{u} = \underbrace{\mathcal{R}_T'}_{mT \times n} \cdot \eta \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{R}_T \bar{u} = v \Rightarrow \underbrace{\mathcal{R}_T \cdot \mathcal{R}_T'}_{n \times n} \cdot \eta = v$ — TRASPOSTO — $\text{rank}(\mathcal{R}_T) = n$, $\det(\mathcal{R}_T \cdot \mathcal{R}_T') \neq 0$

$\Rightarrow \eta = (\mathcal{R}_T \cdot \mathcal{R}_T')^{-1} v$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE PARTICOLARE $\bar{u} = \mathcal{R}_T' (\mathcal{R}_T \cdot \mathcal{R}_T')^{-1} v$

Le sequenze di ingresso u_T che risolvono il problema del controllo in T passi sono:

$$\left[\begin{array}{l} u_T = \mathcal{R}_T' \cdot (\mathcal{R}_T \cdot \mathcal{R}_T')^{-1} \underbrace{(x_{fin} - A^T x_{in})}_{v} + u_{om} \\ \text{dove } u_{om} \in \ker(\mathcal{R}_T) \end{array}\right] !!$$

PROBLEMA DEL CONTROLLO A MINIMA ENERGIA

Determinare la sequenza $u(0), \dots, u(T-1)$ che sia in grado di portare lo stato da x_{in} a x_{fin} in T passi, in modo che sia minima l'energia del segnale di controllo, ovvero $\left[\sum_{i=0}^{T-1} \|u(i)\|^2 = u_T' \cdot u_T\right]$ PROBLEMA: minimizzare $u_T' u_T$ soggetto a:

$u_T = \bar{u} + u_{om}$, $u_{om} \in \ker(\mathcal{R}_T)$

$u_T' \cdot u_T = (\bar{u} + u_{om})'(\bar{u} + u_{om}) = \bar{u}'\bar{u} + \overset{=0}{u_{om}'\bar{u}} + \overset{=0}{\bar{u}' u_{om}} + u_{om}' u_{om}$

$\bar{u}' u_{om} = v'(\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T')^{-1} \mathcal{R}_T \cdot u_{om} = 0$ — SICCOME $u_{om} \in \ker(\mathcal{R}_T) \Rightarrow \mathcal{R}_T \cdot u_{om} = 0$ — $u_{om}'\bar{u} = (\bar{u}' u_{om})' = 0$

$\Rightarrow u_T' u_T = \|\bar{u}\|^2 + \|u_{om}\|^2$ DOBBIAMO SCEGLIERE UN $u_{om} \in \ker(\mathcal{R}_T)$ IN MODO CHE SIA PIÙ PICCOLO POSSIBILE $\Rightarrow u_{om} = 0$

$$\Rightarrow \left[u_T = \bar{u} = \mathcal{R}_T' (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T')^{-1} (x_{fin} - A^T x_{in})\right]$$

SEQUENZA A MINIMA ENERGIA

SISTEMI ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI

Due sistemi LTI descritti dalle rappresentazioni i/s/o (A_1, B_1, C_1, D_1) e (A_2, B_2, C_2, D_2) si dicono ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI se $\exists T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tale che $\det T \neq 0$:

$$\begin{cases} A_2 = T^{-1} A_1 T \\ B_2 = T^{-1} B_1 \\ C_2 = C_1 T \\ D_2 = D_1 \end{cases}$$

Sia x_1 lo stato del primo sistema, cioè:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u(t) \end{cases}$$

definiamo $\dot{x}_2(t) = T^{-1} \dot{x}_1(t) = T^{-1}(A_1 x_1(t) + B_1 u(t)) = \overbrace{T^{-1} A_1 T}^{A_2} \underbrace{x_2(t)}_{x_1(t)} + \overbrace{T^{-1} B_1}^{B_2} u(t)$

cioè $x_1(t) = T x_2(t)$

$y(t) = \underbrace{C_1 T}_{C_2} x_2(t) + \underbrace{D_1}_{D_2} u(t)$

RISULTATO: LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DEI DUE SISTEMI COINCIDONO.

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITÀ:

IPOTESI: Sia dato un sistema di ordine m NON completamente raggiungibile

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}) = \operatorname{rank}[B \; AB \dots A^{m-1}B] = r < m$$

Sia $T_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$ una matrice le cui colonne sono una base dello spazio raggiungibile cioè $X^{\mathcal{R}} = \operatorname{Im}(\mathcal{R})$

Definiamo una matrice $T = [\underbrace{T_r}_{m \times r} \mid \underbrace{T_{\bar r}}_{m \times (m-r)}]$ in modo che $\det(T) \neq 0$

AGGIUNGO LE M-R COLONNE IN MODO DA COMPLETARE LA BASE DI $\mathbb{R}^m$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} U_r \\ \hline U_{\bar r} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \cdot m \\ \}(m-r) \times m \end{matrix}$$

$$T^{-1} T = \begin{bmatrix} U_r \\ \hline U_{\bar r} \end{bmatrix} [T_r \mid T_{\bar r}] = \begin{bmatrix} U_r T_r & U_r T_{\bar r} \\ U_{\bar r} T_r & U_{\bar r} T_{\bar r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Definiamo ora il cambiamento di base $\boxed{\bar{x}(k) = T^{-1} x(k)}$

Nella nuova base il sistema diventa:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \underbrace{T^{-1} A T}_{\bar A} \bar{x}(k) + \underbrace{T^{-1} B}_{\bar B} u(k) \\ y(k) = \underbrace{C T}_{\bar C} \bar{x}(k) + D u(k) \end{cases}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} U_r \\ \hline U_{\bar r} \end{bmatrix} A [T_r \mid T_{\bar r}] = \begin{bmatrix} U_r A T_r & U_r A T_{\bar r} \\ U_{\bar r} A T_r & U_{\bar r} A T_{\bar r} \end{bmatrix}$$

$T_r \in \operatorname{Im}(\mathcal{R}) \Rightarrow$ per cayley-hamilton anche $A \cdot T_r \in \operatorname{Im}(\mathcal{R}) \Rightarrow \boxed{U_{\bar r} A T_r = 0}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar r} \\ 0 & A_{\bar r} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} U_r \\ \hline U_{\bar r} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} U_r B \\ \hline U_{\bar r} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

partizioniamo il vettore di stato $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar r}(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}m-r \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} x_r(k+1) \\ x_{\bar r}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar r} \\ 0 & A_{\bar r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar r}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar r} x_{\bar r}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar r}(k+1) = A_{\bar r} x_{\bar r}(k) \end{cases}$$

$\rightarrow$ PARTE NON RAGGIUNGIBILE DAL SISTEMA PERCHÉ NON È INFLUENZATO NÉ DALL'INGRESSO NÉ DA $x_r(k)$.

$\bar A = T^{-1} A T$

$$\{\text{Autovalori di } A\} = \underbrace{\{\text{Autovalori } A_r\}}_{\text{PARTE RAGGIUNGIBILE}} \cup \underbrace{\{\text{Autovalori di } A_{\bar r}\}}_{\text{PARTE NON RAGGIUNGIBILE}}$$

(Funzione di trasferimento)

$$G(z) = \bar C (zI - \bar A)^{-1} \bar B + \bar D = [C_r \mid C_{\bar r}] \begin{bmatrix} zI - A_r & -A_{r\bar r} \\ 0 & zI - A_{\bar r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [C_r \mid C_{\bar r}] \begin{bmatrix} (zI - A_r)^{-1} & * \\ 0 & (zI - A_{\bar r})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} + D = [C_r \mid C_{\bar r}] \begin{bmatrix} (zI - A_r)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + D = C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D =$$

$$= \frac{m(z)}{\det(zI - A_r)}$$

I POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SONO GLI AUTOVALORI DELLA PARTE OSSERVABILE.

CONTROLLO IN RETROAZIONE DELLO STATO

$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$

Supponiamo di avere accesso allo stato $x(k)$ ad ogni istante k, scegliamo il segnale di ingresso $u(k)$ come:

$$\boxed{u(k) = F \cdot x(k) + \underbrace{r(k)}_{\text{SEGNALE DI RIFERIMENTO}}}$$

$x(k+1) = A x(k) + B(F x(k) + r(k)) = A x(k) + BF x(k) + B r(k)$

$\Rightarrow \boxed{(A + BF) x(k) + B r(k)}$ LA RETROAZIONE DELLO STATO MODIFICA LA DINAMICA DEL SISTEMA

$\underbrace{A}_{n\times n} + \underbrace{\overbrace{B}^{n\times m} F}_{m\times n}$ $m \cdot n$ gradi di libertà

RISULTATO: Se il sistema di partenza (la coppia (A, B)) è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE è possibile fare l'allocazione degli autovalori cioè: $\forall$ insieme di autovalori $\{\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \dots, \bar\lambda_n\}$ esiste $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ t.c $\det(\lambda I - A - BF) = (\lambda - \bar\lambda_1)(\lambda - \bar\lambda_2) \dots (\lambda - \bar\lambda_n)$ scelti da me

$\Rightarrow$ se il sistema NON È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE, possiamo scriverlo nella decomposizione di raggiungibilità:

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar r} x_{\bar r}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar r}(k+1) = A_{\bar r} x_{\bar r}(k) \end{cases}$$

$u(k) = F x(k) + r(k)$

$\bar x(k) = T^{-1} x(k) \Rightarrow x(k) = T \bar x(k) = T \begin{bmatrix} x_r \\ x_{\bar r} \end{bmatrix}$

$u(k) = F T \bar x(k) + r(k) = [\bar F_r \mid \bar F_{\bar r}] \begin{bmatrix} x_r \\ x_{\bar r} \end{bmatrix} + r(k)$

$\Rightarrow \bar F_r x_r(k) + \bar F_{\bar r} x_{\bar r}(k) + r(k)$

$$X_r(k+1) = A_r X_r(k) + A_{r\bar{r}} X_{\bar{r}}(k) + B_r \big(\underbrace{\bar{F}_r X_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} X_{\bar{r}}(k) + r(k)}_{u(k)}\big) =$$

$$\begin{cases} = (A_r + B_r \bar{F}_r) X_r(k) + (A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}}) X_{\bar{r}}(k) + B_r r(k) \\ X_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} X_{\bar{r}}(k) \end{cases}$$

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \left[\begin{array}{c|c} A_r + B_r \bar{F}_r & A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right]$$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE NON VENGONO MODIFICATI

RISULTATO: MEDIANTE LA RETROAZIONE DELLO STATO È POSSIBILE ALLOCARE SOLO GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE. GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE NON SONO MODIFICATI.

STABILIZZABILE: Un sistema si dice stabilizzabile se può essere reso asintoticamente stabile mediante la retroazione dello stato.

ovvero che gli autovalori della parte non raggiungibile diano vita a modi convergenti

RISULTATO: un sistema LTI è stabilizzabile se e solo se gli autovalori della parte non raggiungibile danno vita a modi convergenti

Se un sistema è completamente raggiungibile allora è anche stabilizzabile. viceversa non vero

OSSERVABILITÀ

$x(k+1) = A x(k)$
$y(k) = C x(k)$

SISTEMA AUTONOMO

$x(0)$ CONDIZIONE INIZIALE

Uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ si dice NON OSSERVABILE (o indistinguibile dallo stato zero) in k passi se la condizione iniziale $x(0) = \bar{x}$ genera la risposta libera nell'uscita:

$$y(0) = y(1) = y(2) = \ldots = y(k-1) = 0$$

(Calcolo degli stati non osservabili in k passi)

$x_\ell(k) = A^k x(0) = A^k \bar{x}$
$y_\ell(k) = C A^k x(0) = C A^k \bar{x}$

$y(0) = C\bar{x} = 0$
$y(1) = CA\bar{x} = 0$
$\vdots$
$y(k-1) = CA^{k-1}\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \bar{x} = 0$$

MATRICE DI OSSERVABILITÀ IN K PASSI

SOTTOSPAZIO NON OSSERVABILE

$$\left[X_k^{no} = \ker \mathcal{O}_k \right]$$

Se $\exists \bar{k} : \text{rank}\, \mathcal{O}_{\bar{k}} = m \Rightarrow X_{\bar{k}}^{no} = \{0\} \Rightarrow$ IL SISTEMA SI DICE COMPLETAMENTE OSSERVABILE IN K PASSI

TEO CALEY-HAMILTON ⇒ Sia m l'ordine del sistema, se il sistema non è osservabile in m passi, non lo sarà nemmeno in m+h passi.

SE IL SISTEMA NON È COMPLETAMENTE OSSERVABILE, IL PROBLEMA DELLA RICOSTRUZIONE DELLO STATO AMMETTE SEMPRE INFINITE SOLUZIONI.

(RIC)OSTRUZIONE DELLO STATO INIZIALE IN k PASSI

(D)eterminare il valore di $\bar{x}$ a partire dall'osservazione delle uscite $y(0), \dots, y(k-1)$:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x(0) = \mathcal{O} \cdot x(0)$$

• AMMETTE UNICA SOLUZIONE SE $\mathrm{rank}\,\mathcal{O} = n$

• SE $\mathrm{rank}\,\mathcal{O} < n \Rightarrow \infty^{n-\sigma}$ SOLUZIONI

$$\Big[x(0) = \underbrace{\bar{x}}_{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE}} + x_{no}\Big] \quad x_{no} \in \ker\mathcal{O} = \mathcal{X}^{NO}$$

se è presente l'ingresso:

$$\Big[y(k) - y_F(k) = CA^k x(0)\Big] \Rightarrow \begin{bmatrix} y(0) - y_F(0) \\ y(1) - y_F(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - y_F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

y_F: RISPOSTA FORZATA

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITÀ

Sia dato un sistema LTI a tempo discreto tale che: $\mathrm{rank}\,\mathcal{O} = \sigma < n$, $\dim(\ker\mathcal{O}) = n - \sigma$

Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-\sigma}\} \in \mathbb{R}^n$ una base di $\mathcal{X}^{no} = \ker\mathcal{O}$

costruiamo la matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$T = [\underbrace{w_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, w_\sigma}_{\text{COMPLETO LA BASE DI } \mathbb{R}^n} \,|\, \underbrace{v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, v_{n-\sigma}}_{\text{BASE DEL SOTTOSPAZIO NON OSSERVABILE}}] = [T_o \,\vdots\, T_{\bar{o}}] \quad \det T \neq 0$$

$\Rightarrow \bar{A} = T^{-1}AT \quad \bar{B} = T^{-1}B \quad \bar{C} = CT \quad \bar{D} = D$

Procedendo come nella decomposizione di raggiungibilità si ottengono le seguenti strutture a blocchi:

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad C = CT = [C_o \,\vdots\, 0] \quad \bar{D} = D$$

Nella nuova base di $\mathbb{R}^n$ lo stato diventa: $\bar{x}(k) = T^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_o(k) \\ x_{\bar{o}}(k) \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u(k) \\ x_{\bar{o}}(k+1) = A_{o\bar{o}} x_o(k) + A_{\bar{o}} x_{\bar{o}}(k) + B_{\bar{o}} u(k) \\ y(k) = C_o x_o(k) + D u(k) \end{cases}$$

$\to$ È LO STATO DELLA PARTE NON OSSERVABILE DEL SISTEMA

$\{\text{Autovalori di } A\} = \{\underbrace{\text{Autovalori } A_o}_{\text{MODI PARTE OSSERVABILE}}\} \cup \{\text{Autovalori } A_{\bar{o}}\}$ ← MODI PARTE NON OSSERVABILE

$$G(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D = [C_o \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} (zI - A_o) & 0 \\ -A_{o\bar{o}} & (zI - A_{\bar{o}}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D =$$

$$= [C_o \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} (zI-A_o)^{-1} & 0 \\ * & (zI-A_{\bar{o}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D = C_o(zI-A_o)^{-1}B_o + D = \frac{m(z)}{\det(zI-A_o)}$$

Solo gli autovalori osservabili sono poli della funzione di trasferimento, quelli non osservabili si cancellano con altrettanti zeri.

RISULTATO: I POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SONO TUTTI E SOLI GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE ED OSSERVABILE DI A.

DUALITÀ

Sia Σ un sistema dinamico descritto dalle matrici A, B, C, D della rappresentazione i/s/o si definisce sistema DUALE, il sistema dinamico Σ_d la cui rappresentazione i/s/o è descritta dalle matrici A^T, B^T, C^T, D^T.

[Il sistema Σ è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE se e solo se Σ_d è COMPLETAMENTE OSSERVABILE]

$$\mathcal{O}_{\Sigma_d} = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = [B \; AB \ldots A^{n-1}B]^T$$

[ANALOGAMENTE Σ È COMPLETAMENTE OSSERVABILE SE E SOLO SE Σ_d È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE]

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

PROBLEMA: dato un sistema dinamico con vettore di stato $x(k)$, determinare agli istanti k una stima $\hat{x}(k)$ di $x(k)$, basata sulla osservazione degli ingressi $u(0), \ldots, u(k)$ e delle uscite $y(0), \ldots, y(k)$ tale che $\lim_{k \to +\infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\| = 0$

$[\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)]$ ERRORE DI STIMA DELLO STATO

1) OSSERVATORE AD ANELLO APERTO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$x(0)$ ignota $\quad [\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)]$ $\hat{x}(0)$ scelta da me

=> Analisi della dinamica di $\tilde{x}(k)$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - (A\hat{x}(k) + \cancel{Bu(k)}) = Ax(k) - A\hat{x}(k) =$$

$$= A(x(k) - \hat{x}(k)) = A\tilde{x}(k) \quad \Rightarrow [\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k)] \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

[L'osservatore ad anello aperto è un osservatore asintotico dello stato se e solo se il sistema di partenza è asintoticamente stabile.]

2) OSSERVATORE ASINTOTICO AD ANELLO CHIUSO:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \underbrace{L}_{n \times p}\underbrace{(y(k) - C\hat{x}(k))}_{\text{ERRORE DI STIMA DELL'USCITA}}$$